



Nome: Gisele Marques
Matrícula: 2019.1.08.001

Lista 10 - Discreto

Ex. 1)

Função de A em B: $f: A \rightarrow B$, onde $f(a) = b$ para $a \in A$ e $b \in B$

$\text{Dom}(f) = A$

$\text{Cod}(f) = B$

$\text{Im}(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A, f(a) = b\}$

→ subconjunto de B atingido por A

Pré-imagem(f) = $f^{-1}(b) = \{a \in A, f(a) = b\}$

Gráfico(f) = $\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$

Para provar igualdade, temos que garantir:

- $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$
- $\text{Cod}(f) = \text{Cod}(g)$
- $\forall x \in \text{Dom}(f), \exists f(x) = g(x)$

Ex. 2) $f(x) = x + 2$, então temos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$

Injetora: $f(x_1) = f(x_2)$; $x_1 = x_2$; dado $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
 $x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$, é injetora.

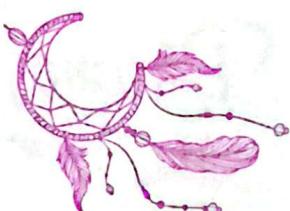
Sobrejetora: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$

$$f(x) = x + 2 = y$$

$x = y - 2 \Rightarrow$ substituindo em f , temos $f(y - 2)$

$f(y - 2) = (y - 2) + 2 = y$, é sobrejetora

A função é bijetora.





Lista 10.

Ex 2, cont.)

Inversa $f(x) = f^{-1}(x)$ $f: A \rightarrow B; f^{-1}: B \rightarrow A$ \hookrightarrow Temos $f(x) = x + 2$ ou $y = x + 2$

$$\xrightarrow{x = y - 2}$$

Então, $f^{-1}(x) = x - 2$ Ex 3) $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \leq 3 \\ x-4, & \text{se } x > 3 \end{cases}$ $g(x) = 2x - 7, \forall x \in \mathbb{R}$

$$f \circ g = f(g(x)) \Rightarrow f(2x - 7)$$

 \hookrightarrow | substituir $2x - 7$ na condição de f :
 ~~$\begin{cases} 2x - 7 \leq 3 \\ 2x - 7 > 3 \end{cases}$~~ \hookrightarrow substituindo na condicional:

$$\bullet x \leq 3 \Rightarrow 2x - 7 \leq 3 \Rightarrow x \leq 5$$

$$\bullet x > 3 \Rightarrow 2x - 7 > 3 \Rightarrow x > 5$$

Assim, temos:

$$\bullet \text{ se } x \leq 5: f(g(x)) = f(2x - 7) \Rightarrow 2x - 4$$

$$\bullet \text{ se } x > 5: f(g(x)) = f(2x - 7) \Rightarrow 2x - 11$$

$$g \circ f = g(f(x)) \Rightarrow g(x+3) \text{ ou } g(x-4)$$
$$g(f(x)) = g \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \leq 3 \\ 2x - 15, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Dreams





Lista 10

~~-Ex. 4) \circ (cont.)~~

$$\text{Ex. 4) } f(x) = x^2; g(x) = x - 2$$

$$\text{a) } \begin{aligned} f(0) &= 0^2 & g(0) &= 0 - 2 \\ f(0) &= 0 & g(0) &= -2 \end{aligned}$$

Pré-imagem:

~~l~~ ~~l~~ ~~l~~

$$\hookrightarrow f(x) = 1; x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

\therefore pré-imagem de 1: $\{-1, 1\}$

$$\hookrightarrow g(x) = 1; x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

\therefore pré-imagem de 1: $\{3\}$

$$\text{b) } f \circ g = f(g(x)) \Rightarrow f \circ g = f(x - 2)$$

$$f(x - 2) = (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4$$

$$g \circ f = g(f(x)) \Rightarrow g \circ f = g(x^2)$$

$$g(x^2) = x^2 - 2$$

$$x^2 - 2 \neq x^2 - 4x + 4$$

$$\text{c) } f \circ g = (x - 2)^2; \text{ logo } (x - 2)^2 = 4$$

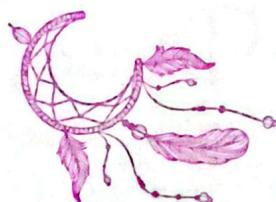
$$\begin{cases} \hookrightarrow x = 0 \text{ ou} \\ \hookrightarrow x = 4 \end{cases}$$

Pré-imagem de 4: $\{0, 4\}$

$$g \circ f = x^2 - 2; \text{ logo } x^2 - 2 = 4$$

$$x^2 = 6$$

$$\begin{cases} \hookrightarrow x = \sqrt{6} \text{ ou} \\ \hookrightarrow x = -\sqrt{6} \end{cases}$$



Ex. 5) Temos 11 pessoas, devemos escolher 3, logo

$$\frac{11!}{(11-3)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 990,$$

Ex. 6) Primeiro temos 3 algarismos, depois 2, depois 1.
 Último temos 3 algarismos, depois 2, depois 1.
 Restante temos 2 algarismos.

1-9: 1 algarismo \rightarrow 9 no total

100: 3 algarismos \rightarrow 3 no total

10-99: 2 algarismos $\rightarrow 2 \cdot 90 = 180$ no total

\therefore estão usando 192 algarismos

Ex. 7) $\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}$
 não é subconjunto
 (é modo geral, temos 2^3 subconjuntos de um
 conjunto com n elementos)

$\{1, 2, 3\}: \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\},$
 $\{2, 3\}, \{1, 2, 3\};$ são 8 conjuntos
 de modo geral, 2^n .

Ex. 8) uma prova mas de CAPÍTULO.

a) Começa com consoante, termina com vogal

$$4 \cdot \underbrace{(6!)}_{\downarrow \text{resto}} \cdot 4 \rightarrow \text{vogal}$$

consoante

$$\therefore 4 \cdot 4 \cdot 6! = 11520$$

Dreams

spiral®



Ex 8 cont.)

b) ~~arranjos sem repetição~~

com o conjunto CAP.

Então, permutamos: [CAP], I, T, U, L, O.

$$6! = 720,$$

Ex 9)

$$\clubsuit A_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 5040$$

Ex 10) arranjos para PARALELEPÍPEDO

Aqui, temos 2 "A", 2 "L", 3 "E" e 3 "P", das quais a ordem não importa

~~ARRANJOS SEM REPETIÇÃO, MAS QUANDO OS ELEMENTOS SÃO IDÉNTICOS~~



$$\text{Então: } \frac{14!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{14!}{144} = 605\,404\,800$$

Ex. 11)

Simples: $P(n) = n!$

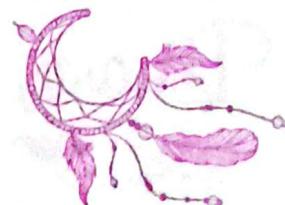
- elementos distintos
- ordem importa

Repetição: $P(n; a_1, \dots, a_m)$ ou $P_n^{a_1, \dots, a_m} = \frac{n!}{a_1! \cdots a_m!}$

- elementos se repetem
- ordem importa, mas repetições são descartadas

Circular ~~ARRANJO~~ $P(n) = (n - 1)!$

- elementos dispostos em círculo
- rotacionar não é uma nova permutação





Ex 12) 7 crianças, restrição para 2.

$$\text{sem restrição: } (7-1)! = 720$$

Casos da restrição: (casos em que as 2 meninas ficam juntas)

$$\hookrightarrow (6-1)! = 120; 120 \cdot 2 = 240$$

↳ as crianças juntas podem trocar entre elas.

$$\text{Subtração: } 720 - 240 = 480 //$$

Ex 13) Dado: $x+y+z+t=8$; temos $n=4$ e $k=8$

$$\text{Substituindo: } \frac{(4+8-1)!}{8!(4-1)!} = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2}$$

$$\Rightarrow 11 \cdot 5 \cdot 3 = 165 //$$

Ex 14) meninas:

$$C(5,2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 5 \cdot 2 = 10$$

meninos:

$$C(6,2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 3 \cdot 5 = 15$$

continuando os dois:

$$10 \cdot 15 = 150 //$$

Dreams



Ex 15) $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$, qual é termo independente de x .

Considere $T_K = \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Temos: $a = x^2$; $b = 1/x^3$; $n = 10$

Logo, temos $x^{2(10-k)} \cdot x^{-3k} = x^{20-5k} \cdot x^{-3k} = x^{20-8k}$

Que x deve ter expoente 0, temos:

$$20 - 8k = 0 \Rightarrow k = 4$$

Substituindo:

$$T_4 = \binom{10}{4} \cdot (x^2)^6 \cdot (x^{-3})^4 = \binom{10}{4} \cdot x^{12} \cdot x^{-12}$$

$$T_4 = \binom{10}{4} \cdot x^0 = 210$$

\hookrightarrow ok para garantir.

Ex 16) DISCRETA: 8 letras distintas

- D em 1º: $1 \cdot 7! = 5040$

- I em 2º: $1 \cdot 7! = 5040$

- S em 3º: $1 \cdot 7! = 5040$

Como é um "ou", temos: $5040 + 5040 + 5040 = 15120$.

Obviamente, 15120 não agrava.

Porém, devemos considerar os casos repetidos:

- D na 1ª, I na 2ª: $1 \cdot 1 \cdot 6! = 720$

- D na 1ª, S na 3ª: $1 \cdot 1 \cdot 6! = 720$

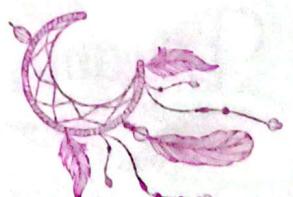
- I na 2ª, S na 3ª: $1 \cdot 1 \cdot 6! = 720$

- D na 1ª, I na 2ª, S na 3ª: $1 \cdot 1 \cdot 5! = 120$

Assim, temos 2280 anagramas repetidos.

$$15120 - 2280 = 13080 \text{ no total,}$$

sem repetições.





Ex 18)

Triângulo de Pascal:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	

- número dos elementos da linha $n = 2^n$
- Cada linha mostra os coeficientes binomiais, ou seja, linha 5:
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
- A relação cardinal dos números mostra suas combinações, ou seja, linha n , coluna $K = C(n, K)$

Dreams

