1. Sea $S_0 = 100$, supongamos $u = 1,2$, $d = 0,8$, $p_u = 0,6$ y $p_d = 0,4$, por simplicidad $R = 0$. Consideramos una call Europea con strike price $K = 110$, y $T = 3$.

a) ¿Es un modelo libre de arbitraje?

b) Obtener la función de contrato de la call $X = \Psi(Z)$.

c) Obtener las probabilidades martingalas q_u, y q_d.

d) El precio de la call, en el instante 0, es decir $\Pi(0, X)$, para las probabilidades teóricas (prob. martingalas).

e) ¿Se verifica la fórmula de Valoración de Riesgo Neutro?

f) Obtener la cartera réplica para el modelo.

Aclaraciones: *El apartado e hace uso de resultados obtenidos en el apartado f, además en la figura siguiente se ven como están enumerados los nodos.*

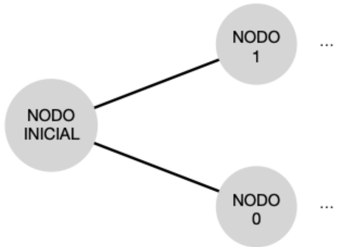

Figura 1: Cómo se han asignado los números a los nodos

---

a) ¿Es un modelo libre de arbitraje?

Para que sea libre de arbitraje (no existen carteras de arbitraje) se debe de verificar sí y solo sí

$$d \leq (1 + R) \leq u$$

En este caso como tenemos que $d = 0,8$, $u = 1,2$ y $R = 0$ entonces $0,8 \leq (1 + 0) \leq 1,2$ que es igual a $0,8 \leq 1 \leq 1,2$ por lo que el modelo es libre de arbritaje.

---

b) Obtener la función de contrato de la call $X = \Psi(Z)$.

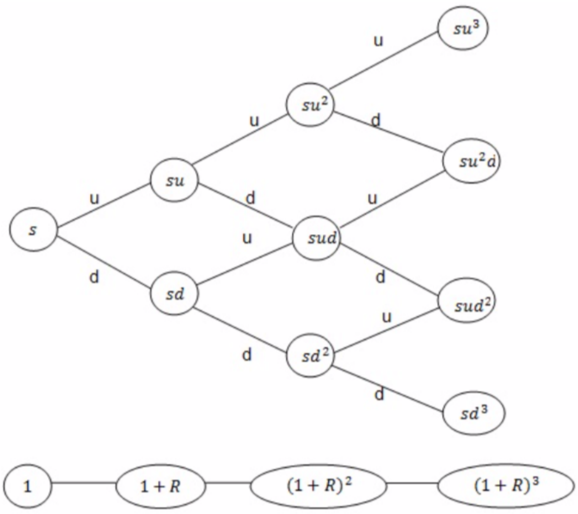

Figura 2: Evolución del valor de los activos en el modelo binomial con tres periodos

Como se puede observar en la figura, el valor del activo subyacente en el instante t depende del número de movimientos hacia arriba o hacia abajo que se hayan producido hasta ese momento:

$$S_t = su^k d^{t-k}, k = 0, \dots, t$$

Como sabemos el valor de una call a vencimiento T es

$$X_T = máx(S_T - K, 0)$$

como en nuestro caso $T = 3$, entonces

- Si $k = 0 \longrightarrow S_3 = S_3(0) = S_0 \cdot u^0 \cdot d^3 = 100 \cdot 1,2^0 \cdot 0,8^3 = 51,2$
- Si $k = 1 \longrightarrow S_3 = S_3(1) = S_0 \cdot u^1 \cdot d^2 = 100 \cdot 1,2^1 \cdot 0,8^2 = 76,8$
- Si $k = 2 \longrightarrow S_3 = S_3(2) = S_0 \cdot u^2 \cdot d^1 = 100 \cdot 1,2^2 \cdot 0,8^1 = 115,2$
- Si $k = 3 \longrightarrow S_3 = S_3(3) = S_0 \cdot u^3 \cdot d^0 = 100 \cdot 1,2^3 \cdot 0,8^0 = 172,8$

Por tanto, el valor de la call a vencimiento $T = 3$ es

$$X_3 = \begin{cases} 62,8 & si\ S_3 = 172,8 \\ 5,2 & si\ S_3 = 115,2 \\ 0 & si\ S_3 = 76,8 \\ 0 & si\ S_3 = 51,2 \end{cases}$$

y ha sido obtenido como ($K = 110$)

- $51,2 < 110 \longrightarrow 0$
- $76,8 < 110 \longrightarrow 0$
- $115,2 > 110 \longrightarrow 5,2$
- $172,8 > 110 \longrightarrow 62,8$

---

c) Obtener las probabilidades martingalas q_u y q_d.

A partir de la teoría sabemos que los valores que toman q_u y q_d son

$$\begin{cases} q_u = \frac{(1+R)-d}{u-d} \\ \\ q_d = \frac{u-(1+R)}{u-d} \end{cases}$$

Por tanto, sustituyendo $d = 0,8$, $u = 1,2$ y $R = 0$ tenemos

$$\begin{cases} q_u = \frac{(1+R)-d}{u-d} = \frac{(1+0)-0,8}{1,2-0,8} = \frac{1-0,8}{0,4} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5 \\ \\ q_d = \frac{u-(1+R)}{u-d} = \frac{1,2-(1+0)}{1,2-0,8} = \frac{1,2-1}{0,4} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5 \end{cases}$$

Con esto obtenemos que $q_u = q_d = 0,5$ (ya que el mercado sube y baja lo mismo)

---

d) El precio de la call, en el instante 0, es decir $\Pi(0, X)$, para las probabilidades teóricas (prob. martingalas).

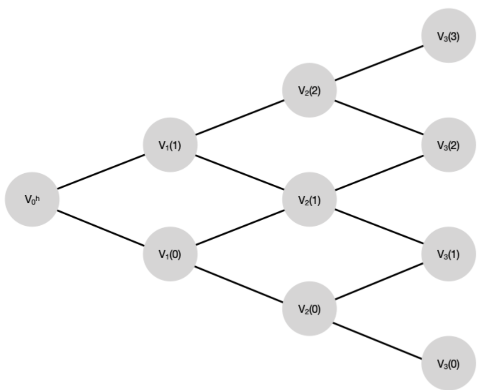

Figura 3: Asignación de la call en los nodos

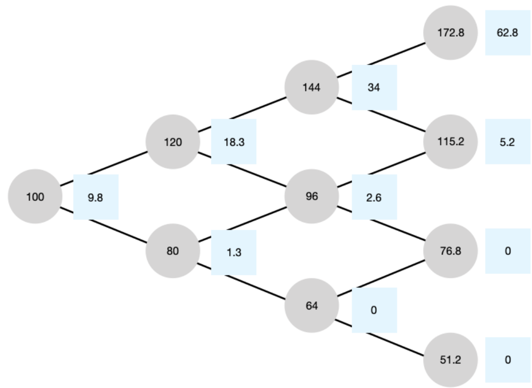

Figura 4: Evolución del valor de la call

Tenemos que $V_0^h = \frac{1}{1+R}\{\Psi(u)q_u + \Psi(d)q_d\}$ donde $\Psi(u) = asu + b(1+R)$ y $\Psi(d) = asd + b(1+R)$

- $V_2(2) = \frac{1}{1+0}[62,8 \cdot 0,5 + 5,2 \cdot 0,5] = 34$
- $V_2(1) = \frac{1}{1+0}[5,2 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5] = 2,6$
- $V_2(0) = \frac{1}{1+0}[0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5] = 0$
- $V_1(1) = \frac{1}{1+0}[34 \cdot 0,5 + 2,6 \cdot 0,5] = 18,3$
- $V_1(0) = \frac{1}{1+0}[2,6 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5] = 1,3$
- $V_0^h = \frac{1}{1+0}[18,3 \cdot 0,5 + 1,3 \cdot 0,5] = 9,8$

Por tanto, el precio de la call en el instante $t = 0$ es $X_0 = 9,8$

---

e) ¿Se verifica la fórmula de Valoración de Riesgo Neutro?

La fórmula de Valoración Riesgo Neutro da el precio del stock a día de hoy, como el valor esperado del precio del stock descontado (es decir, descontando la tasa libre de riesgo R) a día de mañana. Por tanto, el valor de vencimiento es igual al inicial (espero tener lo mismo al instante inicial) descontando el interés, por eso ni gano ni pierdo en cuanto al stock. Se puede comprobar que efectivamente h_t es una cartera autofinanciada. Para ello se ha verificar la expresión

$$a_{t-1}S_t + b_{t-1}\beta_t = a_tS_t + b_tS_t$$

La idea es que para cada instante de tiempo, el valor de la cartera antigua (a_{t-1}, b_{t-1}) es igual al valor de la nueva cartera (a_t, b_t).

- El valor de la cartera antigua (a_0, b_0) es igual al valor de la nueva cartera (a_1, b_1)
  - Nodo 0:
    $a_0S_1 + b_0 = 0,425 \cdot 80 - 32,7 \cdot 1 = 1,3$
    $a_1S_1 + b_1 = 0,08125 \cdot 80 - 5,2 \cdot 1 = 1,3$
  - Nodo 1:
    $a_0S_1 + b_0 = 0,425 \cdot 120 - 32,7 \cdot 1 = 18,3$
    $a_1S_1 + b_1 = \frac{157}{240} \cdot 120 - 60,2 \cdot 1 = 18,3$
- El valor de la cartera antigua (a_1, b_1) es igual al valor de la nueva cartera (a_2, b_2)
  - Nodo 0:
    $a_1S_2 + b_1 = \frac{157}{240} \cdot 96 - 60,2 \cdot 1 = 2,6$
    $a_2S_2 + b_2 = \frac{13}{96} \cdot 96 - 10,4 \cdot 1 = 2,6$
  - Nodo 1:
    $a_1S_2 + b_1 = \frac{157}{240} \cdot 144 - 60,2 \cdot 1 = 34$
    $a_2S_2 + b_2 = 1 \cdot 144 - 110 \cdot 1 = 34$

f) Obtener la cartera réplica para el modelo.

La cartera de réplica para cada instante y nodo se puede obtener de la misma forma que $V_1^h = asZ + b(1+R)$, entonces:

- Para el instante $t = 2$ en el nodo 2 la cartera de réplica $h_2(2) = (1, -110)$

$$\begin{cases} 172,8a + b = 62,8 \\ 115,2a + b = 5,2 \end{cases} \text{ donde } a = 1 \text{ y } b = -110$$

- Para el instante $t = 2$ en el nodo 1 la cartera de réplica $h_2(1) = (\frac{13}{96}, -104)$

$$\begin{cases} 76,8a + b = 0 \\ 115,2a + b = 5,2 \end{cases} \text{ donde } a = \frac{13}{96} \text{ y } b = -10,4$$

- Para el instante $t = 2$ en el nodo 0 la cartera de réplica $h_2(0) = (0, 0)$

$$\begin{cases} 76,8a + b = 0 \\ 51,2a + b = 0 \end{cases} \text{ donde } a = 0 \text{ y } b = 0$$

- Para el instante $t = 1$ en el nodo 1 la cartera de réplica $h_1(1) = (\frac{157}{240}, -60,2)$

$$\begin{cases} 144a + b = 34 \\ 96a + b = 2,6 \end{cases} \text{ donde } a = \frac{157}{240} \text{ y } b = -60,2$$

- Para el instante $t = 1$ en el nodo 0 la cartera de réplica $h_1(0) = (0,08125, -5,2)$

$$\begin{cases} 64a + b = 0 \\ 96a + b = 2,6 \end{cases} \text{ donde } a = 0,08125 \text{ y } b = -5,2$$

- Para el instante $t = 0$ la cartera de réplica $h_0 = (0,425, -32,7)$

$$\begin{cases} 120a + b = 18,3 \\ 80a + b = 1,3 \end{cases} \text{ donde } a = 0,425 \text{ y } b = -32,7$$

Finalmente, la cartera de réplica que se obtiene para valorar la call es $h_0 = (0,425, -32,7)$, por la que se piden prestados $32,7$ euros al banco y se invierten en la compra de $0,425$ del stock. La cartera autofinanciada permite calcular el precio de la call:

$$\Pi(0, X) = V_0^h = 0,425 \cdot 100 - 32,7 \cdot 1 = 9,8$$

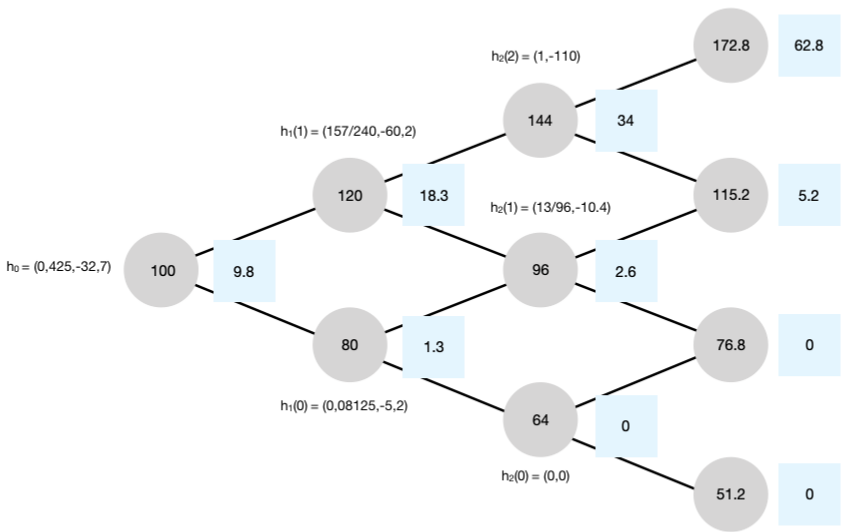

Figura 5: Evolución del valor de la call y cartera de reéplica.