习题一

1.（4）

（4）: $\sqrt{i}=\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ 或 $-e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\sqrt{-i}=\sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ 或 $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\sqrt{i}-\sqrt{-i}=e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}$ 或 $e^{i\frac{\pi}{4}}-\left(-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$

或 $-e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}$ 或 $-e^{i\frac{\pi}{4}}-\left(-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

或 $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$=i\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}i$

2.（1） $\left|\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right|=\frac{\sqrt{13}}{13},\ \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right)=-\arctan\frac{2}{3}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

（3）

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\right)=\arg\left(-\frac{7}{2}-13\mathrm{i}\right)+2k\pi=\arctan\frac{26}{7}-\pi+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

5.（3） 由于 $\mathrm{Re}\,z^2\le 1\Leftrightarrow x^2-y^2\le 1$. 知点 z 的范围是双曲线 $x^2-y^2=1$ 及内部。

⑫ 设 $z_k, w_k \in \mathbf{C}, k=1,2,\cdots,n$. 证明拉格朗日恒等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right) - \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}|z_k\bar{w}_j - z_j\bar{w}_k|^2 \quad n \geq 2$$

并由此得出如下不等式

① $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right)$（Cauchy 不等式）；

② $\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}|z_k\bar{w}_j - z_j\bar{w}_k|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right)$.

$n=2$: $|z_1w_1+z_2w_2|^2 = (|z_1|^2+|z_2|^2)(|w_1|^2+|w_2|^2) - |z_1\overline{w_2} - z_2\overline{w_1}|^2$

$: (z_1\overline{w_2} - z_2\overline{w_1}) \cdot \overline{(z_1\overline{w_2} - z_2\overline{w_1})}$

左边 $= (z_1w_1+z_2w_2)(\overline{z_1w_1}+\overline{z_2w_2})$

$= z_1w_1\cdot\overline{z_1}\overline{w_1} + z_1w_1\cdot\overline{z_2}\overline{w_2} + z_2w_2\cdot\overline{z_1}\overline{w_1} + z_2w_2\cdot\overline{z_2}\cdot\overline{w_2}$

$|z_1|^2|w_1|^2$ $\quad |z_2|^2|w_2|^2$

右边 $= |z_1|^2\cdot|w_1|^2 + \cancel{|z_1|^2|w_2|^2} + \cancel{|z_2|^2|w_1|^2} + |z_2|^2|w_2|^2$

$- z_1\overline{w_2}\cdot\overline{z_1}w_2 + z_1\overline{w_2}\cdot\overline{z_2}w_1 + z_2\overline{w_1}\,\overline{z_1}\,\overline{w_2} - z_2\overline{z_2}w_1\overline{w_1}$

$\cancel{= |z_1|^2|w_2|^2}$ $\quad \cancel{= |w_1|^2|z_2|^2}$

$n=2$: 成立.

假设 $n=m$ 成立. 试证: $n=m+1$ 成立

左边 $= \left|\sum_{k=1}^{m+1} z_kw_k\right|^2 = \left|\sum_{k=1}^{m} z_kw_k + z_{m+1}w_{m+1}\right|^2$

$= \left(\sum_{k=1}^{m} z_kw_k + z_{m+1}w_{m+1}\right)\cdot\left(\overline{\sum_{k=1}^{m} z_kw_k} + \overline{z_{m+1}w_{m+1}}\right)$

$= \left(\sum_{k=1}^{m} z_kw_k\right)\left(\overline{\sum_{k=1}^{m} z_kw_k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} z_kw_k\right)\left(\overline{z_{m+1}w_{m+1}}\right)$

$\left|\sum_{k=1}^{m} z_kw_k\right|^2$ $+ z_{m+1}w_{m+1}\left(\sum_{k=1}^{m}\overline{z_kw_k}\right) + z_{m+1}w_{m+1}\cdot\overline{z_{m+1}}\cdot\overline{w_{m+1}}$

$|z_{m+1}|^2|w_{m+1}|^2$

$= \left(\sum_{k=1}^{m}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m}|w_k|^2\right) - \sum_{1\leq k<j\leq m}|z_k\overline{w_j} - z_j\overline{w_k}|^2 + |z_{m+1}|^2|w_{m+1}|^2$

$+ \left(\sum_{k=1}^{m} z_kw_k\right)\overline{z_{m+1}}\,\overline{w_{m+1}} + z_{m+1}w_{m+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}\overline{z_kw_k}\right)$

右边 $= \left(\sum_{k=1}^{m+1}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m+1}|w_k|^2\right) - \sum_{1\leq k<j\leq m+1}|z_k\overline{w_j} - z_j\overline{w_k}|^2$

$= \left(\sum_{k=1}^{m}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m}|w_k|^2\right) + |z_{m+1}|^2\cancel{\left(\sum_{k=1}^{m}|w_k|^2\right)}$

$|w_{m+1}|^2\cancel{\left(\sum_{k=1}^{m}|z_k|^2\right)} - \sum_{1\leq k<j\leq m}|z_k\overline{w_j} - z_j\overline{w_k}|^2$

$- \sum_{1\leq k\leq m}|z_k\overline{w_{m+1}} - z_{m+1}\overline{w_k}|^2$

$\sum_{1\leq k\leq m}|z_k\overline{w_{m+1}} - z_{m+1}\overline{w_k}|^2$

$= \sum_{1\leq k\leq m}\Big(|z_k|^2|w_{m+1}|^2 + |z_{m+1}|^2|\overline{w_k}|^2$

$- z_k\overline{w_{m+1}}\cdot\overline{z_{m+1}}w_k - \overline{z_k}w_{m+1}\cdot z_{m+1}\overline{w_k}\Big)$

$= \cancel{\left(\sum_{k=1}^{m}|z_k|^2\right)}|w_{m+1}|^2 + |z_{m+1}|^2\cancel{\sum_{k=1}^{m}}|w_k|^2$

$- \overline{z_{m+1}}\,\overline{w_{m+1}}\sum_{k=1}^{m}w_kz_k - w_{m+1}z_{m+1}\sum_{k=1}^{m}\overline{z_k}\,\overline{w_k}$

左边 = 右边 $n=m+1$ 成立

13 设 $|z_0|<1$. 证明：

若 $|z|=1$，则

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|=1$$

若 $|z|<1$，则：

(1) $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|<1$；

(2) $\dfrac{||z|-|z_0||}{1-|z_0||z|}\leqslant\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|\leqslant\dfrac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}$.

$$\langle 2\rangle\quad \frac{||z|-|z_0||}{1-|z_0||z|}\le\frac{|z-z_0|}{|1-\bar{z}_0 z|}\le\frac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}$$

$$\Longleftrightarrow(\;\cdots\;)^2\le(\;\cdots\;)^2\le(\;\cdots\;)^2$$

$$\Longleftrightarrow\frac{|z|^2+|z_0|^2-2|z||z_0|}{1+|z_0|^2|z|^2-2|z||z_0|}\le\frac{|z|^2+|z_0|^2-(z\bar{z}_0+\bar{z}z_0)}{1+|z_0|^2|z|^2-(\bar{z}_0 z+\bar{z}z_0)}$$

$$\le\frac{|z|^2+|z_0|^2+2|z||z_0|}{1+|z_0|^2|z|^2+2|z||z_0|}$$

方法一：十字交叉相乘

$$\frac{|z|^2+|z_0|^2-2|z||z_0|}{1+|z_0|^2|z|^2-2|z||z_0|}\le\frac{|z|^2+|z_0|^2-(z\bar{z}_0+\bar{z}z_0)}{1+|z_0|^2|z|^2-(\bar{z}_0 z+\bar{z}z_0)}$$

方法二：

利用糖水不等式. $0<a<b\quad c>0$:

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$$

$$\frac{|z|^2+|z_0|^2-2|z||z_0|}{1+|z_0|^2|z|^2-2|z||z_0|}\underset{①}{\le}\frac{|z|^2+|z_0|^2-(z\bar{z}_0+\bar{z}z_0)}{1+|z_0|^2|z|^2-(\bar{z}_0 z+\bar{z}z_0)}$$

$$\underset{②}{\le}\frac{|z|^2+|z_0|^2+2|z||z_0|}{1+|z_0|^2|z|^2+2|z||z_0|}$$

$$|z|^2+|z_0|^2\le 1+|z_0|^2|z|^2$$

$a=|z|^2+|z_0|^2-(z\bar{z}_0+\bar{z}z_0)$

$b=1+|z_0|^2|z|^2-(\bar{z}_0 z+\bar{z}z_0)$

$c=2|z||z_0|-(z\bar{z}_0+\bar{z}z_0)\ge 0$

$$\boxed{\frac{a-c}{b-c}\le\frac{a}{b}}\Rightarrow①$$

$d=2|z|+|z_0|+(z_0 z+\bar{z}z_0)\ge 0$

$$\frac{a}{b}\le\frac{a+d}{c+d}\Rightarrow②$$

习题二

6.（3）命题假。如函数 $f(z)=z\operatorname{Re}z=x^2+ixy$ 仅在点 $z=0$ 处满足 C-R 条件。故 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处不解析。

8.（1）

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+C,$$
$$f(z)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+C+\mathrm{i}\arctan\frac{y}{x}=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+C=\ln z+C$$

（2）

$$f(z)=u+\mathrm{i}v=\mathrm{e}^x\left(y\cos y+x\sin y\right)+x+y+\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^x\left(y\sin y-x\cos y\right)+y-x+C\right]。$$

令 $y=0$，得

$$f(x)=x+\mathrm{i}\mathrm{e}^x(-x)-\mathrm{i}x+\mathrm{i}C=-\mathrm{i}x\mathrm{e}^x+(1-\mathrm{i})x+\mathrm{i}C。$$

可知解析函数

$$f(z)=-\mathrm{i}z\mathrm{e}^z+(1-\mathrm{i})z+\mathrm{i}C。$$

再由 $f(0)=\mathrm{i}$，得 $C=1$。故

$$f(z)=-\mathrm{i}z\mathrm{e}^z+(1-\mathrm{i})z+\mathrm{i}。$$

12.

$$H(x,y)=\frac{1}{2}\ln|f'(z)|^2-\ln\left|1-|f(z)|^2\right|.$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial|f'(z)|^2}{\partial x}}{|f'(z)|^2}+\frac{\frac{\partial|f(z)|^2}{\partial x}}{1-|f(z)|^2}. \qquad \left(\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2|f'(z)|^2}{\partial x^2}|f'(z)|^2-\left(\frac{\partial|f'(z)|^2}{\partial x}\right)^2}{|f'(z)|^4}+\frac{\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial x^2}\left(1-|f(z)|^2\right)+\left(\frac{\partial|f(z)|^2}{\partial x}\right)^2}{\left(1-|f(z)|^2\right)^2}.$$

同理

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2|f'(z)|^2}{\partial y^2}|f'(z)|^2-\left(\frac{\partial|f'(z)|^2}{\partial y}\right)^2}{|f'(z)|^4}+\frac{\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial y^2}\left(1-|f(z)|^2\right)+\left(\frac{\partial|f(z)|^2}{\partial y}\right)^2}{\left(1-|f(z)|^2\right)^2}.$$

再利用11(1),(3)对$f'(z)$, $f(z)$和$\left(f'(z)\right)^2$,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}&=\frac{1}{2}\frac{4|f''(z)|^2|f'(z)|^2-|2f'(z)f''(z)|^2}{|f'(z)|^4}\\&\quad+\frac{4|f'(z)|^2\left(1-|f(z)|^2\right)+|2f(z)f'(z)|^2}{\left(1-|f(z)|^2\right)^2}\\&=0+\frac{4|f'(z)|^2}{\left(1-|f(z)|^2\right)^2}\\&=4\mathrm{e}^{2H}。\end{aligned}$$

14（1） $-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}\right)$ 。

（2） $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

（3） $\frac{13}{5}$ 。

15

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})&=\ln 5+\mathrm{i}\left(\arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi\right)=\ln 5+\mathrm{i}\left[\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)+2k\pi\right]\\&=\ln 5-\mathrm{i}\left(\arctan\frac{4}{3}-(2k+1)\pi\right),\quad k=0,\pm1,\pm\pm2,\cdots。\end{aligned}$$

$$\ln(-3+4\mathrm{i})=\ln 5+\mathrm{i}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)。$$