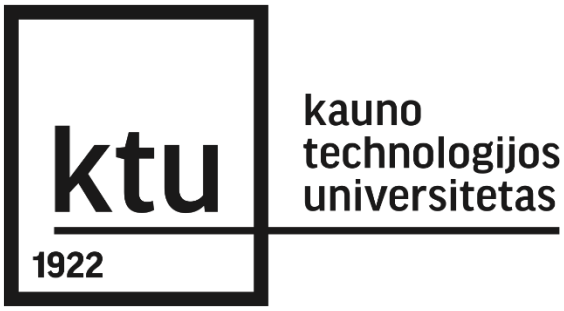


INFORMATIKOS FAKULTETAS

Skaitiniai metodai ir algoritmai (P170B115)

Projektas

Antra užuotis

Studentas: Gediminas Milašius, IFF-6/2

KAUNAS, 2018

Turinys

1. Metodiniai nurodymai

Bendrieji reikalavimai namų darbams

Ataskaitos keliamos į Moodle iki gynimo dienos. Ataskaitoje pateikiama užduotis, rezultatai, programų kodai. Visais atvejais atsiskaitymo metu galima naudotis namų užduotyje ir laboratorinių darbų metu nagrinėtomis programomis.

Gynimo metu studentas privalo paaiškinti bet kurią programos išeities teksto eilutę; jeigu to padaryti nesugeba, darbas vertinamas 0. Gynimo metu pateikiama darbo sutapties patikros ataskaita.

Lygčių sistemų sprendimas.
Tiesinių lygčių sistemų sprendimas

Duota tiesinių lygčių sistema $[\mathrm{A}][\mathrm{X}] = [\mathrm{B}]$ ir jos sprendimui nurodytas metodas (1 lentelė).

1. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą. Jeigu sprendinių be galo daug, raskite bent vieną iš jų. Jeigu sprendinių nėra, pagrįskite, kodėl taip yra. Jei metodas paremtas matricos pertvarkymu, pateikite matricų išraiškas kiekviename žingsnyje. Jei metodas iteracinis, grafiškai pavaizduokite, kaip atliekant iteracijas kinta santykinis sprendinio tikslumas esant kelioms skirtingoms konvergavimo daugiklio reikšmėms.
2. Patikrinkite gautus sprendinius ir skaidas, įrašydami juos į pradinę lygčių sistemą.
3. 3. Gautą sprendinį patikrinkite naudodami išorinius išteklius (pvz., standartines MATLAB funkcijas).

Netiesinių lygčių sistemų sprendimas

1. Duota netiesinių lygčių sistema (2 lentelė. I lygčių sistema):
   $\begin{cases} Z_1(x_1, x_2) = 0 \\ Z_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$

   a. Skirtinguose grafikuose pavaizduokite paviršius $Z1$ ($x1$, $x2$) ir $Z2$ ($x1$, $x2$).
   b. Užduotyje pateiktą netiesinių lygčių sistemą išspręskite grafiniu būdu.
   c. Užduotyje pateiktą netiesinių lygčių sistemą išspręskite naudodami užduotyje nurodytą metodą su laisvai pasirinktu pradiniu artiniu (išbandykite bent keturis pradinius artinius). Nurodykite iteracijų pabaigos sąlygas. Lentelėje pateikite pradinį artinį, tikslumą, iteracijų skaičių.
   d. Gautus sprendinius patikrinkite naudodami išorinius išteklius (pvz., standartines MATLAB funkcijas).
2. Duota netiesinių lygčių sistema (2 lentelė. II lygčių sistema):
   $\begin{cases} Z_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ Z_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ Z_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ Z_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{cases}$

   a. Užduotyje nurodytu metodu išspręskite netiesinių lygčių sistemą su laisvai pasirinktu pradiniu artiniu.
   b. Gautą sprendinį patikrinkite naudodami išorinius išteklius (pvz., standartines MATLAB funkcijas).

Optimizavimas

Pagal pateiktą uždavinio sąlygą (3 lentelė) sudarykite tikslo funkciją ir išspręskite jį vienu iš gradientinių metodų (gradientiniu, greičiausio nusileidimo, kvazi-gradientiniu, ar pan.). Gautą taškų konfigūraciją pavaizduokite programoje, skirtingais ženklais pavaizduokite duotus ir pridėtus (jei sąlygoje tokių yra) taškus. Ataskaitoje pateikite pradinę ir gautą taškų konfigūracijas, taikytos tikslo funkcijos aprašymą, taikyto metodo pavadinimą ir

parametrus, iteracijų skaičių, iteracijų pabaigos sąlygas ir tikslo funkcijos priklausomybės nuo iteracijų skaičiaus grafiką.

1 lentelė

Nr.	Lygčių sistema	Metodas
14	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 14 \\ -2x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 24 \end{cases}$	Gauso

2 lentelė

Nr.	I Lygčių sistema	II Lygčių sistema	Metodas
14	$\begin{cases} x_1(x_2 + 2\cos x_1) - 1 = 0 \\ {x_1}^4 + {x_x}^4 - 64 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 - 8 = 0 \\ {x_1}^2 + 2x_2x_4 - 5 = 0 \\ -3{x_2}^2 - 3x_1x_2 + {x_4}^3 + 16 = 0 \\ 5x_1 - 15x_2 + 3x_4 + 22 = 0 \end{cases}$	Broideno

3 lentelė

Uždavinys 13-18 variantams
Duotos n ($3 \le \boldsymbol{n} \le 20$) taškų koordinatės ($-10 \le \boldsymbol{x} \le 10$, $-10 \le \boldsymbol{y} \le 10$). (Koordinatės gali būti generuojamos atsitiktiniu būdu). Reikia padėti papildomų m ($3 \le \boldsymbol{m} \le 20$, $\boldsymbol{m} \le \boldsymbol{n}$) taškų taip, kad jų atstumai nuo k ($3 \le \boldsymbol{k} \le 5$, $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}$) artimiausių taškų (įskaitant ir papildomus) būtų kuo artimesni vidutiniam atstumui.

2. Užduoties atlikimas

2.1. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas

Pateiktoje užduotyje reikia Gauso metodu išspręsti lygčių sistemą.

Užduotį realizuojantis kodas:

```
public void Run()
{

    var eMatrix = new[] {
    new double[] {  2,  5,  1,  2, 14 },
    new double[] { -2,  0,  3,  5, 10 },
    new double[] {  1,  0, -1,  1,  4 },
    new double[] {  0,  5,  4,  7, 24 }
};

    PrintMatrix(eMatrix);
    for (int i = 0; i < eMatrix.Length - 1; i++)
    {
        FindAndSwapLeading(i, eMatrix);
        Nullify(i, eMatrix);
        _form.OutputText("==================\n");
        PrintMatrix(eMatrix);
    }
    _form.OutputText("==================\n");

    var res = Return(eMatrix);
    if (res != null)
    {
        for (int i = 0; i < res.Length; i++)
        {
            _form.OutputText($"x{i + 1} = {(Math.Sign(res[i]) >= 0 ? " " :
"")}{res[i]:00.000}, ");
        }
    }
    else
    {
        _form.OutputText("Invalid setup. No possible solution found.");
        return;
    }
    _form.OutputText("\n==================\n");
    for (int i = 0; i < res.Length; i++)
    {
        var val = 0.0;
        for (int j = 0; j < res.Length; j++)
        {
            val += A[i][j] * res[j];
            _form.OutputText($"{(Math.Sign(A[i][j]) >= 0 ? " " : "")}{A[i][j]:00.000} * ");
            _form.OutputText($"{(Math.Sign(res[j]) >= 0 ? " " : "")}{res[j]:00.000} {(j <
res.Length - 1 ? "+" : "")}");
        }
        _form.OutputText($"=  {val:00.000}\n");
    }
}

private void Nullify(int diagonalIndex, double[][] matrix)
{
    // Iterates through rows
    for (int j = diagonalIndex + 1; j < matrix.Length; j++)
    {
```

```
        var multiplier = -matrix[j][diagonalIndex] / matrix[diagonalIndex][diagonalIndex];
        // Iterates trough columns in row
        for (int k = 0; k < matrix[j].Length; k++)
        {
            matrix[j][k] += multiplier * matrix[diagonalIndex][k];
        }
    }
}

private static void FindAndSwapLeading(int i, double[][] matrix)
{
    var hv = double.MinValue; var hi = 0; // Highest value, index
    // Find hi, hv
    for (int j = i; j < matrix.Length; j++)
    {
        if (Math.Abs(matrix[j][i]) > hv)
        {
            hv = Math.Abs(matrix[j][i]);
            hi = j;
        }
    }

    var tmp = matrix[i];
    matrix[i] = matrix[hi];
    matrix[hi] = tmp;
}

private double[] Return(double[][] matrix)
{
    var result = new double[matrix.Length];

    // Diagonal length
    var dLength = matrix.Length;
    for (int i = dLength - 1; i >= 0; i--)
    {
        result[i] = (matrix[i][dLength] - FindReturnResult(matrix, result, i)) /
matrix[i][i];
        if (double.IsNaN(result[i]))
        {
            // More than one result
            _form.OutputText($"{i + 1}: More than one result found. Assign x{i + 1} =
0.\n");
            result[i] = 0;
        }
        else if (double.IsInfinity(result[i]))
        {
            // Result doesn't exist
            return null;
        }
    }

    return result;
}

private static double FindReturnResult(double[][] matrix, double[] answers, int index)
{
    var result = 0.0;
    for (int i = index; i < matrix.Length; i++)
    {
        result += matrix[index][i] * answers[i];
    }

    return result;
}
```

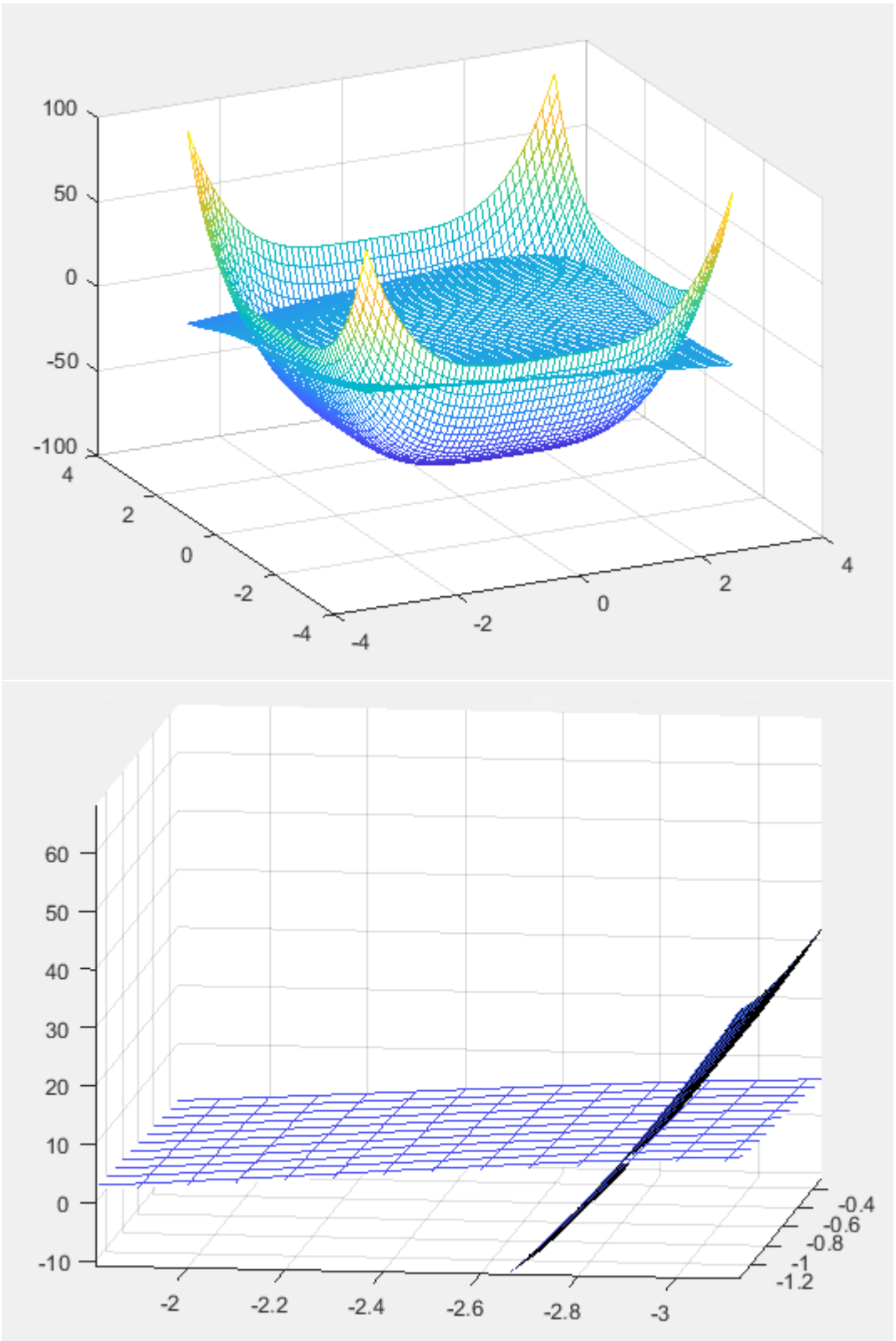
```
private void PrintMatrix(double[][] matrix)
{
    foreach (var row in matrix)
    {
        for (int j = 0; j < row.Length - 1; j++)
        {
            _form.OutputText($"{(Math.Sign(row[j]) >= 0 ? " " : "")}{row[j]:00.000} ");
        }
        _form.OutputText($"| {(Math.Sign(row[row.Length - 1]) >= 0 ? " " :
"")}{row[row.Length - 1]:00.000}\n");
    }
}
```

Matricų išraiškos kiekviename žingsnyje ir patikrinimas:

```
 02.000  05.000  01.000  02.000 |  14.000
-02.000  00.000  03.000  05.000 |  10.000
 01.000  00.000 -01.000  01.000 |  04.000
 00.000  05.000  04.000  07.000 |  24.000
====================
 02.000  05.000  01.000  02.000 |  14.000
 00.000  05.000  04.000  07.000 |  24.000
 00.000 -02.500 -01.500  00.000 | -03.000
 00.000  05.000  04.000  07.000 |  24.000
====================
 02.000  05.000  01.000  02.000 |  14.000
 00.000  05.000  04.000  07.000 |  24.000
 00.000  00.000  00.500  03.500 |  09.000
 00.000  00.000  00.000  00.000 |  00.000
====================
 02.000  05.000  01.000  02.000 |  14.000
 00.000  05.000  04.000  07.000 |  24.000
 00.000  00.000  00.500  03.500 |  09.000
 00.000  00.000  00.000  00.000 |  00.000
====================
4: More than one result found. Assign x4 = 0.
x1 =  22.000, x2 = -09.600, x3 =  18.000, x4 =  00.000
====================
 02.000 *  22.000 + 05.000 * -09.600 + 01.000 *  18.000 + 02.000 *  00.000 =  14.000
-02.000 *  22.000 + 00.000 * -09.600 + 03.000 *  18.000 + 05.000 *  00.000 =  10.000
 01.000 *  22.000 + 00.000 * -09.600 +-01.000 *  18.000 + 01.000 *  00.000 =  04.000
 00.000 *  22.000 + 05.000 * -09.600 + 04.000 *  18.000 + 07.000 *  00.000 =  24.000
```

2.2. Netiesinių lygčių sistemų sprendimas

2.2.1 Grafinis sprendimas



Grafiškai išsprendus, galima matyti, jog sprendinių yra, ir sprendinys gali būti $(-2.7; -1)$.

2.3. Broideno metodas

Algoritmas baigia darbą jeigu yra pasiekta reikšmė su tam tikru tikslumu, arba viršytas maksimalus iteracijų skaičius. Tikslumas: 1e-12, maksimalus iteracijų skaičius.: 1000.

Pradinis artinys	Iteracijų skaičius	Gautas rezultatas
0, 0	1000	null
2, 1		2.58941331850319 2.08895464020765
5, 4		2.58941331850319 2.08895464020765
-2, 1		2.58941331850319 2.08895464020765

Pradinis artinys	Iteracijų skaičius	Gautas rezultatas
0, 0, 0, 0	1000	null
2, 1, 3, 4		-2.44629238908926 0.238483588302143
5, 4, 0 ,1		0.999999999999956 1.99999999999998
-2, 1, -3, -5		1 2

2.4. Optimizavimas

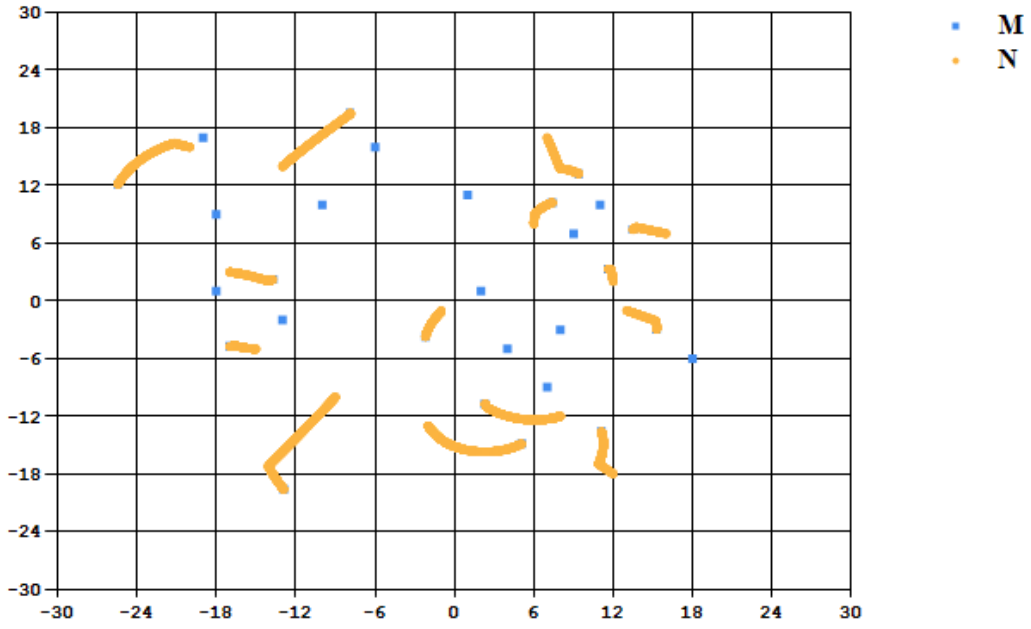
Optimizavimo uždavinį spręsti pasirinau greičiausio nusileidimo metodą. Sprendimui reikalinga sudaryti tikslo funkciją. Ši funkcija bus tokia, kad tarp pasirinktų k taškų atstumas būtų kuo artimesnis atstumui tarp tų k taškų vidurkiui.

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{k} \left| v - \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right|$$

v – vidutinis atstumas tarp visų k taškų.

Ši funkcija yra gana sudėtinga, ir ją reikia minimizuoti. Tam reikalinga išvestinė. Šiuo atveju aš ją aproksimuosiu.

Gautas rezultatas:



Oranžinės kreivės rodo kiekvieno taško trajektoriją. Ji baigiasi kvadratu.

3. Išvados

Tiesinių lygčių sistemą galima itin sparčiai išspręsti taikant Gauso metodą.

Broideno metodas yra efektyvus būdas išspręsti netiesinių lygčių sistemą naudojant išvestinių aproksimaciją.

Naudojant greičiausio nusileidimo metodą galima efektyviai optimizuoti uždavinius.