S • T • Q • Q • S • S • D

Nome: Gean Marques
Matrícula: 2019.1.08.001

Lista 10 - Discreta

Ex. 1)

Função de A em B: $f: A \to B$, onde $f(a) = b$ para $a \in A$ e $b \in B$

$Dom(f) = A$

$Cod(f) = B$

$\underbrace{Im(f)}_{\text{subconjunto de } B \text{ atingido por } A} = \{b \in B \mid \exists a \in A, f(a) = b\}$

$\text{Pré-imagem}(f) = f^{-1}(b) = \{a \in A, f(a) = b\}$

$\text{Gráfico}(f) = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$

Para provar igualdade, temos que garantir:

- $Dom(f) = Dom(g)$
- $Cod(f) = Cod(g)$
- $\forall x \in Dom(f), \exists f(x) = g(x)$

Ex. 2) $f(x) = x + 2$, então temos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$

Injetora: $\underbrace{f(x_1)}_{x_1 + 2} = \underbrace{f(x_2)}_{x_2 + 2}$; $x_1 = x_2$; dado $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$, é injetora.

Sobrejetora: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$

$f(x) = x + 2 = y$

$x = y - 2 \Rightarrow$ substituindo em f, temos $f(y-2)$

$f(y-2) = (y-2) + 2 = y$, é sobrejetora

A função é bijetora

spiral

Lista 10.

Ex. 2, cont.)

Inversa $f(x) = f^{-1}(x)$

$f: A \to B;\ f^{-1}: B \to A$

$\hookrightarrow$ Temos $f(x) = x + 2$ ou $y = x + 2$

$x = y - 2$

Então, $f^{-1}(x) = x - 2$

Ex. 3) $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \leq 3; \\ x - 4, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

$g(x) = 2x - 7, \forall x \in \mathbb{R}$

$f \circ g = f(g(x)) \Rightarrow f(2x - 7)$

$\hookrightarrow$ Substituindo na condicional:

- $x \leq 3 \Rightarrow 2x - 7 \leq 3 \Rightarrow x \leq 5$
- $x > 3 \Rightarrow 2x - 7 > 3 \Rightarrow x > 5$

Assim, temos:

- Se $x \leq 5$: $f(g(x)) = f(2x - 7) \Rightarrow 2x - 4$.
- Se $x > 5$: $f(g(x)) = f(2x - 7) \Rightarrow 2x - 11$

$g \circ f = g(f(x)) \Rightarrow g(x + 3)$ ou $g(x - 4)$

$g(f(x)) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x \leq 3 \\ 2x - 15, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

Dreams

spiral

Lista 10

Ex. 4) $f(x) = x^2$; $g(x) = x - 2$

a) $f(0) = 0^2$ $\quad g(0) = 0 - 2$

$f(0) = 0$ // $\quad g(0) = -2$

Pré-imagem:

$\to f(x) = 1;\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\therefore$ pré-imagem de 1: $\{-1, 1\}$

$\to g(x) = 1;\ x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$

$\therefore$ pré-imagem de 1: $\{3\}$

b) $f \circ g = f(g(x)) \Rightarrow f \circ g = f(x-2)$

$f(x-2) = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4$

$g \circ f = g(f(x)) \Rightarrow g \circ f = g(x^2)$

$g(x^2) = x^2 - 2$

$x^2 - 2 \neq x^2 - 4x + 4$ //

c) $f \circ g = (x-2)^2$; logo $(x-2)^2 = 4$

$\to x = 0$ ou

$\to x = 4$

Pré-imagem de $4 = \{0, 4\}$

$g \circ f = x^2 - 2$; logo $x^2 - 2 = 4$

$x^2 = 6$

$\to x = \sqrt{6}$ ou

$\to x = -\sqrt{6}$

Ex. 5) Time: 11 pessoas, devemos escolher 3, logo

$$\frac{11!}{(11-3)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 990$$

Ex. 6) ~~Primeiro número tem 1 algarismo (1)~~
~~Último tem 3 algarismos (100)~~
~~Restante tem 2 algarismos~~

1 - 9: 1 algarismo -> 9 no total
100: 3 algarismos -> 3 no total
10 - 99: 2 algarismos -> $2 \cdot 90 = 180$ no total
$\therefore$ são usados 192 algarismos

Ex. 7) ~~{1, 2, 3}: {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}~~
~~{1, 2, 3}; são 8 subconjuntos~~
~~De modo geral, temos 2^n subconjuntos de um conjunto com n elementos~~

{1, 2, 3}: Ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3},
{2, 3}, {1, 2, 3}; são 8 conjuntos
De modo geral, 2^n.

Ex 8) anagramas de CAPÍTULO.
a) começa com consoante, termina com vogal

$$\underset{\text{consoante}}{4} \cdot \underbrace{(6!)}_{\text{resto}} \cdot 4 \to \text{vogal}$$

$\therefore 4 \cdot 4 \cdot 6! = 11520$

Dreams

Ex. 8 cont.)

b) com o conjunto CAP.

Então, permutamos: [CAP], I, T, U, L, O

$6! = 720$

Ex. 9)

$A^{10}_{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 5040$

Ex. 10) anagramas para PARALELEPÍPEDO

Aqui, temos 2 "A", 2 "L", 3 "E" e 3 "P", dos quais a ordem não importa

Então: $\frac{14!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{14!}{144} = 605.404.800$

Ex. 11)

Simples: $P(n) = n!$
- elementos distintos
- ordem importa

Repetição: $P(n; a_1, \ldots, a_m)$ ou $P_n^{a_1, \ldots, a_m} = \frac{n!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_m!}$
- elementos se repetem
- ordem importa, mas repetições são descartadas

Circular: $P(n) = (n-1)!$
- elementos dispostos em círculo
- rotacionar não é uma nova permutação

Ex 12) 7 crianças, restrição para 2.

Sem restrição $(7-1)! = 720$

Casos da restrição (casos em que as 2 crianças ficam juntas)

↳ $(6-1)! = 120;\ 120 \cdot 2 = 240$

↳ as crianças juntas podem trocar entre elas.

Subtraindo $720 - 240 = 480$ //

Ex 13) Dado $x + y + z + t = 8$; temos $n = 4$ e $k = 8$

Substituindo: $\dfrac{(4+8-1)!}{8!(4-1)!} = \dfrac{11!}{8! \cdot 3!} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2}$

$\Rightarrow 11 \cdot 5 \cdot 3 = 165$ //

Ex 14) meninas:

$C(5,2) = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 5 \cdot 2 = 10$

meninos

$C(6,2) = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 3 \cdot 5 = 15$

combinando os dois

$10 \cdot 15 = 150$ //

Ex 15) $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$, qual o termo independente x.

Considere $T_K = \binom{n}{K} \cdot a^{n-K} \cdot b^K$

Temos: $a = x^2$; $b = 1/x^3$; $n = 10$

Logo, temos $x^{2(10-K)} \cdot x^{-3K} = x^{20-2K} \cdot x^{-3K} = x^{20-5K}$

Se x deve ter expoente 0, temos:

$$20 - 5K = 0 \Rightarrow K = 4$$

→ Substituindo:

$$T_4 = \binom{10}{4} \cdot (x^2)^6 \cdot (x^{-3})^4 = \binom{10}{4} \cdot x^{12} \cdot x^{-12}$$

$$T_4 = \binom{10}{4} \cdot \underbrace{x^0}_{\text{só para garantir}} = 210$$

Ex 16) DISCRETA: 8 letras distintas

- D em 1°: $1 \cdot 7! = 5040$
- I em 2°: $1 \cdot 7! = 5040$
- S em 3°: $1 \cdot 7! = 5040$

Como é um "ou", temos: $5040 + 5040 + 5040 = 15120$.

Ou seja, 15120 anagramas

Porém, devemos considerar os casos repetidos:

- D na 1ª, I na 2ª: $1 \cdot 1 \cdot 6! = 720$
- D na 1ª, S na 3ª: $1 \cdot 1 \cdot 6! = 720$
- I na 2ª, S na 3ª: $1 \cdot 1 \cdot 6! = 720$
- D na 1ª, I na 2ª, S na 3ª: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5! = 120$

Somando, temos 2280 anagramas repetidos

$15120 - 2280 = 13080$ no total, sem repetições.

S • T • Q • Q • S • S • D

Ex 18)

Triângulo de Pascal:

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

- Soma dos elementos da linha $n = 2^n$
- Cada linha mostra os coeficientes binomiais, ou seja, linha 5: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
- A relação cardinal dos números mostra suas combinações, ou seja, linha n, coluna $K = C(n, K)$

Dreams