复合含源多端口网络的参数矩阵计算

葛旭
哈尔滨工业大学（深圳）
自动化五班
广东，深圳

***Abstract*—**电路教材对二端口网络的连接方式进行了介绍并给出二端口网络级联时参数矩阵的计算方法，却未提到其余连接方式的传输特性，以及三个或更多个二端口连接时的传输特性。多个二端口的任意连接可以构成复合多端口网络**,** 其参数矩阵也可以由构成它的二端口网络的参数矩阵表示。 本文参考了一些文献中类比电路网络中的关联矩阵所建立的描述二端口和复合多端口关系的端口关联矩阵**,** 在此基础上对复合含源多端口网络进行分析。

I. 引言

在电网络技术应用中，为便于分析、设计和调试，常将整个网络划分为若干个具有简单功能的子网络，每个子网络对信号进行不同的传输、变换和控制。简单而常用的子网络是二端口网络。

几个二端口，按一定方式连接起来而不破坏端口条件，就成为了一个复合的二端口。教材上仅介绍了两个二端口的级联特性，因此二端口串联或者并联的传输特性差异之处无从得知。并且书中仅仅提及了两个二端口的级联特性，如果是三个或者更多个二端口以不同方式连接，那么他的传输参数矩阵又是怎么样的。

对于连续的串联或者并联的连接情况，可以看作等效的二端口与后面的二端口接连进行串联或者并联操作。当N个二端口串联或者并联时，设连接后各二端口均满足端口连接条件, 二者的网络参数关系如下:

二端口串联：$Z=\sum_{i=1}^{N} Z^i$

二端口并联：$Y=\sum_{i=1}^{N} Y^i$

下面将引入复合含源多端口网络以及端口关联矩阵的概念，并求出复合含源多端口网络的参数矩阵。

II. 复合含源多端口网络与端口关联矩阵

A. 复合含源多端口

所谓复合多端口网络，即对于多个二端口组成的电路网络，有多个外接端口。该网络并非由所有的二端口全部串联或者并联构成，而是由这些二端口混联而成。其定义如下:

如果一个N端口网络由M个二端口构成,并且满足任何一个二端口网络的两个端口都与N端 口网络中的两个端口相连接,则称此N端口网络为一个复合N端口网络。其中N,M满足$M\geq N\geq 2$ 。 而复合含源多端口网络在各个二端口内增加了电压源或者电流源。由《含源线性二端口网络的一种简化处理方法》一文中可以得知，内部含源的二端口可以在外部等效为电压源和电流源，本文中只讨论在输入端口附加电压源的情况。

复合含源三端口网络如图1所示:

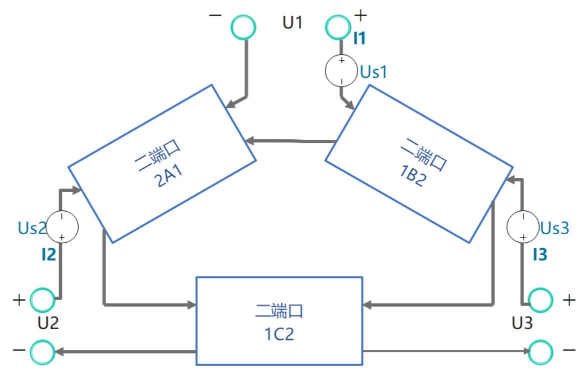

Fig. 1. 三端口网络

我们接下来引入图论内容：用节点表示复合多端口的 端口, 用支路表示二端口网络, 形成复合多端口的网 络图如图2所示:

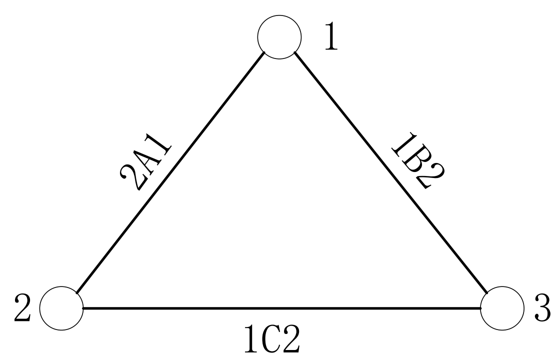

Fig. 2. 电路简化模型

B. 端口关联矩阵

类比第十一章网络图论中的关联矩阵，我们把描述某一个二端口和复合多端口是否具有端口连接关系的矩阵称为此二端口的端口关联矩阵。

因此, 端口关联矩阵的行数对应复合多端口的端口数,列数为2,对应二端口的端口数。我们用P_m 来表示二端口m的端口关联矩阵, 矩阵中第i行第j列的元素定义为:

$$P_{ij}=\begin{cases}1, \text{当}i\text{端口和}j\text{端口相连接}\\0, \text{当}i\text{端口和}j\text{端口不连接}\end{cases}$$

则由A,B,C三个二端口构成的复合三端口网络,其端口关联矩阵分别为:

$$P_A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix},P_B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},P_C=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

因为二端口A的1端与节点1相连，2端与节点2相连，所以$p_{11}=0,p_{22}=0$，以此类推可以得到所有的端口关联矩阵。

III. 复合含源多端口网络的串联

因为多端口网络的传输特性具有规律性，所以先对复合三端口网络的参数矩阵进行研究。并且重点研究二端口通过串联和并联构成的复合三端口的网络参数矩阵。
如图1和图2,设连接后各二端口均满足端口连接条件,由二端口的特性可得:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}U_1^A\\U_2^A\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}Z_{11}^A&Z_{12}^A\\Z_{21}^A&Z_{22}^A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^A\\I_2^A\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}U_1^B\\U_2^B\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}Z_{11}^B&Z_{12}^B\\Z_{21}^B&Z_{22}^B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^B\\I_2^B\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}U_1^C\\U_2^C\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}Z_{11}^{\mathrm{C}}&Z_{12}^C\\Z_{21}^{\mathrm{C}}&Z_{22}^C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1^C\\I_2^C\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1}$$

由串联的特点可得:

$$\begin{aligned}&I_1=I_1^A=I_1^B\\&I_2=I_2^A=I_1^C\\&I_3=I_2^B=I_2^C\\&U_1=U_1^A+U_1^B+U_{S1}\\&U_2=U_2^A+U_1^C+U_{S2}\\&U_3=U_2^B+U_2^C+U_{S3}\end{aligned}\tag{2}$$

由以上式子可以变形为:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_1^A\\U_2^A\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}U_1^B\\0\\U_2^B\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\U_1^C\\U_2^C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}U_{S1}\\U_{S2}\\U_{S3}\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}Z_{11}^A&Z_{12}^A&0\\Z_{21}^A&Z_{22}^A&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Z_{11}^B&0&Z_{12}^B\\0&0&0\\Z_{21}^B&0&Z_{22}^B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}+\\&\begin{bmatrix}0&0&0\\0&Z_{11}^C&Z_{12}^C\\0&Z_{21}^C&Z_{22}^C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}U_{S1}\\U_{S2}\\U_{S3}\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}Z_{11}^A+Z_{11}^B&Z_{12}^A&Z_{12}^B\\Z_{21}^A&Z_{22}^A+Z_{22}^C&Z_{12}^C\\Z_{21}^B&Z_{21}^C&Z_{22}^B+Z_{22}^C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}U_{S1}\\U_{S2}\\U_{S3}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3}$$

通过观察(3)式，可以发现端口电压矩阵可以由电流矩阵与阻抗矩阵的乘积加上输入端电压源的偏置电压组成，因此定义复合含源三端口的Z参数矩阵为：

$$Z=\begin{bmatrix}Z_{11}^A+Z_{11}^B&Z_{12}^A&Z_{12}^B\\Z_{21}^A&Z_{22}^A+Z_{22}^C&Z_{12}^C\\Z_{21}^B&Z_{21}^C&Z_{22}^B+Z_{22}^C\end{bmatrix}\tag{4}$$

定义偏置电压矩阵为：

$$U_S=\begin{bmatrix}U_{S1}\\U_{S2}\\U_{S3}\end{bmatrix}\tag{5}$$

从式(3)中可以发现,下面三个矩阵比较特别,他们被称为贡献矩阵,表示二端口网络的参数矩阵对于复合多端口网络的参数矩阵的贡献情况。并用X表示:

$$\begin{aligned}X_A&=\begin{bmatrix}Z_{11}^A&Z_{12}^A&0\\Z_{21}^A&Z_{22}^A&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\X_B&=\begin{bmatrix}Z_{11}^B&0&Z_{12}^B\\0&0&0\\Z_{21}^B&0&Z_{22}^B\end{bmatrix}\\X_C&=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&Z_{11}^C&Z_{12}^C\\0&Z_{21}^C&Z_{22}^C\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6}$$

则$Z=X_A+X_B+X_C$
所以(3)式可简化为：

$$U=ZI+U_S\tag{7}$$

并且发现

$$\begin{aligned}&Z^A=\begin{bmatrix}Z_{11}^A&Z_{12}^A\\Z_{21}^A&Z_{22}^A\end{bmatrix},P_A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\\&X_A=P_AZ^AP_A^T\end{aligned}\tag{8}$$

所以类推得：

$$\begin{aligned}X_A&=P_AZ^AP_A^T\\X_B&=P_BZ^BP_B^T\\X_C&=P_CZ^CP_C^T\end{aligned}\tag{9}$$

$$Z=P_AZ^AP_A^T+P_BZ^BP_B^T+P_CZ^CP_C^T\tag{10}$$

所以我们可以得到利用二端口网络的参数矩阵来求复合多端口网络的参数矩阵的方法, 具体步骤如下:
(1)求各个二端口关联矩阵
(2)求各个二端口贡献矩阵
(3)求各个二端口偏置电压
(4)用求和公式来求复合多端口网络的参数矩阵。

IV. 复合含源多端口网络的并联

复合含源多端口网络的并联参数矩阵计算与串联类似，连接后各二端口仍然满足端口定义。则可以利用上述步骤进行计算复合三端口网络的参数矩阵。

(1)求各个二端口关联矩阵

$$P_A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix},P_B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},P_C=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\tag{11}$$

(2)求各个二端口贡献矩阵

$$\begin{aligned}X_A&=P_AY^AP_A^T=\begin{bmatrix}Y_{11}^A&Y_{12}^A&0\\Y_{21}^A&Y_{22}^A&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\X_B&=P_BY^BP_B^T=\begin{bmatrix}Y_{11}^B&0&Y_{12}^B\\0&0&0\\Y_{21}^B&0&Y_{22}^B\end{bmatrix}\\X_C&=P_CY^CP_C^T=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&Y_{11}^C&Y_{12}^C\\0&Y_{21}^C&Y_{22}^C\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{12}$$

(3)求各个二端口偏置电流

$$I_S=\begin{bmatrix}I_{S1}\\I_{S2}\\I_{S3}\end{bmatrix}\tag{13}$$

(4)用求和公式来求复合多端口网络的参数矩阵。

$$\begin{aligned}&Y=X_A+X_B+X_C=\begin{bmatrix}Y_{11}^A&Y_{12}^A&0\\Y_{21}^A&Y_{22}^A&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\\&\begin{bmatrix}Y_{11}^B&0&Y_{12}^B\\0&0&0\\Y_{21}^B&0&Y_{22}^B\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&Y_{11}^C&Y_{12}^C\\0&Y_{21}^C&Y_{22}^C\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}Y_{11}^A+Y_{11}^B&Y_{12}^A&Y_{12}^B\\Y_{21}^A&Y_{22}^A+Y_{11}^C&Y_{12}^C\\Y_{21}^B&Y_{21}^C&Y_{22}^B+Y_{22}^C\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{14}$$

$$I=YU+I_S\tag{15}$$

V. 四端口示例

现举一个复合四端口网络的实例，让本文所采用的方法进行验证分析。图3是该复合四端口网络具体连接图,图4是由五个二端口连接成的复合四端口网络的网络简图。各二端口的连接方式为串联形式,连接后各二端口均满足端口条件。

(1)求各个二端口关联矩阵

$$\begin{aligned}&P_A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix},P_B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix},P_C=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\\&P_D=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},P_E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{16}$$

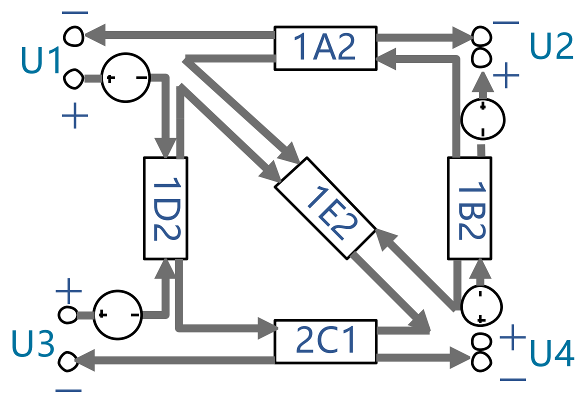

Fig. 3. 复合四端口网络连接图

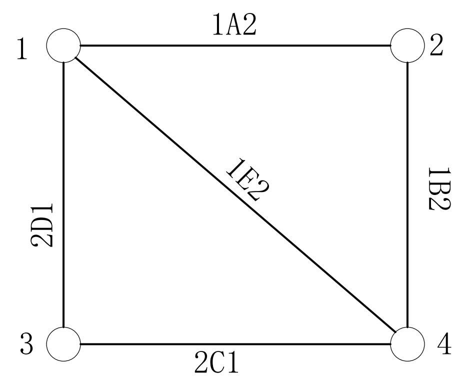

Fig. 4. 复合四端口网络简图

(2)求各个二端口贡献矩阵

$$\begin{aligned}X_A&=P_AZ^AP_A^T=\begin{bmatrix}Z_{11}^A&Z_{12}^A&0&0\\Z_{21}^A&Z_{22}^A&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\X_B&=P_BZ^BP_B^T=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&Z_{11}^B&Z_{12}^B&0\\0&Z_{21}^B&Z_{22}^B&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\X_C&=P_CZ^CP_C^T=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&Z_{11}^C&Z_{12}^C\\0&0&Z_{21}^C&Z_{22}^C\end{bmatrix}\\X_D&=P_DZ^DP_D^T=\begin{bmatrix}Z_{11}^D&0&0&Z_{12}^D\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\Z_{21}^D&0&0&Z_{22}^D\end{bmatrix}\\X_E&=P_EZ^EP_E^T=\begin{bmatrix}Z_{11}^E&0&Z_{12}^E&0\\0&0&0&0\\Z_{21}^E&0&Z_{22}^E&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{17}$$

(3)求各个二端口偏置电压

$$U_S = \begin{bmatrix} U_{S1} \\ U_{S2} \\ U_{S3} \\ U_{S4} \end{bmatrix} \tag{18}$$

(4)用求和公式来求复合多端口网络的参数矩阵。

$$M = X_A + X_B + X_C + X_D + X_E =$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11}^A + Z_{11}^D + Z_{11}^{\mathrm{E}} & Z_{12}^A & Z_{12}^E & Z_{12}^D \\ Z_{21}^A & Z_{22}^A + Z_{11}^B & Z_{12}^B & 0 \\ Z_{12}^E & Z_{21}^A & Z_{22}^A + Z_{11}^C + Z_{22}^E & Z_{12}^C \\ Z_{21}^D & 0 & Z_{21}^C & Z_{22}^C + Z_{22}^D \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$U = MI + U_S \tag{20}$$

VI. 结语

复合含源多端口网络的参数矩阵求法对于分析和设计复合多端口网络非常有用,能够将多端口网络的传输参数通过系统的步骤迅速求解，而不用再根据端口的电压电流方程列写复杂的公式进行求解。同时,本文提到的端口关联矩阵将电路网络和复合多端口网络的知识体系统一起来,有助于进一步梳理电路知识，融会贯通。

References

[1] 齐超,孙天,孙立山,ZesongWang.含源二端口网络等效电路及其传输参数研究[J].电测与仪表,2020,57(01):36-41.

[2] 孙立山，陈希有主编；刘洪臣，霍炬副主编. 电路理论基础 第4版[M]. 北京：高等教育出版社, 2013.07.

[3] 秦利国,孙立山.复合多端口网络的参数矩阵计算[J].电气电子教学学报,2010,(第3期).

[4] 扈宏杰,白雪,张万峰.含源线性二端口网络的一种简化处理方法[J].电工技术杂志,1996,(第11期).

[5] 吴恒玉,唐民丽,何玲.复杂线性含源二端网络等效电路的一次计算方法[J].苏州市职业大学学报,2011,22(01):50-52.