Lista 7
Nome: Gean Marques
Matrícula: 2019.1.08.006

Ex. 1) Indução: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $\forall a, m, n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$

(i) passo base $n = 0$

$$a^{m \cdot 0} = (a^m)^0$$
$$1 = 1 \;//$$

(ii) H. I. $\begin{cases} \text{assuma: } n = k \in \mathbb{N}, \text{ então:} \\ (a^m)^k = a^{m \cdot k} \end{cases}$

T. $\{ (a^m)^{k+1} = a^{m \cdot (k+1)}$

Por definição: $(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot (a^m)^1$

$= (a^m)^k \cdot a^m$

Usando a hipótese: $= a^{m \cdot k} \cdot a^m$

Por propriedade: $= a^{m \cdot k + m}$

$= a^{m(k+1)} \;//$

Logo $(a^m)^k = a^{m \cdot k}$, $\forall m, \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$

Ex. 2) Indução: $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n+1)}{3}$, $n \geq 2$

(i) passo base: $n = 2$

$$\sum_{i=1}^{2-1} i(i+1) = 1 \cdot (1+1) = 2$$

$$\frac{2 \cdot (2-1)(2+1)}{3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3} = 2 \;//$$

(ii) para $n = k \geq 2$

HI $\left\{ \sum_{i=1}^{K-1} i(i+1) = \frac{K(K-1)(K+1)}{3} \right.$

T $\left\{ \text{para } K+1 \text{: } \sum_{i=1}^{K} i(i+1) = \frac{K\cdot(K+1)\cdot(K+2)}{3} \right.$

Usando a hipótese

$$\sum_{i=1}^{K} i(i+1) = \left[\sum_{i=1}^{K-1} i(i+1)\right] + K(K+1)$$

$$= \frac{K(K-1)(K+1)}{3} + K(K+1)$$

$$= (K+1)\cdot K\cdot\left(\frac{K-1}{3} + 1\right)$$

$$= (K+1)\cdot K\cdot\left(\frac{K+2}{3}\right) = \frac{K\cdot(K+1)\cdot(K+2)}{3}$$

//

3) Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como: $a_1 = 3$, $a_K = 7a_{K-1}$, $\forall K \geq 2$

Indução: $a_n = 3\cdot 7^{n-1}$, $\forall \mathbb{Z}\ n \geq 1$

(i) passo base: $n = 1$

$a_1 = 3\cdot 7^{1-1} = 3\cdot 1 = 3$, logo, é válido

(ii) para $n = k \geq 1$: $a_k = 3 \cdot 7^{k-1}$ } HI

T { $a_{k+1} = 3 \cdot 7^{k}$

Como definição: $a_{k+1} = 7 \cdot a_k$
Usando a hipótese: $= 7 \cdot (3 \cdot 7^{k-1})$
$= 3 \cdot 7^{k}$ //

Logo, $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$, $\forall n \geq 1$ (para os $\mathbb{Z}$)

Ex. 4) Indução: $7^n + 2$ é divisível por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

(i) passo base: $n = 0$
$7^0 + 2 = 1 + 2 = 3$; $3 \mid 3$, logo, é válido

(ii) HI $\begin{cases} \text{para } n = k \\ 7^k + 2 \equiv 0 \pmod 3 \text{ ou } 7^k \equiv -2 \pmod 3 \end{cases}$

T { $7^{k+1} + 2 \equiv 0 \pmod 3$

Dado que: $7^{k+1} + 2 = 7 \cdot 7^k + 2$
Usando hipótese: $= 7 \cdot (-2) + 2 \equiv 0 \pmod 3$
$= -12 \equiv 0 \pmod 3$ //

Isto prova que $7^{k+1} + 2 \equiv 0 \pmod 3$ //

Ex. 6) R é transitiva $\Leftrightarrow R^{-1}$ é transitiva

a)

(i) $\underbrace{R \text{ transitiva}}_{\text{Hipótese}} \Rightarrow \underbrace{R^{-1} \text{ é transitiva}}_{\text{Tese}}$

Seja $(a,b),(b,c) \in R^{-1}$, então $(b,a),(c,b) \in R$

Dado que R é transitiva

$$(b,a) \in R \wedge (c,b) \in R \Rightarrow (c,a) \in R$$
$$\Rightarrow (a,c) \in R^{-1}$$

Logo, R^{-1} é transitiva.

(ii) $\underbrace{R^{-1} \text{ transitiva}}_{\text{Hipótese}} \Rightarrow \underbrace{R \text{ transitiva}}_{\text{Tese}}$

Seja $(x,y),(y,z) \in R$,
temos:

$$(y,x),(z,y) \in R^{-1} \Rightarrow (z,x) \in R^{-1}$$
$$\Rightarrow (x,z) \in R \;//$$

Logo, R é transitiva $\square$

b) R é simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

(i) $\underbrace{R \text{ simétrica}}_{\text{Hipótese}} \Rightarrow \underbrace{R = R^{-1}}_{\text{Tese}}$

Se $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \Rightarrow (x,y) \in R^{-1}$, então $R \subseteq R^{-1}$
Se $(x,y) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R \Rightarrow (x,y) \in R$, então $R^{-1} \subseteq R$
Logo $R = R^{-1}$

Digitalizado com CamScanner

Ex 6) b

(ii) $\underbrace{R = R^{-1}}_{\text{Hipótese}} \Rightarrow \underbrace{R \text{ simétrica}}_{\text{Tese}}$

Seja $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R^{-1} = R$ //

Ex. 7) Prove que $a \equiv b \pmod{m}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, define

a) uma relação de equivalência

Def: $a \equiv b \pmod{m} = m \mid a - b$

- Reflexiva: $m \mid a - a \Rightarrow m \mid 0$
$\Rightarrow a \equiv a \pmod{m}$ //

- Simétrica:
$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b$,
logo, $\exists k \in \mathbb{Z} \mid a - b = k \cdot m$
assim $a - b = k \cdot m \Rightarrow b - a = -(k \cdot m) \Rightarrow b - a = -k \cdot m$
$\Rightarrow m \mid b - a$
$m \mid b - a \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$ //

- Transitiva:
$a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$
↳ queremos $a \equiv c \pmod{m}$

Se $m \mid a - b$ e $m \mid b - c$, então $\exists k, l \in \mathbb{Z} \mid$
$a - b = m \cdot k$ e $b - c = m \cdot l$

Somando as equações:
$(a - b) + (b - c) = m\,k + m \cdot l$
$a - c = m(k + l)$

logo $m \mid a - c$ ou $a \equiv c \pmod{m}$

(b) ~~[illegible]~~

Dado $a \equiv b \pmod 2$ em $\mathbb{Z}$, explicite as classes de equivalência de 0 e 1.

$[0] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod 2\} = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
(números pares)

$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod 2\} = \{\ldots -3, -1, 1, 3, \ldots\}$
(ímpares)

(c) $[0] \cup [1] = \mathbb{Z}$, a união das partes representa os inteiros
Cada inteiro pertence a somente 1 classe.
Ou seja $[0] \cap [1] = \emptyset$

Ex. 8)

(a) • Reflexiva $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$, verdade.

• Antissimétrica:
Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;
verdade

• Transitiva:
Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$;
verdade

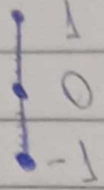
$\therefore$ R é de ordem parcial.

(b) Ordem total: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$;
verdade para $\mathbb{R}$

$\therefore$ é ordem total

Ex. 8)

ⓒ Restringindo a um subconjunto $\{-1, 0, 1\}$ de $\mathbb{R}$, temos o diagrama:



Ex. 9)

ⓐ máximo de B: $x \in B \mid \forall b \in B$, temos $b \preceq x$
mínimo de B: $x \in B \mid \forall b \in B$, temos $x \preceq b$

ⓑ Por contradição: suponha 2 máximos distintos $x, y \in B$
Sendo ambos máximos, temos, por definição:
- $x \preceq y$
- $y \preceq x$,

pela antissimetria, $x = y$, o que contradiz a suposição de que são distintos $(x \neq y)$
Logo, o máximo é único.

Ex. 10) $A = \mathbb{N}$;
$B = \{\text{pares}\}$;

Em ambos os grupos, não existe limitante superior, máximo ou supremo, pois crescem infinitamente para a direita
Em A, 0 é limitante inferior, mínimo e ínfimo.
Em B, não há limitante inferior, mínimo e ínfimo