S • T • Q • Q • S • S • D

Lista 4

Nome: Gean Marques
Matrícula: 2019.1 03.006

Ex. 1)

a) É uma proposição, pois pode ser verdade ou mentira; ou, como na matemática: verdadeiro ou falso.

b) É uma proposição, pois também é verdadeiro ou falso.

c) Não é uma proposição, pois não é uma afirmação, e sim uma pergunta.

d) É uma proposição, pois também pode ser verdadeiro ou falso.

e) Não é uma proposição, pois não há afirmação.

Ex. 2)

a) π é um número irracional e 2 é um número primo.

b) Se π é um irracional ou 2 não é primo, então 2 é primo ~~e~~ e π é irracional

c) Se 2 é primo, então π é irracional

Ex. 3)

Negue: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x-b| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)$

$\sim(\forall \varepsilon > 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)$

$\sim(\exists \delta > 0) \Rightarrow (\forall \delta > 0)$

$\sim(\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R})$

$\sim(0 < |x-b| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon) \Rightarrow (0 < |x-b| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$

Junção $\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(0 < |x-b| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$ $\square$

spiral

Ex. 4)

Forma original:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})\,(\overbrace{a-b = \text{par} \wedge b-c = \text{par}}^{H} \rightarrow \overbrace{a-c = \text{par}}^{T})$$

Contrapositiva: $(H \rightarrow T) \Rightarrow (\sim T \rightarrow \sim H)$

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})\,(a-c = \text{ímpar} \rightarrow a-b = \text{ímpar} \vee b-c = \text{ímpar})\ \square$$

Ex. 5)

a)

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

b)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \downarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Ex. 6) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\Rightarrow \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\Rightarrow \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\Rightarrow \sim p \vee \sim q \vee r \\ &\Rightarrow \sim (p \wedge q) \vee r \\ &\Rightarrow (p \wedge q) \rightarrow r \quad \square \end{aligned}$$

Por definição:
$H \rightarrow T \Leftrightarrow \sim H \vee T$

S • T • Q • Q • S • S • D

Nome Gean Marques
Matrícula: 2019.1.08.006

Ex. 7)

a) $(p \vee (\sim p \vee q)) \wedge \sim(q \wedge \sim r)$ }

p	q	r	~p	~r	~p∨q	~(q∧~r)	(p∨(~p∨q))∧~(q∧~r)
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1

Interessante: $(p \vee (\sim p \vee q)) \Rightarrow p \vee \sim p \vee q \Rightarrow V$, pois $p \vee \sim p \rightarrow V$, logo apenas $\sim(q \wedge \sim r)$ já respondem

b) $[p \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow p$

p	q	r	q→r	p∨(q→r)	[p∨(q→r)] → p
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Ex. 7)

c) $(\sim p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$\sim p \leftrightarrow \sim q$	$p \rightarrow \sim r$	$(\sim p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0

Para auxiliar:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1

d) $p \rightarrow p$ (se p, então p)

p	saída
0	1
1	1

S • T • Q • Q • S • S • D

Nome: Gean Marques
Matrícula: 2019.1.08.006

Ex. 8)

Direta: $H \to T$

Se m e n são quadrados perfeitos, então $m \cdot n$ também é.

Recíproca: $T \to H$

Se $m \cdot n$ é quadrado perfeito, então m e n são quadrado perfeito.

Contrária: $\sim H \to \sim T$

Se m ou n não são quadrados perfeitos, então $m \cdot n$ também não é

Contrapositiva: $\sim T \to \sim H$

Se $m \cdot n$ não é quadrado perfeito, então m ou n não é quadrado perfeito

Ex. 9)

a) Se m e n são pares, então $m + n$ é par.

Por definição, um número par é: $2k, \forall k \in \mathbb{Z}$

Logo: $m = 2a$ e $n = 2b$;

$m + n = 2a + 2b = 2(a+b)$

$2(a+b)$ entra na definição, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ $\square$

Técnica direta

spiral

S • T • Q • Q • S • S • D

Ex. 9) b) Se x e y são inteiros ímpares, então $x \cdot y$ é ímpar
Por definição, ímpar $2k+1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$
Logo: $x = 2a+1$ e $y = 2b+1$.
$(2a+1) \cdot (2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1$
$= 2(2ab + a + b) + 1$
Assim, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, chegamos na definição $\square$

Técnica direta

c) Se $d = \sqrt{2}$, então d é um número irracional
Por absurdo: $H \wedge \sim T \to F$
H: $d = \sqrt{2}$
$\sim T$: d é racional, logo $d = a/b$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

Então: $\sqrt{2} = a/b \rightsquigarrow \sqrt{2}\, b = a \overset{^2}{\rightsquigarrow} 2b^2 = a^2$;
por definição, a é par, ou seja, $a = 2x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$
Prosseguindo: $2b = (2x)^2 \rightsquigarrow 2b = 4x^2 \rightsquigarrow b = 2x^2$,
logo, b também é par, ou seja, $b = 2y$
Logo: $d = a/b = 2x/2y$, o que é absurdo, $\forall y \in \mathbb{Z}$
pois o $mdc(a, b) = 1$. $\square$

Técnica por absurdo

Ex. 10) Possibilidades
1) $A \cap B = \emptyset$
2) $A \cap C = \emptyset$
3) $B \cap C = \emptyset$

Seja $A \cap B = \emptyset$, afirmo que $A \cap B \cap C = \emptyset$.

$\underbrace{A \cap B}_{\emptyset} \cap C = \emptyset$
$\emptyset \cap C = \emptyset$ $\square$

Dreams

Nome: Gean Marques
Matrícula: 2019.1.08.006

Ex. 11)

a) Falso, $\emptyset$ não pode pertencer $(\in)$, pois é um conjunto
b) Verdadeiro.
c) Verdadeiro, agora usando o conectivo entre conjuntos (contido ou C
d) Verdadeiro
e) Falso, 0 é um número, portanto o conjunto não está vazio ($\emptyset$

Ex. 12)

a) $A \cap B = B \cap A$

$(\forall x \in A \cap B)(x \in A \wedge x \in B)$;

pela comutativa: $(x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \in B \wedge x \in A)$

$\equiv B \cap A \quad \square$

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$(\forall x \in A \cap (B \cap C))\ (x \in A \wedge (x \in B \cap C))$

$\equiv (x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C))$ ~~comutativa~~

$\equiv ((x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C)$ associativa $\square$

c) $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$

$(\forall x, (x \in A \cap B \wedge x \notin (A \cap C)) \equiv (\forall x, (x \in A \cap B \wedge \sim(x \in (A \cap C))))$

$\Rightarrow (\forall x, ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge ((x \notin A) \vee (x \notin C)))$

$\Rightarrow (\forall x, \{\underbrace{((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin A))} \vee ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C))\})$

↳ $(x \in A) \wedge (x \notin A)$ é falso, anula tudo

$\Rightarrow (\forall x, (x \in A) \wedge (x \in B - C))$

$\Rightarrow \forall x, x \in A \cap (B - C) \quad \square$

Ex 12) d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Por definição:

$\forall x \in (A \cup B)^c, \; x \notin A \cup B$

Logo:

$(\forall x, (x \notin A \wedge x \notin B))$

Ou seja:

$(\forall x, (x \in A^c \wedge x \in B^c))$

$(\forall x, x \in A^c \cap B^c)$ $\square$