

## 第14章 几何光学

### 14.1 几何光学的基本实验定律和基本原理

以光的直线传播性质为基础,来研究光的传播和成像问题,这便是几何光学(geometrical optics).在几何光学中,把组成物体的物点(object point)看成是几何点,把它所发出的光束看成是无数几何光线的集合,而光线的方向就代表了光能的传播方向.于是,根据光线的传播规律,在研究物体被透镜或其他光学元件成像,以及设计光学仪器的光学系统等方面都显得十分方便和实用.实际上,由几何光学得出的结果仅仅是波动光学(wave optics)在某些条件下的近似或极限.

#### 14.1.1 几何光学的基本实验定律

几何光学是以下列三个实验定律为基础建立起来的:

##### 1. 光的直线传播定律

在均匀介质中,光沿直线传播,也可表述为:在均匀介质中,光线是一直线.可以说,光的直线传播是我们日常生活中司空见惯的现象.

##### 2. 光的反射和折射定律

当光在传播过程中入射到两种不同介质的分界面上时,一般分成两条光线.一条由界面返回到原介质中,称为反射光线(reflected ray).另一条由界面折入另一介质中,称为折射光线(refracted ray),如图 14-1 所示.关于这两条光线的行进方向,可分别由反射定律和折射定律来描述.

入射光线与分界面法线所构成的平面称为入射面;法线分别与入射线、反射线和折射线的夹角  $i_1$ 、 $i_1'$  和  $i_2$  依次称为入射角(incident

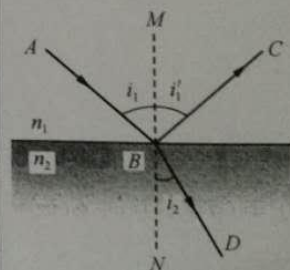


图 14-1 光的反射和折射

angle)、反射角(reflection angle)和折射角(refraction angle).

**反射定律** 反射光线、入射光线总是和法线处在同一平面(入射面)内,入射光线和反射光线分居于入射点界面法线的两侧,反射角等于入射角.即

$$i_1 = i_1' \quad (14-1)$$

**折射定律** 折射光线与入射光线和法线同处在一个平面上,入射光线和折射光线分居于法线两侧;入射角与折射角的正弦之比是一个取决于两介质光学性质及光的波长的常数,即

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{12} \quad (14-2)$$

式中,比例常数  $n_{12}$  称为第二种介质相对于第一种介质的折射率(refractive index). 上式是斯涅耳(W. Snell, 1591~1626)在实验时发现的,称为斯涅耳定律(Snell law).

任何介质相对于真空的折射率,称为介质的**绝对折射率**(absolute index of refraction),简称**折射率**(refractive index). 介质的折射率与光在这种介质中的传播速度的关系为

$$n = \frac{c}{v} \quad (14-3)$$

式中, $c$  为光在真空中的传播速率, $v$  为光在介质中的传播速率.

介质的折射率反映了光在介质中的传播特性. 两种介质相比较,折射率大的介质,光在其中速度小,叫**光密介质**(optically denser medium);折射率小的介质,光在其中速度大,叫**光疏介质**(optically thinner medium).

实验表明,两种介质的**相对折射率**(relative index of refraction)等于它们各自绝对折射率之比,即

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad (14-4)$$

因此,对斯涅耳定律还可以写成如下形式:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (14-5)$$

介质折射率不仅与介质种类有关,而且与光波波长有关. 在同一种介质中,长波的折射率小,短波的折射率大. 当一束白光入射到两种介质界面上,在折射时不同波长的光将分散开来形成光谱,这种现象称为**色散**(dispersion). 由于这已超出本书范围,所以在本节中折射率暂作常数处理.

### 3. 光的独立传播定律和光路可逆性原理

光在传播过程中与其他光线相遇时,不改变传播方向,各光线之



间互不影响,各自独立传播,而当两光线会聚于同一点时,在该点上的光能量是简单的相加.这就是光的独立传播定律.

从反射定律(reflection law)和折射定律(refraction law)公式的对称性不难看出:如果反射光或折射光的方向反转,光线将按原路返回.由于这种可逆性对于每一反射面和折射面都适用,甚至对于复杂的光路也适用.我们将这个带有普遍性的结论称为光路的可逆性(reversibility).

必须指出,上述实验定律成立的前提是:同一介质是均匀各向同性的,涉及的光强都不太大,而光学元件的线度  $D$  远远大于光波波长.

### 14.1.2 全反射

由折射定律可知,当入射角为零,光线垂直地投射到两种介质的分界面上时,进入另一种介质的光线并不改变原来的方向,折射将不发生.当折射角等于  $90^\circ$  时,相对应的人射角称为临界角(critical angle).当入射角大于临界角时,其光线不能透过界面进入另一种介质中,而是被全部反射回原介质中去(图 14-2),这种现象称为光的全反射(total reflection)现象.这种现象只会发生在光线从光密介质射向光疏介质的情况中,此时,  $n_2 < n_1$ ,  $i_2 = 90^\circ$ . 由折射定律可知,临界角为

$$i_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (14-6)$$

对于光线从  $n_1 = 1.5$  的玻璃入射到空气这种情况,其临界角  $i_c = 42^\circ$ ,而由水入射到空气的全反射临界角约为  $49^\circ$ .

全反射的应用很广,光导纤维就是利用全反射规律而使光线沿弯曲的路径传播的光学元件.一般光导纤维由直径约几微米的单根玻璃(或透明塑料)纤维组成,每根纤维外面包一层折射率低的玻璃介质,这样光线经过多次全反射后可沿着它从一端传到另一端,而光的能量损失非常小.

由于光导纤维柔软,不怕震,而且光导纤维弯曲时也能传播光和图像,所以目前在医学、国防和通信等许多领域都得到广泛应用.其中,最重要的应用之一是在医学领域内,应用内窥镜之类的仪器,使外科医生有可能深入到人体内部某一小范围,通过遥控进行观察和做手术.

### 14.1.3 费马原理

在均匀介质中,光是直线传播的.而当光入射到两种介质的分界

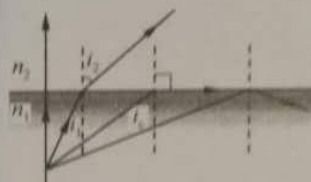


图 14-2 光的全反射

面时,将按反射定律和折射定律产生反射和折射,此时光的路径为折线.那么,在非均匀介质中,光从一点传播到另一点又是沿着怎样的路径传播的呢?

费马(Fermat, 1601~1665)指出:光线在空间两点之间传播,将沿着这样的一条路径,即光线沿这条路径传播所需要的时间同邻近的路径比起来,不是最大,便是最小或者保持不变(也就是说,所需要的时间是稳定的),这就是几何光学中的一个最普遍的基本原理,称为费马原理(Fermat principle).

设光在  $1, 2, \dots, k$  等均匀介质中传播的速度分别为  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , 在各介质中的几何路程分别为  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_k$ , 因此,光从介质 1 中的  $P$  点到介质  $k$  中的  $Q$  点(图 14-3)所需的时间  $\Delta t$  为

$$\Delta t = \frac{\Delta l_1}{v_1} + \frac{\Delta l_2}{v_2} + \dots + \frac{\Delta l_k}{v_k} = \sum_i \frac{\Delta l_i}{v_i}$$

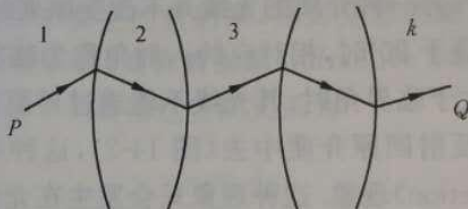


图 14-3 光程

4-7)没有计及光线时,可能有不同的

根据折射率与速度的关系  $n_i = \frac{c}{v_i}$ , 上式可以写成<sup>①</sup>

$$\Delta t = \frac{1}{c} \sum_i n_i \Delta l_i \quad (14-7)$$

其中,  $n_i \Delta l_i$  为光在第  $i$  种介质中的光程(optical path),  $\sum_i n_i \Delta l_i$  称为光由  $P$  点到  $Q$  点的总光程. 从式(14-7)可以看出,“光程”可理解为在相同时间内光线在真空中传播的距离.

因此我们对费马原理也可以这样来理解:光线在空间两点之间的传播,将沿着光程为极值的路程传播. 其数学表达式为

$$\int_P^Q n dl = \text{极值(极小值,极大值或恒定值)}$$

在一般情况下,实际光程大多取极小值,费马最初提出的也是最短光程. 由费马原理可以很容易导出反射定律和折射定律.

**例 14-1** 由费马原理导出反射定律.

**解** 设光线从  $P$  点发出经分界面  $MN$  反射到达  $Q$  点(如图 14-4 所示),相对于分界面  $MN$  取  $Q$  点的镜像对称点  $Q'$ , 从  $P$  到  $Q$  任一可能的路径  $PS'Q$  的长度都和  $PS'Q'$  的长度相同. 显然,路径  $PSQ'$

是其中最短的一根,也就是说  $PSQ$  路径最短,根据费马原理  $PSQ$  就是实际路径. 所有从  $P$  点发出的光线被  $MN$  反射后,除了光线  $PSQ$  外,都不能通过  $Q$  点. 根据对称性可知  $i=i'$ , 这就是反射定律.

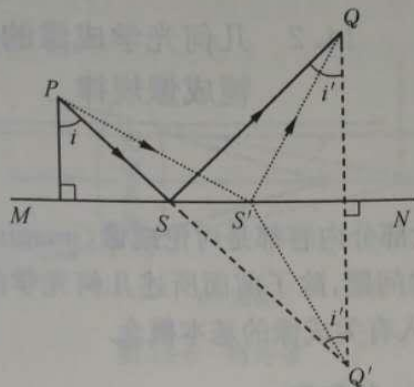


图 14-4 推导反射定律

**例 14-2** 由费马原理导出折射定律.

**解** 设折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$  的两个均匀介质的分界面是一平面. 光线从第一介质中的  $P$  点经分界面到达第二介质的  $Q$  点 (图 14-5). 通过  $P, Q$  两点作一平面垂直于分界面,  $OO'$  是它们的交线, 用费马原理可以确定实际光线在界面上的折射点  $C$  必定在分界面和该平面的交线  $OO'$  上. 这是因为如果有另一点  $C'$  位于交线外, 一定可以从  $C'$  作引向交线  $OO'$  的垂线  $C'C''$ , 并满足  $C'C'' \perp OO'$ , 不难看出  $PC' > PC''$ ,  $C'Q > C''Q$ , 即光线  $PC''Q$  比光线  $PC'Q$  的光程更短, 也就是证明了实际路径一定和入射面、折射面在同一平面内.

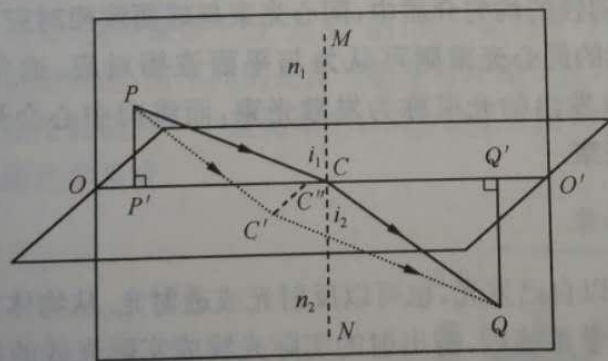


图 14-5 推导折射定律

作  $PP', QQ'$  垂直于交线  $OO'$ , 设  $\overline{PP'} = h_1$ ,  $\overline{QQ'} = h_2$ ,  $\overline{P'C} = x$ ,  $\overline{P'Q'} = L$ , 则  $PCQ$  的光程等于

$$n_1 \overline{PC} + n_2 \overline{CQ} = n_1 \sqrt{x^2 + h_1^2} + n_2 \sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}$$

根据费马原理, 这个光程应取最小值, 于是, 上式对  $x$  的微分应等于零. 即



$$\frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{n_2 (L - x)}{\sqrt{(L - x)^2 + h_2^2}} = 0$$

整理后得  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ , 这就是折射定律.

## 14.2 几何光学成像的基本概念和薄透镜成像规律

几何光学中大部分内容都是讨论**成像**(imaging)问题的. 为了讨论光学系统的成像问题, 除了前面所述几何光学的基本定律和费马原理外, 还需要引入有关成像的基本概念.

### 14.2.1 同心光束 物和像

#### 1. 发光点与光束

设想有一个发射光线的光源(light source), 它本身的几何线度比它到观察点的距离要小得多. 这时光源的形状已无关紧要, 因此我们可以把它抽象成一个几何点, 只考虑它的几何位置而不考虑大小, 这样的光源称为**发光点**(或点光源). 实际的光源总是有一定大小的, 所以发光点和光线一样, 都是为了使用上的方便而引入的理想化模型. 若光线实际发自某点, 则该点为**实发光点**; 若某点并不发出光线, 而是诸光线延长线的交点, 则该点为**虚发光点**.

**光束**(light beam)是由许多光线构成的, 若该光束是光线本身或其延长线交于同一点的, 则称为**同心光束**(concentric beam). 一般来说, 在各向同性的均匀介质中, 同心光束与球面波相对应; 但是, 发光点在无限远的同心光束则可认为与平面波相对应. 通常我们把由某一发光点发出的光束称为**发散光束**, 而将向中心会聚的光束就称为**会聚光束**.

#### 2. 物和像

物体可以自己发光, 也可以反射光或透射光. 从物体发出的光经过一定的光学系统后, 由出射的实际光线或实际光线的反向延长线会聚成的与物体形状相似的图形就叫做**像**(image).

物体是由大量的物点(object point)组成的, 如图 14-6 所示, 从物点  $S$  发出的同心光束经光学系统出射后, 所有的光线又再交于  $S'$  点, 成为一个以  $S'$  为顶点的同心光束, 通常把  $S'$  称为  $S$  的像点(image point). 若出射的同心光束是会聚的(图 14-6(a)), 我们称像点  $S'$  为**实像**(real image); 若出射的同心光束是发散的(图 14-6(b)), 称像点  $S'$  为**虚像**(virtual image).

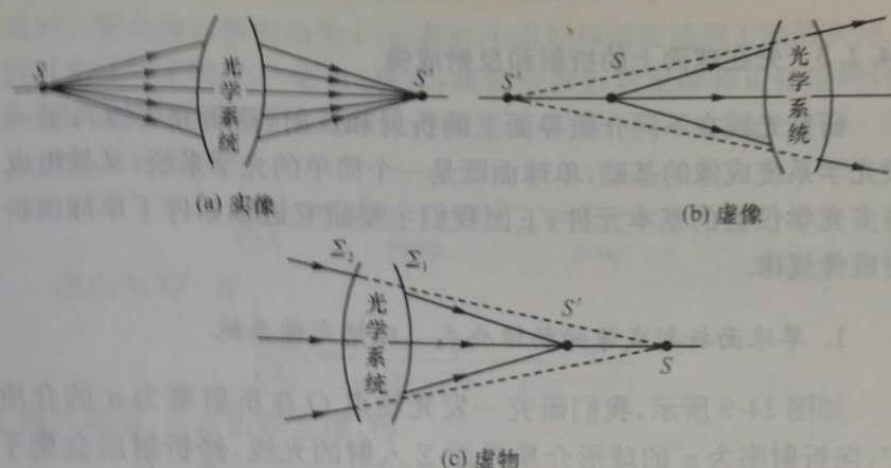


图 14-6 物与像

不仅像点有虚实之分,物点也有虚实之别.有时候光束从前一个面  $\Sigma_1$  折射后是会聚的,应该形成实像,但不待光束到达会聚点,又碰到第二个折射面  $\Sigma_2$ ,这时会聚光束的顶点对于第二个折射面来说就是物,不过由于会聚光束的顶点在像方区域[图 14-6(c)],应将它看成虚物(virtual object).

### 14.2.2 光在平面上的反射成像

下面我们来研究平面上反射光的成像,如图 14-7 所示,有一点光源  $S$  (即物)发出的光束,被平面镜反射,根据反射定律其反射光的反向延长线都将在点  $S'$  处相交,  $S'$  为  $S$  的像.  $S'$  与平面之间的距离和  $S$  与平面之间的距离相等,平面反射镜中的像总是虚像.从日常生活的经验可知,这种像是十分“真实”的,其所成的像与对称于镜面的原物大小是相同的,所不同的是像与物左右互相交换,如图 14-8 所示.可见,平面反射镜是一个最简单的,不改变光束的同心性质并能形成完善像的光学系统.

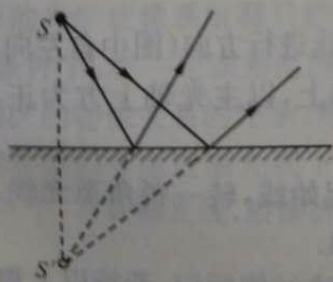


图 14-7 光在平面上的反射



图 14-8 平面镜成像

### 14.2.3 光在球面上的折射和反射成像

研究光线在不同介质界面上的折射和反射,是研究透镜乃至一般光学系统成像的基础,单球面既是一个简单的光学系统,又是组成许多光学仪器的基本元件,下面我们主要研究近轴条件下单球面折射成像规律.

#### 1. 单球面折射成像的物像公式 理想光学系统

如图14-9所示,我们研究一发光物点 $Q$ 在折射率为 $n$ 的介质中,向折射率为 $n'$ 的球形介质界面 $\Sigma$ 入射的光线,经折射后会聚于像点 $Q'$ 时,物像共轭点 $Q$ 和 $Q'$ 位置间的关系.也就是说,我们将要建立单球面成像的物像关系式.

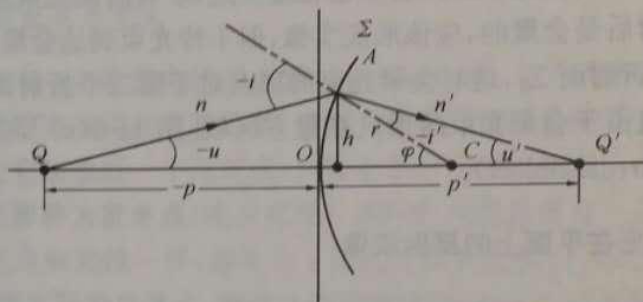


图14-9 单球面折射成像

在图14-9中,折射球面 $\Sigma$ 的曲率半径为 $r$ ,球面的曲率中心为 $C$ .我们将物点 $Q$ 和球心 $C$ 的连线 $QC$ 称为主轴(principal),将球面 $\Sigma$ 与主轴的交点 $O$ 称为顶点(pole).显然,主轴对于从 $Q$ 发出而入射于球面的同心光束,具有对称性.设入射光线 $QA$ 经球面折射后,交主轴于 $Q'$ ,我们称 $OQ$ 的距离为物距(object distance),用 $p$ 表示,称 $OQ'$ 的距离为像距(image distance),用 $p'$ 表示.为了得到 $Q, Q'$ 间定量的关系式,有必要先确定计算和作图时对线段和角度符号的有关规则(图14-9):

(1) 线段.以顶点 $O$ 为起点,沿光线进行方向(图中自左向右)为正,逆光线进行方向为负;在垂直方向上,以主光轴上方为正,下方为负.

(2) 角度.由主轴或界面法线为起始线,转一锐角至光线,顺时针旋转角度为正,逆时针旋转角度为负.

(3) 图中所有的线段和角度均以绝对值标记,若按以上规则确定的长度或角度为负时,则在其相应符号前加“—”号.

设物点 $Q$ 发出的同心光束中,任一条入射线 $QA$ 在球面上 $A$ 点



处的入射角为  $i$ , 折射角为  $i'$ ,  $\varphi$  表示  $A$  点处球面法线和主轴的夹角. 折射光线与主轴交于  $Q'$  点. 现在, 我们根据折射定律和正弦定理讨论由物点  $Q$  发出的所有光线是否都交于  $Q'$  点.

由  $\triangle AQC$ , 有

$$\frac{QC}{QA} = \frac{\sin[\pi - (-i)]}{\sin\varphi} = \frac{\sin(-i)}{\sin\varphi}$$

由  $\triangle ACQ'$ , 有

$$\frac{AQ'}{CQ'} = \frac{\sin(\pi - \varphi)}{\sin(-i')} = \frac{\sin\varphi}{\sin(-i')}$$

上两式相乘, 并由折射定律, 得

$$\frac{QC}{QA} \cdot \frac{AQ'}{CQ'} = \frac{\sin(-i)}{\sin(-i')} = \frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{n'}{n}$$

于是, 有

$$CQ' = \frac{n}{n'} \frac{AQ'}{AQ} QC \quad (14-8)$$

式(14-8)说明, 像点  $Q'$  的位置与球面  $\Sigma$  上  $A$  点的位置有关. 由图 14-9 所示平面内的光线可知, 从物点  $Q$  发出的各条光线, 与球面  $\Sigma$  将交于不同点, 显然它们的折射光线与主轴也不可能交于同一点, 这说明单球面折射不能理想成像.

如果只考虑与主轴成微小夹角的近轴光线, 此时, 入射角  $i$  和折射角  $i'$  都非常小, 必然满足

$$\tan i \approx \sin i \approx i, \quad \tan i' \approx \sin i' \approx i'$$

同时也有

$$QO \approx QA, \quad Q'O \approx Q'A$$

这就是说, 在  $Q$  向折射球面  $\Sigma$  发出的同心光束中, 只有近轴光线经折射后才能会聚于主轴上的同一点  $Q'$ , 成为物点  $Q$  的像. 光学系统中满足这样条件的区域称傍(近)轴区. 这样的光学系统能够使“点物成点像”, 故又称其为理想的光学成像系统. 事实上, 除平面镜外, 任何实际的光学成像系统都只能在近轴光线(光线与主光轴成微小夹角)的条件下, 在一定误差范围内近似为理想光学成像系统. 而将研究傍轴区的物像关系的光学, 称为“高斯光学”.

现在我们考虑近轴光线下, 单球面折射成像的物像关系式. 在图 14-9 中, 对近轴光线, 根据折射定律和对线段和角度的符号规则有

$$n(-i) = n'(-i')$$

根据图中三角关系, 即有

$$\begin{aligned} n(\varphi - u) &= n'(\varphi - u') \\ n'u' - nu &= (n' - n)\varphi \end{aligned} \quad (14-9)$$

考虑近轴条件,有

$$u' \approx \frac{h}{p'}, \quad -u = -\frac{h}{p}, \quad \varphi = \frac{h}{r}$$

将以上结果代入式(14-9),约去  $h$ ,即得

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r} \quad (14-10)$$

式(14-10)就是近轴光线单球面折射成像的物像关系式。式中,  $r > 0$  表示凸球面,  $r < 0$  表示凹球面。

式(14-10)给出了主轴上物点  $Q$  与像点  $Q'$  之间位置的共轭关系。于是可以推得:在近轴光线条件下,垂直于主轴的小直线以及垂直于主轴的小平面间必然也存在着这样的共轭关系,即所谓的点物成点像,直线成直线像,平面成平面像。

## 2. 物方焦距、像方焦距、高斯物像公式

从式(14-10)还可以看出,主轴上存在一个特殊点:当物点  $Q$  处在这一位置时,它入射于球面的同心光束,经球面折射后的出射光线都平行于主轴,这个点称为物方焦点(focus)或第一焦点,记为  $F$ 。从顶点  $O$  到  $F$  的距离称为物方焦距(focal length),记为  $f$ 。将  $p' \rightarrow \infty$  代入式(14-10),得

$$f = -\frac{n}{n' - n}r \quad (14-11)$$

主轴上同样还存在另一个特殊点:平行于主轴的入射光线,经球面折射后的出射光线都将会聚于该点,这个点称为像方焦点或第二焦点,记为  $F'$ 。从顶点  $O$  到  $F'$  的距离称为像方焦距,记为  $f'$ 。将  $p \rightarrow -\infty$  代入式(14-10),得

$$f' = \frac{n'}{n' - n}r \quad (14-12)$$

由式(14-11)和式(14-12),可以得到

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} \quad (14-13)$$

式(14-13)给出像方焦距与物方焦距之比与像方折射率与物方折射率之比的大小相等,而式中的“-”号则表明  $F$  和  $F'$  分别位于球面两侧。

将式(14-11)~式(14-13)代入式(14-10)得到近轴光线下,单球面折射成像更为简洁的物像关系式

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \quad (14-14)$$



式(14-14)称为单球面折射的高斯公式(Gaussian formula).

**例 14-3** 若折射凸球面的曲率半径为 3cm, 物点  $Q$  在折射球面顶点左侧 9cm 处, 左方(物方)折射率为 1.0, 右方(像方)折射率为 1.5, 试计算像的位置.

**解** 根据符号规则及题意, 有

$$n' = 1.5, \quad n = 1, \quad r = 3 \times 10^{-2} \text{m}, \quad p = -9 \times 10^{-2} \text{m}$$

代入式(14-10), 有

$$\frac{1.5}{p'} - \frac{1}{-9 \times 10^{-2}} = \frac{1.5 - 1}{3 \times 10^{-2}}$$

求得  $p' = 27 \text{cm}$ , 即像在右方 27cm 处, 是实像.

### 3. 横向放大率和角放大率

在近轴光线和近轴物的条件下, 如图 14-10 所示, 垂直于主轴, 过物点  $Q$  的平面称物平面, 而与其共轭的过像点  $Q'$  的平面则称为像平面. 横向放大率(transversal magnification)又称垂轴放大率, 给出这两个平面内物、像间图形相似性的关系. 若在主轴上过  $Q$  点作垂直于主轴的线段  $QP$ , 高为  $y$ , 经折射球面后成像为  $Q'P'$ , 高为  $y'$ . 像高  $y'$  与物高  $y$  的比值定义为横向放大率  $\beta$ , 即

$$\beta = \frac{y'}{y} \quad (14-15)$$

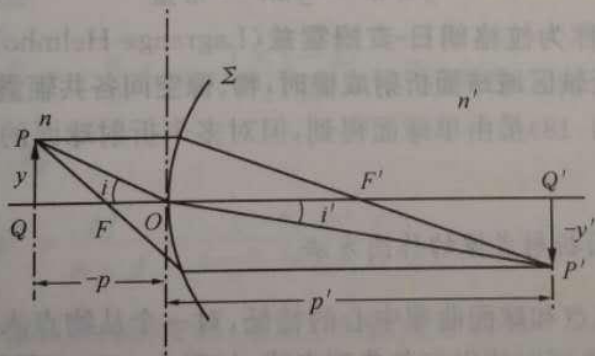


图 14-10 横向放大率

显然,  $\beta > 0$  表示物像的上下关系是同向的, 简称为“正立”,  $|\beta| > 1$  表示像比物大, 是放大的;  $\beta < 0$ ,  $|\beta| < 1$ , 则为倒立的缩小像.

在图 14-10 中, 入射光线  $PO$  的折射光线为  $OP'$ . 在近轴条件下,  $\sin i \approx \tan i$ , 折射定律可表示为

$$n \tan i = n' \tan i'$$

由图 14-10 可知

$$\tan i = \frac{y}{-p}, \quad \tan i' = \frac{-y'}{p'}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{p' \tan i'}{p \tan i}$$

所以,单球面折射系统的横向放大率 $\beta$ 为

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{p' n}{p n'} \quad (14-16)$$

由Q点发出的近轴光线,经球面折射后成像于Q'点,显然也改变了同心光束的张角.如图14-9所示,设入射的近轴光线与主轴的夹角为 $u$ ,与其共轭的折射光线与主轴的夹角为 $u'$ .将它们的比值定义为角放大率 $\gamma$ (angular magnification),以表示球面折射改变同心光束张角大小的能力,有

$$\gamma = \frac{u'}{u}$$

若某条光线入射于球面后不发生偏折,那么入射光线及其共轭的出射光线与主轴的夹角相等,有 $u=u'$ ,此时 $\gamma=1$ .对单球面折射系统,这一对共轭光线与主轴的交点重合,它就是球面的曲率中心C.

由图14-9可知,在近轴条件下有

$$(-u)(-p) = u'p'$$

所以,角放大率可表示为

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{p}{p'} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta} \quad (14-17)$$

把 $\beta$ 的定义式(14-15)代入上式,得

$$y'u'n' = yun = \text{常量} \quad (14-18)$$

式(14-18)称为拉格朗日-亥姆霍兹(Lagrange-Helmholtz)恒等式.它给出在近轴区域球面折射成像时,物、像空间各共轭量之间的制约关系.式(14-18)虽由单球面得到,但对多个折射球面的共轴成像系统也适用.

#### 4. 球面折射成像的作图方法

根据焦点和球面曲率中心的特征,对一个从物点入射于球面的近轴光线,总可以找出三条典型光线,如图14-11(a)所示,其中任意

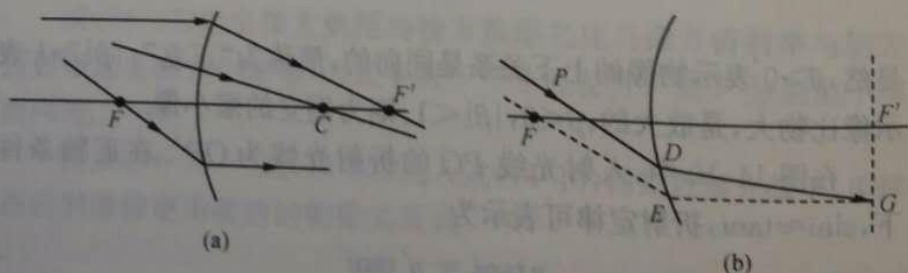


图14-11 球面折射成像作图



两条光线的交点即为相应的像点。

- (1) 过物方焦点  $F$  的入射光线, 其折射光线平行于主轴;
- (2) 平行于主轴的入射光线, 其折射光线过像方焦点  $F'$ ;
- (3) 过球面曲率中心  $C$  的入射光线, 其折射光线不发生偏折。

对于任意的近轴入射光线, 求它的折射光线时, 需要添加辅助光线。添加的辅助光线应当是与入射光线相关的典型光线。比如在图 14-11(b) 中求入射光线  $PD$  的折射光线时, 可作过  $F$  平行于  $PD$  的辅助线  $FE$ , 然后作过  $E$  平行于主轴与过  $F'$  垂直于主轴的两条辅助线得交点  $G$ , 连接  $DG$ , 即为  $PD$  的折射光线。

**例 14-4** 扁圆柱形体温表的断面如图 14-12 所示, 顶点  $O$  处的曲率半径  $R=1\text{mm}$ ,  $C$  为圆柱部分在纸面内的曲率中心, 水银柱  $A$  在主轴上的高度为  $y=0.5\text{mm}$ , 离顶点  $O$  的距离为  $2.5\text{mm}$ 。设玻璃的折射率  $n=1.50$ 。从空气中看到水银柱的像在顶点的哪一侧? 距顶点的距离为多少? 像有多大? 像的性质如何?

**解** 水银柱  $A$  是物, 玻璃是物方介质  $n=1.50$ , 像方介质是空气  $n'=1$ 。

根据符号规则, 物距  $p=-2.5\text{mm}$ , 凹球面的曲率半径  $r=-1\text{mm}$ 。则

物方焦距

$$f = -\frac{nr}{n' - n} = -\frac{1.50 \times (-1)}{1 - 1.50} = -3(\text{mm})$$

像方焦距

$$f' = -\frac{n'}{n}f = -\frac{1 \times (-3)}{1.50} = 2(\text{mm})$$

由高斯公式, 得

$$p' = \frac{pf'}{p - f} = \frac{(-2.50) \times 2}{(-2.50) - (-3)} = -10(\text{mm})$$

即水银柱的像在顶点的左侧, 距顶点的距离为  $10\text{mm}$ 。

横向放大率

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{p'n}{pn'} = \frac{(-10) \times 1.50}{(-2.50) \times 1} = 6$$

像高

$$y' = \beta y = 6 \times 0.5 = 3(\text{mm})$$

因此, 眼睛所看到的是放大 6 倍、正立的虚像。

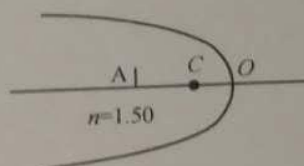


图 14-12 扁圆柱形体温表断面

## 5. 光在球面上反射成像

对于光线在球面上反射成像,此时物空间与像空间将重合,且入射光线与反射光线行进方向相反,我们可以把球面反射视为球面折射在此条件下的特例,将  $n' = -n$  代入式(14-10),可以得到

$$\frac{-n}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{-2n}{r}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r}$$

由式(14-11)和式(14-12),得到反射球面的焦距为

$$f' = f = \frac{1}{2}r \quad (14-19)$$

可见,反射球面的物方焦点  $F$  和像方焦点  $F'$  重合,处于图 14-9 主光轴上  $OQ$  连线的中点,而且焦距只与球面的曲率半径有关,与外界因素无关,由此,球面反射成像的高斯公式为

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \quad (14-20)$$

## 14.2.4 光在平面上折射成像

对于光线在平面上的折射,可以认为是折射球面的曲率半径  $r \rightarrow \infty$  时的特殊情况,即对应于平面折射情况,由式(14-10)可以得到

$$p' = \frac{n'}{n}p \quad (14-21)$$

当  $n > n'$  时,则  $p' < p$ , 显然,在水面上沿着垂直方向观看水中的鱼时,看到的鱼(鱼的像)的深度  $p'$  要浅于实际深度  $p$ , 这时像的深度  $p'$  也称为像似深度. 同理,当把一根筷子斜插入水中时,在水面上方可以看到插入水中的一段筷子的像与水面上一段筷子相比好像屈折了,这就是光的折射成像,使得视深度减少的缘故.

## 14.2.5 薄透镜成像

## 1. 薄透镜及其成像规律

单球面折射是一种最简单的光学系统,实际的系统一般都由多个主轴重合的折射球面组成,称为共轴球面系统(coaxial spherical system)或光具组. 透镜是一个简单的共轴球面系统,由两个曲率半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  的单球面组成,两顶点  $O_1$ 、 $O_2$  相距为  $d$ . 如图 14-13所示,通常分凸透镜(convex lens)和凹透镜(concave lens)两大类.



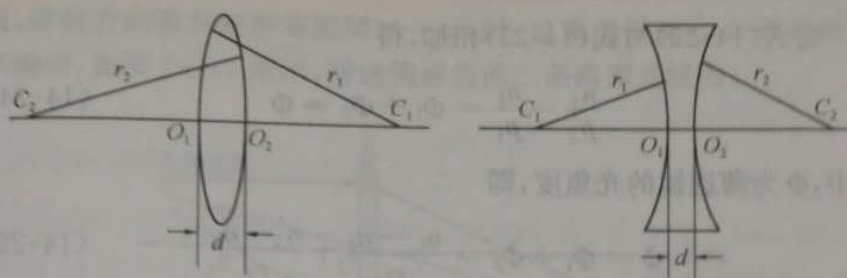


图 14-13 透镜

当  $d$  远小于  $r_1, r_2$  及焦距时, 可认为  $d \rightarrow 0$ , 即  $O_1, O_2$  重合在  $O$ , 成为最简单的共轴球面系统, 称为薄透镜(thin lens),  $O$  称为光心(optical centre), 如图 14-14 所示. 薄透镜成像可利用单球面相继成像的方法得到.

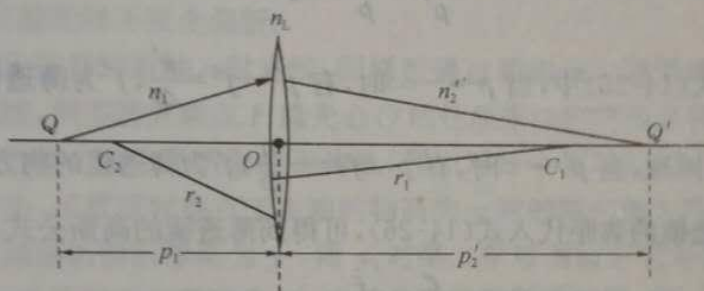


图 14-14 薄透镜成像

下面我们导出薄透镜成像的高斯公式. 设主轴上一物点  $Q$  离薄透镜光心  $O$  的距离为  $p_1$ , 薄透镜材料的折射率为  $n_L$ . 对薄透镜左方第一折射球面, 物方折射率为  $n_1$ , 像方折射率为  $n'_1 = n_L$ . 利用式 (14-10), 得

$$\frac{n_L}{p_1'} - \frac{n_1}{p_1} = \frac{n_L - n_1}{r_1} = \Phi_1 \quad (14-22)$$

式中,  $\Phi_1 = \frac{n_L - n_1}{r_1}$ , 仅与第一折射球面的曲率半径及其两侧介质的折射率有关, 对于一定的介质和确定形状的球面是一个不变量, 可以表征这个球面的光学特征, 称为第一折射球面的光焦度(focal power).

对薄透镜右方第二折射球面, 物方折射率为  $n_L$ , 像方折射率为  $n'_2$ , 且有  $p_1' = p_2$ , 由式 (14-10) 得

$$\frac{n'_2}{p_2'} - \frac{n_L}{p_2} = \frac{n'_2 - n_L}{r_2} = \Phi_2 \quad (14-23)$$

同理, 式中  $\Phi_2$  是第二折射球面的光焦度.

将式(14-22)与式(14-23)相加,得

$$\frac{n'_2}{p'_2} - \frac{n_1}{p_1} = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi \quad (14-24)$$

式中,  $\Phi$  为薄透镜的光焦度,即

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n'_2 - n_L}{r_2} \quad (14-25)$$

它由组成薄透镜的两个单球面的光焦度相加而得.

式(14-24)便是薄透镜的成像公式. 对薄透镜而言, 式中下标为1的量属于物方, 下标为2且上标带撇(')的量则属于像方. 我们可以去掉下标而直接以物方和带撇的像方表示. 这样, 薄透镜的成像公式便与式(14-10)相似, 即

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \Phi \quad (14-26)$$

在式(14-26)中, 当  $p \rightarrow -\infty$  时, 有  $p' = f' = \frac{n'}{\Phi}$ ,  $f'$  为薄透镜的像方焦距; 同理, 当  $p' \rightarrow \infty$  时, 有  $p = f = -\frac{n}{\Phi}$ ,  $f$  为薄透镜的物方焦距. 再用薄透镜的焦距代入式(14-26), 可得到薄透镜的高斯公式:

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \quad (14-27)$$

其形式与单球面折射时的高斯公式也完全一致, 式中, 物距  $p$  和像距  $p'$  都从光心  $O$  算起.

光焦度是光学系统会聚或发散光束本领的量度, 根据前面的推导, 我们可得薄透镜的光焦度为

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \quad (14-28)$$

在国际单位制中, 光焦度的单位称屈光度(dioptry), 用  $D$  表示.

对于空气中一焦距为  $f = -25.0\text{cm}$  的薄凹透镜, 其光焦度为

$$\Phi = -\frac{1}{0.250} = -4.00D$$

通常所讲眼镜的度数是屈光度  $D$  的 100 倍, 因此这个薄凹透镜是度数为 400 度的近视眼镜.

## 2. 薄透镜成像的作图法 横向放大率

利用焦点、焦面和光心的特征, 作图求薄透镜在近轴光线下成像的方法, 与单球面的情况相同. 由于过单球面曲率中心  $C$  的光线不偏折, 故  $C$  即为单球面的光心. 对薄透镜需注意: 仅当其处于同一介



质,即物方和像方折射率相同( $n=n'$ )时,过薄透镜光心  $O$  的光线才不偏折.如图 14-15 所示,薄透镜成像的三条典型光线为:

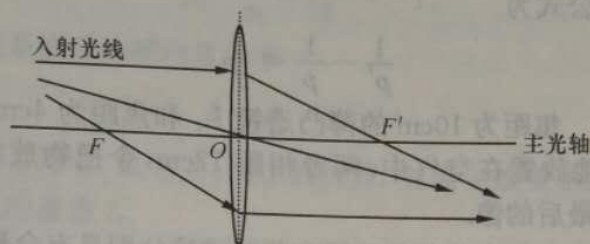


图 14-15 薄透镜成像作图的三条典型光线

- (1) 过物方焦点  $F$  的入射光线,其出射光线平行于主轴;
- (2) 平行于主轴的入射光线,其出射光线过像方焦点  $F'$ ;
- (3) 对像方和物方为同一介质中的薄透镜,过光心  $O$  的入射光线,其出射光线不发生偏折.

对于任意的近轴入射光线,同样可通过添加与入射光线平行的辅助光线,利用物方焦点  $F$  或光心  $O$  的性质来决定它的出射光线.

薄透镜由两个单折射球面构成,利用对每个单球面折射逐步成像的方法,不难得到垂直于主轴的物高为  $y$  时的横向放大率  $\beta$ . 设由第一单球面折射后像高为  $y'_1$ ,而  $y'_1$  对第二单球面而言它是物高,即  $y'_1 = y_2$ ,经折射后的像高为  $y'_2$ ,它就是薄透镜所成的像,即  $y'_2 = y'$ .

所以薄透镜的横向放大率为

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{y'}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y} = \frac{y'_2}{y_2} \cdot \frac{y_1}{y}$$

即

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 = \frac{p' n}{p n'} \quad (14-29)$$

式(14-29)与单球面折射的横向放大率式(14-16)具有完全相同的形式,式中,  $p'$  和  $n'$  分别是薄透镜的像距和像方折射率. 由式(14-29)也不难推广到多个共轴的薄透镜系统,同样可有

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_i = \prod_i \beta_i$$

当  $\beta > 0$ ,  $|\beta| > 1$  时为正立放大像;而当  $\beta < 0$ ,  $|\beta| < 1$  时,为倒立缩小像.

薄透镜作为最简单的共轴系统,在近轴光线条件下自然也满足拉格朗日-亥姆霍兹恒等式,所以,角放大率也由式(14-17)表示,即

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{p}{p'} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{y}{y'}$$

由于我们经常使用的是空气中的薄透镜,若将  $n=n'=1$  代入式(14-25)和式(14-28),则有

$$f' = -f = \frac{1}{\Phi} = \frac{r_1 r_2}{(n_L - 1)(r_2 - r_1)}$$

这时的高斯公式为

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad (14-30)$$

**例 14-5** 焦距为 10cm 的薄凸透镜  $L_1$  和焦距为 4cm 的薄凹透镜  $L_2$ , 共轴地放置在空气中, 两者相距 12cm, 今把物放在  $L_1$  左侧 20cm 处, 求最后的像.

**解** 由于空气中的薄凸透镜和薄凹透镜分别具有会聚入射平行光束和发散入射平行光束的作用, 因此, 我们可形象地分别用“ $\uparrow$ ”和“ $\downarrow$ ”来表示凸透镜和凹透镜. 如图 14-16 所示, 设物的垂轴高度为  $l$ , 对  $L_1$  成像为  $l'_1$ , 对  $L_2$  成像为  $l'_2$ . 根据符号规则可知,  $f'_1 = 10\text{cm}$ ,  $F'_1$  位于  $L_1$  的右侧,  $p_1 = -20\text{cm}$ , 位于  $L_1$  的左侧.

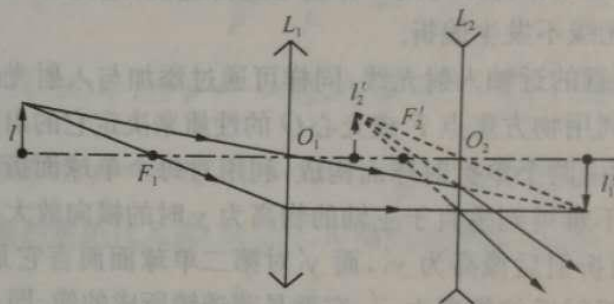


图 14-16

按式(14-30), 对  $L_1$  有

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f'_1}$$

得

$$p'_1 = \frac{p_1 f'_1}{p_1 + f'_1} = \frac{-20 \times 10}{-20 + 10} = 20(\text{cm})$$

故横向放大率

$$\beta_1 = \frac{p'_1}{p_1} = \frac{20}{-20} = -1$$

因此, 实物  $l$  对  $L_1$  成等大、倒立的实像  $l'_1$ .

根据逐次成像法,  $l'_1$  对  $L_2$  而言是虚物,  $f'_2 = -4\text{cm}$ , 由符号规则知  $F'_2$  位于  $L_2$  的左侧,  $p_2 = 20 - 12 = 8\text{cm}$ , 虚物  $l'_1$  位于  $L_2$  的右侧. 代入高斯公式

$$\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f'_2},$$

得

$$p'_2 = \frac{p_2 f'_2}{p_2 + f'_2} = \frac{8 \times (-4)}{8 - 4} = -8(\text{cm}),$$

故横向放大率

$$\beta_2 = \frac{p_2'}{p_2} = \frac{-8}{8} = -1,$$

从而,透镜系统总的横向放大率

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 = 1.$$

因此,虚物  $l_1'$  对  $L_2$  成等大、倒立的虚像. 对整个透镜系统,实物  $l$  成等大、正立的虚像  $l_2'$ .

### 14.3 光学仪器简介

#### 14.3.1 照相机

照相机(camera)的光学原理就是利用会聚透镜形成实像. 如图 14-17 所示,将远处和近处的物体成像在照相胶片上,然后,再经过显影等步骤而得到最后的照片. 照相机主要包括以下几部分:

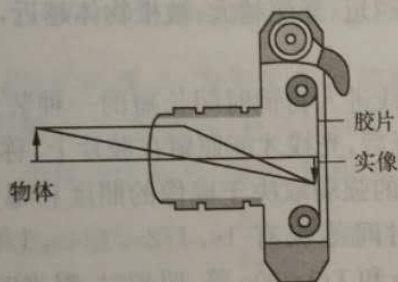


图 14-17 照相机

- (1) 照相物镜(objective), 俗称镜头, 它使物体产生清晰的像.
- (2) 光圈. 它是在镜头中的可变的孔径光阑(stop), 用它来控制感光板上成像的光照度和改变空间成像的景深.
- (3) 快门. 它是经常闭合的, 用它的打开时间的长短来控制照射在胶片上的光通量, 以形成清晰的像.

为了尽可能拍摄较广阔的外界景物, 镜头必须有较广阔的视场(viewing field), 通常照相机的视场角为  $50^\circ \sim 60^\circ$ , 某些特殊广角镜头可达  $120^\circ$ . 镜头的结构种类很多, 可是就整体而言, 仍然是一个会聚透镜系统. 焦距是镜头的一个重要参量, 在相同物距的条件下, 物镜的焦距愈大所成的像也愈大. 所以, 物镜的焦距决定了拍摄时物像的整个比例.

物镜的孔径  $D$  与其焦距  $f$  的比值称为相对孔径, 它决定成像面的照度和景深. 由于大部分镜头的孔径总比焦距小, 所以通常采用



$1:\frac{f}{D}$  来表示,如  $1:1.4, 1:2.0, 1:2.8$  等,对于一定亮度的物体,

在相对孔径为  $\frac{D}{f}$  的照相物镜的焦面上,所成像的光照度

$$A \propto \left(\frac{D}{f}\right)^2 \quad (14-31)$$

由此可见,像的光照度正比于相对孔径  $\frac{D}{f}$  的平方,所以相对孔径为  $1:2.0$  的物镜,其像面上的光照度比相对孔径为  $1:2.8$  的物镜的光照度高一倍。

当照相胶片的位置固定时,只有与胶片共轭的平面上的景物才能清晰成像于胶片上,在共轭平面以外(远些或近些)的物体所成的像将变得模糊不清。如果对像清晰程度的要求并不是特别高,就存在一定的物距范围,在这范围之内的物点所成的像可都认为是清晰的,这一定的物距范围称为景深(depth of field)。改变光圈的大小可以起到调节景深的作用,光圈直径越大,景深越小,光圈直径越小,景深越大。决定景深大小除光圈外,还有其他因素。例如,镜头的焦距越长,景深越小;焦距越短,景深越大;被摄物体越近,景深越小;被摄物体越远,景深越大。

快门是控制光线进入物镜时间长短的一种装置,一般安装在镜头组中间。快门打开后,光线才能照射在胶片上,称为曝光。实践证明胶片上光化合作用的强弱取决于成像的照度和曝光时间的乘积。一般照相机快门的时间等级有  $1s, 1/2s, 1/4s, 1/8s, 1/16s, 1/30s, 1/60, 1/125, 1/300s$  和  $1/1000s$  等。照相时,曝光时间应与光圈的大小恰当地配合起来使用。

目前,市场上流行的数码照相机与上述传统照相机具有很多相似之处,但它们的工作原理却有着很大的不同。数码照相机不是直接将镜头聚焦的影像储存在化学胶片上,而是投射到光电转换器芯片 CCD(称为电荷耦合半导体器件)上,CCD 将投射而来的景物光信号转化成电流信号;然后将数据传输到模拟电子信号处理器上,转化成电脑能识别的数码信号,通过数码压缩处理模块压缩处理后储存在闪烁式电子芯片上,最后经过各种运算转换为图像的数码文件,供后期处理使用。

### 14.3.2 显微镜

简单放大镜的放大率太小,最多  $10\sim 20$  倍,甚至不能满足观察一般生物切片的要求。为了提高放大率,必须采用组合放大镜——显微镜(microscope)。显微镜是由伽利略在 1610 年发明的,它的构造比较复杂,其放大倍数也比较大,可达到 1500 倍以上。

图 14-18 是一种简单显微镜的外形图. 显微镜系统的光路图如图 14-19 所示, 在放大镜(目镜)前面再加一个焦距极短的会聚透镜组, 称为物镜(objective). 待观察物体  $PQ$  置于物镜的物方焦点  $F_1$  处侧附近, 这样经物镜所成的实像  $P'Q'$  可尽量放大, 实像  $P'Q'$  位于目镜物方焦点  $F_2$  内侧附近, 再经目镜放大成虚像  $P''Q''$  于明视距离  $s_0$  (明视距离是国际上规定的正常照明条件下正常人眼能观察到的距离,  $s_0 = 25\text{cm}$ ) 以外. 为简单起见, 显微镜的目镜和物镜都以一块会聚透镜表示.

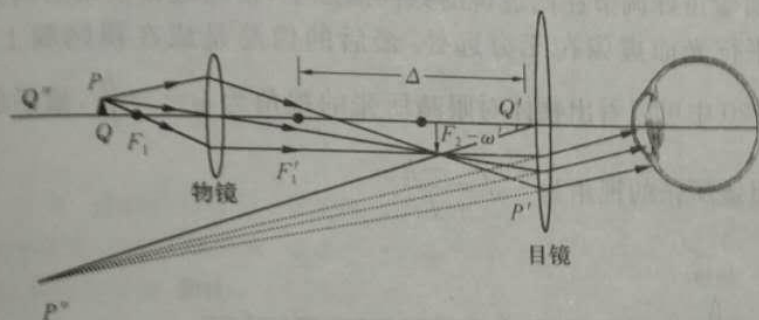


图 14-19 显微镜的光路图

设  $h_1$  为物体  $PQ$  的高度,  $h_2$  为实像  $P'Q'$  的高度,  $\Delta$  为物镜像方焦点  $F_1'$  到目镜物方焦点  $F_2$  的距离(称光学间隔), 物镜和目镜的焦距分别为  $f_1$  和  $f_2$ . 物体  $PQ$  在  $F_1$  附近, 物距  $s_1 \approx f_1$ ,  $\omega$  为物体  $PQ$  在明视距离  $s_0$  处所张的视角, 即  $\omega = \frac{h_1}{s_0}$ ;  $\omega'$  为最后经目镜所成的虚像  $P''Q''$  所张的视角,  $-\omega' = -\frac{h_2}{f_2}$ . 则显微镜的视角放大率  $M$  定义为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{h_2}{h_1} \frac{s_0}{f_2} = \beta_0 M_E \quad (14-32)$$

式中,  $\beta_0 = \frac{h_2}{h_1}$  为物镜的横向放大率,  $M_E = \frac{s_0}{f_2}$  为目镜的视角放大率, 所以, 显微镜的视角放大率等于物镜的横向放大率和目镜的视角放大率的乘积. 通常在显微镜物镜和目镜上分别刻有  $10\times$ ,  $20\times$  等字样, 以便我们计算显微镜的视角放大率.

常用显微镜放大率可达 1500 倍, 倍数再大, 则需要有油浸物镜, 再加灯光会聚照明, 其放大率可达 2000 倍, 这类显微镜称为超级显微镜.

### 14.3.3 望远镜

正常人眼虽然可观察的远点能达到无限远, 但此时在眼球视网膜上形成的像太小, 以至很难分辨. 要清晰地观察远方物体, 必须借



图 14-18 显微镜



助于望远镜。人们在望远镜中所观察到的像，实际上并不比原物体大，望远镜起的作用只是把远处的物体移近，增大视角，原来看不清楚的物体就能被看清楚了，这是与显微镜有本质不同的地方。

望远镜也是由物镜和目镜所组成的。从远处物体上射来的光线可看作平行光线，它们通过长焦距物镜后，在物镜的像方焦平面上形成了倒立的实像，如图 14-20 所示。目镜在望远镜和显微镜中都起放大镜的作用，如果调节目镜，使物镜所成之像恰好在目镜第一焦平面的内侧，则经过目镜后，在明视距离处形成一个放大虚像。不过通常是把实像正好调节在两透镜的共同焦点上，使通过目镜出射的光线成为平行光而虚像在无穷远处。最后的像总是成在视网膜上。从图 14-20 中可以看出物体对眼睛所张的视角为  $\omega = -\frac{h}{f_1}$ ，最后的虚像对目镜所张的视角为  $-\omega' = -\frac{h}{f_2}$ 。

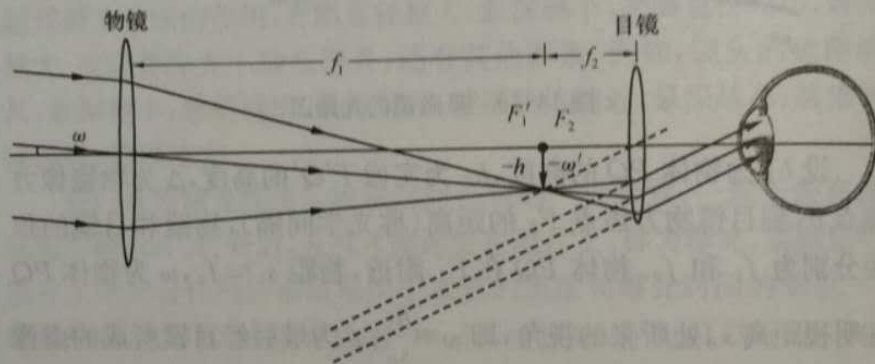


图 14-20 望远镜的光路图

望远镜的视角放大率的定义为最后的虚像对目镜所张的视角和物体本身对眼睛所张的视角之比值，即

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = -\frac{f_1}{f_2} \quad (14-33)$$

由此可知，物镜的焦距愈长，目镜的焦距越短，则望远镜的放大率就越大。由两个会聚透镜分别作为物镜和目镜所组成的天文望远镜称为开普勒望远镜，此时物镜和目镜的焦距都为正值，望远镜的视角放大率为负值，故形成的是倒立的像。如果用发散透镜作为目镜的望远镜则成为伽利略望远镜。对于伽利略望远镜，由于目镜的焦距为负，放大率为正值，故形成正立的像。

开普勒望远镜(或伽利略望远镜)的物镜和目镜所成的复合光学系统的光学间隔等于零，这样的光学系统叫做望远光学系统，即无焦系统。它的特点是平行光束通过时，透射出来的仍是平行光束，但方向改变。