

# Elementare Geometrie

ENRICO LEUZINGER

INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE  
KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

E-Mail: [enrico.leuzinger@kit.edu](mailto:enrico.leuzinger@kit.edu)

Copyright © 2020/2021 Enrico Leuzinger. All rights reserved.

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Hinweise zum Lesen dieses Skripts . . . . .                             | 1         |
| 1.2      | Was ist „Elementare Geometrie?“ . . . . .                               | 1         |
| <b>2</b> | <b>Einstieg: Metrische Räume</b>  | <b>6</b>  |
| 2.1      | Definitionen und erste Beispiele . . . . .                              | 6         |
| 2.2      | Spezielle Beispiele: Längen-Metriken . . . . .                          | 8         |
| 2.3      | Wozu sind Metriken gut? . . . . .                                       | 18        |
| <b>3</b> | <b>Topologische Grundbegriffe</b>                                       | <b>19</b> |
| 3.1      | Topologische Räume . . . . .  | 19        |
| 3.2      | Konstruktionen: Teilräume, Produkte, Quotienten . . . . .               | 24        |
| 3.3      | Das Hausdorffsche Trennungsaxiom . . . . .                              | 28        |
| 3.4      | Stetigkeit . . . . .  | 30        |
| 3.5      | Zusammenhang . . . . .  | 38        |
| 3.6      | Kompaktheit . . . . .   | 43        |
| <b>4</b> | <b>Spezielle Klassen von topologischen Räumen</b>                       | <b>49</b> |
| 4.1      | Topologische Mannigfaltigkeiten . . . . .                               | 52        |
| 4.2      | Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .                           | 55        |
| 4.3      | Beispiele von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten . . . . .            | 58        |
| 4.4      | Simplizial-Komplexe . . . . .   | 68        |
| 4.5      | Ebene Graphen und Polyeder . . . . .                                    | 74        |
| 4.6      | Spezielle Konstruktionen von Quotientenräumen durch Verkleben . . . . . | 81        |
| <b>5</b> | <b>Die Geometrie von Flächen</b>  | <b>88</b> |
| 5.1      | Reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$ . . . . .                            | 88        |
| 5.2      | Die erste Fundamentalform einer Fläche . . . . .                        | 92        |
| 5.3      | Lokal isometrische Flächen . . . . .                                    | 99        |
| 5.4      | Normalenvektoren und 2. Fundamentalform . . . . .                       | 102       |
| 5.5      | Gauß-Krümmung . . . . .   | 107       |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>6</b> | <b>Der Satz von Gauß-Bonnet</b>                                | <b>109</b> |
| 6.1      | Kovariante Ableitung und geodätische Krümmung . . . . .        | 109        |
| 6.2      | Satz von Gauß-Bonnet (lokale Version) . . . . .                | 114        |
| 6.3      | Satz von Gauß-Bonnet (globale Version) . . . . .               | 121        |
| <b>7</b> | <b>Parallelen-Axiom und hyperbolische Geometrie</b>            | <b>125</b> |
| 7.1      | Ein Axiomensystem für „ebene Geometrie“ . . . . .              | 125        |
| 7.2      | Von Gauß zu Riemann . . . . .                                  | 126        |
| 7.3      | Die Poincaré-Halbebene . . . . .                               | 129        |
| 7.4      | Geodätische Linien in $H^2$ . . . . .                          | 133        |
| 7.5      | Hyperbolische Geometrie ist nicht-euklidisch . . . . .         | 137        |
| 7.6      | Hyperbolischer Flächeninhalt . . . . .                         | 138        |
| 7.7      | Einheitskreis-Modell und Gauß-Krümmung . . . . .               | 144        |
| <b>8</b> | <b>Einige Fragen zur Lernkontrolle</b>                         | <b>148</b> |
| 8.1      | Topologische Grundbegriffe . . . . .                           | 148        |
| 8.2      | Mannigfaltigkeiten, Simplicialkomplexe, Verklebungen . . . . . | 149        |
| 8.3      | Geometrie von Flächen . . . . .                                | 149        |
| 8.4      | Nichteuklidische Geometrie . . . . .                           | 150        |

# 1 Einleitung

## 1.1 Hinweise zum Lesen dieses Skripts

Grundsätzlich sollten Sie „exploratives Lernen“ praktizieren. Wenn Sie also einen mathematischen Text (z.B. dieses Skript) „lesen“, tun Sie das nicht passiv, sondern aktiv mit Stift und Papier:

- Schreiben Sie nach jeder Lese-Sitzung eine Zusammenfassung. Notieren Sie sich Definitionen, Beispiele und Sätze stichwortartig.
- Eine neue Definition können Sie sich viel besser merken, wenn Sie ein (möglichst einfaches) Beispiel und/oder Gegenbeispiel dazu kennen.
- Im Skript steht unter „Beispielen“ oft nur eine Behauptung ohne Beweis. Verifizieren und bearbeiten Sie diese Beispiele: Was muss gelten, wieso gilt die Behauptung usw.
- An vielen Stellen im Text steht nach einer Behauptung oder einem Argument „(wieso?)“. Das ist als Lernkontrolle gedacht; Sie sollten in der Lage sein, eine Antwort/Begründung zu geben.
- Bearbeiten Sie die Übungsaufgaben.

## 1.2 Was ist „Elementare Geometrie?“

Ganz oberflächlich gesagt geht es um mathematische Eigenschaften, die „Form“ oder „Gestalt“ von „Objekten“ oder „Räumen“ beschreiben.

„Elementar“ bedeutet in diesem Kontext *nicht* „besonders einfach“, sondern „geringer formaler Aufwand“.

**Topologie** ist *Stetigkeits-Geometrie*: studiert werden Eigenschaften, die bei gewissen stetigen Abbildungen (Homöomorphismen) unverändert (invariant) bleiben.

Beispiel: Eine Sphäre (Oberfläche einer Kugel) ist „topologisch äquivalent“ zu der „Sphäre mit Fingern“ oder auch zu einem Würfel; aber nicht äquivalent zu einem Torus (vgl. FIG. 1).

**Geometrie** ist *quantitativer* und hat mit „messen“ zu tun: untersucht werden Eigenschaften, die bei abstandserhaltenden Abbildungen (Isometrien) invariant bleiben.

Beispiel (vgl. FIG. 2): Das erste Dreieck ist „geometrisch äquivalent“ zum gedrehten und verschobenen Dreieck; aber nicht „geometrisch äquivalent“ zum grösseren oder kleineren, ähnlichen Dreieck.

Eine andere typische Fragestellung: Sind zwei Objekte „lokal“ geometrisch gleich?

Beispiel (Kartographie): Kann man ein Teilstück einer Sphäre (a) topologisch bzw. (b) geometrisch äquivalent auf ein Teilstück der Ebene  $\mathbb{R}^2$  abbilden (vgl. FIG. 3)? Die Antwort ist ja für (a) z.B. via Orthogonalprojektion. Hingegen nein für (b): es gibt keine lokale Isometrie (d.h. abstandserhaltende Abbildung) zwischen einem Stück einer Sphäre und einem Stück der Ebene. Die Begründung: Wir werden später sehen, dass es eine (lokale) geometrische Invariante gibt, die Gauß-Krümmung, die für die (Einheits-)Sphäre 1 und für die Ebene 0 ist.

Das **Lernziel**: Es sollen erste Einblicke in einige Konzepte der modernen Geometrie und Topologie vermittelt werden. Vieles muss exemplarisch bleiben und wird erst in weiterführenden Vorlesungen wie „Differentialgeometrie“, „Algebraische Topologie“ und „Geometrische Gruppentheorie“ ausführlich behandelt werden.

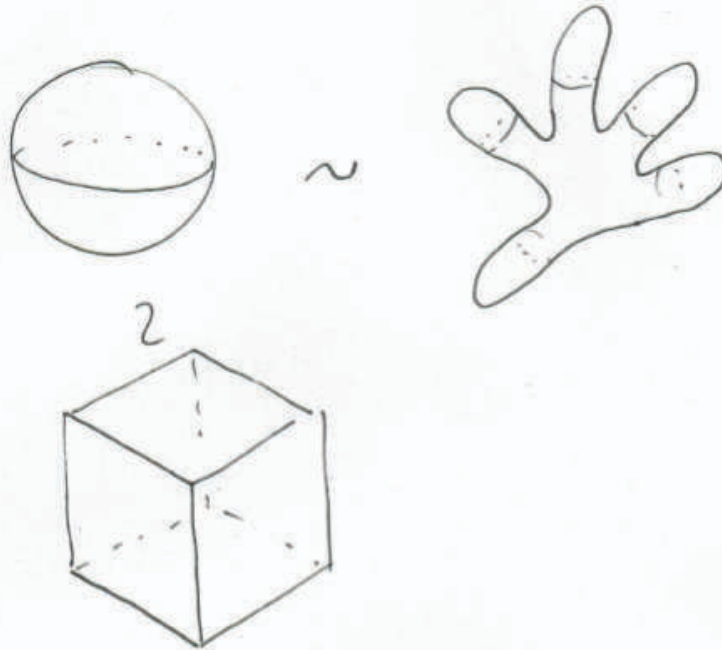
Für Studierende im Bachelor „Mathematik“ ist die Vorlesung als eine erste Einführung in diese Gebiete gedacht, während Studierende im Bachelor „Lehramt“ sie eher als ein Panorama sehen können.

**Literatur.** Ich werde im Text gelegentlich auch Hinweise auf Bücher geben, in denen man (bei Bedarf) mehr Details findet.

Wenn jemand neben der Vorlesung auch gerne aus einem Buch lernen möchte (und Zeit übrig hat), empfehle ich *I.M. Singer, J.A. Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer 1967*.

Das ist eine, vor einem halben Jahrhundert am MIT gehaltene, 2-semesterige Vorlesung. Sie umfasst den Stoff der Vorlesung „Elementare Geometrie“ aber auch viele zusätzliche Themen.

topologisch äquivalent sind

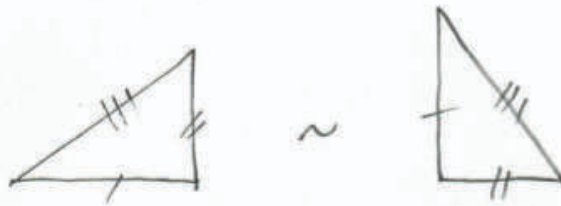


nicht äquivalent sind



FIGUR 1

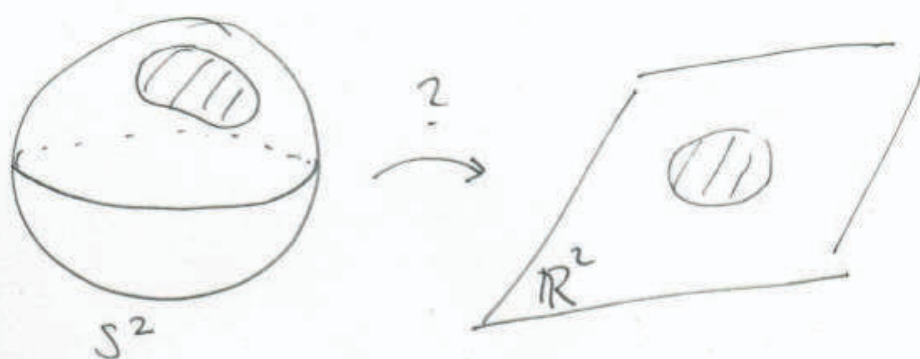
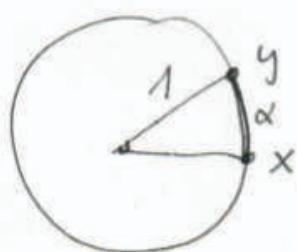
geometrisch äquivalent sind  
(die kongruenten Dreiecke)



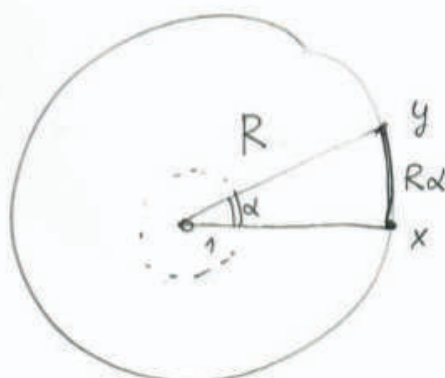
geometrisch verschieden sind  
(die ähnlichen Dreiecke)



FIGUR 2

FIGUR 3

$S^2 = S_1^2$   
= Einheitskugel



$S_R^2$  = Kugel vom  
Radius R

FIGUR 4



## 2 Einstieg: Metrische Räume

### 2.1 Definitionen und erste Beispiele

#### Definitionen:

Es sei  $X$  eine Menge. Eine Funktion  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist eine **Metrik** (oder **Abstandsfunktion**), falls für alle  $x, y, z \in X$  gilt:

1. positiv definit:  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. symmetrisch:  $d(x, y) = d(y, x)$
3. Dreiecksungleichung:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Ein Paar  $(X, d)$  bestehend aus einer Menge  $X$  versehen mit einer Metrik  $d$  heißt **metrischer Raum**.

Die Teilmenge  $\overline{B}_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$  heißt (abgeschlossener) **Ball** in  $X$  mit Zentrum  $x$  und Radius  $r$ .

Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **abstandserhaltend**, falls für alle  $x, y \in X$  gilt:  $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ .

Eine **Isometrie** ist eine bijektive und abstandserhaltende Abbildung. Zwei metrische Räume  $X$  und  $Y$  heißen **isometrisch**, falls es eine Isometrie  $f : X \rightarrow Y$  gibt.

#### Beispiele:

1. Triviale Metrik: Es sei  $X$  eine Menge und

$$d_{triv}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

Es ist  $\overline{B}_r(x) = \{x\}$  für  $0 \leq r < 1$  und  $\overline{B}_r(x) = X$  für  $r \geq 1$  (wieso?).

Das Beispiel zeigt: Jede Menge kann zu einem metrischen Raum gemacht werden.

2. Sei  $X = \mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen.

$$d_1(x, y) := |x - y| \quad \text{und} \quad d_2(x, y) := \log(|x - y| + 1)$$

sind zwei Metriken auf  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie das! Wieso gilt z.B. im 2. Fall die Dreiecksungleichung?

Das Beispiel zeigt: Auf einer gegebenen Menge gibt es (viele) verschiedene Metriken.

3. Die **Standard-Metrik** oder **euklidische Metrik** auf  $X = \mathbb{R}^n$  ist wie folgt definiert:

Für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  ist

$$d_e(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Mit dem Standard-Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bzw. der Standard-Norm  $\| \cdot \|$  auf  $\mathbb{R}^n$  kann man das auch schreiben als

$$d_e(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Wir überlegen, dass  $d_e$  eine Metrik ist:

- (1) positiv definit:  $d_e(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x = y$ .
- (2) symmetrisch:  $d_e(y, x) = \|y - x\| = \|x - y\| = d_e(x, y)$ .
- (3) Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} d_e(x, z)^2 &= \|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \\ &= \langle (x - y) + (y - z), (x - y) + (y - z) \rangle = \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle x - y, y - z \rangle \leq \\ &\leq \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\|x - y\|\|y - z\| = \\ &= (\|x - y\| + \|y - z\|)^2 = (d_e(x, y) + d_e(y, z))^2. \end{aligned}$$

Der metrische Raum  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  heißt **euklidischer Raum** und ist DAS Modell für die euklidische Geometrie. Die Isometrien des euklidischen Raumes sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen (vgl. Lineare Algebra II).

4. Auf  $\mathbb{R}^n$  gibt es auch andere (wichtige) Metriken z.B.  $d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$  (vgl. Übungen).

5. Verallgemeinerung von Beispiel 3: Sei  $X$  ein reeller Vektorraum versehen mit einer Norm  $\| \cdot \|$ . Dann ist  $d(x, y) := \|x - y\|$  die von der Norm induzierte Metrik auf  $X$ .

6. Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standard-Skalarprodukt und  $\| \cdot \|$  die Standard-Norm auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  (wie in Beispiel 3).

Die Menge aller Einheitsvektoren ist

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

und heißt  **$n$ -dimensionale Einheits-Sphäre**. Auf der Einheits-Sphäre  $S^n$  (und entsprechend auf Sphären vom Radius  $R$ , vgl. Abschnitt 2.2.3) kann man eine Metrik mittels Winkeln wie folgt definieren:

Der **Winkel**  $\angle(x, y)$  zwischen zwei Einheitsvektoren (vgl. LA II) ist definiert durch

$$\cos \angle(x, y) = \langle x, y \rangle.$$

Die **Winkel-Metrik** auf der  $n$ -Sphäre ist dann definiert durch

$$d_w(x, y) := \angle(x, y) = \arccos \langle x, y \rangle$$

(vgl. FIG. 4). Überprüfen Sie, dass  $d_w$  eine Metrik ist. Wieso gilt z.B. die Dreiecksungleichung?

7. Die **Hamming-Metrik** spielt eine Rolle im Zusammenhang mit fehlerkorrigierenden Codes:

Es sei  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  der Körper mit zwei Elementen und  $X = \mathbb{F}_2^n$  der  $n$ -dimensionale Vektorraum über  $\mathbb{F}_2$ ;  $X$  besteht also aus allen 01-Folgen  $x = (x_1, \dots, x_n)$  der Länge  $n$ .

Die Hamming-Metrik misst die Abweichung von zwei solchen Folgen:

$$d_H(x, y) := \text{Anzahl}\{i \leq n \mid x_i \neq y_i\}.$$

Überprüfen Sie, dass  $d_H$  auch wirklich eine Metrik ist.

## 2.2 Spezielle Beispiele: Längen-Metriken

Interessante (und wichtige) Metriken entstehen oft auf folgende Weise: Man geht aus von einer Längenmessung von „Kurven“ zwischen zwei Punkten und definiert dann den Abstand dieser Punkte als Länge der „kürzesten“ Verbindungskurve.

Wir illustrieren das anhand von drei Beispielen: die kombinatorische Metrik auf Graphen, die euklidische Metrik und die sphärische Winkel-Metrik sind Längen-Metriken. Später kommen dann noch weitere Beispiele von Längen-Metriken dazu (z.B. die hyperbolische Metrik).

### 2.2.1 Die kombinatorische Metrik von Graphen

Ein (endlicher bzw. unendlicher) **Graph**  $\mathcal{G}(E, K)$  besteht aus einer (endlichen bzw. unendlichen) Menge  $E$ , den **Ecken** des Graphen, sowie einer Menge  $K$  von Paaren  $\{u, v\} \in E \times E, u \neq v$ , den **Kanten** des Graphen.

Graphen mit einer kleinen Anzahl von Ecken kann man visualisieren: die Ecken zeichnet man als Punkte in einer Ebene und verbindet zwei solche Punkte  $p, q$  durch ein Segment genau dann, wenn  $\{p, q\}$  eine (abstrakte) Kante ist.

Beispiel :  $E = \{a, b, c, d\}$  und  $K = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$  (vgl. FIG. 5, markieren Sie die Ecken).

Seien nun etwa  $p, q \in E$  zwei Ecken eines Graphen  $\mathcal{G}(E, K)$ . Wir sagen  $q$  ist von  $p$  aus **erreichbar**, falls ein **Kantenweg** von  $p$  nach  $q$  existiert, d.h. eine Folge von Kanten  $\{e_1, e_2\}, \{e_2, e_3\}, \dots, \{e_{k-1}, e_k\}, \{e_k, e_{k+1}\}$  mit  $e_1 = p$  und  $e_{k+1} = q$ . Die **kombinatorische Länge** eines Kantenweges ist die Anzahl seiner Kanten. Ein Graph  $\mathcal{G}(E, K)$  heißt **zusammenhängend**, falls alle Ecken von einer festen Ecke aus erreichbar sind.

Sei jetzt  $\mathcal{G}(E, K)$  ein zusammenhängender Graph. Für Ecken  $p, q \in E$  definieren wir  $d(p, p) = 0$  und falls  $p \neq q$

$$d(p, q) := \text{minimale Länge aller möglichen Kantenwege von } p \text{ nach } q.$$

Behauptung:  $d$  ist eine Metrik auf  $E$ . Diese Metrik heißt **kombinatorische Metrik** des Graphen  $\mathcal{G}(E, K)$ .

Beweis: (1) positiv definit: Nach Definition ist  $d(p, p) = 0$ . Sei umgekehrt  $d(p, q) = 0$ . Zu zeigen ist, dass  $p = q$ . Angenommen  $p \neq q$ . Da der Graph zusammenhängend ist, muss es einen Kantenweg zwischen  $p$  und  $q$  geben und somit  $d(p, q) \geq 1$ ; ein Widerspruch. Also  $p = q$ .

(2) symmetrisch ergibt sich aus folgender Beobachtung: Durchläuft man einen Kantenweg von  $p$  nach  $q$  „rückwärts“, so erhält man einen Kantenweg von  $q$  nach  $p$  gleicher Länge.

(3) Dreiecksungleichung: Hat man drei Ecken  $p, q, r$ , so ist die Zusammensetzung eines kürzesten Weges von  $p$  nach  $r$  mit einem kürzesten Weg von  $r$  nach  $q$  ein Weg von  $p$  nach  $q$  der Länge  $d(p, r) + d(r, q)$ , aber nicht unbedingt der kürzeste. Für einen kürzesten Weg von  $p$  nach  $q$  gilt also  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ , was zu zeigen war.

### Exkurs: Geometrische Gruppentheorie

Die Grundidee ist es, endlich erzeugte Gruppen (also algebraische Objekte) durch Einführung einer Metrik (auch) zu geometrischen Objekten zu machen.

Sei  $G$  eine Gruppe. Für eine Teilmenge  $A \subseteq G$  sei  $A^{-1} := \{a^{-1} \in G \mid a \in A\}$  die Menge der inversen Elemente von  $A$ . Eine Teilmenge  $A$  heißt **symmetrisch**, falls  $A = A^{-1}$ . Eine Teilmenge  $S \subseteq G$  heißt **Erzeugendensystem** von  $G$ , falls jedes Element  $g$  von  $G$  geschrieben werden kann in der Form

$$(*) \quad g = s_1 s_2 \cdots s_n \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } s_i \in S.$$

Ist  $G$  von  $S$  erzeugt, so schreibt man auch  $G = \langle S \rangle$ .

Sei jetzt  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe mit (endlichem) symmetrischem Erzeugendensystem  $S$ . Für  $g \in G$  setzen wir

$$|g| := \text{minimales } n \text{ in allen möglichen Schreibweisen } (*) \text{ von } g.$$

Damit können wir die **Wort-Metrik** von  $G$  bezüglich  $S$  definieren durch

$$d_S(g, h) := |g^{-1}h| \quad \text{für } g, h \in G.$$

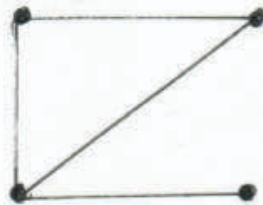
Die Links-Multiplikationen  $L_k : G \rightarrow G; g \mapsto kg$  für  $k \in G$  sind dann Isometrien des metrischen Raumes  $(G, d_S)$ :  $d_S(kg, kh) = d_S(g, h)$  für alle  $k, g, h \in G$ . Man sagt auch, dass die Metrik links-invariant ist.

Man kann die „Geometrisierung“ einer endlich erzeugten Gruppe  $G$  noch etwas weiter treiben, indem man  $G$  einen Graphen zuordnet.

Der **Cayley-Graph**  $\mathcal{C}_{G,S}$  von  $G$  bezüglich einem endlichen, symmetrischen Erzeugendensystem  $S$  ist wie folgt definiert: Die Ecken von  $\mathcal{C}_{G,S}$  sind die Elemente der Gruppe  $G$  und zwei Ecken  $g, h \in G$  werden durch eine Kante verbunden genau dann, wenn  $h = gs$  für ein Element  $s \in S$ .

**Beispiel:** Sei  $G = (\mathbb{Z}, +)$  die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Ein endliches Erzeugendensystem für  $G$  ist z.B.  $S_1 = \{+1, -1\}$ . Sei  $G = (\mathbb{Z}^2, +)$  mit endlichem, symmetrischem Erzeugendensystem  $S_2 = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ . Für die zugehörigen Cayley-Graphen siehe FIG. 6.

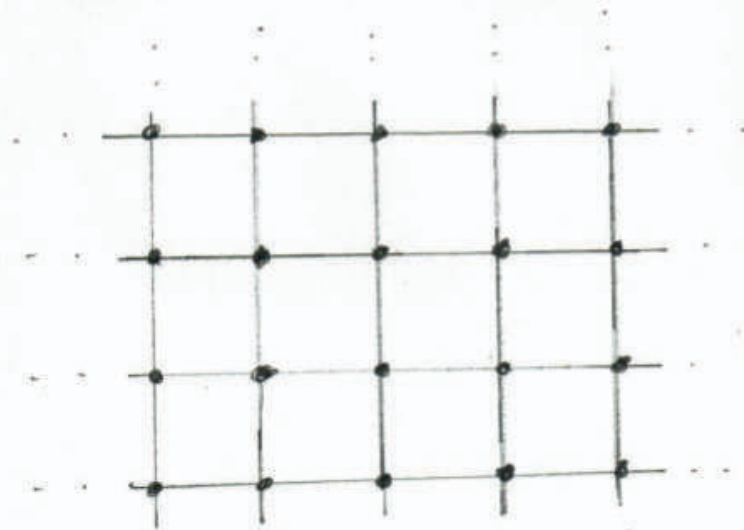
**Bemerkung:** Die kombinatorischen Metrik auf dem Cayley-Graphen  $\mathcal{C}_{G,S}$  entspricht der Wort-Metrik  $d_S$  auf  $G$  (Übung!).



FIGUR 5



Cayley-Graph von  $(\mathbb{Z}, +)$   
bzgl.  $S_1 = \{+1, -1\}$



FIGUR 6

Cayley-Graph von  $(\mathbb{Z}^2, +)$   
bzgl.  $S = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$

### 2.2.2 Die euklidische Metrik als Längen-Metrik auf $\mathbb{R}^2$

Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2; t \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$  eine stückweise differenzierbare Kurve in der Ebene. Die **euklidische Länge** von  $c$  ist definiert als

$$L_{\text{euk}}(c) := \int_a^b \left\| \frac{dc(t)}{dt} \right\| dt = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

**Beispiel:** Für das **Geradenstück** zwischen zwei Punkten  $p, q \in \mathbb{R}^2$ ,

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; t \mapsto (1 - t)p + tq,$$

ist  $g'(t) = q - p$  und somit  $L_{\text{euk}}(g) := \int_0^1 \|q - p\| dt = \|q - p\| = d_e(p, q)$ .

#### Lemma 1

(a) Die euklidische Länge  $L_{\text{euk}}(c)$  einer Kurve  $c$  ist unabhängig von der Parametrisierung.

(b)  $L_{\text{euk}}(c)$  ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen von  $\mathbb{R}^2$  (also invariant unter den euklidischen Isometrien der Ebene).

*Beweis:* (a) Es sei  $t : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]; s \mapsto t(s)$  eine Parametertransformation, d.h. eine monoton wachsende, bijektive und differenzierbare Abbildung zwischen Intervallen, deren Umkehrabbildung auch differenzierbar ist. Weiter sei  $\tilde{c} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2; s \mapsto c \circ t(s)$  die umparametrisierte Kurve. Es gilt dann  $\text{Bild } \tilde{c} = \text{Bild } c'$  und es ist zu zeigen, dass gilt  $L_{\text{euk}}(\tilde{c}) = L_{\text{euk}}(c)$ . Dies folgt aber direkt aus der Substitutionsregel für Integrale:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\| \frac{d\tilde{c}}{ds} \right\| ds = \int_{\alpha}^{\beta} \left\| \frac{dc(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(\alpha)=a}^{t(\beta)=b} \left\| \frac{dc(t)}{dt} \right\| dt.$$

(b) Für  $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$  sei

$$T_p \circ c(t) := c(t) + p = (x(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

die um  $p$  verschobenene Kurve. Es gilt dann  $(T_p \circ c)'(t) = c'(t)$  und damit die Behauptung für Translationen.

Für  $\theta \in [0, 2\pi]$  sei  $D_{\theta} \circ c(t) := (\cos \theta x(t) - \sin \theta y(t), \sin \theta x(t) + \cos \theta y(t))$  die um den Winkel  $\theta$  gedrehte Kurve. Da die Drehung  $D_{\theta}$  eine orthogonale Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  ist, folgt  $(D_{\theta} \circ c)' = D_{\theta} \circ c'$  und

$$\|(D_{\theta} \circ c)'\|^2 = \langle D_{\theta} \circ c', D_{\theta} \circ c' \rangle = \langle c', c' \rangle = \|c'\|^2$$

und damit die Behauptung für Drehungen. Spiegelungen sind auch orthogonale Abbildungen und der Beweis ist analog.  $\square$

**Lemma 2**

Die bezüglich der euklidischen Längenmessung kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten der Ebene  $\mathbb{R}^2$  sind genau die (parametrisierten) Geradensegmente.

*Beweis:* Seien  $p, q \in \mathbb{R}^2$  zwei beliebige Punkte. Durch eine geeignete Rotation und eine Translation kann man das Paar  $(p, q)$  in das Paar  $(p^* = (0, 0), q^* = (0, L))$  mit  $L \geq 0$  auf der  $y$ -Achse überführen. Wegen Lemma 1 ändert sich dabei die Länge von entsprechenden Verbindungskurven nicht (vgl. FIG. 7).

Sei jetzt  $c(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$  eine stückweise differenzierbare Verbindungskurve zwischen  $p^*$  und  $q^*$ , d.h.  $c(a) = p^*$  und  $c(b) = q^*$ . Dann gilt

$$L_{euk}(c) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \geq \int_a^b |y'(t)| dt \geq \int_a^b y'(t) dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=L} dy = L.$$

Die Zahl  $L$  ist aber auch gleich der Länge des Geradensegmentes zwischen  $p^*$  und  $q^*$ , d.h. das Minimum in obiger Abschätzung wird angenommen.

Das Geradensegment ist (bis auf Parametrisierung) auch die *einzige* Kurve minimaler Länge. Das kann man so einsehen: Für eine beliebige Kurve zwischen  $p^*$  und  $q^*$  mit Länge  $L$  muss an jeder Stelle der obigen Ungleichungen Gleichheit gelten. Insbesondere muss dann  $x'(t) = 0$  sein, also  $x(t) = \text{konstant} = x(a) = 0$ .  $\square$

Wir können nun eine Längen-Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  definieren. Für  $p, q \in \mathbb{R}^2$  sei  $W_{p,q}(\mathbb{R}^2)$  die Menge aller stückweise differenzierbaren Kurven, die  $p$  und  $q$  verbinden. Wir setzen

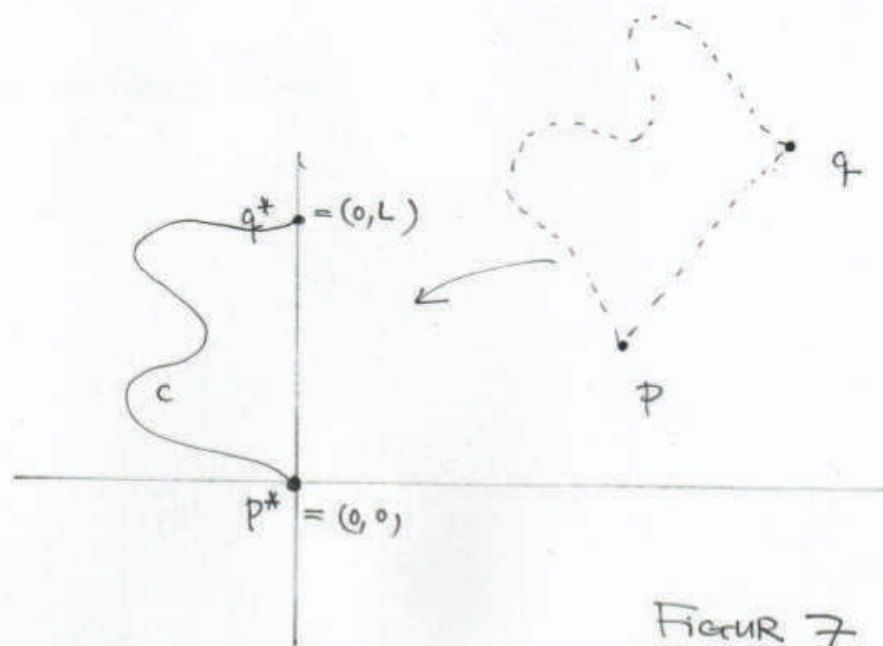
$$d_{euk}(p, q) := \inf_{c \in W_{p,q}(\mathbb{R}^2)} L_{euk}(c).$$

**Satz 1.**  $(\mathbb{R}^2, d_{euk})$  ist ein metrischer Raum und isometrisch zu  $(\mathbb{R}^2, d_e)$ .

1. *Beweis:* Nach Lemma 2 haben wir eine explizite Formel:  $d_{euk}(p, q) = \|p - q\| = d_e(p, q)$ . Da  $d_e$  eine Metrik ist, gilt das auch für  $d_{euk}$ . Die Gleichung zeigt dann auch, dass die Identität eine Isometrie ist.

2. (konzeptioneller) *Beweis:* (1) positiv definit: Falls  $p = q$ , so ist die konstante Kurve  $c(t) = p$  eine Kurve, die  $p$  mit  $p$  verbindet (also  $c \in W_{p,p}(\mathbb{R}^2)$ ). Da  $c$  die Länge 0 hat, folgt aus der Definition  $d_{euk}(p, p) = 0$ . Falls umgekehrt  $p \neq q$ , so ist die kürzeste Verbindungs-Kurve nach Lemma 2 das Geradensegment  $(1-t)p + tq$  mit Länge  $\|p - q\| > 0$  und somit  $d_{euk}(p, q) = \|p - q\| > 0$ .  $\square$



FIGUR 7

### 2.2.3 Die sphärische Winkel-Metrik als Längen-Metrik

Sei  $S_R^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = R\}$  die 2-dimensionale Sphäre vom Radius  $R$  (und Zentrum 0) in  $\mathbb{R}^3$ .

Für eine stückweise differenzierbare Kurve  $c : [a, b] \rightarrow S_R^2 \subset \mathbb{R}^3; t \mapsto c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  ist die **sphärische Länge** von  $c$  definiert als

$$L_s(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Analog zum euklidischen Fall betrachtet man dann für zwei Punkte  $p, q \in S_R^2$  die Menge  $W_{p,q}(S_R^2)$  aller stückweise differenzierbaren Kurven, die ganz auf der Sphäre verlaufen und beide verbinden, und setzt

$$d_s(p, q) := \inf_{c \in W_{p,q}(S_R^2)} L_s(c).$$

#### Lemma 3

Die Länge einer stückweise differenzierbaren Kurve auf  $S_R^2$  ist invariant unter Rotationen von  $\mathbb{R}^3$ .

*Beweis:* Eine Rotation von  $\mathbb{R}^3$  ist (bezüglich der Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale  $(3 \times 3)$ -Matrix  $D$ . Da für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^3$   $\|D(v)\| = \|v\|$  gilt, folgt  $D(S_R^2) = S_R^2$  (d.h. eine Rotation bildet die Sphäre vom Radius  $R$  in sich ab). Insbesondere ist für eine Kurve  $c$  in  $S_R^2$  das Bild  $D \circ c$  wieder in  $S_R^2$ . Weiter folgt wie im euklidischen Fall wegen  $(D \circ c)' = D \circ c'$  die Behauptung über die Länge.  $\square$

#### Lemma 4

Die kürzesten Verbindungs-Kurven auf der Sphäre  $S_R^2$  sind (parametrisierte) Groß-Kreise (d.h. Schnitte von 2-dimensionalen Untervektorräumen von  $\mathbb{R}^3$  mit  $S_R^2$ , vgl. FIG.8).

*Beweis:* Seien  $p$  und  $q$  zwei beliebige Punkte auf  $S_R^2$ . Dann gibt es eine Rotation, die  $p$  auf  $p^* = (0, 0, R)$  und  $q$  auf  $q^* = (0, y, z) \in S_R^2$  abbildet (wieso?). Nach Lemma 3 und der Definition ist dann  $d_s(p, q) = d_s(p^*, q^*)$ . Es genügt also, eine kürzeste Verbindungskurve zwischen  $p^*$  und  $q^*$  zu finden. Man beachte dazu auch, dass Großkreise durch Rotationen auf Großkreise abgebildet werden (wieso?). Durch Verwendung von „geographischen Koordinaten“  $\varphi, \theta$  (vgl. FIG. 9) können wir eine Kurve  $c$  zwischen  $p^*$  und  $q^*$  schreiben als

$$c(t) = R(\sin \theta(t) \cos \varphi(t), \sin \theta(t) \sin \varphi(t), \cos \theta(t)), \quad t \in [a, b]$$

und somit

$$c'(t) = R(\theta' \cos \theta \cos \varphi - \varphi' \sin \theta \sin \varphi, \theta' \cos \theta \sin \varphi + \varphi' \sin \theta \cos \varphi, -\theta' \sin \theta),$$

woraus folgt

$$\|c'(t)\|^2 = R^2(\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \theta)$$

und somit

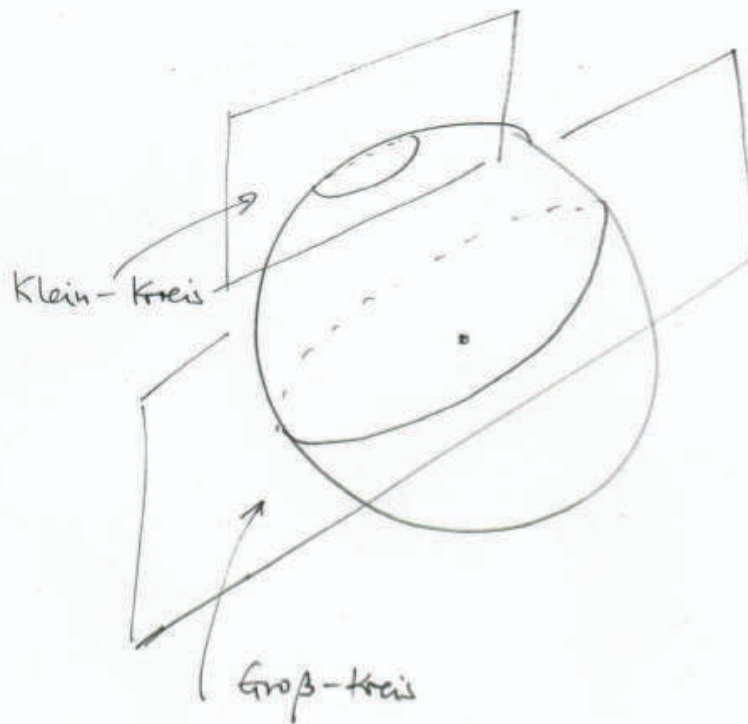
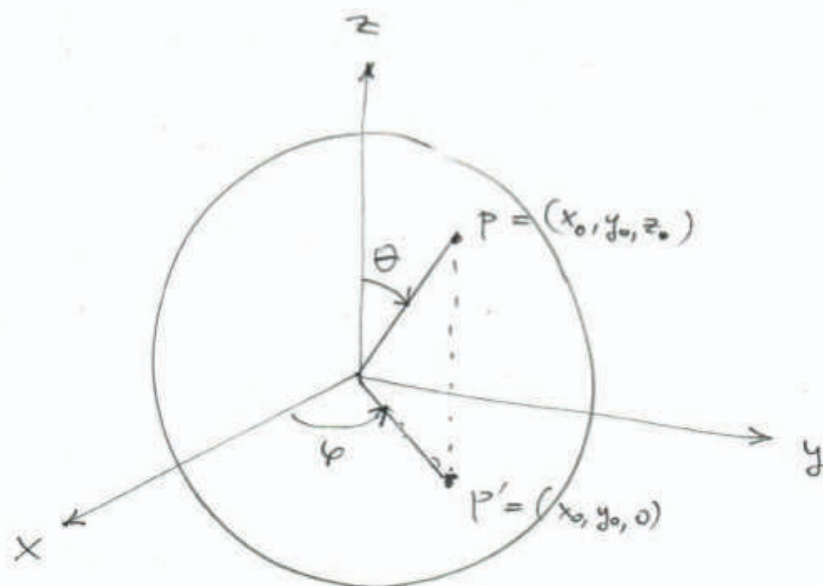
$$\begin{aligned} L_s(c) &= R \int_a^b \sqrt{\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \theta} dt \geq \\ &\geq R \int_a^b |\theta'| dt \geq R \int_a^b \theta' dt = R \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} d\theta = R(\theta(b) - \theta(a)). \end{aligned}$$

Diese untere Schranke wird durch ein Großkreis-Segment realisiert. Eine weitere Kurve (verschieden von einem Großkreisstück) dieser Länge kann es nicht geben: Ist  $c$  eine solche Kurve, so gilt notwendigerweise überall Gleichheit in den Ungleichungen und insbesondere  $\varphi' = 0$ , also  $\varphi = \text{konstant}$ , d.h.  $c$  ist ein (parametrisierter) Großkreis.  $\square$

### Satz 2

$(S_R^2, d_s)$  ist ein metrischer Raum isometrisch zu  $(S_R^2, Rd_w)$  (vgl. FIG. 4).

*Beweis:* Übungsaufgabe.  $\square$

FIGUR 8

geographische  
Koordinaten

FIGUR 9

## 2.3 Wozu sind Metriken gut?

Historisch ist der Begriff einer „Metrik“ um 1900 entstanden, um z.B. „Konvergenz“ von Folgen oder „Stetigkeit“ von Abbildungen in möglichst allgemeinem Kontext studieren zu können.

**Erinnerung (Analysis I):** Eine Folge von reellen Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **konvergent** gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert, so dass gilt

$$|a - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Ganz analog kann man diesen Begriff auch allgemeiner für metrische Räume  $(X, d)$  definieren:

Eine Folge von Punkten  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $X$  heißt **konvergent** gegen  $x \in X$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert, so dass gilt

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N, \quad \text{d.h. } x_n \in B_\varepsilon(x) \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Der Punkt  $x \in X$  heißt **Limes** oder **Grenzwert** der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Schreibweise:  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Ebenfalls aus Analysis I: Eine Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stetig in**  $t_0 \in \mathbb{R}$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass gilt

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \text{ mit } |t - t_0| < \delta.$$

Die Abbildung  $f$  heißt **stetig**, falls sie stetig ist in  $t_0$  für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Und wieder kann man diesen Begriff allgemeiner für Abbildungen zwischen metrischen Räumen  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  definieren:

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig in**  $x_0 \in X$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass gilt

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta,$$

d.h. das Bild eines  $\delta$ -Balls um  $x_0$  liegt im  $\varepsilon$ -Ball um  $f(x_0)$ .

Die Abbildung  $f$  heißt **stetig**, falls sie stetig ist in  $x_0$  für alle  $x_0 \in X$ .

**Bemerkung:** Falls  $f : X \rightarrow Y$  stetig ist, so gilt  $f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  (Übungsaufgabe!).

Allgemeiner oder handlicher als Bälle sind „Umgebungen“ bzw. „offene Mengen“, dies führt auf den Begriff des „topologischen Raumes“.

## 3 Topologische Grundbegriffe

### 3.1 Topologische Räume

Für eine Menge  $X$  heißt die Menge aller Teilmengen **Potenzmenge** und wird mit  $\mathcal{P}(X)$  bezeichnet.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einem System  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen von  $X$ , so dass gilt

- (1)  $X, \emptyset \in \mathcal{O}$ ,
- (2) der Durchschnitt von *endlich* vielen Mengen aus  $\mathcal{O}$  ist wieder in  $\mathcal{O}$ ,
- (3) die Vereinigung von *beliebig* vielen Mengen aus  $\mathcal{O}$  ist wieder in  $\mathcal{O}$ .

Ein solches System  $\mathcal{O}$  von Teilmengen nennt man eine **Topologie** von  $X$ . Die Elemente von  $\mathcal{O}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

Eine Menge  $A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

Es sei  $B$  eine Teilmenge von  $X$ . Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt **Umgebung von  $B$** , falls eine offene Menge  $O$  existiert, so dass  $B \subseteq O \subseteq U$ .

Ein Punkt  $x \in X$  heißt **innerer** bzw. **äußerer** bzw. **Randpunkt** von  $B$ , je nachdem  $B$  oder  $X \setminus B$  oder keines von beiden eine Umgebung von  $\{x\}$  ist. Die Menge  $\overline{B}$  der Punkte von  $X$ , die nicht äußere Punkte von  $B$  sind, heißt **abgeschlossene Hülle** von  $B$ .

#### Beispiele:

(a) Extrem-Beispiele:

Sei  $X$  eine Menge. Die „kleinstmögliche“ Topologie besteht aus nur zwei Teilmengen:  $\mathcal{O}_t := \{X, \emptyset\}$  und heißt **triviale Topologie** auf  $X$ . Die „größtmögliche“ Topologie besteht aus der gesamten Potenzmenge:  $\mathcal{O}_d := \mathcal{P}(X)$  und heißt **diskrete Topologie**.

(b) Interessantere Beispiele:

(b1) Sei  $X = \mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen und

$$\mathcal{O}_s := \{I \subseteq \mathbb{R} \mid I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen } (a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

(ein offenes Intervall ist eine Menge der Form  $(a, b) := \{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\}$ ).  $\mathcal{O}_s$  ist eine Topologie auf  $\mathbb{R}$  und heißt **Standard-Topologie**.

(b2) Sei  $X = \mathbb{R}$  und

$$\mathcal{O}_Z := \{I \subset \mathbb{R} \mid I = \mathbb{R} \setminus E, E \text{ endlich}\} \cup \emptyset$$

(mit anderen Worten: die abgeschlossenen Teilmengen sind endliche Mengen, die leere Menge oder ganz  $\mathbb{R}$ ). Dann ist  $\mathcal{O}_Z$  ebenfalls eine Topologie auf  $\mathbb{R}$  (verifizieren Sie das!) und heißt **Zariski-Topologie**.

(c) Metrische Räume sind topologische Räume: Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $p \in X$  und  $\varepsilon > 0$ . Wir verwenden folgende Begriffe und Bezeichnungen:

Der **offene Ball vom Radius  $r$  um  $p$**  ist  $B_r(p) := \{x \in X \mid d(x, p) < r\}$ .

Der **abgeschlossene Ball vom Radius  $r$  um  $p$**  ist  $\overline{B}_r(p) := \{x \in X \mid d(x, p) \leq r\}$ .

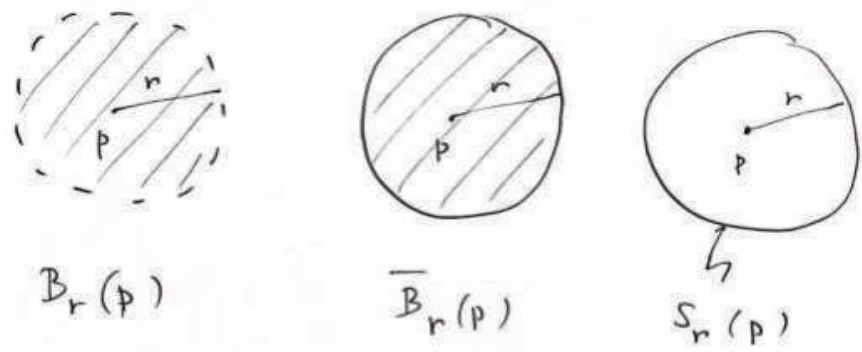
Die **Sphäre vom Radius  $r$  um  $p$**  ist  $S_r(p) := \{x \in X \mid d(x, p) = r\}$  (vgl. FIG. 10).

Wir können einen metrischen Raum zu einem topologischen Raum machen, indem wir die folgende Topologie definieren (d.h. festlegen, was die „offenen Mengen“ sein sollen):

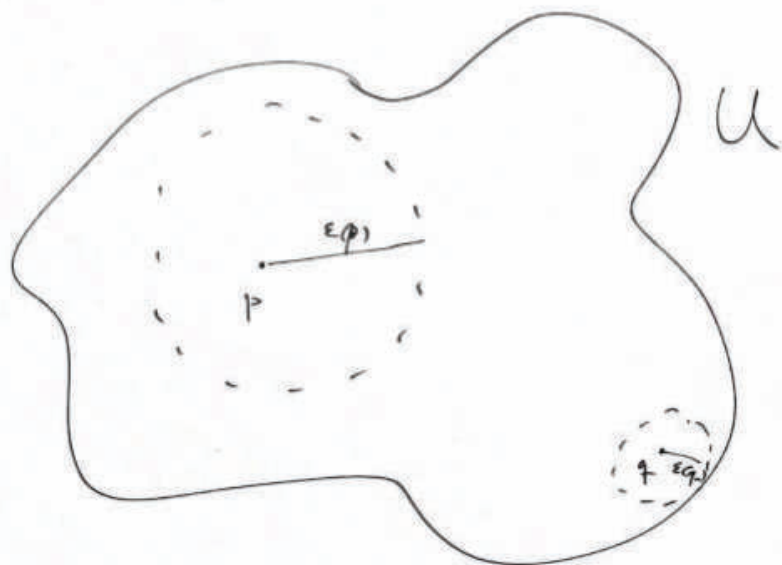
Eine Menge  $U \subseteq X$  ist (per Definition)  **$d$ -offen**, genau dann, wenn für alle  $p \in U$  ein  $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$  existiert, so dass der offene Ball mit Radius  $\varepsilon$  um  $p$  ganz in  $U$  liegt:  $B_\varepsilon(p) \subseteq U$  (vgl. FIG. 11)

Es gilt: Die  $d$ -offenen Mengen von  $X$  bilden eine Topologie von  $X$ , die **von der Metrik  $d$  induzierte Topologie** (Übungsaufgabe!).

Sei jetzt  $(X, \mathcal{O})$  ein (beliebiger) topologischer Raum. Eine **Basis** für die Topologie  $\mathcal{O}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ , so dass für jede offene Menge  $V \neq \emptyset, V \in \mathcal{O}$  gilt  $V = \bigcup_{i \in I} V_i, V_i \in \mathcal{B}$ .



FIGUR 10



FIGUR 11



**Beispiele:**

1. Die offenen Intervalle (d.h. Intervalle der Form  $(a, b) := \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$ ), bilden eine Basis der Standard-Topologie  $\mathcal{O}_s$  von  $\mathbb{R}$ .
2. Die Topologie auf  $\mathbb{R}^n$  induziert von der Standard-Metrik  $d_e(x, y) = \|x - y\|$  hat eine abzählbare Basis:  $\mathcal{B}$  besteht aus allen Bällen mit rationalen Radien und Zentren mit rationalen Koordinaten.

**Bemerkungen:**

- 1) Verschiedene Metriken auf der gleichen Menge können dieselbe Topologie induzieren. Sind etwa  $d$  und  $d'$  Metriken auf  $X$  und enthält jeder Ball um jeden Punkt  $x$  bezüglich  $d$  einen Ball um  $x$  bezüglich  $d'$ , d.h.  $B_{\varepsilon'}^{d'}(x) \subseteq B_{\varepsilon}^d(x)$ , dann ist jede  $d$ -offene Menge auch  $d'$ -offen und somit  $\mathcal{O}(d) \subseteq \mathcal{O}(d')$  (wieso?). Gilt auch das Umgekehrte, so sind die Topologien gleich:  $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ .

Beispiel: Sei  $X = \mathbb{R}^2$ . Die Metriken  $d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$  und  $d'(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$  induzieren die gleiche Topologie (vgl. FIG. 12).

- 2) Der **Durchmesser** eines metrischen Raumes  $(X, d)$  ist

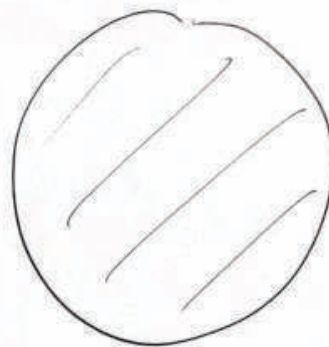
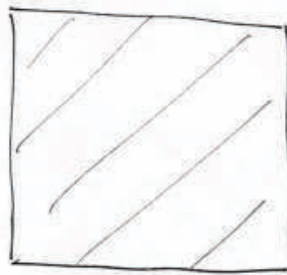
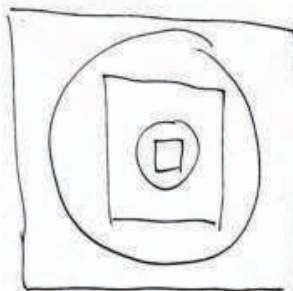
$$\text{diam}(X, d) := \sup_{x, y \in X} d(x, y).$$

Wir setzen

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Dann ist  $d'$  auch eine Metrik auf  $X$  mit  $\mathcal{O}(d') = \mathcal{O}(d)$ . Weiter gilt  $\text{diam}(X, d') \leq 1$ . Insbesondere sagt der Durchmesser eines metrischen Raumes nichts über seine Topologie aus.

- 3) Viele interessante topologische Räume  $(X, \mathcal{O})$  sind „metrisierbar“, d.h. die Topologie wird von einer Metrik  $d$  induziert,  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(d)$ . Dazu braucht es zusätzliche Voraussetzungen. Ein typisches Kriterium lautet etwa: „Ein lokal kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis ist metrisierbar“.

 $d$ -Ball $d'$ -Ball

jeder  $d$ -Ball enthält einen  $d'$ -Ball  
und umgekehrt

FIGUR 12

## 3.2 Konstruktionen: Teilräume, Produkte, Quotienten

### (a) Teilräume

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und  $Y \subset X$  eine Teilmenge von  $X$ . Die **Teilraum-Topologie** von  $Y$  (die die Teilmenge  $Y$  selbst wieder zu einem topologischen Raum macht) ist gegeben durch:

$$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y \mid U = V \cap Y \text{ für ein } V \in \mathcal{O}_X\}$$

(vgl. FIG. 13).

Achtung:  $U \in \mathcal{O}_Y$  ist im allgemeinen nicht offen in  $X$ , d.h. i.a.  $U \notin \mathcal{O}_X$  !

Hier ist ein Beispiel:  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = [0, 1]$ ,  $V = (-1, 2)$ ,  $U = V \cap Y = Y$ .

### (b) Produkt-Räume

Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  zwei topologische Räume. Dann kann man das kartesische Produkt  $X \times Y$  zu einem topologischen Raum machen: Eine Teilmenge  $W \subseteq X \times Y$  ist offen in der **Produkt-Topologie**, wenn es zu jedem Punkt  $(x, y) \in W$  eine Umgebung  $U \subseteq X$  von  $x$  und eine Umgebung  $V \subseteq Y$  von  $y$  gibt, so dass  $U \times V \subseteq W$  gilt (vgl. FIG. 14).

### (c) Quotienten-Räume

Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $X$ . Die Äquivalenzklasse eines Elementes  $x \in X$  schreiben wir als  $[x]$ , also  $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ . Die Äquivalenzklassen bilden eine Partition (Zerlegung in disjunkte Teilmengen) von  $X$ . Sei dann  $X/\sim$  der zugehörige Quotienten-Raum, d.h. die **Menge der Äquivalenzklassen**, und

$$\pi : X \rightarrow X/\sim ; \quad x \mapsto [x]$$

die **natürliche (oder kanonische) Projektion**. Die **Quotienten-Topologie** auf  $X/\sim$  ist wie folgt definiert:

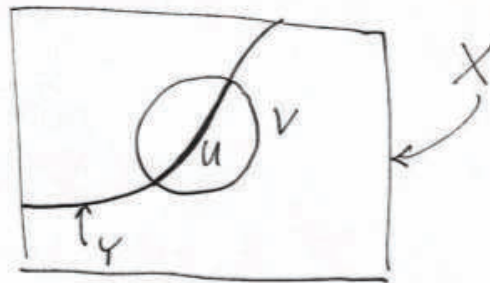
$$U \subseteq X/\sim \text{ ist offen } \iff \pi^{-1}(U) = \{x \in X \mid \pi(x) = [x] \in U\} \text{ ist offen in } X.$$

**Beispiel:** Sei  $X = \mathbb{R}$  versehen mit der Standard-Topologie. Wir betrachten folgende Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$ :

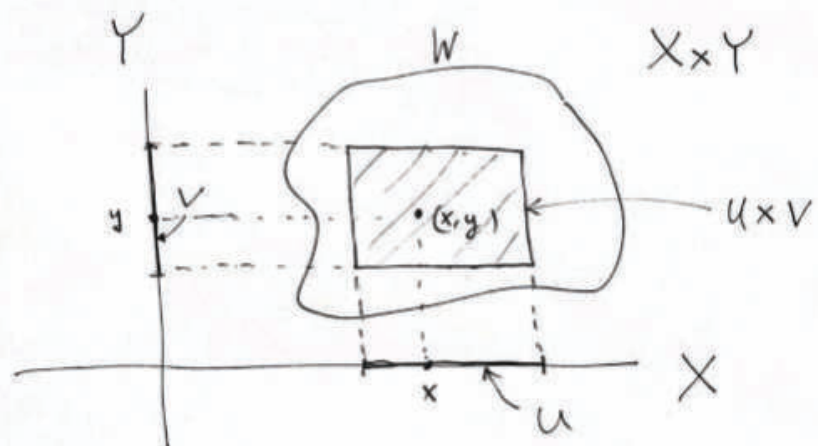
$$s \sim t \iff \exists m \in \mathbb{Z} \text{ so dass } s = t + 2\pi m.$$

Der Quotienten-Raum  $\mathbb{R}/\sim$  kann dann (mittels der Abbildung  $t \mapsto e^{it}$ ) mit dem Einheitskreis  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  identifiziert werden (vgl. FIG. 15).

**Bemerkung:** Das letzte Beispiel kann man auch als Gruppen-Operation interpretieren: Die Gruppe  $\mathbb{Z}$  operiert auf  $\mathbb{R}$  mittels  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (m, s) \mapsto s + 2\pi m$ . Der Bahnen-Raum für diese Gruppen-Operation ist dann auch  $\mathbb{R}/\sim = S^1$ : eine Äquivalenzklasse ist dasselbe wie eine Bahn. Auf diese Beobachtung werden wir später wieder zurückkommen.



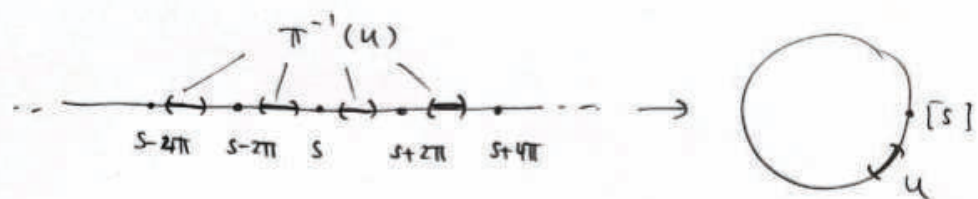
FIGUR 13 : Teilraum-Topologie



FIGUR 14 : Produkt-Topologie

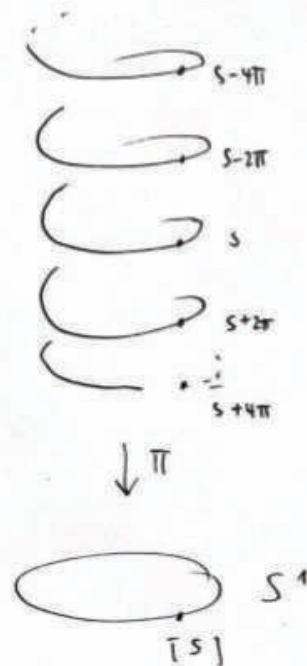
Quotienten - Abbildung

$$\pi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\sim = S^1; \quad t \mapsto e^{it}$$



ein suggestiveres Bild:

" $\pi$  wickelt  $\mathbb{R}$  auf  $S^1$  auf"



FIGUR 15

### 3.3 Das Hausdorffsche Trennungsaxiom

Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O})$  heißt **Hausdorffsch**, falls zu je zwei verschieden Punkten  $p, q \in X, p \neq q$  disjunkte Umgebungen existieren (vgl. FIG. 16)

#### Beispiele:

(1) Metrische Räume sind Hausdorffsch.

Beweis (vg. FIG. 17): Sei  $0 < d(p, q) =: \varepsilon$ . Dann gilt  $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q) = \emptyset$ : Angenommen  $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q) \neq \emptyset$ . Dann gibt es ein  $z \in B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q)$  und mit der Dreiecks-Ungleichung folgt  $d(p, q) \leq d(p, z) + d(z, q) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$ ; ein Widerspruch.

(2) Die reellen Zahlen mit der Standard-Topologie  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_s)$  sind Hausdorffsch,  $\mathbb{R}$  mit der Zariski-Topologie  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_Z)$  ist nicht Hausdorffsch.

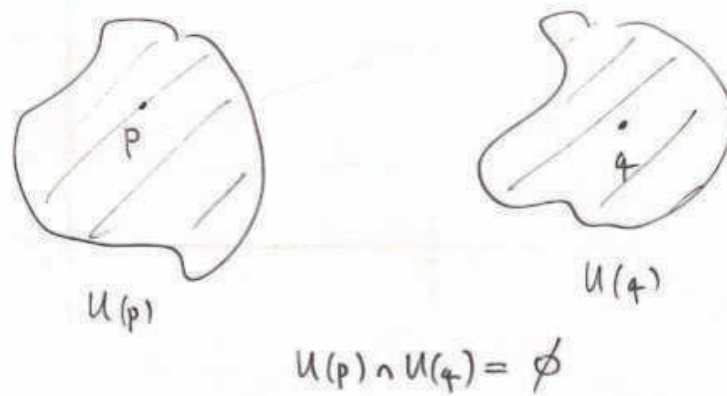
#### Bemerkungen/Übungen:

(1) Definition von Konvergenz in topologischen Räumen: Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum  $X$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt **Limes(punkt)** von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ , falls es zu jeder Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq n_0$ .

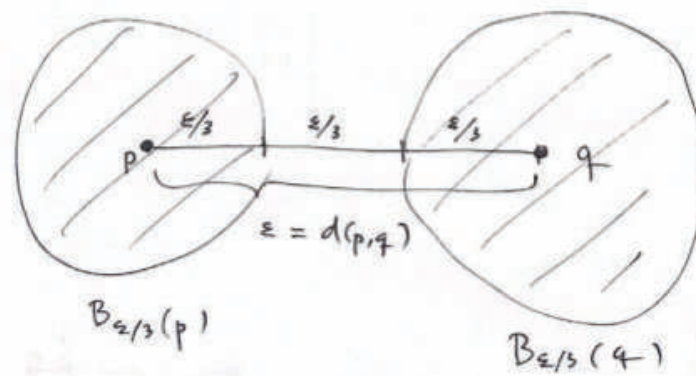
Eine (wichtige) Konsequenz von „Hausdorffsch“ ist also: In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt.

(2) Jeder Teilraum eines Hausdorffschen Raumes ist Hausdorffsch.

(3) Topologische Räume  $X$  und  $Y$  sind Hausdorffsch genau dann, wenn  $X \times Y$  (mit der Produkt-Topologie) Hausdorffsch ist.



FIGUR 16 : Hausdorffsch



FIGUR 17 : metrische Räume  
sind Hausdorffsch



## 3.4 Stetigkeit

Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig**, falls die Urbilder von offenen Mengen in  $Y$  stets offen sind in  $X$ : Für alle  $V \in \mathcal{O}_Y$  ist  $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\} \in \mathcal{O}_X$ .

### Allgemeine Beispiele/Übung:

1. Die identische Abbildung  $\text{Id} : X \rightarrow X; \ x \mapsto x$  ist stetig.
2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
3. Projektions-Abbildungen sind stetig, z.B.  $p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1; \ (x_1, x_2) \mapsto x_1$ , denn  $p_1^{-1}(U) = U \times X_2$  ist offen in  $X_1 \times X_2$  für  $U$  offen in  $X_1$ .

### Satz 1

Seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1)  $f$  ist stetig.
- (2) Für alle  $x \in X$  gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0, \text{ so dass } f(B_\delta^X(x)) \subseteq B_\varepsilon^Y(f(x)).$$

- (3)  $f$  ist folgenstetig, d.h. für alle  $x \in X$  gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

*Beweis:* Übungsaufgabe. □

Eine bijektive Abbildung zwischen topologischen Räumen  $f : X \rightarrow Y$  heißt **Homöomorphismus**, falls  $f$  und ihre Umkehrabbildung  $f^{-1}$  stetig sind (d.h. wenn  $U \subseteq X$  genau dann offen ist, wenn  $f(U) \subseteq Y$  offen ist). Die topologischen Räume  $X$  und  $Y$  heißen **homöomorph**, falls es einen Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  gibt (Notation:  $X \simeq Y$ ).

Homöomorphismen spielen in der Topologie die gleiche Rolle wie Vektorraum-Isomorphismen in der Linearen Algebra: Wenn  $X$  und  $Y$  homöomorph sind, gelten alle topologischen Eigenschaften von  $X$  (die ja via offene Mengen definiert sind) entsprechend auch für  $Y$  und umgekehrt.

### 3.4.1 Beispiele von Homöomorphismen

- (1) Verifizieren Sie: Die identische Abbildung ist ein Homöomorphismus, die Komposition von Homöomorphismen ist ein Homöomorphismus, die Inverse Abbildung

eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus. Die Homöomorphismen eines topologischen Raumes  $X$  bilden also eine Gruppe,  $\text{Homöo}(X)$ ; diese wiederum ist eine Untergruppe der Gruppe aller bijektiven Selbstabbildungen  $\text{Sym}(X)$  von  $X$ .

(2) Alle abgeschlossenen Intervalle (mit Standard-Topologie) sind homöomorph:

$$[0, 1] \simeq [a, b] \quad \text{für alle } a < b \in \mathbb{R};$$

ebenso alle offenen Intervalle:  $(0, 1) \simeq (a, b)$ : ein Homöomorphismus ist gegeben durch die affine Abbildung  $f(t) = a + t(b - a)$  (vgl. FIG. 18).

(3) Ganz  $\mathbb{R}$  ist homöomorph (bzgl. Standard-Topologie) zu einem offenen Intervall

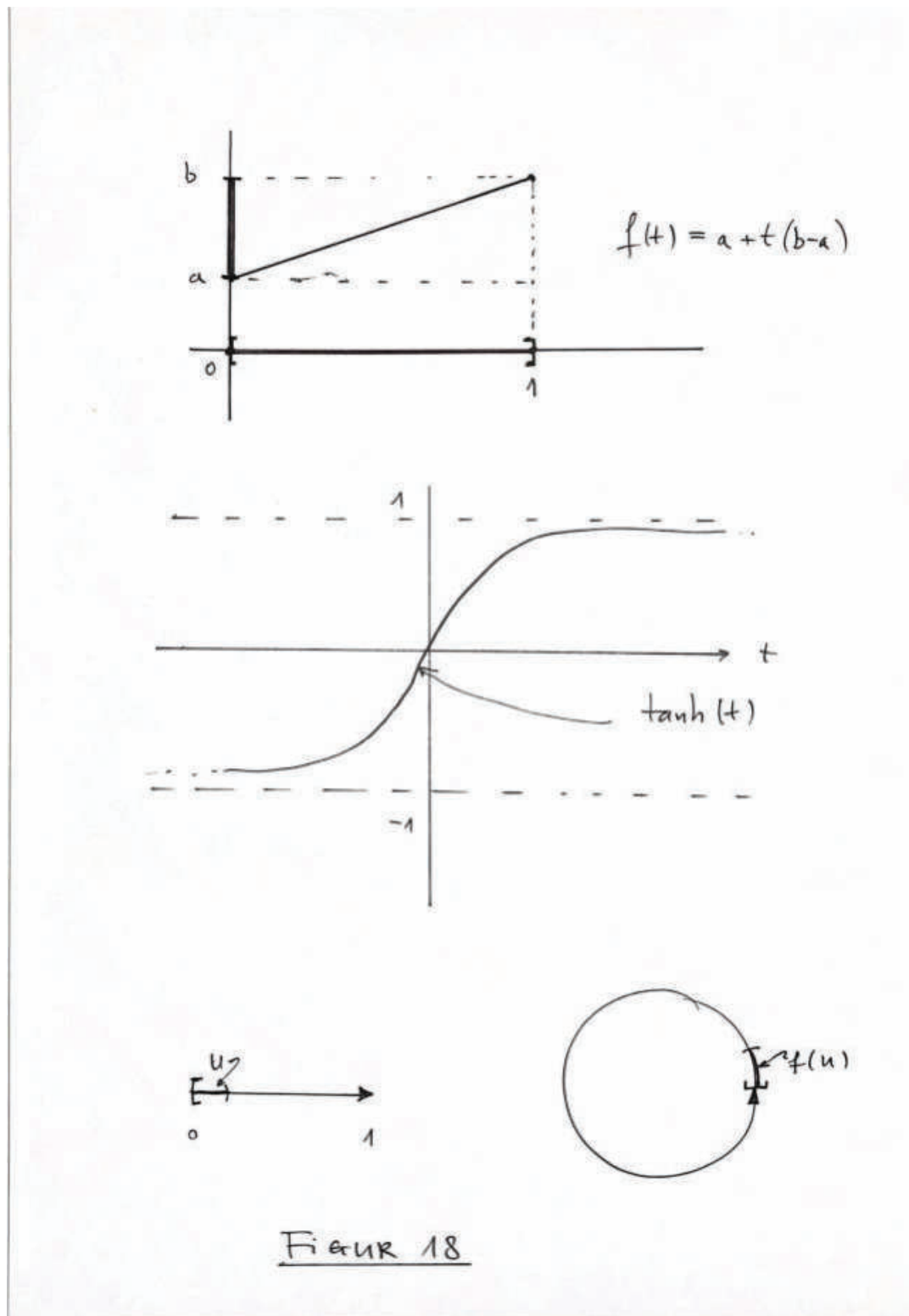
$$\mathbb{R} \simeq (-1, 1) \simeq (0, 1).$$

Ein Homöomorphismus ist (z.B.) gegeben durch den Tangens-Hyperbolicus

$$\mathbb{R} \rightarrow (-1, 1); \quad t \mapsto \tanh(t) := \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

(vgl. FIG. 18). Verifizieren Sie, dass  $\tanh$  ein Homöomorphismus ist, d.h. bijektiv, stetig und mit stetiger Umkehrabbildung. Was ist die Umkehrabbildung?

(4) Die Abbildung  $f : [0, 1) \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ;  $t \mapsto e^{2\pi i t} := \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$  ist injektiv und stetig, aber KEIN Homöomorphismus (vgl. FIG. 18). Wieso?



(5) Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Isometrie (d.h.  $f$  ist bijektiv und es gilt für alle  $x, y \in X$ , dass  $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ ). Dann ist  $f$  ein Homöomorphismus: Zu zeigen ist, dass sowohl  $f$  als auch die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  stetig sind. Wähle also ein (beliebiges)  $\delta > 0$  und setze  $\varepsilon := \delta$ . Dann gilt:

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) < \delta = \varepsilon$$

und analog für  $f^{-1}$ .

**Bemerkung:** Alle Isometrien  $f : X \rightarrow X$  bilden eine Untergruppe der Gruppe aller Homöomorphismen:  $\text{Iso}(X) \subseteq \text{Homöo}(X) \subset \text{Sym}(X)$ .

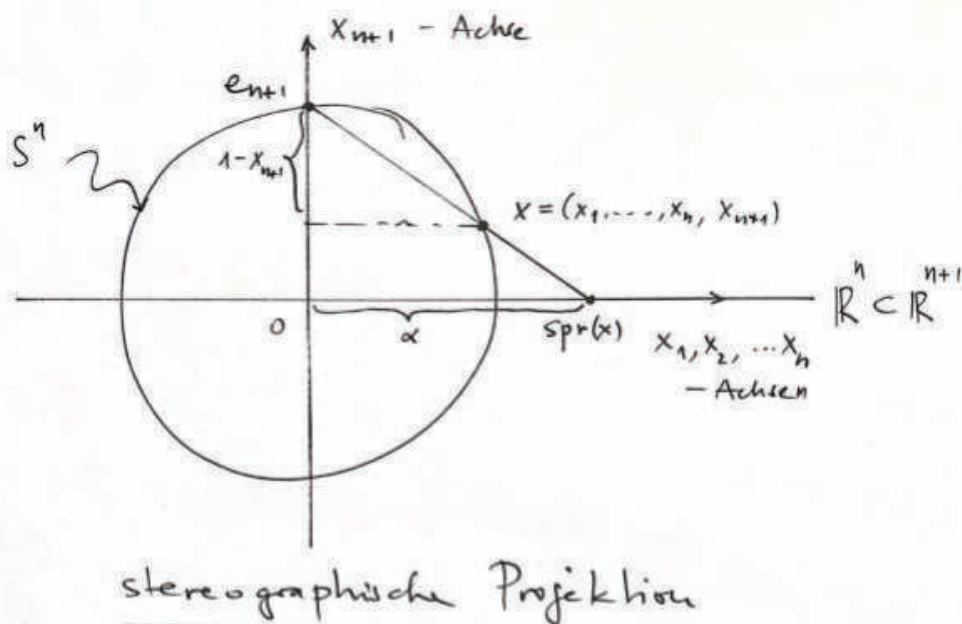
(6) Es sei  $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  die  **$n$ -dimensionale Sphäre** vom Radius 1. Weiter sei  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in S^{n+1}$  der „Nordpol“.

**Behauptung:**  $S^n$  ohne den Nordpol ist homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ :  $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \simeq \mathbb{R}^n$ .

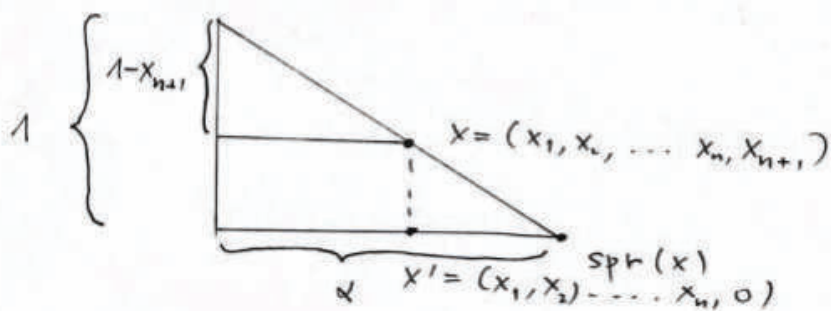
*Beweis:* Wir identifizieren  $\mathbb{R}^n$  mit der Hyperebene  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und benutzen die **stereographische Projektion**

$$\text{spr} : S^n \setminus \{e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \text{spr}(x) := \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

(vg. FIG. 19) Diese Abbildung ist stetig (wieso?).



Formel benutzt ähnliche Dreiecke:  
(Strahlensatz)



$$x_i : 1 - x_{n+1} = \alpha : 1$$

FIGUR 19

**Übung:** Die stereographische Projektion ist auch bijektiv, und mit stetiger Umkehrabbildung

$$\text{spr}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{e_{n+1}\}; \quad \text{spr}^{-1}(y) = \left( \frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right).$$

□

### 3.4.2 Exkurs 1: Raumfüllende Kurven

**Eine Frage:** Wie kann man eine „Kurve“ wie in FIG. 20 mathematisch beschreiben? Eine mögliche („naive“) Definition wäre: „Eine Kurve ist das stetige Bild eines Intervalls“.

**Das Problem dabei:** Es gibt sogenannte „raumfüllende Kurven“ wie zum Beispiel die **Peano-Kurve**. Das ist eine stetige Abbildung vom Intervall  $I = [0, 1]$  auf das Einheitsquadrat  $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ , die surjektiv ist (vgl. FIG. 21)!

**Randbemerkung:** Die Peano-Kurve ist *nicht injektiv*, denn sonst hätte man eine stetige Bijektion von einem kompakten Raum auf einen Hausdorff-Raum, also einen Homöomorphismus (vgl. den späteren Abschnitt 3.6). Aber  $I$  und  $I^2$  sind nicht homöomorph (vgl. Abschnitt 3.5).

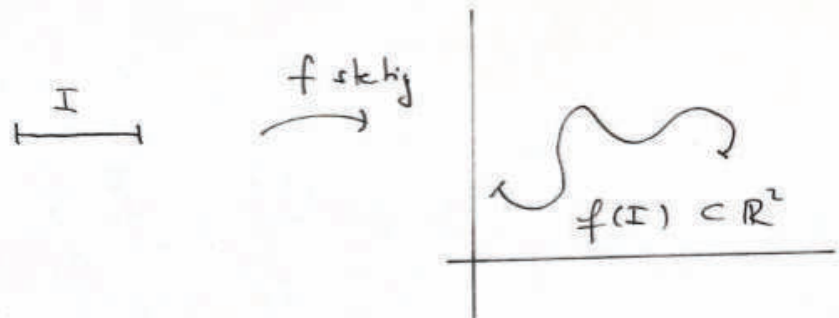
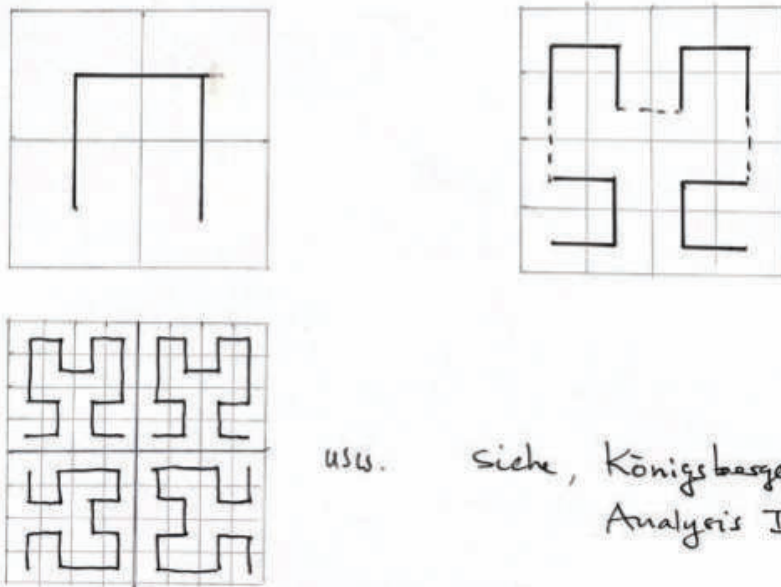
**Zwei Alternativen zur „naiven“ Definition:**

1. **Jordan-Kurven** sind stetige Abbildungen des Intervalls  $I = [0, 1]$  bzw. des Kreises  $S^1$  in den  $\mathbb{R}^n$ , so dass das Bild (versehen mit der Teilraum-Topologie) homöomorph ist zu  $I$  bzw.  $S^1$ .

**Knoten** sind geschlossene Jordan-Kurven mit Bild in  $\mathbb{R}^3$ , also stetige Abbildungen  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $f(S^1) \simeq S^1$ .

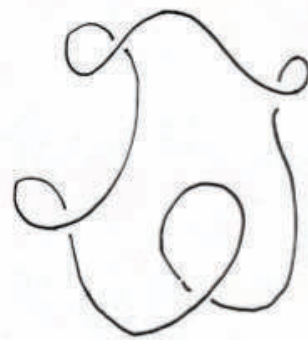
Die Bilder  $K$  und  $K*$  von zwei Knoten heißen äquivalent, falls es einen Homöomorphismus  $h$  von  $\mathbb{R}^3$  gibt mit  $K* = h(K)$ . Die Frage, ob zwei gegebene Knoten äquivalent sind oder nicht, ist i.a. schwierig zu beantworten und Gegenstand der **Knoten-Theorie** (vgl. FIG. 22). Eine gute Einführung ist: A. Sossinsky, Mathematik der Knoten, rororo-TB.

2. **Reguläre Kurven** sind differenzierbare Abbildungen  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $t \mapsto c(t)$ , so dass  $c'(t) = \frac{dc}{dt} \neq 0$ . Eine reguläre Kurve hat in jedem Punkt eine wohldefinierte „Tangente“. Solche Kurven werden wir in einem späteren Abschnitt noch ausführlicher betrachten.

FIGUR 20

usw. siehe, Königsberger:  
Analysis I.

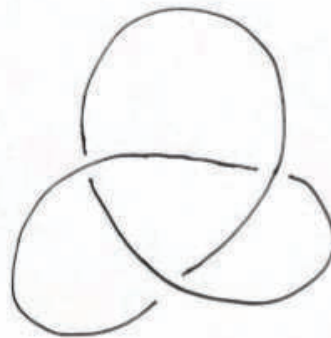
FIGUR 21 : Peano-Kurve



12



triviale Knoten

 $\neq$ 

Kleeblatt-Knoten (nicht trivial)

FIGUR 22



### 3.4.3 Exkurs 2: Topologische Gruppen

Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe  $G$  versehen mit einer Topologie, so dass die Gruppen-Multiplikation

$$m : G \times G \rightarrow G; \quad (g, h) \mapsto g \cdot h$$

und die Inversen-Abbildung

$$i : G \rightarrow G; \quad g \mapsto g^{-1}$$

*stetig* sind.

Die algebraische und die topologische Struktur auf der Menge  $G$  sollen also „verträglich“ sein.

#### Beispiele

- (1) Eine beliebige (abstrakte) Gruppe versehen mit der diskreten Topologie ist eine topologische Gruppe, denn bezüglich der diskreten Topologie ist jede Abbildung stetig.
- (2) Die additive Gruppe  $(\mathbb{R}^n, +)$  versehen mit der Standard-Topologie ist eine (abelsche) topologische Gruppe.
- (3) Die multiplikativen Gruppen der reellen bzw. komplexen Zahlen,  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  bzw.  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ , versehen mit der Standard-Topologie sind topologische Gruppen.
- (4) Ist  $G$  eine topologische Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe, so ist  $H$  versehen mit der Teilraum-Topologie auch eine topologische Gruppe.
- (5) Das Produkt von zwei topologischen Gruppen ist eine topologische Gruppe.
- (6) Die **allgemeine lineare Gruppe**  $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  mit der Teilraum-Topologie ist eine topologische Gruppe: mit den expliziten Formeln aus der Linearen Algebra rechnet man nach, dass die Matrizenmultiplikation, die Determinanten-Abbildung und die Inversen-Abbildung alle stetig sind.
- (7) Die **orthogonale Gruppe**  $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^\top = A^{-1}\}$  ist nach (4) und (6) eine topologische Gruppe.

## 3.5 Zusammenhang

Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O})$  ist **zusammenhängend**, falls  $X$  und  $\emptyset$  die einzigen sowohl offenen als auch abgeschlossenen Teilmengen sind. Eine Teilmenge

$A \subset X$  heißt **zusammenhängend**, falls sie bezüglich der Teilraum-Topologie zusammenhängend ist.

### Lemma 1

*Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $X$  nicht disjunkte Vereinigung von zwei offenen, nichtleeren Teilmengen ist.*

*Beweis.* Das Lemma folgt mit folgender Beobachtung direkt aus der Definition: Eine Teilmenge  $A \subset X$  ist offen und abgeschlossen, genau dann wenn  $A$  und das Komplement  $X \setminus A$  offen ist.  $\square$

### Satz 2

*Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  mit der Standard-Topologie und auch alle Intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  sind zusammenhängend.*

*Beweis.* Angenommen,  $I$  ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es eine offene und abgeschlossene Teilmenge  $U$  von  $I$ , so dass  $U \neq \emptyset$  und  $U \neq I$ . Also gibt es mindestens einen Punkt  $u \in U$  und einen Punkt  $v \in I \setminus U$ . Ohne Einschränkung sei  $u < v$ . Wir setzen  $U_0 := \{x \in U \mid x < v\}$  und  $c := \sup U_0$ . Dann ist  $u \leq c \leq v$ . Weiter ist  $c \in U$ , da  $U$  abgeschlossen ist; insbesondere also  $c < v$ . Da  $U$  auch offen ist, gehört eine ganze Umgebung von  $c$  auch zu  $U$ . Da  $c < v$  gehört auch eine ganze Umgebung von  $c$  zu  $U_0$ . Das ist ein Widerspruch zur Definition des Supremums. Also war die Annahme falsch und  $I$  ist zusammenhängend.  $\square$

### Lemma 2

- (a) *Ist  $A \subset X$  zusammenhängend, so auch die abgeschlossene Hülle  $\overline{A}$ .*
- (b) *Sind  $A \subset X$  und  $B \subset X$  zusammenhängend und  $A \cap B \neq \emptyset$ , so ist  $A \cup B$  zusammenhängend.*
- (c) *Ist  $\{A_i \subset X \mid i \in I\}$  eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen von  $X$  mit nichtleerem Durchschnitt, so ist auch die Vereinigung  $\bigcup_{i \in I} A_i$  zusammenhängend.*

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Die **Zusammenhangskomponente** von  $x$  ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von  $X$ , die  $x$  enthalten.

### Satz 3

*Die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes  $X$  sind zusammenhängend und bilden eine disjunkte Zerlegung von  $X$ .*

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt aus Lemma 2(c).

Für die zweite Behauptung benutzen die folgende nützliche Tatsache: Ist auf einer

Menge  $X$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$  gegeben, so zerfällt  $X$  in disjunkte Äquivalenzklassen (mit andern Worten: die Äquivalenzklassen bilden eine Partition von  $X$ ).

Um die Behauptung zu beweisen, definieren wir jetzt eine Äquivalenzrelation auf dem topologischen Raum  $X$ :

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \text{ zusammenhängende Teilmenge } A \subset X, \text{ die } x \text{ und } y \text{ enthält.}$$

Wir überlegen zuerst, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist:

$x \sim x$  gilt, da ein-punktige Mengen zusammenhängend sind (man kann also  $A = \{x\}$  nehmen).

$x \sim y \implies y \sim x$  gilt nach Definition.

Gilt  $x \sim y$  und  $y \sim z$ , so ist zu zeigen, dass  $x \sim z$ : Nach Definition existiert eine zusammenhängende Menge  $A$  mit  $x, y \in A$  und eine zusammenhängende Menge  $B$  mit  $y, z \in B$ . Also  $y \in A \cap B$ , so dass nach Lemma 2(b)  $A \cup B$  zusammenhängend ist. Da  $x, z \in A \cup B$ , folgt  $x \sim z$ .

Schließlich folgt direkt aus den Definitionen, dass die Äquivalenzklasse von  $x \in X$  bezüglich  $\sim$  gerade die Zusammenhangskomponente von  $x$  ist.  $\square$

**Beispiel/Übung:**  $GL(n, \mathbb{R})$  ist disjunkte Vereinigung von zwei Zusammenhangskomponenten (gegeben durch  $\det > 0$  und  $\det < 0$ ).

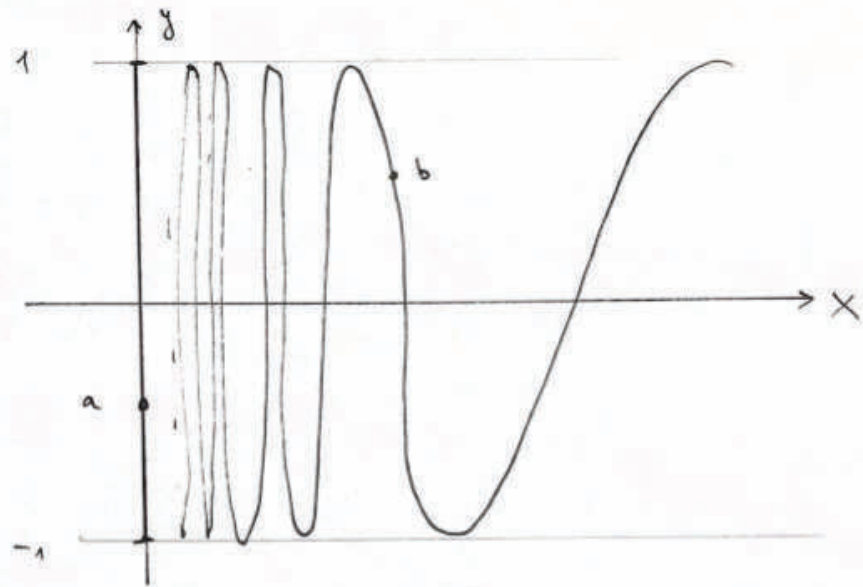
Ein topologischer Raum  $X$  heißt **weg-zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten  $p, q \in X$  einen **Weg** zwischen  $p$  und  $q$  gibt, d.h. eine stetige Abbildung  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha(1) = q$ .

**Bemerkung:**  $X$  weg-zusammenhängend  $\implies X$  zusammenhängend:

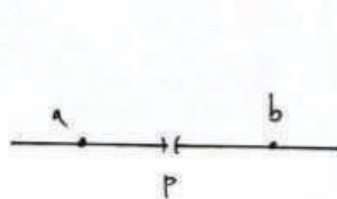
Beweis durch Widerspruch: Angenommen,  $X$  ist nicht zusammenhängend. Dann existiert nach Definition eine Zerlegung  $X = A \cup B$  in disjunkte, offene und nichtleere Teilmengen  $A$  und  $B$ . Wir wählen einen Punkt  $p \in A$  und einen Punkt  $q \in B$ . Da  $X$  weg-zusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $\alpha$  zwischen  $p$  und  $q$ . Es ist dann  $[0, 1] = \alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B)$  eine Zerlegung des Intervalls  $[0, 1]$  in disjunkte, nichtleere und offene ( $\alpha$  ist stetig!) Teilmengen. Also wäre  $[0, 1]$  nicht zusammenhängend. Ein Widerspruch, da alle Intervalle zusammenhängend sind.

Die Umkehrung ist falsch:  $X$  zusammenhängend  $\not\implies X$  weg-zusammenhängend.

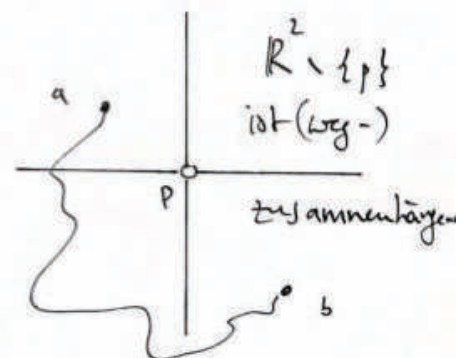
Das Standard-Beispiel dazu ist die Menge  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < 1\}$  mit der Teilraum-Topologie von  $\mathbb{R}^2$  (vgl. FIG. 23). Einzelheiten und einen Beweis findet man in: Singer/Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer 1967, Seite 52.



FIGUR 23 : Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ , die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist:  
 $\nexists$  Weg zwischen a und b.



$\mathbb{R} \setminus \{p\}$  ist  
nicht zusammenhängend



FIGUR 24

**Satz 4 (Zusammenhang=topologische Invariante)**

*Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind (weg-)zusammenhängend. Insbesondere sind zwei homöomorphe topologische Räume entweder beide zusammenhängend oder beide nicht zusammenhängend.*

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Angenommen,  $X$  ist zusammenhängend und das Bild  $f(X)$  ist nicht zusammenhängend. Dann existiert eine disjunkte Zerlegung  $f(X) = A \cup B$  in offene, nicht-leere Teilmengen  $A, B$ . Dann ist aber  $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  eine disjunkte Zerlegung von  $X$  in offene, nichtleere Teilmengen. Ein Widerspruch dazu, dass  $X$  zusammenhängend ist.

Seien jetzt  $X$  weg-zusammenhängend und  $p = f(x)$  sowie  $q = f(y)$  zwei (beliebige) Punkte im Bild  $f(X)$ . Da  $X$  weg-zusammenhängend ist, existiert ein Weg  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\alpha(0) = x$  und  $\alpha(1) = y$ . Das Bild dieses Weges unter der stetigen Abbildung  $f$  ist ein Weg in  $f(X)$ , der  $p$  mit  $q$  verbindet, also eine stetige Abbildung  $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow f(X) \subset Y$  mit  $f \circ \alpha(0) = f(x) = p$  und  $f \circ \alpha(1) = f(y) = q$ .  $\square$

**Spezialfall: Zwischenwertsatz** *Eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  (mindestens einmal) an.*

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

Die topologische Invariante „Zusammenhang“ kann man manchmal benutzen, um zu testen, ob zwei Räume homöomorph sind.

**Beispiel:**  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^n$  sind homöomorph genau dann, wenn  $n = 1$ . Ebenso  $I = [0, 1] \simeq I^n \implies n = 1$ .

Beweis: Gilt  $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ , so auch  $\mathbb{R} \setminus \{\text{Punkt}\} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}$ . Nun ist aber  $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}$  genau dann nicht zusammenhängend, wenn  $n = 1$  (vgl.FIG.24).

**Bemerkung:** Allgemeiner gilt der **Satz von Brouwer**:

$\mathbb{R}^m$  und  $\mathbb{R}^n$  sind genau dann homöomorph, wenn  $m = n$ .

Der Beweis ist eine Konsequenz des **Satzes von der Gebietstreue** (vgl. Alexandrov/Hopf, Topologie, Springer 1935, Kap. X.2.):

*Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine injektive, stetige Abbildung, so ist  $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  auch offen.*

Den Satz von Brouwer kann man jetzt so beweisen: Es sei  $m < n$ . Dann ist die Einbettung von  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{R}^n$  gegeben durch  $(x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$  eine injektive, stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^m$  auf eine *nicht* offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Wäre nun  $\mathbb{R}^m$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , so hätte man einen Widerspruch zum Satz von der Gebietstreue.

## 3.6 Kompaktheit

Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt, d.h.

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i, \text{ } U_i \text{ offen in } X \implies \exists i_1, \dots, i_k \in I, \text{ so dass } X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Eine **Teilmenge**  $A \subset X$  heißt **kompakt**, wenn  $A$  kompakt ist bezüglich der Teilraum-Topologie. Ein topologischer Raum  $X$  heißt **lokal kompakt**, wenn jeder Punkt aus  $X$  eine kompakte Umgebung hat.

**Bemerkung/Satz:** „Kompaktheit“ ist eine Endlichkeits-Eigenschaft. Deshalb sind kompakte Räume oft „einfacher“ als nicht kompakte. So kann man etwa von „lokalen“ auf „globale“ Eigenschaften schließen. Hier ist eine Illustration dazu:

*Sei  $X$  kompakt und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  lokal beschränkt (d.h. jeder Punkt  $x \in X$  hat eine (offene) Umgebung  $U_x$ , so dass  $f$  dort beschränkt ist:  $f(y) \leq C_x$  für alle  $y \in U_x$ ). Dann ist  $f$  (global) beschränkt auf  $X$ : es gibt eine Konstante  $C$ , so dass  $f(x) \leq C$  für alle  $x \in X$ .*

Beweis: Die Umgebungen *aller* Punkte von  $X$  bilden eine offene Überdeckung:  $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ . Da  $X$  kompakt ist, wird  $X$  schon von endlich vielen dieser Umgebungen überdeckt:  $X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$ . Für ein beliebiges  $x \in X$  gibt es also ein  $U_{x_k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , so dass  $x \in U_{x_k}$  und somit  $f(x) \leq C_{x_k} \leq \max\{C_{x_1}, C_{x_2}, \dots, C_{x_n}\} =: C$ .  $\square$

**Anwendung:** Stetige Funktionen auf kompakten Räumen sind lokal beschränkt (wieso?), also beschränkt.

**Einfaches Beispiel:** Das (abgeschlossene) Intervall  $[0, 1]$  ist kompakt. Da jedes abgeschlossene Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  homöomorph zu  $[0, 1]$  ist, folgt, dass jedes abgeschlossene Intervall kompakt ist.

*Beweis:* Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $[0, 1]$ . Dann existiert eine sogenannte *Lebesgue-Zahl*  $\delta > 0$ , so dass jedes Teilintervall  $I_\delta \subset [0, 1]$  der Länge  $\delta$  in einem  $U_i$  liegt. Da man  $[0, 1]$  mit endlich vielen Intervallen der Länge  $\delta$  überdecken kann, kann man das auch mit endlich vielen der  $U_i$ .  $\square$

Ergänzung zur Lebesgue-Zahl: Angenommen ein solches  $\delta > 0$  gibt es nicht. Dann wählt man eine Folge von Intervallen  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n \subset [0, 1]$  der Länge  $\frac{1}{n}$ , die jeweils in keiner Überdeckungsmenge liegen. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß („Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{C}$  hat eine konvergente Teilfolge.“) folgt: Eine Teilfolge der Mittelpunkte  $m_n$  der  $I_n$  konvergiert gegen ein  $t \in [0, 1]$ . Dieses  $t$  liegt aber in einem der  $U_i$ . Also, da  $U_i$  offen ist, auch die  $m_n$  für  $n$  genügend gross. Ein Widerspruch!

**Bemerkung:** Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  mit der Standard-Topologie sind nicht kompakt (wieso?). Da aber jeder Punkt von  $\mathbb{R}$  in einem abgeschlossenen Teilintervall liegt, ist  $\mathbb{R}$  lokal kompakt.

### Satz 5

- (1) *Stetige Bilder von kompakten Räumen sind kompakt.*
- (2) *Falls  $X$  und  $Y$  homöomorph sind, so ist  $X$  genau dann kompakt, wenn  $Y$  kompakt ist (d.h. „Kompaktheit“ ist eine topologische Invariante).*
- (3) *Abgeschlossene Teilräume von kompakten Räumen sind kompakt.*
- (4) *Produkte von kompakten Räumen sind kompakt (Satz von Tychonoff).*

*Beweis:* (1): Sei  $f$  stetig und  $X$  kompakt. Weiter sei  $f(X) = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung der Bildmenge. Dann ist  $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Da  $X$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung:  $X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_k})$ . Dann ist aber auch  $f(X) = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$ .

(2) folgt aus (1).

(3) Sei  $X$  kompakt,  $A \subset X$  abgeschlossen und  $A = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Nach Definition der Teilraum-Topologie ist jedes  $U_i$  von der Form  $U_i = A \cap V_i$  für  $V_i$  offen in  $X$ . Da  $A$  abgeschlossen ist, ist das Komplement  $X \setminus A$  offen. Damit erhalten wir eine offene Überdeckung von  $X$ :

$$X = (X \setminus A) \cup A = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Da  $X$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $X = (X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}$ . Daraus erhalten wir auch eine endliche Teilüberdeckung von  $A$ :

$$A = X \cap A = A \cap (V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}) = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}.$$

(4) beweisen wir hier nur für zwei Faktoren. Mit Induktion folgt die Aussage dann auch für endlich viele Faktoren (wieso?). Der allgemeine Beweis (für beliebig viele Faktoren) benutzt sogenannte Ultrafilter und das Zornsche Lemma (vgl. K. Jänich, Topologie, Springer 1980).

Seien also  $X$  und  $Y$  kompakte topologische Räume. Behauptung: Das topologische Produkt  $X \times Y$  ist auch kompakt. Wir betrachten dazu eine offene Überdeckung  $X \times Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ . Für jeden Punkt  $(x, y) \in X \times Y$  existiert dann ein Index  $\lambda(x, y)$ , so dass  $(x, y) \in W_{\lambda(x, y)}$ . Da  $W_{\lambda(x, y)}$  offen ist, gibt es (nach Definition der Produkt-Topologie) eine offene Menge  $U_{(x, y)} \subset X$  und eine offene Menge  $V_{(x, y)} \subset Y$  mit  $(x, y) \in U_{(x, y)} \times V_{(x, y)} \subseteq W_{\lambda(x, y)}$ .

Für festes  $x$  ist  $\bigcup_{y \in Y} V_{(x, y)}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ . Da  $Y$  kompakt ist,



existiert eine endliche Teilüberdeckung, d.h. Punkte  $y_1(x), \dots, y_{m_x}(x)$ , so dass  $Y = V_{(x,y_1(x))} \cup \dots \cup V_{(x,y_{m_x}(x))}$ .

Wir setzen nun  $U_x := U_{(x,y_1(x))} \cap \dots \cap U_{(x,y_{m_x}(x))}$ . Da  $X$  kompakt ist, gibt es (mit dem gleichen Argument wie gerade) endlich viele Punkte  $x_1, \dots, x_n$ , so dass  $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$  eine endliche Teilüberdeckung von  $X$  ist. Damit erhalten wir schließlich eine endliche Teilüberdeckung des Produktes, nämlich

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{k=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m_{x_k}}} W_{\lambda(x_k, y_j(x_k))}.$$

□

### Weitere Beispiele als Anwendung von Satz 5:

1. Der  $n$ -dimensionale **Einheits-Würfel** ist das Produkt  $[0, 1]^n = [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^n$  mit  $n$  Faktoren.  $[0, 1]^n$  ist kompakt, da abgeschlossene Intervalle kompakt sind und Produkte von kompakten Räumen kompakt sind (vgl. FIG. 25). Da ein beliebiges abgeschlossenes Intervall  $[a, b]$  homöomorph zu  $[0, 1]$  (vgl. Abschnitt 3.4.1.) sind auch beliebige  $n$ -dimensionale **Würfel** der Form  $[a, b]^n \subset \mathbb{R}^n$  kompakt.

2. Abgeschlossene Teilräume von  $n$ -dimensionalen Würfeln sind kompakt. Insbesondere sind also alle abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen kompakt. Dabei ist eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  **beschränkt**, falls eine Konstante  $C \geq 0$  existiert, so dass  $\|x\| \leq C$  für alle  $x \in M$  (oder, mit anderen Worten, falls  $M$  im abgeschlossenen Ball  $\overline{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^n$  vom Radius  $C$  und Zentrum 0 liegt) (vgl. FIG. 26).

3. Die Umkehrung gilt auch. Das ist der **Satz von Heine-Borel**: *Die kompakten Teilräume von  $\mathbb{R}^n$  (mit Standard-Topologie) sind genau die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen.*

*Beweis:* Dass abgeschlossene, beschränkte Teilmengen kompakt sind, ist die Aussage von Beispiel 2. Sei umgekehrt  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Die Norm

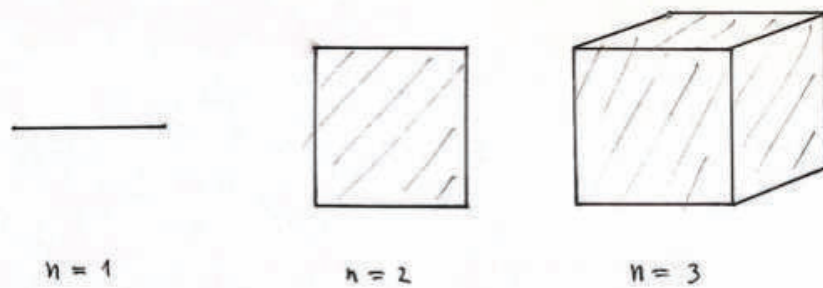
$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = d_e(0, x)$$

misst den Abstand von  $x$  zum Ursprung 0 und ist somit eine stetige Funktion (zeigen Sie das!). Da  $K$  kompakt ist, ist die stetige Funktion  $\|\cdot\|$  auf  $K$  beschränkt (vgl. die Bemerkung lokal beschränkt/global beschränkt) und somit  $K$  beschränkt (vgl. FIG. 27).

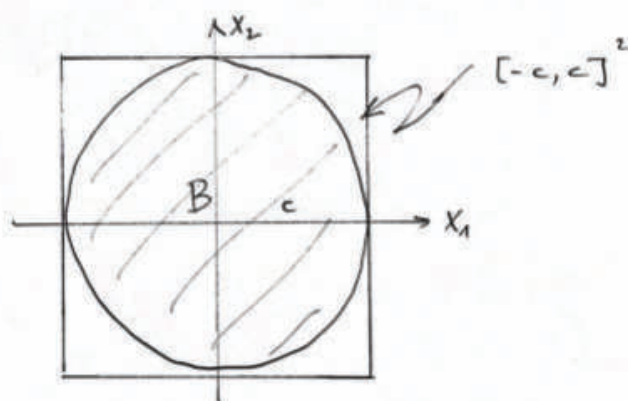
Wir müssen noch zeigen, dass  $K$  abgeschlossen ist. Das folgt aber direkt aus dem nächsten Lemma, da  $\mathbb{R}^n$  bezüglich der Standard-Topologie Hausdorffsch ist (wieso?).

□





FIGUR 25 : n-Würfel

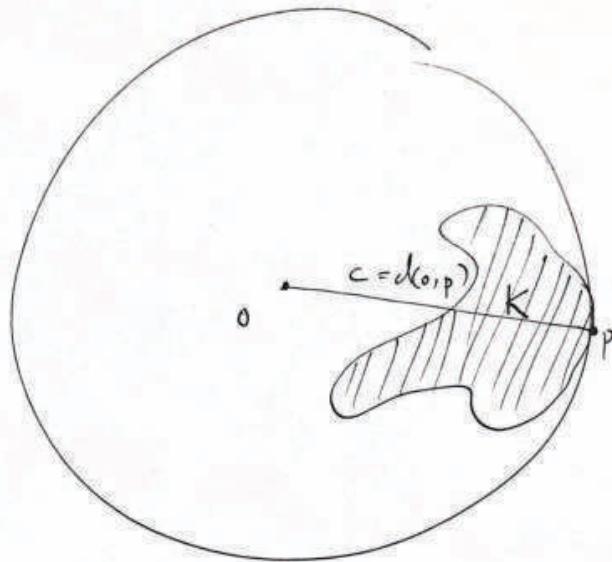
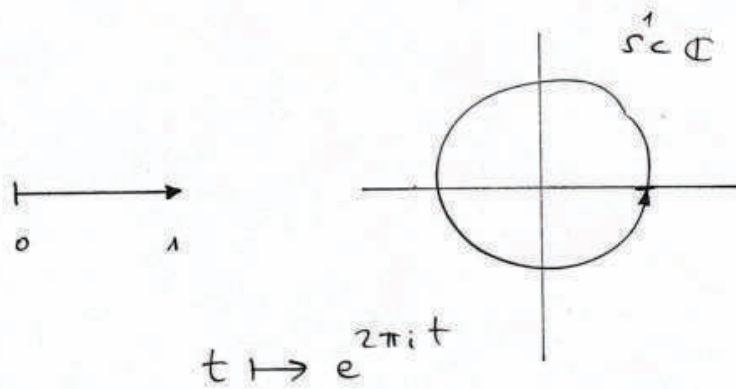


$$B = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq c \}$$

$$x_i^2 \leq x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2 \leq c^2 \Rightarrow |x_i| \leq c \quad (i=1,2)$$

$$\Rightarrow B \subset [-c, c]^2$$

FIGUR 26

FIGUR 27FIGUR 28

**Lemma 3** *Sei  $X$  ein Hausdorffscher topologischer Raum und  $K \subset X$  kompakt. Dann ist  $K$  abgeschlossen.*

*Beweis:* Wir zeigen, dass das Komplement  $X \setminus K$  offen ist. Sei also  $x_0 \in X \setminus K$ . Für ein beliebiges  $x \in K$  gilt also  $x \neq x_0$ . Da  $X$  Hausdorffsch ist, können wir also für jedes  $x \in K$  offene Umgebungen  $U_x$  von  $x_0$  und  $V_x$  von  $x$  wählen, so dass  $U_x \cap V_x = \emptyset$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$  mit  $K = (V_{x_1} \cap K) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap K)$ . Die Menge  $U := U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$  ist offen in  $X$  (wieso?) und es gilt

$$U \cap K \subset U \cap (V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}) = (V_{x_1} \cap U) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap U) \subset (V_{x_1} \cap U_{x_1}) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap U_{x_n}) = \emptyset,$$

d.h.  $x_0 \in U \subset X \setminus K$ . Da der Punkt  $x_0$  beliebig war, ist die Teilmenge  $X \setminus K$  offen in  $X$ .  $\square$

**Korollar** *Jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge eines topologischen Raumes hat ein endliches Maximum und ein endliches Minimum.*

*Beweis:* Übungsaufgabe.  $\square$

**Eine Bemerkung und ein Satz:** Eine stetige, bijektive Abbildung ist im allgemeinen kein Homöomorphismus. Zum Beispiel ist die Abbildung

$$f : [0, 1) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 1\} \rightarrow S^1; t \mapsto f(t) := e^{2\pi i t}$$

bijektiv und stetig (vgl. FIG. 28 und auch FIG. 18).  $f$  kann aber kein Homöomorphismus sein. Denn das halboffene Intervall  $[0, 1)$  ist nicht abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ , also nach Heine-Borel *nicht* kompakt. Hingegen ist der Einheitskreis  $S^1$  kompakt (wieso?). Da „Kompaktheit“ eine topologische Invariante ist (Satz 5(2)), können  $[0, 1)$  und  $S^1$  nicht homöomorph sein.

Es gilt aber der

**Satz 6** *Eine stetige, bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von einem kompakten Raum  $X$  auf einen Hausdorff-Raum  $Y$  ist ein Homöomorphismus.*

*Beweis:* Zu zeigen ist, dass die Umkehr-Abbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  stetig ist. Das ist äquivalent zur Aussage, dass Bilder von offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen unter  $f$  offen (bzw. abgeschlossen) sind (wieso?).

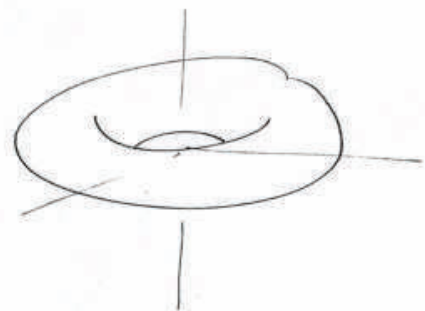
Sei also  $A \subseteq X$  eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes  $X$ . Dann ist  $A$  kompakt (nach Satz 5(3)). Also ist  $f(A)$  kompakt (nach Satz 5(1)) und da  $Y$  Hausdorffsch abgeschlossen in  $Y$  (nach Lemma 3).  $\square$

## 4 Spezielle Klassen von topologischen Räumen

In diesem Kapitel stellen wir vier Klassen von topologischen Räumen vor, die in verschiedenen Gebieten der Mathematik (und Physik) eine grundlegende Rolle spielen.

- **Metrische Räume** haben wir in Kapitel 2 schon kennengelernt.
- **Topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeiten** werden (im Kleinen) durch eine gewisse feste Anzahl von Parametern (also reellen Zahlen) beschrieben. Sie haben genügend Struktur, um die Konzepte der Analysis (z.B. differenzierbare Abbildungen ) verallgemeinern zu können. Sie bilden die Grundobjekte in der Differentialgeometrie aber auch in vielen Gebieten der Physik wie z.B. der allgemeinen Relativitätstheorie (vgl. FIG. 29).
- **Simplizialkomplexe** sind Räume die aus Intervallen, Dreiecken, Tetraedern und deren höherdimensionalen Verallgemeinerungen, den Simplizes, aufgebaut sind (vgl. FIG. 30). Sie können mit kombinatorischen Methoden untersucht werden (z.B. kann man topologische Invarianten wie die Euler-Charakteristik durch „Zählen“ bestimmen). Diese Objekte sind grundlegend z.B. in der algebraischen Topologie, der diskreten Geometrie und der Kombinatorik.
- **Quotienten-Räume** erhält man z.B. durch „Verkleben“ oder als Bahnen-Räume von Gruppenwirkungen. Sie spielen eine wichtige Rolle etwa in der Differentialgeometrie und der geometrischen Gruppentheorie.

Flächen = 2-dim. Mannigfaltigkeiten  
in  $\mathbb{R}^3$



Phasenraum (= möglicher Ort u. Geschwindigkeit)  
von  $n$  Teilchen in  $\mathbb{R}^3 \cong (\mathbb{R}^3)^n \times (\mathbb{R}^3)^n = \mathbb{R}^{6n}$

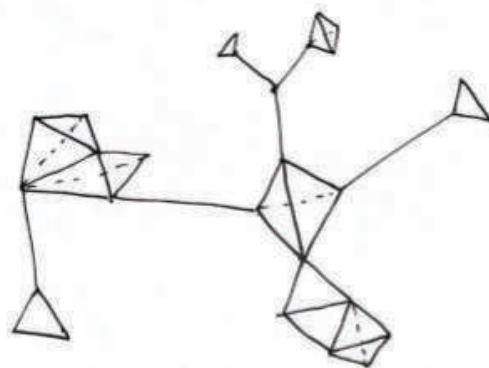


Konfigurationsraum eines Roboter-Arms  
(= alle möglichen Positionen = alle möglichen  
 $(\alpha, \beta, \gamma)$  mit  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$ )



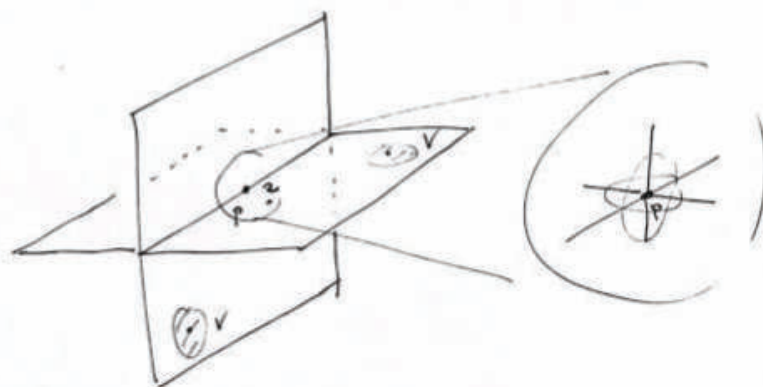
$$\cong S^1 \times S^1 \times S^1 = T^3 \text{ (3-Torus)}$$

FIGUR 29



Simplizial-Komplex

FIGUR 30



keine Mannigfaltigkeit  
(nicht überall homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ )

FIGUR 31

## 4.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

Kurz gesagt ist eine Mannigfaltigkeit ein topologischer Raum, der „lokal wie ein  $\mathbb{R}^n$  aussieht“, also durch  $n$  reelle Parameter beschrieben werden kann, global aber eine ganz andere Gestalt hat. Die genaue Definition lautet wie folgt.

Eine (**topologische**) **Mannigfaltigkeit** ist ein topologischer Raum  $M$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $M$  ist **lokal euklidisch**, d.h. für alle Punkte  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  und ein Homöomorphismus  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  auf eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  für ein gewisses  $n$ .
- (2)  $M$  ist Hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis der Topologie.

Ein Paar  $(U, \varphi)$  wie in (1) heißt **Karte** und eine Menge  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$  von Karten mit  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$  heißt **Atlas** für  $M$ .

**Bemerkungen:** 1) Die Zahl  $n$  in obiger Definition heißt **Dimension** der Mannigfaltigkeit  $M$ . Sie ist (nach dem Satz von der Gebietstreue) eindeutig, wenn  $M$  zusammenhängend ist. Anstatt  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit sagen wir manchmal auch kurz  $n$ -Mannigfaltigkeit.

2) *Keine* Mannigfaltigkeit ist z.B. die Vereinigung von zwei sich schneidenden Ebenen. In den Schnittpunkten gibt es keine Umgebung die homöomorph ist zu  $\mathbb{R}^2$  (vgl. FIG. 31).

3) Die zweite Bedingung, also Hausdorffsch und abzählbare Basis, ist technischer Natur. Sie garantiert, dass auf  $M$  eine gewisse Familie von Funktionen, eine „Zerlegung der Eins“, existiert mit der man dann wiederum z.B. Riemannsche Metriken konstruieren kann (siehe Abschnitt 7.2).

### Beispiele.

1. Abzählbar viele Punkte versehen mit der diskreten Topologie bilden eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit.
2. Der Einheitskreis  $S^1$  ist eine kompakte zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  bilden eine nicht-kompakte zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.
3. Jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  (insbesondere  $\mathbb{R}^n$  selbst) ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (wieso?).
4. Allgemeiner gilt: Jede offene Teilmenge einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein wichtiger Spezialfall davon ist die allgemeine lineare Gruppe, d.h. die Gruppe aller invertierbaren  $(n \times n)$ -Matrizen mit

Matrizen-Multiplikation, die man also so schreiben kann:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Da die Determinante  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist, ist  $GL(n, \mathbb{R})$  nach obiger Gleichung offen in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  also eine  $(n \times n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

5. Die  $n$ -dimensionale Einheits-Sphäre,  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (analog auch die  $n$ -Sphäre  $S_R^n$  von beliebigem Radius  $R$ ):

Eine (lokale) Karte um den Punkt  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$  (mit  $x_i > 0$ ) ist gegeben durch die Orthogonal-Projektion auf die  $i$ -te Koordinaten-Ebene

$$K_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 0\} \simeq \mathbb{R}^n \quad (\text{vgl. FIG. 32}).$$

Genauer sind für  $i = 1, \dots, n+1$  die Abbildungen

$$\varphi_i^+ : U_i^+ = \{x \in S^n \mid x_i > 0\} \rightarrow \varphi_i^+(U_i^+) \subset K^i \quad \text{bzw.}$$

$$\varphi_i^- : U_i^- = \{x \in S^n \mid x_i < 0\} \rightarrow \varphi_i^-(U_i^-) \subset K^i$$

$2(n+1)$  Karten, die die Sphäre überdecken, also einen Atlas bilden. In der Tat sind diese Abbildungen stetig und injektiv. Weiter sind die Umkehrabbildungen von  $\varphi_i^+$  von der Form

$$(\varphi_i^+)^{-1} : \varphi_i^+(U_i^+) = \{x \in K_i \mid \|x\| < 1\} \rightarrow S^n;$$

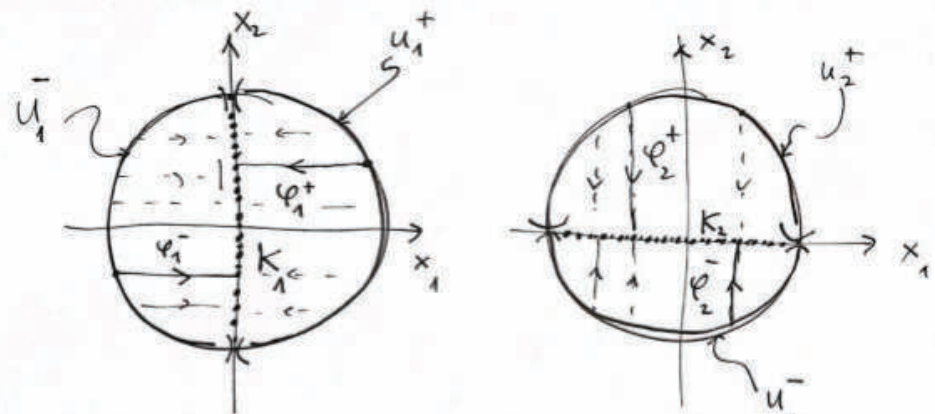
$$x \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2)}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in S^n$$

und somit auch stetig. Die  $\varphi_i^+$  (und analog auch die  $\varphi_i^-$ ) sind also Homöomorphismen.

6. Das (topologische) Produkt einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  mit einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $N$  ist eine  $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M \times N$ .

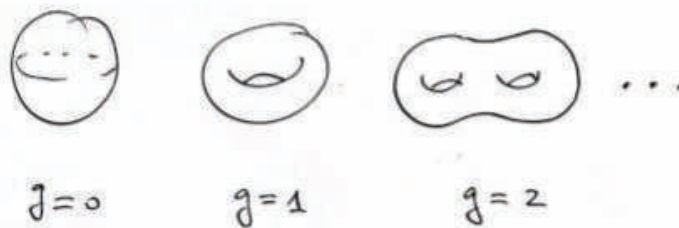
Ein Beispiel einer solchen Produkt-Mannigfaltigkeit ist der  **$n$ -dimensionale Torus**  $T^n := S^1 \times \dots \times S^1$  ( $n$  Faktoren).





4 Karten  $(u_1^+, \varphi_1^+)$ ,  $(u_1^-, \varphi_1^-)$ ,  $(u_2^+, \varphi_2^+)$ ,  $(u_2^-, \varphi_2^-)$   
für  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ .

FIGUR 32



FIGUR 33

**Bemerkungen:** Wieviele Mannigfaltigkeiten gibt es? Beispiele 1, 3 oder 6 zeigen: es gibt Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. Fixiert man die Dimension, so kann man Folgendes sagen:

Der Fall  $n = 1$  ist relativ einfach: Bis auf Homöomorphie gibt es nur 2 zusammenhängende 1-Mannigfaltigkeiten:  $\mathbb{R}$  und  $S^1$  (je nachdem, ob die Mannigfaltigkeit nicht-kompakt oder kompakt ist).

Die Dimension  $n = 2$  ist schwieriger. Mit zusätzlichen Bedingungen an die Mannigfaltigkeit kann man alle entsprechenden 2-Mannigfaltigkeiten auflisten. So sind z.B. die kompakten, „orientierbaren“ 2-Mannigfaltigkeiten (die sogenannten **geschlossenen Flächen**) bis auf Homöomorphie durch eine topologische Invariante mit Werten  $g = 0, 1, 2, \dots$  (das Geschlecht oder die Euler-Charakteristik, siehe später) charakterisiert (vgl. FIG. 33).

Die Dimension  $n = 3$  ist komplex und die Resultate sehr schwierig und tieflegend; aber auch hier gibt es letztlich eine Klassifikation. Darüber, wie solche Mannigfaltigkeiten aussehen könnten, hat Thurston in den 70-er Jahren Vermutungen aufgestellt, die 2002 von Perelman bewiesen wurden (letzterer bekam dafür die Fields-Medaille). Ein Teil-Problem, das dadurch gelöst wurde, war eine alte Vermutung von Poincaré von 1904: Eine „einfach zusammenhängende“, kompakte 3-Mannigfaltigkeit (ohne Rand) ist homöomorph zu  $S^3$ .

Für Dimensionen  $n \geq 4$  ist eine Klassifikation *unmöglich*. Das ergibt sich aus einem Satz von Markov von 1960: Das Homöomorphie-Problem (Sind zwei gegebene  $n$ -Mannigfaltigkeiten homöomorph?) ist für  $n \geq 4$  *nicht entscheidbar*.

## 4.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Wir stellen jetzt zusätzliche Bedingungen an topologische Mannigfaltigkeiten, die ermöglichen, dass man von „differenzierbaren Abbildungen“ zwischen Mannigfaltigkeiten sprechen kann.

Sei also  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit versehen mit einem Atlas  $\mathcal{A}$ . Weiter seien  $(U, \varphi)$  und  $(V, \psi)$  zwei Karten mit nichtleerem Durchschnitt und  $p \in D := U \cap V$ . Wir haben dann einen **Kartenwechsel**

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(D) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(D) \subset \mathbb{R}^n$$

(vgl. FIG. 34). Da die Kartenabbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  nach Definition Homöomorphismen sind, sind auch Kartenwechsel Homöomorphismen (zwischen offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ ).

Ein Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$  heißt  $C^\infty$ , falls alle möglichen Kartenwechsel

$C^\infty$ -Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sind, d.h. alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung existieren und sind stetig (vgl. Analysis 2).

Eine Karte  $(V, \psi)$  heißt **verträglich mit  $\mathcal{A}$** , falls für alle Kartengebiete  $U_i$  mit  $V \cap U_i \neq \emptyset$  der Kartenwechsel  $\psi \circ \varphi_i^{-1}$   $C^\infty$  ist. Wenn man jetzt einen gegebenen  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{A}$  dadurch vergrößert, dass man alle mit  $\mathcal{A}$  verträglichen Karten hinzufügt, so erhält man einen sogenannten **maximalen Atlas**. Ein maximaler Atlas heißt auch **differenzierbare Struktur**. Eine topologische Mannigfaltigkeit versehen mit einer differenzierbaren Struktur heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

**Bemerkungen:** 1) Nicht jede topologische Mannigfaltigkeit besitzt eine differenzierbare Struktur (das hat Kervaire 1960 gezeigt).

2) Ein Result von Kirby und Friedman von 1980 besagt, dass auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 4$ , genau eine differenzierbare Struktur existiert (das ist die Standard-Struktur, die man aus der Analysis kennt), während es auf  $\mathbb{R}^4$  viele differenzierbare Strukturen gibt.

3) Milnor hat 1956 bewiesen, dass es auf der 7-dimensionalen Sphäre  $S^7$  insgesamt 28 verschiedene differenzierbare Strukturen gibt.

Alle diese Sätze sind sehr tiefgründig. Das mathematische Gebiet, in dem man solche Fragen studiert, heißt Differentialtopologie.

Bevor wir zu Beispielen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kommen, will ich noch erklären, wozu die Bedingung an die Karten-Wechsel gut ist. Man braucht sie z.B. um differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten zu definieren (also den Begriff „differenzierbar“ von Abbildungen zwischen offenen Gebieten in euklidischen Räumen auf viel allgemeinere topologische Räume, eben die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, zu erweitern).

Seien also  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Dimension  $\dim M = m$  und  $\dim N = n$ . Eine stetige Abbildung  $F : M \rightarrow N$  heißt **differenzierbar in  $p \in M$** , falls für (Test-)Karten  $(U, \varphi)$  um den Punkt  $p \in M$  und  $(V, \tau)$  um den Bildpunkt  $F(p) \in N$  die „Koordinaten-Darstellung“ von  $F$  bei  $p$

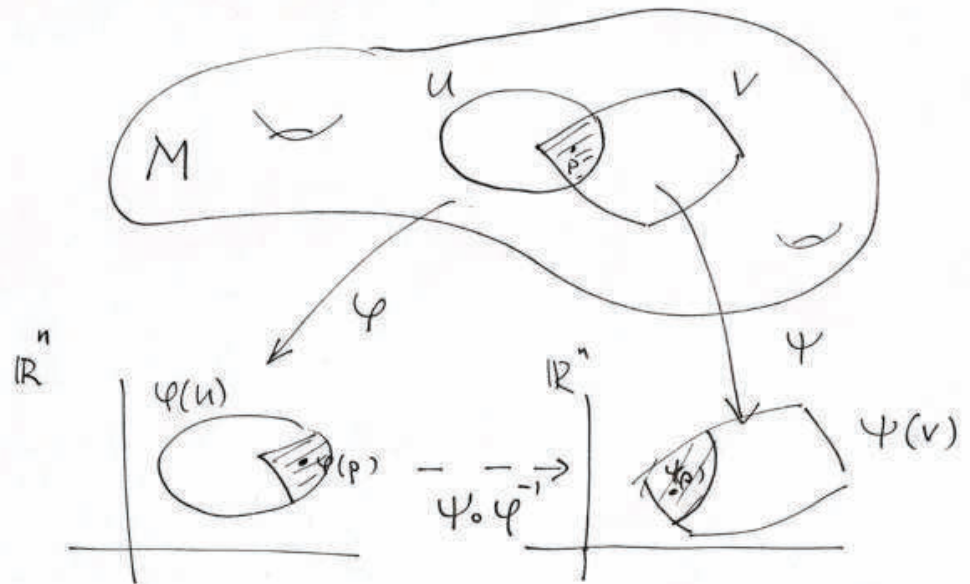
$$\tau \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \tau(V) \subset \mathbb{R}^n$$

im Punkt  $\varphi(p)$   $C^\infty$  ist (vgl. FIG. 35).

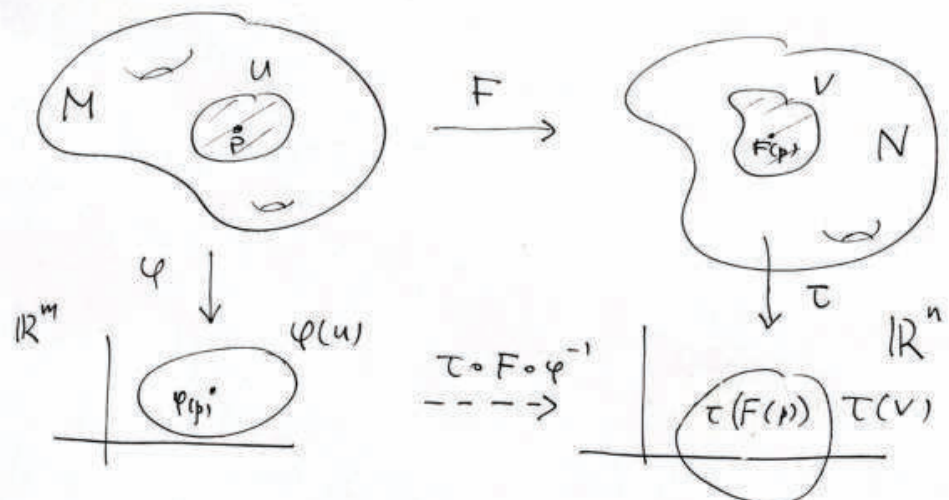
(Wenn man ganz genau sein will, ist der Definitionsbereich der obigen Abbildung nicht ganz  $\varphi(U)$ , sondern nur  $\varphi(F^{-1}(F(U) \cap V))$ .)

Die Abbildung  $F$  heißt **differenzierbar**, falls  $F$  in allen Punkten  $p \in M$  differenzierbar ist.

Da in der obigen Definition zwei Karten vorkommen, es im allgemeinen aber viele Karten um einen Punkt gibt, ist noch zu zeigen, dass der Begriff „differenzierbar“



FIGUR 34  
(Kartenwechsel)



FIGUR 35

wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl der Karten. Hier braucht man jetzt die Differenzierbarkeit der Karten-Wechsel:

Wir machen einen ersten Test mit den Karten-Abbildungen  $\tau$  und  $\varphi$  wie oben und einen zweiten Test mit Karten-Abbildungen  $\nu$  und  $\psi$ . Der 1. Test ergibt dann die Abbildung  $\tau \circ F \circ \varphi^{-1}$  und der 2. Test entsprechend die Abbildung  $\nu \circ F \circ \psi^{-1}$ . Es gilt dann

$$\tau \circ F \circ \varphi^{-1} = \tau \circ (\nu^{-1} \circ \nu) \circ F \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ \varphi^{-1} = (\tau \circ \nu^{-1}) \circ (\nu \circ F \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}).$$

Da die Kartenwechsel  $\tau \circ \nu^{-1}$  und  $\psi \circ \varphi^{-1}$  differenzierbar sind, sieht man aus obiger Gleichung, dass  $\tau \circ F \circ \varphi^{-1}$  genau dann  $C^\infty$  ist, wenn  $\nu \circ F \circ \psi^{-1}$   $C^\infty$  ist. Das war zu zeigen.

**Spezialfälle:** 1) Differenzierbare Abbildungen in die reellen Zahlen,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , heißen auch **differenzierbare Funktionen**.

2) Ein **Diffeomorphismus** ist eine bijektive Abbildung  $F : M \rightarrow N$ , die differenzierbar ist und deren Umkehrabbildung  $F^{-1} : N \rightarrow M$  auch differenzierbar ist.

3) Die Selbst-Diffeomorphismen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  bilden eine Gruppe  $\text{Diff}(M)$ .

4) Ein Diffeomorphismus ist auch ein Homöomorphismus (wieso?). Die Umkehrung gilt nicht. Beispiel: Die Umkehrabbildung des Homöomorphismus  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3$  ist  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ . Diese Abbildung ist stetig, aber nicht differenzierbar (wieso?).

## 4.3 Beispiele von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

### 4.3.1 Offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

Für eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  (bezüglich der Standard-Topologie) ist  $\{(U, \text{id}|_U)\}$  ein Atlas (bestehend aus einer einzigen Karte). Der zugehörige maximale Atlas definiert eine differenzierbare Struktur auf  $U$ , die sogenannte kanonische differenzierbare Struktur.

### 4.3.2 Reguläre Flächen(stücke) in $\mathbb{R}^3$

Reguläre Flächen in  $\mathbb{R}^3$  sind spezielle 2-Mannigfaltigkeiten und Gegenstand der klassischen (lokalen) Differentialgeometrie. Sie wurden zuerst von Gauß 1827 systematisch untersucht. Auf die Theorie von Gauß gehen wir später in Kapitel 5 und 6 noch näher ein.

Eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^3$  (versehen mit der von  $\mathbb{R}^3$  induzierten Teilraum-Topologie) heißt **reguläre Fläche**, falls für jeden Punkt  $p \in S$  eine Umgebung  $V$  von  $p$  in  $\mathbb{R}^3$

und eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{R}^2$  nach  $S$

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S; \quad (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

existiert, so dass gilt

- (1)  $F$  ist ein Homöomorphismus und differenzierbar (als Abbildung einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^3$ ),
- (2) die Jacobi-Matrix von  $F$  hat in jedem Punkt  $q \in U$  Rang 2.

Eine solche Abbildung  $F$  heißt (lokale) **Parametrisierung** von  $S$  (vgl. FIG. 36).

**Beispiel: Rotations-Flächen** entstehen durch Rotation einer Kurve in der  $xz$ -Ebene um die  $z$ -Achse (vgl. FIG. 37).

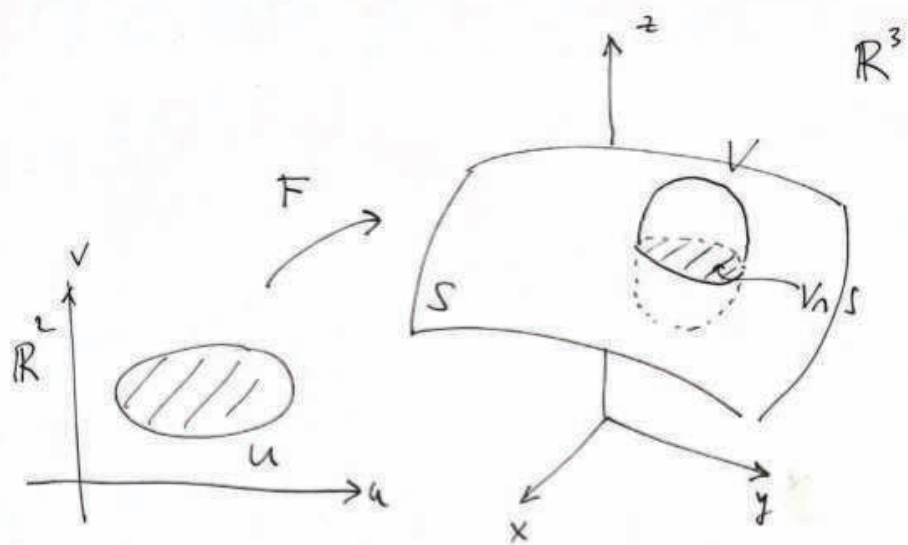
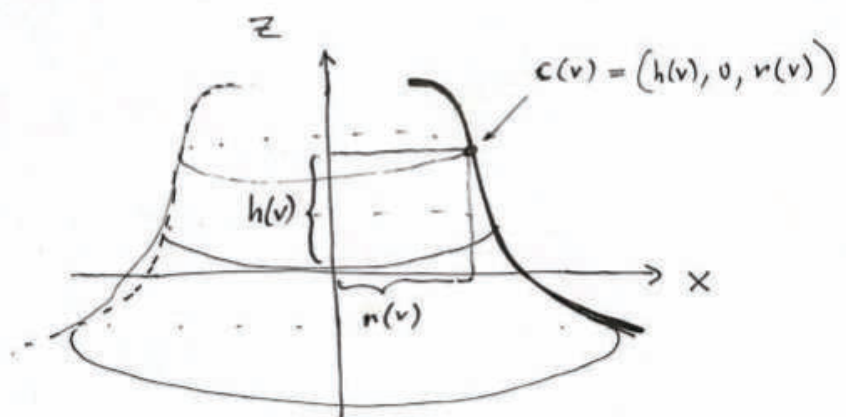
Die Kurve in der  $xz$ -Ebene ist von der Form  $c(v) := (r(v), 0, h(v))$  für  $v$  in einem Intervall  $(a, b)$ , und differenzierbaren Funktionen  $h$  und  $r$  mit  $r(v) > 0$  für alle  $v$ . Die Parametrisierung ist dann gegeben durch

$$F(u, v) := (r(v) \cos u, r(v) \sin u, h(v)) \quad \text{für } u \in (0, 2\pi), v \in (a, b)$$

(für Einzelheiten dazu vgl. do Carmo, Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg 1993, Abschnitt 2.3, Bsp. 4). Ist die Fläche regulär? Dazu müssen wir die Jacobi-Matrix berechnen; deren Spalten sind

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} -r(v) \sin u \\ r(v) \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} r'(v) \cos u \\ r'(v) \sin u \\ h'(v) \end{pmatrix}.$$

Die Rotationsfläche ist genau dann regulär, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind (wieso?). Das ist für geeignete Bedingungen an  $h$  und  $r$  der Fall.

FIGUR 36FIGUR 37



Hier ist ein explizites Beispiel: die 2-Sphäre von Radius  $R$  erhält man durch Rotation eines Kreises vom Radius  $R$  (vgl. FIG 38). Es ist also  $r(v) = R \cos v$  und  $h(v) = R \sin v$  mit  $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und

$$F(u, v) := (R \cos v \cos u, R \cos v \sin u, R \sin v).$$

Für die Jacobi-Matrix erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -R \cos v \sin u & -R \sin v \cos u \\ R \cos v \cos u & -R \sin v \sin u \\ 0 & -R \cos v \end{pmatrix}.$$

Falls  $r(v) = R \cos v > 0$  ist, sind die Spalten dieser Matrix linear unabhängig (wieso?), d.h. die zugehörige lineare Abbildung hat in jedem Punkt  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  Rang 2. Die obige Parametrisierung ist nur *lokal*, Nord- und Südpol sind nicht im Bild von  $F$ . Mit mehreren solchen lokalen Parametrisierungen sieht man aber, dass die 2-Sphäre eine reguläre Fläche in  $\mathbb{R}^3$  ist.

Wir wollen nun noch überlegen, dass reguläre Flächen 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind. Für eine lokale Parametrisierung  $F : U \rightarrow V \cap S$  einer regulären Fläche wie oben ist die Umkehrabbildung  $F^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  eine Karte. Zu zeigen ist, dass Karten-Wechsel differenzierbar sind. Dazu benötigen wir Bedingung (2) aus der Definition einer regulären Fläche. Genauer gilt folgendes

**Lemma.** *Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $p \in S$ . Weiter seien  $F_1 : U_1 \rightarrow S$  und  $F_2 : U_2 \rightarrow S$  zwei Parametrisierungen so, dass  $p \in F_1(U_1) \cap F_2(U_2) =: W$ . Dann ist der Parameter-Wechsel*

$$F_1^{-1} \circ F_2 : F_2^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow F_1^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2$$

*ein Diffeomorphismus.*

*Beweis:* Die Abbildung  $H := F_1^{-1} \circ F_2$  ist ein Homöomorphismus, da  $F_1$  und  $F_2$  nach Definition Homöomorphismen sind. Wir wollen zeigen, dass  $H$  sogar ein Diffeomorphismus ist. Das Problem dabei: der Definitionsbereich von  $F_1^{-1}$  ist eine offene Teilmenge von  $S$  und dort ist „differenzierbar“ nicht definiert. Der Ausweg/Trick: man kann  $F_1$  erweitern zu einer Abbildung  $\widetilde{F}_1$ , die auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$  definiert ist.

Dazu sei  $r \in F_2^{-1}(W)$  und  $q := H(r) \in F_1^{-1}(W)$ . Da  $F_1(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  eine reguläre Parametrisierung ist, können wir OBdA (nach eventueller Umbenennung der Koordinaten) annehmen, dass

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\text{wieso?}).$$



Wir erweitern jetzt  $F_1$  zu einer Abbildung

$$\widetilde{F}_1 : U_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \widetilde{F}_1(u, v, t) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

Diese Abbildung  $\widetilde{F}_1$  ist differenzierbar und es ist  $\widetilde{F}_1|_{U_1 \times \{0\}} = F_1$ . Für die Jacobi-Determinante von  $\widetilde{F}_1$  in  $(q, 0)$  gilt dann

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q, 0) & \frac{\partial x}{\partial v}(q, 0) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q, 0) & \frac{\partial y}{\partial v}(q, 0) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q, 0) & \frac{\partial z}{\partial v}(q, 0) & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Nach dem Umkehrsatz (vgl. Königsberger, Analysis 2, Abschnitt 3.3) existiert eine Umgebung  $A$  von  $\widetilde{F}_1(q, 0) = F_1(q)$  in  $\mathbb{R}^3$ , so dass  $\widetilde{F}_1^{-1}$  auf  $A$  definiert und differenzierbar ist. Da weiter  $F_2$  stetig ist, existiert eine Umgebung  $B$  von  $r$  in  $U_2$ , so dass  $F_2(B) \subset A$ . Nun ist  $H|_B = \widetilde{F}_1^{-1} \circ F_2|_B$  eine Verkettung von differenzierbaren Abbildungen, also nach der Kettenregel auch differenzierbar in  $r$ . Da  $r$  beliebig war, ist  $H$  differenzierbar auf  $F_2^{-1}(W)$ .  $\square$

### 4.3.3 Sphären vom Radius $R$

**Behauptung:** Die  $n$ -Sphären  $S_R^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = R\}$  sind  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Wir können  $S_R^n$  mit zwei Karten überdecken:

Sei  $N := (0, \dots, 0, R)$  der „Nordpol“,  $S := (0, \dots, 0, -R)$  der „Südpol“ und  $U_1 := S_R^n \setminus \{N\}$  bzw.  $U_2 := S_R^n \setminus \{S\}$  die Sphäre ohne den Nordpol bzw. den Südpol. Weiter sei  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  die stereographische Projektion vom Nordpol bzw. Südpol, also

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p)) \quad \text{mit} \quad x_i(p) = \frac{Rp_i}{R - p_{n+1}}$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p)) \quad \text{mit} \quad x_i(p) = \frac{Rp_i}{R + p_{n+1}}$$

(vgl. Beispiel 6, Abschnitt 3.4.1 und FIG. 39).

Die stereographischen Projektionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind Homöomorphismen (wieso?). Der Kartenwechsel ist gegeben durch

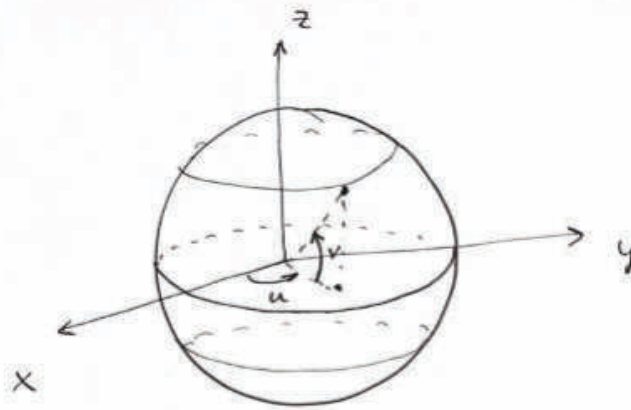
$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = R^2 \frac{x}{\|x\|^2}$$

also  $C^\infty$ . Analog sieht man, dass  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  auch  $C^\infty$  ist.

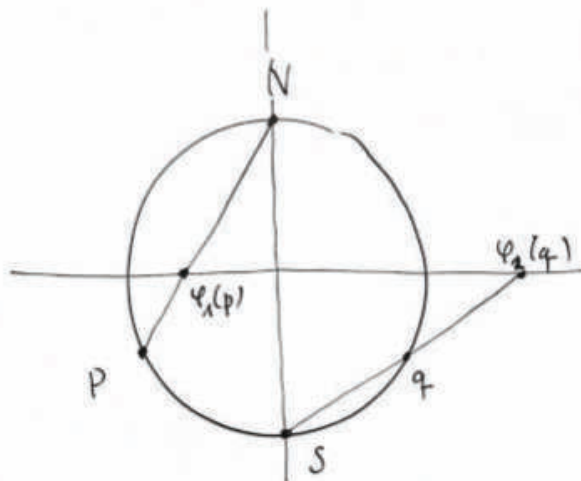
Wir haben also einen Atlas  $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ , den wir zu einem maximalen Atlas, also einer differenzierbaren Struktur von  $S_R^n$ , erweitern können.

Schließlich ist  $S_R^n$  als Teilraum von  $\mathbb{R}^{n+1}$  Hausdorffsch und da  $\mathbb{R}^{n+1}$  abzählbare Basis hat, hat auch  $S_R^n$  eine abzählbare Basis.

Damit haben wir jetzt insgesamt gezeigt, dass  $S_R^n$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.



FIGUR 38 (geograph. Koordinaten)



FIGUR 39

### 4.3.4 Projektive Räume

Die bisherigen Beispiele waren Punktmengen in einem euklidischen Raum versehen mit der Teilraum-Topologie. Projektive Räume sind „abstrakte“ Mannigfaltigkeiten; ihre Elemente sind die Geraden in  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch den Nullpunkt. Genauer definieren wir  $P^n := \{\text{eindimensionale Untervektorräume von } \mathbb{R}^{n+1}\}$ .

Wir wollen  $P^n$  zu einem topologischen Raum machen. Dazu benutzen wir zwei alternative Beschreibungen von  $P^n$  als Mengen von Äquivalenzklassen:

(a) Wir definieren auf der Menge  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \exists \lambda \neq 0 \text{ mit } x = \lambda y.$$

Es ist dann  $P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  (wieso?).

(b) Wir definieren auf der  $n$ -Sphäre  $S^n$  die Äquivalenzrelation  $x \sim y \stackrel{\text{Def.}}{\iff} x = -y$ . Eine Äquivalenzklasse besteht also aus Antipoden-Punkten:  $[x] = \{x, -x\}$  und es ist  $P^n = S^n / \sim$ .

Mit der Beschreibung (b) können wir als Topologie von  $P^n$  die Quotienten-Topologie von  $S^n / \sim$  definieren.

**Behauptung:**  $P^n$  ist eine kompakte, differenzierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit.

*Beweis-Skizze.* Die Projektions-Abbildung  $\pi : S^n \rightarrow P^n; x \mapsto [x]$  ist stetig (nach Definition der Quotienten-Topologie sind ja Urbilder unter  $\pi$  von offenen Mengen offen). Damit folgt, dass projektive Räume kompakt sind: Da die Sphäre  $S^n$  kompakt ist, ist das stetige Bild  $P^n = \pi(S^n)$  auch kompakt (vgl. Satz 5.1 in Abschnitt 3.6).

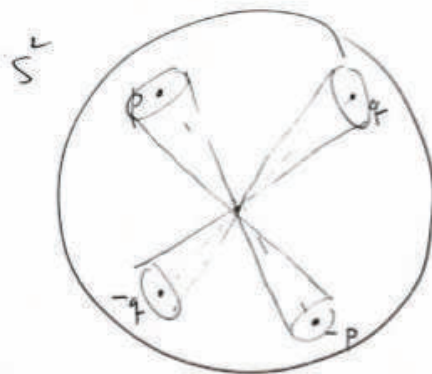
Man kann weiter zeigen:  $P^n$  ist Hausdorffsch (vgl. FIG. 40) und hat eine abzählbare Basis.

Karten für einen Atlas erhält man wie folgt:

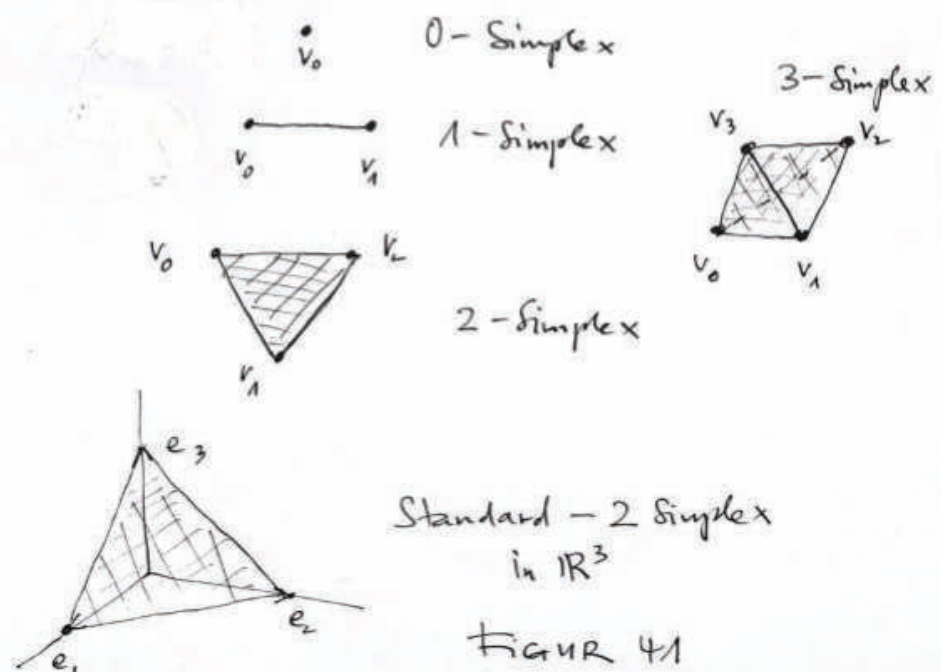
$$\tilde{U}_i := \{x \in S^n \mid x_i \neq 0\}, \quad U_i := \pi(\tilde{U}_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n+1,$$

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \varphi_i([x]) := \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right).$$

Man muss dann noch zeigen, dass die zugehörigen Kartenwechsel differenzierbar sind.  $\square$



FIGUR 40 ( Urbilder bzgl.  $\pi$  von  
2 disjunkten Umgebungen  
von  $[p]$  und  $[-p]$ . )



FIGUR 41

### 4.3.5 Produkt-Mannigfaltigkeiten

Ist  $M$  bzw.  $N$  eine  $m$ -dimensionale bzw.  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist die  $(m+n)$ -dimensionale Produkt-Mannigfaltigkeit auch differenzierbar.

Für Karten  $(U, \varphi)$  um  $p \in M$  und  $(V, \psi)$  um  $q \in N$  ist  $(U \times V, \varphi \times \psi)$  eine Karte um  $(p, q) \in M \times N$ .

### 4.3.6 Exkurs: Lie-Gruppen (nach S. Lie (1842-1899))

Eine **Lie-Gruppe** ist eine Gruppe  $(G, \cdot)$ , die auch eine Mannigfaltigkeit ist, so dass die Abbildung

$$G \times G \rightarrow G; \quad (g, h) \mapsto g^{-1} \cdot h$$

$C^\infty$  ist. Die Gruppen- und die Mannigfaltigkeits-Struktur müssen also „verträglich“ sein.

#### Beispiele von Lie-Gruppen:

- Die ganzen Zahlen mit der Addition  $(\mathbb{Z}, +)$  bilden eine 0-dimensionale Lie-Gruppe.
- Die Drehmatrizen

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi] \right\}$$

ist als Mannigfaltigkeit homöomorph zum Einheitskreis  $S^1$  und die Matrizen-Multiplikation bzw. Inversen-Bildung sind differenzierbare Abbildungen (wieso?).  $SO(2)$  ist also eine 1-dimensionale kompakte Lie-Gruppe.

- Die unitäre Gruppe

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}, z\bar{z} + w\bar{w} = 1 \right\}$$

ist als Mannigfaltigkeit homöomorph zur 3-Sphäre  $S^3$ . Dazu schreibt man die komplexen Zahlen mit Real- und Imaginär-Teil,  $z = x_1 + ix_2$  und  $w = x_3 + ix_4$ . Die Bedingung  $1 = z\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2$  ist dann äquivalent zu  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ , also der Definitionsgleichung der 3-Sphäre  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Wieder sind die Matrizen-Multiplikation bzw. Inversen-Bildung differenzierbare Abbildungen.  $SU(2)$  ist also eine 3-dimensionale kompakte Lie-Gruppe.

- Die allgemeine lineare Gruppe  $GL(n, \mathbb{R})$  (vgl. Beispiel 4 in Abschnitt 4.1) ist eine  $n^2$ -dimensionale Lie-Gruppe.
- Viele weitere Lie-Gruppen erhält man mit einem Satz von Cartan:  
*Abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind wieder Lie-Gruppen.*  
 Zum Beispiel:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \quad \text{und}$$

$$SO(n) = \{A \in SL(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = E\}.$$

Wieso sind das abgeschlossene Untergruppen von  $GL(n, \mathbb{R})$ ?

## 4.4 Simplicial-Komplexe

Kurz gesagt stellt die *mengentheoretischen Topologie* (durch Begriffe wie „Umgebung“, „kompakt“, „zusammenhängend“ usw.) eine „Sprache“ zur Verfügung während die *algebraische Topologie* Werkzeuge (z.B. Invarianten wie die Euler-Charakteristik) und Methoden liefert. Letztere beginnt mit der Untersuchung von Simplicial-Komplexen.

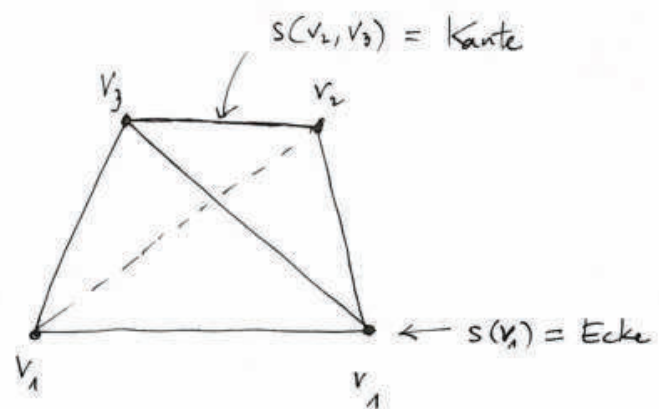
Ein  **$k$ -Simplex in  $\mathbb{R}^n$**  ist die konvexe Hülle  $s(v_0, v_1, \dots, v_k)$  von  $k + 1$  affin unabhängigen Punkten  $v_0, v_1, \dots, v_k$ :

$$s(v_0, v_1, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

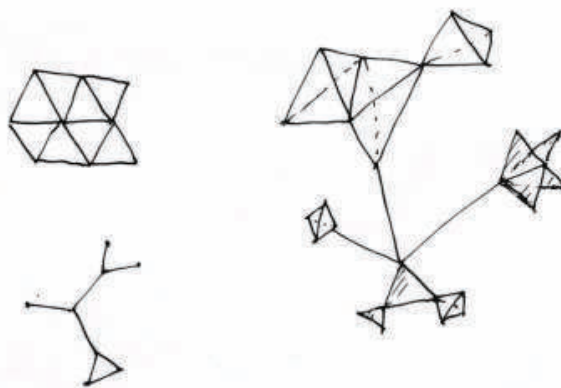
mit  $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$  linear unabhängig (vgl. FIG. 41).

Die konvexe Hülle einer Teilmenge von  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  heißt **Teilsimplex** oder **Seite** des Simplex  $s(v_0, v_1, \dots, v_k)$  (vgl. FIG. 42).

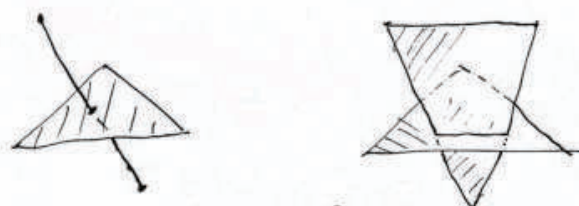
Das  **$k$ -dimensionale Standard-Simplex** ist  $\Delta_k := s(e_1, e_2, \dots, e_{k+1}) \subset \mathbb{R}^{k+1}$  mit den Standard-Basisvektoren  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_{k+1} = (0, \dots, 0, 1)$  als Ecken (vgl. FIG. 41).



FIGUR 42 ("Seiten")



Simplizial-Komplexe



keine Simplizial-Komplexe

FIGUR 43



Eine endliche Menge  $K$  von Simplexen in  $\mathbb{R}^n$  heißt (endlicher) **Simplizial-Komplex** wenn gilt (vgl. FIG. 43):

1. Mit jedem seiner Simplexe enthält  $K$  auch dessen sämtliche Teilsimplexe.
2. Der Durchschnitt von je zwei Simplexen von  $K$  ist entweder leer oder ein gemeinsames Teilsimplex.

**Bemerkung.** Oft betrachtet man Simplicial-Komplexe mit unendlich vielen Simplexen. Man verlangt dann, dass  $K$  **lokal endlich** ist, d.h. jeder Punkt in  $\mathbb{R}^n$  hat eine Umgebung, die nur endlich viele Simplexe aus  $K$  trifft.

Wir können einen Simplicial-Komplex zu einem topologischen Raum machen, indem wir folgende Topologie definieren:

Die Menge  $|K| := \bigcup_{s \in K} s \subset \mathbb{R}^n$  versehen mit der Teilraum-Topologie von  $\mathbb{R}^n$  heißt der **zum Simplicial-Komplex  $K$  gehörige topologische Raum**. Man beachte, dass verschiedene  $K$  den gleichen Teilraum  $|K|$  von  $\mathbb{R}^n$  liefern können (vgl. FIG. 44).

Der Vorteil von (endlichen) Simplicial-Komplexen im Gegensatz zu andern topologischen Räumen: Endlich viele Daten beschreiben den Komplex bis auf Homöomorphie vollständig.

Genauer: Kennt man von einem Simplicial-Komplex  $K$  die **wesentlichen Simplexe**, d.h. diejenigen, die nicht Seiten von anderen sind, in jeder Dimension und ihre **Inzidenzen**, d.h. welche Ecken diese gemeinsam haben, so kennt man  $|K|$  bis auf Homöomorphie. Denn diese Angaben liefern eine „Bauanleitung“:

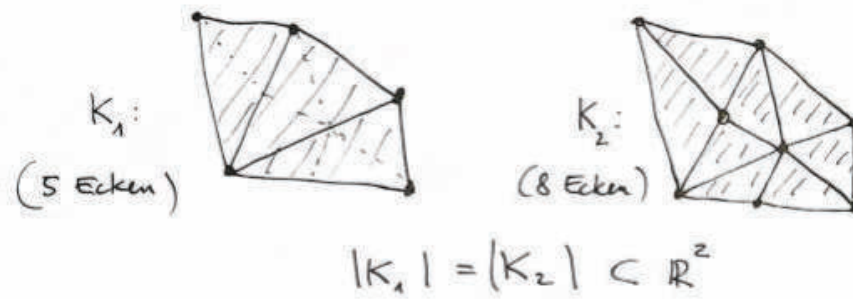
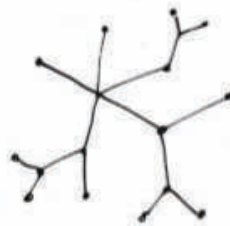
1. Schritt: Sei  $n_i$  die Anzahl der wesentlichen Simplexe von  $K$  der Dimension  $i$  für  $i = 0, 1, \dots, k$ . Wähle dann  $n_i$   $i$ -dimensionale Standard-Simplexe für jede Dimension  $i$  und bilde die disjunkte Vereinigung (eine endliche Menge von „Bauklötzen“):

$$X := \underbrace{(\Delta_0 \sqcup \Delta_0 \dots \sqcup \Delta_0)}_{n_0} \sqcup \underbrace{(\Delta_1 \sqcup \Delta_1 \dots \sqcup \Delta_1)}_{n_1} \sqcup \dots \sqcup \underbrace{(\Delta_k \sqcup \Delta_k \dots \sqcup \Delta_k)}_{n_k}.$$

2. Schritt: „Verklebe“ diese Standard-Simplexe gemäss den Inzidenzangaben für die Ecken (formal ist das eine Äquivalenz-Relation  $\sim$ ).

3. Schritt: Der erste und zweite Schritt liefert eine stetige, bijektive Abbildung des kompakten Quotienten-Raumes  $X/\sim$  auf den Hausdorff-Raum  $|K|$ , also nach Satz 6 in Abschnitt 3.6 einen Homöomorphismus.

Vgl. FIG. 45 für ein Beispiel.

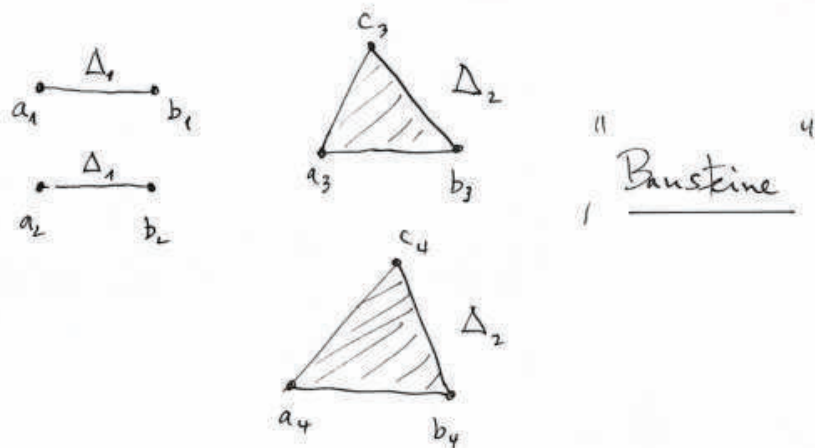
FIGUR 44

Baum

Kein BaumFIGUR 46

2 spannende Bäume

FIGUR 47



"Bausteine"  
1

Inzidenz - Relationen

("Verklebe -  
Vorschrift")

$$a_1 \sim a_2$$

$$b_1 \sim c_3$$

$$a_3 \sim a_4$$

$$b_3 \sim c_4$$

ergibt:

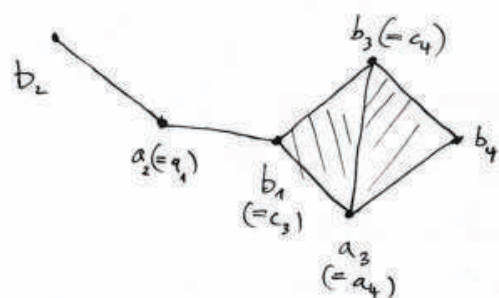


Figure 45

### 4.4.1 Exkurs: Graphen

In Abschnitt 2.2.1 hatten wir Graphen kombinatorisch als eine Menge von Ecken und Kanten definiert. Alternativ können wir Graphen auch als Simplicial-Komplexe auffassen:

Ein **Graph** ist ein Simplicial-Komplex, so dass alle wesentlichen Simplexe Dimension  $\leq 1$  haben. Ein Graph  $\mathcal{G}$  heißt **zusammenhängend**, falls es zu je zwei verschiedenen 0-Simplexen (=Ecken)  $p \neq q$  von  $\mathcal{G}$  eine Folge  $p = p_0, p_1, \dots, p_n = q$  von paarweise verschiedenen Ecken von  $\mathcal{G}$  gibt, so dass  $p_{i-1}$  und  $p_i$  jeweils Seiten eines 1-Simplexes (=Kante) sind.

Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph  $\mathcal{T}$ , so dass für jedes 1-Simplex  $s \in \mathcal{T}$   $\mathcal{T} \setminus (s)$  nicht mehr zusammenhängend ist (d.h. „es gibt keine Kreise“), wobei  $(s)$  das offene 1-Simplex, d.h.  $s$  ohne seine Ecken, bezeichnet (vgl. FIG. 46).

Sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher Graph mit  $\alpha_0$  Ecken (0-Simplices) und  $\alpha_1$  Kanten (1-Simplices). Die **Euler-Charakteristik** von  $\mathcal{G}$  ist dann definiert als  $\chi(\mathcal{G}) = \alpha_0 - \alpha_1$  (also „Anzahl Ecken minus Anzahl Kanten“).

**Satz 1:** *Sei  $\mathcal{T}$  ein nichtleerer endlicher Baum. Dann gilt  $\chi(\mathcal{T}) = 1$ .*

*Beweis.* Mit Induktion nach  $\alpha_0$ , also der Anzahl 0-Simplexe (Ecken).

Induktions-Verankerung: Für  $\alpha_0 = 1$  ist  $\mathcal{T}$  ein Punkt, also  $\chi(\mathcal{T}) = 1$ .

Induktions-Schritt: Der Satz gelte für alle Bäume mit höchstens  $n$  Ecken (also  $\alpha_0 \leq n$ ). Zu zeigen ist, dass der Satz dann auch für  $\alpha_0 = n + 1$  gilt.

Sei also  $\mathcal{T}$  ein Baum mit  $n + 1$  Ecken und  $v_0$  ein **Ende**, d.h.  $v_0$  ist Randpunkt von genau einem 1-Simplex  $s_1$ . (So ein Ende existiert, sonst gehört jede Ecke zu mindestens 2 Kanten und damit existieren „Kreise“ in  $\mathcal{T}$  (wieso?).)

Sei dann  $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T} \setminus \{(s_1) \cup v_0\}$ . Der zusammenhängende Graph  $\mathcal{T}_1$  ist dann auch ein Baum (sonst existiert eine Kante  $s_2$ , so dass  $\mathcal{T}_1 \setminus (s_2)$  immer noch zusammenhängend ist, also wäre auch  $\mathcal{T} \setminus (s_2)$  zusammenhängend; ein Widerspruch). Der Baum  $\mathcal{T}_1$  hat  $n$  Ecken, also ist nach Induktions-Voraussetzung  $\chi(\mathcal{T}_1) = 1$ .

Nun ist  $\alpha_0(\mathcal{T}) = \alpha_0(\mathcal{T}_1) + 1$  und  $\alpha_1(\mathcal{T}) = \alpha_1(\mathcal{T}_1) + 1$ , also

$$\chi(\mathcal{T}) = \alpha_0(\mathcal{T}) - \alpha_1(\mathcal{T}) = \alpha_0(\mathcal{T}_1) + 1 - \alpha_1(\mathcal{T}_1) - 1 = \chi(\mathcal{T}_1) = 1.$$

Das war zu zeigen. □

Der folgende Satz liefert eine Formel für die Euler-Charakteristik von beliebigen zusammenhängenden endlichen Graphen.

**Satz 2:** *Sei  $\mathcal{G}$  ein zusammenhängender endlicher Graph. Weiter sei  $n$  die maximale Anzahl von offenen 1-Simplexen, die man aus  $\mathcal{G}$  entfernen kann, so dass  $\mathcal{G}$*

*zusammenhängend bleibt. Dann ist  $\chi(\mathcal{G}) = 1 - n$ .*

*Beweis.* Ist  $\mathcal{G}$  ein Baum, so ist  $n = 0$  und die Behauptung folgt aus Satz 1. Ist  $\mathcal{G}$  kein Baum, so existiert ein offenes 1-Simplex  $(s_1)$ , so dass  $\mathcal{G}_1 := \mathcal{G} \setminus (s_1)$  zusammenhängend ist. Ist  $\mathcal{G}_1$  ein Baum, so stoppen wir. Ist  $\mathcal{G}_1$  kein Baum, so entfernt man ein  $(s_2)$  usw. Da  $\mathcal{G}$  nur endlich viele 1-Simplexe enthält, existiert ein maximales  $n$ , so dass  $\mathcal{G} \setminus \{(s_1), (s_2), \dots, (s_n)\}$  ein Baum  $\mathcal{T}$  ist. Es gilt dann  $\alpha_0(\mathcal{G}) = \alpha_0(\mathcal{T})$  und  $\alpha_1(\mathcal{G}) = \alpha_1(\mathcal{T}) + n$ , also  $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{T}) - n = 1 - n$ .  $\square$

### Bemerkungen:

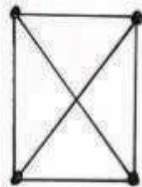
1. Die Euler-Charakteristik ist invariant unter „Unterteilung“: Fügt man in einem 1-Simplex eine zusätzliche Ecke ein (z.B. den „Mittelpunkt“), so erhöht man die Anzahl Ecken um 1, aber auch die Anzahl der Kanten. In der Wechselsumme hebt sich dies weg.
2. Ein Baum  $\mathcal{T}$ , den man erhält, indem man aus  $\mathcal{G}$   $n$  offene Kanten entfernt (wie in Satz 2), ist ein **Spann-Baum**, also ein Baum, der alle Ecken von  $\mathcal{G}$  enthält. In der *Graphen-Theorie* zeigt man: Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen (im Allgemeinen nicht eindeutigen) Spann-Baum (vgl. FIG. 47).

## 4.5 Ebene Graphen und Polyeder

Zwei Graphen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  sind isomorph, falls es eine bijektive Abbildung  $F : E(\mathcal{G}_1) \rightarrow E(\mathcal{G}_2)$  zwischen ihren Eckenmengen gibt, so dass die Inzidenzrelationen erhalten bleiben (d.h. die Ecken  $p, q$  gehören zu einer Kante  $s$  von  $\mathcal{G}_1$  genau dann, wenn  $f(p), f(q)$  zu einer Kante von  $\mathcal{G}_2$  gehören).

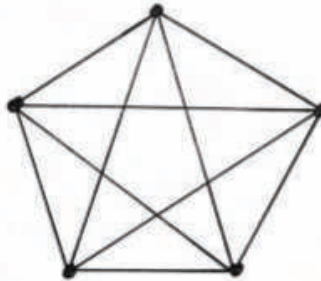
Ein Graph heißt **eben**, falls er durch Punkte (=Ecken) und Kurvenstücke (=Kanten) in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  so realisiert ist, dass sich seine Kanten nicht schneiden (ausser in den Ecken). Ein (abstrakter Graph) heißt **planar**, falls er isomorph ist zu einem ebenen Graphen. Zum Beispiel ist der vollständige Graph  $K_4$  planar, und der vollständige Graph  $K_5$  nicht planar (ein Graph ist vollständig, wenn zwischen zwei beliebigen Ecken eine Kante existiert) (vgl. FIG. 48).

Die **Seitenflächen** eines ebenen Graphen  $\mathcal{G}$  sind definiert als die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{G}$ . Eine Seitenfläche ist unbeschränkt, die andern sind beschränkt (und von „Kreisen“ berandet). Ein planarer Baum hat nur eine Seitenfläche (wieso?).



$K_4$   
ist planar

FIGUR 18



$K_5$  ist  
nicht planar

**Satz 3 (Eulersche Formel):** Sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher, zusammenhängender, planarer Graph. Weiter sei  $e(\mathcal{G})$  bzw.  $k(\mathcal{G})$  bzw.  $s(\mathcal{G})$  die Anzahl der Ecken bzw. Kanten bzw. Seitenflächen von  $\mathcal{G}$ . Dann gilt die Formel von Euler:  $e(\mathcal{G}) - k(\mathcal{G}) + s(\mathcal{G}) = 2$ .

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $\mathcal{G}$  eben ist. Sei  $\mathcal{T}$  ein Spann-Baum für  $\mathcal{G}$ . Dann gilt  $e(\mathcal{T}) - k(\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{T}) = 1$  (nach Satz 1) und  $s(\mathcal{T}) = 1$ , also gilt die Behauptung für den Spann-Baum  $\mathcal{T}$ . Wenn der Graph  $\mathcal{G}$  kein Baum ist, erhält man ihn aus  $\mathcal{T}$  durch Hinzufügen von Kanten. Für jede neue Kante entsteht auch eine neue Seitenfläche. Dazu benutzt man, dass in einem ebenen Graphen jede Kante, die zu einem Spannbaum hinzugefügt wird, auf einem „Kreis“ liegt und deshalb zu zwei Seitenflächen gehört (das ist anschaulich klar, mathematisch aber nichttrivial und basiert auf dem Jordanschen Kurvensatz). In der Eulerschen Wechselsumme wird das Hinzufügen der Kanten also durch die Seitenflächen wieder kompensiert und wir erhalten

$$e(\mathcal{G}) - k(\mathcal{G}) + s(\mathcal{G}) = e(\mathcal{T}) - k(\mathcal{T}) + s(\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{T}) + 1 = 2.$$

□

Wir wollen die Eulersche Formel verwenden, um die Platonischen Körper zu bestimmen.

Eine Teilmenge  $P$  von  $\mathbb{R}^3$  heißt **konvexes Polyeder**, falls gilt

1.  $P$  ist Durchschnitt von endlich vielen affinen Halbräumen (d.h. gegeben durch Ungleichungen der Form  $a_i x + b_i y + c_i z \geq d_i$  für  $i = 1, \dots, k$ ).
2.  $P$  ist beschränkt und nicht ganz in einer Ebene enthalten.
3.  $P$  ist konvex, d.h. mit je zwei Punkten  $p, q \in P$  liegt auch das Geradensegment  $\overline{pq}$  ganz in  $P$ .

Der **Rand** von  $P$  besteht aus Seitenflächen, Kanten und Ecken, die gegeben sind als 2-, 1- und 0-dimensionale Schnitte der Rand-Ebenen der definierenden affinen Halbräume (also als Schnitte von  $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$  für  $i = 1, \dots, k$ ).

Ein konvexes Polyeder heißt  **$(n, m)$ -regulär**, falls alle Seitenflächen kongruente, reguläre  $n$ -Gone sind (alle Kanten sind gleich lang) und in jeder Ecke genau  $m$  solche  $n$ -Gone zusammentreffen (insbesondere gehen dann von jeder Ecke genau  $m$  Kanten aus). Beispiel: Ein Tetraeder, dessen Kanten alle gleich lang sind ist ein  $(3, 3)$ -reguläres Polyeder (vgl. FIG. 50).

Ein Zusammenhang zwischen Polyedern und Graphen ergibt sich wie folgt: Das 1-**Skelett**  $P^{(1)}$  von  $P$  ist definiert als die Menge der Ecken und Kanten im Rand von  $P$ . Das ist ein Graph in  $\mathbb{R}^3$ . Man kann dann zeigen: Durch Zentralprojektion von

einem Punkt in  $\mathbb{R}^3$ , der nahe bei einem „Seitenmittelpunkt“ liegt, auf eine geeignete Ebene wird  $P^{(1)}$  auf einen ebenen Graphen  $\mathcal{G}_P$  abgebildet. Dieser Graph heißt auch **Schlegel-Diagramm** von  $P$  (vgl. FIG. 49).

Da das Schlegel-Diagramm ein ebener (und insbesondere planarer) Graph ist, gilt die Euler-Formel (Satz 3):  $e(\mathcal{G}_P) - k(\mathcal{G}_P) + s(\mathcal{G}_P) = 2$ .

#### Satz 4 (Platonische Körper)

*Es gibt genau 5 reguläre Polyeder in  $\mathbb{R}^3$  (vgl. FIG. 50):*

| $(m, n)$ | Platonischer Körper |
|----------|---------------------|
| $(3, 3)$ | Tetraeder           |
| $(3, 4)$ | Würfel              |
| $(4, 3)$ | Oktaeder            |
| $(3, 5)$ | Dodekaeder          |
| $(5, 3)$ | Ikosaeder           |

*Beweis-Skizze.* Die Existenz von 5 der Platonischen Körper durch explizite Konstruktion geht auf Euklid zurück. Wir führen sie hier nicht durch (vgl. z.B. E. Rees, Notes on Geometry, Springer Universitext, 1983). Aber sind das auch alle? Diese Frage können wir mit Hilfe der Euler-Formel beantworten.

Sei  $s$  die Anzahl der Seitenflächen,  $k$  die Anzahl der Kanten und  $e$  die Anzahl der Ecken eines  $(m, n)$ -regulären Polyeders  $P$ . Dann gilt  $sn = 2k$ , da jede Kante zu 2 Seitenflächen gehört. Ebenso ist  $me = 2k$  und somit  $sn = 2k = me$ , also  $k = \frac{me}{2}$  und  $s = \frac{me}{n}$ . Mit der Euler-Formel für das Schlegel-Diagramm  $\mathcal{G}_P$  folgt:

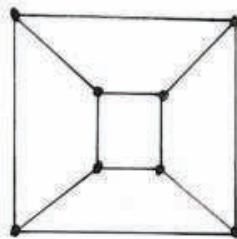
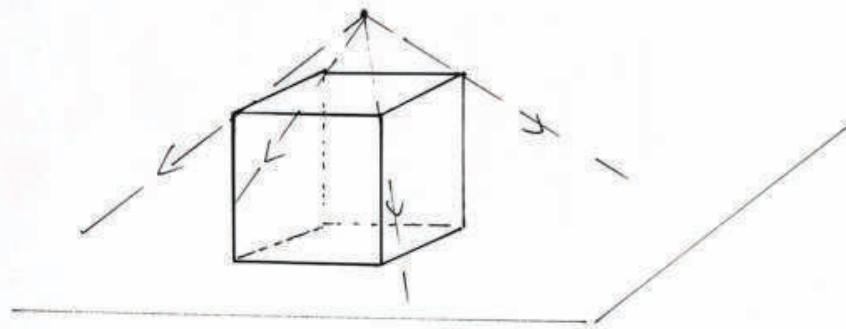
$$2 = e - k + s = e - \frac{me}{2} + \frac{me}{n} \iff 4n = 2ne - nme + 2me = e(2n - nm + 2m).$$

Da  $n > 0$  und  $e > 0$  ist, folgt

$$2n - nm + 2m > 0 \iff nm - 2n - 2m + 4 < 4 \iff (n - 2)(m - 2) < 4.$$

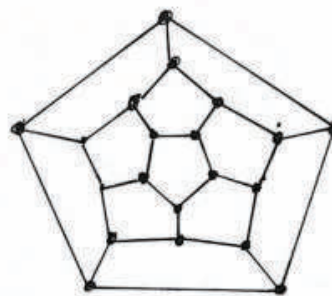
Diese Bedingung (und  $m \geq 3, n \geq 3$ ) ist genau für fünf Paare  $(m, n)$  erfüllt:  $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)$ .  $\square$



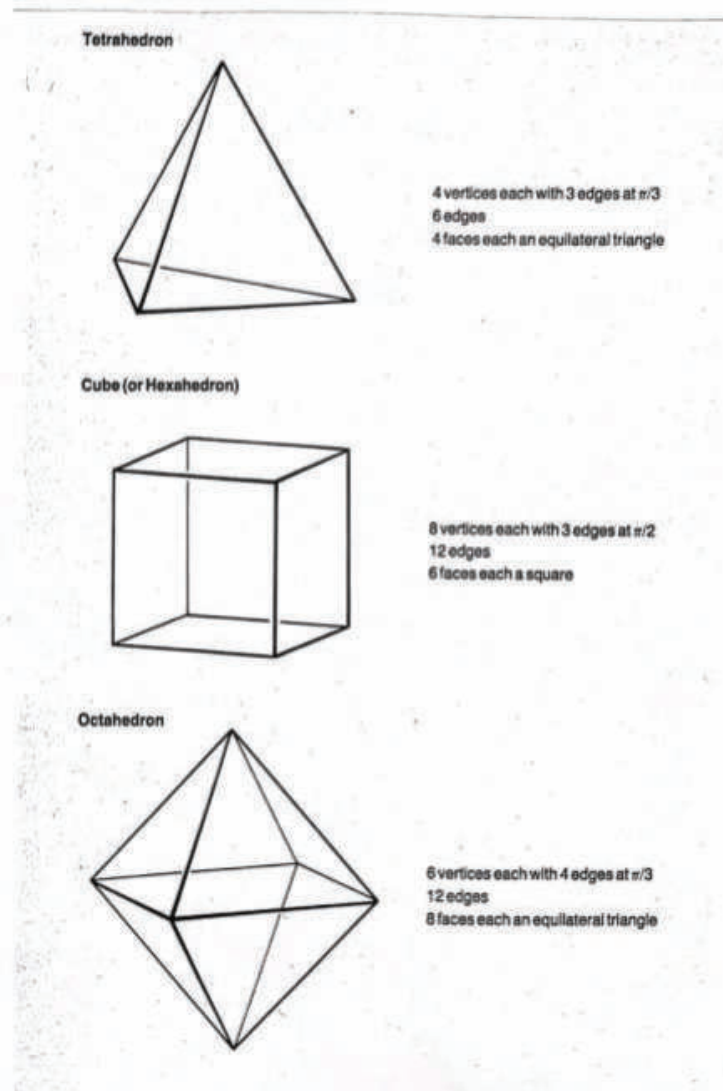


Schlegel-Diagramm (Würfel)

FIGUR 43

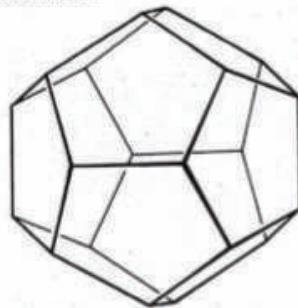


Schlegel-Diagramm (Dodekaeder)



FIGUR 50

Dodecahedron



20 vertices each with 3 edges at  $3\pi/5$   
30 edges  
12 faces each a regular pentagon

Icosahedron



12 vertices each with 5 edges at  $\pi/3$   
30 edges  
20 faces each an equilateral triangle

FIGURE 50

(from E. Rees, Notes on Geometry)

### 4.5.1 Exkurs: Was steckt hinter der Eulerschen Polyederformel?

Wir hatten die Euler-Charakteristik für Graphen definiert. Man kann diese aber auch für beliebige endliche Simplizial-Komplexe  $K$  wie folgt definieren.

Sei  $\alpha_k$  die Anzahl der  $k$ -Simplexe in  $K$  für  $k = 0, 1, \dots, n$ . Die **Euler-Charakteristik** von  $K$  ist die Wechselsumme  $\chi(K) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots \pm \alpha_n$ .

Die „Betti-Zahlen“  $\alpha_k$  lassen sich mit Methoden der algebraischen Topologie berechnen (als Dimensionen von gewissen Vektorräumen, den Homologie-Gruppen). Man kann zeigen, dass  $\chi(K)$  eine topologische Invariante ist: sind  $|K_1|$  und  $|K_2|$  homöomorphe Simplizial-Komplexe, so ist  $\chi(K_1) = \chi(K_2)$ .

Weiter gibt es das Konzept einer **simplizialen Approximation** oder **Triangulierung**: Ein topologischer Raum  $X$  heißt **triangulierbar**, falls ein (endlicher) Simplizial-Komplex  $K$  existiert, so dass  $X$  und  $|K|$  homöomorph sind (vgl. FIG. 51).

Ist  $X$  via  $K$  triangulierbar, so definiert man die Euler-Charakteristik von  $X$  als  $\chi(X) := \chi(K)$  und zeigt, dass dies nicht von der gewählten Triangulierung abhängig ist.

Nun ist  $\chi(S^2) = \chi(\text{Tetraeder}) = 4 - 6 + 4 = 2$ . Jedes reguläre Polyeder  $P$  ist homöomorph zur 2-Sphäre  $S^2$ , also  $\chi(P) = \chi(S^2) = 2$ . Dies erklärt die Zahl 2 in der Euler-Formel.

## 4.6 Spezielle Konstruktionen von Quotientenräumen durch Verkleben

Gegeben seien zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$ . Die **disjunkte Vereinigung** von  $X$  und  $Y$  ist die Vereinigung der vorher „formal disjunkt gemachten“ Mengen:  $X \sqcup Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ .

Ist nun  $A \subset X$  ein Teilraum von  $X$  und  $f : A \rightarrow Y$  eine (nicht notwendig stetige) Abbildung, so definieren wir auf der disjunkten Vereinigung  $X \sqcup Y$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$  wie folgt:

$$x \sim x' \stackrel{\text{Def}}{\iff} \begin{cases} x = x' \\ \text{oder} & f(x) = x' \\ \text{oder} & f(x') = x \\ \text{oder} & f(x) = f(x'). \end{cases}$$

Verifizieren Sie, dass das auch wirklich eine Äquivalenzrelation ist.

Der Quotienten-Raum  $X \sqcup_f Y := X \sqcup Y / \sim$  heißt **Verklebung von  $X$  mit  $Y$  längs**

$A$  **via**  $f$ . Man sagt auch  $X \sqcup_f Y$  entsteht aus  $X$  und  $Y$  durch „identifizieren“ der Punkte von  $A$  mit ihren Bildpunkten.

**Beispiele:**

1.  $X = [0, 3]$ ,  $Y = [2, 6]$ ,  $A = \{0, 3\}$ ,  $f(0) = 4$ ,  $f(3) = 6$ .
2.  $X = Y = S^1$ ,  $A = \{p\}$ ,  $f(p) = p$  (vgl. FIG. 52).
3. Simplicial-Komplexe entstehen durch Verkleben von Simplexen (vgl. Abschnitt 4.4).
4. Die **zusammenhängende Summe**  $M_1 \# M_2$  von zwei 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten  $M_1$  und  $M_2$  konstruiert man in drei Schritten wie folgt (vgl. FIG. 53):
  - Man entfernt je einen „kleinen“ offenen Ball  $\overline{B}_1$  um einen Punkt  $p_1 \in M_1$  und einen offenen Ball  $\overline{B}_2$  um einen Punkt  $p_2 \in M_2$  mit Rändern  $\partial \overline{B}_1$  und  $\partial \overline{B}_2$ .
  - Da diese Ränder je homöomorph zum Einheitskreis  $S^1$  sind, kann man einen (expliziten) Homöomorphismus  $f : \partial \overline{B}_1 \rightarrow \partial \overline{B}_2$  wählen.
  - Man verklebt  $M_1$  und  $M_2$  längs  $S^1$  via  $f$ :  $M_1 \# M_2 := M_1 \sqcup_f M_2$ .

Mit dieser Konstruktion erhält man z.B. alle geschlossenen (orientierbaren) Flächen (vgl. Abschnitt 4.1 und FIG. 53).

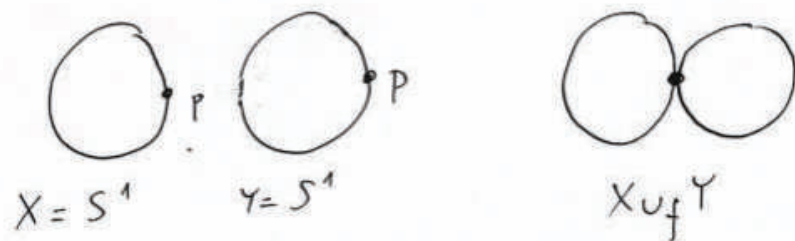
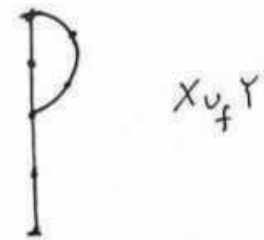
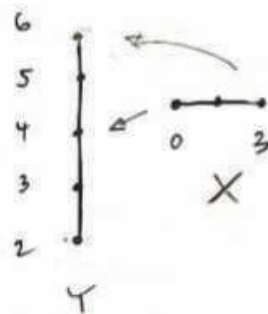
$$X = S^1$$



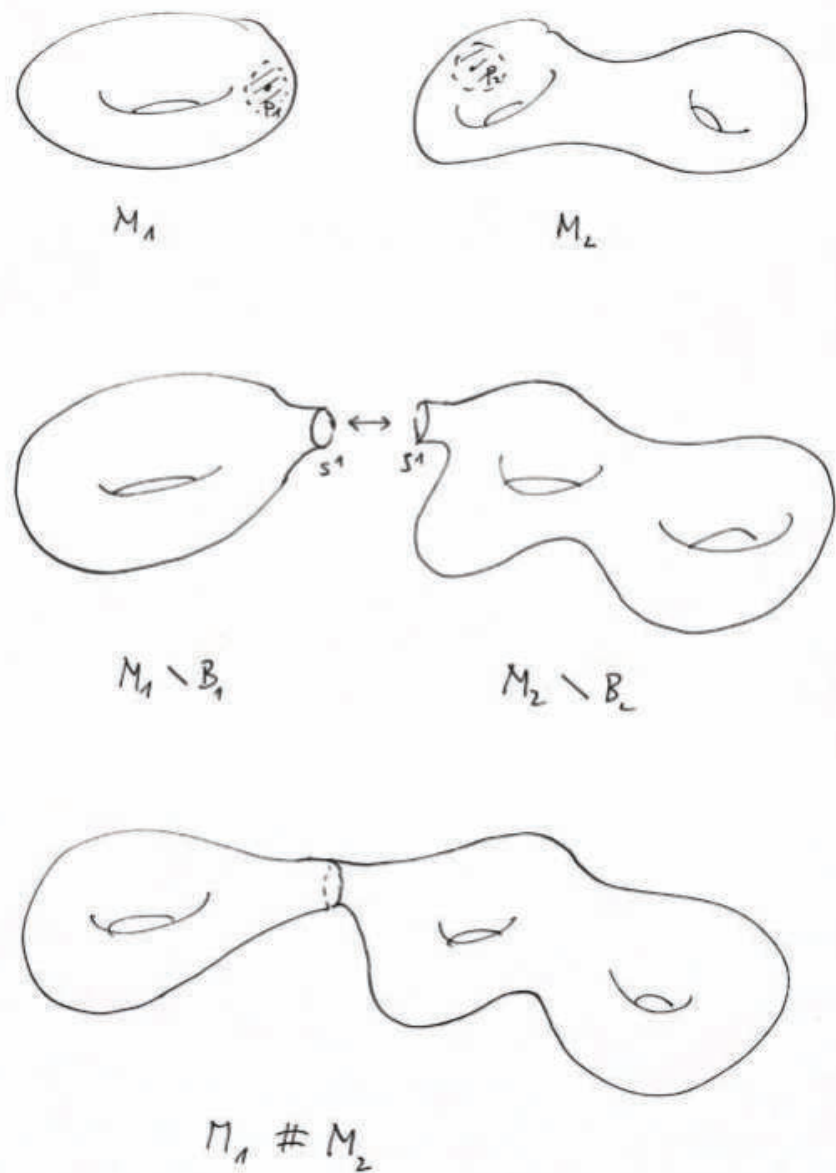
$$X = S^2$$



FIGUR 51



FIGUR 52

FIGUR 53

Falls  $Y = X$  und  $f : A \subset X \rightarrow X$  kann man  $X$  auch direkt mit sich selbst verkleben. Wir notieren solche „Selbstverklebungen“ mit  $X/f$ .

Zum Beispiel erhalten wir so aus dem Einheitsquadrat Zylinder, Torus, Möbiusband und die Kleinsche Flasche (vgl. FIG. 54 und 55):

Sei  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  das Einheitsquadrat in  $\mathbb{R}^2$  mit Rand bestehend aus den vier Seiten

$$A_1 := \{0\} \times [0, 1], \quad A_2 := \{1\} \times [0, 1], \quad B_1 := [0, 1] \times \{0\}, \quad B_2 := [0, 1] \times \{1\}.$$

Für  $f_1 : A_1 \rightarrow A_2 \quad (0, y) \mapsto (1, y)$  ist  $X/f_1$  ein **Zylinder**.

Für

$$f_2 : A_1 \cup B_1 \rightarrow A_2 \cup B_2; \quad (0, y) \mapsto (1, y) \quad \text{und} \quad (x, 0) \mapsto (x, 1)$$

ist  $X/f_2$  ein **Torus**.

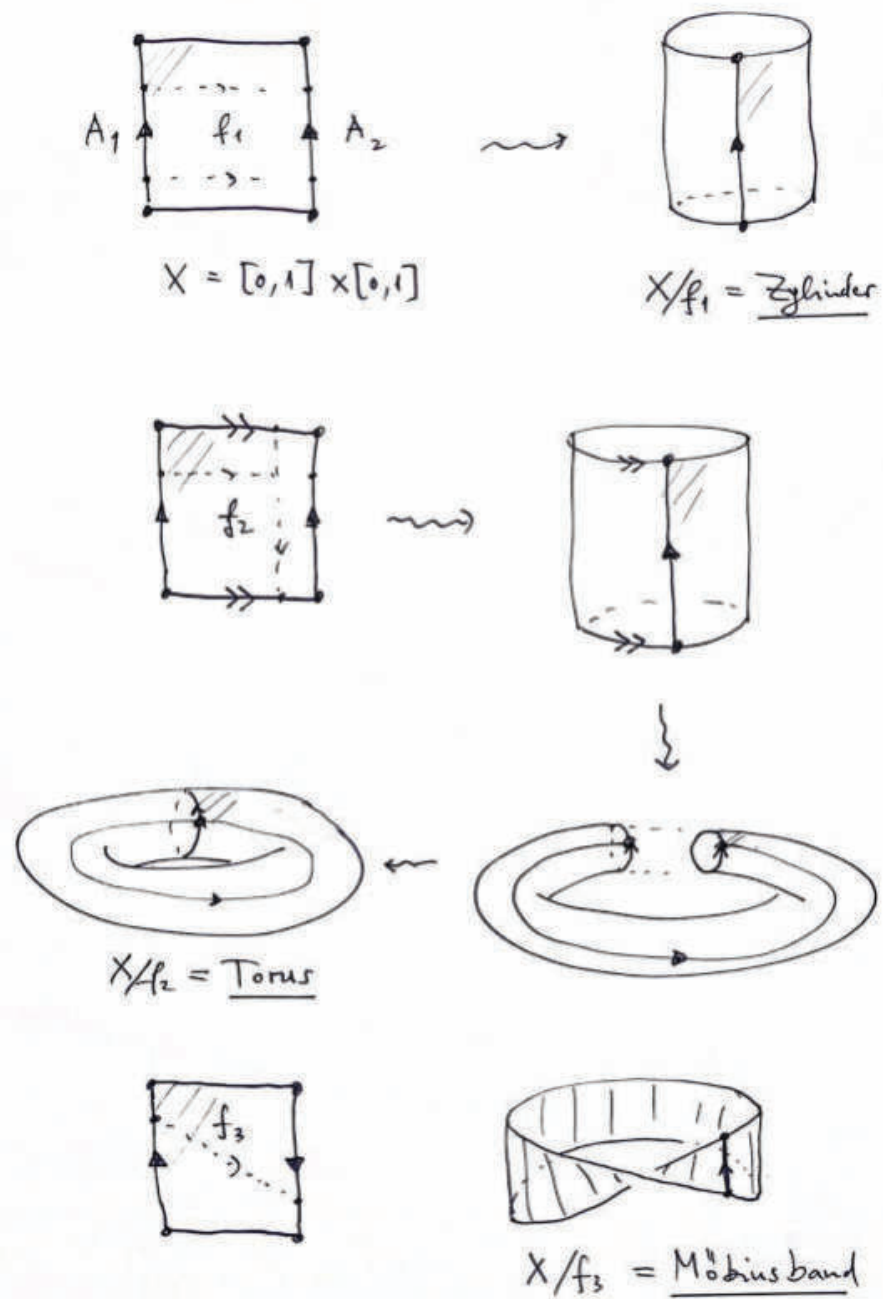
Für  $f_3 : A_1 \rightarrow A_2; \quad (0, y) \mapsto (1, 1 - y)$  ist  $X/f_3$  ein **Möbiusband**.

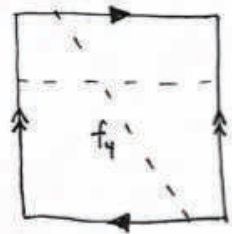
Für

$$f_4 : A_1 \cup B_1 \rightarrow A_2 \cup B_2; \quad (0, y) \mapsto (1, 1 - y) \quad \text{und} \quad (x, 0) \mapsto (x, 1)$$

ist  $X/f_4$  eine **Kleinsche Flasche**.



FIGUR 54



Klein'sche Fläche

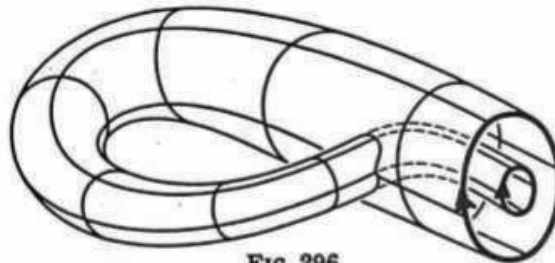
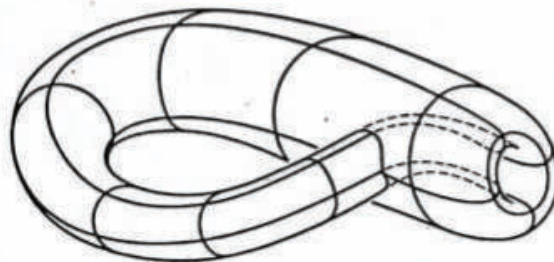


FIG. 296



$X/f_4$

( aus Hilbert - Cohn Vossen, Anschauliche Geometrie )

FIGUR 55

## 5 Die Geometrie von Flächen

Das Ziel dieses Kapitels ist es, auf 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten Geometrie zu betreiben, also etwa „Längen“ und „Winkel“ etc. zu messen. Die entsprechende Theorie von „krummen Flächen“ geht auf C.F. Gauß (1827) zurück. Eine Literatur-Empfehlung dazu: M. Spivak, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 3: How to read Gauß.

### Erinnerung (Analysis): Tangentialraum.

Für einen Punkt  $p \in \mathbb{R}^n$  ist der **Tangentialraum**  $T_p\mathbb{R}^n$  in  $p$  definiert als der affine Unterraum  $\{p\} \times \mathbb{R}^n$  (also alle „Richtungsvektoren mit Fußpunkt“  $p$ ), den man wiederum (durch „Vergessen“ des Fußpunktes) mit dem Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  identifizieren kann.

Für eine differenzierbare Abbildung  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist die **Ableitung** (oder das **Differential**) von  $f$  in  $p \in \mathbb{R}^m$  definiert als eine lineare Abbildung  $df(p) : T_p\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ , die  $f$  in einer Umgebung von  $p$  „approximiert“. Bezüglich der Standardbasen ist die Ableitung explizit durch die Funktional-Matrix von  $f$  in  $p$  gegeben (vgl. z.B. Königsberger, Analysis 2, Kap.3).

### Erinnerung (Lineare Algebra): Vektorprodukt .

Für zwei Vektoren  $a = (a_1, a_2, a_3)$  und  $b = (b_1, b_2, b_3)$  in  $\mathbb{R}^3$  ist das **Vektorprodukt**  $a \wedge b$  definiert durch  $a \wedge b := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \in \mathbb{R}^3$ . Das Vektorprodukt hat vier wichtige Eigenschaften (vgl. FIG. 56):

- Der Vektor  $a \wedge b$  ist orthogonal zu den Vektoren  $a$  und  $b$ .
- Ist  $\alpha$  der Winkel zwischen  $a$  und  $b$ , so ist  $\|a \wedge b\| = \|a\|\|b\|\sin \alpha$  die Fläche des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms.
- Mit dem Standard-Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gilt:  $\|a \wedge b\|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2$ .
- Die drei Vektoren  $a, b, a \wedge b$  (in dieser Reihenfolge) sind *positiv orientiert*, d.h. es gilt  $\det(a, b, a \wedge b) > 0$ .

### 5.1 Reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$

Reguläre Flächen hatten wir in Abschnitt 4.3.2 schon als Beispiele von 2-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kennengelernt. Bevor wir solche Flächen weiter untersuchen, wiederholen wir nochmals (etwas ausführlicher) die Definition.

Eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^3$  heißt **reguläre Fläche**, falls es zu jedem Punkt  $p \in S$

eine offene Umgebung  $V$  von  $p$  in  $\mathbb{R}^3$ , eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^2$  und eine  $C^\infty$ -Abbildung (**lokale Parametrisierung**)

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (u, v) \mapsto x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

gibt, so dass gilt

(1)  $x(U) = S \cap V$  und  $x : U \rightarrow S \cap V$  ist ein Homöomorphismus (vgl. FIG. 57),

(2) die Ableitung  $dx(u, v) : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{x(u,v)}\mathbb{R}^3$  ist injektiv für alle  $(u, v) \in U$ .

**Bemerkung.** Bedingung (2) ist äquivalent zu jeder der folgenden drei Aussagen:

(2)  $\iff$  (2a) die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} =: (x_u(u, v), x_v(u, v))$$

hat Rang 2 für alle  $(u, v) \in U$

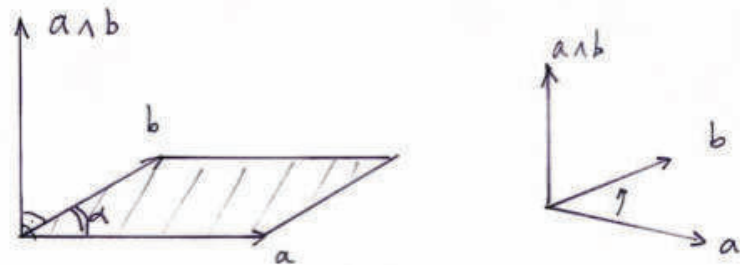
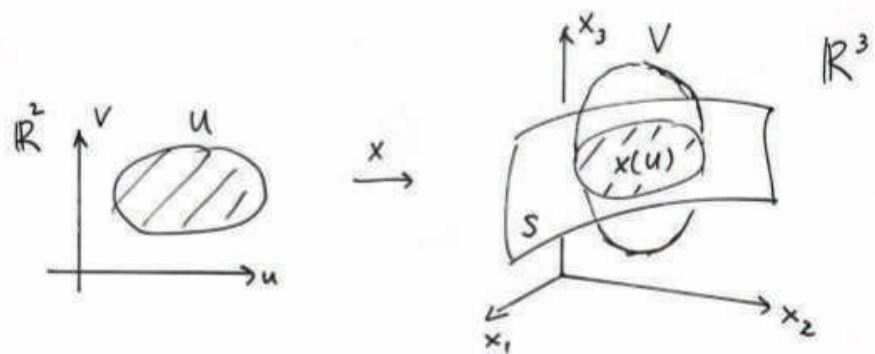
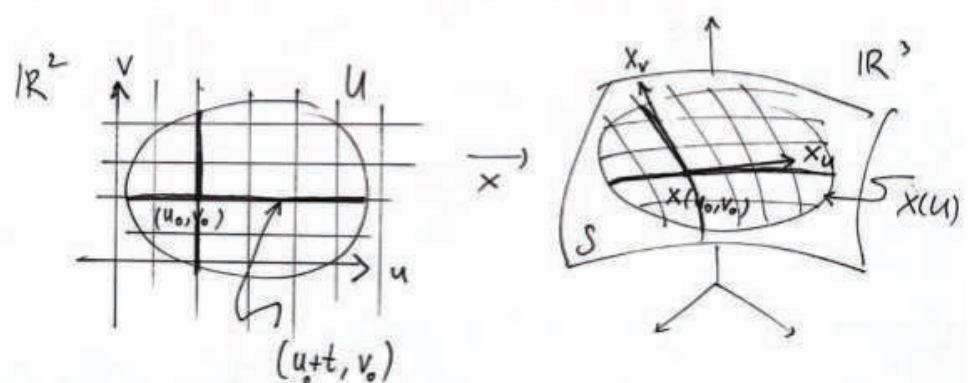
$\iff$  (2b) die Spaltenvektoren  $x_u(u, v) := \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)$  und  $x_v(u, v) := \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)$  der Funktionalmatrix sind linear unabhängig für alle  $(u, v) \in U$

$\iff$  (2c) das Vektorprodukt  $x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)$  ist ungleich Null für alle  $(u, v) \in U$ .

Bedingung (1) besagt, dass eine Fläche „lokal so aussieht wie“ ein Stück von  $\mathbb{R}^2$ . Mit Bedingung (2) können wir in jedem Punkt einer solchen Fläche eine Ebene konstruieren, die die Fläche in diesem Punkt „approximiert“ (so wie die Tangente einer Kurve, diese im Berührungspunkt approximiert).

Sei dazu  $S$  eine reguläre Fläche mit Parametrisierung  $x(u, v)$ . Die **Tangentialebene von  $S$  im Punkt  $p = x(u_0, v_0)$**  ist definiert als lineare Hülle der Vektoren  $x_u$  und  $x_v$  in diesem Punkt; genauer

$$T_p S := dx(u_0, v_0)(T_{(u_0, v_0)}\mathbb{R}^2) = \{p\} \times \text{Span}(x_u(u_0, v_0), x_v(u_0, v_0)) \subset T_p \mathbb{R}^3.$$

FIGUR 56FIGUR 57FIGUR 58

**Geometrische Interpretation:**

Die Tangentialebene im Punkt  $p$  ist ein 2-dimensionaler affiner Unterraum, der die Fläche  $S$  im Punkt  $p$  linear „approximiert“. Genauer (vgl. FIG 58) gilt:

$$x_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x(u_0 + t, v_0) \quad \text{und}$$

$$x_v(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x(u_0, v_0 + t).$$

Allgemeiner gilt für eine **Flächenkurve**  $c(t) = x(u(t), v(t)) \subset x(U) \subset S$  mit  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  durch den Punkt  $p = c(0) = x(u(0), v(0))$

$$c'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x(u(t), v(t)) = \frac{\partial x}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(0) = u'(0)x_u + v'(0)x_v ;$$

die vorletzte Gleichheit gilt dabei wegen der Kettenregel. Der Vektor  $c'(0) \in T_p S$  heißt **Tangentialvektor** an die Flächenkurve  $c(t)$  im Punkt  $p = c(0)$  (vg. FIG. 59).

**Bemerkung.** In obiger Definition der Tangentialebene im Punkt  $p \in S$  haben wir eine Parametrisierung  $x : U \rightarrow S$ ;  $(u, v) \rightarrow x(u, v)$  von  $S$  um  $p = x(u_0, v_0)$  benutzt:  $T_p S$  ist die lineare Hülle von  $x_u$  und  $x_v$ . Damit der Begriff wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass für eine andere Parametrisierung  $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow S$ ;  $(\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow \bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$  um den Punkt  $p$  die entsprechenden linearen Hüllen übereinstimmen:  $\text{Span}(x_u, x_v) = \text{Span}(\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}})$ .

Mit der Kettenregel rechnen wir zuerst nach, dass gilt

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u}(\bar{x} \circ \bar{x}^{-1} \circ x(u, v)) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = \bar{x}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \bar{x}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \end{aligned}$$

und analog  $x_v = \bar{x}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \bar{x}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}$ .

In der Definition einer regulären Fläche wird verlangt, dass die Vektoren  $x_u$  und  $x_v$  bzw.  $\bar{x}_{\bar{u}}$  und  $\bar{x}_{\bar{v}}$  linear unabhängig sind. Mit den obigen Formeln sehen wir also, dass  $\{x_u, x_v\}$  bzw.  $\{\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}\}$  zwei Basen des gleichen 2-dimensionalen affinen Unterraumes von  $T_p \mathbb{R}^3$  bilden und dass die Transformationsmatrix des Basiswechsels, also

$$D(u_0, v_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

gerade die Funktionalmatrix der Koordinatentransformation

$$\bar{x}^{-1} \circ x : U \rightarrow \bar{U}; \quad (u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$$

im Punkt  $(u_0, v_0) \in U$  ist.

### Beispiele

1. **Affine Ebene:** Für  $a_0, a, b \in \mathbb{R}^3$  mit  $a, b$  linear unabhängig ist

$$S := \{a_0 + ua + vb \mid u, v \in \mathbb{R}\}$$

eine reguläre Fläche mit einer einzigen Parametrisierung:  $U := \mathbb{R}^2, V := \mathbb{R}^3$  und  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3; (u, v) \mapsto a_0 + ua + vb$ . Es ist dann  $x_u = a$  und  $x_v = b$  und  $T_p S = \{p\} \times \text{Span}\{a, b\} \cong S$ .

Was passiert, wenn  $a$  und  $b$  nicht linear unabhängig sind?

2. **Graphen von Funktionen:** Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion. Der Graph von  $f$  ist die Menge

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in U, x_3 = f(x_1, x_2)\}.$$

Wir wollen zeigen, dass  $S$  eine reguläre Fläche ist. Wie in Beispiel 1 genügt eine einzige Parametrisierung

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}^3; (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)).$$

Es ist dann  $x(U) = S = S \cap V$ . Weiter ist  $x : U \rightarrow S$  differenzierbar (also stetig) und injektiv (wieso?). Die Umkehrabbildung  $x^{-1} : S \rightarrow U; (u, v, f(u, v)) \mapsto (u, v)$  ist (als Projektionsabbildung) ebenfalls stetig. Damit ist Bedingung (1) für eine reguläre Fläche verifiziert.

Da weiter  $x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$  und  $x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$  linear unabhängig sind, ist auch Bedingung (2) für eine reguläre Fläche erfüllt.

**Bemerkung.** Man kann zeigen: Ist  $S$  eine reguläre Fläche in  $\mathbb{R}^3$ , so existiert zu jedem Punkt  $p \in S$  eine geeignete offene Umgebung  $W \subset \mathbb{R}^3$ , so dass  $S \cap W$  Graph einer  $C^\infty$ -Funktion ist (evt. muss man auch noch die Koordinatenachsen von  $\mathbb{R}^3$  vertauschen). Ist z.B.  $S = S^2$  die Einheitssphäre und  $p$  ein Punkt in der „oberen“ Hemisphäre (gegeben durch alle Punkte mit  $x_3 > 0$ ), so kann man als  $f$  die Funktion  $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$  wählen.

## 5.2 Die erste Fundamentalform einer Fläche

**Erinnerung (Lineare Algebra).** Ein euklidischer Vektorraum ist ein Paar  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bestehend aus einem reellen Vektorraum  $V$  und einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Mit Hilfe eines Skalarproduktes kann man **Längen (Norm)** von Vektoren und **Winkel**

zwischen Vektoren definieren: Für  $a, b \in V$  ist

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle} \quad \text{und} \quad \cos \angle(a, b) := \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}.$$

Im Spezialfall  $V = \mathbb{R}^2$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gleich dem Standard-Skalarprodukt erhält man ein Modell für die **ebene euklidische Geometrie**. Man kann z.B. von Dreiecken, deren Seitenlängen und (Innen-)Winkeln sprechen.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, solche Begriffe auf reguläre Flächen zu übertragen.

Sei  $S$  eine reguläre Fläche in  $\mathbb{R}^3$ . Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass es dann in jedem Punkt  $p$  von  $S$  eine Tangentialebene  $T_p S$  gibt, also einen 2-dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^2 \cong T_p S \subset T_p \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ . Wir machen  $T_p S$  zu einem euklidischen Vektorraum, indem wir als Skalarprodukt die Einschränkung des Standard-Skalarproduktes von  $\mathbb{R}^3$  wählen: Die bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}; \quad \langle a, b \rangle_p := \langle a, b \rangle$$

ist dann ein Skalarprodukt auf  $T_p S$  (wieso?). Die Zuordnung  $I : p \mapsto I(p) := \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  heißt **1. Fundamentalform von  $S$** .

Das ist die abstrakte Definition. Um mit der 1. Fundamentalform explizit rechnen zu können, betrachten wir eine (lokale) Parametrisierung  $x : U \rightarrow S; (u, v) \mapsto x(u, v)$  von  $S$ . Dann bilden  $x_u(u, v)$  und  $x_v(u, v)$  eine Basis von  $T_{x(u, v)} S$ . Bezüglich dieser Basis können wir die Bilinearform  $I(p)$  für  $p \in x(U) \subset S$  durch eine positiv definite, symmetrische  $(2 \times 2)$ -Matrix beschreiben:

$$(g_{ij}(u, v)) = \begin{pmatrix} g_{11}(u, v) & g_{12}(u, v) \\ g_{21}(u, v) & g_{22}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} g_{11}(u, v) &= E(u, v) = \langle x_u(u, v), x_u(u, v) \rangle, \\ g_{12}(u, v) = g_{21}(u, v) &= F(u, v) = \langle x_u(u, v), x_v(u, v) \rangle = \langle x_v(u, v), x_u(u, v) \rangle, \\ g_{22}(u, v) &= G(u, v) = \langle x_v(u, v), x_v(u, v) \rangle. \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Matrixeinträge  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen und die Matrizen  $(g_{ij}(u, v))$  definieren eine Familie von Skalarprodukten auf  $U$  (eine solche Zuordnung nennt man auch **Riemannsche Metrik**, vgl. Abschnitt 7.2).

### Bemerkungen:

1) Nach dem Hauptminoren-Kriterium von Sylvester und Hurwitz (vgl. Lineare Algebra) gilt:  $I(x(u, v))$  ist positiv definit genau dann, wenn  $E(u, v) > 0$  und  $(EG - F^2)(u, v) = \det I(x(u, v)) > 0$ .



2) Wählt man eine andere Parametrisierung  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ , so erhält man eine zugehörige Basis  $\{\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}\}$  von  $T_p S$  und die  $(2 \times 2)$ -Matrix  $(\bar{g}_{ij}(\bar{u}, \bar{v}))$  von  $I(p)$  bezüglich dieser Basis. Es gilt dann (in jedem Punkt) die Transformationsformel für Skalarprodukte (vgl. Lineare Algebra)

$$(g_{ij}(u, v)) = D(u, v)^\top (\bar{g}_{ij}(\bar{u}, \bar{v})) D(u, v)$$

mit der Funktionalmatrix

$$D(u, v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

als Basiswechsel-Matrix (vgl. Abschnitt 5.1). Wir haben also die bekannten Formeln aus der linearen Algebra, nur dass wir nicht nur einen Vektorraum mit Skalarprodukt betrachten, sondern eine ganze Familie von solchen (Tangentialebenen mit 1. Fundamentalform).

### Beispiele von 1. Fundamentalformen.

1. Seien  $a_0 \in \mathbb{R}^3$  beliebig und  $a, b \in \mathbb{R}^3$  zwei orthonormierte Vektoren:  $\|a\| = \|b\| = 1, a \perp b$ .

Für die affine Ebene

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (u, v) \mapsto a_0 + ua + vb$$

ist dann  $x_u = a$  und  $x_v = b$ . Also

$$E(u, v) = \langle x_u(u, v), x_u(u, v) \rangle = \langle a, a \rangle = 1 \quad \text{und}$$

$$F(u, v) = \langle a, b \rangle = 0, \quad G(u, v) = \langle b, b \rangle = 1.$$

Somit ist die Matrix der 1. Fundamentalform gegeben durch

$$\begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (= \text{konstant, unabhängig von } (u, v)).$$

2. Es sei  $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$  ein Zylinder mit Radius  $r$ . Eine lokale Parametrisierung ist gegeben durch

$$x(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v) \quad \text{mit } (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

Also

$$x_u(u, v) = (-r \sin u, r \cos u, 0) \quad \text{und} \quad x_v(u, v) = (0, 0, 1).$$

Somit erhalten wir für die 1. Fundamentalform

$$\begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (= \text{konstant, unabhängig von } (u, v)).$$

Insbesondere sehen wir, dass für  $r = 1$  gilt  $I_{\text{Ebene}} = I_{\text{Zylinder}}$ . Der Grund dafür ist die Tatsache, dass Ebene und Zylinder lokal isometrisch sind (durch „Auf- bzw. Abwickeln“, vgl. Abschnitt 5.3).

Wir sehen an diesem Beispiel auch, dass die erste Fundamentalform nichts darüber aussagt, wie die Fläche in  $\mathbb{R}^3$  eingebettet ist.

3. Die 2-Sphäre vom Radius  $R$ ,  $S_R^2$ , hat folgende Parametrisierung

$$x(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta), \quad (\theta, \varphi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi).$$

Somit erhalten wir

$$x_\theta = (-R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta), \quad x_\varphi = (-R \cos \theta \sin \varphi, R \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

und damit für die 1. Fundamentalform

$$\begin{pmatrix} E(\theta, \varphi) & F(\theta, \varphi) \\ F(\theta, \varphi) & G(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}.$$

**Wozu ist die 1. Fundamentalform gut?** Nun, zum Beispiel kann man mit den Daten aus der 1. Fundamentalform die „Länge von Flächenkurven“, „Winkel zwischen Flächenkurven“ und den „Flächeninhalt von Gebieten“ auf einer regulären Fläche berechnen. Das wollen wir nun näher ausführen.

Auf einer regulären Fläche  $S$  (lokal parametrisiert durch  $x(u, v)$ ) betrachten wir eine **differenzierbare Flächenkurve**, d.h. eine differenzierbare Abbildung

$$c : [\alpha, \beta] \rightarrow S; \quad t \mapsto x(u(t), v(t)).$$

Der **Tangentenvektor** an  $c$  im Punkt  $c(t) \in S$  ist definiert als

$$c'(t) := \frac{dc(t)}{dt} = x_u(u(t), v(t))u'(t) + x_v(u(t), v(t))v'(t) \in T_{c(t)}S$$

und die **Länge** von  $c$  als

$$L(c) := \int_{\alpha}^{\beta} \|c'(t)\|_{c(t)} dt.$$

Nun ist

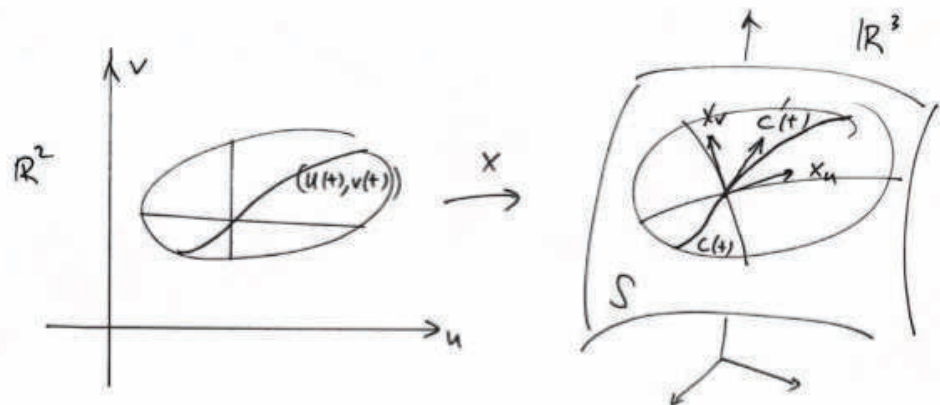
$$\begin{aligned} \|c'(t)\|_{c(t)}^2 &= \langle c'(t), c'(t) \rangle_{c(t)} = \langle c'(t), c'(t) \rangle \\ &= \langle x_u u'(t) + x_v v'(t), x_u u'(t) + x_v v'(t) \rangle = (u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G \end{aligned}$$

und somit (mit allen Funktionsargumenten ausgeschrieben)

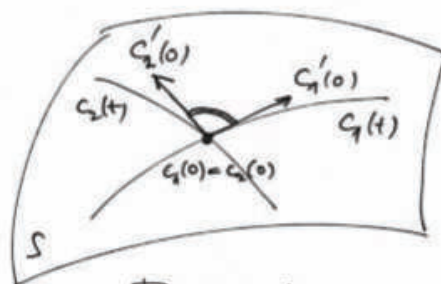
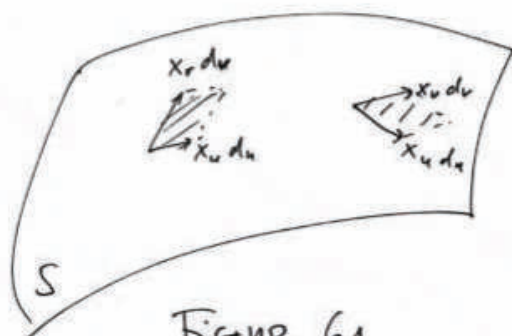
$$L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(u'(t))^2 E(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)F(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 G(u(t), v(t))} dt.$$

Fazit: Um die Länge einer Flächenkurve zu berechnen, genügt es, die Kurve  $t \mapsto (u(t), v(t))$  im Parametergebiet  $U \subset \mathbb{R}^2$  und die 1. Fundamentalform von  $S$  zu kennen.

Die Länge einer Flächenkurve ist ein Beispiel für eine Größe der sogenannten **inneren Geometrie** der Fläche  $S$ ; das sind Eigenschaften und Größen, die nur von der 1. Fundamentalform abhängen bzw. durch diese bestimmt sind.

FIGUR 59

Tangentialektor

 $\angle(c_1'(0), c_2'(0))$ FIGUR 60

$$dA = \|x_u \wedge x_v\| du dv$$

FIGUR 61

Ein anderes Beispiel für eine Größe der inneren Geometrie sind **Winkel zwischen Flächenkurven** (vgl. FIG. 60):

$$\cos \angle(c'_1(0), c'_2(0)) := \frac{\langle c'_1(0), c'_2(0) \rangle}{\|c'_1(0)\| \|c'_2(0)\|}.$$

Wieso ist das eine Größe der inneren Geometrie?

Wir betrachten noch ein drittes Beispiel einer Größe der inneren Geometrie einer regulären Fläche  $S$ :

Sei  $x : U \rightarrow x(U) \subset S \subset \mathbb{R}^3$  eine lokale Parametrisierung von  $S$ . Wir definieren dann den **Flächeninhalt von  $x(U)$**

$$A(x(U)) := \int \int_U \|x_u \wedge x_v\| \, dudv.$$

Dass  $A(x(U))$  eine Größe der inneren Geometrie ist, sieht man mit folgender Formel

$$\|x_u \wedge x_v\|^2 = \langle x_u, x_u \rangle \langle x_v, x_v \rangle - \langle x_u, x_v \rangle^2 = EG - F^2 = \det I > 0;$$

der Integrand in obigem Doppelintegral ist also gerade die Wurzel aus der Determinanten der 1. Fundamentalform (vgl. FIG. 61).

Wir müssen noch zeigen, dass der Flächeninhalt wohldefiniert (d.h. unabhängig von der gewählten Parametrisierung) ist.

Sei dazu  $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow \bar{x}(\bar{U})$  eine andere Parametrisierung mit  $x(U) = \bar{x}(\bar{U}) \subset S$ . Dann wissen wir, dass für die zugehörigen 1. Fundamentalformen die Transformationsformel  $I = D^\top \bar{I} D$  gilt, wobei  $D$  die Funktionalmatrix des Parameterwechsels  $\bar{x} \circ x^{-1} : U \rightarrow \bar{U}$  ist. Somit haben wir  $\det I = (\det D)^2 \det \bar{I}$  und die Behauptung folgt mit der Transformationsformel für Integrale:

$$\int \int_{\bar{U}} \sqrt{\det \bar{I}} \, d\bar{u}d\bar{v} = \int \int_U \sqrt{\det \bar{I}} |\det D| \, dudv = \int \int_U \sqrt{\det I} \, dudv.$$

Als Beispiel berechnen wir den Flächeninhalt der 2-Sphäre vom Radius  $R$ . Die 1. Fundamentalform hatten wir oben schon ausgerechnet:

$$I(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Also  $\det I = R^4 \cos^2 \theta$  und

$$A(S_R^2) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^4 \cos^2 \theta} \, d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta = 4\pi R^2.$$

### 5.3 Lokal isometrische Flächen

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie man die Länge von Flächenkurven berechnen kann. Damit können wir auf einer regulären Fläche  $S$  eine Längenmetrik definieren (vgl. Abschnitt 2.2) und  $S$  so zu einem metrischen Raum machen.

Dazu nehmen wir an, dass für zwei beliebige Punkte  $p, q \in S$  die Menge  $\Omega_{pq}$  aller stückweise differenzierbaren Flächenkurven zwischen  $p$  und  $q$  nicht leer ist und definieren eine Abbildung

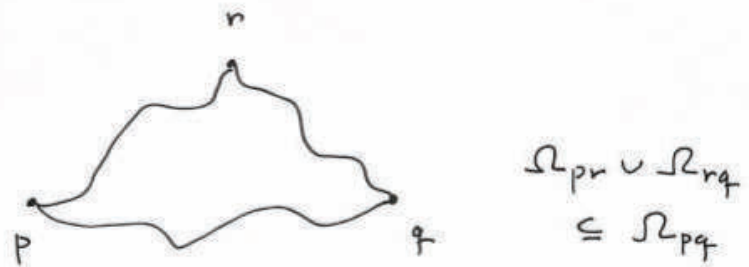
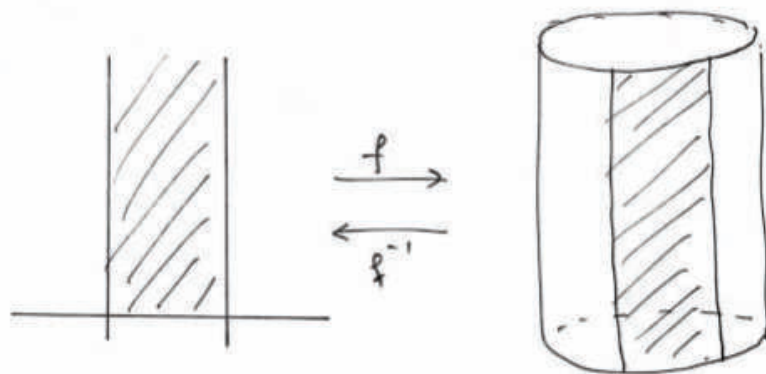
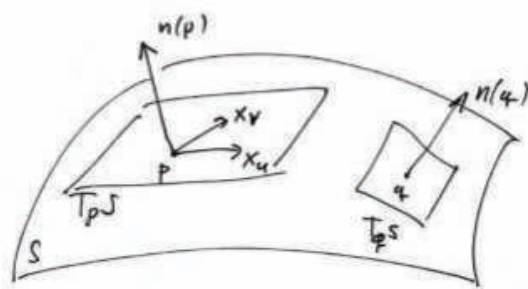
$$d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; \quad d_S(p, q) := \inf \{L(c) \mid c \in \Omega_{pq}\},$$

wobei  $L(c)$  wie oben die Länge einer Flächenkurve  $c$  bezeichnet. Anschaulich ist  $d_S(p, q)$  also die Länge des kürzesten Weges zwischen den Punkten  $p, q \in S$ , der *ganz in*  $S$  verläuft. Insbesondere gilt für die (euklidische) Metrik von  $\mathbb{R}^3$ :  $d_S \geq d_{euk}$  (wieso?).

**Satz 1**  $d_S$  ist eine (Längen-) Metrik auf der regulären Fläche  $S$ .

*Beweis:*

- Die Symmetrie  $d_S(p, q) = d_S(q, p)$  gilt, da man jeden Weg  $c : [0, 1] \rightarrow S$ ;  $t \mapsto c(t)$  „rückwärts durchlaufen“ kann, indem man setzt  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow S$ ;  $\tilde{c}(t) := c(1 - t)$ . Es ist dann  $L(\tilde{c}) = L(c)$  (wieso?).
- Die Dreiecksungleichung  $d_S(p, q) \leq d_S(p, r) + d_S(r, q)$  gilt, da die Menge der Verbindungswege zwischen  $p$  und  $q$ , die über  $r$  verlaufen, also  $\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq}$  eine Teilmenge der Menge  $\Omega_{pq}$  aller Verbindungswege zwischen  $p$  und  $q$  ist (und der kürzeste direkte Weg i.a. kürzer ist als die Zusammensetzung der beiden kürzesten Wege zwischen  $p, r$  bzw.  $r, q$ ) (vgl. FIG. 62).
- Die Definitheit folgt so: Ist  $p = q$ , so hat der konstante Weg  $c_0 : [0, 1] \rightarrow S$ ;  $t \mapsto c_0(t) = p$  die Länge 0 (wieso?) und damit  $d_S(p, p) = L(c_0) = 0$ . Ist umgekehrt  $p \neq q$ , so existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass die  $\varepsilon$ -Bälle  $B_\varepsilon(p)$  und  $B_\varepsilon(q)$  in  $\mathbb{R}^3$  disjunkt sind. Dann folgt  $d_S(p, q) \geq d_{euk}(p, q) \geq 2\varepsilon > 0$ .

FIGUR 62FIGUR 63 (Auf- und Abwickeln)FIGUR 64 (Normalenvektoren)

Seien jetzt  $S$  und  $\tilde{S}$  reguläre Flächen in  $\mathbb{R}^3$ . Eine Abbildung  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  heißt **Isometrie**, wenn  $f$  ein Diffeomorphismus zwischen  $S$  und  $\tilde{S}$  ist und für alle differenzierbaren Kurven  $c : I \rightarrow S$  gilt, dass  $L(f \circ c) = L(c)$  ist (d.h.  $f$  ist **Längenerhaltend**). Eine so definierte Isometrie zwischen Flächen ist dann auch eine Isometrie zwischen den metrischen Räumen  $(S, d_S)$  und  $(\tilde{S}, d_{\tilde{S}})$ , es gilt also für alle  $p, q \in S$ , dass  $d_{\tilde{S}}(f(p), f(q)) = d_S(p, q)$  (d.h.  $f$  ist **Abstandserhaltend**).

Eine Abbildung  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  heißt **lokale Isometrie**, falls für jeden Punkt  $p \in S$  offene Umgebungen  $U \subset S$  von  $p$  und  $V \subset \tilde{S}$  von  $f(p)$  existieren, so dass  $f$  eingeschränkt auf  $U$  eine Isometrie zwischen  $U$  und  $V$  ist.

**Satz 2 (Kriterium für lokale Isometrien)**

Sind  $S$  und  $\tilde{S}$  reguläre Flächen in  $\mathbb{R}^3$  und sind

$$x : U \rightarrow x(U) \subset S \quad \text{und} \quad \tilde{x} : U \rightarrow \tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$$

lokale Parametrisierungen mit gemeinsamem Parameterbereich  $U$ , so dass die ersten Fundamentalformen von  $S$  und  $\tilde{S}$  in entsprechenden Punkten übereinstimmen, d.h. für alle  $(u, v) \in U$  gilt

$$\begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E}(u, v) & \tilde{F}(u, v) \\ \tilde{F}(u, v) & \tilde{G}(u, v) \end{pmatrix},$$

so sind  $x(U) \subset S$  und  $\tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$  isometrisch.

*Beweis.* Die Abbildung  $f := \tilde{x} \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \tilde{x}(U)$  ist ein Diffeomorphismus. Sei dann  $c : [a, b] \rightarrow S$ ;  $c(t) = x(u(t), v(t)) \in x(U) \subset S$  eine stückweise differenzierbare Kurve. Dann gilt für ihre Länge

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b \|c'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E((u(t), v(t))(u')^2 + 2F(u(t), v(t))u'v' + G(u(t), v(t))(v')^2) dt \\ &\stackrel{\text{Vor}}{=} \int_a^b \sqrt{\tilde{E}((u(t), v(t))(u')^2 + 2\tilde{F}(u(t), v(t))u'v' + \tilde{G}(u(t), v(t))(v')^2) dt. \end{aligned}$$

Weiter ist die Länge der Bildkurve  $f \circ c(t) = \tilde{x}(u(t), v(t))$  gegeben durch

$$\begin{aligned} L(f \circ c) &= \int_a^b \|(f \circ c)'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\tilde{E}((u(t), v(t))(u')^2 + 2\tilde{F}(u(t), v(t))u'v' + \tilde{G}(u(t), v(t))(v')^2) dt, \end{aligned}$$

also  $L(f \circ c) = L(c)$ . □



**Beispiel: Ebene und Zylinder sind lokal isometrisch:**

Ein gemeinsamer Parameterbereich für Ebene bzw. Zylinder ist  $U := (0, 1) \times (0, \infty)$  mit den Parametrisierungen gegeben durch

$$x(u, v) = (u, v, 0) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Für die ersten Fundamentalformen gilt

$$\begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E}(u, v) & \tilde{F}(u, v) \\ \tilde{F}(u, v) & \tilde{G}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 2 sind  $f := \tilde{x} \circ x^{-1}$  („Aufwickeln“) und  $f^{-1}$  („Abwickeln“) Isometrien (vgl. FIG. 63).

**Bemerkung.** Ebene und Zylinder sind nicht global isometrisch. Sonst wären sie insbesondere diffeomorph und damit auch homöomorph. Man kann aber zeigen, dass das nicht gilt. Dazu benutzt man eine topologische Invariante, die sogenannte Fundamentalgruppe. Diese ist für die Ebene die triviale Gruppe und für den Zylinder isomorph zur unendlich zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}$ .

**5.4 Normalenvektoren und 2. Fundamentalform**

Ist  $S$  eine reguläre Fläche in  $\mathbb{R}^3$ , so existiert für jeden Punkt  $p \in S$  die Tangentialebene  $T_p S$ . Für eine Parametrisierung  $x : U \rightarrow S$  um  $p$  ist  $T_p S = \text{Span}\{x_u, x_v\}$ . Ist  $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow S$  eine andere Parametrisierung um  $p$ , so gilt

$$\text{Span}\{\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}\} = \text{Span}\{x_u, x_v\}.$$

Weiter gilt für das Vektorprodukt

$$\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}} = \left(x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right) \wedge \left(x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right) x_u \wedge x_v = \det(d\varphi) x_u \wedge x_v,$$

wobei  $\varphi : \bar{U} \rightarrow U; (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)$  die Parametertransformation und  $d\varphi$  die Ableitung davon ist (rechnen Sie das nach!).

Da  $x_u, x_v$  nach Definition einer regulären Fläche linear unabhängig sind, ist das Vektorprodukt  $x_u \wedge x_v \neq 0$  und der Vektor

$$n(p) := n(x(u, v)) \equiv n(u, v) := \frac{x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)}{\|x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)\|}$$

ein Einheitsvektor in  $\mathbb{R}^3$  orthogonal zur Tangentialebene  $T_p S$ . Dieser Vektor  $n(p)$  heißt **Normalenvektor** von  $S$  in  $p$ . Variiert man den Punkt  $p$ , so erhält man ein **Vektorfeld** (vgl. FIG. 64).

Nach der obigen Rechnung für das Vektorprodukt gilt für eine andere Parametrisierung  $\bar{x}$  um  $p$

$$\bar{n}(p) = \frac{\det(d\varphi(p))}{|\det(d\varphi(p))|} n(p).$$

Damit der Normalenvektor unabhängig von der Parametrisierung eindeutig ist, brauchen wir also die Voraussetzung, dass für alle Kartenwechsel  $\varphi$  gilt  $\det(d\varphi) > 0$ . Eine reguläre Fläche  $S$  (oder allgemeiner eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$ ) heißt **orientierbar**, falls ein Atlas von  $S$  (bzw. von  $M$ ) existiert, so dass alle Kartenwechsel positive Funktionaldeterminante haben. Beispielsweise sind die Kugel  $S^2$  und der Torus  $S^1 \times S^1$  orientierbar. Man kann auch zeigen, dass etwa das Möbiusband und die Kleinsche Flasche nicht orientierbar sind. Falls  $S$  orientierbar ist, gilt für jede Parametrisierung  $x : U \rightarrow S$ , dass  $\det(x_u, x_v, x_u \wedge x_v) > 0$  (d.h. die drei Vektoren  $x_u, x_v, x_u \wedge x_v$  bilden ein „(positiv) orientiertes Dreibein“).

### Beispiele von Normalenvektoren

1. Für eine affine Ebene aufgespannt von (linear unabhängigen) Vektoren  $a$  und  $b$  (vgl. Abschnitt 5.1) ist

$$n = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{a \wedge b}{\|a \wedge b\|} \quad (= \text{konstant (vgl. FIG. 65)}).$$

2. Für die 2-Sphäre vom Radius  $R$  mit Parametrisierung

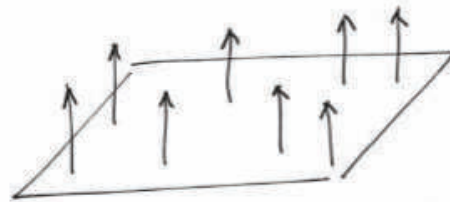
$$x(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta)$$

(vgl. Abschnitt 5.1) rechnen wir nach

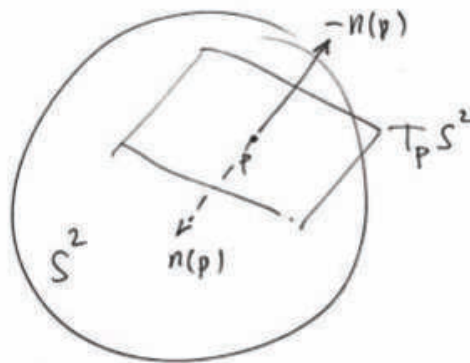
$$\begin{aligned} x_\theta &= (-R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) \\ x_\varphi &= (-R \cos \theta \sin \varphi, R \cos \theta \cos \varphi, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_\theta \wedge x_\varphi &= (-R^2 \cos^2 \theta \cos \varphi, -R^2 \cos^2 \theta \sin \varphi, -R^2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= -R \cos \theta (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta) = -R \cos \theta x(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

das ist die „innere Normale“,  $x_\varphi \wedge x_\theta = -x_\theta \wedge x_\varphi$  ist die „äussere Normale“ (vgl. FIG. 66). Es ist also  $n(\theta, \varphi)$  parallel zu  $x(\theta, \varphi)$  (können sie das auch ohne Rechnung begründen?).



FIGUR 65 (Normalenfeld Ebene)



FIGUR 66 (innere/äußere  
Normale für  $S^2$ )

**Frage:** Der wesentliche *topologische Unterschied* zwischen einer Ebene und einer Kugel ist der, dass eine Ebene nicht kompakt und eine Kugel kompakt ist. Was ist der wesentliche *geometrische Unterschied* zwischen einer Ebene und einer Kugel? Grob gesagt ist eine Ebene „flach“ und eine Kugel „gekrümmt“. Gauß hat sich gefragt: Wie kann man die „Krümmung“ einer Fläche mathematisch beschreiben? Seine Idee war es, die Änderungen der Normalenvektoren zu messen.

Wie ändern sich also die Normalenvektoren  $n(p)$  einer regulären Fläche  $S$ , wenn man den Punkt  $p \in S$  bewegt? Dazu betrachten wir die Normalenvektoren  $n(c(t))$  längs einer differenzierbaren „Testkurve“  $c(t) = x(u(t), v(t))$  auf  $S$ . Wenn wir  $n(c(t))$  nach dem Kurvenparameter  $t$  ableiten, erhalten wir

$$\frac{d}{dt}n(c(t)) = \frac{d}{dt}n(u(t), v(t)) = \frac{\partial n}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} =: n_u u' + n_v v'.$$

Nun ist  $\langle n, n \rangle = \|n\|^2 = 1$ . Für die partielle Ableitung des Skalarprodukts nach  $u$  gilt die Formel

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle n, n \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u} n, n \right\rangle + \left\langle n, \frac{\partial}{\partial u} n \right\rangle,$$

also wegen der Symmetrie des Skalarprodukts und weil  $\langle n, n \rangle = 1 = \text{konstant}$

$$\begin{aligned} \langle n_u, n \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle n, n \rangle = 0 \quad \text{und analog} \\ \langle n_v, n \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle n, n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Vektoren  $n_u$  und  $n_v$  orthogonal zum Normalenvektor  $n$  und liegen somit in der Tangentialebene:  $n_u, n_v \in T_p S$ .

Die Vektoren  $x_u$  und  $x_v$  bilden eine Basis von  $T_p S$ , so dass wir  $n_u$  als Linearkombination von  $x_u$  und  $x_v$  schreiben können:  $n_u = \lambda x_u + \mu x_v$ . Die Komponenten  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  sind dann durch die Skalarprodukte  $\langle n_u, x_u \rangle$  und  $\langle n_u, x_v \rangle$  und die 1. Fundamentalform bestimmt (wieso?).

Diese Skalarprodukte können wir auch noch anders schreiben. Dazu leiten wir  $\langle x_u, n \rangle = 0$  partiell nach  $u$  ab:

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle x_u, n \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u} x_u, n \right\rangle + \left\langle x_u, \frac{\partial}{\partial u} n \right\rangle =: \langle x_{uu}, n \rangle + \langle x_u, n_u \rangle$$

oder, äquivalent,

$$\begin{aligned} \langle x_u, n_u \rangle &= -\langle x_{uu}, n \rangle \quad \text{und analog} \\ \langle x_v, n_u \rangle &= -\langle x_{uv}, n \rangle \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Das motiviert die folgende Definition (von Gauß, 1827): Die **2. Fundamentalform** einer regulären Fläche  $S$  mit lokaler Parametrisierung  $x : U \rightarrow S$ ;  $(u, v) \mapsto x(u, v)$

(und damit der Basis  $x_u, x_v$  der Tangentialebene  $T_{x(u,v)}S$ ) ist definiert als die (Familie von) symmetrischen  $(2 \times 2)$ -Matrizen

$$II(x(u, v)) \equiv II(u, v) \equiv \begin{pmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle x_{uu}, n \rangle & \langle x_{uv}, n \rangle \\ \langle x_{vu}, n \rangle & \langle x_{vv}, n \rangle \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen sind symmetrisch, da für die  $C^\infty$ -Abbildung  $x$  gilt:

$$x_{uv} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial}{\partial u} x \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial}{\partial v} x \right) = x_{vu},$$

d.h. die zweiten partiellen Ableitungen vertauschen.

**Bemerkung.** Im Gegensatz zur 1. Fundamentalform ist die 2. Fundamentalform i.a. nicht positiv definit (vgl. z.B. folgendes Beispiel 1).

**Beispiele.** Wir führen die obigen Beispielrechnungen weiter.

1. Affine Ebene: Es ist  $x_{uu} = x_{uv} = x_{vv} = 0$  und  $n = \text{konstant}$ , also

$$II(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Zylinder: Wir haben  $x(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$  und  $n(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$ . Also

$$\begin{aligned} x_u &= (-r \sin u, r \cos u, 0), & x_v &= (0, 0, 1) \\ x_{uu} &= (-r \cos u, -r \sin u, 0), & x_{uv} = x_{vv} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

und somit

$$II(u, v) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Kugel vom Radius  $R$ . Es ist  $x(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta)$  und

$$\begin{aligned} x_{\theta\theta} &= -x, & n &= -\frac{1}{R}x \\ x_{\theta\varphi} &= x_{\varphi\theta} = (-R \sin \theta \sin \varphi, -R \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ x_{\varphi\varphi} &= (-R \cos \theta \cos \varphi, -R \cos \theta \sin \varphi, 0) \end{aligned}$$

also

$$L = \langle x_{\theta\theta}, n \rangle = R, \quad M = \langle x_{\theta\varphi}, n \rangle = 0, \quad N = \langle x_{\varphi\varphi}, n \rangle = R \cos^2 \theta.$$

## 5.5 Gauß-Krümmung

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche,  $p$  ein Punkt in  $S$  und  $I(p)$  bzw.  $II(p)$  die 1. bzw. 2. Fundamentalform von  $S$  in  $p$ . Die **Gauß-Krümmung** von  $S$  ist definiert als Funktion

$$K : S \rightarrow \mathbb{R}; \quad K(p) := \frac{\det II(p)}{\det I(p)}.$$

Man beachte, dass  $\det I(p) > 0$ , da die 1. Fundamentalform positiv definit ist.

**Bemerkung.** Die Gauß-Krümmung ist invariant unter Parametertransformationen (also unabhängig von der Wahl der Parametrisierung): Sind  $x$  und  $\bar{x}$  lokale Parameter und  $D(p)$  die Funktionaldeterminante der Parametertransformation  $\bar{x}^{-1} \circ x$  im Punkt  $x^{-1}(p)$ , so gilt für die 1. und 2. Fundamentalformen

$$I(p) = D(p)^\top \bar{I}(p) D(p) \quad \text{und} \quad II(p) = D(p)^\top \bar{II}(p) D(p),$$

also

$$\det I(p) = (\det D(p))^2 \det \bar{I}(p) > 0 \quad \text{und} \quad \det II(p) = (\det D(p))^2 \det \bar{II}(p).$$

### Beispiele

1. Affine Ebene: Wir hatten schon ausgerechnet

$$II(x(u, v)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I(x(u, v)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also  $K(x(u, v)) = \frac{\det II(x(u, v))}{\det I(x(u, v))} = 0 = \text{konstant}$ .

2. Zylinder: Wir haben

$$II(x(u, v)) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I(x(u, v)) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also  $K(x(u, v)) = \frac{\det II(x(u, v))}{\det I(x(u, v))} = 0 = \text{konstant}$ .

3. Kugel vom Radius  $R$ : Hier haben wir

$$II(x(u, v)) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I(x(u, v)) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

also  $K(x(u, v)) = \frac{\det II(x(u, v))}{\det I(x(u, v))} = \frac{1}{R^2} = \text{konstant}$ . Insbesondere gilt, dass die Krümmung einer Kugel vom Radius  $R$  gegen Null geht, wenn  $R$  gegen Unendlich geht (wieso ist das plausibel?)

Zur Ergänzung noch zwei wichtige Sätze über die Gauß-Krümmung, die wir ohne Beweis angeben.

**Satz 3 (Theorema egregium (Gauß 1827))**

*Die Gauß-Krümmung  $K$  einer regulären Fläche  $S$  ist eine Größe der inneren Geometrie von  $S$ , dh. die Funktion  $K$  kann aus den Funktionen  $E, F$  und  $G$  (und deren Ableitungen) berechnet werden.*

*Beweis.* Hier ohne Beweis, vgl. M. do Carmo, Differentialgeometrie von Kurven und Flächen Vieweg, 1993, S. 178.  $\square$

**Satz 4 (Formel von Bertrand-Puiseux (1847))** *Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $p \in S$ . Für kleines  $r$  sei  $S_r(p) := \{q \in S \mid d_S(p, q) = r\}$  der (metrische) Kreis in  $S$  mit Zentrum  $p$  und Radius  $r$ . Weiter sei  $L(S_r(p))$  die Länge dieser Kurve in  $S$ . Dann gilt*

$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi r^3} (2\pi r - L(S_r(p))).$$

*Beweis.* Ebenfalls ohne Beweis, vgl. M. Spivak, Differential Geometry, Vol. II, S. 128.  $\square$

Für die euklidische Ebene ist die Länge eines Kreises von Radius  $r$  gerade  $2\pi r$ . Die Formel von Bertrand und Puiseux besagt also, dass die Gauß-Krümmung ein Maß dafür ist, wie weit die Geometrie einer Fläche  $S$  von der Geometrie der Ebene abweicht.

Die Formel von Bertrand-Puiseux verwendet nur, dass man eine Längenmetrik auf  $S$  hat (eine Metrik, um die Kreise zu definieren und eine Längenmessung, um ihre Länge zu bestimmen). Man kann die Formel deshalb verwenden, um die „Gauß-Krümmung“ in 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten (oder sogar gewissen metrischen Räumen) mit Längenmetriken zu *definieren*. Ein Beispiel dazu ist die hyperbolische Ebene (vgl. Abschnitt 7.6).

## 6 Der Satz von Gauß-Bonnet

Die Gauß-Krümmung  $K$  einer regulären Fläche  $S$  ist eine Funktion auf  $S$ , also eine Abbildung, die jedem Punkt von  $S$  eine Zahl, die Krümmung der Fläche in diesem Punkt, zuordnet. Der wichtigste Satz über die Geometrie von Flächen ist der Satz von Gauß-Bonnet. Er besagt, dass die „Gesamtkrümmung“ einer Fläche (das Integral von  $K$  über  $S$ ) eine topologische Invariante ist. Ziel dieses Kapitels ist es, diesen Satz zu formulieren und – bis auf einige Hilfsresultate (z.B. den Umlaufsatz von Hopf oder Formel von Green-Stokes) – auch zu beweisen. Der Beweis illustriert, wie man in der Differentialgeometrie mit analytischen Methoden geometrische Resultate erzielen kann.

### 6.1 Kovariante Ableitung und geodätische Krümmung

Wir betrachten eine reguläre Fläche  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  mit einer lokalen Parametrisierung  $x : U \rightarrow S$ . Weiter sei  $a : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein tangentiales Vektorfeld längs  $S$ , d.h. für alle  $(u, v) \in U$  liegt der Vektor  $a(u, v)$  in der Tangentialebene  $T_{x(u,v)}S$  (insbesondere ist also  $a(u, v)$  orthogonal zum Normalenvektor  $n(u, v)$ ).

Die partielle Ableitung  $a_u := \frac{\partial}{\partial u}a(u, v) \in T_{x(u,v)}\mathbb{R}^3$  ist dann im Allgemeinen nicht in  $T_{x(u,v)}S$ . Deshalb definieren wir die **kovariante Ableitung**  $D_u a$  **von**  $a$  **nach**  $u$  als die Tangentialkomponente von  $a_u$  oder, äquivalent, als die Orthogonalprojektion von  $a_u$  in die Tangentialebene (vgl. FIG. 67). In Formeln

$$D_u a := a_u - \langle n, a_u \rangle n.$$

Da  $a(u, v)$  nach Definition orthogonal zum Normalenvektor  $n(u, v)$  der Fläche  $S$  im Punkt  $x(u, v)$  ist, also  $\langle n, a \rangle = 0$  gilt, erhalten wir durch ableiten

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle n, a \rangle =: \langle n, a \rangle_u = \langle n_u, a \rangle + \langle n, a_u \rangle,$$

also  $-\langle n, a_u \rangle n = \langle n_u, a \rangle n$ . Das ergibt eine alternative Formel für die kovariante Ableitung:

$$D_u a = a_u + \langle n_u, a \rangle n.$$

Als nächstes definieren wir ein Maß für die „Krümmung von Flächenkurven“.

Sei also  $c(s) := x(u(s), v(s)) \subset S \subset \mathbb{R}^3$  eine Flächenkurve. Durch eventuelle Umparametrisierung können wir annehmen, dass  $c$  mit Bogenlänge parametrisiert ist, d.h.  $\|c'(s)\| = \|\frac{dc}{ds}(s)\| = 1$  ist (vgl. Übungsblatt 8). Durch Ableiten von  $\langle c', c' \rangle = \|c'(s)\|^2 = 1$  folgt dann

$$0 = \frac{d}{ds} \langle c', c' \rangle = \langle c'', c' \rangle + \langle c', c'' \rangle = 2\langle c'', c' \rangle,$$



d.h.  $c''$  ist orthogonal zum Tangentialvektor  $c'$ .

Damit und da die drei Vektoren  $c', n \wedge c'$  und  $n$  orthonormal sind (vgl. FIG. 68), können wir  $c''$  als Linearkombination von  $n \wedge c'$  und  $n$  schreiben:

$$c''(s) = \kappa_g(s)(n(s) \wedge c'(s)) + \alpha(s)n(s)$$

für gewisse Koeffizientenfunktionen  $\kappa_g$  und  $\alpha$ . Die Zahl  $\kappa_g(s)$  heißt **geodätische Krümmung** von  $c$  im Punkt  $c(s)$ .

**Bemerkung.** Wird die Flächenkurve  $c$  in umgekehrter Richtung durchlaufen, so ändert sich das Vorzeichen von  $\kappa_g$  (wieso?).

**Frage:** Was misst die geodätische Krümmung  $\kappa_g$ ?

Wir betrachten dazu das Beispiel  $S = E =$  affine Ebene. Für welche Kurven  $c$  in  $E$  gilt  $\kappa_g = \text{konstant} = 0$ ? Nun, wir haben die Äquivalenzen

$$\kappa_g = 0 \iff c'' \text{ parallel } n \iff c'' \text{ orthogonal zu } E.$$

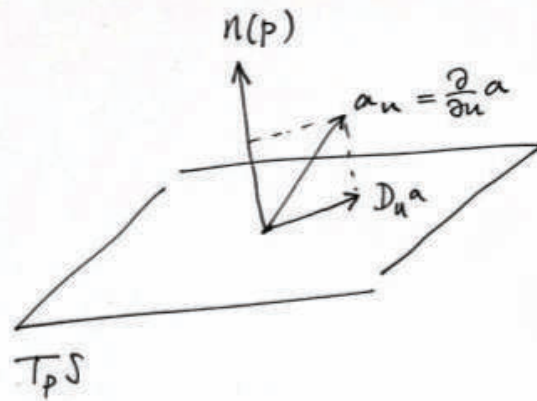
Für eine Kurve  $c \subset E$  sind aber auch deren 1. und 2. Ableitungen  $c' \subset E$  und  $c'' \subset E$  (wieso?) und somit

$$(c'' \subset E \text{ und } c'' \perp E) \iff c'' = 0 \iff c = \text{Gerade}$$

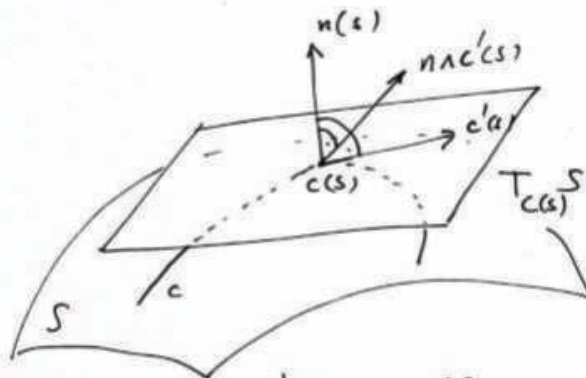
(die letzte Äquivalenz folgt durch integrieren bzw. ableiten).

In der Ebene sind die Geraden also genau diejenigen Flächenkurven, für welche die geodätische Krümmung verschwindet.

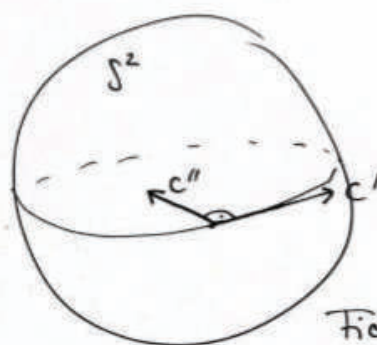
Allgemein nennt man eine Flächenkurve mit  $\kappa_g = 0$  **Geodätische**. Geodätische auf Flächen verallgemeinern/entsprechen Geraden in der Ebene. Man kann z.B. zeigen, dass Geodätische lokal (aber im Allgemeinen, im Gegensatz zur Ebene, nicht global, vgl. FIG. 71) kürzeste Verbindungen sind.



FIGUR 67



FIGUR 68



FIGUR 69

**Beispiele.** 1) Sei  $S = S_R^2$  die Sphäre vom Radius  $R$ . Die Geodätischen sind (mit Bogenlänge parametrisierte) Großkreise (= Schnitte von  $S_R^2$  mit Ebenen durch den Nullpunkt). Warum? Nun, für solche Großkreise  $c$  gilt  $c' \perp c''$  und  $c''$  ist parallel zum Normalenvektor  $n$ , also  $\kappa_g = 0$  (vgl. FIG. 69).

2) Sei  $S$  ein Zylinder mit lokaler Parametrisierung  $x(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ . Wir betrachten auf  $S$  Kurven der Form

$$c(s) := (\cos(as), \sin(as), bs), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Im Parameterbereich ist also  $(u(s), v(s)) = (as, bs) = s(a, b)$  eine Gerade durch  $(0, 0)$ . Die Abbildung  $c$  „wickelt diese Gerade auf den Zylinder auf“. Es ist

$$c'(s) = (-a \sin(as), a \cos(as), b),$$

also  $s$  Bogenlängeparameter genau dann, wenn  $1 = \|c'\|^2 = a^2 + b^2$ . Weiter ist

$$c''(s) = (-a^2 \cos(as), -a^2 \sin(as), 0),$$

d.h.  $c''(s)$  parallel zum Normalenvektor  $n(s) = (-\cos(as), -\sin(as), 0)$  und somit ist  $c$  (nach obigem Kriterium) Geodätische.

Für die Spezialfälle  $a = 0$  und  $b = 1$  (bzw.  $a = 1$  und  $b = 0$ ) ist  $c$  eine Mantellinie (bzw. ein Breitenkreis). Für  $a, b$  beliebig (und  $a^2 + b^2 = 1$ ) ist  $c$  eine Schraubenlinie (vgl. FIG. 70).

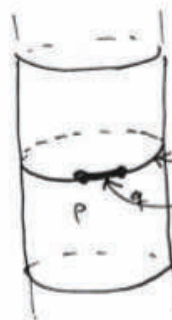
Ein Breitenkreis ist auch ein einfaches Beispiel für eine Geodätische, die nur lokal (aber nicht global) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf  $S$  ist (vgl. FIG. 71).



Tangente hat konstante Steigung:

$$\langle c'(s), (0, 0, 1) \rangle = b$$

FIGUR 70

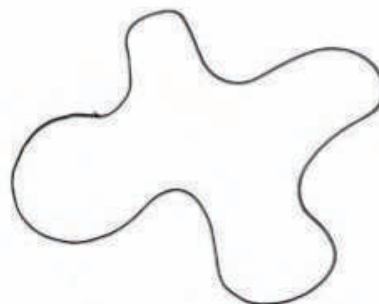


Breitenkreis = Geodätische

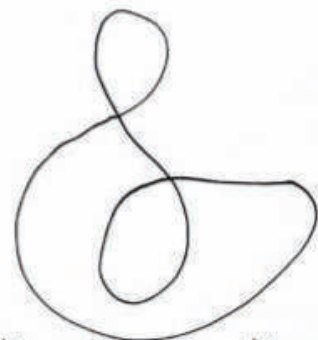
Geodätische zwischen  $p$  und  $q$   
aber nicht kürzeste Verbindung

kürzeste Verbindung  
zwischen  $p$  und  $q$

FIGUR 71



einfach geschlossen



nicht einfach geschlossen

FIGUR 72

## 6.2 Satz von Gauß-Bonnet (lokale Version)

Für die Formulierung des Satzes von Gauß-Bonnet brauchen wir noch einige weitere Begriffe.

Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, s \mapsto c(s)$  eine differenzierbare Kurve. Die Kurve  $c$  ist **regulär**, falls  $c'(s) \neq 0$  für alle  $s \in [a, b]$ . Die Kurve  $c$  heißt **einfach geschlossen**, falls  $c(a) = c(b)$ ,  $c'(a) = c'(b)$  und  $c$  eingeschränkt auf  $[a, b]$  injektiv ist (vgl. FIG. 72). Eine Teilmenge  $G$  einer regulären Fläche  $S$  heißt **abgeschlossenes einfaches Gebiet**, falls  $G$  homöomorph zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe ist und der Rand  $\partial G$  das Bild einer einfach geschlossenen, regulären Kurve  $c : [a, b] \rightarrow S$  ist.

Wir nehmen jetzt an, dass  $S$  orientiert ist. Zur Erinnerung: Eine Basis  $(a, b)$  von  $T_p S$  ist positiv orientiert, falls  $\det(a, b, n(p)) > 0$ . Die Randkurve eines abgeschlossenen einfachen Gebiets ist **orientiert**, falls für eine positiv orientierte Basis  $(c', h)$  von  $T_{c(s)} S$  der Vektor  $h$  „auf die Seite von  $G$  zeigt“ (vgl. FIG. 73).

Wir benutzen noch folgende Kurzschreibweisen: Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $x : U \rightarrow S$  eine lokale Parametrisierung. Für ein abgeschlossenes einfaches Gebiet  $G \subset x(U) \subset S$  mit differenzierbarem  $\partial G$  setzen wir

$$\int_{\partial G} \kappa_g(s) ds := \int_{x^{-1}(\partial G)} \kappa_g(s) ds \quad \text{und} \quad \int \int_G K dA := \int \int_{x^{-1}(G)} K \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Damit können wir jetzt den Satz von Gauß-Bonnet formulieren.

### Satz 5 (Satz von Gauß-Bonnet, lokale Version)

*Sei  $S$  eine reguläre orientierbare Fläche und  $x : U \rightarrow S$  eine lokale Parametrisierung. Weiter sei  $G \subset x(U) \subset S$  ein abgeschlossenes einfaches Gebiet mit orientiertem Rand  $\partial G$ . Dann gilt*

$$\int \int_G K dA + \int_{\partial G} \kappa_g(s) ds = 2\pi.$$

Für den Beweis benötigen wir mehrere Hilfssätze, die wir aber nicht alle beweisen.

Wir beginnen mit einem topologischen Resultat. Für ein abgeschlossenes einfaches Gebiet  $G \subset x(U) \subset S$  wie oben sei die Randkurve  $\partial G$  parametrisiert durch eine differenzierbare Kurve  $c(s), s \in [0, L]$  und  $s$  = Bogenlänge. Die Einschränkung des Einheitsvektorfeldes  $e(u, v) := \frac{x_u(u, v)}{\|x_u(u, v)\|}$  auf die Kurve  $c$  ist ein Einheitsvektorfeld  $e(s)$  längs  $c(s)$ . Sei  $n(s)$  das Normalenfeld von  $S$  längs  $c$ . Dann ist das Paar  $(e(s), n(s) \wedge e(s))$  eine Orthonormalbasis von  $T_{c(s)} S$  für alle  $s \in [0, L]$  (wieso?). Man kann dann eine **Winkelfunktion**  $\theta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  definieren, die lokal gegeben ist durch

$$c'(s) = \cos \theta(s) e(s) + \sin \theta(s) (n(s) \wedge e(s))$$

(vgl. FIG. 74). Die gesamte Änderung der Winkelfunktion wird dann beschrieben durch

**Lemma 1 (Umlaufsatz von Hopf)**

Für eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve  $c$  wie oben mit Bild  $c = \partial G$  gilt

$$\int_{\partial G} \theta' ds = 2\pi.$$

*Beweis.* Siehe z.B. W. Klingenberg, Eine Vorlesung über Differentialgeometrie, Springer 1973. Machen Sie auch Beispiele, die zeigen, dass die Formel plausibel ist.  $\square$

**Lemma 2 (Formel von Green-Stokes)**

Sei  $\tilde{G}$  ein abgeschlossenes einfaches Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  mit differenzierbarem Rand  $\partial\tilde{G} = \{(u(s), v(s)) \mid s \in I\}$ . Weiter seien  $P, Q : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_{\partial\tilde{G}} (Pu' + Qv') ds = \int \int_{\tilde{G}} (Q_u - P_v) dudv,$$

wobei  $Q_u$  (wie immer in diesem Skript) die partielle Ableitung nach  $u$  bezeichnet.

*Beweis.* Siehe Analysis 2 oder M. Spivak, Calculus on Manifolds.  $\square$

**Lemma 3**

(a) Für ein tangentiales Einheitsvektorfeld  $e$  längs  $S$  (wie oben) gilt  $\langle D_u e, e \rangle = 0$ .

(b) Für eine  $C^\infty$ -Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $D_u(fn) = fn_u$ .

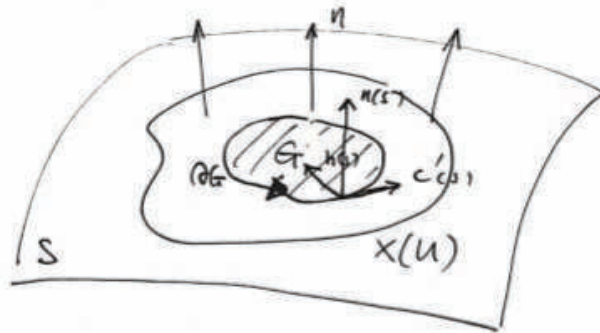
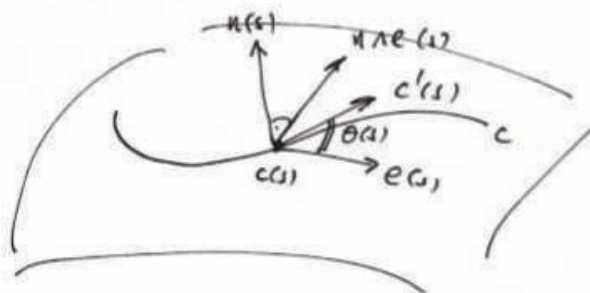
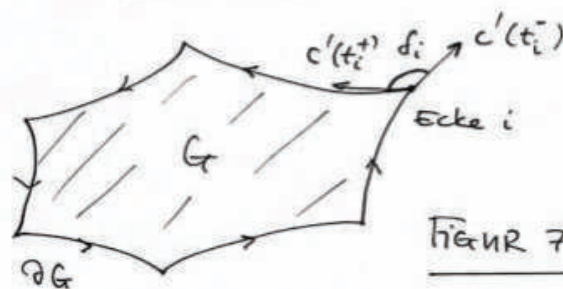
*Beweis.* (a):

$$1 = \langle e, e \rangle \implies 0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle e, e \rangle = 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial u} e, e \right\rangle = 2 \langle D_u e + \alpha n, e \rangle = 2 \langle D_u e, e \rangle.$$

(b):

$$D_u(fn) = (fn)_u - \langle (fn)_u, n \rangle n = f_u n + fn_u - \langle (fn)_u, n \rangle n.$$

Vergleicht man die tangentialen Komponenten auf beiden Seiten, so sieht man, dass  $D_u(fn) = fn_u$ .  $\square$

FIGUR 73FIGUR 74FIGUR 75

**Lemma 4**

Sei  $a : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein tangentiales Vektorfeld längs  $S$ . Dann gilt für die gemischten kovarianten Ableitungen

$$(D_v D_u - D_u D_v)a = (K\sqrt{EG - F^2}) n \wedge a.$$

wobei  $K$  die Gauß-Krümmung und  $E, F, G$  die Koeffizienten der 1. Fundamentalform bezeichnen.

Im Beweis benutzen wir folgende Gleichungen zwischen Vektorprodukt und Skalarprodukt von Vektoren  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} (*) \quad \langle b, a \rangle c - \langle c, a \rangle b &= (b \wedge c) \wedge a \\ \langle a \wedge b, c \wedge d \rangle &= \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle. \end{aligned}$$

*Beweis Lemma 4.*

$$\begin{aligned} D_v D_u a &= D_v(a_u + \langle n_u, a \rangle n) \\ &= D_v(a_u) + D_v(\langle n_u, a \rangle n) \\ &= a_{uv} - \langle n, a_{uv} \rangle n + D_v(\langle n_u, a \rangle n) \\ &\stackrel{L.3(b)}{=} a_{uv} - \langle n, a_{uv} \rangle n + \langle n_u, a \rangle n_v. \end{aligned}$$

Da das Vektorfeld  $a$  als  $C^\infty$  vorausgesetzt ist, vertauschen die 2. partiellen Ableitungen, d.h. es gilt  $a_{uv} = a_{vu}$ . Es folgt also

$$(D_v D_u - D_u D_v)a = \langle n_u, a \rangle n_v - \langle n_v, a \rangle n_u \stackrel{(*)}{=} (n_u \wedge n_v) \wedge a.$$

Es ist  $n_u \wedge n_v$  parallel zu  $n$  (wieso?). Also  $n_u \wedge n_v = \lambda n$  für eine gewisse Funktion  $\lambda$  und zu zeigen bleibt noch, dass  $\lambda = K\sqrt{EG - F^2}$  ist. Das sieht man so:

$$\begin{aligned} \langle \lambda n, x_u \wedge x_v \rangle &= \langle n_u \wedge n_v, x_u \wedge x_v \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle n_u, x_u \rangle \langle n_v, x_v \rangle - \langle n_u, x_v \rangle \langle n_v, x_u \rangle = LN - M^2 \end{aligned}$$

( $L, M, N$  sind die Koeffizienten der 2. Fundamentalform). Weiter haben wir

$$\langle n, x_u \wedge x_v \rangle = \left\langle \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}, x_u \wedge x_v \right\rangle = \|x_u \wedge x_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Durch Vergleich dieser Gleichungen erhalten wir mit der Definition der Gauß-Krümmung

$$\lambda\sqrt{EG - F^2} = LN - M^2 = K(EG - F^2)$$

und damit die Behauptung. □



Wir kommen nun zum

*Beweis von Satz 5.* Wir definieren ein „Referenz-Einheitsvektorfeld“ auf  $x(U) \subset S$  durch  $e := \frac{x_u}{\|x_u\|}$ . Da  $\|e\| = 1$  folgt

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle e, e \rangle = 2 \langle e_u, e \rangle = 2 \langle D_u e + \alpha n, e \rangle = 2 \langle D_u e, e \rangle,$$

d.h.  $D_u e$  ist orthogonal zu  $e$  in jedem Punkt. Weiter ist  $D_u e$  nach Definition auch orthogonal zu  $n$  und somit  $D_u e$  parallel zu  $n \wedge e$  (vgl. FIG. 74). Damit können wir Funktionen  $P$  und  $Q$  auf  $U$  definieren durch

$$D_u e =: P(n \wedge e), \quad \text{also} \quad P = \langle D_u e, n \wedge e \rangle \quad \text{und analog} \quad D_v e =: Q(n \wedge e).$$

Sei jetzt  $c(s) := x(u(s), v(s))$  die mit Bogenlänge parametrisierte Kurve, die den Rand  $\partial G$  von  $G$  beschreibt. Wir betrachten die Einschränkung des Referenz-Vektorfeldes  $e$  auf  $c$ , also  $e(s) := e(c(s))$  (analog setzen wir auch  $n(s) := n(c(s))$ ). Wir leiten nach  $s$  ab:  $e' = \frac{de}{ds} = e_u u' + e_v v'$ . Da  $e_u = D_u e + \langle e_u, n \rangle n$  haben wir

$$P = \langle D_u e, n \wedge e \rangle = \langle e_u - \langle e_u, n \rangle n, n \wedge e \rangle = \langle e_u, n \wedge e \rangle$$

und analog auch  $Q = \langle e_v, n \wedge e \rangle$ .

Wir wollen jetzt die Formel von Green (Lemma 2) anwenden. Für deren *linke Seite* erhalten wir

$$\int_{\partial G} (Pu' + Qv') ds = \int_{\partial G} \langle e_u u' + e_v v', n \wedge e \rangle ds = \int_{\partial G} \langle e', n \wedge e \rangle ds. \quad (1)$$

Die Vektoren  $e(s)$  und  $n(s) \wedge e(s)$  bilden eine Orthonormalbasis der Tangentialebene  $T_{c(s)} S$ . Wir können dann wie oben (vor Lemma 1) eine Winkelfunktion  $\theta$  (vgl. FIG. 75) einführen durch

$$c'(s) = \cos \theta(s) e(s) + \sin \theta(s) (n(s) \wedge e(s)). \quad (2)$$

Da  $\langle c', c' \rangle = \|c'\|^2 = 1$  ( $s$  ist Bogenlängeparameter) ist  $c''$  orthogonal zu  $c'$ : durch ableiten der Gleichung erhält man  $2 \langle c'', c' \rangle = 0$ . Also ist  $c''$  eine Linearkombination von  $n \wedge c'$  und  $n$ :

$$c'' = \kappa_g(n \wedge c') + \alpha n = \kappa_g(\cos \theta \, n \wedge e + \sin \theta \, n \wedge (n \wedge e)) + \alpha n$$

und somit

$$\langle c''(s), n(s) \wedge e(s) \rangle = \kappa_g(s) \cos \theta(s). \quad (3)$$

Aus (2) ergibt sich durch nochmaliges Ableiten nach  $s$

$$c'' = \cos \theta e' + (\cos \theta)' e + \sin \theta (n \wedge e)' + (\sin \theta)' n \wedge e$$

also

$$\langle c'', n \wedge e \rangle = \cos \theta \langle e', n \wedge e \rangle + 0 + (\sin \theta)' = \cos \theta (\langle e', n \wedge e \rangle + \theta'); \quad (4)$$

hier benutzt man, dass  $\langle n \wedge e, n \wedge e \rangle = 1$  und somit (durch ableiten)  $\langle (n \wedge e)', n \wedge e \rangle = 0$ . Durch Vergleich von (3) mit (4) sehen wir also, dass

$$\kappa_g(s) = \langle e'(s), n(s) \wedge e(s) \rangle + \theta'(s)$$

und somit wegen (1)

$$\int_{\partial G} (Pu' + Qv') ds = \int_{\partial G} \kappa_g ds - \int_{\partial G} \theta' ds = \int_{\partial G} \kappa_g ds - 2\pi.$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem Umlaufsatz (Lemma 1); an dieser Stelle braucht man, dass die Randkurve einfach geschlossen und orientiert ist.

Wir wollen jetzt auch die *rechte Seite* der Formel von Green (Lemma 2) betrachten.

Zunächst ist nach Definition von  $P$  und der kovarianten Ableitung

$$\begin{aligned} D_v D_u e &= D_v(P(n \wedge e)) \\ &= \text{Tangentiale Komponente von } (P_v(n \wedge e) + P(n \wedge e)_v) \\ &= \text{Tangentiale Komponente von } (P_v(n \wedge e) + P(n_v \wedge e + n \wedge e_v)) \\ &= P_v(n \wedge e) + P(n \wedge e_v); \end{aligned}$$

für die letzte Gleichung haben wir noch  $(n \wedge e)_v = n_v \wedge e + n \wedge e_v$  benutzt und dass  $n_v \wedge e$  normal und  $n \wedge e_v$  tangential ist (wieso?).

Da weiter  $D_v e = e_v + \alpha n$  und  $n \wedge n = 0$ , ist  $n \wedge e_v = n \wedge D_v e$ . Also nach Definition von  $Q$

$$\begin{aligned} D_v D_u e &= P_v(n \wedge e) + P(n \wedge D_v e) = P_v(n \wedge e) + P(n \wedge Q(n \wedge e)) \\ &= P_v(n \wedge e) + PQ(n \wedge (n \wedge e)). \end{aligned}$$

Vertauschen von  $u$  und  $v$  und Subtraktion ergibt

$$(D_v D_u - D_u D_v)e = (P_v - Q_u)n \wedge e.$$

Nach Lemma 4 ist  $(D_v D_u - D_u D_v)e = (K\sqrt{EG - F^2})n \wedge e$  und somit  $P_v - Q_u = K\sqrt{EG - F^2}$  und  $(P_v - Q_u)dudv = KdA$ . Die rechte Seite der Greenschen Formel ist also  $\int \int_G (Q_u - P_v)dudv = -\int \int_G KdA$ . Damit haben wir die linke und die rechte Seite der Greenschen Formel ausgerechnet. Setzt man beide Seiten gleich, erhält man schließlich die behauptete Formel.  $\square$

**Ergänzung.** Ein wesentliches Resultat, das im Beweis von Satz 5 verwendet wurde, ist der Umlaufsatz von Hopf (Lemma 1). Davon gibt es auch eine allgemeinere Version für einfach geschlossene Kurven  $c : [a, b] \rightarrow S$ , die nur stückweise regulär sind.

Eine solche Kurve hat dann  $m$  Ecken, also Punkte  $c(s_i), i = 1, \dots, m$ , an denen  $c$  nicht differenzierbar ist. An diesen Stellen gibt es eine rechtsseitige Tangente  $c'(s_i^+)$  und eine linksseitige Tangente  $c'(s_i^-)$ , die jeweils verschieden sind. Damit haben wir  $m$  **Außenwinkel**  $\delta_i := \angle(c'(s_i^-), c'(s_i^+)), i = 1, \dots, m$ .

In dieser Situation lautet die Formel im Umlaufsatz

$$\int_{\partial G} \theta' ds = 2\pi - \sum_{i=1}^m \delta_i.$$

Ein **Polygon** in einer regulären Fläche  $S$  ist eine Teilmenge  $G$ , die homöomorph zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe ist und deren Rand  $\partial G$  das Bild einer einfach geschlossenen, stückweise regulären Kurve ist (vgl. FIG. 75). Definiert man noch die **Innenwinkel** des Polygons  $G$  durch  $\alpha_i := \pi - \delta_i, i = 1, \dots, m$  erhält man den

### Satz 6 (Satz von Gauß-Bonnet für Polygone)

Sei  $S$  eine reguläre orientierbare Fläche und  $x : U \rightarrow S$  eine lokale Parametrisierung. Weiter sei  $G \subset x(U) \subset S$  ein Polygon mit stückweise differenzierbarem, orientiertem Rand  $\partial G$  mit  $m$  Ecken und Innenwinkeln  $\alpha_i, i = 1, \dots, m$ . Dann gilt

$$\int \int_G K dA + \int_{\partial G} \kappa_g(s) ds = \pi(2 - m) + \sum_{i=1}^m \alpha_i.$$

*Beweis.* Den Beweis lassen wir weg. Er ist im Wesentlichen gleich wie der Beweis von Satz 5. Anstelle von Lemma 1 benutzt man die obige Version des Umlaufsatzes.  $\square$

Ein **geodätisches Dreieck** in einer Fläche  $S$  ist ein Polygon  $\Delta$ , das drei Ecken hat und dessen drei Randsegmente Geodätische sind (vgl. FIG. 76).

### Korollar 1 (Satz von Gauß-Bonnet für geodätische Dreiecke)

Sei  $S$  eine reguläre orientierbare Fläche und  $x : U \rightarrow S$  eine lokale Parametrisierung. Weiter sei  $\Delta \subset x(U) \subset S$  ein geodätisches Dreieck mit Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dann gilt

$$\int \int_{\Delta} K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus Satz 6, da  $\kappa_g = 0$  für die geodätischen Segmente und  $m = 3$ .  $\square$

**Spezialfälle:** Die Formel im Korollar vereinfacht sich nochmals, wenn wir geodätische Dreiecke in Flächen mit konstanter Gauß-Krümmung 0, 1 und  $-1$  betrachten. Flächen mit konstanter Gauß-Krümmung 0 sind z.B. Ebene oder Zylinder, positive

konstante Gauß-Krümmung  $+1$  hat die Einheitssphäre  $S^2$ . Für konstante negative Gauß-Krümmung werden wir in Kapitel 7 noch Beispiele sehen (hyperbolische Ebene).

### Korollar 2 (Innenwinkelsumme für geodätische Dreiecke)

*Für die Innenwinkelsumme eines geodätischen Dreiecks in einer Fläche mit Gauß-Krümmung  $K = \text{konstant}$  gilt (vgl. FIG. 77)*

- Für  $K \equiv 0$  ist  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .
- Für  $K \equiv +1$  ist  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ .
- Für  $K \equiv -1$  ist  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus Korollar 1, da für konstantes  $K$  gilt  $\int \int_G K dA = K \int \int_G dA$  und  $\int \int_G dA > 0$  nach Definition des Flächeninhalts.  $\square$

## 6.3 Satz von Gauß-Bonnet (globale Version)

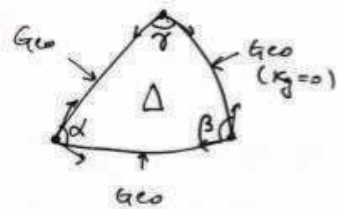
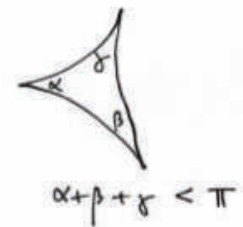
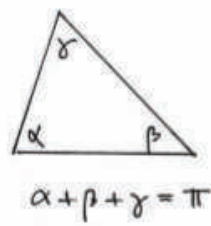
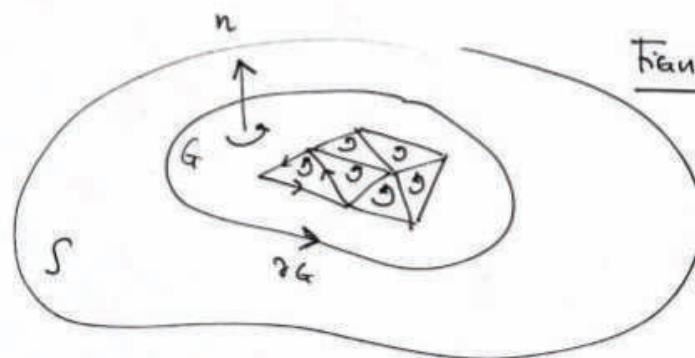
In diesem Abschnitt formulieren wir den Satz von Gauß-Bonnet in seiner globalen Version für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Dieser wichtige Satz der Differentialgeometrie (540'000 Treffer bei Google) gilt in noch viel grösserer Allgemeinheit (vgl. M. Spivak, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol.5, Ch. 13: The Generalized Gauß-Bonnet Theorem and what it means for mankind).

Wir beginnen mit einigen Tatsachen zur Topologie von Flächen (oder allgemeiner 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten), die wir hier ohne Beweis mitteilen (für mehr Information vgl. z.B. E. Ossa, Topologie, Springer 2009).

### Satz 7 (Klassifikationssatz für 2-Mannigfaltigkeiten)

*Sei  $M$  eine kompakte, orientierbare 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $g \geq 0$ , das sogenannte Geschlecht, so dass gilt: Falls  $g = 0$  ist  $M$  homöomorph zur Sphäre  $S^2$  und falls  $g \geq 1$  ist  $M$  homöomorph zu einer zusammenhängenden Summe von  $g$  Tori (vgl. FIG. 33 und 53).*

*Weiter sind zwei kompakte orientierbare Flächen von gleichem Geschlecht  $g$  homöomorph.*

FIGUR 76FIGUR 77FIGUR 78FIGUR 79

Es sei  $M$  eine kompakte orientierbare 2-Mannigfaltigkeit. Eine **Triangulierung**  $T$  von  $M$  ist eine endliche Familie von (orientierungserhaltenden) Diffeomorphismen

$$\sigma_k : \Delta \rightarrow \sigma_k(\Delta) \subset M \quad k = 1, \dots, n,$$

des Standard-2-Simplex  $\Delta$  (vgl. FIG. 41) nach  $M$ , so dass gilt

- (1) Die Bild-Simplexe („Dreiecke“)  $\sigma_k(\Delta)$  überdecken  $M$ :  $M = \bigcup_{k=1}^n \sigma_k(\Delta)$ .
- (2) Ist  $\sigma_k(\Delta) \cap \sigma_j(\Delta) \neq \emptyset$  für  $k \neq j$ , so haben  $\sigma_k(\Delta)$  und  $\sigma_j(\Delta)$  entweder genau eine Kante oder genau eine Ecke gemeinsam.

Die **Euler-Charakteristik einer Triangulierung**  $T$  einer 2-Mannigfaltigkeit  $M$  ist definiert als Wechselsumme

$$\chi_T(M) := \text{Anzahl Ecken} - \text{Anzahl Kanten} + \text{Anzahl Ecken}$$

der Triangulierung.

### Satz 8 (Euler-Charakteristik und Geschlecht)

- (1) Die Euler-Charakteristik  $\chi_T(M)$  ist unabhängig von der Wahl der Triangulierung (man schreibt deshalb auch kurz nur  $\chi(M)$ ).
- (2) Falls  $M$  Geschlecht  $g$  hat, so gilt  $\chi(M) = 2 - 2g$ . Insbesondere ist die Euler-Charakteristik  $\chi(M)$  nach Satz 7 eine topologische Invariante von  $M$  (homöomorphe kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten haben gleiche Euler-Charakteristik).

### Satz 9 (Triangulierungen existieren)

Jede kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit  $M$  mit gegebenem Atlas  $\mathcal{A}$  besitzt eine Triangulierung  $\sigma_k : \Delta \rightarrow \sigma_k(\Delta) \subset M$ ,  $k = 1, \dots, n$ , so dass jedes Simplex  $\sigma_k(\Delta)$  ganz in einer Kartenumgebung von  $\mathcal{A}$  enthalten ist.

Satz 9 ermöglicht den „Übergang Gauß-Bonnet lokal“ zu „Gauß-Bonnet global“.

### Satz 10 (Satz von Gauß-Bonnet, globale Version)

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine kompakte, reguläre orientierbare Fläche vom Geschlecht  $g$ . Dann gilt

$$\int \int_S K dA = 2\pi\chi(M) = 2\pi(2 - 2g).$$

### Bemerkungen.

- 1) Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass er *Geometrie* (Gauß-Krümmung) mit *Topologie* (Euler-Charakteristik) verbindet.

So schränkt etwa die Topologie die Geometrie ein: Die meisten 2-Mannigfaltigkeiten haben negative Euler-Charakteristik; diese können nicht überall positive Krümmung haben.

Umgekehrt liefert geometrische Information topologische Information: Wenn z.B. die Gauß-Krümmung einer Fläche  $S$  konstant Null ist, so folgt mit Satz 10, dass die Euler-Charakteristik 0 und damit  $g = 1$  sein muss, d.h.  $S$  muss topologisch ein Torus sein. Ebenso: Ist die Gauß-Krümmung  $K > 0$ , so ist auch die Euler-Charakteristik  $2 - 2g > 0$ , d.h.  $g = 0$  und  $S$  ist homöomorph zu einer Sphäre.

2) Der Satz gilt auch für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die nicht in  $\mathbb{R}^3$  eingebettet sind. Dazu muss man alle Begriffe wie z.B. „Tangentialebene“, „Krümmung“ oder „1.Fundamentalform“ für abstrakte Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Wie man das machen kann, haben Riemann und Poincaré herausgefunden (siehe Vorlesung „Differentialgeometrie“).

*Beweis-Skizze für Satz 10.* Wir wählen eine Triangulierung  $T$  von  $S$ ,

$$\sigma_k : \Delta \rightarrow \sigma_j(\Delta) \subset M, \quad j = 1, \dots, f,$$

so dass jedes Dreieck  $\sigma_j(\Delta)$  ganz in einem Kartengebiet  $x_j(U_j)$  (hier Bildmenge einer lokalen Parametrisierung von  $S$ ) liegt (vgl. Satz 9). Wir orientieren die Ränder der Dreiecke so, dass sie mit der Orientierung von  $S$  übereinstimmen (vgl. FIG. 78).

Seien  $e, k$  und  $f$  die Anzahl der Ecken, Kanten und Dreiecke der Triangulierung  $T$ . Für jedes Dreieck  $\sigma_j(\Delta)$  gilt der lokale Satz von Gauß-Bonnet (Satz 6)

$$\int \int_{\sigma_j(\Delta)} K dA = - \int_{\partial \sigma_j(\Delta)} \kappa_g(s) ds + \sum_{i=1}^3 \alpha_i^{(j)} - \pi.$$

Summieren über  $j = 1$  bis  $f$  ergibt

$$\int \int_S K dA = \sum_{j=1}^f \int \int_{\sigma_j(\Delta)} K dA = - \sum_{j=1}^f \int_{\partial \sigma_j(\Delta)} \kappa_g(s) ds + e2\pi - f\pi.$$

Jede Dreiecks-kante erscheint in dieser Summe zwei mal, aber jeweils entgegengesetzt orientiert (vgl. FIG. 79). Da die geodätische Krümmung das Vorzeichen ändert, wenn eine Kante umgekehrt durchlaufen wird (vgl. Bemerkung Abschnitt 6.1), hebt sich der Term mit den  $\kappa_g$  weg. Wir erhalten also

$$\int \int_S K dA = e2\pi - f\pi.$$

Jede Dreiecksfläche hat 3 Kanten und jede Kante berandet genau 2 Flächen, also  $3f = 2k$  und somit

$$\int \int_S K dA = 2\pi e - f\pi = 2\pi(e - \frac{3}{2}f + f) = 2\pi(e - k + f) = 2\pi\chi(S).$$

□

## 7 Parallelen-Axiom und hyperbolische Geometrie

Ziel dieses Kapitels ist es, ein Modell für die wichtigste nicht-euklidische Geometrie vorzustellen, das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene. Als Motivation beginnen wir mit einem (modernen) Axiomensystem für ebene Geometrien.

### 7.1 Ein Axiomensystem für „ebene Geometrie“

Sei  $(X, d)$  ein (nichtleerer) metrischer Raum. Eine **geodätische Linie**  $g$  in  $X$  ist das Bild einer abstandserhaltenden Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ ;  $t \mapsto \gamma(t)$ , also  $g = \gamma(\mathbb{R})$  und es gilt  $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$  für alle  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . Falls  $d$  eine Längenmetrik ist, so realisiert eine geodätische Linie den kürzesten Abstand zwischen je zwei ihrer Punkte. Ist umgekehrt eine Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow X$  kürzeste Verbindung zwischen je zwei ihrer Punkte bezüglich einer Längenmetrik, so ist  $c$  eine geodätische Linie.

Die 3 Axiome der ebenen euklidischen Geometrie sind:

1. **Inzidenz-Axiom:** Durch je zwei verschiedene Punkte von  $X$  geht genau eine geodätische Linie, d.h. für  $p, q \in X, p \neq q$ , existiert genau eine geodätische Linie  $g$ , so dass  $p \in g$  und  $q \in g$ .
2. **Spiegelungs-Axiom:** Für jede geodätische Linie  $g$  hat das Komplement  $X \setminus g$  genau zwei Zusammenhangskomponenten und es existiert eine Isometrie  $\sigma$  des metrischen Raumes  $X$ , die die Punkte von  $g$  fixiert und die zwei Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus g$  vertauscht.
3. **Parallelen-Axiom:** Durch einen Punkt ausserhalb einer gegebenen geodätischen Linie existiert genau eine weitere geodätische Linie, die die gegebene geodätische Linie nicht schneidet.

Ein Beispiel (oder Modell) für einen metrischen Raum, der diese drei Axiome erfüllt, ist die euklidische Ebene  $(\mathbb{R}^2, d_e)$ . Die geodätischen Linien sind in diesem Fall die Geraden:

Inzidenz-Axiom: Die Geraden durch zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{R}^2$  sind hier genau die Bilder von (abstandserhaltenden) Abbildungen der Form

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad s \mapsto p + s \frac{q - p}{\|q - p\|}.$$



Spiegelungs-Axiom: Die Gerade  $g$  sei gegeben als Bild der Abbildung  $\gamma(s) = p + sv$  für einen Einheitsvektor  $v := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $w := (-v_2, v_1)$  ein Einheitsvektor orthogonal zu  $v$ . Die Spiegelung an der Geraden  $g$  ist dann gegeben durch

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad q \mapsto q - 2\langle q - p, w \rangle w$$

(vgl. FIG. 80).

Parallelen-Axiom: Für  $g$  wie im vorigen Axiom und  $q \notin g$  ist die eindeutige parallele Gerade Bild der Abbildung  $\tilde{\gamma} = q + sv$  (wieso?).

Seit Euklid und bis ins 19. Jahrhundert haben Mathematiker (ohne Erfolg) versucht, das Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen abzuleiten. Erst im 19. Jahrhundert konstruierten Bolyai, Gauß, Lobachevski, Beltrami, Klein, Poincaré u.a. widerspruchsfreie Modelle für sogenannte **hyperbolische Geometrien**, für die das Inzidenz- und das Spiegelungs-Axiom aber nicht das Parallelen-Axiom gilt. Ziel dieses Kapitels ist es, das Poincaré- oder Halbebenen-Modell  $(H^2, d_h)$  der hyperbolischen Ebene zu diskutieren.

Der folgende Satz besagt, dass es (bis auf Isometrie und Skalierung<sup>1</sup>) keine weiteren Geometrien gibt, die die obigen Axiome erfüllen.

**Satz 1.** *Ein metrischer Raum  $(X, d)$ , der die drei Axiome der ebenen Geometrie erfüllt, ist isometrisch zur euklidischen Ebene  $(\mathbb{R}^2, d_e)$ .*

*Ein metrischer Raum, der das Inzidenz- und das Spiegelungs-Axiom, aber nicht das Parallelen-Axiom erfüllt, ist (bis auf Skalierung) isometrisch zur hyperbolischen Ebene  $(H^2, d_h)$ .*

*Beweis.* Auf den Beweis gehen wir hier nicht ein (siehe z.B. B. Iversen, Hyperbolic Geometry, Cambridge 1992, Appendix).  $\square$ .

## 7.2 Von Gauß zu Riemann

Die Geometrie von „gekrümmten Flächen“ (wie wir sie teilweise in Kapitel 5 und 6 beschrieben haben) wurde im wesentlichen von C.F. Gauß entwickelt und 1827 publiziert. B. Riemann hat 1854 die Konzepte von Gauß auf höhere Dimensionen verallgemeinert und dabei erstmals den Begriff einer Mannigfaltigkeit eingeführt. Seine Ideen, die „Riemannsche Geometrie“, bilden die mathematische Grundlage für die allgemeine Relativitätstheorie von A. Einstein.

Die Riemannsche Geometrie ist Gegenstand der Vorlesung „Differentialgeometrie“.

---

<sup>1</sup>vgl. Bemerkung nach Satz 9

Hier gehen wir nur kurz auf den zentralen Begriff von Riemann ein, die sogenannte „Riemannsche Metrik“, die die 1. Fundamentalform von Gauß verallgemeinert.

Für eine reguläre Fläche  $S$  hatten wir in jedem Punkt  $p \in S$  einen 2-dimensionalen Vektorraum, die Tangentialebene  $T_p S$ , konstruiert. Die 1. Fundamentalform definiert für jeden Punkt  $p \in S$  ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  auf  $T_p S$ . Die Idee von Riemann: Für eine differenzierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  konstruiert man erst einmal in jedem Punkt  $p \in M$  einen (abstrakten)  $n$ -dimensionalen Vektorraum, den Tangentialraum  $T_p M$ . Eine **Riemannsche Metrik** ordnet jedem Punkt  $p \in M$  ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  auf  $T_p M$  zu, dabei „hängt diese Zuordnung differenzierbar von  $p$  ab“.

Beachten Sie, dass die Bezeichnung irreführend ist: eine Riemannsche Metrik ist keine Metrik im Sinne von Kapitel 2, also keine Abstandsfunktion. Jedoch kann man mittels einer Riemannschen Metrik eine Längenmessung für Kurven definieren und hat damit dann eine assoziierte Längismetrik (als Beispiel dazu siehe Abschnitt 7.3).

Eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit** ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit versehen mit einer Riemannschen Metrik. Die regulären Flächen aus Kapitel 5 sind spezielle Riemannsche Mannigfaltigkeiten: die Riemannsche Metrik ist dort definiert durch die 1. Fundamentalform.

Wir verzichten hier auf die formale allgemeine Definition, da sie für die folgenden Beispiele nicht nötig ist (die Mannigfaltigkeiten in den Beispielen sind offene Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^2$ ).

**Einfache Beispiele:** Sei  $M = U$  eine offene Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . In diesem Fall ist  $T_p M = T_p U \cong T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ . Eine Riemannsche Metrik auf  $U$  ist gegeben durch eine Abbildung von  $U$  in die Menge  $\text{Sym}(n)$  der positiv definiten symmetrischen  $(n \times n)$ -Matrizen (d.h. der Matrizen von Skalarprodukten auf  $\mathbb{R}^n$  bzgl. der Standardbasis)

$$g : U \rightarrow \text{Sym}(n); \quad (u_1, \dots, u_n) \mapsto (g_{ij}(u_1, \dots, u_n))$$

für  $\frac{1}{2}n(n+1)$   $C^\infty$ -Funktionen  $g_{ij}$ .

Hier sind zwei Beispiele für  $n = 2$ :

(1) Die Euklidische Ebene als Riemannsche Mannigfaltigkeit:

$U = \mathbb{R}^2$ ,  $g_{ij}(u_1, u_2) := \delta_{ij}$ , d.h.

$$(g_{ij}(u_1, u_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Sym}(2),$$

vgl. dazu die 1. Fundamentalform der Ebene in Abschnitt 5.2.

(2) Die hyperbolische Ebene als Riemannsche Mannigfaltigkeit:

$$U = H^2 := \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 > 0\}, \quad g_{ij}(u_1, u_2) := \frac{\delta_{ij}}{u_2^2}, \text{ d.h.}$$

$$(g_{ij}(u_1, u_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_2^2} \end{pmatrix} \in \text{Sym}(2).$$

Dieses Beispiel werden wir im Rest dieses Kapitels noch ausführlich studieren.

**Bemerkung:** Auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  gibt es viele Riemannsche Metriken: die  $g_{ij}$  können beliebige differenzierbare Funktionen sein, man muss nur garantieren, dass die  $(2 \times 2)$ -Matrizen  $(g_{ij})$  positiv definit sind, also nach dem Hauptminoren-Kriterium  $g_{11} > 0$  und  $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} > 0$ . Im Gegensatz zu den obigen Beispielen (1) und (2) sind allerdings die meisten der entsprechenden Riemannschen Geometrien nicht besonders interessant.

Für das durch eine Riemannsche Metrik definierte Skalarprodukt von zwei Tangentialvektoren  $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$  auf einer offenen Untermannigfaltigkeit  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  gilt (wie in der Linearen Algebra)

$$\langle a, b \rangle_{(u_1, u_2)} := \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_1, u_2) a_i b_j.$$

Insbesondere sind dadurch *Längen* von und *Winkel* zwischen Tangentialvektoren definiert

$$\|a\|_{(u_1, u_2)} := \sqrt{\langle a, a \rangle_{(u_1, u_2)}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u_1, u_2) a_i a_j},$$

$$\cos \angle(a, b) := \frac{\langle a, b \rangle_{(u_1, u_2)}}{\|a\|_{(u_1, u_2)} \|b\|_{(u_1, u_2)}}.$$

Damit kann man dann (und das war die grosse Erkenntnis von Riemann) Begriffe der Flächentheorie wie Längen von differenzierbaren Kurven, Flächeninhalt von Gebieten und allgemein alle Größen der inneren Geometrie (also Größen, die aus den Daten der 1. Fundamentalform berechenbar sind) für Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Wir machen das exemplarisch für das obige Beispiel (2).

### 7.3 Die Poincaré-Halbebene

Sei also  $H^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  die obere Halbebene versehen mit der Riemannschen Metrik

$$(g_{ij}(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \in \text{Sym}(2).$$

Wir verwenden hier statt  $(u_1, u_2)$  die üblichen Koordinaten  $(x, y)$ .

Für eine (stückweise) differenzierbare Kurve

$$c : [a, b] \rightarrow H^2; \quad t \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$$

definieren wir die **hyperbolische Länge**

$$L_h(c) := \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt.$$

Anstatt reelle Koordinaten  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  verwenden wir alternativ auch komplexe Koordinaten  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Also  $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  und für die Kurve  $c(t) := z(t) = x(t) + iy(t)$

$$L_h(c) := \int_a^b \|z'(t)\|_{z(t)} dt = \int_a^b \frac{|z'(t)|}{\text{Im } z(t)} dt.$$

**Beispiel.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow H^2; \quad t \mapsto z(t) := ti$  das Stück der (positiven) imaginären Achse zwischen  $ai$  und  $bi$  (mit  $b \geq a > 0$ ). Dann ist

$$L_h(c) = \int_a^b \|z'(t)\|_{z(t)} dt = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln b - \ln a.$$

Beachten Sie hier insbesondere, dass  $L_h(c) \rightarrow \infty$  für  $a \rightarrow 0$  gilt. Die hyperbolische Längenmessung in  $H^2$  ist also völlig anders als die euklidische.

Wir hatten gesehen, dass die Längenmessung in der euklidischen Ebene invariant ist unter Translationen und Rotationen (Lemma 1 in Abschnitt 2.2.2). Auch die hyperbolische Längenmessung hat solche Invarianzeigenschaften. Dazu betrachten wir als Nächstes gewisse Selbstabbildungen von  $H^2$ .

Die spezielle lineare Gruppe  $SL(2, \mathbb{R})$  ist die Menge aller reellen  $(2 \times 2)$ -Matrizen mit Determinante 1 versehen mit der Matrizen-Multiplikation (wieso ist das eine Gruppe?). Für

$$A \in SL(2, \mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1$$

definieren wir die zugehörige **Möbiustransformation**

$$T_A : H^2 \rightarrow H^2; \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

**Bemerkungen.** 1) Dass eine solche Abbildung  $T_A$  die obere Halbebene  $H^2$  nicht einfach nach  $\mathbb{C}$ , sondern wieder nach  $H^2$  abbildet, sieht man mit folgender Rechnung: Sei  $w := T_A(z)$ . Wegen  $\det A = ad - bc = 1$  gilt

$$\operatorname{Im} w = \frac{1}{2i}(w - \bar{w}) = \frac{1}{2i} \frac{z - \bar{z}}{|cz + d|^2} = \frac{1}{|cz + d|^2} \operatorname{Im} z,$$

d.h. für  $\operatorname{Im} z > 0$  ist auch  $\operatorname{Im} T_A(z) > 0$ .

2) Es gilt  $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$  (Übungsaufgabe!).

**Lemma 1.** Die hyperbolische Länge einer differenzierbaren Kurve  $c$  in  $H^2$  ist invariant unter Möbiustransformationen von  $H^2$ , d.h. für alle  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  gilt  $L_h(T_A \circ c) = L_h(c)$ .

*Beweis.* Sei  $z(t)$  eine Kurve in  $H^2$  und  $w(t) := T_A(z(t)) = \frac{az(t)+b}{cz(t)+d}$  die Bildkurve. Mit der Kettenregel und  $\det A = ad - bc = 1$  folgt

$$w' = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{1}{(cz + d)^2} z'.$$

Nach obiger Bemerkung 1) haben wir weiter

$$\operatorname{Im} w(t) = \frac{1}{|cz + d|^2} \operatorname{Im} z(t)$$

und somit

$$\frac{|w'(t)|}{\operatorname{Im} w(t)} = \frac{|z'| |cz + d|^2}{|cz + d|^2 \operatorname{Im} z(t)} = \frac{|z'(t)|}{\operatorname{Im} z(t)}.$$

Die Behauptung folgt dann mit der Definitionsformel für die hyperbolische Länge.  $\square$

Hat man auf einer Menge  $X$  eine Längenmessung für Kurven, so kann man die zugehörige Längenmetrik definieren und damit  $X$  zu einem metrischen Raum machen. Wir haben das in Kapitel 2 ausführlich diskutiert. Beispiele waren die euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  und die sphärische Metrik auf  $S^2$ . Für die obere Halbebene  $H^2$  mit der hyperbolischen Längenmessung können wir das gleiche Rezept verwenden: Für Punkte  $p, q \in H^2$  betrachten wir die Menge  $W_{pq}$  aller stückweise differenzierbaren Kurven zwischen  $p$  und  $q$  und setzen

$$d_h(p, q) := \inf\{L_h(c) \mid c \in W_{pq}\}.$$

**Satz 2 (Hyperbolische Ebene als metrischer Raum)** *Das Paar  $(H^2, d_h)$  ist ein metrischer Raum.*

*Beweis.* Symmetrie und Dreiecksungleichung folgen mit den gleichen Argumenten wie für die euklidische Ebene (vgl. Beweis von Satz 1 in Abschnitt 2.2.2); ebenso, dass  $d_h(p, p) = 0$  (die konstante Kurve  $c(t) := p$  hat hyperbolische Länge 0).

Noch zu zeigen ist also, dass für  $p \neq q$  gilt  $d_h(p, q) > 0$ . Dazu sei  $c : [a, b] \rightarrow H^2$  eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen  $p$  und  $q$ . Weiter sei  $B_\delta(p)$  der *euklidische* Ball vom Radius  $\delta$  um  $p$ . Wir wählen  $\delta > 0$  so klein, dass  $B_\delta(p) \subset H^2$  und  $q \notin B_\delta(p)$  (vgl. FIG. 81). Dann existiert ein maximales  $\varepsilon \in [a, b]$ , so dass  $c([a, a + \varepsilon]) \subset \overline{B_\delta(p)}$ . Insbesondere ist

$$\operatorname{Im} c(t) \leq \operatorname{Im} p + \delta \quad \text{für } t \in [a, a + \varepsilon].$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} L_h(c) &= \int_a^b \frac{\|c'(t)\|}{\operatorname{Im} c(t)} dt \geq \int_a^{a+\varepsilon} \frac{\|c'(t)\|}{\operatorname{Im} c(t)} dt \\ &\geq \frac{1}{\operatorname{Im} p + \delta} \int_a^{a+\varepsilon} \|c'(t)\| dt \geq \frac{\delta}{\operatorname{Im} p + \delta}, \end{aligned}$$

dabei gilt die letzte Ungleichung, weil  $\int_a^{a+\varepsilon} \|c'(t)\| dt$  gerade die euklidische Länge von  $c([a, a + \varepsilon])$  und somit  $\geq \delta$  (= Ballradius) ist.

Da  $c$  beliebig war, haben wir schließlich mit der Definition  $d_h(p, q) \geq \frac{\delta}{\operatorname{Im} p + \delta} > 0$ .  $\square$

**Satz 3 (Hyperbolische Isometrien)**

(a) *Die Möbiustransformationen  $\{T_A \mid A \in SL(2, \mathbb{R})\}$  sind Isometrien der hyperbolischen Ebene  $(H^2, d_h)$ .*

(b) *Die hyperbolische Ebene ist homogen, d.h. für beliebige Punkte  $p, q \in H^2$  existiert jeweils eine Isometrie (Möbiustransformation)  $T_A$  so, dass  $T_A(p) = q$ .*

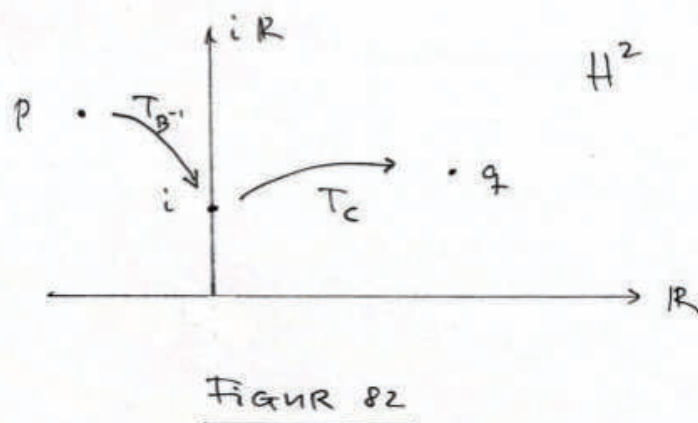
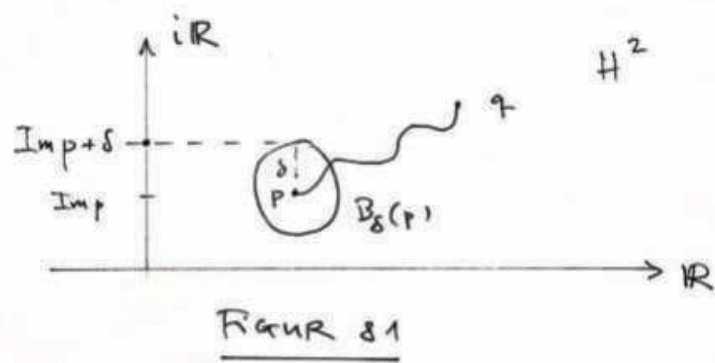
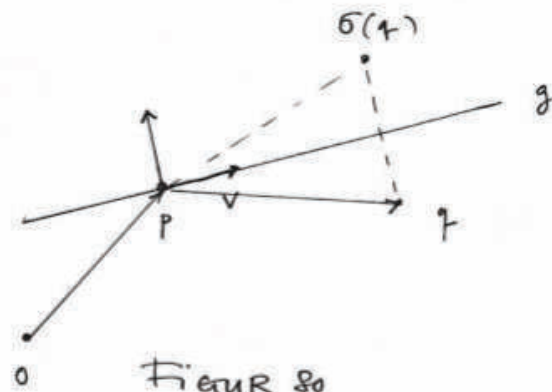
*Beweis.* (a) folgt aus Lemma 1 und der Definition von  $d_h$  als Längenmetrik.

(b) Wir zeigen zuerst, dass zu gegebenem  $z = x + iy \in H^2$  ein  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  existiert, so dass  $T_A(i) = z$ . Dazu sei

$$A_2 := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 := \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A := A_2 \cdot A_1.$$

Dann ist  $T_A(i) = T_{A_2} \circ T_{A_1}(i) = T_{A_2}(iy) = x + iy$ .

Sind jetzt  $p, q \in H^2$  beliebig, so existieren (wie gerade gezeigt)  $B$  und  $C$  in  $SL(2, \mathbb{R})$  mit  $T_B(i) = p$  und  $T_C(i) = q$ . Für  $A := C \cdot B^{-1}$  gilt dann  $T_A(p) = T_C \circ T_{B^{-1}}(p) = T_C(i) = q$  wie behauptet (vgl. FIG. 82).  $\square$



**Bemerkungen.** 1) Eigenschaft (b), also die Homogenität, gilt auch für die euklidische Ebene und die Sphäre (wieso?).

2) Die Streckung  $s_\lambda : H^2 \rightarrow H^2$  mit dem Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  ist eine Möbiustransformation und somit eine Isometrie der hyperbolischen Ebene, denn:

$$s_\lambda = T_A \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}.$$

Das ist wieder ein (grosser) Unterschied zur euklidischen Geometrie: die einzige Streckung, die auch eine euklidische Isometrie ist, ist  $s_1 = \text{Id}$ .

## 7.4 Geodätische Linien in $H^2$

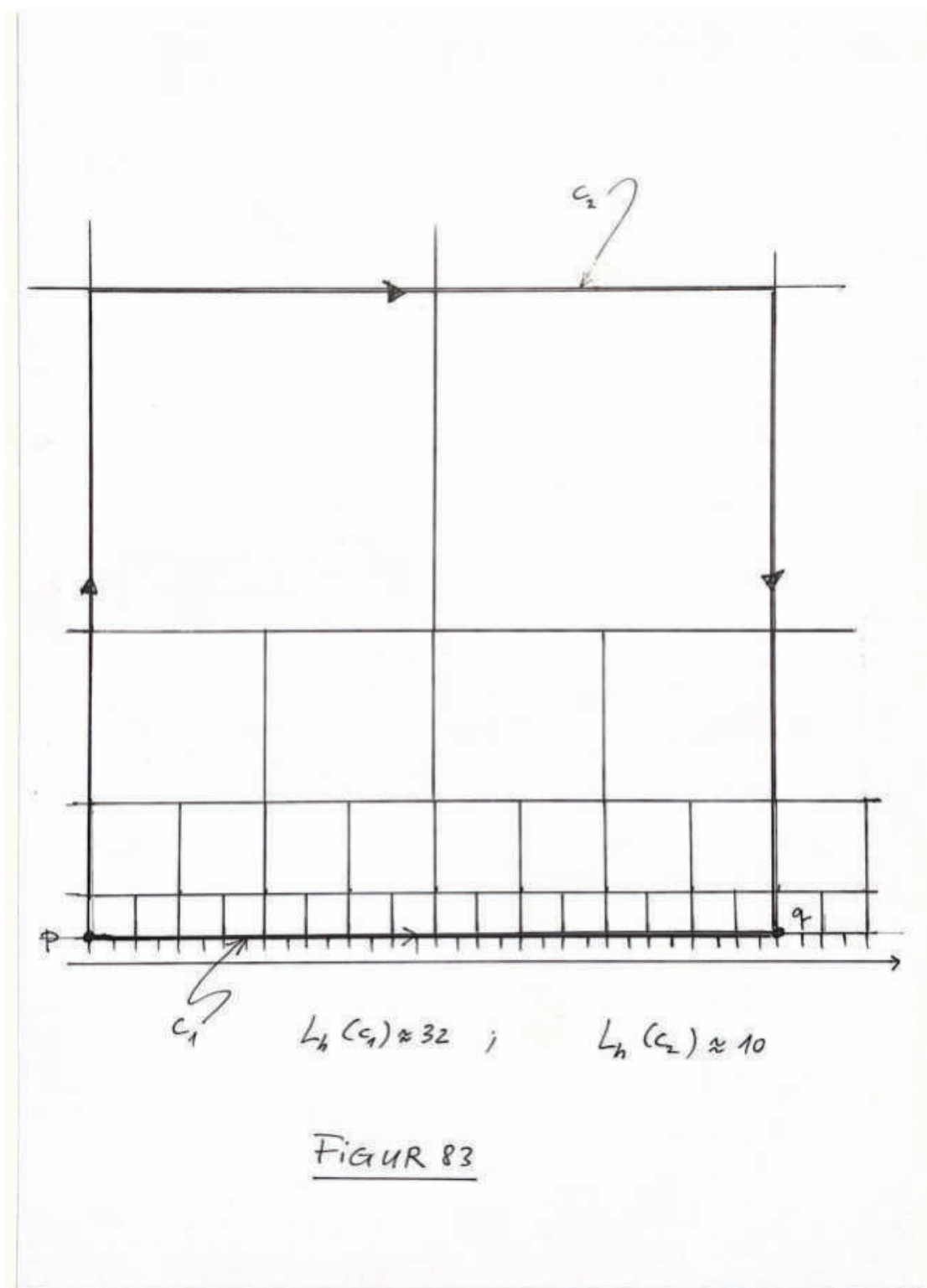
FIG. 83 zeigt eine (grobe) Approximation der hyperbolischen Ebene. Die eingezeichneten Quadrate sind hyperbolisch alle ungefähr gleich gross, werden euklidisch aber immer kleiner, je näher sie bei der  $x$ -Achse liegen. Insbesondere kann man daraus sehen, dass kürzeste Wege (hyperbolisch gemessen) zwischen Punkten nahe bei der  $x$ -Achse zuerst möglichst vertikal, dann horizontal und dann wieder vertikal verlaufen. Das ist die heuristische Erklärung für folgenden Satz:

**Satz 4 (Hyperbolische geodätische Linien)** *Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in  $H^2$  sind (mit hyperbolischer Bogenlänge parametrisierte) Halbkreise orthogonal zur reellen Achse und Geraden orthogonal zur reellen Achse. Solche Kurven sind auch genau die geodätischen Linien in  $H^2$ .*

*Weiter gilt: Je zwei Punkte  $p, q$  in der hyperbolischen Ebene  $H^2$  können durch eine eindeutige geodätische Linie verbunden werden und der hyperbolische Abstand  $d_h(p, q)$  ist gleich der Länge des eindeutigen geodätischen Segments zwischen  $p$  und  $q$ .*

**Bemerkung.** Man beachte, dass die reelle Achse ( $= x$ -Achse) nicht zu  $H^2$  gehört. Halbkreise wie in Satz 4 haben ihren Mittelpunkt auf der reellen Achse (vgl. FIG. 84).





**Lemma 2** Sei  $L$  ein euklidischer Halbkreis oder eine Halbgerade in  $H^2$ , welche die reelle Achse in einem Punkt  $\alpha \in \mathbb{R}$  orthogonal schneidet. Dann ist  $T(z) := -(z - \alpha)^{-1} + \beta$  (für  $\beta \in \mathbb{R}$ ) eine Möbiustransformation, d.h.  $T = T_A$  für ein  $A \in SL(2, \mathbb{R})$ , und bildet  $L$  für ein geeignetes  $\beta$  auf die imaginäre Achse (=  $y$ -Achse) ab.

*Beweis.* Das ist eine Übungsaufgabe. Hinweis: Für  $\gamma \in \mathbb{R}$  bezeichne  $T_\gamma$  die Translation um  $\gamma$ :  $T_\gamma(z) = z + \gamma$ . Weiter sei  $J(z) := -\frac{1}{z}$  (das ist auch eine Möbiustransformation, denn  $J = T_B$  für  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ). Es ist dann  $T = T_\beta \circ J \circ T_{-\alpha}$ .

□

*Beweis von Satz 4.* Seien  $z_1$  und  $z_2$  zwei Punkte in  $H^2$ .

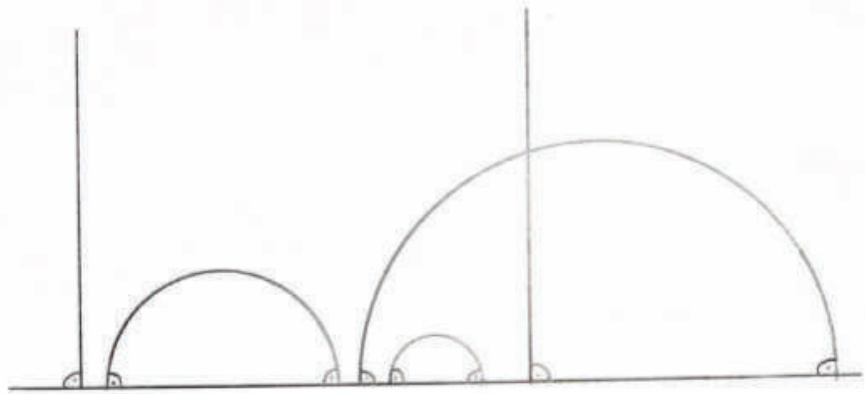
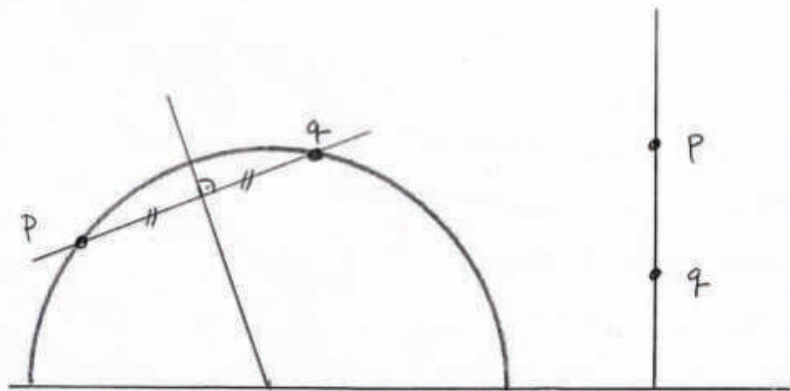
1. Fall: Beide Punkte liegen auf der imaginären Achse,  $z_1 = ai, z_2 = bi, b \geq a > 0$ . Ist dann  $c: [0, 1] \rightarrow H^2$  ein stückweise differenzierbarer Weg zwischen  $ai$  und  $bi$  mit  $c(t) = x(t) + iy(t)$ , so gilt

$$\begin{aligned} L_h(c) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln b - \ln a. \end{aligned}$$

Letzteres ist die hyperbolische Länge des Geradensegments auf der imaginären Achse zwischen  $ai$  und  $bi$  (vgl. das Beispiel in 7.3). Dies zeigt, dass das Infimum angenommen wird und die Behauptung gilt für Punkte auf der imaginären Achse.

2. Fall:  $z_1, z_2 \in H^2$  beliebig. Es gibt genau einen (euklidischen) Halbkreis bzw. eine Halbgerade  $L$  durch  $z_1, z_2$  der, bzw. die, die reelle Achse orthogonal schneidet (Konstruktion des Zentrums via Mittelsenkrechte, vgl. FIG. 85). Nach Lemma 2 existiert dann eine Möbiustransformation (also insbesondere eine hyperbolische Isometrie)  $T_A$  von  $H^2$  so, dass  $T_A(L) =$  imaginäre Achse. Da  $T_A$  (hyperbolische) Längen erhält, erhält sie auch kürzeste Verbindungen. Daraus folgt die erste Behauptung des Satzes.

Ist umgekehrt  $L$  ein mit hyperbolischer Bogenlänge parametrisierter Halbkreis bzw. eine Halbgerade der, bzw. die, die reelle Achse orthogonal schneidet, so realisiert  $L$  (nach den obigen Überlegungen) auch den kürzesten Abstand zwischen je zwei Punkten von  $L$ . Somit ist  $L$  eine geodätische Linie. □

FIGUR 84FIGUR 85

**Bemerkungen.** 1) Die Eindeutigkeit von geodätischen Linien zwischen zwei beliebigen (verschiedenen) Punkten gilt auch in der euklidischen Ebene  $E^2 = (\mathbb{R}^2, d_e)$  (geodätische Linien sind dort Geraden).

2) Euklidische Geraden bzw. hyperbolische geodätische Linien in  $X = E^2$  bzw.  $X = H^2$  sind genau die Bilder von abstandserhaltenden Abbildungen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ ;  $t \mapsto \gamma(t)$  mit  $d_e(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$  bzw.  $d_h(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$  (für  $t =$  Bogenlängeparameter).

Als Beispiel geben wir die Parametrisierung der imaginären Achse durch (hyperbolische) Bogenlänge an: Es sei

$$A_t := \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) := T_{A_t}(\mathbf{i}) = \frac{e^{\frac{t}{2}}\mathbf{i} + 0}{0\mathbf{i} + e^{-\frac{t}{2}}} = e^t\mathbf{i}.$$

Also gilt für  $t_2 \geq t_1$ :

$$d_h(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = d_h(e^{t_1}\mathbf{i}, e^{t_2}\mathbf{i}) = \ln e^{t_2} - \ln e^{t_1} = t_2 - t_1,$$

d.h.  $t$  ist Bogenlängeparameter.

## 7.5 Hyperbolische Geometrie ist nicht-euklidisch

Wir zeigen hier, dass die hyperbolische Ebene  $(H^2, d_h)$  ein Modell für eine nicht-euklidische ebene Geometrie ist, d.h. es gilt das Inzidenz- und das Spiegelungs-Axiom der ebenen Geometrie, jedoch nicht das Parallelen-Axiom.

Das *Inzidenz-Axiom* gilt wegen Satz 4.

Das *Spiegelungs-Axiom* zeigt man so: Für die imaginäre Achse  $L_0$  setzt man  $\sigma_0 : H^2 \rightarrow H^2$ ;  $\sigma_0(x + yi) := x - yi$ . Die Abbildung  $\sigma_0$  ist eine hyperbolische Isometrie (wieso?), die  $L_0$  punktweise fixiert und die zwei Zusammenhangskomponenten des Komplements von  $L_0$  (also die Punkte von  $H^2$  mit  $x > 0$  bzw.  $x < 0$ ) vertauscht.

Für eine beliebige geodätische Linie  $L$  in  $H^2$  sei  $T$  die Möbiustransformation, die  $L$  auf die imaginäre Achse  $L_0$  abbildet (vgl. Lemma 2). Die Spiegelung  $\sigma$  an  $L$  ist dann gegeben durch die Verkettung  $\sigma := T^{-1} \circ \sigma_0 \circ T$  (Übungsaufgabe!).

Sei  $g \subset H^2$  eine hyperbolische geodätische Linie und  $p \in H^2$  aber  $p \notin g$ . Dann gibt es unendlich viele geodätische Linien durch  $p$ , die  $g$  nicht schneiden (vgl. FIG. 86). *Das Parallelen-Axiom gilt also in  $H^2$  nicht.*

## 7.6 Hyperbolischer Flächeninhalt

Für eine Teilmenge  $G$  von  $H^2$  ist der **hyperbolische Flächeninhalt** definiert durch

$$0 \leq \mu(G) = \int \int_G \frac{1}{y^2} dx dy \leq \infty$$

(wir setzen hier immer voraus, dass  $G$  „messbar“ ist, d.h., dass das Integral über  $G$  existiert). Der folgende Satz besagt, dass der Flächeninhalt (ähnlich wie die Länge einer Kurve) eine geometrische Größe, d.h. invariant unter Isometrien, ist.

**Satz 5** *Der hyperbolische Flächeninhalt ist invariant unter Möbiustransformationen: Falls  $G \subset H^2$  und  $\mu(G)$  existiert, so gilt für alle  $A \in SL(2, \mathbb{R})$ , dass  $\mu(T_A(G)) = \mu(G)$  ist.*

*Beweis-Skizze.* Sei  $z = x + iy$ ,  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  (mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc = 1$ ) und  $w := T(z) = u + iv$ . Man berechnet dann zuerst Real- und Imaginärteil  $u$  und  $v$  von  $w$  als Funktionen von  $x$  und  $y$  und daraus die Jacobi-Determinante (Übungsaufgabe!)

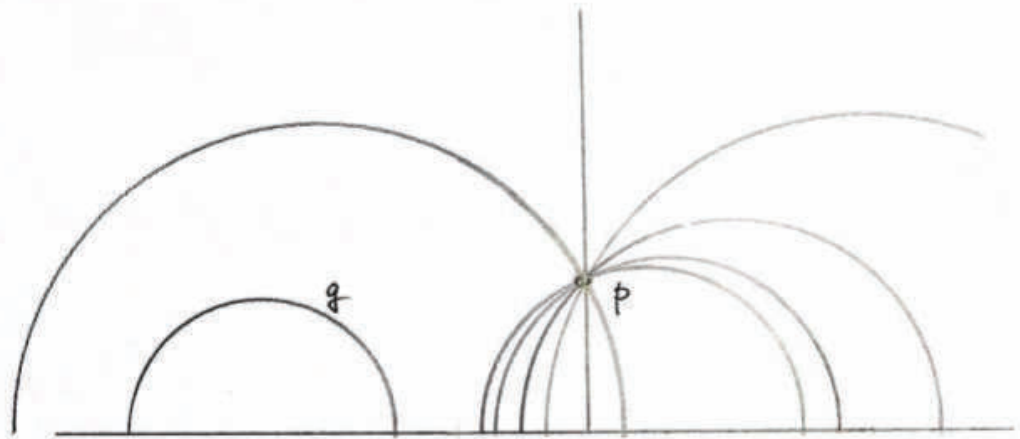
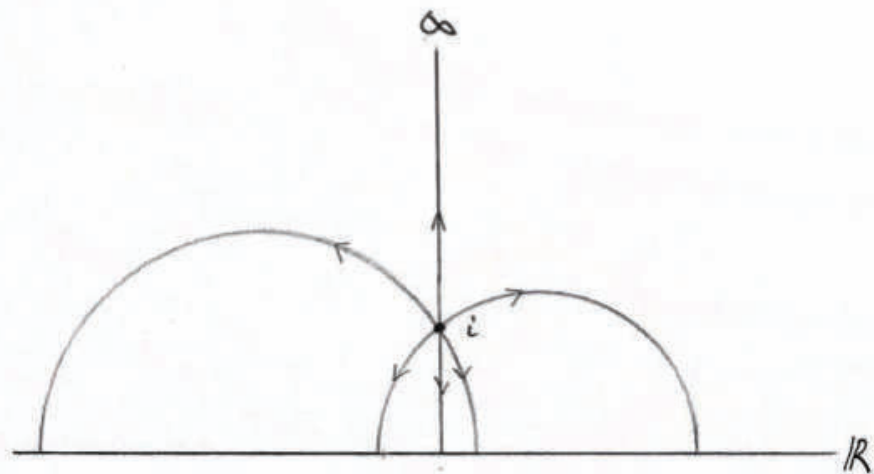
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{|cz + d|^4}.$$

Mit der Transformationsformel für Integrale erhält man dann

$$\begin{aligned} \mu(T(G)) &= \int \int_{T(G)} \frac{1}{v^2} du dv = \int \int_G \frac{1}{v^2} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy \\ &= \int \int_G \frac{1}{|cz + d|^4} \frac{|cz + d|^4}{y^2} dx dy = \mu(G). \end{aligned}$$

□

Wir können die hyperbolische Ebene „kompaktifizieren“ indem wir die reelle Achse und einen Punkt  $\infty$  hinzunehmen:  $\overline{H^2} := H^2 \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ . Geometrisch sind das alle Punkte, die vom Punkt  $i$  in jeder Richtung (gegeben durch einen geodätischen Strahl) unendlich weit entfernt sind (vgl. Fig. 87). Die Menge  $\partial_\infty H^2 := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  heißt **unendlicher Rand von  $H^2$** .

FIGUR 86FIGUR 87

Ein **hyperbolisches Dreieck**  $\Delta \subset \overline{H^2}$  ist eine konvexe Teilmenge begrenzt von 3 Segmenten von geodätischen Linien, die sich paarweise in Punkten  $A, B, C$ , den **Ecken** des Dreiecks schneiden. Wir lassen dabei Ecken im unendlichen Rand  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  zu, aber keine Seiten (vgl. FIG. 88). Konvex heißt hier, dass für je zwei Punkte  $p, q$  von  $\Delta$  auch das Segment der geodätischen Linie zwischen  $p$  und  $q$  in  $\Delta$  liegt.

Der (Innen-)Winkel  $\varphi$  in einer Ecke  $E$  eines Dreiecks ist definiert durch die Riemannsche Metrik, d.h. als Winkel zwischen den entsprechenden Tangentialvektoren an die geodätischen Linien (siehe Abschnitt 7.2), falls die Ecke  $E$  in  $H^2$  liegt. Falls  $E$  im unendlichen Rand liegt, setzen wir  $\varphi := 0$ . Diese Definition ist motiviert durch folgende Bemerkung.

**Bemerkung.** Wie wir gesehen haben, ist die hyperbolische Längenmessung (von Kurven in  $H^2$ ) ganz anders als die euklidische. Hingegen gilt: Der hyperbolische Winkel zwischen zwei sich schneidenden Kurven in  $H^2$  (d.h. der Winkel zwischen den entsprechenden Tangentialvektoren im Schnittpunkt) ist gleich dem euklidischen Winkel. Denn für Tangentialvektoren  $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in T_z H^2$  haben wir

$$\cos \angle_{hyp}(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle_z}{\|a\|_z \|b\|_z} = \frac{\frac{\langle a, b \rangle_{euk}}{(\operatorname{Im} z)^2}}{\frac{\|a\|_{euk}}{\operatorname{Im} z} \frac{\|b\|_{euk}}{\operatorname{Im} z}} = \frac{\langle a, b \rangle_{euk}}{\|a\|_{euk} \|b\|_{euk}} = \cos \angle_{euk}(a, b).$$

Konsistent damit definieren wir den Winkel zwischen geodätischen Linien, die sich in einem Randpunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  schneiden als Null.

**Satz 6 (Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke)** *Der hyperbolische Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks ist durch die drei Winkel bestimmt und höchstens  $\pi$ . Genauer sei  $\Delta$  ein hyperbolisches Dreieck mit Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dann gilt*

$$0 < \mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

*Insbesondere ist also die Winkelsumme  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$  und der Flächeninhalt  $\mu(\Delta) \leq \pi$ .*

Man vergleiche dazu: Der Flächeninhalt eines euklidischen Dreiecks kann beliebig gross sein und hängt nicht nur von den Winkeln ab (ähnliche, nicht kongruente Dreiecke haben gleiche Winkel aber verschiedenen Flächeninhalt).

*Beweis von Satz 6.* 1. FALL: Eine Ecke  $E$  von  $\Delta$  liegt in  $\partial_\infty H^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (nach Definition ist dann der Wert des Winkels von  $\Delta$  an dieser Ecke gleich Null).

Falls  $E = r \in \mathbb{R}$  können wir durch eine Möbiustransformation  $T_A$  für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & r+1 \\ -1 & r \end{pmatrix}$$

erreichen, dass  $E$  auf  $\infty$  abgebildet wird,  $T_A(E) = \infty$ , (ohne dass sich der Flächeninhalt oder die Winkel ändern). Es genügt also den Fall zu betrachten, dass die Seiten  $AC$  und  $BC$  von  $\Delta$  auf geodätischen Linien parallel zu imaginären Achse liegen und der Winkel  $\gamma$  bei  $C = \infty$  gleich Null ist (vgl. FIG. 89).

Durch Möbiustransformationen der  $z \mapsto z + k$  und  $z \mapsto \lambda z$  (für  $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ) können wir weiter erreichen, dass die Seite  $c$  auf dem Kreis um 0 mit Radius 1 liegt (wieder ohne dass sich Flächeninhalt und Winkel ändern). Wir haben dann die Situation wie in FIG. 90 und es ist

$$\mu(\Delta) = \int \int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_a^b dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Mit der Substitution  $x = \cos \theta, \theta \in [0, \pi]$ , erhalten wir

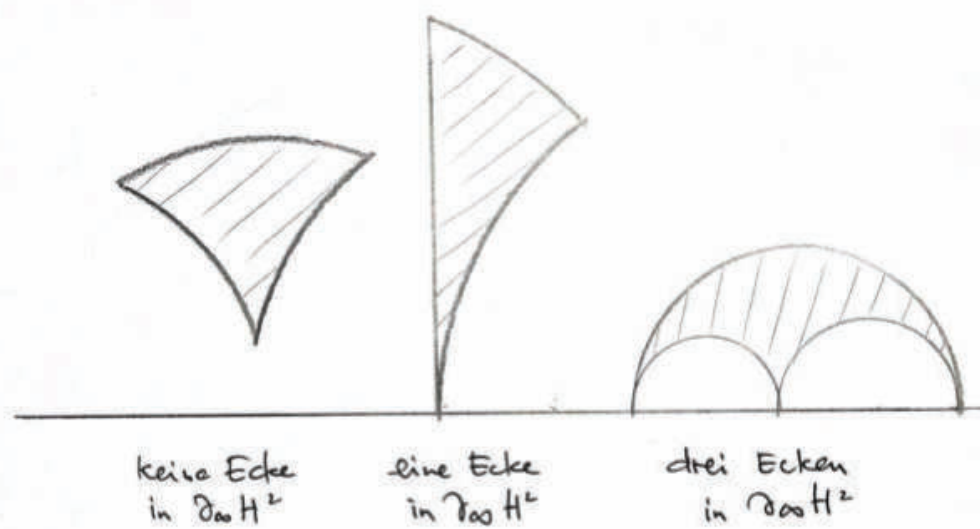
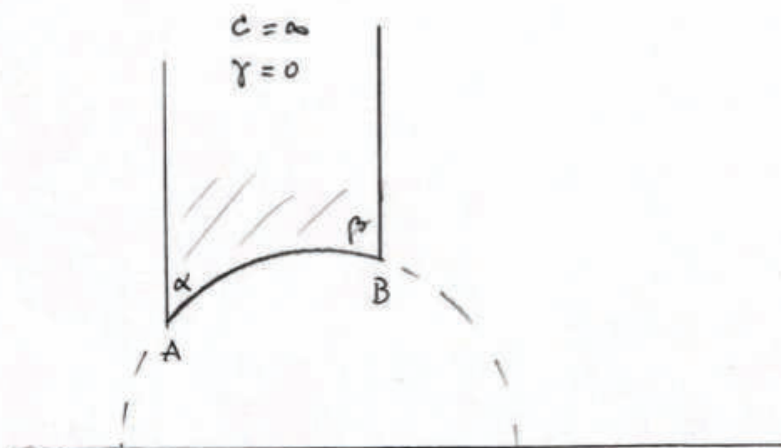
$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta}{\sin \theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta.$$

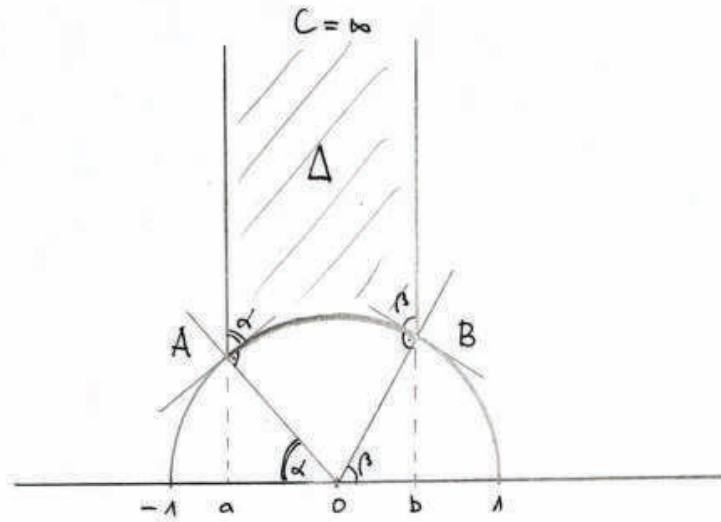
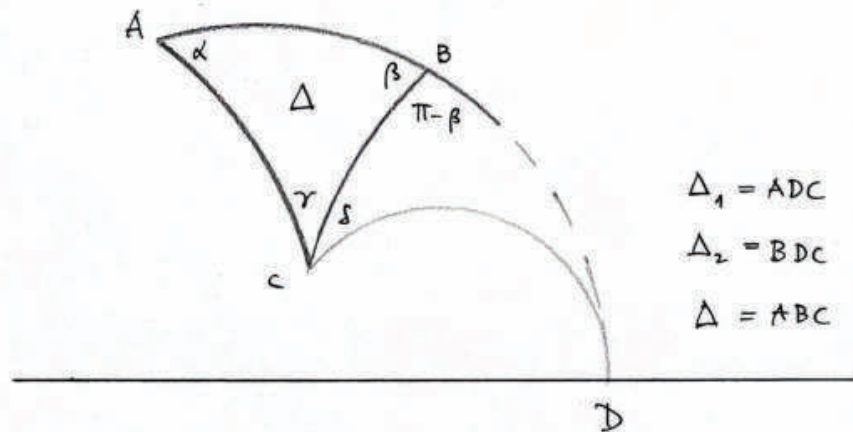
2. FALL: Das Dreieck  $\Delta$  hat keine Ecke in  $\partial_{\infty} H^2$ . Wir verlängern dann eine Seite (z.B.  $AB$ ) bis zum entsprechenden Punkt  $D$  im unendlichen Rand (vgl. FIG. 91). Für die Dreiecke  $ADC$  und  $BDC$  gilt dann der 1. Fall und wir erhalten

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2) \stackrel{1.\text{FALL}}{=} (\pi - \alpha - (\gamma + \delta)) - (\pi - \delta - (\pi - \beta)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

□



FIGUR 88FIGUR 89

FIGUR 90

$$\Delta_1 = ADC$$

$$\Delta_2 = BDC$$

$$\Delta = ABC$$

FIGUR 91

## 7.7 Einheitskreis-Modell und Gauß-Krümmung

In diesem Abschnitt diskutieren wir ein alternatives Modell für die hyperbolische Ebene, das „symmetrischer aussieht“ als das Halbebenen-Modell.

Sei  $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  die offene **Einheitskreisscheibe**.

Die Abbildung

$$M : H^2 \subset \mathbb{C} \rightarrow D^2 \subset \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{iz + 1}{z + i}$$

ist eine bijektive Abbildung zwischen  $H^2$  und  $D^2$  (Übungsaufgabe!). Wir definieren eine Metrik  $d_h^*$  auf  $D^2$  durch  $d_h^*(z, w) := d_h(M^{-1}(z), M^{-1}(w))$ , d.h. wir verlangen per Definition, dass  $M$  eine Isometrie ist.

**Bemerkung.** Man kann zeigen, dass  $d_h^*$  die von der Riemannschen Metrik

$$(g_{ij}(z)) := \left( \frac{4\delta_{ij}}{(1 - |z|^2)^2} \right)$$

auf  $D^2$  induzierte Längenmetrik ist.

**Satz 7** (a) Die Rotationen um  $0 \in D^2$  sind Isometrien des metrischen Raumes  $(D^2, d_h^*)$ .

(b) Für  $0 \leq r < 1$  gilt

$$d_h^*(0, ri) = \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

*Beweis-Skizze.* (a) Wir benutzen die Riemannsche Metrik auf  $D^2$  (vgl. obige Bemerkung). Sei  $c : [a, b] \rightarrow D^2$ ;  $t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$  eine stückweise differenzierbare Kurve in  $D^2$  und  $R_\theta \circ c$  die Bildkurve für die Drehung

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Da  $R_\theta$  eine euklidische Isometrie ist, gilt  $|R_\theta(z(t))| = |z(t)|$  und da  $R_\theta$  eine lineare Abbildung ist, gilt  $|R_\theta(z(t))'| = |R_\theta(z'(t))| = |z'(t)|$ . Somit haben wir für die  $h^*$ -Längen

$$L_{h^*}(R_\theta \circ c) = \int_a^b \frac{2|R_\theta(z(t))'|}{1 - |R_\theta(z(t))|^2} dt = \int_a^b \frac{2|z'(t)|}{1 - |z(t)|^2} dt = L_{h^*}(c).$$

(b) Sei  $c$  eine beliebige Kurve in  $D^2$ , die den Ursprung  $0$  mit  $ri$  verbindet. Dann kann man die Länge von  $c$  abschätzen (analog zur Abschätzung im Beweis von Satz

4 für  $H^2$ ):

$$L_{h^*}(c) \geq \int_0^r \frac{2}{1-t^2} dt = \ln \frac{1+r}{1-r} = 2 \operatorname{artanh} r.$$

Diese untere Schranke wird durch eine Kurve realisiert:  $2 \operatorname{artanh} r$  ist gerade die  $h^*$ -Länge des radialen Segments zwischen 0 und  $ri$ .  $\square$

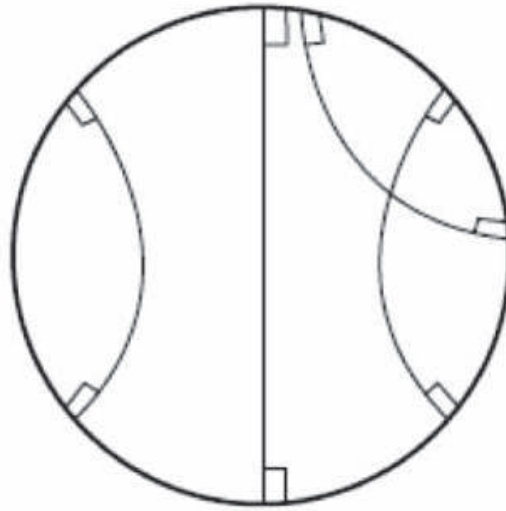
**Bemerkungen.** 1. (Geeignet parametrisierte) Geraden durch 0 sind geodätische Linien in  $D^2$ . Man kann zeigen: alle andern geodätischen Linien in  $D^2$  sind euklidische Kreise, die den Einheitskreis orthogonal schneiden (vgl. FIG. 92).

2. Der unendliche Rand von  $D^2$  ist der Einheitskreis. Hier sieht man besser als im Halbebenen-Modell, dass alle Punkte im unendlichen Rand „gleichwertig“ sind.

3. Der hyperbolische Kreis  $S_\varrho(0)$  in  $D^2$  mit Zentrum 0 und hyperbolischem Radius  $\varrho$  ist der euklidische Kreis um 0 mit euklidischem Radius  $r$ , wobei

$$\varrho = 2 \operatorname{artanh} r \quad (\Longleftrightarrow r = \tanh \frac{\varrho}{2}).$$

Insbesondere gilt  $\varrho \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow 1$ .



FIGUR 92 (Quelle: building-babylon.net)

**Satz 8** Die hyperbolische Länge des hyperbolischen Kreises  $S_\varrho(0)$  in  $D^2$  mit Zentrum 0 und hyperbolischem Radius  $\varrho$  ist

$$L_{h^*}(S_\varrho(0)) = 2\pi \sinh \varrho = 2\pi \frac{1}{2}(e^\varrho - e^{-\varrho}) \quad (\sim \pi e^\varrho \text{ für grosses } \varrho).$$

*Beweis.* Nach obiger Bemerkung 2 können wir den Kreis  $S_\varrho(0)$  darstellen als parametrisierte Kurve

$$z(t) = R_t(\mathbf{ri}) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} (\mathbf{ri}) = r \cos t + ir \sin t$$

für  $t \in [0, 2\pi]$  und  $r = \tanh \frac{\varrho}{2}$ . Es ist dann

$$\begin{aligned} L_{h*}(S_\varrho(0)) &= \int_0^{2\pi} \frac{2|z'(t)|}{1 - |z(t)|^2} dt = 2\pi \frac{2r}{1 - r^2} = 2\pi \frac{2 \tanh \frac{\varrho}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{\varrho}{2}} \\ &= 2\pi \frac{2 \sinh \frac{\varrho}{2}}{\cosh \frac{\varrho}{2}} \cosh^2 \frac{\varrho}{2} = 2\pi 2 \sinh \frac{\varrho}{2} \cosh \frac{\varrho}{2} = 2\pi \sinh \varrho. \end{aligned}$$

Wir haben dabei benutzt, dass  $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$  ist.  $\square$

Die Gauß-Krümmung hatten wir in Abschnitt 5.5 für reguläre Flächen in  $\mathbb{R}^3$  definiert. Das „Theorema egregium“ von Gauß besagt, dass die Gauß-Krümmung eine Größe der inneren Geometrie von  $S$  ist, d.h. aus den Daten der 1. Fundamentalform berechnet werden kann (vgl. Satz 3 in Abschnitt 5.5). Mit der Formel von Bertrand-Puiseux (Satz 4 in Abschnitt 5.5) kann man die Gauß-Krümmung in einem Punkt  $p$  über einen Grenzprozess aus den Längen von Kreisen um  $p$  berechnen. Da man dazu nur eine Längemessung braucht, kann man diese Formel auch als *Definition* der Gauß-Krümmung für 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten verwenden.

**Satz 9** Die Gauß-Krümmung von  $D^2$  (und  $H^2$ ) ist konstant  $= -1$ .

*Beweis.* Nach Satz 3 (b) ist  $H^2$  und damit auch  $D^2$  homogen. Also ist die Gauß-Krümmung  $K(p)$  (definiert via der Formel von Bertrand-Puiseux) in jedem Punkt  $p \in D^2$  gleich, d.h. die Funktion  $K : D^2 \rightarrow \mathbb{R}; p \mapsto K(p)$  ist konstant. Um den Wert der Konstanten zu bestimmen, genügt es somit  $K(0)$  zu berechnen. Mit der Formel von Bertrand-Puiseux und Satz 8 haben wir

$$K(0) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{3}{\pi \varrho^3} [2\pi \varrho - L_{h*}(S_\varrho(0))] = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{3}{\pi \varrho^3} [2\pi \varrho - 2\pi \sinh \varrho].$$

Wir setzen die Reihenentwicklung  $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$  ein und erhalten

$$K(0) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{3}{\pi \varrho^3} [2\pi \varrho - 2\pi \varrho - \frac{1}{3!}2\pi \varrho^3 - \frac{1}{5!}2\pi \varrho^5 - \dots] = \lim_{\varrho \rightarrow 0} [-1 - \frac{6}{5!}\varrho^2 - \dots] = -1.$$

$\square$

**Bemerkung.** Reskaliert man die hyperbolische Metrik, setzt also  $d_{\tilde{h}} := \lambda d_h$  für  $\lambda \in \mathbb{R} > 0$ , so findet man für die Länge eines Kreises mit hyperbolischem Radius  $\varrho$  mit einer analogen Rechnung wie im Beweis von Satz 8

$$L_{\tilde{h}}(S_\varrho(0)) = 2\pi \lambda \sinh \frac{\varrho}{\lambda}.$$

Mit der Formel von Bertrand-Puiseux erhält man dann wie oben für die Gauß-Krümmung von  $(D^2, d_{\tilde{h}})$

$$K_{\tilde{h}}(p) = -\frac{1}{\lambda^2} = \text{konstant.}$$

Durch eine passende Reskalierung bekommt man also Modelle der hyperbolischen Ebene mit beliebiger konstant negativer Krümmung. Das ist analog zu Beispiel 3 in Abschnitt 5.5., wo wir gesehen haben, dass die Gauß-Krümmung einer 2-Sphäre vom Radius  $R$  gegeben ist durch  $K = \frac{1}{R^2}$ .

**Folgerung.** Damit erhalten wir für jede reelle Zahl  $\alpha$  eine reguläre Fläche bzw. eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung  $\alpha$ :

- Für  $\alpha > 0$  die Sphäre mit Radius  $R = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ ,
- für  $\alpha = 0$  die euklidische Ebene
- und für  $\alpha < 0$  die Einheitskreisscheibe  $D^2$  (bzw. das isometrische Modell der oberen Halbebene  $H^2$ ) mit der Metrik  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}d_{h^*}$  (bzw.  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}d_h$ ).



Circle Limit III von M.C. Escher inspiriert von einem Artikel von H.S.M. Coxeter (Quelle: wikipedia.org)