

无损线终端接任意负载暂态响应分析

齐超, 徐汉卿, 黄奕毅, 吴婷

(哈尔滨工业大学 电气学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 本文基于均匀线方程, 利用拉普拉斯变换, 研究了阶跃激励在终端和起端都不匹配的无损均匀线上多次反射传输情形, 借助负载中储能元件响应产生过程的“附加电源”, 推导出终端为任意负载时求解暂态响应的一般方法, 最后通过 RC 电路和 RLC 电路分析及仿真实验加以验证了该求解方法的正确性。

关键词: 暂态响应; 附加电源; 任意负载; 多次反射

中图分类号: TM131.2

文献标识码: A

文章编号: 1008-0686(2017)06-0095-05

Transient Response Analysis of Lossless Transmission Line with Arbitrary Load in the Terminal Port

QI Chao, XU Han-qing, HUANG Yi-yi, WU Ting

(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Based on transmission line equations and Laplace transformation, the multi-reflection transmission process of lossless uniform line with a step excitation was studied when the beginning port and terminal port did not match with the lossless line. The general method for solving transmission equations and obtaining transient responses was proposed when the load was arbitrary, with the help of the “additional source” generated by energy storage elements in the load. In the end, the solving method was verified by the analyses and simulations of RC and RLC circuits.

Keywords: transient response; additional source; arbitrary load; multi-reflection

0 引言

近年来,随着电力系统传输距离的不断增加,规模的不断扩大及超大集成电路的快速发展,传输线暂态响应的研究受到越来越多的关注。从传输线方程入手,利用数学工具和计算机技术,已有文献采用数值求解方法分析了传输线暂态问题^[1-2],但在如何求解解析解方面研究较少。文献[3][4]提出了一种运用卷积定理较为系统的复频域分析法来获得无

畸变传输线的暂态响应,但是文中所提的递推方法求解最终响应,较为复杂繁琐。

在“电路理论基础”均匀传输线学习中可知,行波可以很好地描述阶跃电源在均匀线上的传输过程。当无损线始端接通激励源后,电压/电流正向行波均由始端向终端推进。当正向行波传播到负载端、两不同线路的接头处、线路的分支处或接有集中参数元件处等,都会产生波的反射。书中讨论了均匀线终端开路、短路、匹配及一阶 RC(或 RL)等一

收稿日期: 2016-11-09; 修回日期: 2017-02-28

基金项目: 哈尔滨工业大学教学改革研究项目(XJG2017043), 哈尔滨工业大学研究生教育教改项目(JGJC2017007)

作者简介: 齐超(1970-),女,博士,教授,主要从事电路教学、电网络分析设计及光电测控技术研究, E-mail: qichao@hit.edu.cn

徐汉卿(1996-),男,本科生,研究方向为现代电路分析, E-mail: 1106879892@hit.edu.cn

般性负载情况^[5]。对于行波在第一次传输到负载时,用彼得生法则结合三要素方法能够较好地分析终端负载电压电流解析解。然而,这也只能求解行波第一次到终端时的情况,对于后面的多次传输反射的情形却无法处理。另外,三要素法更多只适用于负载仅有一个电容或电感。对于含有多个动态元件情形,彼得生法则在分析阶跃电源的暂态过程上具有较大的局限性。

本文对无损均匀线暂态响应进行研究,提出了基于“附加电源”求解每一时间段终端暂态响应的通用新方法,为分析复杂负载情况下均匀线传输过程提供了理论依据和实验验证。

1 均匀传输线

1.1 传输线方程及其解

均匀传输线作为分布参数电路,各处电压与电流均是关于时间和位置的函数,其偏微分方程表达式如下^[5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

式中, R_0 、 L_0 分别为单位长度均匀线(往返)上电阻(SI单位: Ω/m)、电感(SI单位: H/m); G_0 、 C_0 分别为单位长度两线间电导(SI单位: S/m)、电容(SI单位: F/m)。对于一定的均匀线,它们都是常量,但 R_0 和 G_0 并非互为倒数。

对于无损均匀线, $R_0 = 0$ 、 $G_0 = 0$, 根据拉普拉斯变换的线性性质和微分性质,式(1)表达为

$$\begin{aligned} -\frac{\text{d}U(x,s)}{\text{d}x} &= sL_0 I(x,s) \\ -\frac{\text{d}I(x,s)}{\text{d}x} &= sC_0 U(x,s) \end{aligned} \quad (2)$$

这是一组关于 x 的常微分方程,其通解为

$$\begin{aligned} U(x,s) &= U^+(s) e^{-s\frac{x}{v}} + U^-(s) e^{s\frac{x}{v}} = U^+ + U^- \\ I(x,s) &= \frac{U^+(s)}{Z_c} e^{-s\frac{x}{v}} - \frac{U^-(s)}{Z_c} e^{s\frac{x}{v}} = I^+ - I^- \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ 为波阻抗, $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ 为波速

根据拉普拉斯反变换的线性性质和延迟性质,对应沿线电压、电流时域解为

$$u(x,t) = u^+(t-x/v) \varepsilon(t-x/v) + u^-(t+x/v) \varepsilon(t+x/v)$$

$$x/v) = u^+(x,t) + u^-(x,t)$$

$$\begin{aligned} i(x,t) &= \frac{1}{Z_c} u^+(t-x/v) \varepsilon(t-x/v) - \frac{1}{Z_c} u^-(t+x/v) \varepsilon(t+x/v) \\ &= i^+(x,t) - i^-(x,t) \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\varepsilon(\cdot)$ 是单位阶跃函数。可见,均匀传输两线间的电压等于正向和反向行波电压之和,电流等于正向与反向行波电流之差。

1.2 行波的多次反射

电压、电流在均匀传输线上是以速度不变的行波方式传播的,当无损均匀线终端和始端都不匹配时,两端都要产生反射波,形成多次反射。设图1中无损线为零初始状态,其波阻抗为 Z_c , 线长为 l 。

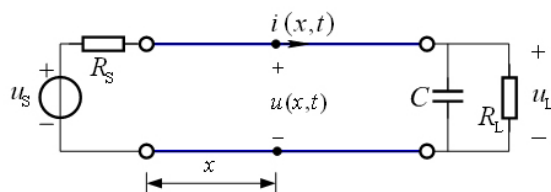


图1 终端和起端都不匹配的无损均匀线

始端接电源电压 $u_s = U_s \varepsilon(t)$ 、内阻 $R_s \neq Z_c$, 终端负载阻抗 $Z_L \neq Z_c$ 。设始端反射系数 N_1 与终端反射系数 N_2 分别为

$$N_1 = \frac{R_s - Z_c}{R_s + Z_c}, \quad N_2 = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \quad (5)$$

图2示意了此传输线中电压行波多次反射的过程

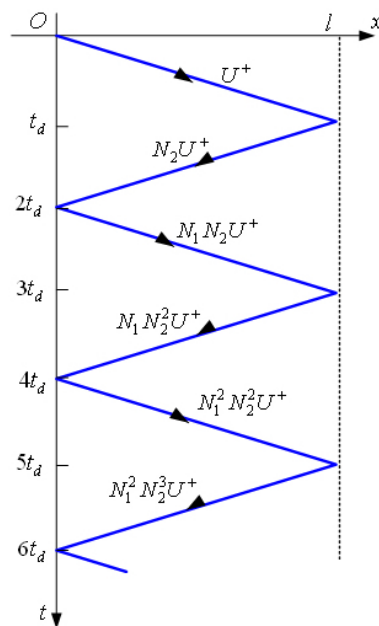


图2 传输线电压行波多次反射示意图

由此可见,当

$$(2k+1)t_d < t < (2k+3)t_d \quad (t_d = l/v; k=0,1,2,\dots)$$

时,终端电压表达式

$$u_2^{(k)} = (1+N_2)(1+N_1N_2+N_1^2N_2^2+\dots+N_1^kN_2^k)U^+ \quad (6)$$

式中 U^+ 是始端入射电压,表达式为

$$U^+ = \frac{Z_c}{R_s + Z_c} U_s$$

2 电路模型与仿真分析

2.1 RC 负载模拟电路分析

图1所示为终端和始端都不匹配的无损均匀线,设激励电源为阶跃电源 $u_s = 10\varepsilon(t)$ V。内阻 R_s 为 $50\ \Omega$ 。无损均匀传输线波阻抗 Z_c 为 $200\ \Omega$,电流从一端传到另一端的传输时间为 $0.1\ \mu\text{s}$ 。负载电容 C 为 $1\ \text{nF}$ 。电阻 R_L 为 $50\ \Omega$ 。下面分析电容两端电压 u_c 随时间 t 的变化情况。

由于电容的 $u-i$ 关系是非线性的,不能直接应用行波传输公式。因此对电路中所有元件进行拉式变换使其转为线性,对应复频域下电源、源内阻、波阻抗、电容、负载电阻的计算值分别为 $10/s$ 、 50 、 200 、 $10^9/s$ 、 50 。具体分析过程如下:

(1) 当时间为 $[0\ \mu\text{s}, 0.1\ \mu\text{s}]$ 时,行波还没有传输到电容上,因此 u_c 为 0 不变。

(2) 当时间在 $[1\ \mu\text{s}, 0.3\ \mu\text{s}]$ 时,行波将第一次传到电容上,电容在 $0.1\ \mu\text{s}$ 时电压为 0 ,储能也为 0 。进入传输线的电压 $U^+ = U_s \times \frac{Z_c}{R_s + Z_c}$ 。当传输到负载端时发生反射,由于在拉氏变换下所有电路元件均为线性元件,因此可以使用行波的传输系数公式(5)中 N_2 。其中 Z_L 是电容与电阻并联阻抗,因此反射电压即为 $N_2 U^+$,由此在第一段传输产生的总效应即为 $U_1 = (1+N_2)U^+$,这里所有量都是拉氏变换下的形式,因此还需对 U_1 进行拉氏反变换得到时域下的电压 $u_1(t)$ 。又由于时间是从 $0.1\ \mu\text{s}$ 后才开始计算的,所以最后的结果还要考虑到 $0.1\ \mu\text{s}$ 的延迟效应。

(3) 当时间在 $[0.3\ \mu\text{s}, 0.5\ \mu\text{s}]$ 时,行波将第二次传到电容上。对于左侧的电源 U_s 来说,它对这一过程的贡献也以行波发生反射表达,反射系数为 N_1 。所以此时电容两端的电压为 $U_{21} = (1+N_2)(1$

$+N_1N_2)U^+$ 。

但是从第二阶段开始,由于电容的储能效应,使得电容在拉氏变换下的模型不再只是阻抗,而是含阻电源,可以称为“附加电源”,原因在于它可等效为同样会对外发出行波的电源,从而影响到后续沿线传输(当然也包括电容两端的电压)。另外,这个电源的属性也是阶跃电源,复频域值为 $\frac{u_c(t_0^-)}{s}$, t_0

为每段传输过程的起点时刻。可以看到附加电源的电压值由行波前一段传输的终值决定。因此必须利用上一步计算的 u_1 ,求出其在 $0.1\ \mu\text{s}$ 时的电压值,从而确定第二段传输中附加电源值。之后需要对负载区进行戴维宁变换。由戴维宁定理可知,负载区的等效阻抗是将附加电源置零后所得单口网络的阻抗,即电容并联电阻所对应的阻抗。负载区的等效电源值等于将负载区这单口网络处于开路状态即断开传输线时的开路电压 U_{1s} 。断开传输线后,在复频域下附加电源、电容的阻抗、纯电阻三者处于串联关系,开路电压满足串联分压关系,即

$$U_{1s} = \frac{u_c(t^-)}{s} \times \frac{R_L}{\frac{10^9}{s} + R_L}$$

U_{1s} 是一个等效电源,同样会向传输线输送电压。其进入传输线的电压与电源输送电压的机制完全相同,即 $U_{22} = U_{1s} \times \frac{Z_c}{Z_1 + Z_c}$ 。由于是线性电路(拉氏变换后),符合叠加定理,因此最后的电压值应为 $U_2 = U_{21} + U_{22}$ 。和(2)中所述同样,将 U_2 进行拉氏反变换,再考虑 $0.3\ \mu\text{s}$ 的延迟,我们可以算出在 $[0.1\ \mu\text{s}, 0.3\ \mu\text{s}]$ 的 $u_2(t)$ 。

以后乃至更多时间段的行波传输都是类似的,但是需要引起注意的是,由于电容在每段传输对应的电压初值都不同,所以其在拉氏变换下等效出的计算电压值也不同。也就是说,每隔 $0.2\ \mu\text{s}$ 就要更换“附加电源”,因此每一传输时段内附加电源产生的行波只有一次。沿线任意处电压、电流响应是由始端激励源的贡献和电容附加电源一次作用的合成。

2.2 RC 负载仿真分析

对图1所示终端和始端都不匹配的无损均匀线 Matlab 理论分析计算结果如图3所示。

由图3可见,在 $[0\ \mu\text{s}, 0.1\ \mu\text{s}]$ 时段,电容电压

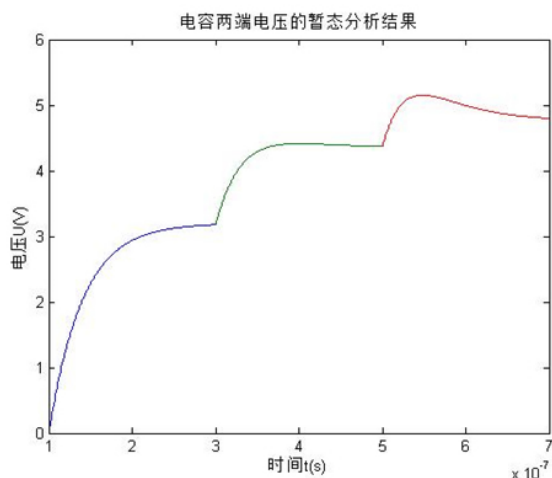


图3 负载电压理论计算结果

为零状态响应,表达式为 $u(t) = A(1 - e^{-t/\tau})$, A 为一确定的常数,图像为指数形状。 u_c 以速率减小的方式不断增大并趋于稳定。

在 $[0.1\mu s, 0.3\mu s]$ 时段,激励电压源 U_s 的行波再次传输过来,破坏了第一时段的稳定状态。由于电容电压具有连续的特点,因此后一段的起点与前一段的终点在 $0.3\mu s$ 处重合,并继续开始充电。这时电容两端电压有两个来源,一个为始端激励源 U_s ,其产生的响应分量还是零状态,以速率减小的方式增长并趋于稳定,表达式为 $u_1(t) = B(1 - e^{-(t-t_0)/\tau})$; 另一个为“附加电源”,其产生的响应为零输入过程,响应分量以速率不断减小的方式变化,同样趋于稳定,表达式为 $u_2(t) = Ce^{-t/\tau}$, B 、 C 均为确定常数。前者响应不断增大,后者响应不断减小,其合成响应为先增大,达到区段极值后减小,最后趋于稳定。以后乃至更多时间段的传输过程都是类似重复,在此不再赘述。

用 ORCAD 进行电路仿真,其模型如图 4 所示,实验结果如图 5 所示。

对比图 3 可见,理论计算的 $u_c(t)$ 与仿真实验结果形状、数值等都吻合得很好,当时间趋于无穷时,两个图像的电压最终都趋于 5 V。这相当于将传输线等效为集中参数理想导线时的结果,也再次验证了文中提到的观点:在阶跃激励下,电容储能并激发出了“附加电源”,不同时段上的,“附加电源”的一次行波和始端激励源的行波作用共同影响了终端负载的电压。

2.3 RLC 负载电路分析与仿真

将负载再加上一个电感线圈,大小为 $10\mu H$,仿

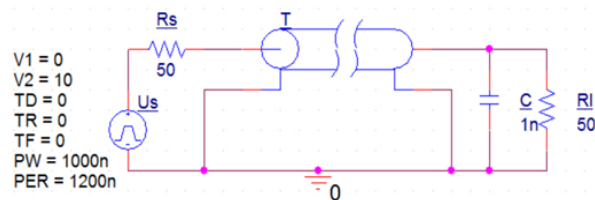


图4 RC 负载的仿真电路

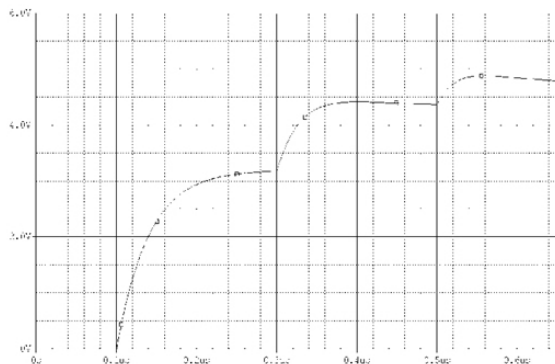


图5 仿真结果

真电路如图 6 所示。

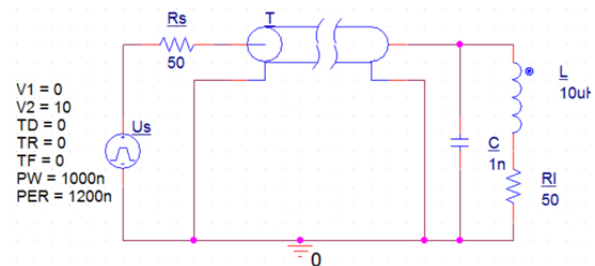


图6 RLC 负载电路图

由于引入了同样具有储能本领的电感,第二次行波传输以及后面的传输,负载区相当于两个“附加电源”,我们每计算一时间段传输过程,都需要以前一段暂态分析的电容电压 u_c 和电感电流 i_L 作为基础。

图 7 和图 8 分别为 Matlab 下理论计算和在 ORCAD 下实验仿真的电容电压随时间变化结果。

可见两个曲线吻合很好,再次验证了本文提出的储能元件具有“附加电源”功能,此分析方法具有通用性,即适用于任意线性负载。

3 结语

本文对均匀传输线终端接任意负载时的传统解析求解提出了一种新思路,即用“附加电源”计算负载内部储能元件产生的响应分量。利用拉普拉斯变换使电源、负载等电路元件在复频域下都具有线性性质,从而转化为线性电路分析。(下接第 107 页)

性”的人民教师。

参考文献:

- [1] 韩众. 教学语言的艺术效果[J]. 上海: 新课程(综合版), 2012, (11): 76
- [2] 庄文中. 教学语言的艺术魅力[J]. 北京: 语言文字应用, 1996, (04): 61-65
- [3] [苏] 苏霍姆林斯基. 给教师的建议(下) [M]. 北京: 教育科学出版社, 2000年1月
- [4] 陈永中. 挤出语言泡沫-关于实现教学语言精练的思考[J]. 石

家庄: 教育实践与研究, 2010, (05): 26-28

- [5] 尹慧茹. 论教学语言艺术中的“三感”[J]. 黑龙江: 教育探索, 2004, (09): 71-72
- [6] 刘永发. 体态语和教学语言[J]. 北京: 课程. 教材. 教法, 1990, (03): 03-06
- [7] 郁昀. 无声的语言艺术-浅谈课堂教学中体态语的运用. 长沙: 湖南农机, 2008, (09): 69-73
- [8] 李生卫. 此时无声胜有声-体态语言在课堂教学中的灵活运用[J]. 内蒙古: 课程教育研究, 2012, (17): 69-73

(上接第98页齐超等文)

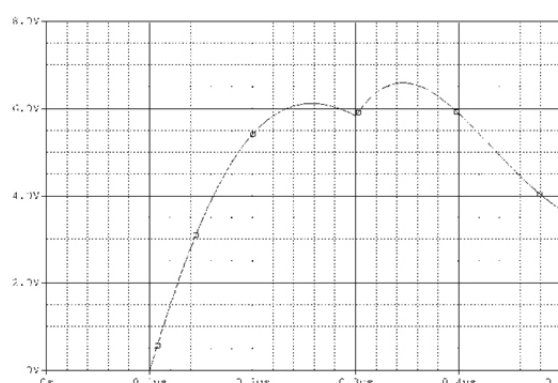
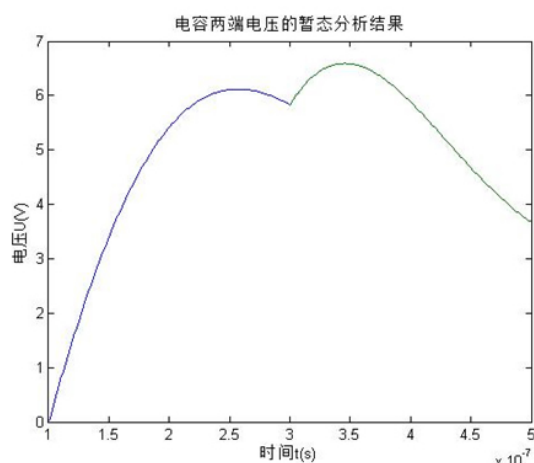


图8 RLC负载电路仿真实验结果

然后在线性条件下利用行波方程解及分析多次反射的相关原理, 分时段求解电源和负载内储能元件产生的响应分量, 最后应用叠加定理得到总响应。利用拉普拉斯反变换代替传统的时域卷积法, 进一步优化了解过程。最终通过仿真验证了这种新思路的正确性。

本文通过对传输过程进行分段研究, 最后得到了精确的解析解, 为传输线的设计、分析提供了理论依据, 具有一定的现实指导作用。

参考文献:

- [1] J A Roden, C R Paul, W T Smith. Finite difference time domain analysis of lossy transmission lines [J]. IEEE Trans. On Electromagnetic Compatibility, 1996, 38(1): 15-24.
- [2] 卢斌先, 王泽忠, 程养春. 基于拉氏反变换的传输线耦合电流半解析解[J]. 北京: 电网技术, 2007, 31(14): 52-56.
- [3] 孙韬, 侯世英, 伍小兵. 一种计算无损传输线上电压电流解析解的方法. [J]. 南京: 电气电子教学学报, 2008, 30(3): 20-22.
- [4] 孙韬, 侯世英. 无畸变传输线接电感负载时的波过程及算法分析[J]. 广州: 电路与系统学报, 2011, 16(1): 47-51.
- [5] 孙立山, 陈希有. 电路理论基础(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2016, 3: 366-372.