# 复合多端口网络的参数矩阵计算

秦利国[1], 孙立山[2]

(1. 山东大学 自动化系, 山东 济南 250002; 2. 哈尔滨工业大学 电气工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 一些电路教材对二端口网络的连接方式进行了介绍并给出复合二端口参数矩阵的计算方法。多个二端口的任意连接可以构成复合多端口网络, 其参数矩阵也可以由构成它的二端口网络的参数矩阵表示。本文类比了电路网络中的关联矩阵, 建立描述二端口和复合多端口关系的端口关联矩阵, 并利用二端口的特性和串并联的特点, 给出了求解复合多端口网络参数矩阵的新方法。

关键词: 二端口网络; 复合多端口网络; 关联矩阵; 参数矩阵
中图分类号: 文献标识码: A 文章编号: 1008-0686(2010)03-0023-04

## The Calculations for the Parameters Matrix of Complex Multi-port Networks

**QIN Li-guo, SUN Li-shan**

(1. *Dept. of Automation, ShanDong University, Jinan* 250005, *China*;
2. *Dept. of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001, *China*)

**Abstract**: The connections of two-port networks and the method to calculate complex two-port parameter matrix are introduced in relevant textbooks. The complex multi-port network can consist of many two-port networks and its parameter matrix can also be made up of the parameter matrix of those two-port networks. In this paper we found the incidence matrix which illustrates the relations between two-port networks and multi-port networks on the analogy of the relative matrix in the theories of electric circuit. And we work out the new way to calculate the parameter matrix of complex multi-port network by means of the characteristic of two-port networks and their series-parallel connections.

**Keywords**: two-port network; complex multi-port network; relative matrix; parameter matrix

## 0 引言

相关电路教材[1-3]在二端口的连接中叙述, 二端口网络可以通过串联、并联、串并联和并串联构成复合二端口网络, 设连接后各二端口均满足端口连接条件, 其复合二端口与子二端口网络参数关系如下:

二端口串联: $Z = Z^A + Z^B$;

二端口并联: $Y = Y^A + Y^B$;

二端口串并联: $H = H^A + H^B$;

二端口并串联: $G = G^A + G^B$;

其中, $Z, Y, H, G$ 分别是复合二端口的阻抗参数矩阵, 导纳参数矩阵, 混合参数矩阵和逆混合参数矩阵; $A$、$B$ 是构成复合二端口网络的两个二端口网络。

我们可以将上面的结论进行推广, $N$ 个二端口网络可以通过串联、并联和混联方式构成复合二端口网络。

设连接后各二端口均满足端口连接条件, 二者的网络参数关系如下:

二端口串联: $Z = \sum_{i=1}^{N} Z^i$;

收稿日期: 2009-09-21; 修回日期: 2009-12-15

作者简介: 秦利国(1988-), 男, 本科生, 研究方向是自动化专业, E-mail: qinliguo007@yahoo.com.cn
孙立山(1964-), 男, 博士, 教授, 主要从事网络优化研究和电路理论教学工作, E-mail: sunlishan@hit.edu.cn

二端口并联：$Y=\sum_{i=1}^{N}Y^{i}$；

二端口串并联：$H=\sum_{i=1}^{N}H^{i}$；

二端口并串联：$G=\sum_{i=1}^{N}G^{i}$；

本文对上述的两个结论再进一步推广，来探讨多个二端口通过相互之间的串联、并联和混联构成复合多端口网络，它们之间的参数关系是怎样的。

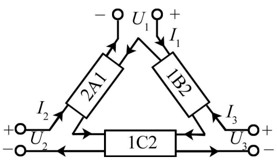
## 1　复合多端口网络及端口关联矩阵

1）复合多端口网络

首先定义复合多端口网络，本文研究的多端口网络并不是任意的，而是满足一定条件的多端口网络。其定义如下：

如果一个 N 端口网络由 M 个二端口构成，并且满足任何一个二端口网络的两个端口都与 N 端口网络中的两个端口相连接，则称此 N 端口网络为一个复合 N 端口网络。其中 N，M 满足 $M\geq N\geq 2$。复合三端口网络如图 1 所示。

类比网络图论，我们用节点表示复合多端口的端口，用支路表示二端口网络，形成复合多端口的网络图如图 2 所示。



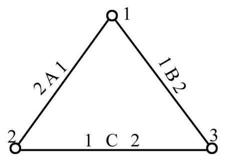




图 1　二端口的三角形连接　图 2　二端口的三角形连接网络图

2）端口关联矩阵

类比关联矩阵，定义端口关联矩阵。

我们把描述某一个二端口和复合多端口是否具有端口连接关系的矩阵称为此二端口的端口关联矩阵。

因此，端口关联矩阵的行数对应复合多端口的端口数，列数为 2，对应二端口的端口数。我们用 $P_m$ 来表示二端口 $m$ 的端口关联矩阵，矩阵中第 $i$ 行第 $j$ 列的元素定义为

$$p_{ij}=\begin{cases}1,\text{当 } i \text{ 端口和 } j \text{ 端口相连接}\\ 0,\text{当 } i \text{ 端口和 } j \text{ 端口不相连}\end{cases}$$

例如由 A，B，C 三个二端口构成的复合三端口网络，其端口关联矩阵分别为

$$P_A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix},P_B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},P_C=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

## 2　串联构成的复合三端口网络

为了研究方便，先对复合三端口网络的参数矩阵进行研究。并且重点研究二端口通过串联和并联构成的复合三端口的网络参数矩阵。

如图 1 和图 2，设连接后各二端口均满足端口连接条件，由二端口的特性可得

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}U_1^A\\U_2^A\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}Z_{11}^A&Z_{12}^A\\Z_{21}^A&Z_{22}^A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^A\\I_2^A\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}U_1^B\\U_2^B\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}Z_{11}^B&Z_{12}^B\\Z_{21}^B&Z_{22}^B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^B\\I_2^B\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}U_1^C\\U_2^C\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}Z_{11}^C&Z_{12}^C\\Z_{21}^C&Z_{22}^C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^C\\I_2^C\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

由串联的特点可得

$$I_1=I_1^A=I_1^B,I_2=I_2^A=I_1^C,I_3=I_2^B=I_2^C\tag{2}$$

$$U_1=U_1^A+U_1^B,U_2=U_2^A+U_1^C,U_3=U_2^B+U_2^C\tag{3}$$

由以上式子可得

$$\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_1^A\\U_2^A\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}U_1^B\\0\\U_2^B\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\U_1^C\\U_2^C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11}^A&Z_{12}^A&0\\Z_{21}^A&Z_{22}^A&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix}Z_{11}^B&0&Z_{12}^B\\0&0&0\\Z_{21}^B&0&Z_{22}^B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&Z_{11}^C&Z_{12}^C\\0&Z_{21}^C&Z_{22}^C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}Z_{11}^A+Z_{11}^B&Z_{12}^A&Z_{12}^B\\Z_{21}^A&Z_{22}^A+Z_{11}^C&Z_{12}^C\\Z_{21}^B&Z_{21}^C&Z_{22}^B+Z_{22}^C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}\tag{4}$$

所以可得类似于二端口的参数矩阵，此处定义了复合三端口的 $Z$ 参数矩阵。并且三端口的参数矩阵和二端口的参数矩阵的关系如下：

$$Z=\begin{bmatrix}Z_{11}^A+Z_{11}^B&Z_{12}^A&Z_{12}^B\\Z_{21}^A&Z_{22}^A+Z_{11}^C&Z_{12}^C\\Z_{21}^B&Z_{21}^C&Z_{22}^B+Z_{22}^C\end{bmatrix}\tag{5}$$

仔细观察上面的矩阵，会发现 $Z^A,Z^B,Z^C$ 的位置分布很有规律：$Z^A$ 分布在 $Z$ 的 1、2 行，1、2 列上；$Z^B$ 分布在 $Z$ 的 1、3 行，1、3 列上；$Z^C$ 分布在 $Z$ 的 2、3 行，2、3 列上。而二端口 $A$、$B$、$C$ 中，$A$ 恰好位于复合三端口的 1、2 号端口之间，$B$ 恰好位于复合三端口

的1、3号端口之间, $C$ 恰好位于复合三端口的2、3号端口之间。这并不是巧合, 而是和端口关联矩阵有关。下面来求它们之间的关系。

从式(4) 中我们可以看出, 下面三个矩阵比较特别, 我们称他们为贡献矩阵, 表示二端口网络的参数矩阵对于复合多端口网络的参数矩阵的贡献情况。并用 $X$ 表示。

$$\left.\begin{aligned} X_{\mathrm{A}} &= \begin{bmatrix} Z_{11}^{A} & Z_{12}^{A} & 0 \\ Z_{21}^{A} & Z_{22}^{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ X_{\mathrm{B}} &= \begin{bmatrix} Z_{11}^{B} & 0 & Z_{12}^{B} \\ 0 & 0 & 0 \\ Z_{21}^{B} & 0 & Z_{22}^{B} \end{bmatrix} \\ X_{\mathrm{C}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{11}^{C} & Z_{12}^{C} \\ 0 & Z_{21}^{C} & Z_{22}^{C} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

那么有

$$Z = X_{\mathrm{A}} + X_{\mathrm{B}} + X_{\mathrm{C}} \tag{7}$$

我们称此公式为求和公式。经运算发现

$$X_{\mathrm{A}} = P_{\mathrm{A}} Z^{A} P_{\mathrm{A}}^{T},\ X_{\mathrm{B}} = P_{\mathrm{B}} Z^{B} P_{\mathrm{B}}^{T},\ X_{\mathrm{C}} = P_{\mathrm{C}} Z^{C} P_{\mathrm{C}}^{T} \tag{8}$$

综合式(7) 和式(8) 可得:

$$Z = P_{\mathrm{A}} Z^{A} P_{\mathrm{A}}^{T} + P_{\mathrm{B}} Z^{B} P_{\mathrm{B}}^{T} + P_{\mathrm{C}} Z^{C} P_{\mathrm{C}}^{T} \tag{9}$$

从式(9) 我们可以得到利用二端口网络的参数矩阵来求复合多端口网络的参数矩阵的方法, 具体步骤如下:

(1) 求各个二端口的端口关联矩阵;

(2) 求各个二端口的贡献矩阵;

(3) 利用求和公式来求复合多端口网络的参数矩阵。

# 3　并联构成的复合三端口网络

对于二端口通过并联构成复合三端口, 类比网络图论得到的简图描述如图 2 所示。且二端口的连接方式为并联形式, 连接后各二端口均满足端口定义。我们利用上述步骤来进行计算复合三端口网络的参数矩阵, 并利用二端口特性和串并联特点来验证所求的参数的正确性。步骤如下:

(1) 求各个二端口的端口关联矩阵

$$P_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

(2) 求各个二端口的贡献矩阵

$$\left.\begin{aligned} X_{\mathrm{A}} &= P_{\mathrm{A}} Y^{A} P_{\mathrm{A}}^{T} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{A} & Y_{12}^{A} & 0 \\ Y_{21}^{A} & Y_{22}^{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ X_{\mathrm{B}} &= P_{\mathrm{B}} Y^{B} P_{\mathrm{B}}^{T} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{B} & 0 & Y_{12}^{B} \\ 0 & 0 & 0 \\ Y_{21}^{B} & 0 & Y_{22}^{B} \end{bmatrix} \\ X_{\mathrm{C}} &= P_{\mathrm{C}} Y^{C} P_{\mathrm{C}}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{11}^{C} & Y_{12}^{C} \\ 0 & Y_{21}^{C} & Y_{22}^{C} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

(3) 利用求和公式来求复合多端口网络的参数矩阵

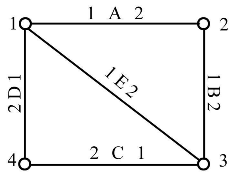
$$Y = X_{\mathrm{A}} + X_{\mathrm{B}} + X_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{A} & Y_{12}^{A} & 0 \\ Y_{21}^{A} & Y_{22}^{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11}^{B} & 0 & Y_{12}^{B} \\ 0 & 0 & 0 \\ Y_{21}^{B} & 0 & Y_{22}^{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{11}^{C} & Y_{12}^{C} \\ 0 & Y_{21}^{C} & Y_{22}^{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{A} + Y_{11}^{B} & Y_{12}^{A} & Y_{12}^{B} \\ Y_{21}^{A} & Y_{22}^{A} + Y_{11}^{C} & Y_{12}^{C} \\ Y_{21}^{B} & Y_{21}^{C} & Y_{22}^{B} + Y_{22}^{C} \end{bmatrix} \tag{12}$$

以上是对复合三端口网络部分参数矩阵的求解过程, 其它参数矩阵的求解过程类似。

# 4　实例

现举一个复合多端口网络的实例, 让本文所采用的方法进一步推广。

图 3 是由五个二端口连接成的复合四端口网络的网络简图, 图 4 是其具体连接图。各二端口的连接方式为串联形式, 连接后各二端口均满足端口条件。



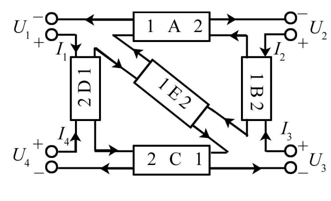




图 3　复合四端口网络简图　图 4　复合四端口连接图

复合四端口网络参数矩阵的计算步骤如下:

(1) 求各个二端口的端口关联矩阵

$$P_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_D=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},\ P_E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

(2) 求各个二端口的贡献矩阵

$$X_A=P_AZ^AP_A^T=\begin{bmatrix}Z_{11}^A&Z_{12}^A&0&0\\Z_{21}^A&Z_{22}^A&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$X_B=P_BZ^BP_B^T=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&Z_{11}^B&Z_{12}^B&0\\0&Z_{21}^B&Z_{22}^B&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$X_C=P_CZ^CP_C^T=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&Z_{11}^C&Z_{12}^C\\0&0&Z_{21}^C&Z_{22}^C\end{bmatrix}$$

$$X_D=P_DZ^DP_D^T=\begin{bmatrix}Z_{11}^D&0&0&Z_{12}^D\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\Z_{21}^D&0&0&Z_{22}^D\end{bmatrix}$$

$$X_E=P_EZ^EP_E^T=\begin{bmatrix}Z_{11}^E&0&Z_{12}^E&0\\0&0&0&0\\Z_{21}^E&0&Z_{22}^E&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(3) 利用求和公式来求复合多端口网络的参数矩阵

$$M=X_A+X_B+X_C+X_D+X_E=$$

$$\begin{bmatrix}Z_{11}^A+Z_{11}^D+Z_{11}^E&Z_{12}^A&Z_{12}^E&Z_{12}^D\\Z_{21}^A&Z_{22}^A+Z_{11}^B&Z_{12}^B&0\\Z_{21}^E&Z_{21}^A&Z_{22}^A+Z_{11}^C+Z_{22}^E&Z_{12}^C\\Z_{21}^D&0&Z_{21}^C&Z_{22}^C+Z_{22}^D\end{bmatrix}$$

此题也可以利用二端口特性和串联特点来解决，但运算会比较繁琐而且不如此法直观。

## 5 结语

复合多端口网络的参数矩阵求法对于分析和设计复合多端口网络非常有用，本文提到的方法非常适合通过编程实现。同时，本文提到的端口关系矩阵将电路网络和复合多端口网络的知识体系统一起来，有助于进一步完善电路网络知识。

参考文献：


[1] 邱关源，罗先觉主编. 电路(第5版)[M]. 北京：高等教育出版社，2006年

[2] 周守昌主编.《电路原理》(第2版). 北京：高等教育出版社，2004年8月

[3] 吴大正主编.《电路基础》(第2版). 西安：西安电子科技大学出版社，2007年7月


(上接第6页訾小超等文)

## 3 结语

“系统软件开发实践”课程对学生领悟经典系统软件的设计理念、深入理解系统软件的功能特性，以及基于这些功能特性编写高质量程序等方面都有很好的帮助，同时可以提高学生运用软件工程思想设计软件和编制程序的能力。相对于一般应用程序而言，系统软件的实现和程序调试具有较高的难度，该类课程的开展无论是对教师还是对学生都是一个挑战。本文对“系统软件开发实践”课程的教学工作所进行的探讨，期望能起到抛砖引玉的作用。

参考文献：


[1] 龚玲，陆松年，薛质，“操作系统”课程教学探索[J]. 南京：电气电子教学学报，2007，29(5)：1-3

[2] 宋广华，段健平，李善平，边学边干教研结合-谈“操作系统”课程教学改革[J]. 南京：电气电子教学学报，2006，28(5)：1-3

[3] 林明方，将Linux引入操作系统课程教学的研究和实践[J]. 福州：福建电脑，2009年，21(6) 208-208

[4] 滕艳平，王海珍，潘海珠，高校操作系统课程教学创新模式的研究与实践[J]. 北京：计算机教育，2009，7(7)：101-103