

Praktikum Atome, Moleküle, kondensierte Materie

Versuch 402: Quantelung von Energie

Carlos Pascua*¹ and Michael Vogt†¹

¹Uni Bonn

19. November 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Teil I: Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantum	1
1.1	Theorie	1
1.1.1	Photoeffekt	1
1.1.2	Photozelle	1
1.1.3	Gegenfeldmethode	1
1.2	Aufbau und Durchführung	2
1.3	Auswertung	3
1.4	Diskussion	7
2	Balmer-Serie	8
2.1	Versuchsaufbau	8
2.2	Bestimmung der Gitterkonstanten	9
2.3	Messung der Isotopieaufspaltung	11
2.3.1	Messung mit Okular	11
2.3.2	Messung mit CCD-Kamera	11
2.4	Rydberg-Konstante und Wirkungsquantum	13
2.5	weitere Überlegungen	13
3	Fazit	15
4	Anhang	16
4.1	Photoeffekt	16
4.2	Balmer-Serie	16

*s87cpasc@uni-bonn.de

†s65mvogt@uni-bonn.de

Einleitung

1 Teil I: Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantum

1.1 Theorie

1.1.1 Photoeffekt

Der Photoeffekt beschreibt, wie Licht auf ein Metall trifft und Elektronen aus dem Metall herauslöst. Ein Photon besitzt eine Energie, die proportional zur Frequenz des Lichts ist, und diese Energie muss ausreichen, um die Bindungsenergie des Elektrons, die sogenannte Austrittsarbeit, zu überwinden. Wenn ein Photon auf ein Elektron trifft, wird ein Teil seiner Energie verwendet, um das Elektron aus dem Metall zu befreien, während der Rest als kinetische Energie des Elektrons übertragen wird. Die Intensität des Lichts beeinflusst die Anzahl der herausgelösten Elektronen, nicht aber deren Energie. Eine höhere Intensität bedeutet, dass mehr Photonen auf das Metall treffen und somit mehr Elektronen herausgelöst werden, aber die Energie der Elektronen bleibt gleich, solange die Frequenz des Lichts konstant bleibt.

1.1.2 Photozelle

Die Photozelle ist ein Gerät, das das Prinzip des Photoeffekts nutzt, um Lichtenergie in elektrische Energie umzuwandeln. Sie besteht aus zwei Hauptkomponenten: einer Kathode, die lichtempfindlich ist, und einer Anode. Wenn Licht auf die Kathode trifft, werden Elektronen aus dem Material herausgelöst. Diese freigesetzten Elektronen bewegen sich unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes zur Anode. Der resultierende Strom, der durch die Bewegung der Elektronen erzeugt wird, kann genutzt werden, um elektrische Energie zu liefern. Die Kathode besteht aus einem Material mit geringer Austrittsarbeit, wie beispielsweise Zink, das die Elektronen leicht freisetzt, wenn es beleuchtet wird. Die Intensität des Lichts bestimmt dabei, wie viele Elektronen freigesetzt werden, während die Frequenz des Lichts die Energie der Elektronen beeinflusst. Der erzeugte Strom ist proportional zur Lichtintensität, was bedeutet, dass bei stärkerem Licht mehr Elektronen freigesetzt werden und somit ein größerer Strom fließt.

1.1.3 Gegenfeldmethode

Die Gegenfeldmethode wird häufig verwendet, um die Austrittsarbeit W_A eines Materials zu bestimmen. Dabei wird eine gegensätzliche elektrische Spannung in einer Photozelle erzeugt, die das emittierte Elektron ablenkt. Die Spannung, die benötigt wird, um den Elektronenstrom vollständig zu stoppen, ist eine direkte Messung der Austrittsarbeit des Materials. In einer solchen Messung ist die kinetische Energie des Elektrons gleich der Arbeit, die das elektrische Feld leisten muss, um das Elektron vollständig zum Stillstand zu bringen.

Die Beziehung zwischen der Energie eines Photons $h \cdot \nu$, der Austrittsarbeit W_A und der kinetischen Energie des Elektrons E_{kin} lässt sich durch die Gleichung

$$h \cdot \nu = W_A + E_{\text{kin}}$$

beschreiben. In der Gegenfeldmethode wird E_{kin} durch die angelegte Gegenspannung U_0 bestimmt, wobei die kinetische Energie des Elektrons $E_{\text{kin}} = e \cdot U_0$ ist, wobei e die Elementarladung des Elektrons ist.

Die Photozelle ist ein praktisches Gerät, das auf diesem Prinzip beruht. Sie besteht aus einer Elektrode, die mit einem Lichtstrahl bestrahlt wird. Durch den Photoeffekt werden Elektronen freigesetzt, deren Bewegung durch eine angelegte Spannung beeinflusst wird. In Verbindung mit der Gegenfeldmethode kann man so die Energie der freigesetzten Elektronen messen und somit die Austrittsarbeit des Metalls bestimmen.

Zusammengefasst ermöglichen die Messungen des Photoeffekts in einer Photozelle unter Verwendung der Gegenfeldmethode eine präzise Bestimmung der Austrittsarbeit eines Materials sowie der Beziehung zwischen der Lichtfrequenz und der Energie der herausgelösten Elektronen.

1.2 Aufbau und Durchführung

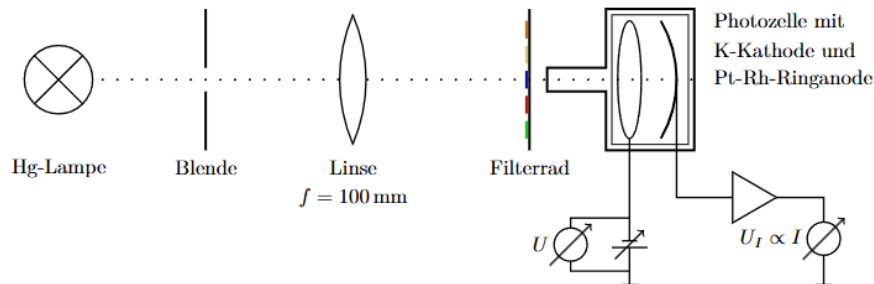


Abbildung 1: Auftragung der ersten Messung für $\lambda = 365 \text{ nm}$

In diesem Experiment wird eine Quecksilberdampfampe als Lichtquelle verwendet. Der Lichtstrahl kann mit einer Blende eingegrenzt werden, um die Intensität des einfallenden Lichts zu variieren. Eine Linse wird so ausgerichtet, dass ein scharfes Bild auf der Kathode der Photozelle entsteht. Über ein Filtrerrad können bestimmte Linien aus dem Spektrum der Lampe isoliert werden. Direkt hinter dem Filtrerrad befindet sich ein Rohr, das Streulicht minimiert.

Die Photozelle selbst besteht aus einer Ringanode, die aus Platin und Rhodium gefertigt ist, sowie einer Kathode, die mit Kalium beschichtet ist. Beide Komponenten sind von einer Schutzhaube umgeben, um störendes Streulicht abzuhalten. Die Spannungsversorgung erfolgt durch eine regelbare Spannungsquelle im Bereich von 0 V bis 12 V. Die Spannung zwischen Anode und Kathode wird über einen Spannungsteiler abgegriffen, um eine präzise Justierung zu ermöglichen. Zur Messung der Spannung wird ein Multimeter eingesetzt. Der Strom, der an der Anode entsteht, wird über einen Messverstärker in eine dazu proportionale Spannung umgewandelt und anschließend ebenfalls mit einem Multimeter erfasst.

Justierung

Die Justierung ist prinzipiell einfach zu verstehen. Um die optimal sicherzustellen, ist darauf zu achten, dass alle optischen Komponenten auf derselben Höhe positioniert und senkrecht zum Strahlengang ausgerichtet sind. Dabei können die Reflexionen an der Linse und am Filtrerrad genutzt werden, um eine präzise Ausrichtung zu erreichen. Die Blenden und die Linse werden so eingestellt, dass ein scharfes Bild der Irisblende entsteht und die Ringanode dabei nicht vom Lichtstrahl getroffen wird.

Durchführung

Beide schwarzen Kabel der Photozelle (Anodenanschluss) werden mit demselben Ausgang des Netzgerätes verbunden. Dabei ist auf die korrekte Polung zu achten. Der Kathodenanschluss (weißes Kabel mit BNC-Stecker) wird mit dem entsprechenden Anschluss des Messverstärkers verbunden. Ein eventuell vorhandener Offset des Ausgangssignals des Messverstärkers muss beseitigt werden. Weiterhin wird der zweite Ausgang der regelbaren Spannung des Netzgerätes mit dem Masseanschluss des Messverstärkers verbunden. Die Digitalmultimeter sind so anzuschließen, dass sowohl der Photostrom als auch die Gegenspannung gemessen werden können. Zunächst wird das Interferenzfilter gewählt, das das energiereichste Licht durchlässt. Die Gegenspannung wird so lange variiert, bis der Photostrom verschwindet. Es kann festgestellt werden, dass die benötigte Gegenspannung deutlich niedriger ist als die vom Netzgerät maximal bereitgestellte Spannung von 12 V.

Aus den vorhandenen Widerständen wird eine sinnvolle Auswahl getroffen, um den Versuchsaufbau um eine Spannungsteilerschaltung zu erweitern, die einen geeigneten Spannungsbereich für die Messungen liefert. Dieser Aufbau wird für die gesamte Messung beibehalten.

Für die Messung wird zunächst eine Wellenlänge mittels des Filtrerrads ausgewählt. Es wird die größtmögliche Gegenspannung eingestellt, und der Anodenphotostrom I_0 wird bestimmt, der aus Elektronen besteht, die aus der Anode gelöst wurden und zur Kathode gelangen. Anschließend wird die Gegenspannung variiert, um grob die Grenzspannung U_0 zu bestimmen, bei der der Photostrom verschwindet. Es wird die Kennlinie der

Photozelle aufgenommen, indem die Gegenspannung von $U = 0 \text{ V}$ bis zu einer Spannung variiert wird, bei der der Photostrom den Wert von I_0 erreicht. Dabei werden Messpunkte in geeigneten Abständen aufgenommen; insbesondere ist darauf zu achten, dass im quadratischen Bereich der Kennlinie genügend Messpunkte vorliegen. Diese Messung wird für alle Wellenlängen durchgeführt (I_0 , U_0 , Kennlinie). Die Messungen der Kennlinien werden zweimal wiederholt, da die Intensität der Hg-Lampe schwankt.

Das Interferenzfilter mit der Durchlasswellenlänge $\lambda = 365 \text{ nm}$ wird in den Strahlengang gestellt. Die erste Irisblende wird so angepasst, dass der Photostrom bei $U = 0 \text{ V}$ deutlich größer wird. Führt eine Öffnung der Blende nicht zu einer Erhöhung des Photostroms, wird der Blendendurchmesser so weit verringert, bis eine deutliche Abnahme des Photostroms um 30% – 50% beobachtet werden kann. Die Kennlinie der Photozelle wird für diese Wellenlänge wie zuvor beschrieben bei dieser niedrigeren Intensität aufgenommen.

1.3 Auswertung

Um die Energiebilanz in der Photozelle zu bestimmen, werden die Anoden- und Kathodenmaterialien so gewählt, dass die Austrittsarbeit W_A der Anode größer ist als die der Kathode. In den Abbildungen [2] und [3] werden sowohl die Bindungsenergie der äußersten Elektronen als auch die Beziehung zwischen Kathoden- und Anodenmaterialien im Kurzschlusszustand dargestellt. Wenn beide Materialien in einem Kurzschlusszustand verbunden

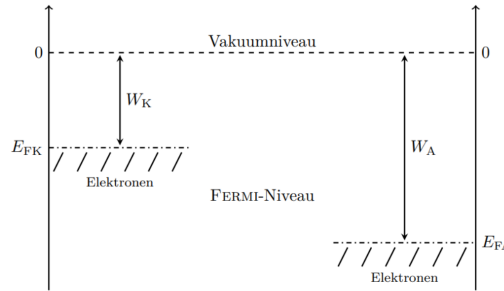


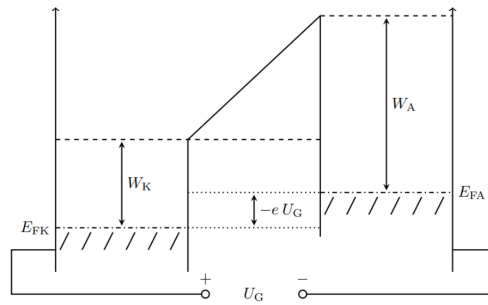
Abbildung 2: Auftragung der ersten Messung für $\lambda = 365 \text{ nm}$

werden, führen die Veränderungen ihrer Fermi-Niveaus zu einem Stromfluss, bis die Fermi-Niveaus wieder auf derselben Höhe liegen. Dies führt zur Entstehung eines Kontaktpotentials U_K , welches sich aus der Differenz der Austrittsarbeiten der beiden Materialien bestimmen lässt.

$$W_A = W_K + eU_K$$

Anschließend wird eine Spannungsquelle mit einem variablen Potential $-e \cdot U_G$ eingeführt, wodurch die Fermi-Niveaus um diesen Betrag verschoben werden. Im Rahmen des Photoeffekts ergibt sich die vollständige Gleichung wie folgt:

$$E = h\nu = eU_K + W_K + eU_G = eU_G + W_A \quad (1)$$

Abbildung 3: Auftragung der ersten Messung für $\lambda = 365\text{nm}$

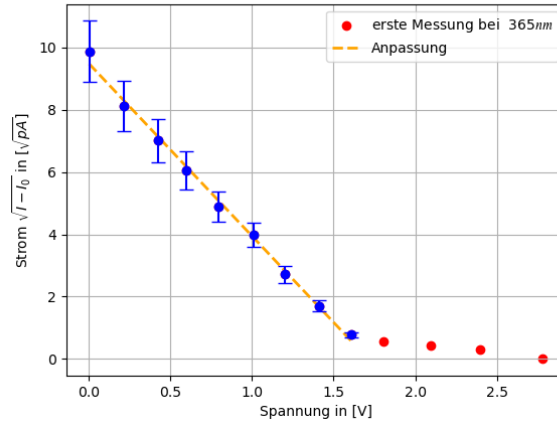
Bestimmung der Grenzspannung U_0

Nun werden die Photospannungswerte in einer Tabelle hinzugefügt (siehe Beispiel [1]), und der Photostrom wird mithilfe eines Verstärkungsfaktors umgerechnet. Um einen linearen Zusammenhang zu finden, wird der Quadratwurzeloperator angewendet, ebenso wie der Wert des Photostroms bei maximaler Gegenspannung. Der Fehler wird unter Verwendung der bekannten Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt.

U_G [mV]	I [pA]
0.5	97.5
219.9	66.1
425	49.3
599	36.8
798	24.0
1009	16.0
1201	7.5
1414	3.0
1606	0.7
1805	0.4
2092	0.3
2394	0.2
2781	0.1

Tabelle 1: erste Messung bei 365 nm

Der Fehler der gemessenen Photostrom wird von uns gewählt und wegen große Schwankungen an der Messgeräte wird zu 10% der gemessenen Photostrom I . Die Werte werden aufgetragen und eine lineare Anpassungsgerade der Form $f(x) = m \cdot x + b$ gelegt. Der ganze Vorgang lässt sich in einer Abbildung [4] darstellen.

Abbildung 4: Auftragung der ersten Messung für $\lambda = 365nm$

Zunächst werden alle Parameter der Anpassungsgeraden für alle Wellenlänge in der Tabelle [2] hinzugebracht. Diese sind wichtig, denn die Grenzspannung U_0 sich damit herausfinden lässt.

Es gilt also:

$$U_0 = \left| \frac{m}{b} \right| \quad (2)$$

Der Fehler ΔU_0 wird wieder mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzung ausgerechnet. $\overline{U_0}$ ist einer gemittelte Parameter aus den 2 Messungen in der gleichen Wellenlänge.

λ in [nm]	$m \pm \Delta m$ in $[\frac{\sqrt{pA}}{V}]$	$b \pm \Delta b$ in $[\sqrt{pA}]$	$U_0 \pm \Delta U_0$ in [V]	$\overline{U_0}$ in [V]
365	-5.55 ± 0.35	9.50 ± 0.37	1.71 ± 0.13	1.72 ± 0.13
-	-5.74 ± 0.36	9.99 ± 0.37	1.74 ± 0.13	-
405	6.34 ± 0.36	8.38 ± 0.41	1.32 ± 0.10	1.32 ± 0.10
-	-6.33 ± 0.36	8.36 ± 0.39	1.32 ± 0.10	-
435	-13.52 ± 0.51	15.96 ± 0.58	1.18 ± 0.06	1.16 ± 0.06
-	-13.94 ± 0.54	15.70 ± 0.62	1.13 ± 0.06	-
546	-28.29 ± 1.6	17.18 ± 0.97	0.61 ± 0.05	0.62 ± 0.05
-	-26.67 ± 1.5	16.73 ± 0.91	0.63 ± 0.05	-
578	-24.56 ± 1.6	11.32 ± 0.84	0.46 ± 0.05	0.46 ± 0.05
-	-23.79 ± 2.0	10.63 ± 0.76	0.45 ± 0.05	-

Tabelle 2: Wellenlängen mit den Parameter für m , b , U_0 und $\overline{U_0}$

Bestimmung der Wirkungsquantum h und Austrittsarbeit W_A

Nun wollen wir mithilfe der zuvor bestimmten Grenzspannung U_0 das Plancksche Wirkungsquantum h sowie die Austrittsarbeit W_A bestimmen. Dazu wird der lineare Zusammenhang zwischen der Frequenz ν und der Grenzspannung U_0 genutzt (siehe Gleichung 1). Es gilt:

$$U_0 = \underbrace{\frac{h}{e}}_{\text{Steigung } u} \cdot \nu - \underbrace{\frac{W_A}{e}}_{\text{Achsenabschnitt } c} \quad (3)$$

trägt man die Werte aus der Tabelle [2] für die Grenzspannung und Frequenz auf und erhält man die folgende Abbildung.

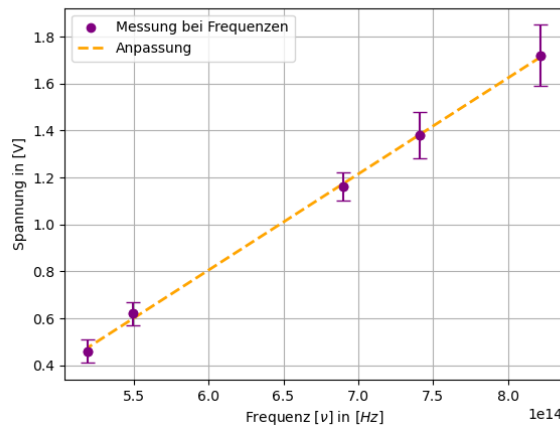


Abbildung 5: Auftragung der Grenzspannung U_0 gegen der Frequenz ν

Zunächst lässt sich aus den Parameter der Steigung u und Achsenabschnitt c das Wirkungsquantum h bestimmen. Aus Abbildung finden sich die folgenden Parameter:

$$u = (4.09 \pm 0.30) \times 10^{-15} \text{ Vs} \quad (4)$$

$$c = -1.65 \pm 0.18 \quad (5)$$

Jetzt mit dem Literaturwert der Elementarladung

$$e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

entnommen aus Wikipedia [4]. Für den Fehler gilt:

$$\Delta h = e \cdot \Delta u$$

und

$$W_A = e \cdot \Delta c.$$

Daraus ergeben sich die experimentellen Werte:

$$h = (6.55 \pm 0.48) \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (6)$$

$$W_A = (-2.64 \pm 0.29) \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (7)$$

Der experimentelle Wert ergibt Sinn und ist innerhalb der Fehlerbalken des Literaturwertes der Wirkungsquantum $h_{theo} = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. [6]

Einfluss der unterschiedlichen Intensitäten bei $\lambda = 365nm$

Durch die Änderung des Durchmessers der Irisblende konnte der Zusammenhang zwischen der Lichtintensität und dem Photostrom beobachtet werden. Historisch wurde angenommen, dass die Energie der Elektronen von der Intensität des Lichts abhängen würde.

Diese Annahme wurde jedoch durch experimentelle Untersuchungen widerlegt. Es wurde beobachtet, dass eine höhere Lichtintensität zu einem stärkeren Photostrom führt, während bei geringerer Intensität ein schwächerer Photostrom resultiert.

Diese Beobachtung lässt sich quantenmechanisch erklären: Bei höherer Lichtintensität treffen mehr Photonen auf das Material, wodurch mehr Elektronen aus der Metalloberfläche herausgelöst werden.

1.4 Diskussion

2 Balmer-Serie

Es soll anhand einer Balmer-Lampe die Balmer-Serie von Spektrallinien des Wasserstoffs beobachtet und aus den Ergebnissen die Rydberg-Konstante sowie das Plank'sche Wirkungsquantum bestimmt werden. Außerdem wird die Isotopieaufspaltung zwischen Wasserstoff und Deuterium quantifiziert.

Als Balmer-Serie bezeichnet man eine bestimmte Reihe von Spektrallinien des Wasserstoffatoms, die besonders gut mit dem bloßen Auge zu sehen sind und 1885 von Johann Jakob Balmer untersucht wurden [2, S. 99]. Sie werden i.d.R. mit griechischen Buchstaben bezeichnet (siehe Tab. 5). Das Vorhandensein diskreter Linien ist ein bedeutendes Beispiel der Quantelung von Energie. Balmer fand empirisch eine Gleichung für die inverse Wellenlänge, welche einem Spezialfall der Rydberg-Formel

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad [2] \quad (8)$$

mit R der *Rydberg-Konstante* und $n = 2$ entspricht.

Dieser Zusammenhang konnte schließlich mit dem Bohrschen Atommodell erklärt werden, demzufolge Elektronen auf diskreten Bahnen um den Atomkern kreisen und Licht einer bestimmten Wellenlänge aussenden, wenn sie von einer höheren auf eine tiefere Bahn übergehen. Die Balmer-Serie entspricht in diesem Modell den Übergängen der Elektronen von der m -ten ($m > 2$) Schale auf die zweite Schale.

Heute kann das Verhalten stattdessen mithilfe der Quantenmechanik beschrieben werden, welche ebenfalls diskrete Energieniveaus der Elektronen vorhersagt. Die Rydberg-Konstante kann theoretisch berechnet werden und es gilt

$$R = \frac{\mu e^4}{8\pi\epsilon_0^2 h^3} \quad [2, S.101] \quad (9)$$

mit μ der reduzierten Masse von Elektron und Kern $\mu = \frac{m_e m_K}{m_e + m_K}$. Der Wert von R hängt also von der Masse des Kerns ab. Für verschiedene Isotope des Wasserstoffs sind Linien mit leicht unterschiedlichen Wellenlängen zu erwarten, was als *Isotopieaufspaltung* bezeichnet wird.

2.1 Versuchsaufbau

Der verwendete Aufbau ist in Abb. 6 gezeigt. Die Linien sollen hier anhand einer Balmer-Lampe (a) beobachtet werden, welche herkömmliches sowie deuteriertes Wasser enthält. Der Wasserdampf wird in der Lampe durch eine hohe Spannung zum Leuchten angeregt. Das Licht geht durch eine Linse (b), einen Spalt (c) und eine weitere Linse (d), welche als Projektionsobjektiv zur Kollimation dient, auf ein drehbar gelagertes Reflexionsgitter (e), welches hier als Interferometer dient. Das Muster kann an einer weiteren drehbaren Schiene beobachtet werden, wo das Licht von einer weiteren Linse (f) auf das Okular (g) abgebildet wird.

Am Drehgelenk unter dem Gitter gibt es eine Winkelskala. Das Gitter wird zunächst auf 0° gedreht und das Projektionsobjektiv in seinem Brennweitenabstand (150 mm, [1]) hinter dem Spalt aufgestellt. Bei angeschalteter Lampe ist nun ein Bild des Spalts leicht neben dem Spalt zu sehen. Damit das Gitter genau justiert ist, wird es in seiner Aufhängung so gedreht, dass das Bild des Spalts im Spalt selbst liegt.

Das Gitter wird gedreht, bis am Okular eine Linie sichtbar wird. Diese kann durch Verschieben der Linse vor dem Okular scharf gestellt werden. Die relevanten Winkel sind in Abb. 7 gezeigt. Wir haben für alle Messungen $\omega_B = 140^\circ$ verwendet. Der Winkel des Gitters ω_G wird verändert, um unterschiedliche Linien zu betrachten. Für die Winkel α und β , welche direkte Relevanz für die Gittergleichung haben, ergeben sich dann durch

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega_G \\ \beta &= 180^\circ + \omega_G - \omega_B \end{aligned} \quad (10)$$

Die Gittergleichung für konstruktive Interferenz lautet

$$k\lambda = g(\sin(\alpha) + \sin(\beta)) \quad [3] \quad (11)$$

wobei hier immer die erste Ordnung mit $k = 1$ beobachtet wird. g ist die sogenannte Gitterkonstante, die experimentell anhand des bekannten Spektrums von Quecksilber bestimmt werden soll.



Abbildung 6: Aufbau zur Durchmessung der Balmer-Serie [1]

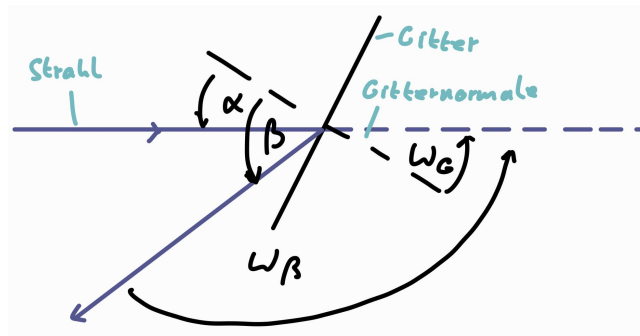


Abbildung 7: Winkel bei der Messung der Balmer-Serie.

Das Okular hat außerdem eine Strichskala, welche dazu dient, kleine Winkelunterschiede zu messen und hier für die Bestimmung der Isotopieaufspaltung verwendet werden kann. Der Winkelunterschied zwischen zwei Linien bei d_1 und d_2 auf der Skala ergibt sich aus dem Abstand zur Abbildungslinse:

$$\delta\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\delta d}{f} \right) \tan^{-1} \left(\frac{|d_2 - d_1|}{f} \right) = \left| \frac{d_2 - d_1}{f} \right| \quad (12)$$

wobei im dritten Schritt die Kleinwinkelnäherung verwendet wurde und $f = 300 \text{ mm}$ die Brennweite der Linse ist [1].

2.2 Bestimmung der Gitterkonstanten

Zunächst soll die Gitterkonstante g des verwendeten Gitters bestimmt werden. Hierzu sollen die Winkel verschiedener Hg-Linien gemessen und mit den bekannten Linien verglichen werden (Tab. 3). Zunächst wird also die Balmer-Lampe durch eine Hg-Spektrallampe ersetzt.

Die Winkel der beobachteten Linien zusammen mit der Farbe und der beobachteten Intensität (grobe Skala von 1 bis 5) sind in Tab. 4 gezeigt. Die Wellenlänge wurde anhand dieser Daten und Tab. 3 zugeordnet.

Farbe	$\lambda_{\text{Hg}} / \text{nm}$	rel. Int.
violett	404,656	1800
	407,783	150
	410,805	40
	433,922	250
	434,749	400
blau	435,833	4000
türkis	491,607	80
grün	546,074	1100
gelb	576,960	240
	579,066	280
rot	623,440	30
	671,643	160
	690,752	250

Tabelle 3: Wellenlängen, Farben und Intensitäten des Hg-Spektrums. [1]

Farbe	Intensität	λ/nm	$\alpha/^\circ$	$\beta/^\circ$	g/nm	$\Delta g/\text{nm}$
Violett	5	404.66	11.0	51.0	418.1	5.3
Violett	3	407.78	11.2	51.2	418.9	5.2
Violett	1	410.81	11.6	51.6	417.2	5.1
Blau-Türkis	1	433.92	13.6	53.6	417.2	4.8
Blau	5	435.83	13.9	53.9	415.8	4.7
Türkis	4	491.61	18.9	58.9	416.6	4.0
Grün	5	546.07	24.2	64.2	416.8	3.4
Gelb	4	576.96	27.5	67.5	416.4	3.0
Gelb	3	579.07	27.9	67.9	415.3	3.0
Rot	1	623.44	31.0	71.0	426.9	2.8
Rot	1	671.64	31.6	71.6	456.0	2.9
Rot	1	690.75	33.0	73.0	460.2	2.9

Tabelle 4: Beobachtete Daten und deren Auswertung für die Linien der Hg-Spektrallampe. Der Fehler der Winkel wird auf 0.6° geschätzt.

α und β wurden anhand von (10) berechnet und aus der Gittergleichung (11) folgt

$$g = \frac{\lambda}{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}$$

Der Fehler von g wurde mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung berechnet.

Für die roten Linien erhalten wir stark von den anderen Messungen abweichende Gitterkonstanten. Womöglich haben wir hier die Wellenlängen falsch zugeordnet und sie werden für die weitere Auswertung nicht verwendet. Um aus den restlichen Messungen einen einzelnen Wert der Gitterkonstante zu erhalten, passen wir eine Gerade an die Gittergleichung an (Abb. 8). Wir erhalten die Gleichung

$$\lambda = (5.6 \pm 2.1) \text{ nm} + \frac{(411.9 \pm 1.8) \text{ nm}}{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}$$

und damit

$$g = (411.9 \pm 1.8) \text{ nm}$$

Im Datenblatt [3] ist angegeben, dass das Gitter 2400 mm^{-1} Linien hat, was $g = 416.67 \text{ nm}$ entspricht. Die Abweichung von unserem Wert lässt sich dadurch erklären, dass das Gitter holographisch hergestellt wurde und die Abstände bei solchen Verfahren nicht sehr genau sind [1], was einer der Gründe ist, warum wir die Gitterkonstante hier selbst experimentell bestimmt haben.

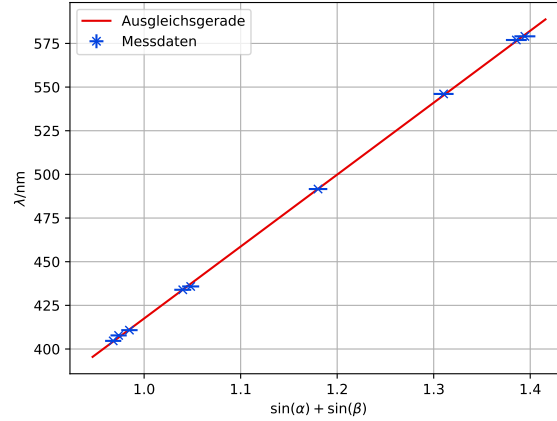


Abbildung 8: Linearer Fit zur Bestimmung der Gitterkonstante.

2.3 Messung der Isotopieaufspaltung

Auf zwei verschiedene Arten soll die Isotopieaufspaltung gemessen werden. Zunächst wird das Okular verwendet und anhand der Position entlang der Strichskala die Aufspaltung zweier Linien bestimmt. Anschließend wird das Okular durch eine CCD-Kamera ersetzt, deren Daten am Computer exportiert werden können.

Da die Aufspaltung der Wellenlänge $\delta\lambda$ zweier Linien nur klein ist, kann ihre Abhängigkeit von der Winkelauflösung $\delta\beta$ mithilfe der ersten Ableitung der Gittergleichung linear genähert werden:

$$\delta\lambda = \delta\beta \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = g \cos(\beta) \delta\beta \quad (13)$$

Die nach der Literatur erwarteten Wellenlängen und Aufspaltungen der Linien sind in Tab. 5 gezeigt.

Bezeichnung	m	λ/nm (bei Wasserstoff)	$\delta\lambda/\text{nm}$
H_α	3	656.28 nm	0.179 nm
H_β	4	486.13 nm	0.132 nm
H_γ	5	434.05 nm	0.118 nm
H_δ	6	410.17 nm	0.112 nm

Tabelle 5: Die ersten vier Linien der Balmer-Serie und ihre Wellenlängen bei Wasserstoff (Protium) sowie die Isotopieaufspaltung. [3]

2.3.1 Messung mit Okular

Die beobachteten Linien und ihre Positionen entlang der Strichskala des Okulars sind in Tab. 6 gezeigt. Die Mitte der Strichskala liegt bei $d = 5 \text{ mm}$.

Für jede der Linien wird der Abstand δd der Peaks berechnet und daraus der Winkelabstand $\delta\beta$ mithilfe von (12). Die Aufspaltung $\delta\lambda$ der Wellenlängen folgt dann aus (13). Die resultierenden Werte sind in Tab. 7 gezeigt.

Bei allen Linien liegt der Literaturwert aus Tab. 5 im Fehlerbereich, die Fehler sind allerdings sehr groß, da das Ablesen anhand der Strichskala im Okular schwierig war. Um präzisere Messungen zu machen, setzen wir im Folgenden eine CCD-Kamera anstatt des Okulars ein.

2.3.2 Messung mit CCD-Kamera

wir ersetzen in dem Versuchsaufbau (Abb. 6) das Okular durch die CCD-Kamera, welche über USB an einen Computer angeschlossen und dort mit einer speziellen Software ausgelesen werden kann. dort lässt sich die

$\omega_G/^\circ$	d/mm	m
13.8	5	5
13.8	5.1	5
13.9	5	0
13.9	5.1	0
18.2	5	4
18.2	5.2	4
37	5	3
37	5.7	3

Tabelle 6: Messung der Balmer-Linien mit einem Okular, mit zugeordneter Quantenzahl m . $m = 0$ bedeutet, dass wir diese Linie nicht zum Balmer-Spektrum zuordnen konnten. Jede Linie ist zweimal aufgeführt, für die zwei aufgespaltenen sichtbaren Peaks, die sich in ihrer Position entlang der Strichskala d unterscheiden. $\Delta\omega_G = 0.6^\circ$, $\Delta d = 0.1 \text{ mm}$.

m	λ/nm	$\Delta\lambda/\text{nm}$	$\delta\lambda/\text{nm}$	$\Delta\delta\lambda/\text{nm}$
5	430.7	5.2552	0.08	0.11
0	431.8	5.2526	0.08	0.11
4	478.8	5.1362	0.14	0.10
3	649.3	4.5762	0.22	0.04

Tabelle 7: mit dem Okular gemessene Isotopieaufspaltung der Balmer-Linien.

Messung in Echtzeit Beobachten und auch die Belichtungszeit justieren. Die Software berechnet in Abhängigkeit der Pixel-Koordinate p (2048 Pixel insgesamt) den Winkel γ zur optischen Achse und trägt die Intensität $I/\%$ gegen $\gamma/^\circ$ auf.

$$\gamma = \arctan\left(\frac{(1024 - p) \cdot 0.014 \text{ nm}}{f}\right) \quad [1]$$

Dabei ist $f = 300 \text{ mm}$ die Brennweite der Abbildungslinse.

Um aus den CCD-Bildern die Positionen der sichtbaren Peaks zu extrahieren, wurde die an den Daten einen Fit der Form

$$I(\alpha) = B + G(\alpha; a_1, \mu_1, \sigma_1) + G(\alpha; a_2, \mu_2, \sigma_2)$$

durchgeführt. Dabei wurde auf den Intensitäten ein Fehler von $\Delta I = 0.5\%$ angenommen. Der additive Parameter B ermöglicht die Berücksichtigung einer eventuell vorhanden gleichmäßigen Grundausleuchtung und sorgt nach visueller Inspektion erfahrungsgemäß für bessere Anpassung der Gauß-Parameter an die Daten. Es werden die verallgemeinerten Gauß-Funktionen

$$G(xga, \mu, \sigma) = a \exp\left(-\frac{(x - b)^2}{2c^2}\right)$$

verwendet. Die Plots mit Fit sind in im Anhang in Abb. ?? gezeigt. Im Bild bei $\alpha = 13.8^\circ$ sind die beiden erkennbaren Maxima deutlich weiter von einander entfernt, als bei den anderen beiden Messungen. Dies bedeutet, dass es sich hier nicht um die Aufspaltung einer Linie, sondern um zwei unterschiedlichen Linien handelt (es handelt sich um die zwei nahe beieinander liegenden Linien, die wir auch mit dem Okular beobachten konnten, siehe Tab. 6). Daher wurde für diese Messung kein Fit durchgeführt.

die Positionen der Maxima sind in Tab. 8 gezeigt.

Mit den $\delta\beta$ -Werten wird weitergerechnet, analog zu der Okular-Messung. Die resultierenden Werte sind in Tab. 9 gezeigt.

Keiner der Werte stimmt innerhalb des Fehlerbereichs mit den Werten aus Tab. 5 überein, jedoch ist die Abweichung bei beiden geringer als 10%. Wir konnten an der CCD-Kamera teils eine ungleichmäßige Grundausleuchtung beobachten, welche zu Verschiebung der Peaks führen würde. Eine weitere Quelle der Abweichung könnte von der Position der Abbildungslinse kommen, die nicht genau im Abstand ihrer Brennweite vor der Kamera aufgestellt war, da die Abbildung so schärfer erschien.

$\alpha/^\circ$	$\beta/^\circ$	$\mu_1/^\circ$	$\Delta\mu_1/^\circ$	$\mu_2/^\circ$	$\Delta\mu_2/^\circ$	$\delta\beta/^\circ$	$\Delta\delta\beta/^\circ$
18.2	58.2	-0.03073	0.00065	0.00122	0.00013	0.03196	0.00066
37.0	77.0	-0.11131	0.00018	-0.00780	5.1×10^{-5}	0.10352	0.00019

Tabelle 8: gemessene Winkelpositionen der aufgespaltenen Balmer-Linien. μ_1 und μ_2 sind die aus einem χ^2 -Fit bestimmten Positionen der Linien und $\delta\beta$ die Differenz der beiden. $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0.6^\circ$.

m	λ/nm	$\Delta\lambda/\text{nm}$	$\delta\lambda/\text{nm}$	$\Delta\delta\lambda/\text{nm}$
4	478.8	5.1	0.1210	0.0033
3	649.3	4.6	0.1674	0.0076

Tabelle 9: mit der CCD-Kamera gemessene Isotopieaufspaltung der Balmer-Linien.

2.4 Rydberg-Konstante und Wirkungsquantum

Aus unseren Messungen kann nach die Rydberg-Konstante bestimmt werden. Hierzu werden die mit dem Okular gemessenen Winkel der Linien verwendet. Diese entsprechen den Positionen der helleren Linien. Die helleren Linien sind diejenigen, die von Wasserstoff (Protium) erzeugt wurden, denn das Mischverhältnis von Protium zu Deuterium in der Lampe ist 2:1 [1].

nach (8) mit $n = 2$ ist R_H der Betrag der Steigung von $\frac{1}{\lambda}$ in Abhängigkeit von $\frac{1}{m^2}$:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R_H}{4} - R_H \frac{1}{m^2}$$

Aus den Daten von Tab. 6 ergibt sich der χ^2 -Fit in Abb. 9 und der Zusammenhang

$$\frac{1}{\lambda} = (0.2775 \pm 0.0032) \times 10^7 \text{ pm}^{-1} - (1.111 \pm 0.031) \text{ m}^{-1} \frac{1}{m^2}$$

Der vierfache Achsenabschnitt und der Betrag der Steigung entsprechen beide der Rydberg-Konstante. Der Mittelwert aus diesen beiden Werten ist

$$R_H = (1.1104 \pm 0.0155) \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Der Literaturwert für die Rydberg-Konstante ist

$$R_H \approx R_\infty = 1.0974 \times 10^7 \text{ m}^{-1} [5] \quad (14)$$

Hier wurde näherungsweise wurde die Rydberg-Konstante für $\mu = m_e$ verwendet, da der Unterschied deutlich kleiner als unsere Messunsicherheit ist. Der Wert liegt innerhalb des Fehlerbereichs des experimentellen Ergebnis und die Abweichung beträgt nur etwa 1%.

Aus dem experimentellen Wert für $R_\infty \approx R_H$ berechnen außerdem das Planck'sche Wirkungsquantum. Nach (9) gilt

$$h = \sqrt[3]{\frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2 R_\infty}} = (6.600 \pm 0.037) \times 10^{-34} \text{ J s}$$

Der Literaturwert ist $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$ [6] und aus der Messung des Photoeffekts wurde $h = (6.55 \pm 0.48) \times 10^{-34} \text{ J s}$ bestimmt. Alle drei Werte stimmen innerhalb der Fehlerbereiche miteinander überein, wobei jedoch das anhand der Balmer-Linien berechnete Wirkungsquantum eine deutlich geringere Unsicherheit hat, als der Wert vom Photoeffekt.

2.5 weitere Überlegungen

Weitere Linien Im Spektrum der Balmer-Lampe sind zusätzliche Linien zu erkennen, die nicht zur Balmer-Serie gehören. Darunter z.B. die violette Linie, der kein m zugeordnet werden konnte. Es gibt verschiedene mögliche Quellen dieser Übergänge. Die Balmer-Lampe enthält nicht Wasserstoff und Deuterium, sondern Wasser und deuteriertes Wasser, also sind auch Sauerstoff-Atome vorhanden. Außerdem können beim Herstellungsprozess zusätzliche Verunreinigungen in der Reaktionskammer eingeschlossen worden sein.

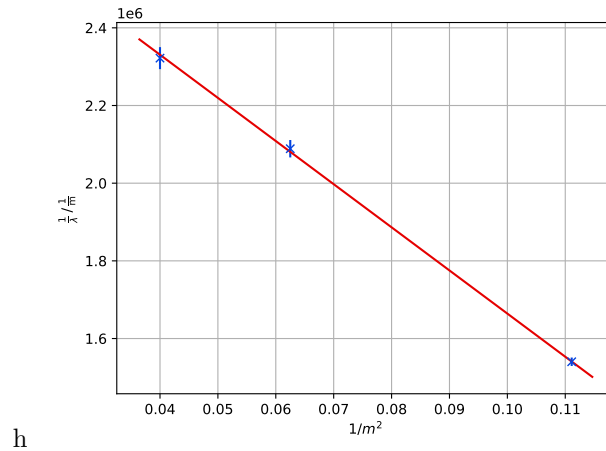


Abbildung 9: Linearer Fit der Wellenzahl $\frac{1}{\lambda}$ zur Bestimmung der Rydberg-Konstante von Wasserstoff.

Dopplerverbreiterung Für die Dopplerverbreiterung einer Linie durch thermische Bewegung der Atome gilt

$$\delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\frac{2RT \ln(2)}{M}} [2, S.230]$$

mit der Gaskonstante $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ und der molaren Masse von Wasserstoff (Protium) $M = 1 \text{ g mol}^{-1}$ [7] Mit der Annahme einer Temperatur der Lampe von 1000 K ergeben sich die Verbreiterung in Tab. 10

Bezeichnung	λ/nm	$\delta\lambda_{\text{doppler}}/\text{nm}$
H_α	656	4.70×10^{-4}
H_β	486	3.48×10^{-4}
H_γ	434	3.10×10^{-4}
H_δ	410	2.93×10^{-4}

Tabelle 10: Dopplerverbreiterungen der Balmer-Linien.

Auflösungsvermögen des Gitters Das Interferenzgitter ist 25 mm breit [1]. Es hat also

$$N = \frac{25 \text{ mm}}{411.9 \text{ nm}} \approx 60694$$

Linien. Das spektrale Auflösungsvermögen in erster Ordnung ($k = 1$) ist damit

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN = 60694$$

Für die Isotopieaufspaltung der Balmer-Linien gilt $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = 3670$, also ist das Auflösungsvermögen des Gitters ausreichend für die hier gemachten Messungen.

3 Fazit

Im zweiten Versuchsteil wurden mithilfe eines Interferenzgitters die Wellenlängen der Balmer-Serie von Wasserstoff und Deuterium durchgemessen. Sowohl bei Beobachtung mit einem Okular als auch der Messung mithilfe einer CCD-Kamera wurde die Isotopieaufspaltung berechnet. Die Ergebnisse der Okular-Messung sind kompatibel mit Literaturwerten, haben jedoch eine hohe Messunsicherheit. Mit der CCD-Kamera konnte die Unsicherheit prinzipiell verringert werden, jedoch scheint es hier eine andere Quelle von Verfälschungen zu geben, denn die Ergebnisse stimmen nicht mit den erwarteten Werten überein.

Mithilfe einer Geradenanpassung konnten außerdem die Rydberg-Konstante auf $R_H = (1.1104 \pm 0.0155) \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, das Plancksche Wirkungsquantum auf $h = (6.600 \pm 0.037) \times 10^{-34} \text{ J s}$ bestimmt werden. Beide Werte stimmen mit der Literatur überein und das Wirkungsquantum ist ebenfalls kompatibel mit der vorigen Messung aus dem Photoeffekt.

4 Anhang

4.1 Photoeffekt

U_0 [mV]	I [pA]
0.5	97.5
219.9	66.1
425	49.3
599	36.8
798	24.0
1009	16.0
1201	7.5
1414	3.0
1606	0.7
1805	0.4
2092	0.3
2394	0.2
2781	0.1

Tabelle 11: Messung 1a bei 365 nm

U_G [V]	I [pA]
0.001	104.5
0.241	75
0.523	49
0.749	29
1.011	14.6
1.276	7.2
1.510	2.9
1.761	1.9
1.845	1.8
2.085	1.6
2.388	1.6
2.781	1.5

Tabelle 12: Messung 1b bei 365 nm

4.2 Balmer-Serie

U_G [V]	I [pA]
0.005	73.9
0.211	54.3
0.401	30.7
0.614	20.6
0.804	11.3
1.007	4.7
1.201	2.5
1.405	1.6
1.612	1.4
1.801	1.4
2.024	1.3
2.304	1.3
2.781	1.4

Tabelle 13: Messung 2a bei 405 nm

U_G [V]	I [pA]
0.007	69.8
0.212	53.8
0.388	38.0
0.620	19.2
0.794	10.9
1.005	5.2
1.197	2.6
1.403	1.8
1.607	1.7
1.804	1.7
2.014	1.5
2.298	1.8
2.782	1.7

Tabelle 14: Messung 2b bei 405 nm

U_G [V]	I [pA]
0.007	273.1
0.201	174.2
0.417	102.8
0.612	54.5
0.795	20.8
1.005	2.8
1.209	0.7
1.408	0.6
1.607	0.1
1.812	0.0
2.017	0.4
2.311	0.0
2.782	0.0

Tabelle 15: Messung 3a bei 435 nm

U_G [V]	I [pA]
0.005	237.3
0.214	187.6
0.415	110.5
0.596	59.3
0.802	21.0
0.997	4.8
1.210	1.0
1.386	0.5
1.608	0.4
1.803	0.3
2.026	0.3
2.296	0.2
2.781	0.1

Tabelle 16: Messung 3b bei 435 nm (Messung am nächsten Tag)

U_G [V]	I [pA]
0.005	306.5
0.226	117.3
0.406	28.7
0.596	5.1
0.803	4.3
1.007	4.3
1.208	4.4
1.413	4.4
1.602	4.5
1.803	4.4
2.022	4.4
2.307	4.3
2.781	4.3

Tabelle 17: Messung 4a bei 546 nm

U_G [V]	I [pA]
0.006	296.2
0.203	126.4
0.408	27.2
0.620	4.8
0.792	4.1
1.001	4.0
1.203	3.9
1.408	3.9
1.593	4.0
1.791	4.0
2.020	4.0
2.307	4.1
2.781	3.9

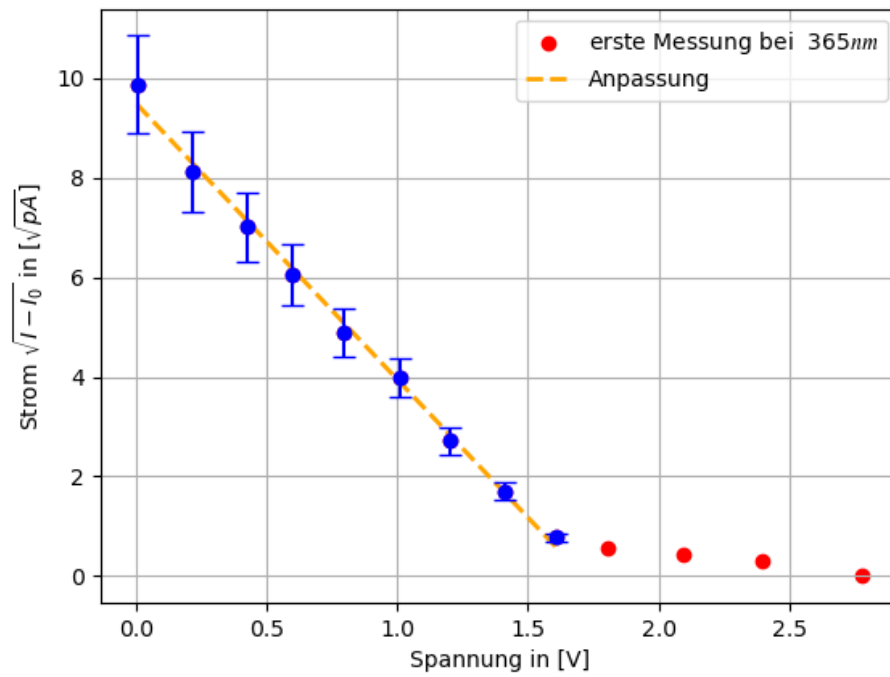
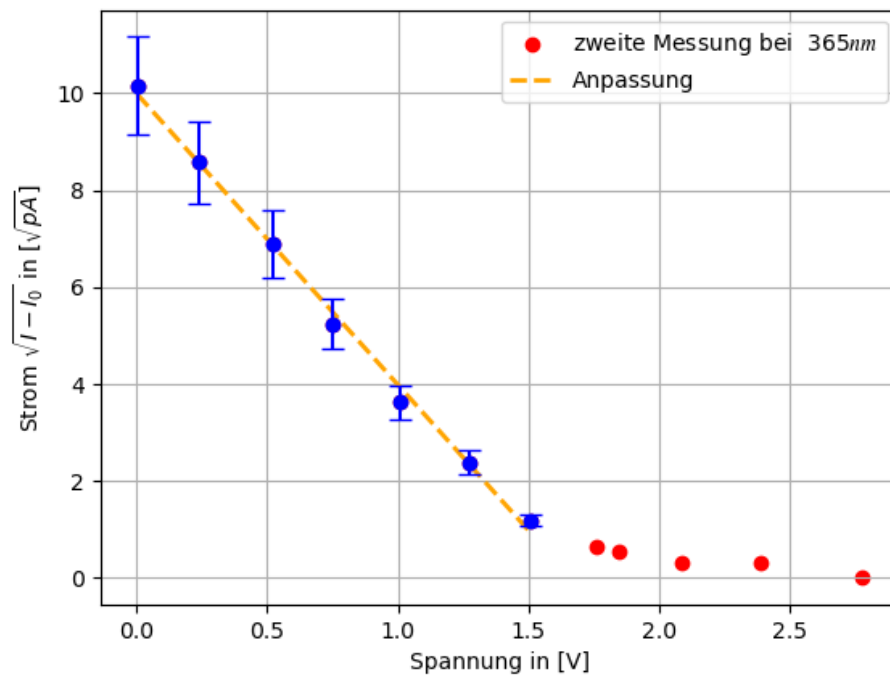
Tabelle 18: Messung 4b bei 546 nm

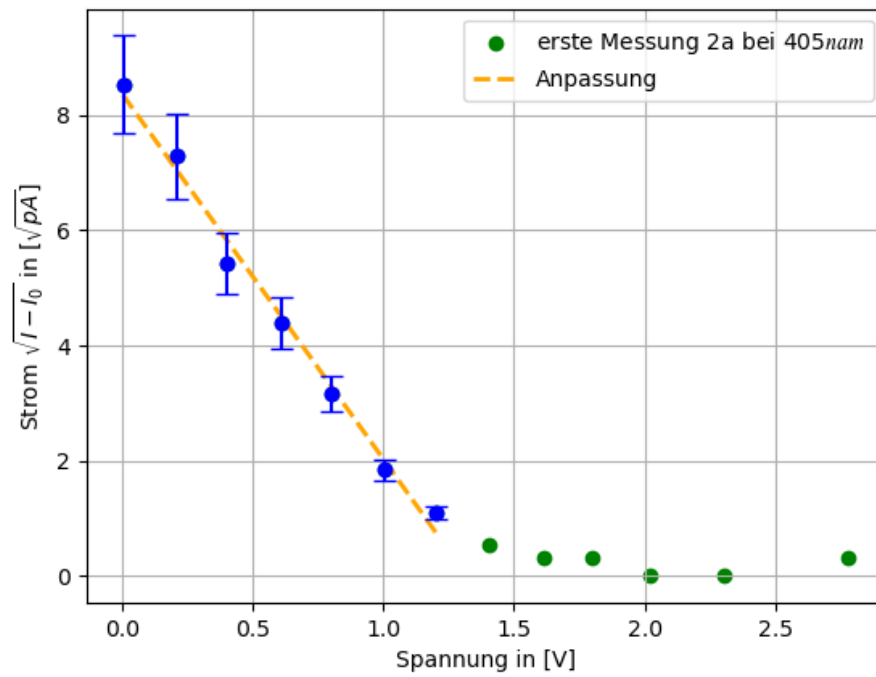
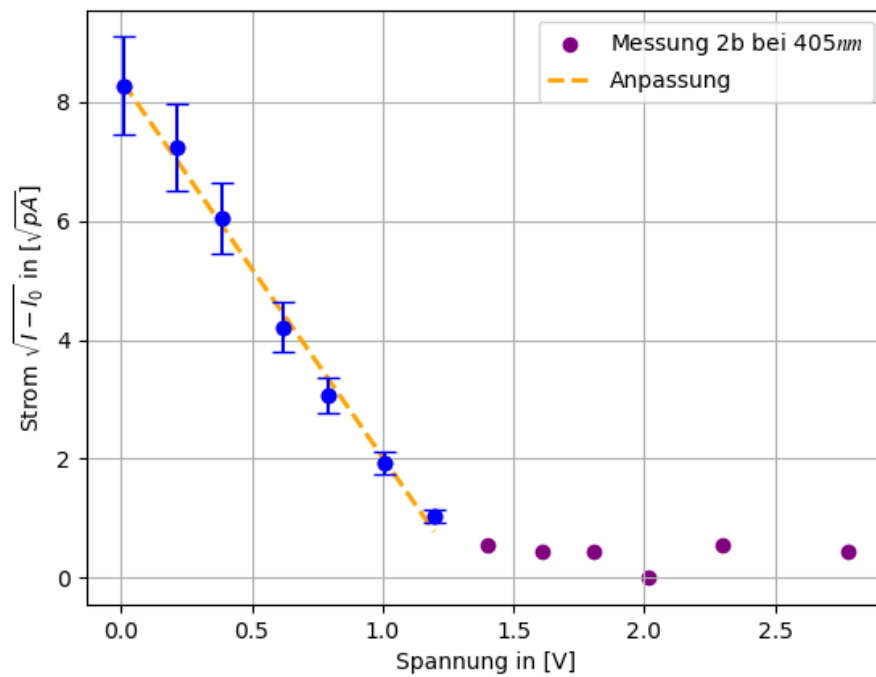
U_G [V]	I [pA]
0.006	133.1
0.205	39.4
0.405	6.6
0.606	4.5
0.809	4.3
1.006	4.2
1.208	4.2
1.411	4.3
1.615	4.5
1.791	4.5
2.025	4.5
2.318	4.5
2.781	4.4

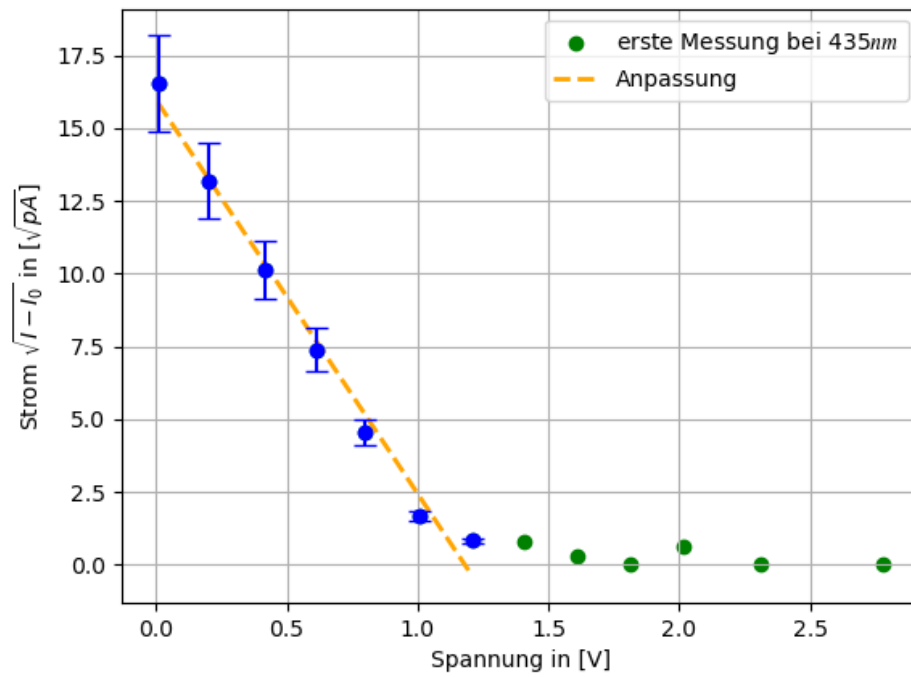
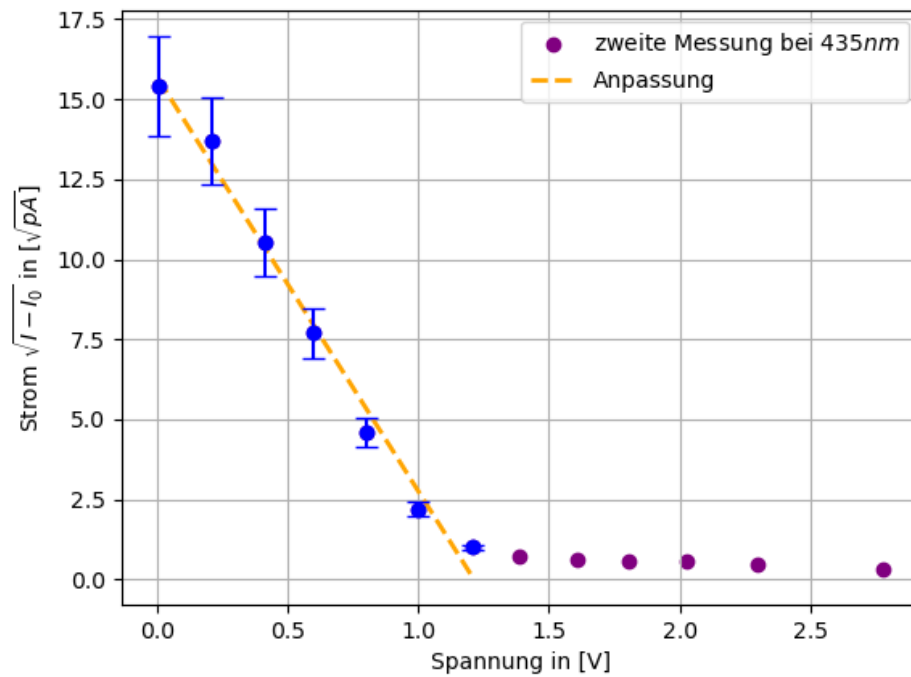
Tabelle 19: Messung 5a bei 578 nm

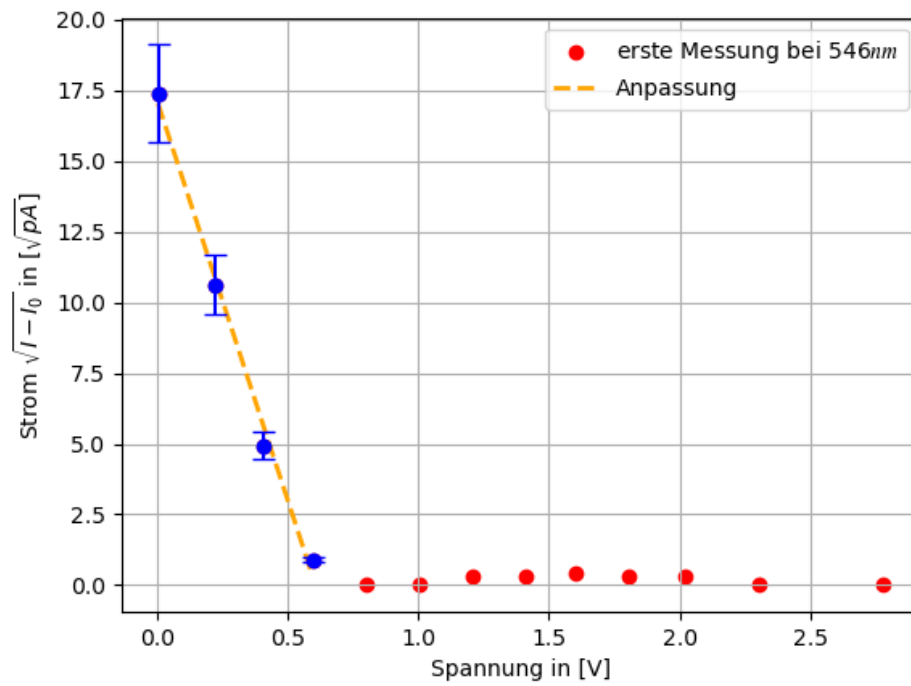
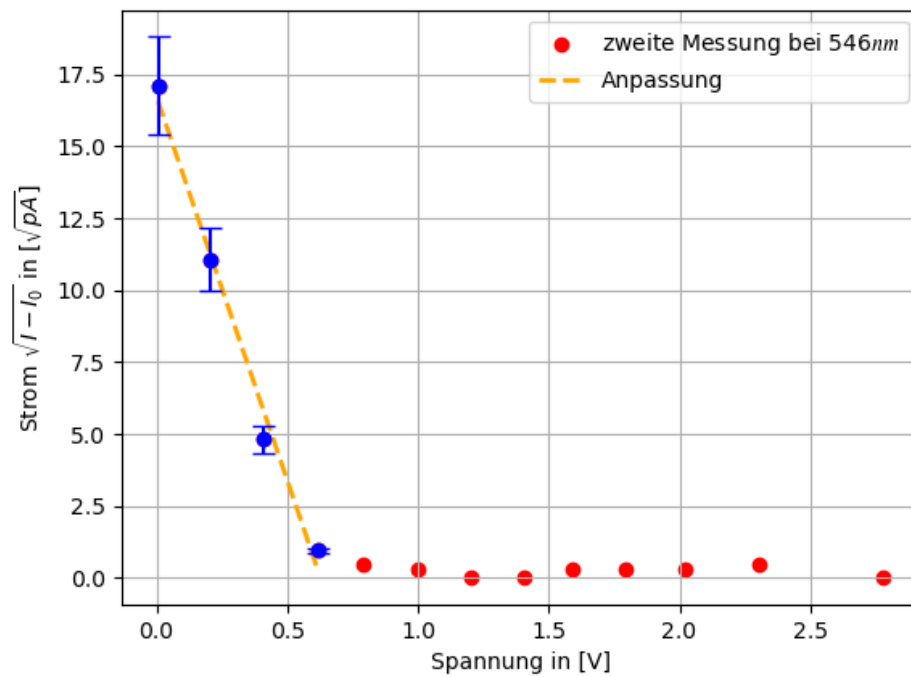
U_G [V]	I [pA]
0.006	120.8
0.198	32.9
0.401	6.2
0.614	4.4
0.807	4.4
1.008	4.4
1.218	4.4
1.400	4.4
1.594	4.3
1.811	4.3
2.002	4.3
2.309	4.3
2.782	4.4

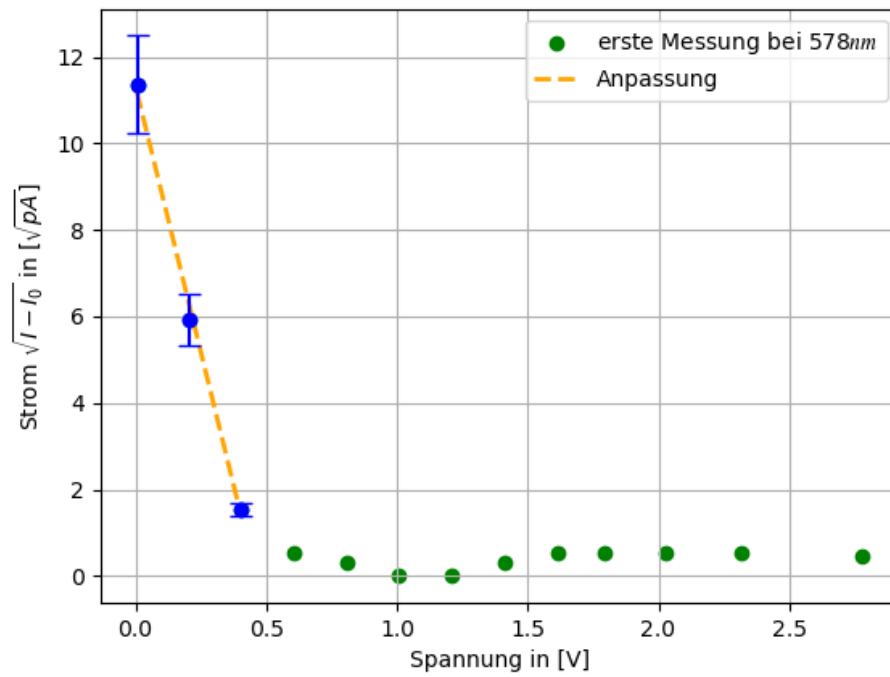
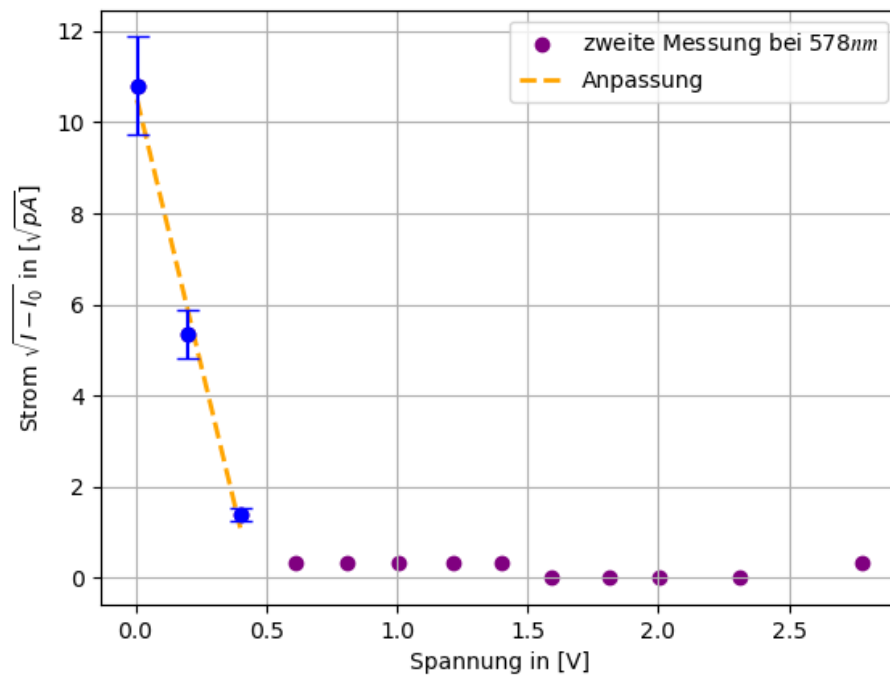
Tabelle 20: Messung 5b bei 578 nm

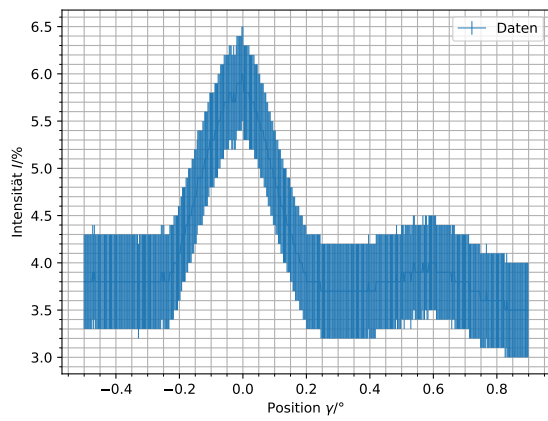
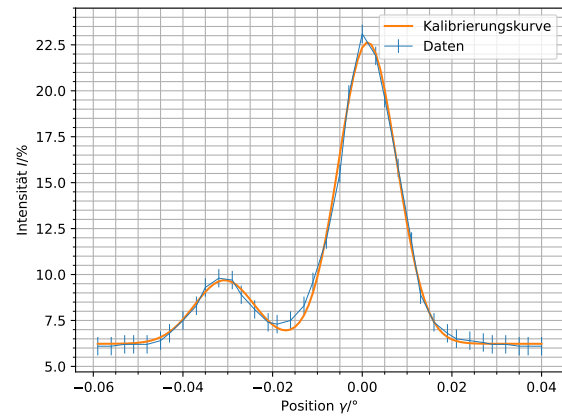
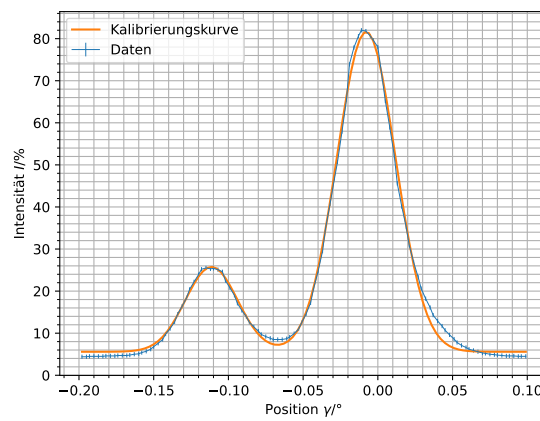
Abbildung 10: Auftragung der ersten Messung für $\lambda = 365\text{nm}$ Abbildung 11: Auftragung der zweiten Messung für $\lambda = 365\text{nm}$

Abbildung 12: Auftragung der ersten Messung für $\lambda = 405\text{nm}$ Abbildung 13: Auftragung der zweiten Messung für $\lambda = 405\text{nm}$

Abbildung 14: Auftragung der ersten Messung für $\lambda = 435\text{nm}$ Abbildung 15: Auftragung der zweiten Messung für $\lambda = 435\text{nm}$

Abbildung 16: Auftragung der ersten Messung für $\lambda = 546 \text{ nm}$ Abbildung 17: Auftragung der zweiten Messung für $\lambda = 546 \text{ nm}$

Abbildung 18: Auftragung der ersten Messung für $\lambda = 578\text{nm}$ Abbildung 19: Auftragung der zweiten Messung für $\lambda = 578\text{nm}$

Abbildung 20: CCD-Bild der Linie bei $\alpha = 13.8^\circ$.Abbildung 21: CCD-Bild der Linie bei $\alpha = 18.2^\circ$ mit Fit.Abbildung 22: CCD-Bild der Linie bei $\alpha = 37.0^\circ$ mit Fit.

Literatur

- [1] *Physikalisches Praktikum Teil IV – Versuchsbeschreibungen*, Universität Bonn, 10.10.2024
- [2] *Experimentalphysik 3 – Atome, Moleküle, Festkörper*, 5. Auflage, Wolfgang Demtröder, 2016
- [3] *Balmer-Serie des Wasserstoff*, Leybold Didactic, Abruf 17.11.2024
- [4] Wikipedia-Autoren, *Elementarladung* – Wikipedia, <https://de.wikipedia.org/wiki/Elementarladung>, Abruf 19.11.2024
- [5] *The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty*, NIST, <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?ryd>, Abruf 19.11.2024
- [6] *The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty*, NIST, <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?h>, Abruf 19.11.2024
- [7] *Standard Atomic Weights*, CIAWW, <https://www.ciaaw.org/atomic-weights.htm>, Abruf 18.11.2024