

Lista 4

Nome: Gean Marques

Matrícula: 2019.103.006

Ex. 1)

- É uma proposição, pois pode ser verdade ou mentira; ou, como na matemática: verdadeiro ou falso.
- É uma proposição, pois também é verdadeiro ou falso.
- Não é uma proposição, pois não é uma afirmação, e sim uma pergunta.
- É uma proposição, pois também pode ser verdadeiro ou falso.
- Não é uma proposição, pois não há afirmação.

Ex. 2)

- π é um número irracional e 2 é um número primo.
- Se π é um irracional ou 2 não é primo, então 2 é primo ~~ou~~ e π é irracional.
- Se 2 é primo, então π é irracional.

Ex. 3)

Prove: $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - b| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$

$$\sim (\forall \epsilon > 0) \Rightarrow (\exists \epsilon > 0)$$

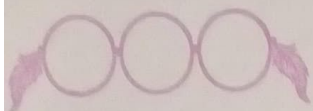
$$\sim (\exists \delta > 0) \Rightarrow (\forall \delta > 0)$$

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R})$$

$$\sim (0 < |x - b| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \Rightarrow (0 < |x - b| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon)$$

$$\text{Função} \Rightarrow (\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(0 < |x - b| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon) \quad \square$$





Ex. 4)

Forma original: ~~XXXX~~ $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a-b=\text{par} \wedge b-c=\text{par} \rightarrow a-c=\text{par})$

Contrapositiva: $(H \rightarrow T) \Rightarrow (\neg T \rightarrow \neg H)$

$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a-c=\text{ímpar} \rightarrow a-b=\text{ímpar} \vee b-c=\text{ímpar}) \quad \square$

Ex. 5)

a)

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

b)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \downarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Ex. 6) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

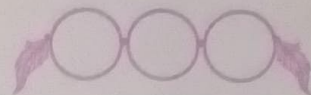
$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\Rightarrow \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\Rightarrow \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\Rightarrow \sim p \vee \sim q \vee r \\ &\Rightarrow \sim(p \wedge q) \vee r \\ &\Rightarrow (p \wedge q) \rightarrow r \end{aligned}$$

Por definição:
 $H \rightarrow T \Leftrightarrow \sim H \vee T$

□

Dreams





Nome: Gean Marques
Matrícula: 2019.1.08.006

Ex 7)

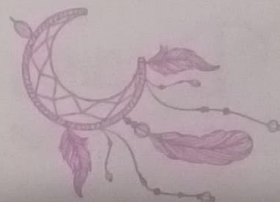
a) $(p \vee (\sim p \vee q)) \wedge \sim(q \wedge \sim r)$

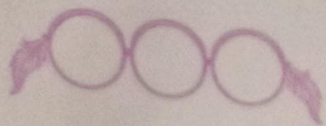
p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$\sim p \vee q$	$\sim(q \wedge \sim r)$	$(p \vee (\sim p \vee q)) \wedge \sim(q \wedge \sim r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1

Interessante: $(p \vee (\sim p \vee q)) \Rightarrow p \vee \sim p \vee q \Rightarrow V$, pois $p \vee \sim p \rightarrow V$,
logo apenas $\sim(q \wedge \sim r)$ já responde

b) $[p \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow p$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \vee (q \rightarrow r)$	$[p \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow p$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1





Ex. 7)

c) $(\sim p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$\sim p \leftrightarrow \sim q$	$p \rightarrow \sim r$	$(\sim p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0

Para auxiliar:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1

d) $p \rightarrow p$ (ex p, então p)

p	então
0	1
1	1

Dreams





Nome: Jean Marques

Matrícula: 2019.1.08.006

Ex. 8)

Direta: $H \rightarrow T$ Se m e n são quadrados perfeitos, então $m \cdot n$ também é.Recíproca: $T \rightarrow H$ Se $m \cdot n$ é quadrado perfeito, então m e n são quadrados perfeitos.Contrária: $\sim H \rightarrow \sim T$ Se m ou n não são quadrados perfeitos, então $m \cdot n$ também não é.Contrapositiva: $\sim T \rightarrow \sim H$ Se $m \cdot n$ não é quadrado perfeito, então m ou n não é quadrado perfeito.

Ex. 9)

a) Se m e n são pares, então $m + n$ é par.Por definição, um número par é: $2k, \forall k \in \mathbb{Z}$ Logo: $m = 2a$ e $n = 2b$;

$$m + n = 2a + 2b = 2(a + b)$$

 $2(a + b)$ entra na definição, $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \square$

Técnica direta



Ex. 9) b) Se x e y são inteiros ímpares, então $x \cdot y$ é ímpar

Por definição, ímpar $2k+1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Logo: $x=2a+1$ e $y=2b+1$.

$$(2a+1) \cdot (2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1 \\ = 2(2ab + a + b) + 1$$

Assim, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, chegamos na definição \square

Técnica direta

c) Se $d = \sqrt{2}$, então d é um número irracional

Por absurdo: $H \wedge \sim T \rightarrow F$

H: $d = \sqrt{2}$

$\sim T$: d é racional, logo $d = a/b$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

Então: $\sqrt{2} = a/b \Rightarrow \sqrt{2} \cdot b = a \Rightarrow 2b^2 = a^2$;

por definição, a é par, ou seja, $a = 2x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

Prosseguindo: $2b = (2x)^2 \Rightarrow 2b = 4x^2 \Rightarrow b = 2x^2$,

logo, b também é par, ou seja, $b = 2y$,

Logo: $d = a/b = 2x/2y$, o que é absurdo, $\forall y \in \mathbb{Z}$
pois a $\text{mdc}(a, b) = 1$. \square

Técnica por absurdo

Ex. 10) ~~Possibilidades~~

1) $A \cap B = \emptyset$

2) $A \cap C = \emptyset$

3) $B \cap C = \emptyset$

Seja $A \cap B = \emptyset$, afirme que $A \cap B \cap C = \emptyset$.

$$\underbrace{A \cap B}_{\emptyset} \cap C = \emptyset$$

$$\emptyset \cap C = \emptyset \quad \square$$

Dreams



Nome: Gean Marques
 Matrícula: 2019.1.03.006

Ex. 11)

a) Falso, \emptyset não pode pertencer^(\in), pois é um conjunto

b) Verdadeiro.

c) Verdadeiro, agora usando o conectivo entre conjuntos (contido em)

d) Verdadeiro

e) Falso, 0 é um número, portanto o conjunto não está vazio (\emptyset)

Ex. 12)

a) $A \cap B = B \cap A$

$(\forall x \in A \cap B) (x \in A \wedge x \in B)$

pele comutativa: $(x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \in B \wedge x \in A)$
 $\equiv B \cap A \quad \square$

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$(\forall x \in A \cap (B \cap C)) (x \in A \wedge (x \in B \cap C))$

$\hookrightarrow \equiv (x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C))$ comutativa
 $\equiv ((x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C)$ associativa \square

c) $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$

$(\forall x, (x \in A \cap B \wedge x \notin (A \cap C))) \equiv (\forall x, (x \in A \cap B \wedge \sim(x \in (A \cap C))))$

$\Rightarrow (\forall x, ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge ((x \notin A) \vee (x \notin C)))$

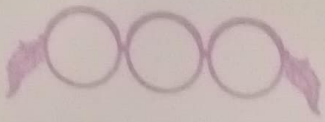
~~$x \in A$~~

$\Rightarrow (\forall x, \{((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin A)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C))\})$

$\hookrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A)$ é falso, anula tudo

$\Rightarrow (\forall x, (x \in A) \wedge (x \in B - C))$

$\Rightarrow \forall x, x \in A \cap (B - C) \quad \square$



Ex 12) d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Por definição:

$$\forall x \in (A \cup B)^c, x \notin A \cup B$$

Logo:

$$(\forall x, (x \notin A \wedge x \notin B))$$

Ou seja:

$$(\forall x, \text{ ~~} x \notin A \text{ ~~} \wedge x \notin B \text{ } \text{ } (x \in A^c \wedge x \in B^c) \text{ })~~~~$$

$$(\forall x, x \in A^c \cap B^c) \quad \square$$

