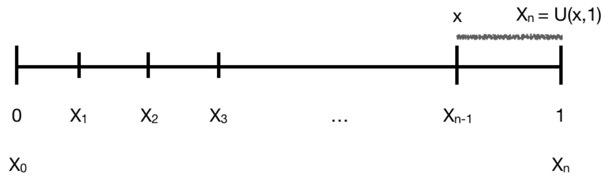
Gema Correa Fernández
gecorrea@ucm.es

Ejercicio de la página 25, del Tema 3 Parte I

Cálculo Estocástico en Finanzas

Sean $\{X_n, n \geq 0\}$ una secuencia de v.a., supongamos que $P(X_0 = 0) = 1$. Supongamos además que para cada $n \geq 1$, la distribución condicionada de X_n por $X_1, \cdots, X_{n-1}$ sólo depende de X_{n-1}, y es una distribución $U(x, 1)$, si $X_{n-1} = x$. Obtener las $E(X_n)$, para todo n. Determinar la distribución de X_n, $n = 1, 2, \cdots$.

Disponemos de la siguiente información



- $P(X_0 = 0) = 1$
- Esperanza de una variable aleatoria uniforme $X \equiv U(a, b)$ y $E[X] = E[U(a, b)] = \frac{a+b}{2}$
- $E[U(x, 1)] = \frac{x+1}{2}$
- $E[X_n/X_{n-1=x}] = \frac{x+1}{2}$

entonces,

- cuando la variable aleatoria es X_1 $(n = 1)$

$$E[X_1] = E[E(X_1/X_0)] \; donde \; X_0 \in \{0\} \Rightarrow E[E(X_1/0)] = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

- cuando la variable aleatoria es X_2 $(n = 2)$

$$\begin{aligned} E[X_2] = E[E(X_2/X_1 = x)] \overset{X_2 \equiv U(X_1,1)}{\overbrace{=}} E\left[\frac{X_1+1}{2}\right] &= \frac{1}{2} \cdot E[X_1 + 1] = \\ &= \frac{1}{2}\left[E[X_1] + 1\right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- cuando la variable aleatoria es X_3 $(n = 3)$

$$\begin{aligned} E[X_3] = E[E(X_3/X_2 = x)] \overset{X_3 \equiv U(X_2,1)}{\overbrace{=}} E\left[\frac{X_2+1}{2}\right] &= \frac{1}{2} \cdot E[X_2 + 1] = \\ &= \frac{1}{2}\left[E[X_2] + 1\right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

- cuando la variable aleatoria es X_4 $(n = 4)$

$$\begin{aligned} E[X_4] = E[E(X_4/X_3 = x)] \overset{X_4 \equiv U(X_3,1)}{\overbrace{=}} E\left[\frac{X_3+1}{2}\right] &= \frac{1}{2} \cdot E[X_3 + 1] = \\ &= \frac{1}{2}\left[E[X_3] + 1\right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{16} + \frac{1}{2} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

- ...

Podemos observar cómo:

$$E[X_1] = \frac{1}{2} \qquad E[X_3] = \frac{7}{8} = \frac{2^3-1}{2^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2^2}$$

$$E[X_2] = \frac{3}{4} = \frac{2^2-1}{2^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} \qquad E[X_4] = \frac{15}{16} = \frac{2^4-1}{2^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2^3}$$

Entonces, podemos deducir que $E[X_n]$ es

$$E[X_n] = \frac{2^n-1}{2^n} = 1-\frac{1}{2^n} \qquad ó \qquad E[X_n] = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}$$

por tanto, vamos a comprobarlo con los resultados obtenidos anteriormente:

- $n=1$

$$E[X_1] = \frac{2^1-1}{2^1} = 1-\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \qquad ó \qquad E[X_1] = \sum_{i=1}^{1}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$$

- $n=2$

$$E[X_2] = \frac{2^2-1}{2^2} = 1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} \qquad ó \qquad E[X_2] = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

- $n=3$

$$E[X_3] = \frac{2^3-1}{2^3} = 1-\frac{1}{2^3} = \frac{7}{8} \qquad ó \qquad E[X_3] = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$$

Por tanto, concluimos que para todo $n \geq 1$, se tiene que la esperanza es:

$$E[X_n] = 1-\frac{1}{2^n} \qquad y \qquad X_{n+1} = \frac{X_n+1}{2}$$

Veamos ahora cómo obtener la función de distribución de X_n,

- para X_1, sabemos que $X_1 \equiv U(0,1)$

$$f_{X_1}(x) = 1 \rightsquigarrow F_{X_1}(x) = x$$

  por tanto, la función de distribución es

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ x & si\ 0\leq x<1 \\ 1 & si\ 1\leq x \end{cases}$$

- para X_2, sabemos que $X_2 \equiv U(X_1,1) \longrightarrow \frac{X_1+1}{2}$

$$\begin{aligned} F_{X_2}(x) = P(X_2\leq x) = P\left(\frac{X_1+1}{2}\leq x\right) &= \\ = P\left(X_1+1\leq 2x\right) &= \\ = P\left(X_1\leq 2x-1\right) &= \\ = F_{X_1}(2x-1) &= 2x-1 \end{aligned}$$

  por tanto, la función de distribución es

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 & si\ \frac{1}{2}<0 \\ 2x-1 & si\ 0\leq \frac{1}{2}<1 \\ 1 & si\ \frac{1}{2}\leq x \end{cases}$$

- para X_3, sabemos que $X_3 \equiv U(X_2, 1) \longrightarrow \frac{X_2+1}{2}$

$$\begin{aligned} F_{X_3}(x) = P(X_3 \leq x) = P\left(\frac{X_2+1}{2} \leq x\right) &= \\ &= P\left(X_2 + 1 \leq 2x\right) = \\ &= P\left(X_2 \leq 2x - 1\right) = \\ &= F_{X_2}(2x-1) = 2(2x-1) - 1 \end{aligned}$$

por tanto, la función de distribución es

$$F_{X_3}(x) = \begin{cases} 0 & si\ \frac{3}{4} < 0 \\ 2(2x-1)-1 & si\ 0 \leq \frac{3}{4} < 1 \\ 1 & si\ \frac{3}{4} \leq x \end{cases}$$

- para X_4, sabemos que $X_4 \equiv U(X_3, 1) \longrightarrow \frac{X_3+1}{2}$

$$\begin{aligned} F_{X_4}(x) = P(X_4 \leq x) = P\left(\frac{X_3+1}{2} \leq x\right) &= \\ &= P\left(X_3 + 1 \leq 2x\right) = \\ &= P\left(X_3 \leq 2x - 1\right) = \\ &= F_{X_3}(2x-1) = 2(2(2x-1) - 1) - 1 \end{aligned}$$

por tanto, la función de distribución es

$$F_{X_4}(x) = \begin{cases} 0 & si\ \frac{7}{8} < 0 \\ 2(2(2x-1)-1)-1 & si\ 0 \leq \frac{7}{8} < 1 \\ 1 & si\ \frac{7}{8} \leq x \end{cases}$$

- ...
- para X_n

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = P\left(\frac{X_{n-1}+1}{2} \leq x\right) &= \\ &= P\left(X_{n-1} + 1 \leq 2x\right) = \\ &= P\left(X_{n-1} \leq 2x - 1\right) = \\ &= F_{X_{n-1}}(2x-1) \end{aligned}$$