

拉伸法测杨氏（弹性）模量

钟瑞

2020年8月

目录

01 实验概述

02 实验原理

- 杨氏模量的定义
- 光杠杆法测量微小伸缩量的原理
- 望远镜成像原理
- 实验装置

03 实验内容

实验目的

1. 学习用拉伸法测金属丝的杨氏(弹性)模量。
2. 掌握光杠杆法测量微小长度变化的原理。
3. 掌握各种测量工具的正确使用方法
4. 学会用逐差法处理实验数据。
5. 学会不确定度的计算方法。

实验器材

实验架，望远镜，光杠杆组件，数字拉力计，长度测量工具
(钢卷尺、游标卡尺、螺旋测微器)



实验原理

杨氏模量的定义

形变： 在外力的作用下，物体的形状发生改变。

弹性形变： 撤去外力后，形变消失，物体能恢复到原来的形状。

塑性形变： 外力超过一定限度，撤去外力后，形变不能完全消除，留有剩余的形变。

弹性模量： 在弹性限度内，材料的应力与应变（即相对形变）之比。

杨氏模量： 弹性模量的一种，又称拉伸模量，定义为在胡克定律适用的范围内，单轴应力和单轴形变之比。

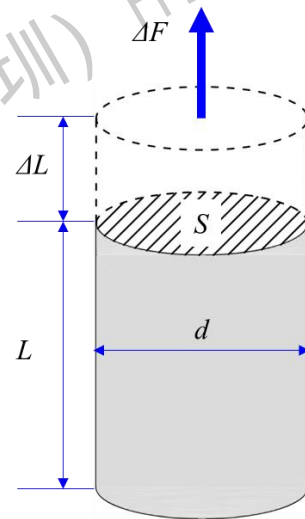
原长为 L 、横截面积为 S 的金属丝，沿长度方向拉力由 F 增加到 F' 时伸长了 ΔL ，根据胡克定律有

$$E \cdot \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta F}{S} = \frac{F' - F}{S}$$

$\frac{\Delta F}{S}$ ：应力的改变量， $\frac{\Delta L}{L}$ ：应变

E ：应力的改变量与应变之比，即为杨氏模量（单位： N/m^2 ）

杨氏模量表征的是材料本身的性质，仅取决于材料本身的物理性质，数值越大，表示材料越不容易发生形变。



金属丝直径为 d ， $S = \pi d^2 / 4$

$$E = \frac{4(F' - F)L}{\pi d^2 \Delta L}$$

关键：精确测量 ΔL （**光杠杆法**）。

光杠杆法测量微小伸缩量的原理

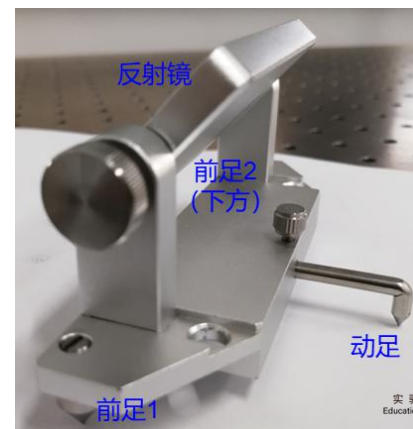
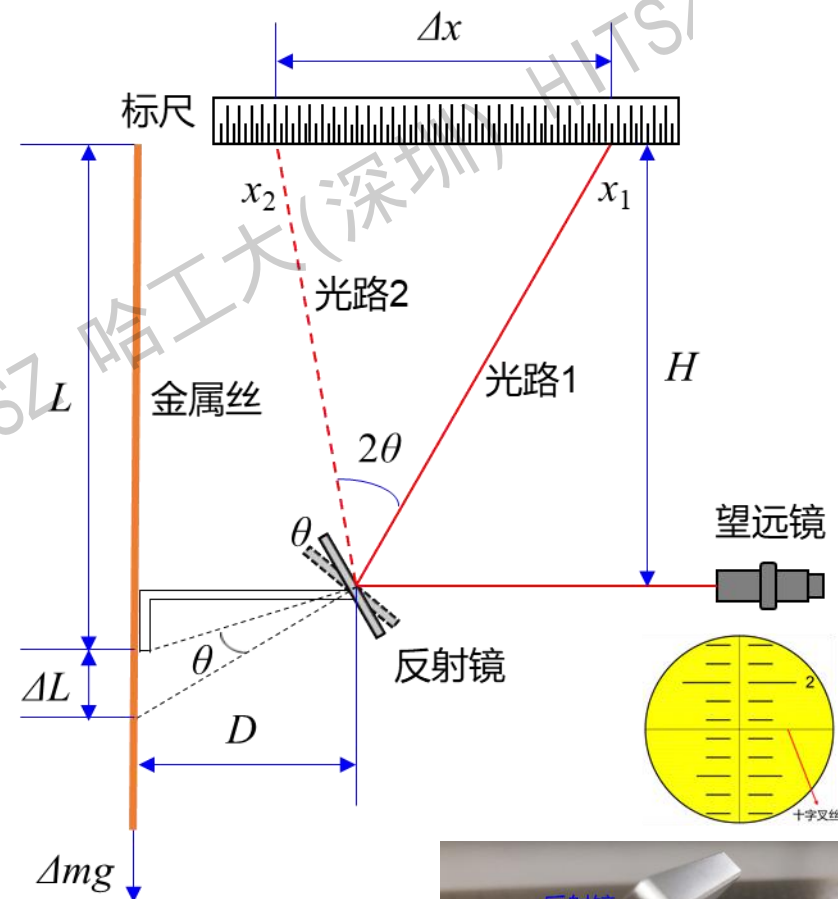
1. 初始阶段：望远镜十字叉丝水平线与标尺刻度线 x_1 对齐。
2. 拉力改变 $\Delta mg \rightarrow$ 金属丝长度变化 $\Delta L \rightarrow$ 光杠杆动足位移 $\Delta L \rightarrow$ 反射镜偏转 θ 。
3. 十字叉丝水平线与标尺刻度线 x_2 对齐。
4. 标尺差 $\Delta x = |x_1 - x_2|$ 。
5. 镜面转过 θ 角，其法线亦转过 θ 角，根据光的反射定律，光路2与光路1的夹角为 2θ 。

$$\theta \approx \tan \theta \approx \frac{\Delta L}{D} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \boxed{\frac{2H}{D}} \cdot \Delta L \quad \Rightarrow \quad E = \frac{8\Delta mg LH}{\pi D d^2} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

放大倍数

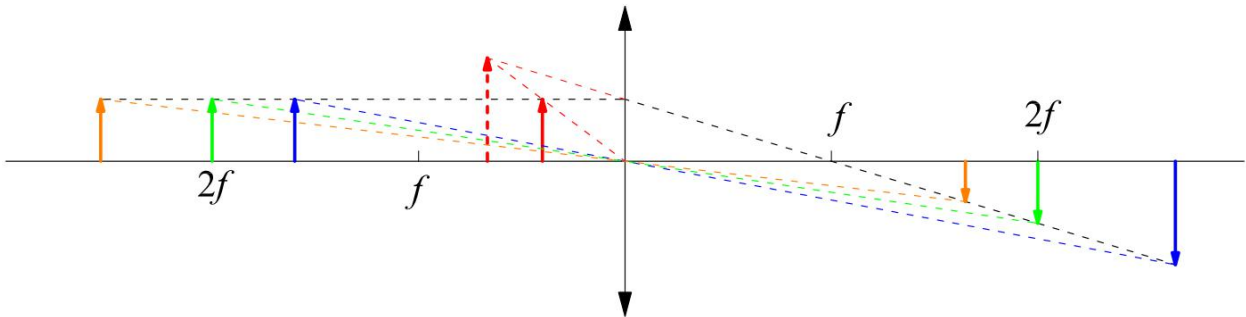
$$2\theta \approx \tan(2\theta) \approx \frac{\Delta x}{H} = \frac{|x_1 - x_2|}{H}$$

将微小形变量 ΔL 的测量转化为对 Δx 的测量。



望远镜成像原理

由两个凸透镜组成，分别为目镜和物镜。

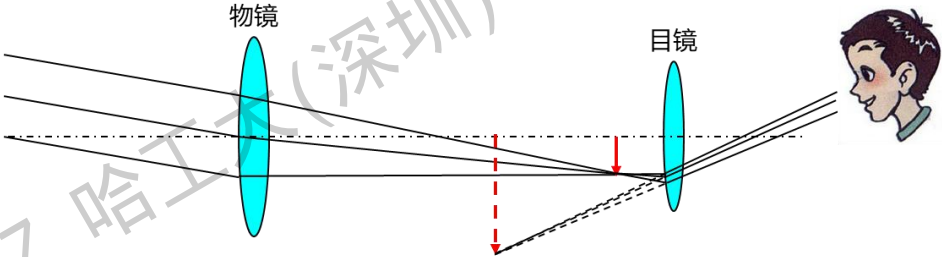


光线通过凸透镜的基本原则

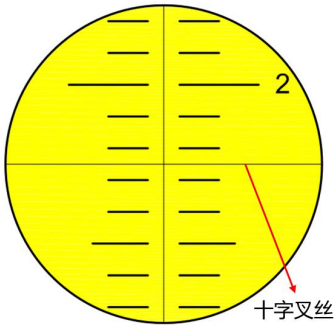
1. 平主过焦；
2. 过焦平主；
3. 过心不变；
4. 平行光会聚于焦平面；
5. 焦平面上任意点发出的光成为平行光。

凸透镜成像规律

物距	像距	成像
$> 2f$	$(f, 2f)$	倒立缩小的实像
$= 2f$	$= 2f$	倒立等大的实像
$(f, 2f)$	$> 2f$	倒立放大的实像
$= f$	∞	不成像
$< f$	< 0	正立放大的虚像



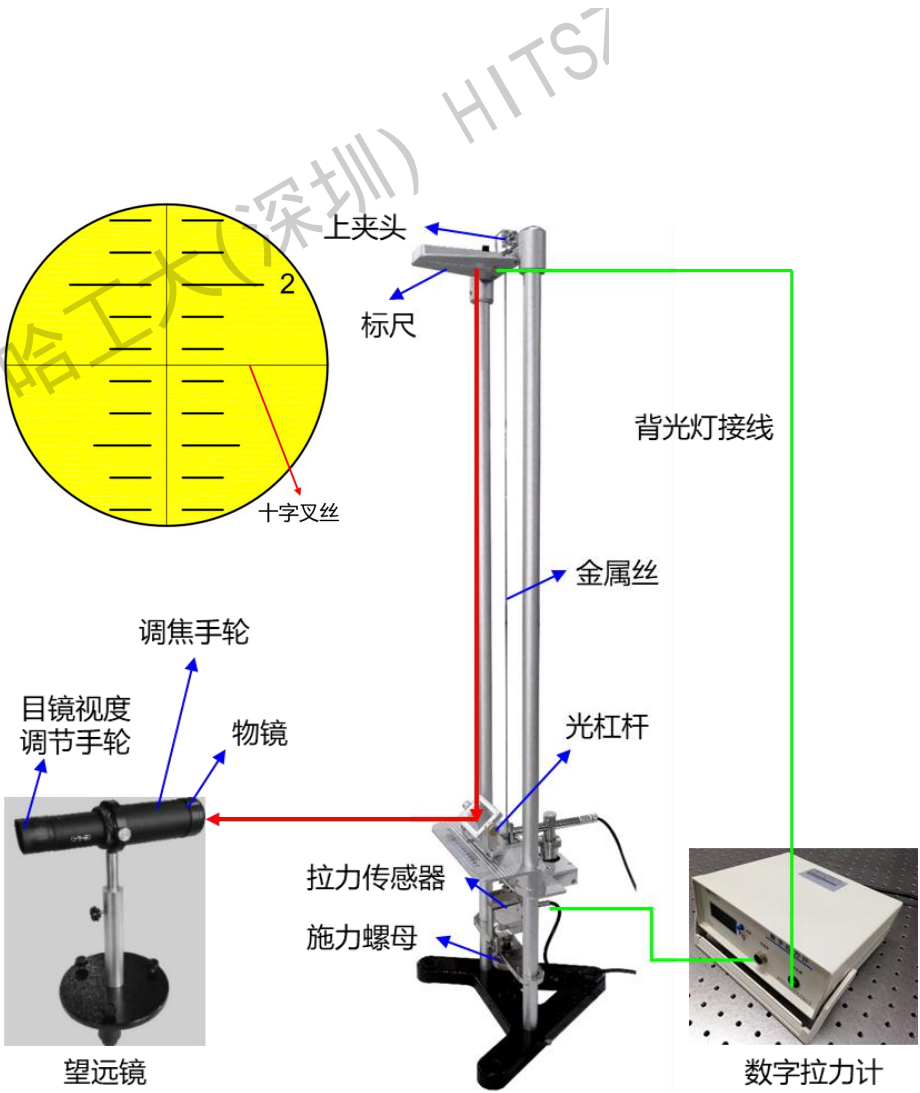
1. 物距大于物镜焦距的两倍，成倒立缩小的实像。
2. 物镜像即目镜的物，位于目镜一倍焦距以内，成正立放大的虚像。
3. 十字叉丝为测量参考线，其水平线应与标尺刻度线平行。



$$E=\frac{8\Delta mgLH}{\pi Dd^2}\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

- L 和 H ：分子项，数值较大，一次项，精度要求不高，钢卷尺测量。
- D ：分母项，数值较小，一次项，精度要求较高，游标卡尺测量。
- d ：分母项，数值非常小，二次项，精度要求非常高，螺旋测微器测量。

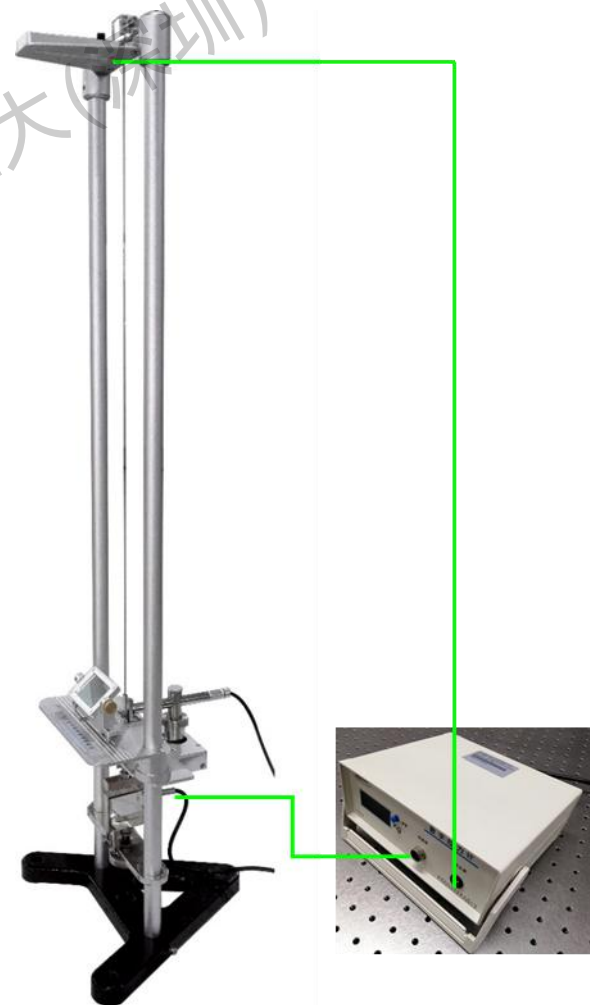
量具名称	测量参数	量程	分辨率	误差限 ($\Delta_{\text{仪}}$)
钢卷尺	L, H	2000.0 mm	1 mm	0.8 mm
游标卡尺	D	150.00 mm	0.02 mm	0.02 mm
螺旋测微器	d	25.000 mm	0.01 mm	0.004 mm
数字拉力计	m	20.00 kg	0.01 kg	0.005 kg
标尺	Δx	80.0 mm	1 mm	0.5 mm



实验内容

调节实验架

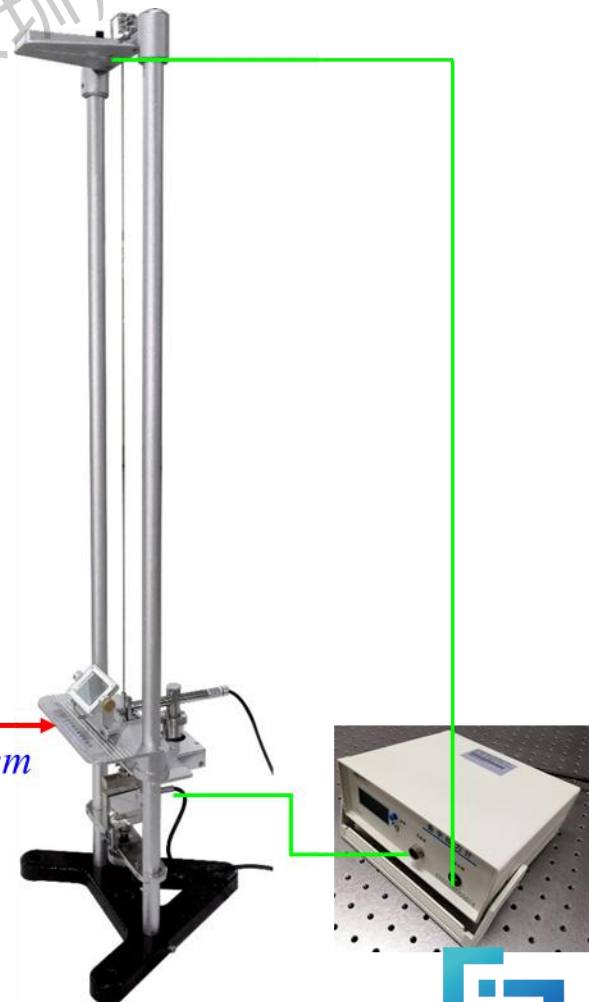
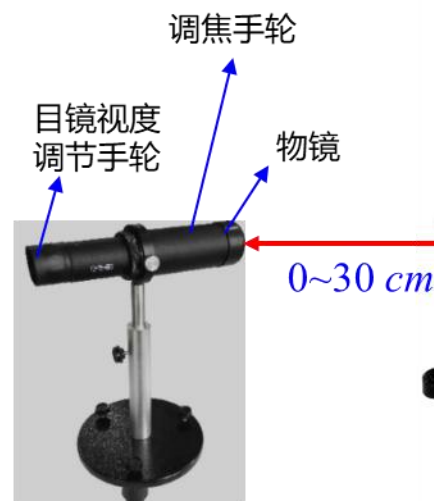
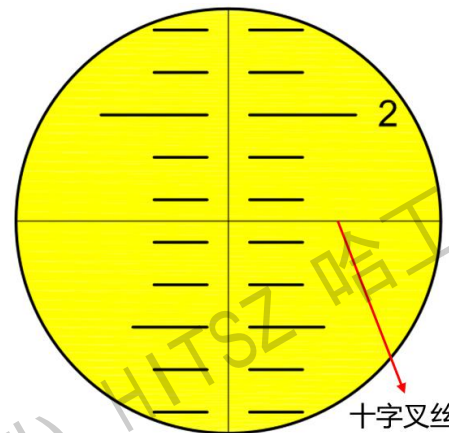
1. **接线：**拉力传感器→数字拉力计信号接口，数字拉力计电源输出孔→背光源电源插孔。
2. **开电源：**打开数字拉力计电源开关。
3. **初始化：**旋转施力螺母，给金属丝施加**预拉力 m_0 ($3.00 \pm 0.02 \text{ kg}$)**，将金属丝拉直。



调节望远镜

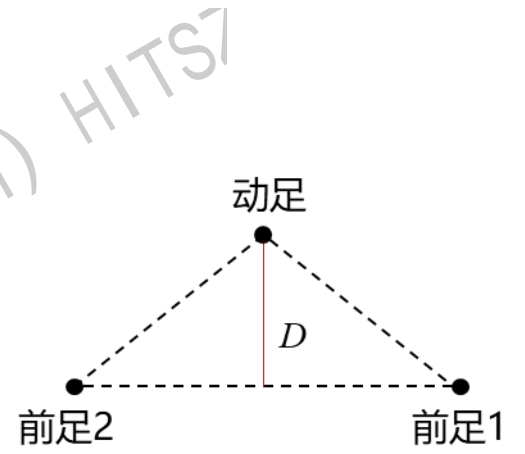
- 1. 粗调：**望远镜与实验架台板相距 $0\sim 30\text{ cm}$ 。
调节望远镜使其**正对反射镜中心**，仔细调节**反射镜的角度**，直到从望远镜中能看到明亮的黄光。
- 2. 微调：**调节**目镜视度调节手轮**，使十字叉丝清晰可见。调节**调焦手轮**，使标尺像清晰可见。**转动望远镜镜身**，使十字叉丝水平线与标尺刻度平行，再次调节**调焦手轮**，使标尺像清晰可见。
- 3. 初始化：**调节**反射镜的角度**，使十字叉丝水平线对齐 $\leq 2.0\text{ cm}$ 的刻度线，以**避免实验做到后面超出标尺量程**。

注意：望远镜调好之后，后续步骤中不能再调整，并尽量保证实验桌不要有震动，以保证望远镜稳定。



测量 L 、 H 、 D

1. 用钢卷尺测量金属丝原长 L ，始端对齐横梁上表面，另一端对齐平台板上表面。
2. 用钢卷尺测量反射镜转轴到标尺的垂直距离 H ，始端对齐横梁上表面，另一端对齐反射镜转轴。
3. 用游标卡尺测量光杠杆常数 D ：
 - 旋松锁紧螺钉，调节动足长度，以动足尖能尽量贴近但不贴靠到金属丝，同时两前足能置于台板上的同一凹槽中为宜。
 - 用三足尖在平板纸上压三个浅的痕迹，通过画细线的方式画出两前足连线的高（即光杠杆常数 D ）。
 - 用游标卡尺测量光杠杆常数 D ，测量完成后将光杠杆放回台板。

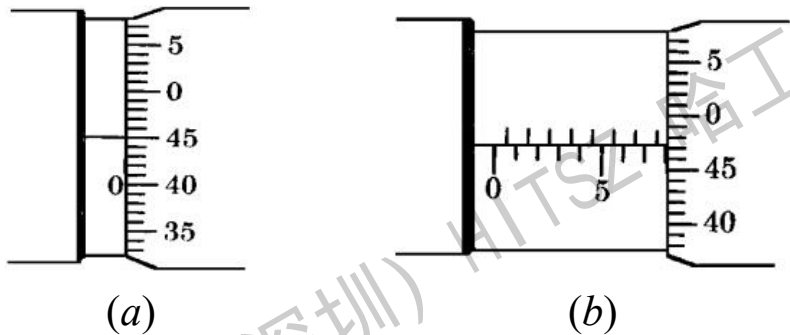


L (mm)	H (mm)	D (mm)

- ### 说明
- L 、 H 、 D 均为一次测量，计算相对不确定度时，其测量平均值即为该测量值。
 - 注意读数精度：钢卷尺有估读；游标卡尺没有估读。

测量金属丝直径 d

1. 测量前确定螺旋测微器的零差 d_0 ：拧紧螺旋测微器，若可动刻度的零刻线在固定刻度的横线上方，则 d_0 为正，；若可动刻度的零刻线在固定刻度的横线下方，则 d_0 为负。
2. 用螺旋测微器测量不同位置、不同方向的金属丝直径视值 $d_{\text{视}}$ ，至少测量6次，计算平均值 $\overline{d_{\text{视}}}$ ，金属丝直径的平均值 $\overline{d} = \overline{d_{\text{视}}} + d_0$ 。



零差 $d_0 = +5.0 \times 0.01 = +0.050\text{mm}$
测量结果为 $8 + 47.1 \times 0.01 + 0.050 = 8.521\text{mm}$

次数	1	2	3	4	5	6
$d_{\text{视}i} \text{ (mm)}$						
$\overline{d_{\text{视}}} \text{ (mm)}$	$\overline{d_{\text{视}}} = \frac{\sum_{i=1}^6 d_{\text{视}i}}{6} = \underline{\hspace{2cm}}$					
$d_0 \text{ (mm)}$						
$\overline{d} \text{ (mm)}$	$\overline{d} = \overline{d_{\text{视}}} + d_0 = \underline{\hspace{2cm}}$					

说明：
金属丝直径 $d = d_{\text{视}} + d_0$ ，得到 $\partial d / \partial d_{\text{视}} = 1$ ，因此 d 的不确定度等于 $d_{\text{视}}$ 的不确定度。



测量标尺刻度 x 与拉力 mg 的关系

1. 按下数字拉力计的“清零”按钮，记录此时标尺刻度 x_0 。
2. 旋转施力螺母，增加拉力，每隔 $1.00 (\pm 0.02) \text{ kg}$ 记录标尺刻度 x_i^+ ，至 $9.00 (\pm 0.02) \text{ kg}$ 为止，数据记录后再加 0.5 kg 左右（不超过 1.0 kg ，且不记录数据）。
3. 反向旋转施力螺母，减小拉力，每隔 $1.00 (\pm 0.02) \text{ kg}$ 记录标尺刻度 x_i^- ，至 $0.00 (\pm 0.02) \text{ kg}$ 为止。
4. 测量完成后，旋松施力螺母，使金属丝自由伸长，关闭数字拉力计。
5. 用逐差法处理数据，得到拉力每改变 $\Delta mg = 1 \text{ kg}$ 时，相应的标尺刻度改变量 Δx 的平均值 $\overline{\Delta x}$ 。

次数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
拉力视值 $f_i (\text{kg})$	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00
加力时标尺刻度 $x_i^+ (\text{mm})$										
减力时标尺刻度 $x_i^- (\text{mm})$										
平均标尺刻度 $x_i = (x_i^+ + x_i^-)/2 (\text{mm})$										
标尺刻度改变量的平均值 $\overline{\Delta x} (\text{mm})$	$\overline{\Delta x} = \frac{\sum_{i=0}^4 (x_{i+5} - x_i)}{25} = \underline{\hspace{2cm}}$									





$$\text{杨氏模量 } E = \frac{8\Delta mgLH}{\pi Dd^2} \cdot \frac{1}{\Delta x} \Rightarrow \bar{E} = \frac{8\Delta mg(\bar{L})(\bar{H})}{\pi(\bar{D})(\bar{d})^2} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{8\Delta mgLH}{\pi D(\bar{d})^2} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

合成相对不确定度

$$E_E = \frac{U_E}{\bar{E}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln E}{\partial L}\right)^2 U_L^2 + \left(\frac{\partial \ln E}{\partial H}\right)^2 U_H^2 + \left(\frac{\partial \ln E}{\partial D}\right)^2 U_D^2 + \left(\frac{\partial \ln E}{\partial \Delta m}\right)^2 U_{\Delta m}^2 + \left(\frac{\partial \ln E}{\partial d}\right)^2 U_d^2 + \left(\frac{\partial \ln E}{\partial \Delta x}\right)^2 U_{\Delta x}^2} = \sqrt{\frac{U_L^2}{L^2} + \frac{U_H^2}{H^2} + \frac{U_D^2}{D^2} + \frac{U_{\Delta m}^2}{\Delta m^2} + \frac{4U_d^2}{\bar{d}^2} + \frac{U_{\Delta x}^2}{\Delta x^2}}$$

• $L, H, D, \Delta m$ 只有B类不确定度 $\frac{\Delta_{\text{仪}}}{C}$ ($C = \sqrt{3}$)。

• d : A类不确定度 $S_{d_{\text{视}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (d_{\text{视}i} - \bar{d}_{\text{视}})^2}{6 \times (6-1)}}$, B类不确定度 $\frac{\Delta_{\text{仪}}}{C}$ ($C = \sqrt{3}$)，合成不确定度 $U_d = \sqrt{(S_{d_{\text{视}}})^2 + \left(\frac{\Delta_{\text{仪}}}{C}\right)^2}$

• Δx 为间接测量量，要计算其合成不确定度 $U_{\Delta x}$ 。

量具名称	测量参数	误差限 ($\Delta_{\text{仪}}$)
钢卷尺	L, H	0.8 mm
游标卡尺	D	0.02 mm
螺旋测微器	d	0.004 mm
数字拉力计	m	0.005 kg
标尺	Δx	0.5 mm





Δx 的不确定度

$$\Delta x = \frac{(x_9 + x_8 + x_7 + x_6 + x_5) - (x_4 - x_3 - x_2 - x_1 - x_0)}{25}$$

$$\overline{\Delta x} = \frac{\sum_{i=0}^4 (\overline{x_{i+5}} - \overline{x_i})}{25}$$

$$\overline{x_i} = \frac{x_i^+ + x_i^-}{2}$$

Δx 为10个直接测量量 x_i ($i=0, 1, 2, \dots, 9$) 的函数, 每个自变量测量两次 (x_i^+ 和 x_i^-), 合成相对不确定度为:

$$E_{\Delta x} = \frac{U_{\Delta x}}{\Delta x} = \sqrt{\sum_{i=0}^9 \left(\frac{\partial \ln \Delta x}{\partial x_i} \right)^2 U_{x_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^9 \left(\frac{1}{x_i} \right)^2 U_{x_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^9 \frac{U_{x_i}^2}{\overline{x_i}^2}} = \sqrt{\sum_{i=0}^9 \frac{4U_{x_i}^2}{(x_i^+ + x_i^-)^2}}$$

$$x_i \text{ 的A类不确定度 } S_{\overline{x_i}} = \sqrt{\frac{(x_i^+ - \overline{x_i})^2 + (x_i^- - \overline{x_i})^2}{2 \times (2-1)}} = \frac{|x_i^+ - x_i^-|}{2}, \text{ B类不确定度 } \frac{\Delta_{\text{仪}}}{C} \quad (C = \sqrt{3}), \quad U_{x_i} = \sqrt{\left(S_{\overline{x_i}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_{\text{仪}}}{C} \right)^2}$$

$$\text{得到 } \Delta x \text{ 的合成相对不确定度表示为 } E_{\Delta x} = \frac{U_{\Delta x}}{\Delta x} = \sqrt{\sum_{i=0}^9 \frac{(x_i^+ - x_i^-)^2 + \frac{4}{3}(\Delta_{\text{仪}})^2}{(x_i^+ + x_i^-)^2}}$$



注意事项

1. 望远镜调好之后，后续步骤中不能再调整，并尽量保证实验桌不要有震动，以保证望远镜稳定。
2. 最大实际拉力不能超过 13.00 kg 。
3. 严禁改变限位螺母位置，避免最大拉力限制功能失效。
4. 加力和减力过程中，施力螺母不能回旋（滞后效应）。
5. 严禁用手触摸目镜、物镜、平面反射镜等光学镜表面，不得用手、布块或任意纸片擦拭镜面。
6. 注意各种测量工具的读数方法。
7. 实验完毕后，应旋松施力螺母，使金属丝自由伸长。



谢谢

