

# Bajeso FAVAR-TVP modelio taikymas JAV ekonominiams ir rinkos duomenims

*Gediminas Bagdonas* <[gediminas.bagdonas@mif.vu.lt](mailto:gediminas.bagdonas@mif.vu.lt)>

*2017-02-16*

## 1 Užduotis

Rasti modelį, kuris susietų JAV ekonominius duomenis ir JAV vyriausybės vertybinių popierių (VVP) pajamingumą kreivę. Ištirti ekonominių duomenų įtaką pajamingumą kreivės formai ir rasti sąlygines prognozes skirtingiems ekonominiams scenarijams.

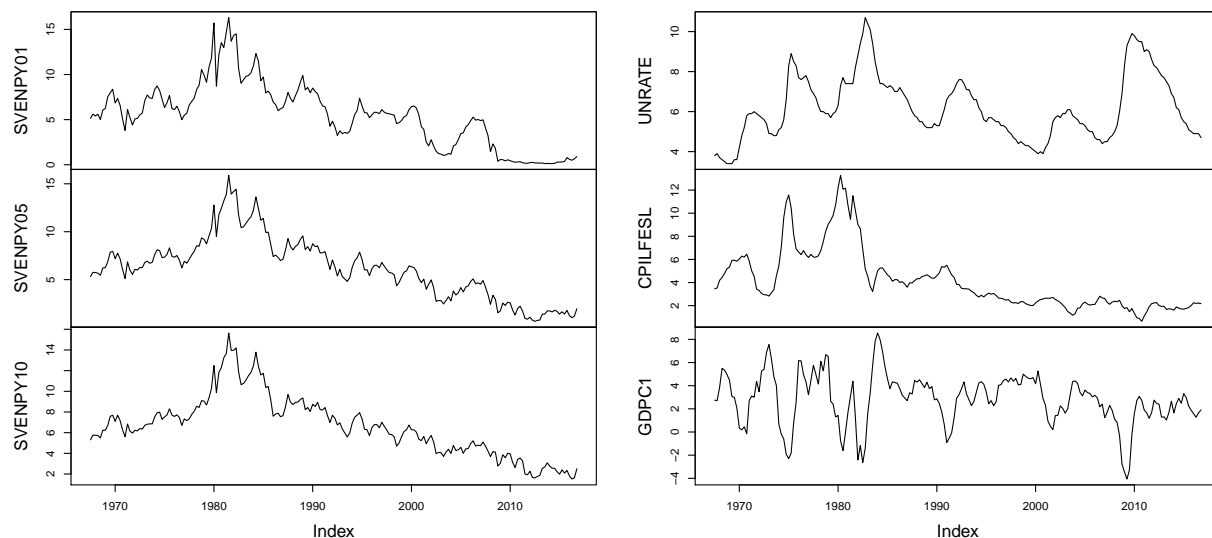
## 2 Duomenys

Naudojame ketvirtinius duomenis nuo 1967K2 iki 2016K4. Tyrimui naudojame šias laiko eilutes:

- UNRATE - JAV nedarbo lygis. Asmenys vyresni nei 16 metų, neturintys darbo, galintys bei pasirengę dirbti ir aktyviai ieškantys darbo. Procentiniais punktais nuo visos darbo jėgos. Pakoreguotas atsižvelgiant į sezoniskumą.
- CPILFESL - JAV infliacijos lygis procentiniais punktais. Visos vartojimo prekės išskyrus maisto ir energetikos sektorius. Pakoreguotas atsižvelgiant į sezoniskumą.
- GDPC1 - realus (atėmus infliaciją) BVP. Metinis pokytis procentiniais punktais. Pakoreguotas atsižvelgiant į sezoniskumą.
- SVENPY[x] - [x] metų trukmės JAV vyriausybės obligacijų pajamingumo norma procentiniais punktais.

Ekonominius duomenis galima rasti St. Louis Fed puslapyje (<https://fred.stlouisfed.org>). Pajamingumo kreivių šaltinis: Federal Reserve (<http://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2006>).

Naudotos laiko eilutės pateiktos 1 Pav. Dešinėje pavaizduoti ekonominiai duomenys, o kairėje keli pajamingumą kreivės taškai.



1 pav.: Nagrinėjamų ekonominių ir rinkos rodiklių istoriniai duomenys

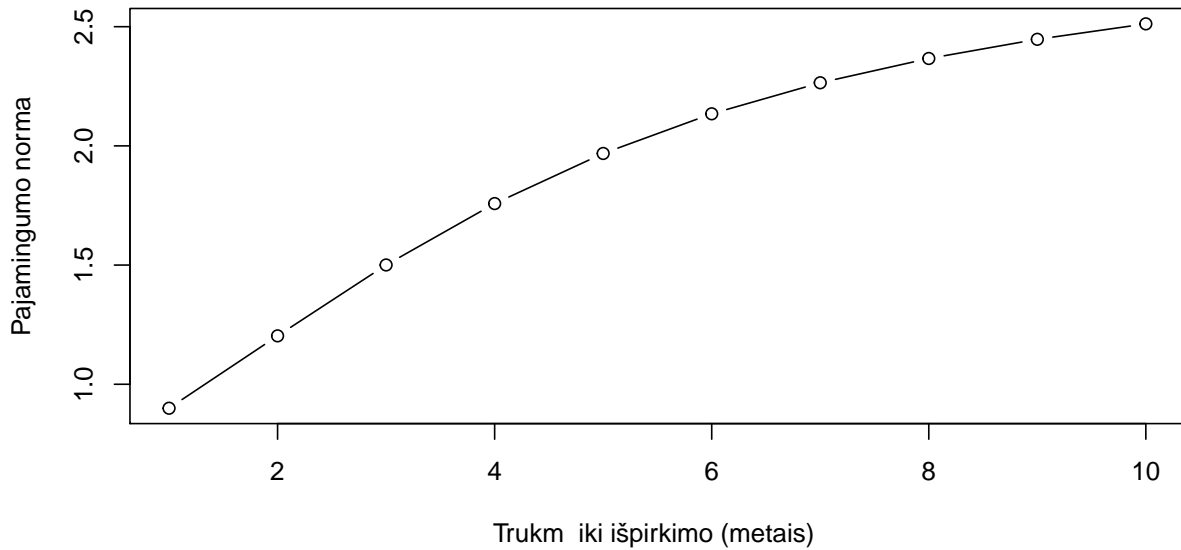
## 2.1 Pajamingumo kreivė

Skirtingų trukmių vertybinių popierių pajamingumai yra stipriai koreliuoti (žr. 1 Pav) ir tipiškai didėja, didėjant trukmei iki išpirkimo. Skirtingų trukmių obligacijų gali būti daug, todėl dažnai modeliuojant naudojama pajamingumų kreivė, kuri nusako pajamingumo normą skirtingos trukmės vertybiniais popieriais. Tipinę kreivės formą galima pamatyti 2 pav. Mes analizėje naudojame 1, 2, ..., 10 metų fiksuotus kreivės taškus.

Dažnai pajamingumo kreivė yra aprašoma trimis faktoriais: lygiu, statumu ir kreivumu. Pvz. Nelson and Siegel [1987] pasiūlė tokį kreivės faktorių išskyrimą:

$$y_t(m) = \beta_t^L + \beta_t^S \left( \frac{1 - \exp(-m\lambda)}{m\lambda} \right) + \beta_t^C \left( \frac{1 - \exp(-m\lambda)}{m\lambda} - \exp(-m\lambda) \right).$$

Čia  $m$  žymi trukmę iki obligacijos išpirkimo,  $y_t$  - pajamingumo lygį, o  $\lambda$  parametras, kuris nusako kurioje kreivės vietoje maksimizuojamas kreivumas. Tai maždaug atitinka PCA rezultatus (pirmos trys didžiausios variacijos komponentės). Tokia praktika motyvavo FAVAR modelio pasirinkimą.



2 pav.: JAV VP pajamingumo kreivė

### 3 Trumpai apie TVP-FAVAR modelį

Analizei pasirinkome faktoriais papildytą vektorinės autoregresijos su laike kintančiais parametrais modelį (TVP-FAVAR). Tokį pasirinkimą lėmė keli veiksniai. Kaip minėjome visą pajamingumo kreivę gan gerai aprašo trys faktoriai. Kita vertus, kadangi nagrinėjome ilgą laikotarpį yra gan realu, kad per tą laikotarpį ekonominiai sąryšiai galėjo kisti, todėl pasirinkome modelį su laike kintančiais parametrais. Modelis užrašomas trimis lygtimis:

$$y_t = \Lambda F_t + r_t; \quad r_t \sim N(0, R)$$

$$F_t = Z_t \beta_t + \epsilon_t; \quad \epsilon_t \sim N(0, H)$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t + u_t; \quad u_t \sim N(0, Q),$$

$Z_t$  žymi matricą

$$Z_t = [1, F_{t-1}, F_{t-2}, \dots, F_{t-p}] \otimes I_n$$

Mūsų nagrinėjamu atveju

$$y_t = (\text{SVENPY01}_t, \dots, \text{SVENPY10}_t, \text{UNRATE}_t, \text{CPILFESL}_t, \text{GDPC1}_t),$$

$$F_t = (F_t^1, F_t^2, F_t^3, \text{UNRATE}_t, \text{CPILFESL}_t, \text{GDPC1}_t),$$

ir

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{1;1} & \lambda_{1;2} & \lambda_{1;3} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{10;1} & \lambda_{10;2} & \lambda_{10;3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Taip pat darome prielaidą, kad  $R$  diagonalinė matrica (visa tarpusavio priklausomybė atsiranda tik iš fakorių).

### 3.1 Apriori skirstiniai

Parametrams  $\Lambda$  ir  $R$  pasirinkome Normalųjų-Atvirkštinių Gama (angl. *normal-inverse gamma*) priorą, kadangi laikant kitus parametrus žinomais pirma lygtis nusako tiesinės regresijos modelį. Šiuo atveju pasirinkome

$$R_{ii} \sim IG(0.01, 1); \quad \lambda_{ij} \sim N(0, 1).$$

$F_t$  ir  $\Lambda$  pradinės reikšmės gautos iš PCA, tačiau išmėginome ir kitas pradines reikšmes.

Modelio parametrams  $\beta_0$ ,  $H$  ir  $Q$  pasirinkome patogų ir gan bendrą nepriklausomą Normalųjų-Wishart (angl. *independent Normal-Wishart*) apriorinį skirstinį, t.y.

$$p(\beta_1, H^{-1}, Q^{-1}) = p(\beta_1)p(H^{-1})p(Q^{-1}),$$

kur

$$\begin{aligned} \beta_1 &\sim N(\underline{\beta}, \underline{V}_\beta), \\ H^{-1} &\sim W(\underline{S}^{-1}, \underline{\nu}), \\ Q^{-1} &\sim W(\underline{Q}^{-1}, \underline{\nu}_Q). \end{aligned}$$

Apriorių hiperparametrų nustatymui sekėme [Primiceri \[2005\]](#) ir juos pasirenkome naudodami OLS sprendinį pirmiems 40 stebėjimų ( $\tau = 40$ ), t.y. nuo 1967K2 iki 1977K1. Pats FAVAR-TVP modelio skaičiavimas pradedamas nuo 1977K2. Hiperparametrai nustatomi naudojant OLS sprendinį  $\beta_{OLS}$  ir kovariacijų matricą  $V(\beta_{OLS})$ . Šiam tyrimui pasirinkome

$$\underline{\beta} = \beta_{OLS}; \quad \underline{V}_\beta = 4V(\beta_{OLS}); \quad \underline{\nu} = n + 1; \quad \underline{S} = I_n; \quad \underline{\nu}_Q = \tau; \quad \underline{Q} = 10^{-6}\tau V(\beta_{OLS})$$

Reiktų pastebėti, kad pasirinkome labai mažas kovariacijas matricoje  $\underline{Q}$ . Tai atspindi mūsų

a priori požiūrį, kad parametrai  $\beta_t$  turėtų būti mažai kintantys.

Nepriklausomas normaliojo-Wishart bei normaliojo-atv. gama aprioras leidžia sukonstruoti paprastą MCMC algoritmą, kuris paeiliui generuoja  $p(\beta_1|F_T, \beta_T, H)$ ,  $p(H^{-1}|F_T, \beta_1, \beta_T)$ ,  $p(Q^{-1}|F_T, \beta_1, \beta_T)$ ,  $p(\beta_T|F_T, \beta_1, H, Q)$ ,  $p(\Lambda|y_T, F_T, R)$ ,  $p(R|y_T, F_T, \Lambda)$  ir  $p(F_T|y_T, R, \Lambda, H)$ . Plačiau apie MCMC algoritmą galima rasti [Koop and Korobilis \[2010\]](#), [Blake et al. \[2012\]](#), [Bernanke et al. \[2004\]](#) ir [Ellis et al. \[2014\]](#).

Verta paminėti, kad yra keliatas algoritmų skirtų  $p(\beta_T|F_T, \beta_1, H, Q)$  generavimui. Mes išmėginome du iš jų [Carter and Kohn \[1994\]](#) ir [Durbin and Koopman \[2002\]](#). Abu algoritmai grąžina panašius rezultatus, tačiau mūsų [Durbin and Koopman \[2002\]](#) implementacija veikia šiek tiek greičiau.

Kita a priori prielaida modeliuojant ekonominius duomenis dažnai yra, kad nagrinėjamos laiko eilutės yra stacionarios. Mes taip pat darome šią prielaidą ir ją implementuojame, naudodami priėmimo-atmetimo (angl. *accept-reject*) žingsnį MCMC algoritme. Plačiau apie tai [Cogley and Sargent \[2005\]](#).

## 3.2 VAR lagų skaičiaus pasirinkimas

VAR modelio lagų skaičiui nustatyti naudojome OLS sprendinį kreivės faktoriams (atlikus PCA) ir ekonominiams duomenims, bei dažnai praktikoje naudojamus informacijos kriterijus: AIC, HQ, SC, FPE. Optimalūs lagų skaičiai pagal kiekvieną iš kriterijų pateikiami 1 lentelėje. HQ ir SC kriterijai siūlo atitinkamai du arba vieną lagą, o kiti du daug didesnius. Dėl naudojamo MCMC algoritmo skaičiavimų intensyvumo pasirinkome tolesnėje analizėje naudoti  $p = 1$ , t.y. TVP-FAVAR(1) modelį.

1 lentelė: Optimalus lagų skaičius pagal skirtingus informacijos kriterijus

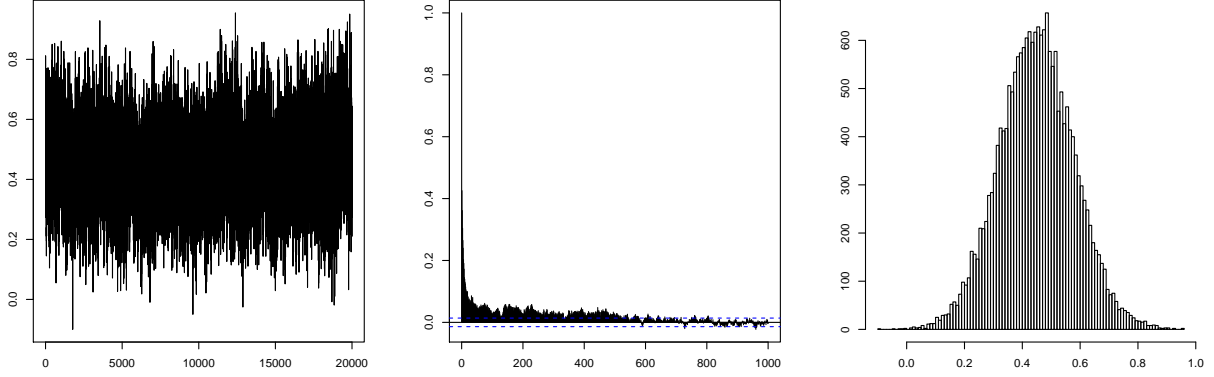
AIC(n)	HQ(n)	SC(n)	FPE(n)
10	2	1	10

## 4 MCMC algoritmo rezultatai

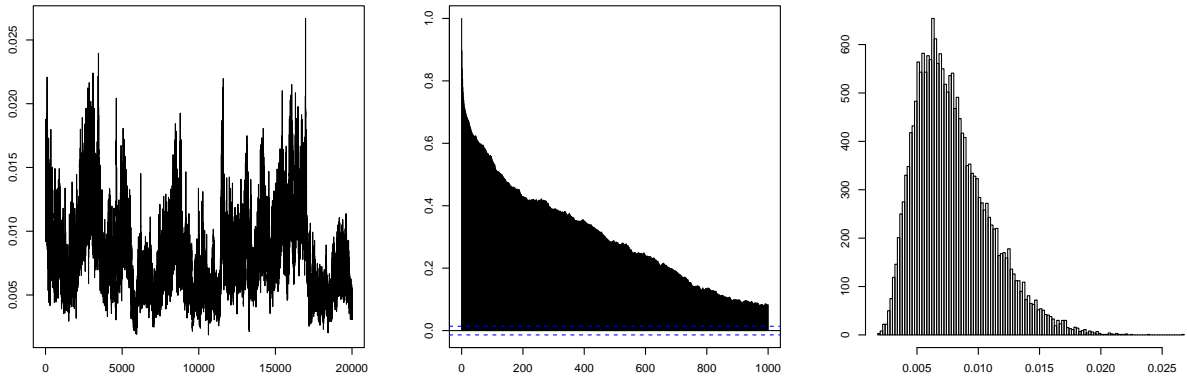
### 4.1 Konvergavimas

Posterioro radimui atlikome 70000 MCMC algoritmo žingsnių, iš kurių atmetėme pirmus 20000. Konvergavimas patikrintas algoritmą inicijavus su skirtingomis pradinėmis reikšmėmis, ir sulyginus gautus rezultatus. Taip pat grafiškai patikrinti autokoreliacijos bei simuliacijos histogramų grafikai. Dėl didelio skaičiaus pateikiame šiuos grafikus tik keliems

parametrms. 3 pav. pateikiame grafikus UNRATE faktorių lygties konstantai paskutiniam stebėtam periodui (2016K4)  $\beta_{2016K4}^{4;1}$ , o 4 pav. - analogiškus grafikus parametru  $q_{11}$ .



3 pav.: Kairėje 10000 parametro simuliacijų, viduryje acf grafikas pirmam 1000 lagų, dešinėje posterioro simuliacijų histograma



4 pav.: Kairėje 10000 parametro simuliacijų, viduryje acf grafikas pirmam 1000 lagų, dešinėje posterioro simuliacijų histograma

## 4.2 Parametrų skirstiniai ir įverčiai

7 pav. pavaizduota beta posteriorų vidurkių kitimas laike, o 2 lentelėje beta parametrų įverčiai paskutiniam stebėtm periodui. Taip pat 3 lentelėje pateikėme H kovariacijų matricos parametrų posteriorų vidurkius. Dėl didelio kiekio parametrų kiekio, vien iš jų sunku suprasti nagrinėjamų duomenų eilučių sąryšius, todėl tokiais atvejais dažnai naudojama impulso-atsako (angl. *impulse-response*) funkcijos. 2016m. 4 ketv. jos pavaizduotos 8 pav. Matome

kai kuriuos sąryšius, kurių ir buvo galima laukti. Pvz. infliacijos šokas paveikia pajamingumą kreivę - didėja lygio (PC1) ir kreivumo (PC3) faktoriai, o statumo (PC2) faktorius mažėja.

2 lentelė: Paskutinio periodo beta parametrų įverčiai

	const.	PC1_L1	PC2_L1	PC3_L1	UNRATE_L1	CPILFESL_L1	GDPC1_L1
PC1	0.06	0.50	0.24	0.00	0.00	0.02	-0.02
PC2	0.11	-0.02	0.67	0.04	-0.01	0.01	-0.03
PC3	0.07	0.38	-0.65	0.94	0.03	0.03	-0.05
UNRATE	0.56	-0.03	0.04	0.07	0.87	0.04	-0.05
CPILFESL	1.11	0.87	-0.80	0.22	-0.11	0.64	-0.02
GDPC1	-0.70	-0.61	0.64	0.02	0.28	-0.23	0.75

3 lentelė: Kovariacijų matricos H įvertis

	PC1	PC2	PC3	UNRATE	CPILFESL	GDPC1
PC1	0.03	0.01	0.02	0.00	0.00	0.03
PC2	0.01	0.03	0.03	0.00	0.00	0.01
PC3	0.02	0.03	0.14	0.00	0.01	0.06
UNRATE	0.00	0.00	0.00	0.03	-0.01	-0.05
CPILFESL	0.00	0.00	0.01	-0.01	0.02	0.03
GDPC1	0.03	0.01	0.06	-0.05	0.03	0.67

### 4.3 Prognozės ir scenarijų analizė

Turint posterioro skirstinio simuliacijas gauti prognozių skirstinių simuliacijas nesudėtinga. Įvertinus parametrus procesas toliau tesiamas generuojant paklaidas pagal gautas kovariacijų matricas pasirinktą kiekį periodų. Mes pasirinkome 4 periodų (vienų metų) horizontą.

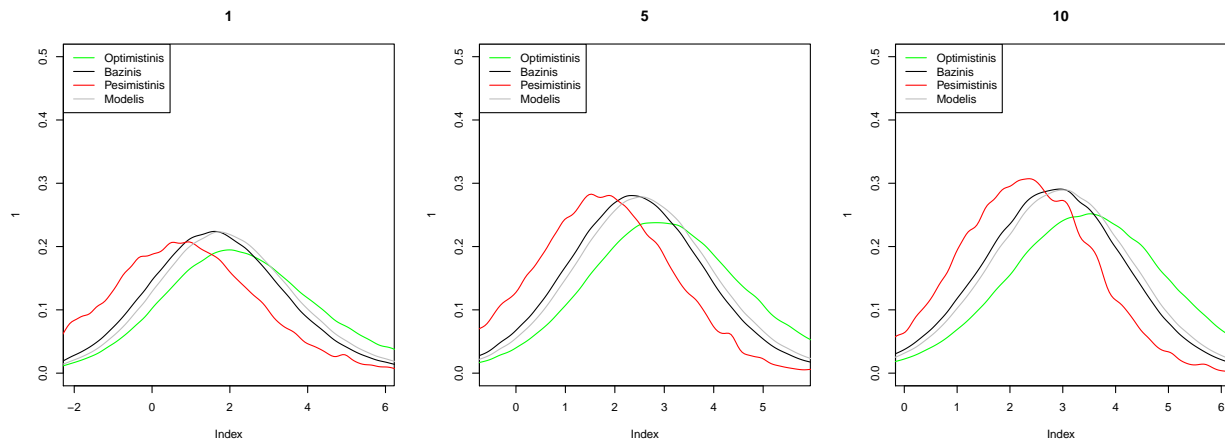
Kaip minėjome užduoties aprašyme mus domina ne tik modelio implikuojama, bet ir sąlyginė prognozė prie tam tikrų ekonomikos scenarijų. Šias sąlygines prognozes randame “pataisydami” prognozės simuliacijas taip, kad jų momentai tenkintų nurodytus apribojimus ir būtų kiek įmanoma “arti” pradinio simuliuoto skirstinio pagal Kullback-Leibler informacijos kriterijų. Plačiau apie šį metodą galima rasti [Robertson et al. \[2005\]](#).

Savo analizėje suformavome tris ekonomikos scenarijus: optimistinį, bazinį ir pesimistinį. Scenarijai suformuoti nurodant infliacijos, nedarbo lygio ir RGDP vidurkių po metų. Sce-

narijai gali būti formuojami įvariai, pvz. savo nuojauta ar ekonomistų prognozėmis. Mūsų suformuoti scenarijai pateikiami 4 lentelėje. Nagrinėtų eilučių prognozių skirstiniai pateikiami 5 pav. ir 5 lentelėje. 6 pav. pateikiame ir pačių pajamingumo kreivių prognozes. Gauti rezultatai intuityvūs: gerėjant ekonominiai situacijai pajamingumų kreivė kyla į viršų, o blogėjant atvirkščiai - pajamingumai mažėja.

4 lentelė: Ekonominių duomenų raidos scenarijai

	UNRATE	CPILFESL	GDPC1
Optimistinis	4.4	3.2	2.50
Bazinis	4.8	2.5	1.80
Pesimistinis	5.4	1.8	1.25

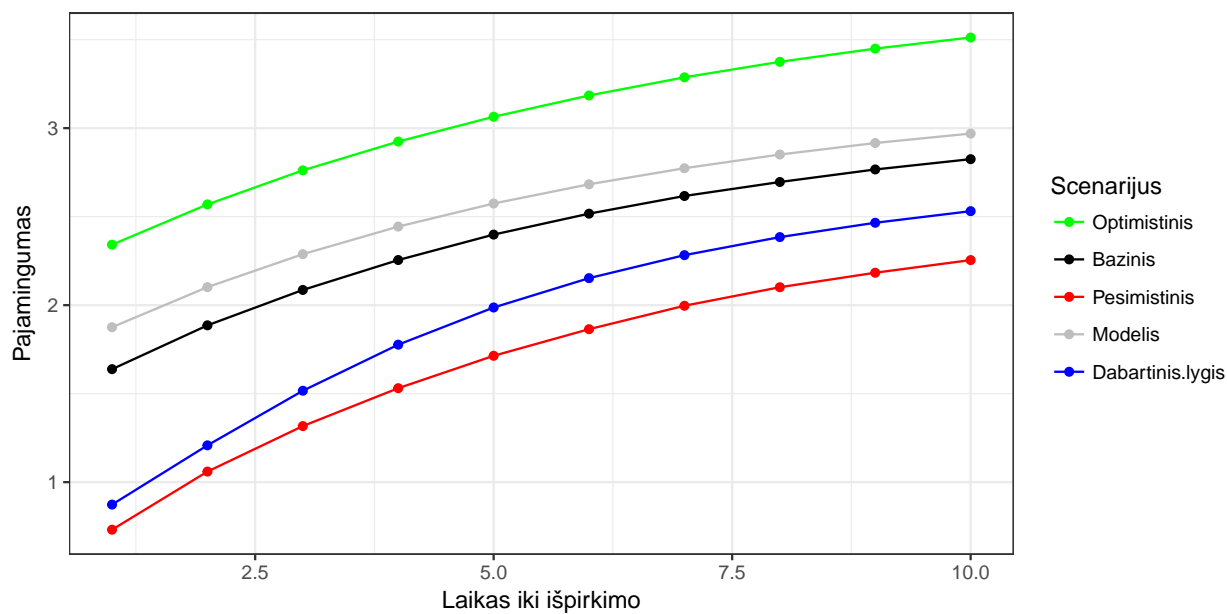


5 pav.: Pajamingumų kreivės taškų sąlyginių prognozių po 1 metų KDE tankiai skirtingais scenarijais



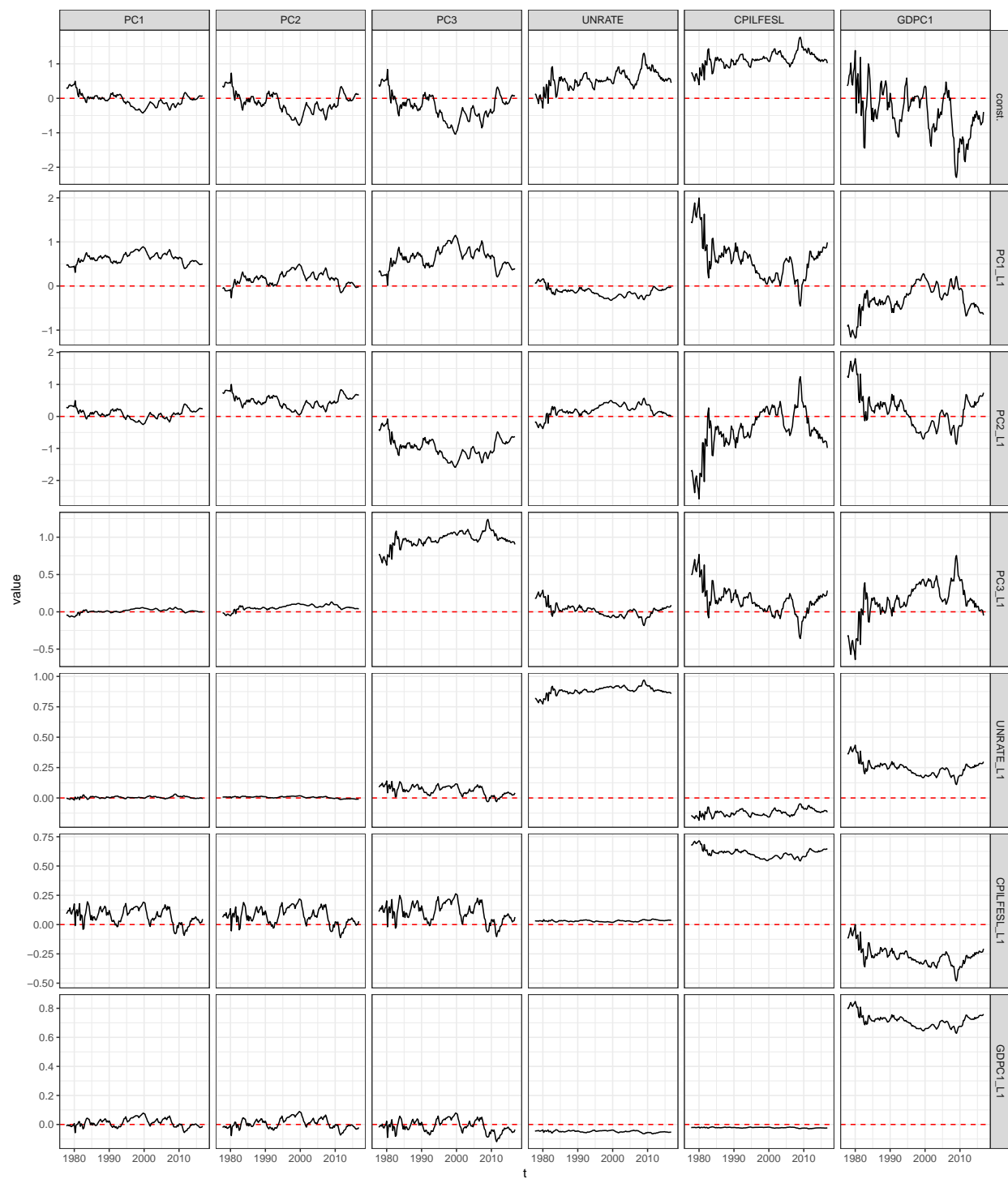
5 lentelė: Prognozės simuliacijų kvantiliai skirtingais scenarijais

Optimistinis					
	SVENPY01	SVENPY03	SVENPY05	SVENPY07	SVENPY10
5%	-0.86	-0.10	0.36	0.63	0.84
50%	2.34	2.76	3.06	3.29	3.51
95%	7.11	6.76	6.59	6.50	6.52
Bazinis					
	SVENPY01	SVENPY03	SVENPY05	SVENPY07	SVENPY10
5%	-1.31	-0.52	-0.04	0.24	0.45
50%	1.64	2.09	2.40	2.62	2.82
95%	4.94	4.89	4.91	4.98	5.12
Pesimistinis					
	SVENPY01	SVENPY03	SVENPY05	SVENPY07	SVENPY10
5%	-2.56	-1.47	-0.75	-0.30	-0.01
50%	0.73	1.32	1.71	2.00	2.25
95%	4.19	4.13	4.11	4.15	4.37
Modelis					
	SVENPY01	SVENPY03	SVENPY05	SVENPY07	SVENPY10
5%	-1.05	-0.30	0.14	0.41	0.60
50%	1.88	2.29	2.57	2.77	2.97
95%	5.30	5.19	5.16	5.21	5.32

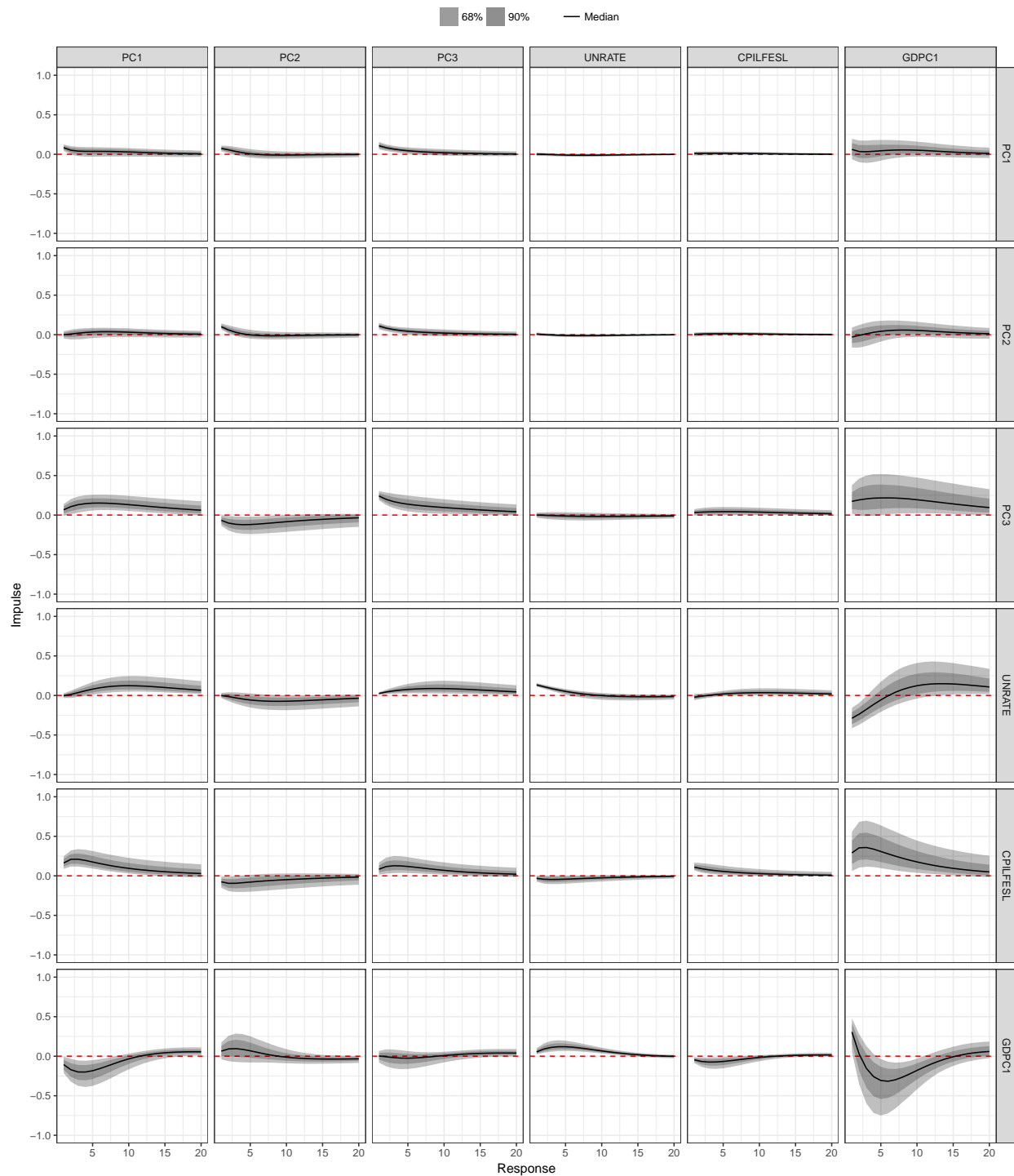


6 pav.: Pajamingumo kreivės prognozės (medianos) po 1 metų skirtingais ekonominiais scenarijais

## 5 Priedas. Paveikslėliai



7 pav.: VAR-TVP(1) beta parametru medianų kitimas laike



8 pav.: Impulso-atsako funkcijos 2016K3. Horizontas 20 periodų (5 metai).

## 6 Nuorodos į R/C++ kodą

Pagrindinė dalis kodo sudėta į `bayesVAR_TVP` paketą. Jį galima rasti: [https://github.com/GediminasB/bayesVAR\\_TVP](https://github.com/GediminasB/bayesVAR_TVP). Pačios ataiskaitos `R`markdown kodas ir naudoti duomenys čia: [https://github.com/GediminasB/MIF\\_bayesVAR\\_tyrimas](https://github.com/GediminasB/MIF_bayesVAR_tyrimas)

## Literatūros sąrašas

Ben S. Bernanke, Jean Boivin, and Piotr Elias. Measuring the Effects of Monetary Policy: A Factor-Augmented Vector Autoregressive (FAVAR) Approach. NBER Working Papers 10220, National Bureau of Economic Research, Inc, January 2004. URL <https://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/10220.html>.

Andrew P Blake, Haroon Mumtaz, et al. Applied bayesian econometrics for central bankers. *Technical Books*, 2012.

C. K. Carter and R. Kohn. On gibbs sampling for state space models. *Biometrika*, 81(3): 541–553, 1994. ISSN 00063444. URL <http://www.jstor.org/stable/2337125>.

Timothy Cogley and Thomas J. Sargent. Drifts and volatilities: monetary policies and outcomes in the post {WWII} {US}. *Review of Economic Dynamics*, 8(2):262 – 302, 2005. ISSN 1094-2025. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.red.2004.10.009>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1094202505000049>. Monetary Policy and Learning.

J. Durbin and S. J. Koopman. A simple and efficient simulation smoother for state space time series analysis. *Biometrika*, 89(3):603–615, 2002. ISSN 00063444. URL <http://www.jstor.org/stable/4140605>.

Colin Ellis, Haroon Mumtaz, and Pawel Zabczyk. What lies beneath? a time-varying favar model for the uk transmission mechanism. *The Economic Journal*, 124(576):668–699, 2014. ISSN 1468-0297. doi: 10.1111/ecoj.12147. URL <http://dx.doi.org/10.1111/ecoj.12147>.

Gary Koop and Dimitris Korobilis. Bayesian multivariate time series methods for empirical macroeconomics. *Foundations and Trends® in Econometrics*, 3(4):267–358, 2010. ISSN 1551-3076. doi: 10.1561/08000000013. URL <http://dx.doi.org/10.1561/08000000013>.

Charles R. Nelson and Andrew F. Siegel. Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, 60(4):473–489, 1987. ISSN 00219398, 15375374. URL <http://www.jstor.org/stable/2352957>.

Giorgio E. Primiceri. Time varying structural vector autoregressions and monetary policy. *The Review of Economic Studies*, 72(3):821–852, 2005. doi: 10.1111/j.1467-937X.2005.00353.x. URL <http://restud.oxfordjournals.org/content/72/3/821.abstract>.

John C. Robertson, Ellis W. Tallman, and Charles H. Whiteman. Forecasting using relative entropy. *Journal of Money, Credit and Banking*, 37(3):383–401, 2005. ISSN 00222879, 15384616. URL <http://www.jstor.org/stable/3839160>.