0 Abkürzungen

Normen

ℓ_1**:**$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

ℓ_2**:**$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

ℓ_∞**:**$||x||_\infty = \max\{x_1, \ldots, x_n\} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$

Cauchy-Schwarz Ungleichung
Es gilt:

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \qquad \text{bzw}$$

$$\langle x, y \rangle \leq ||x|| \cdot ||y|| \text{ wenn x und y reell sind.}$$

Es gilt Gleichheit $|\langle x, y \rangle| = ||x|| \cdot ||y||$ genau dann, wenn x und y linear unabhängig sind.

Abgeschlossene Hülle $\overline{B}$
Sei $(X, \mathcal{O})$ eine Topologie und $B \subseteq X$ eine Teilmenge von X. Die Menge $\overline{B}$ der Punkte von X, die nicht äußere Punkte von B sind, also in B oder auf dem Rand ∂B von B liegt

Ist X ein hausdorffscher Raum und $K \subset X$ kompakt

$\Rightarrow$ Dann ist K abgeschlossen.

Zusammenhangskomponente
Sei X ein Topologie und $x \in X$. Die **Zusammenhangskomponente** von x ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten.
Die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes sind zusammenhängend und bilden eine disjunkte Zerlegung von X.

Offener Ball B_r
Der **offene Ball vom Radius r um Punkt p** ist
$B_r(p) = \{x \in X | \, d(x, p) < r\}$

Abgeschlossener Ball $\overline{B_r}$
Der **offene Ball vom Radius r um Punkt p** ist
$B_r(p) = \{x \in X | \, d(x, p) \leq r\}$

Sphäre S_r
Die **Sphäre vom Radius r um Punkt p** ist
$S_r(p) = \{x \in X | \, d(x, p) = r\}$

n-dimensionale Sphäre S_r^n
Die **n-dimensionale Sphäre vom Radius r** ist
$S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, ||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = r\}$

Einheitskreit S^1
Der **Einheitskreis** S^1 ist gerade $S^1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$ bzw auf die reellen Zahlen eingeschränkt $S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ |x| = x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

Einheitssphäre S^2
Die **Einheitssphäre** S^2 ist gerade $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ |x| = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

Großkreis
Die **Großkreise** der Sphäre S^2_R sind gerade Schnitte von Ebenen mit der S^2_R durch den Nullpunkt, also gerade der Äquator oder beliebige Längenkreise (also die gekrümmten Längengrade von Nord zu Südpol) aber **nicht** die Breitenkreise.

Ein Großkreis ist z.B gegeben durch

$$c : [0, L] \to S^2_R$$

$$s \mapsto \begin{pmatrix} R\cos(s) \\ R\sin(t)\sin(s) \\ R\cos(t)\sin(s) \end{pmatrix}$$

Das ist also eine rotationsfläche eine Kurve $s \mapsto (R\cos(s), 0, R\sin(t))$ die aber anders als sonst hier nicht um die z-Achse rotiert wird sonder um die x-Achse deshalb ist $\varphi(t) = R\sin(t)$ und $\psi(t) = R\cos(t)$ und

$$s \mapsto \begin{pmatrix} \psi(s) \\ \varphi(s)\sin(t) \\ \varphi(s)\cos(t) \end{pmatrix}$$

Nordpol/Südpol
Sei S^{n+1} die n-dimensionale Sphäre vom Radius R. Dann ist $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, R) \in S^{n+1}$ der **Nordpol** und $\overline{e}_{n+1} = (0, \ldots, 0, -R) \in S^{n+1}$ der **Südpol**

Standard Metrik d_e
Die Standard-Matrik d_e ist definiert durch

$$d_e(x, y) = ||x - y||$$

Abbildungsabkürzungen

$X \simeq Y \Leftrightarrow X$ und Y sind homöomorph

konvexe Hülle
Die **konvexe Hülle** $s(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ ist definiert durch k+1 affin unabhängige Punkte $v_0, v_1, \ldots, v_k$ durch:

$$s(v_0, v_1, \ldots, v_k) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i |\ \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

Mit $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ linear unabhängig.

Tangentialraum $T_p\mathbb{R}^n$
Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ ist der **Tangentialraum** $T_p\mathbb{R}^n$ in p definiert als der affine Unterraum $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ also alle Richtungsvektoren mit Fußpunkt p.

Tangentialebene T_pS
Sei S eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $x(u, v)$. Die **Tangentialebene von** S **im Punkt** $p = x(u_0, v_0)$ ist definiert als die lineare Hülle der Vektoren x_u und x_v in diesem Punkt, also die Ebene die durch diese Vektoren aufgespannt wird.

$$T_pS = dx(u_0, v_0)(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2) = \{p\} \times Span(x_u(u_0, v_0), x_v(u_0, v_0)) \subset T_p\mathbb{R}^3$$

Kreuz-/Vektorprodukt $a \wedge b$
Für zwei Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ ist das **Vektorprodukt** definiert durch $a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$

- $a \wedge b$ ist orthogonal zu a und b.
- Für den Winkel α zwischen a und b ist $\|a \wedge b\| = \|a\|\|b\| \sin\alpha$ die Fläche des von a und b aufgespannten Parallelograms.
- Mit dem Standard-Skalarprodukt gilt: $\|a \wedge b\| = \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle - \langle a, b\rangle^2$
- $a, b, a \wedge b$ sind positiv orientiert d.h $\det(a, b, a \wedge b) > 0$

Funktionalmatrix $D(u, v)$

$$D(u,v) = (x_u(u,v), x_v(u,v)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \end{pmatrix}$$

1.Fundamentalform

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = \mathrm{I}(u,v) &= \begin{pmatrix} \mathrm{E}(u,v) & \mathrm{F}(u,v) \\ \mathrm{F}(u,v) & \mathrm{G}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_u(u,v), x_u(u,v)\rangle & \langle x_u(u,v), x_v(u,v)\rangle \\ \langle x_v(u,v), x_u(u,v)\rangle & \langle x_v(u,v), x_v(u,v)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_u, x_u\rangle & \langle x_u, x_v\rangle \\ \langle x_v, x_u\rangle & \langle x_v, x_v\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E(u, v) = E = $\langle x_u(u,v), x_u(u,v)\rangle$

F(u, v) = F = $\langle x_u(u,v), x_v(u,v)\rangle = \langle x_v(u,v), x_u(u,v)\rangle$

G(u, v) = G = $\langle x_v(u,v), x_v(u,v)\rangle$

2.Fundamentalform

$$\mathrm{II} = \mathrm{II}(x(u,v)) = \mathrm{II}(u,v) = \begin{pmatrix} \mathrm{L}(u,v) & \mathrm{M}(u,v) \\ \mathrm{M}(u,v) & \mathrm{N}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_{uu}(u,v), n(u,v)\rangle & \langle x_{uv}(u,v), n(u,v)\rangle \\ \langle x_{vu}(u,v), n(u,v)\rangle & \langle x_{vv}(u,v), n(u,v)\rangle \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{L} & \mathrm{M} \\ \mathrm{M} & \mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_{uu}, n\rangle & \langle x_{uv}, n\rangle \\ \langle x_{vu}, n\rangle & \langle x_{vv}, n\rangle \end{pmatrix}$$

L(u, v) = L = $\langle x_{uu}(u,v), n\rangle$

M(u, v) = M = $\langle x_{uv}(u,v), n\rangle = \langle x_{vu}(u,v), n\rangle$

N(u, v) = N = $\langle x_{vv}(u,v), n\rangle$

Gauß-Krümmung
$K : S \to \mathbb{R}; K(p) = \dfrac{\det \mathrm{II}(p)}{\det \mathrm{I}(p)}$

kovariante Ableitung $D_u a$
Für Normalenvektor n und Vektorenfeld $a : U \to \mathbb{R}^3$ entlang einer regulären Fläche S ist die **kovariante Ableitung**

$$D_u a = a_u - \langle n, a_u\rangle n = a_u + \langle n_u, a\rangle n$$

Für eine C^∞-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist die kovariante Ableitung $D_u(fn) = fn_u$

Für ein tangentiales Einheitsvektorenfeld $a : U \to \mathbb{R}^3$ längs einer regulären Fläche S

Einheitsvektorenfeld $e(u,v)$
Sei c eine differenzierbare Kurve und S eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $x : U \to S$. Dann wird durch $e(u,v) = \frac{x_u(u,v)}{\|x_u(u,v)\|}$ ein **Einheitsvektorenfeld** definiert.

Für ein tangentiales Einheitsvektorenfeld $e(s)$ gilt $\langle D_e, e\rangle = 0$ wobei D_e die kovariante Ableitung ist. Gilt für die gemischten kovarianten Ableitungen:

$$(D_v D_u - D_u D_v)a = K\sqrt{EG - F^2}(n \wedge a)$$

Außenwinkel
Sei S eine reguläre Fläche und $c : [a,b] \to S$ eine **nur** stückweise reguläre Kurve (also es gibt endlich viele Punkt $s \in [a,b]$ sodass c in diesen Punkten nicht differenzierbar ist). Eine solche Kurve hat dann m Ecken also genau m solcher Punkte s_i an denen c nicht differenzierbar ist. An diesen Stellen gibt es dann jeweils eine rechtsseite und eine linksseitige Tangente $c'(s_i^+)/c'(s_i^-)$, die jeweils verschieden sind.
Dann hat man genau m **Außenwinkel** $\delta_i = \angle(c'(s_i^-), c'(s_i^+))$

Euler-Charakteristik
Die **Euler-Charakteristik** eine Triangulierung T eine 2-Mannigfaltigkeit M ist die

Wechselsumme

$$\chi_T(M) = \text{Anzahl Ecken - Anzahl Kanten + Anzahl Seitenflächen}$$

der Triangulierung.

(1) Die Euler-Charakteristik ist unabhängig von der Triangulierung also $\chi_T(M) = \chi(M)$

(2) Falls M Geschlecht g hat, so gilt $\chi(M) = 2 - 2g$

(3) Die Eulere-Charakteristik ist eine topologische Invariante also homöomorphe Mannigfaltigkeiten haben die gleiche Euler-Charakteristik

Hyperbolische Ebene (H^2, d_h)
Die hyperbolische Ebene (H^2, d_h) ist der eindeutige metrische Raum der das Inzidenz- und Spielgelungs-Axiom des Axiomensystem der euklidischen Ebenen erfüllt, das Parallelen-Axiom jedoch nicht.
D.h alle solche metrischen Räume sind (bis auf Skalierung) isometrisch zu (H^2, d_h).

Hyperbolischer Flächeninhalt $\mu(G)$
Für eine Teilmenge $G \subset H^2$ von H^2 ist der **hyperbolische Flächeninhalt** definiert durch:

$$0 \leq \mu(G) = \int\int_G \frac{1}{y^2} dxdy \leq \infty$$

$\partial_\infty H^2$: Die Menge $\partial_\infty H^2 = \mathbb{R} \cup \infty$ heißt der **unendliche Rand** von H^2.

$\overline{H^2}$: Man kann die hyperbolische Ebene "kompaktifizierenïndem man die reelle-/x-Achse und einen Punkt ∞ hinzunimmt: $\overline{H^2} = H^2 \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$

$Sym(n)$ ist die Menge der positiv definiten, symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen

Spezielle lineare Gruppe $SL(2, \mathbb{R}$
Die spezielle lineare Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ ist die Menge aller reellen (2×2)-Matrizen mit Determinante 1 versehen mit Matrixmultiplikation.

Möbiustransformation $T_A(z)$
Für eine Matrix

$$A \in SL(2, \mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ det(A) = ad - bc = 1$$

definiere ist die **Möbiustransformation**:

$$T_A : H^2 \to H^2;\ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Einheitskreisscheibe D^2
Die **Einheitskreisscheibe** ist gegeben durch:

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; x^2 + y^2 < 1\} = \{z \in \mathbb{C} | \; |z| < 1\}$$

$M : H^2\mathbb{C} \to D^2 \subset \mathbb{C}; \; z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$ ist die Abbildungvon der Poincaré-Halbebene in das Einheitskreismodell

$d_h^*(z, w)$ Die Längenmetrik $d_h^*(z, w)$ im Einheitskreismodell für hypergeometrische Ebenen ist gegeben durch:
$d_h^*(z, w) = d_h(M^{-1})(z), M^{-1}(w))$ für die Abbildung $M : H^2\mathbb{C} \to D^2 \subset \mathbb{C}; \; z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$ von der Poincaré-Halbebene in das Einheitskreismodell

hyperbolischer Kreis S_ϱ
Der **hyperbolische Kreis** $S_\varrho(0)$ in D^2 mit Zentrum 0 und hyperbolischen Radius ist der euklidische Kreis um 0 mit euklidischen Radius r, wobei

$$\varrho = 2arctan(r) \Longleftrightarrow r = \tanh(\frac{\varrho}{2})$$

1 Eigenschaften

1.1 Topologien

Offen
Elemente A $\in \mathcal{O}$ wobei $\mathcal{O}$ eine Topologie von X ist, heißen offen bezüglich der Topologie $\mathcal{O}$.

Aus der Definition der Abgeschlossenheit kann man umgekehrt folgern:
Eine Menge $B \subseteq X$ ist offen $\Leftrightarrow$ B ist das Komplement einer abgeschlossenen Teilmenge $C \subseteq X$ von X $\Leftrightarrow B = X \setminus C$ für C abgeschlossen.

Man kann auch wie folgt vorgehen um zu zeigen das eine Menge U offen ist:

1. Wähle einen beliebigen Punkt $x \in U$ und zeige das es dann eine offene Umgebung $\widetilde{U}_x$ um x gibt also eine Menge $\widetilde{U}_x$ die offen ist und $x \in \tilde{U}_x$.
2. Zeige dann das $\widetilde{U}$ vollständig in U liegt d.h $\widetilde{U}_x \subset U$
3. Da $x \in U$ jetzt beliebig gewählt war gibt es also zu jedem Punkt aus U eine offene Umgebung die vollständig in U liegt.
4. Da man U durch die Menge aller Punkte $x \in U$ beschreiben kann und es für jeden solchen Punkt eine entsprechende Umgebung gibt, gilt insbesondere
$$U = \bigcup_{x \in U} \widetilde{U}_x$$
5. Damit ist U als Vereinigung von offenen Teilmengen ebenfalls offen $\square$

d-offen
Eine Menge $U \subseteq X$ ist **d-offen**, genau dann, wenn für alle $p \in U$ ein $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ existiert, so dass der offene Ball mit Radius ε um p ganz in U liegt.

$$U \subseteq X \text{d-offen} \Leftrightarrow \forall p \in U \; \exists \, \varepsilon > 0 : B_r(p) = \{x \in X | \, d(x, p) < r\} \subseteq U$$

Abgeschlossen
Eine Menge A $\subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus$ A offen ist. (Bezüglich einer Topologie $(X, \mathcal{O})$)

Sei X ein hausdorffscher topologischer Raum und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge von X. Dann ist K abgeschlossen.

Hat man z.b eine Abbildung $f : K \to \mathbb{R}$ von einem Kompaktum $K \subset X$ die stetig ist. Folgt nach kompaktheitseigenschaft das $f(K)$ wieder kompakt ist und da $\mathbb{R}$ hausdorffsch ist und $Bild(f(K)) \subset \mathbb{R}$ damit eine kompakte Teilmenge eines hausdorffschen topolgischen Raums ist (der $\mathbb{R}$ mit der standard Topologie) das $f(K)$ abgeschlossen ist.

Hausdorffsch
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **hausdorffsch**, falls zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in X, p \neq q$ disjunkte Umgebungen um p und q existieren.

- Metrische Räume sind hausdorffsch.
- Die reellen Zahlen mit der Standard-Topologie $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_s)$ ist hausdorffsch.
- Jeder Teilraum eines hausdorffschen Raumes ist wieder hausdorffsch.
- Die n-dimensionalen Sphären $S_R^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind als Teilraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ selbst wieder hausdorffsch
- In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt
- Topologische Räume X und Y sind Hausdorffsch
  $\Leftrightarrow$ $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ offen bezüglich Produkt-Topologie ist

Zusammenhang
Ein topologischer Raum$(X, \mathcal{O})$ist **zusammenhängend**, falls X und $\emptyset$ die einzigen sowohl offen als auch abgeschlossenen Teilmengen sind.
Äquivalent dazu gilt:
Ein topologischer Raum X ist zusammenhängend genau dann wenn X nicht disjunkte Vereinigung von zwei offenen, nichtleeren Teilmengen von X ist.

$$\Longleftrightarrow \nexists U, V \subseteq X : U \cap V = \emptyset, X = U \cup V, \; U, V \neq \emptyset$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt zusammenhängend, falls sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

(1) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Standard-Topologie und auch alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sind zusammenhängend

Es gilt:

(1) Ist $A \subset X$ zusammenhängend, dann auch die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$
(2) Sind $A \subset X$ und $B \subset X$ zusammenhängend und $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $A \cup B$ zusammenhängend
(3) Ist $\{A_i \subset X | \; i \in I\}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen von X mit nichtleerem Durchschnitt, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind (weg-)zusammenhängend. Insbesondere sind zwei homöomorphe topologische Räume entwedet beide zusammenhängend oder beide nicht zusammenhängend

Damit folgt auch direkt das vorgehen zum zeigen das ein topologischer Raum X zusammenhängend ist:

(1) Definiere zwei Mengen $U, V \in \mathcal{O}_X$ die offen in X sind und X disjunkt zerlegen also $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$.

(2) Damit der Raum X jetzt zusammenhängend ist (und nicht leer sein soll) darf nur eine der Mengen U, V nichtleer sein also $U \neq \emptyset \Leftarrow V = \emptyset$ und umgekehrt.

(3) Leite also aus bekanntem her das eine der beiden Mengen leer sein muss. z.B das X eine Obermenge eines zusammenhängenden Raums Y ist.

(4) Nach Teilraum topologie gibt es dann $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in \mathcal{Y}$ sodass $U = X \cap \widetilde{U}, V = X \cap \widetilde{V}$.

(5) Es gilt dann auch $Y = Y \cap \widetilde{U} \cup Y \cap \widetilde{V}$ und weil Y zusammenhängend ist ist entwedet $Y \cap \widetilde{U}$ oder $Y \cap \widetilde{V}$ die leere Menge

(6) Dann müssen nur noch die Elemente aus X betrachtet werden die nicht in Y liegen das diese nicht in der anderen Menge $Y \cap \widetilde{U}$ oder $Y \cap \widetilde{V}$ liegen.

Weg-Zusammenhang
Ein topologischer Raum (X, O) heißt **weg-zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punnkten $p, q \in X$ einen Weg zwischen p und q gibt.(d.h eine stetige Abbildung $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$.
Es gilt: **weg-zusammenhängend $\Longrightarrow$ zusammenhängend**

In Mannigfaltigkeiten ist weg-zusammenhang und zusammenhang äquivalent d.h es gilt auch die Rückrichtung
zusammenhängend $\Longrightarrow$ weg-zusammenhängend *also insgesamt*
zusammenhängend $\Longleftrightarrow$ weg-zusammenhängend

Kompaktheit
Ein topologischer Raum (X, O) heißt **kompakt** wenn jede offene Überdeckung von X eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt.D.h:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i, U_i \text{ offen} \Longrightarrow \exists i_1, \ldots, i_k \in I, \text{so dass } X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **kompakt**, wenn A kompakt bezüglich der Standard-Topologie ist. Ein topologischer Raum heißt **lokal kompakt**, wenn jeder Punkt aus X eine kompakte Umgebung hat.

Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen sind beschränkt.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Standard-Topologie sind nicht kompakt, da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Da aber jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ in einem abgeschlossenen Teilintervall $[x - \varepsilon, x + \varepsilon], \varepsilon > 0$ liegt ist $\mathbb{R}$ aber lokal kompakt.

(1) Stetige Bilder von kompakten Räumen sind kompakt.

$\Longleftrightarrow$ Stetige Abbildungen bilden kompakte Räume in kompakte Räume ab.

$\Longleftrightarrow$Für $f : X \to Y$ stetig, X kompakt gilt: $f(X)$ ist kompakt.

(2) Falls X und Y homöomorph sind, dann ist X kompakt genau dann wenn Y kompakt ist. (d.h Kompaktheit ist eine topologische Invariante)

$\Longleftrightarrow$ $X \simeq Y \Rightarrow X$ komapkt $\Leftrightarrow Y$ kompakt

(3) Abgeschlossenen Teilräume $\overline{X}$ von kompakten Räumen X sind kompakt.

(4) Produkte $X \times Y$ von kompakten Räumen sind kompakt

Ist X ein hausdorffscher Raum und $K \subset X$ kompakt

$\Rightarrow$ Dann ist K abgeschlossen.

lokal euklidisch
Ein topologischer Raum M ist **lokal euklidisch**, wenn für alle Punkte $p \in M$ eine offene Umgebung U von p und ein Homöomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ für gewisses n existiert.

Orientierbarkeit
Für die Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ sind $a, b, a \wedge b$ positiv orientiert d.h $\det(a, b, a \wedge b) > 0$ (die Reihenfolge ist wichtig)

Eine reguläre Fläche S (bzw eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M) heißt **orientierbar**, falls ein Atlas von S (bzw M) existiert, so dass alle Kartenwechsel eine positive Funktionalmatrix haben.
Falls eine reguläre Fläche S orientierbar ist gilt für die Parametrisierung $x : U \to S$, dass $det(x_u, x_v, x_u \wedge x_v) > 0$

Eine Basis (a, b) von T_pS ist positiv orientiert, falls $det(a, b, n(p)) > 0$.
Die Randkurve von einem abgeschlossenes einfaches Gebietist **orientiert**, falls für die positiv orientierte Basis (c', h) von $T_{c(s)}S$ der Vektor h äuf die Seite von Gßeigt.

Bogenlänge parametrisiert
Sei S eine reguläre Fläche und $c(s) = x(u(s), v(s)) \subset S \subset \mathbb{R}^3$eine Flächenkurve. Man kann c so umparametrisieren dass $\|c'(s)\| = \|\frac{dc}{ds}(s)\| = 1$. Eine solche Kurve heißt **nach Bogenmaß parametrisiert**.

regulär
Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3;\ s \mapsto c(s)$ eine differenzierbare Kurve. c heißt **regulär**, falls $c'(s) \neq 0$ für alle $s \in [a, b]$.

Also eine Kurve ist genau dann regulär wenn sie in jedem Punkt differenzierbar ist.

einfach geschlossen
Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3;\ s \mapsto c(s)$ eine differenzierbare Kurve. c heißt **einfach geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$ und $c'(a) = c'(b)$ und c eingeschränkt auf $[a, b)$ injektiv ist.

abgeschlossenes einfaches Gebiet
Eine Teilmenge G von einer regulären Fläche S heißt **abgeschlossenes einfaches Gebiet**, falls G homöomorph zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe ist (also $G \simeq S^1_R$) und der Rand ∂G das Bild einer einfach geschlossenen Kurve ist.

2 Abbildungen/Kurven

Normen

Eine Norm ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto \|x\|$ für einen Vektorraum V für die gilt:

Für alle $x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

(1) **Definitheit:**$\|x\| = 0 \Leftarrow x = 0$

(2) **Homogenität:**$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

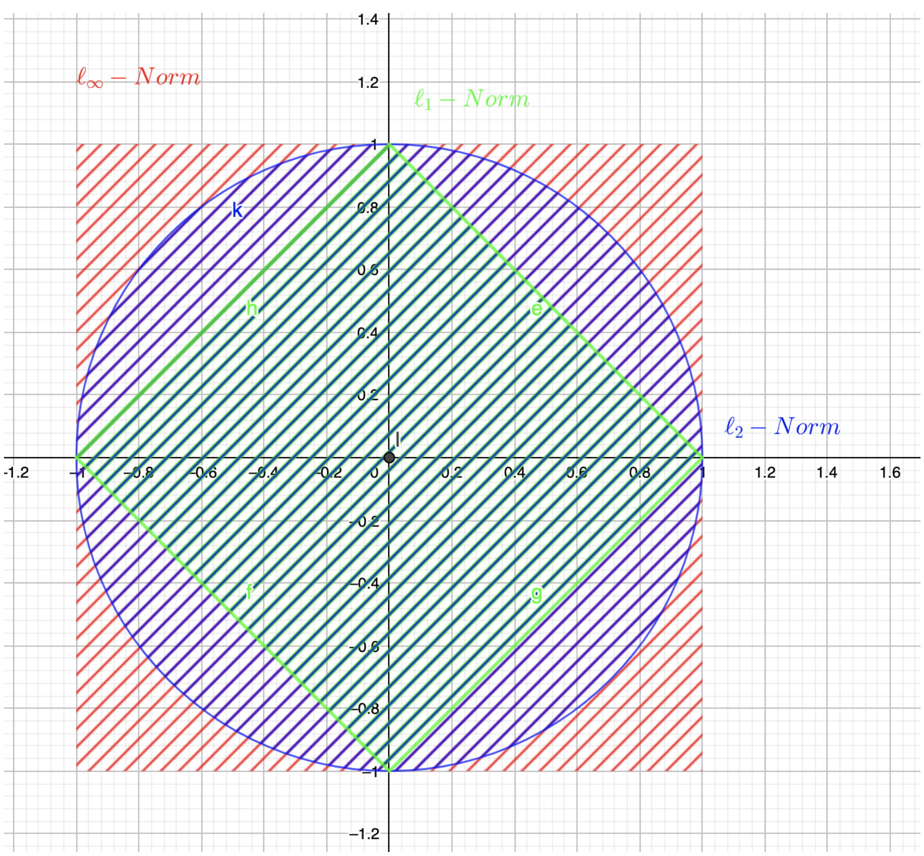
(3) **Dreiecksungleichung:**$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Die klassischen Beispiele sind die $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$-Normen.

(1) ℓ_1**:**$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

(2) ℓ_2**:**$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

(3) ℓ_∞**:**$\|x\|_\infty = \max\{x_1, \ldots, x_n\} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$



Metrik
Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X :\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine **Metrik**, falls für alle $x, y, c \in X$ gilt:

1. positiv definit: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. symmetrisch: $d(x, y) = d(y, x)$
3. Dreickesungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Abstandserhaltend
Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt abstandserhaltend, falls für alle $x, y \in X$ gilt: $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$

Isometrie
Eine Isometrie ist eine bijektive, abstandserhaltend Abbildung.

Seien $S, \tilde{S}$ reguläre Flächen. Eine Abbildung $f : S \to \tilde{S}$ heißt **Isometrie**, wenn f ein Diffeomorphismus zwischen S und $\tilde{S}$ ist und für alle differenzierbaren Kurven $c : I \to S$ gilt, dass die Länge der Kurve unter f invariant ist also $L(f \circ c) = L(c)$.
Für die metrischen Räume auf den regulären Flächen $(S, d_S), (\tilde{S}, d_{\tilde{S}})$ gilt insbesondere $d_{\tilde{S}}(f(p), f(q)) = d_S(p, q)$

lokale Isometrie
Eine Abbbildung $f : S \to \tilde{S}$ zwischen regulären Flächen $S, \tilde{S}$ heißt **lokale Isometrie**, falls für jeden Punkt $p \in S$ eine offenen Umgebung$U \subset S$ von p und $V \subset \tilde{S}$ von $f(p)$ existiert, so dass f eingeschränkt auf U eine Isometrie zwischen U und V ist.

Sind $S, \tilde{S}$ reguläre Flächen mit Parametrisierungen

$$x : U \to x(U) \subset S \qquad \tilde{x} : U \to \tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$$

so dass die 1.Fundamentalform von S und $\tilde{S}$ in den Punkten $(u, v) \in U$ aus U übereinstimmen, also

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}(u, v) & \mathrm{F}(u, v) \\ \mathrm{F}(u, v) & \mathrm{G}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{E}}(u, v) & \tilde{\mathrm{F}}(u, v) \\ \tilde{\mathrm{F}}(u, v) & \tilde{\mathrm{g}}(u, v) \end{pmatrix}$$

Dann sind $x(U) \subset S$ und $\tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$ isometrisch.

Stetigkeit
Seien (X, O_X) und (Y, O_Y) topologische Räume.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y stets offen sind in X.

$$\text{f stetig} \Leftrightarrow \text{Für alle } V \in O_Y \text{ ist } f^{-1} = \{x \in X | \, f(x) \in V\} \in O_X$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) Für alle $x \in X$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x), \text{ so dass } f(B_\delta^X(x)) \subseteq B_\varepsilon^Y(f(x))$$

(iii) f ist folgenstetig, d.h für alle $x \in X$ gilt

$$x = \lim_{x \to \infty} x_n \Rightarrow f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

Jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge eines topologischen Raumes hat ein endliches Maximum und Minimum, ist also insbesondere beschränkt.

Homöomorphismus
Eine bijektive Abbildung zwischen topologischen Räumen $f : X \to Y$ heißt **Homöomorphismus**, falls f und ihre Umkehrabbildung f^{-1} stetig sind, d.h:

$$\begin{aligned} \text{f ist homöomorphismus} &\Longleftrightarrow f \text{ bijektiv und } f, f^{-1} \text{ stetig} \\ &\Longleftrightarrow U \subseteq X \text{offen} \Longleftrightarrow f(U) \subseteq Y \text{offen} \end{aligned}$$

Damit ist homöomorphismus stärker als stetigkeit weil bei Stetigkeit nur

$$f^{-1}(U) \subseteq Y \text{ offen} \Rightarrow U \subseteq X \text{ offen gilt.}$$

Die topologischen Räumen X und Y heißen **homöomorph** wenn es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt. Geschrieben $X \simeq Y$.
Beispiel:

(1) Alle abgeschlossenen Intervalle bzgl der Standard-Topologie sind homöomorph:

$$[0, 1] \simeq [a, b] \text{ für alle } a < b \in \mathbb{R}$$

Gleiches gilt für die offenen intervalle $(0, 1) \simeq (a, b)$. Ein Homöomorphismus ist gegeben durch $f(t) = a + t(b - a)$

(2) Ganz $\mathbb{R}$ ist bzgl der Standard-Topologie homöomorph zu einem offenen Intervall:

$$\mathbb{R} \simeq (-1, 1) \simeq (0, 1)$$

Ein Homöomorphismus ist gegeben durch $f(t) = tanh(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$

(3) Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Isometrie. Dann ist f ein Homöomorphismus. Setzte $\varepsilon = \delta$ dann:

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) < \delta = \varepsilon$$

Also wenn ein Punkt x im Delta-Ball $B_\delta(y)$ um y liegt, dann liegt f(x) im Epsilon-Ball $B_\varepsilon(f(y))$ um f(y) für beliebige x und y. Also $f(B_\delta(y)) \subseteq B_\varepsilon(f(y))$ und damit sind die Bilder von offenen Mengen unter f wieder offen und analog umgekehrt.

(4) **stereographische Projektion**
Sei $S^n = S^n_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ die n-dimensionale Sphäre vom Radius 1. Weiter sei $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in S^{n+1}$ der Nordpol. Dann

ist S^n homöomorph zu $\mathbb{R}^n$: $S^n \backslash \{e_{n+1}\} \simeq \mathbb{R}^n$. Ein Homöomorphismus ist die **stereographische Projektion**

$$spr : S^n \backslash \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n;\ spr(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

Für die Umkehrabbildung gilt:

$$spr^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n \backslash \{e_{n+1}\};\ spr^{-1}(y) = \left(\frac{2y_1}{||y||^2 + 1}, \cdots, \frac{2y_n}{||y||^2 + 1}, \frac{||y||^2 - 1}{||y||^2 + 1} \right)$$

Eine stetige,bijektive Abbildung $f : X \to Y$ von einem kompakten Raum X auf einen hausdorffschen Raum Y ist ein Homöomorphismus.

Reguläre Kurve
Eine (reguläre) **Kurve** ist eine differenzierbare Abbildung $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n; t \mapsto c(t)$, so dass $c'(t) = \frac{dc}{dt} \neq 0$.

differenzierbare Flächenkurve
Eine differenzierbare Flächenkurve ist differenzierbare Abbildung auf einer regulären Fläche mit Parametrisierung $x(u, v)$

$$c : [\alpha, \beta] \to S;\ t \mapsto x(u(t), v(t))$$

Tangentialvektor
Sei S eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $x(u, v)$ und c eine differenzierbare Flächenkurve. Der **Tangentialvektor** an c im Punkt $c(t) \in S$ ist gegeben durch:

$$c'(t) = x_u(u(t), v(t))u'(t) + x_v(u(t), v(t))v'(t) \in T_{c(t)}S$$

Länge von Flächenkurven
Sei S eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $x(u, v)$ und c eine differenzierbare Flächenkurve. Die **Länge** der Kurve c ist gegeben durch:

$$L(c) = \int_\alpha^\beta ||c'(t)||_{c(t)} dt$$

Winkel zwischen Flächenkurven
Sei S eine reguläre Fläche und c_1, c_2 differenzierbare Flächenkurven. Der Winkel zwischen diesen beiden Kurve ist gegeben durch:

$$\cos \angle(c_1'(0), c_2'(0)) = \frac{\langle c_1'(0), c_2'(0)}{||c_1'(0)||||c_2'||}$$

Flächeninhalt Parametrisierung
Sei S eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $x : U \to x(U) \subset S \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist der **Flächeninhalt** der Parametrisierung $x(U)$ definiert als:

$$A(x(U)) = \int\int_U \|x_u \wedge x_v\| dudv = \int\int_U \sqrt{EG - F^2} dudv = \int\int_U det(I) dudv$$

Differenzierbar
Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Dimensionen $\dim(M) = m$ und $\dim(N) = n$. Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ heißt **differenzierbar in** $p \in M$, falls für Karten (U, φ) um den Punkt $p \in M$ und (V, ψ) um den Bildpunkt $f(p) \in N$, wenn die Koordinatendarstellung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ von f bei p im Punkt $\varphi(p)$ C^∞ ist.

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

Analog heißt f **differenzierbar** wenn f in jedem Punkt $p \in M$ differenzierbar ist.

Differential
Für eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist die **Ableitung bzw das Differential** von f in $p \in \mathbb{R}^m$ definiert als lineare Abbildung
$df(p) : T_p\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ die f in einer Umgebung von p approximiert.

kovariante Ableitung
Sei S eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $x : U \to S$. Weiter sei $a : U \to \mathbb{R}^3$ ein tangentiales Vektorenfeld längs S, d.h für alle $(u, v) \in U$ liegt $a(u, v) \in T_{x(u,v)}S$ in der Tangentialebene $T_{x(u,v)}S$ und insbesondere ist $a(u, v)$ orthogonal zum Normalenvektor $n(u, v)$.
Weil $a_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} a(u, v) \in T_{x(u,v)}\mathbb{R}^3$ im Allgemeinen nicht mehr in $T_{x(u,v)}S$ definiert man die **kovariante Ableitung** $D_u a$ von a nach u als die Orthogonalprojektion von a_u in die Tangentialebene

$$D_u a = a_u - \langle n, a_u \rangle n = a_u + \langle n_u, a \rangle n$$

Diffeomorphismus
Ein **Diffeomorphismus** ist eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M, N, die sowohl selbst als auch ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : M \to N$ differenzierbar ist.
Ein Diffeomorphismus ist immer auch ein Homöomorphismus.

Triangulierung
Sei M eine kompakte orientierbare 2-Mannigfaltigkeit. Eine **Triangulierung** T von M ist eine endliche Famillie von (orientierungserhaltenden) Diffeomorphismen

$$\delta_k : \Delta \to \delta_k(\Delta) \subset M$$

des Standard-2-Simplex Δ (also eines Dreiecks) nach M sodass gilt:

(1) Die Bild-Simplizes (Dreiecke) $\delta_k(\Delta)$ überdecken M: $M = \bigcup_{k=1}^{n} \delta_k(\Delta)$

(2) Ist $\delta_k(\Delta) \cap \delta_j(\Delta) \neq \emptyset$ für $k \neq j$ so haben $\delta_k(\Delta)$ und $\delta_j(\Delta)$ entweder genau eine gemeinsame Ecke oder genau eine gemeinsame Kante nur eines von beiden und nicht mehr.

Jede kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit M mit Atlas $\mathcal{A}$ besitzt eine Triangulierung $\delta_k : \Delta \to \delta_k(\Delta) \subset M$, so dass jedes Simplex $\delta_k(\Delta)$ ganz in einer Kartenumgebung von $\mathcal{A}$ enthalten ist.

3 Geometrische Strukturen

Metrische Räume
Ein Paar (X,d) aus einer Menge X und einer Metrik heißt metrischer Raum.
Metrische Räume sind hausdorffsch.

Topologische Räume
Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, O) bestehend aus einer Menge X und einem System $O \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X, so dass gilt

1. $X, \emptyset \in O$
2. Der Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus O ist wieder in O

$$\Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} X_i \in O, n \in \mathbb{N}, X_i \in O$$

3. Die Vereinigung von beliebig vielen Mengen aus O ist wieder in O

$$\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{k} X_i \in O, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, X_i \in O$$

Ein solches System O von Teilmengen heißt **Topologie** von X

Umgebung
Sei $B \subset X$ eine Teilmenge von X einer Topologie(X, O). Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von B, falls eine offene Menge O bezüglich der Topologieexistiert, so dass $B \subseteq O \subseteq U$. Also B ist komplett in einer offenen Teilmenge von X enthalten. Beachte das B nicht offen sein muss.

Topologische Mannigfaltigkeiten
Eine **(topologische) Mannigfaltigkeit** ist ein topologischer Raum$M$ mit:

(1) M ist **lokal euklidisch**, d.h für alle Punkte $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U von p und ein Homöomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ für gewisses n.

(2) M ist Hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis.

Differenzierbare Mannigfaltigkeit
Eine **Differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist eine topologische Mannigfaltigkeit versehen mit einem maximalen Atlas.

Simplizialkomplexe
Ein **k-Simplex** in $\mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle $s(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ von k+1 affin unabhängigen Punkten $v_0, v_1, \ldots, v_k$.

Eine endliche Menge K von Simplexen heißt (endlicher) **Simplizial-Komplex** wenn gilt:

1. Mit jedem Simplex in K enthält K auch alle zugehörigen Teilsimplexe.
   Also wenn das "Dreieck"$s(v_0, v_1, v_2) \in K$ dann gilt: Die Seiten $s(v_0, v_1) \in K$, $s(v_0, v_2) \in K$, $s(v_1, v_2) \in K$ sowie die Punkte $s(v_0) \in K$, $s(v_1) \in K$, $s(v_2) \in K$ liegen in K.

2. Der Durchschnitt von zwei Simplexen die in K liegen ist entweder leer oder **genau** ein gemeinsames Teilsimplex.
   Also schneiden sich zwei Simplexe entweder gar nicht, in genau einem Punkt oder genau einer vollständigen Seite, usw

Simplizialkomplexe entstehen durch verkleben von Simplexen.

konvexe Polyeder
Eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}^3$ heißt **konvexes Polyeder**, falls

1. P ist Durchschnitt von endlich vielen affinen Halbräumen
   Ein affiner Halbraum kann man sich als die linke oder rechte Hälfte einer Ebene durch den $\mathbb{R}^3$ vorstellen.

2. P ist beschränkt und nicht ganz in einer Ebene enthalten.

3. P ist konvex, d.h. mit je zwei Punkten $p, q \in P$ liegt auch das Geradensegment $\overline{pq}$ ganz in P.

Eigenschaft 3. ist nicht notwendig für einen konvexen Polyeder gilt aber wenn eine Teilmenge ein konvexes Polyeder ist.

Ein Polyeder heißt (m,n)-**regulär**, falls alle Seitenflächen des Polyeders n-Gone sind also alle Kanten gleich lang sind und in jeder Ecke genau m solcher n-Gone /Kanten zusammentreffen.

Reguläre Flächen
Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt **reguläre Fläche**, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung V um p in $\mathbb{R}^3$, eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine C^∞-Abbildung die sogenannte **(lokale) Parametrisierung**

$$x : U \to \mathbb{R}^3;\ (u, v) \mapsto x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

gibt, so dass

(1) $x(U) = S \cap V$ und $x : U \to S \cap V$ ist ein Homöomorphismus

(2) Die Ableitung $dx(u, v) : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \to T_{x(u,v)}\mathbb{R}^3$ ist injektiv für $(u, v) \in U$

Bedingung (2) ist äquivalent zu

(2a) Die Funktionalmatrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$ hat Rang 2 für $(u, v) \in U$

(2b) Die Spaltenvektoren $x_u(u, v),\ x_v(u, v)$ sind linear unabhängig.

(2c) Das Vektorprodukt $x_u(u, v) \wedge x_v(u, v) \neq 0$ für alle $(u, v) \in U$

Polygon

Sei S eine reguläre Fläche. Ein **Polygon** in S ist eine Teilmenge G, die homöomorph zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe ist und deren Rand ∂G das Bild einer einfach geschlossenen, stückweise regulären Kurve ist. Die **Innenwinkel** des Polygons sind durch $\alpha_i = \pi - \delta_i$ mit den Außenwinkeln δ_i

geodätische Dreiecke

Ein **geodätisches Dreieck** in einer regulären Fläche S ist ein Polygon Δ, das genau drei Ecken hat und dessen drei Randsegmente/Kanten Geodätische sind.

Seien α, β, γ die Innenwinkel des geodätischen Dreiecks. Für die Innenwinkelsumme eines geodätischen Dreiecks in einer Fläche S die konstante Gaußkrümmung K haben gilt:

- Für $K \equiv 0 \Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$
- Für $K \equiv 1 \Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma > \pi$
- Für $K \equiv -1 \Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma < \pi$

4 Topologien

Triviale Topologie
Die kleinstmögliche Topologie (X, O_t) mit $O_t = \{X, \emptyset\}$ heißt **triviale Topologie** auf X

Diskrete Topologie
Die größtmögliche Topologie (X, O_d) mit $O_d = \mathcal{P}(X)$ heißt **diskrete Topologie** auf X

Standard Topologie
Sei $X = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und
$O_s = \{I \subseteq \mathbb{R} | \, I = \text{Vereinigung von offenen Interevallen}(a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$
dann heißt (X, O_s) die **Standardtopologie** auf $\mathbb{R}$. Die Standardtopologie hat eine abzählbare Basis.
Die Standardtopologie bezüglich den reellen Zahlen $(\mathbb{R}, O_s)$ ist hausdorffsch
Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Standard-Topologie und auch alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sind zusammenhängend

Metrisch induzierte Topologie
Metrische Räume (X,d) sind topologische Räume, also wird durch eine Metrik eine Topolgie induziert, die aus den d-offenen Mengen von X besteht.
Die Topologie induziert von der Standard Metrik hat eine abzählbare Basis bestehend aus allen rationalen Bällen mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

Basis
Sei (X, O)ein Topologie. Eine **Basis** für die Topologie O ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq O$ so dass für jede offene Menge $V \neq \emptyset, V \in O$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \; V_i \in \mathcal{B}$$

Teilraumtopologie
Sei (X, O_X) ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge von X. Die **Teilraumtopologie** von Y ist gegeben durch

$$O_Y = \{U \subseteq Y | \; U \cap Y \text{ für ein } V \in O_X\}$$

und macht damit (X, O_Y) zu einem topolgischen Raum bezüglich dieser Teilraumtopologie

Produkttopologie
Seien (X, O_X), (Y, O_Y) zwei topolgische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ ist offen in der **Produkt-Topologie** wenn es zu jedem Punkt $(x, y) \in W$ eine Umgebung $U \subseteq X$ von x und eine Umgebung $V \subseteq Y$ von y gibt, so dass $U \times V \subseteq W$ gilt.
Also man findet um jeden Punkt einer offenen Menge koordinatenweise offene Mengen bezüglich der komponententopologien die vollständig in einer Umgebung der entsprechenden Menge liegt.

Quotiententopologie
Sei (X, O_X) ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge X. Die Äquivalenzklasse eines Elementes $x \in X$ ist gegeben durch $[x] = \{y \in X | \; x \sim y\}$.Die Äquivalenzklassen bilden eine Partition von X sind also eine disjunkte Zerlegung dessen Vereinigung wieder den Gesamtraum ergibt. $X/\sim$ ist dann der zugehörige Qutienten-Raum auf dem die **Quotiententopologie** definiert ist.

$$\pi : X \to X/\sim; \; x \mapsto [x]$$

ist die kanonische Projektion die Elemente auf ihre Äquivalenzklasse abbildet. π ist eine stetige Funktion (insbesondere ist damit auch $\pi \times \pi : X \times X \to Y \times Y$) usw. stetig in der Produkttopologie wobei $\pi^{-1}(U, V) = \pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)$).
Die **Quotiententopologie** $(X/\sim, O_{X/\sim})$ ist dann definiert durch die offenen Mengen:

$$U \subseteq X/\sim offen \Longleftrightarrow \pi^{-1}(U) = \{x \in X | \; \pi(x) = [x] \in U\} offeninX$$

Also eine Menge U ist offen bezüglich der Quotiententopologie, wenn die Menge der Urbilder der Äquivalenzklassen die in der U liegen eine offene Menge bezüglich der Topologie auf X bilden.

Projektiver Raum P^n
Der projektive Raum ist eine abstrakte Mannigfaltigkeit deren Elemente gerade die Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch den Nullpunkt sind. Definiere also den projektiven Raum $P^n = \{$eindimensionale Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}\}$.

Um P^n zu einem topologischen Raum zu machen gibt es zwei Betrachtungsmöglichkeiten:

(a) Definiere auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Longleftrightarrow \; \exists \lambda \neq 0 \text{ mit } x = \lambda y$$

Dann ist $P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$

(b) Definiere auf der n-Sphäre $S^n_1 = S^n$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \Longleftrightarrow x = -y$. Eine Äquivalenzklasse ist also gegeben durch $[x] = \{x, -x\}$ und $P^n = S^n/\sim$

Damit kann als Topologie von P^n die Quotienten-Topologie von $S^n/\sim$ definieren.
P^n ist eine kompakte n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.
Insbesondere ist P^n hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis

Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) | \; i = 1, \ldots, n+1\}$ ist gegeben durch:

$$U_i = \{[(x_1, \ldots, x_{n+1})] \in P^n | \; x_i \neq 0\}$$

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n; \;\; [(x_1, \ldots, x_{n+1})] \mapsto \varphi_i([(x_1, \ldots, x_{n+1})]) = \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$$

Die Umkehrabbildung ist einfach gegeben durch:

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_i \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto [(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})]$$

und natürlich ist auch φ_i^{-1} stetig (muss es ja sein damit wir eine diffbare Mannigfaltigkeit bekommen)

Simplizial topologischer Raum
Ein Simplizialkomplex K kann zu einem topologischen Raum erweitert werden. Die Menge $|K| = \bigcup_{s \in K} s \subset \mathbb{R}^n$ versehen mit der Teilraum-Topologie von $\mathbb{R}^n$ heißt der zum Simplizialkomplex K gehörende topologische Raum.

Klassifikation 2-dimensionaler Mannigfaltigkeiten/Geschlecht
Sei M eine kompakte orientierbare 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine natürliche Zahl $\mathbb{N} \ni g \geq 0$ das sogenannte **Geschlecht**. Es gilt:

- Die Sphäre S_R^2 hat Geschlecht 0
- Der Torus hat Geschlecht 1
- Falls $g = 0$ so ist M homöomorph zur Sphäre $S^2 = S_1^2$
- Falls $g \geq 1$ so ist M homöomorph zu einer zusammenhängenden Summe von g Tori.
- Zwei kompakte orientierbare Flächen/Mannigfaltigkeiten mit gleichen Geschlecht immer homöomorph

5 Mannigfaltigkeiten

Karte
Eine **Karte** ist ein Paar (U, φ) mit Eigenschaft (1) einer (topologischen) Mannigfaltigkeit M. Der topologischer Raum Raum M ist also lokal euklidisch d.h U ist offene Umgebung um eine Menge von Punkten $p \in M$ und $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus.

Eine Karte (V, ψ) heißt **verträglich** mit einem Atlas $\mathcal{A}$, falls für alle Kartengebiete U_i aus $\mathcal{A}$ die einen nichtleeren Schnitt mit V haben $U_i \cap V \neq \emptyset$ der *Kartenwechsel* $\psi \circ \varphi^{-1}$ C^∞ ist.

Atlas
Ein **Atlas** für eine Mannigfaltigkeit Mist eine Menge $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)| \ i \in I\}$ von Karten mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$

Ein **Atlas** heißt C^∞, falls alle möglichen *Kartenwechsel* C^∞-Abbildungen (also unendlich oft stetig differenzierbar) zwischen den offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ der entsprechenden Karten sind.

maximaler Atlas
Erweitert man einen C^∞ Atlas $\mathcal{A}$ mit allen mit $\mathcal{A}$ *verträglichen* Karten erhält man einen **maximalen Atlas**.

Dimension
Die **Dimension** einer Mannigfaltigkeit ist der konkrete Wert für n aus der Definition (1) für die lokale euklidizität von $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ also welchem euklidischen Raum die Mannigfaltigkeit lokal entspricht.
(z.b der Ebene $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Dimension 2, oder dem Raum $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Dimension 3)

Kartenwechsel
Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A}$. Weiter seien (U, φ), (V, ψ) zwei Karten mit nichtleerem Durchschnitt $U \cap V = D$ und $p \in D$. Dann wird durch

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(D) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(D) \subset \mathbb{R}^n$$

ein **Kartenwechsel** definiert. Als Komposition von homöomorphen Abbildungen ist dieser wieder homöomorph.

Existenz Triangulierung
Jede kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit M mit Atlas $\mathcal{A}$ besitzt eine Triangulierung $\delta_k : \Delta \to \delta_k(\Delta) \subset M$, so dass jedes Simplex $\delta_k(\Delta)$ ganz in einer Kartenumgebung von $\mathcal{A}$ enthalten ist.

5.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

1. Abzählbar viele Punkte versehen mit der diskreten Topologie bilden ein 0-dimensionale Mannigfaltigkeit
2. Der Einheitskreis S^1 ist eine kompakte zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

3. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden eine nicht kompakte zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.
4. Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (insbesondere $\mathbb{R}^n$ selbst) ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.
5. Jede offene Teilmenge einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist selbst wieder eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.
6. Die allgemeine lineare Gruppe
   $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \, det(A) \neq 0\} = det^{-1}(\mathbb{R} \backslash \{0\})$
   ist offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ also eine $n \times n$-dimensionale Mannigfaltigkeit.
7. Die n-dimensionale Einheitssphäre $S_1^n = S^n$ ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit (ebenso beliebiege n-dimensionale Sphären S_R^n).
8. Das Produkt einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit Mmit einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit N ist eine m+n-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \times N$
9. IDer n-dimensionale Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit die homöomorph zur S^n ist.

5.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1. Für eine offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ bezügliche der standard-Topologie ist ein Atlas $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{A} = \{(U, id_{|U})\}$ bestehend aus genau dieser einen Karte definiert. Der zugehörige maximale Atlas heißt der kanonische maximale Atlas.

2. Reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$ sind spezielle 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

3. Die n-Sphären $S^n_R = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, ||x|| = R\}$ sind n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Seien $N = (0, \dots, 0, R), S = (0, \dots, 0, -R)$ der Nord-/Südpol und $U_1 = S^n_R \setminus \{N\},\ U_2 = S^n_R \setminus \{S\}$ die Sphären ohne Nord-/Südpol also insbesondere offene Mengen. Weiter seien φ_1, φ_2 die steoreographischen Projektionen vom Nord-/Südpol, also

   $$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n; p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \mapsto (x_1(p), \dots, x_{n+1}(p)) \text{ mit } x_i(p) = \frac{Rp_i}{R - p_{n+1}}$$

   $$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n; p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \mapsto (x_1(p), \dots, x_{n+1}(p)) \text{ mit } x_i(p) = \frac{Rp_i}{R + p_{n+1}}$$

   Die Kartenwechsel sind gegeben durch:

   $$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = R^2 \frac{x}{||x||^2}$$

   Damit ist $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ ein Atlas der zu einem maximalen Atlas erweitert werden kann. Weil S^n_R als Teilraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ hausdorffsch ist und eine abzählbare Basis hat folgt die n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

4. Der Projektive Raum P^n ist eine kompakte, n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Karten sind gegeben durch:

   $$\tilde{U}_i = \{x \in S^n | \, x_i \neq 0\}, \quad U_i = \pi(\tilde{U}_i) = [\tilde{U}_i]$$

   $$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n; \quad \varphi_i([x]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

5. Sind M, N m-/n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so ist die m+n-dimensionale Produkt-Mannigfaltigkeit ebenfalls differenzierbar.
   Für Karten (U, φ) um $p \in M$ und (V, ψ) um $q \in N$ ist $(U \times V, \varphi \times \psi)$ eine Karte um $(p, q) \in M \times N$

6 Simplizes

Teilsimplex
Die konveke Hülle einer Teilmenge von $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ heißt **Teilsimplex** oder **Seite** des Simplex $s(v_0, v_1, \dots, v_k)$

Standardsimplex
Das **k-dimensionale Standardsimplex** ist $\Delta_i = s(e_1, e_2, \dots, e_{k+1}) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ mit den Standard-Basisvektoren $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$ als Ecken.

Verklebungen
Gegeben seien zwei topologische Räume X und Y. Die **disjunkte Vereinigung** von X und Y ist die Vereinigung von vorher disjunkt gemachten Mengen: $X \sqcup Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$
Ist nun $A \subset X$ ein Teilraum und $f : A \to Y$ eine Abbildung, dann kann man auf $X \sqcup Y$ eine Äquivalenzrelation definieren:

$$x \sim x' \Longleftrightarrow \begin{cases} & x = x' \\ oder & f(x) = x' \\ oder & f'(x) = x \\ oder & f(x) = f(x') \end{cases}$$

Der Quotientenraum $X \sqcup_f Y = X \sqcup Y / \sim$ heißt **Verklebung von X mit Y längs A via f**.

Selbstverklebung
Falls $X = Y$ und $f : A \subset X \to X$ kann man X auch mit sich selbst verkleben. Solche **Selbstverklebungen** werden mit X/f notiert.

Beispiele für Selbstverklebungen sind das Einheitsquadrat, Zylinder, Torus, Möbiusband und die Kleinische Flasche.

7 Reguläre Flächen

Parameter-Wechsel/Umparametrisierung
Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Weiter seien $x_1 : U_1 \to S, x_2 : U_2 \to S$ zwei Parametriesierungen so, dass $p \in x_1(U_1) \cap x_2(U_2) = W$.
Dann ist der **Parameterwechsel**

$$x_1^{-1} \circ x_2 : x_2^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \to x_1^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2$$

ein Diffeomorphismus.

(lokale) Parametrisierung
Eine **(lokale) Parametrisierung** für eine reguläre Fläche S ist eine C^∞-Abbildung von einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$

$$x : U \to \mathbb{R}^3;\ (u, v) \mapsto x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

existiert sodass für jeden Punkt $p \in S$ eine offenen Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$ gilt:

(1) $x(U) = S \cap V$ und $x : U \to S \cap V$ ist ein Homöomorphismus

(2) Die Ableitung $dx(u, v) : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \to T_{x(u,v)}\mathbb{R}^3$ ist injektiv für $(u, v) \in U$

Bedingung (2) ist äquivalent zu

(2a) Die Funktionalmatrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$ hat Rang 2 für $(u, v) \in U$

(2b) Die Spaltenvektoren $x_u(u, v),\ x_v(u, v)$ sind linear unabhängig.

(2c) Das Vektorprodukt $x_u(u, v) \wedge x_v(u, v) \neq 0$ für alle $(u, v) \in U$

Zu jeder regulären Fläche S existiert in jedem Punkt $p \in S$ eine Tangentialebene T_pS die durch die Differentialvektoren x_u, x_v der Parametriesierung x aufgespannt wird.
Also gibt es eine 2-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^2 \cong T_pS \subset T_p\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$

1.Fundamentalform
Ziel ist es ein Skalarprodukt auf der regulären Fläche S zu definieren. Mache dazu die Tangentialebene T_pS zu einem euklidischen Vektorraum, in dem das Skalarprodukt als einschränkung des Standard-Skalarprodukts der reellen Zahlen definiert ist

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R};\ \langle a, b\rangle_p = \langle a, b\rangle$$

Die Zuordnung $I : p \mapsto I(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ heißt die **1.Fundamentalform** von S.

Praktibler aber äquivalent schaut man sich eine (lokale) Parametrisierung $x : U \to S$ von S an. Dann bilden x_u, x_v eine Basis der Tangentialebene $T_{x(u,v)}S$. Damit kann man die 1.Fundamentalform $I(p)$ als symmetrisch, positiv definite 2×2-Matrix darstellen:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}(u,v) = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(u,v) & \mathrm{F}(u,v) \\ \mathrm{F}(u,v) & \mathrm{G}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_u(u,v), x_u(u,v)\rangle & \langle x_u(u,v), x_v(u,v)\rangle \\ \langle x_v(u,v), x_u(u,v)\rangle & \langle x_v(u,v), x_v(u,v)\rangle \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_u, x_u\rangle & \langle x_u, x_v\rangle \\ \langle x_v, x_u\rangle & \langle x_v, x_v\rangle \end{pmatrix}$$

Die Matrix $I(u,v)$ ist genau dann positiv definit, wenn $E(u,v) > 0$ und
$(EG - F^2)(u,v) = det(Ix(u,v))$

innere Geometrie
Größen der **inneren Geometrie** sind Größen einer regulären Fläche S die nur von der 1.Fundamentalform abhängen bzw die komplett aus dieser bestimmt werden können. Solche Größen sind z.B:

(a) **Länge von Flächenkurven**$L(c)$

(b) **Winkel zwische Flächenkurven** $\cos \angle(c_1'(0), c_2'(0))$

(c) **Flächeninhalt der Parametrisierung** $A(x(U))$

(d) **Die Gauß-Krümmung einer regulären Fläche S**

Reguläre Flächen als metrische Räume
Man kann eine reguläre Fläche S zu einem metrischen Raum machen. Für zwei Punkte $p, q \in S$ sei Ω_{pq} die Menge aller stückweise differenzierbare Flächenkurven zwischen p und q. Definiere dann die Metrik

$$d_S : S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}; \;\; d_S(p,q) = \inf\{L(c) |\, c \in \Omega_{pq}\}$$

also ist der Abstand zweier Punkte definiert als die Länge der kürzersten Kurve die p und q verbindet.
Damit ist (S, d_S) ein metrischer Raum auf der regulären Fläche S.

Normalenvektor
Sei S eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $x : U \to S \subset \mathbb{R}^3$. In jedem Punkt $p \in S$ wird durch x_u, x_v eine Tangentialebene T_pS aufgespannt. Da nach Vorraussetzung an die Parametrisierung x_u, x_v linear unabhängig sein müssen gilt insbesondere $\langle x_u \wedge x_v\rangle \neq 0$. Der Vektor

$$n(p) = n(x(u,v)) \equiv n(u,v) = \frac{x_u(u,v) \wedge x_v(u,v)}{\|x_u \wedge x_v\|}$$

ist ein Einheitsvektor in $\mathbb{R}^3$ also $\|n(p)\| = 1$ der orthogonal zur Tangentialebene T_pS steht also $n(p) \perp T_pS$. Dieser Vektor $n(p)$ heißt **Normalenvektor** von S in p.

Variiert man den Punkt p so erhält man ein **Vektorenfeld**

2.Fundamentalform
Die **2.Fundamentalform** einer regulären Fläche S mit lokaler Parametrisierung x :

$U \to S$ ist definiert als die Familie von symmetrischen (2×2)-Matrizen

$$\mathrm{II} = \mathrm{II}(x(u,v)) = \mathrm{II}(u,v) = \begin{pmatrix} \mathrm{L}(u,v) & \mathrm{M}(u,v) \\ \mathrm{M}(u,v) & \mathrm{N}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_{uu}(u,v), n(u,v)\rangle & \langle x_{uv}(u,v), n(u,v)\rangle \\ \langle x_{vu}(u,v), n(u,v)\rangle & \langle x_{vv}(u,v), n(u,v)\rangle \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{L} & \mathrm{M} \\ \mathrm{M} & \mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_{uu}, n\rangle & \langle x_{uv}, n\rangle \\ \langle x_{vu}, n\rangle & \langle x_{vv}, n\rangle \end{pmatrix}$$

Beachte das im Gegensatz zur 1.Fundamentalform die 2.Fundamentalform nicht zwingend positiv definit ist.

Gaußkrümmung
Sei S eine reguläre Fläche, $p \in S$ ein Punkt in S und $\mathrm{I}(p), \mathrm{II}(p)$ die 1. bzw 2.Fundamentalform von S in p. Die **Gauß-Krümmung** von S ist definiert als:

$$K : S \to \mathbb{R};\ K(p) = \frac{det(\mathrm{II}(p))}{det(\mathrm{I}(p))}$$

Insgesamt gilt nun für jede reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reguläre Fläche bzw 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit die genau konstante Krümmung α hat.

- Für $\alpha > 0$ die 2-Sphäre $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ mit Radius $R = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
- Für $\alpha = 0$ die euklidische Ebene
- Für $\alpha < 0$ die Einheitskreisscheibe D^2 (bzw das isometrische Modell H^2 der Poincaré-Halbebene) mit der Metrik $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} d_{h^*}$ bzw $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} d_h$

Formel von Bertrand-Puiseux
Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Für ein kleines r sei
$S_r(p) = \{q \in S \mid d_S(p,q) = r\}$ der (metrische) Kreis in S um p mit Radius r. Weiter sei $L(S_r(p))$ die Länge dieser Kurve in S. Dann gilt:

$$K(p) = \lim_{r \to 0} \frac{3}{\pi r^3}(2\pi r - L(S_r(p)))$$

Also die Gauß-Krümmung ist also ein Maß in wie weit die Geometrie einer Fläche S von dem Standard euklidische Raum abweicht, indem die Länge des Kreises in der euklidischen Ebene $2\pi r$ zu der Länge eines Kreises in der Fläche S verglichen wird.

7.1 Konkrete Flächen

Rotations-Fläche

Rotations-Flächen entstehen durch Rotation einer Kurve in der xz-Ebene um die z-Achse (oder um eine andere Achse in einer anderer Ebene).

Die Kurve in der xz-Ebene ist von der Form $c(v) = (r(v), 0, h(v))$ für v in einem Intervall (a, b) und differenzierbare Funktionen h, r mit $r(v) > 0$. Die parametrisierung für die erzeugte reguläre Fläche ist gegeben durch:

$$x(u, v) = (r(v)cos(u), r(v)sin(u), h(v)) \text{ für } u \in (0, 2\pi), v \in (a, b)$$

Die Ableitungen bzw Jacobi-Matrix von x ist gegeben durch:

$$x_u(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} -r(v)sin(u) \\ r(v)cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_v(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} r'(v)cos(u) \\ r'(v)cos(u) \\ h'(v) \end{pmatrix}$$

$$D(u, v) = \frac{\partial x}{\partial(u, v)}(u, v) = \begin{pmatrix} -r(v)sin(u) & r'(v)cos(u) \\ r(v)cos(u) & r'(v)cos(u) \\ 0 & h'(v) \end{pmatrix}$$

Damit dadurch eine tatsächliche reguläre Fläche definiert wird müssen x_u und x_v linear unabhängig sein also x_u und x_v dürfen nicht gleichzeitig verschwinden.

$$\Leftrightarrow \nexists (u, v) \in \mathbb{R}^2 : x_u(u, v) = x_v(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2-Sphäre: Die 2-Sphäre S_R^2 vom Radius R erhält man als Rotationsfläche mittels Rotation eines Kreises vom Radius R (siehe Bild).

Demnach ist $r(v) = R\cos(v)$ und $h(v) = R\sin(v), \quad v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und

$$x(u, v) = (R\cos(u)\cos(v), R\sin(u)\cos(v), \sin(v))$$

$$D(u, v) = \frac{\partial x}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} -R\cos(v)\sin(u) & -R\sin(v)\cos(u) \\ R\cos(v)\cos(u) & -R\sin(v)\sin(u) \\ 0 & -R\cos(v) \end{pmatrix}$$

Solange $r(v) = R\cos(v) > 0$ ist, sind die Spalten linear unabhängig und damit x eine lokale Parametriesierung die S_R^2 zu einer regulären Fläche macht.

Zu einer gegebenen Kurve $c : [0, L] \to \mathbb{R}^3;\ t \mapsto (\varphi(t), 0, \psi(t))$ ist eine Rotationsfläche durch folgende Parametrisierung gegeben:

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(u)\varphi(v) \\ \sin(u)\varphi(v) \\ \psi(v) \end{pmatrix}$$

Eventuell muss man weil die Ränder in einer Parametrisierung von $(0, 2\pi)$ fehlen noch eine zweite, aber identische Parametrisierung von $(-\pi, \pi)$ o.ä wählen

Damit die Rotationsfläche dann auch wirklich eine reguläre Fläche ist muss man noch zeigen das die Parametrisierung(-en) C^∞ und bijektiv sind, sowie das die Funktionalmatrix Rang 2 hat also x_u, x_v linear unabhängig etc siehe Parametrisierung

Die Gaußkrümmung einer Rotationsfläche mit Parametrisierung

$$(u, v) \mapsto (\varphi(u)\cos(u), \varphi(u)\sin(u), \psi(v))$$

ist gegeben durch:

$$K = \frac{\psi'(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^2\varphi} \qquad K(x(u, v)) = \frac{\psi'(v)(\varphi'(v)\psi''(v) - \varphi''(v)\psi'(v))}{(\varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2)^2\varphi(v)}$$

Dies ist eine Rotation um die z-Achse. Für ein Beispiel für Rotation um x-Achse siehe Großkreise.

Affine Ebene
Für $a_0, a, b \in \mathbb{R}^3$ mit a, b linear unabhängig ist

$$S = \{a_0 + ua + vb |\, u, v \in \mathbb{R}\}$$

eine reguläre Fläche mit der einzigen, globalen Parametrisierung: $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^3$ und $x : U \to \mathbb{R}^3;\ (u, v) \mapsto a_0 + ua + vb$. Es gilt dann offensichtlich: $x_u = a, x_v = b, T_pS = \{p\} \times Span(a, b) \cong S$

Die 1.Fundamentalform der affinen Ebene die durch beliebiges $a_0 \in \mathbb{R}^3$ und orthonormierten Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3, ||a|| = ||b|| = 1$ und $a \perp b$ ist gegeben durch:

$$E(u, v) = \langle a, a\rangle = 1, F(u, v) = \langle a, b\rangle = 0, G(u, v) = \langle b, b\rangle = 1$$

$$\begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die affine Ebene aufgespannt von a und b ist der normalenvektor

$$n(p) = n = \frac{x_u \wedge x_v}{||x_u \wedge x_v||} = \frac{a \wedge b}{||a \wedge b||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die 2.Fundamentalform einer affinen Ebene ist nach obigen Rechnungen:

$$x_{uu} = x_{uv} = x_{vu} = x_{vv} = 0 \text{ und } n = c \text{ , } c \text{ konstant}$$

$$\mathrm{II}(u, v) = \begin{pmatrix} \langle x_{uu}, n\rangle & \langle x_{uv}, n\rangle \\ \langle x_{vu}, n\rangle & \langle x_{vv}, n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Gauß-Krümmung ergibt sich demnach:

$$K(x(u, v)) = \frac{det(\mathrm{II}(x(u, v)))}{det(\mathrm{I}(x(u, v)))} = \frac{0}{1} = 0$$

Zylinder
Sei $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \ x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$ ein Zylinder mit Radius r.
Eine (lokale) Parametrisierung ist gegeben durch:

$$x(u, v) = (r\cos u, r\sin u, v), \qquad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

$$x_u(u, v) = (-r\sin u, r\cos u, 0) \qquad x_v(u, v) = (0, 0, 1)$$

Damit ist die 1.Fundamentalform:

$$\begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für den Zylinder mit obiger Parametrisierung gilt für den Normalenvektor:

$$x_u \wedge x_v = (r\cos u, r\sin u, 0)$$

$$\Longrightarrow n(u, v) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(r\cos u, r\sin u, 0)}{\|(r\cos u, r\sin u, 0)\|} = (\cos u, \sin u, 0)$$

Damit ist die 2.Fundamentalform gegeben durch:

$$x_{uu} = (-r\cos u, -r\sin u, 0), x_{uv} = x_{vu} = x_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$\mathrm{II}(u, v) = \begin{pmatrix} \langle x_{uu}, n\rangle & \langle x_{uv}, n\rangle \\ \langle x_{vu}, n\rangle & \langle x_{vv}, n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Gauß-Krümmung ergibt sich demnach:

$$K(x(u, v)) = \frac{det(\mathrm{II}(x(u, v)))}{det(\mathrm{I}(x(u, v)))} = \frac{0}{r^2} = 0$$

Die 2-Sphäre
Die 2-Sphäre S_R^2 vom Radius R ist eine reguläre Fläche mit Parametrisierung:

$$x(\theta, \varphi) = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\theta)\ (\theta, \varphi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$$

$$x_\theta(\theta, \varphi) = (-R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$$

$$x_\varphi(\theta, \varphi) = (-R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\theta\cos\varphi, 0)$$

Die 1.Fundamentalform ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Für die 2-Sphäre S_R^2 vom Radius R mit obiger Parametrisierung x und partiellen Ableitungen x_θ, x_φ ist:

$$x_\theta \wedge x_\varphi = -R\cos(\theta) \cdot x(\theta, \varphi)$$

Damit ist $n(\theta, \varphi)$ parallel zu $x(\theta, \varphi)$ und der Normalenvektor ist
$n(u, v) = -\frac{1}{R} \cdot x(u, v)$

Damit gilt für die 2.Fundamentalform:

$$x_{\theta,\theta} = -x, \quad x_{\theta\varphi} = x_{\varphi\theta} = (-R\sin\theta\sin\varphi, -R\sin\theta, \cos\varphi, 0)$$

$$x_{\varphi\varphi} = (-R\cos\theta\cos\varphi, -R\cos\theta\sin\varphi, 0)$$

$$\mathrm{II}(u, v) = \begin{pmatrix} \langle x_{uu}, n\rangle & \langle x_{uv}, n\rangle \\ \langle x_{vu}, n\rangle & \langle x_{vv}, n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Für die Gauß-Krümmung ergibt sich demnach:

$$K(x(u, v)) = \frac{det(\mathrm{II}(x(u, v)))}{det(\mathrm{I}(x(u, v)))} = \frac{R^2\cos^2\theta}{R^2\cos^2\theta} = \frac{1}{R^2}$$

Graphen von Funktionen
Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ unnd $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion. Der **Graph** von f ist:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \, (x_1, x_2) \in U, x_3 = f(x_1, x_2)\}$$

S ist eine reguläre Fläche mit der Parametrisierung

$$x : U \to \mathbb{R}^3; \; (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$$

Umgekehrt kann man zeigen: Ist S eine reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$ so existiert zu jedem Punkt $p \in S$ eine geeignete offenen Umgebung$W \subset \mathbb{R}^3$, so dass $W \cap S$ ein Graph einer C^∞-Funktion ist.

7.2 Gauß-Bonnet

Im Prinzip sagt der Satz von Gauß-Bonnet aus, dass die Gesamtkrümmung einer Fläche gleich der Krümmung der Kurve die den Rand der Fläche beschreibt ist und gibt diesem einen konkreten Wert.

In diesem Abschnitt gelten die Abkürzungen:

$$\int_{\partial G} \kappa_g(s)ds = \int_{x^-1(\partial G)} \kappa_g(s)ds$$

$$\int\int_G KdA = \int\int_{x^{-1}(G)} K\sqrt{EG - F^2}dudv$$

Also $\int_{\partial G} \kappa_g(s)ds$ ist die gesamtkrümmung einer Kurve die den Rand von einem abgeschlossenes einfaches Gebiet$G$ beschreibt.
$\int\int_G KdA$ beschreibt die Gesamtkrümmung der Fläche die ein abgeschlossenes einfaches Gebiet$G$ hat.

Geodätische Krümmung
Sei $c(s) = (x(u(s), v(s))) \subset S \subset \mathbb{R}^3$ eine Flächenkurve auf einer regulären Fläche S, die o.B.d.A nach Bogenlänge parametrisiert ist (d.h $\|c'(s)\| = \|\frac{dc}{ds}(s)\| = 1$). Es gilt dann das $c'' \perp c'$ und $c', n, n \wedge c'$ jeweils orthonormal sind. Damit kann c'' als Linearkombination von diesen geschrieben werden:

$$c''(s) = \kappa_g(s)(n(s) \wedge c'(s)) + \alpha(s)n(s)$$

Die Zahl $\kappa_g(s)$ heißt die **geodätische Krümmung** von c im Punkt s. Die **geodätische Krümmung** ist ein Maß dafür wie "gekrümmt"die Kurve c im Punkt s ist, also wie "gebogenßie zu jedem Zeitpunkt ist.

Für eine reguläre Kurve $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ ist die Krümmung κ_γ gegeben durch:

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 \cdot \|\gamma''(t)\|^2 - \langle\gamma'(t), \gamma''\rangle^2}}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Falls γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h $\|\gamma'(t)\| = 1$ dann ist die Krümmung der Betrag der zweiten Ableitung also

$$\kappa_\gamma(t) = \|\gamma''\|$$

Eine ebene Kurve (also eine Kurve die in der Ebene $\mathbb{R}^2$ liegt) $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ die konstant Krümmung $\equiv 0$ hat d.h $\kappa_c \equiv 0$ ist immer der Form

$$c(t) = c(0) + tc'(0) \qquad mit\|c'(0)\| = 0 \text{ also normiert}$$

Die geodätische Krümmung einer Kurve beschreibt wie stark sie nach links gekrümmt ist. Also wenn $\kappa_g(p) > 0$ dann ist Kurve im Punkt p nach links gekrümmt, $\kappa_g(p) <$

0 dann im Punkt p nach rechts gekrümmt und $\kappa_g(p) = 0$ dann ist sie im Punkt p gerade.

Geodätische
Flächenkurven c mit $\kappa_g = 0$ heißen **Geodätische**. Sie verallgemeinern bzw. entsprechen Geraden für allgemeine Geometrien. **Geodätische** sind lokal kürzeste Verbindungen.

(1) In der Affinen Ebene E gilt:

$$c'' \text{parallel zu } n \Longleftrightarrow c'' \text{ orthogonal zu } E$$

$$c'' \subset E, c'' \perp E \Longleftrightarrow c'' = 0 \Longleftrightarrow c = \text{Gerade}$$

(2) In der Sphäre S_R^2 sind die Geodätischen Großkreise also Schnitte von Ebenen mit der S_R^2 durch den Nullpunkt. Für diese Großkreise gilt nämlich: $c' \wedge c''$ und c'' ist parallel zum Normalenvektor n und damit nach beispiel (1) $\kappa_g = 0$

(3) Für einen Zylinder S mit Parametrisierung

$$x(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v), \qquad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

sind Geodätische gerade die Kurven:

$$c(s) = (\cos as, \sin as, bs), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Umlaufsatz von Hop
Sei S eine reguläre Fläche und $G \subset x(U) \subset S$ ein abgeschlossenes einfaches Gebietmit Rand ∂G die durch eine Kurve $c(s)$, $s \in [0, L]$ (wobei L den Ëndpunkt"der Kurve darstellt) die nach Bogenlänge parametrisiert ist beschrieben wird. Die Einschränkung des einheitsvektorenfelds $e(u, v) = \frac{x_u(u,v)}{\|x_u(u,v)\|}$ auf die Kurve c ist wieder ein Einheitsvektorenfeld $e(s)$. Sei $n(s)$ das Vektorenfeld der Normalenvektoren von S eingeschränkt auf c. Dann ist $(e(s), n(s) \wedge e(s))$ eine Orthonormalbasis von $T_{c(s)}S$ also $e(s) \perp n(s) \wedge e(s)$.
Man kann dann eine **Winkelfunktion** $\theta : [0, L] \to \mathbb{R}$ definieren die lokal gegeben ist durch die Beziehung:

$$c'(s) = \cos(\theta(s))e(s) + \sin(\theta(s))(n(s) \wedge e(s))$$

Für eine solche einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve c wie oben mit Bild $\partial G = c$ für ein abgeschlossenes einfaches Gebiet$G$ und die entsprechende **Winkelfunktion** θ gilt:

$$\int_{\partial G} \theta' ds = 2\pi$$

Also ist die Länge der Winkelfunktion gerade 2π

Formel von Green-Stokes
Sei G ein abgeschlossenes einfaches Gebietin der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit differenzierbarem Rand

$\partial G = \{(u(s), v(s)| \, s \in I)\}$. Weiter seien $P, Q : G \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\int_{\partial G} (Pu' + Qv')ds = \int \int_G (Q_u - P_v) dudv$$

Satz von Gauß-Bonnet lokale Version
Sei S eine reguläre orientierbare Fläche und $x : U \to S$ eine lokale Parametrisierung. Weiter sei $G \subset x(U) \subset S$ ein abgeschlossenes einfaches Gebietmit orientierbarem Rand ∂G. Dann gilt:

$$\int \int_G K dA = \int \int_{\partial G} \kappa_g(s) ds = 2\pi$$

Satz von Gauß-Bonnet für Polygone
Sei S eine reguläre orientierbare Fläche mit lokaler Parametrisierung $x : U \to S$. Weiter sei $G \subset x(U) \subset S$ ein Polygon mit stückweise differenzierbarem Rand ∂G mit m Ecken und Innenwinkeln α_i. Dann gilt:

$$\int \int_G K dA + \int_{\partial G} \kappa_g(s) ds = \pi(2 - m) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$

Satz von Gauß-Bonnet für geodätische Dreiecke
Sei S eine reguläre orientierbare Fläche mit lokaler Parametrisierung $x : U \to S$. Weiter sei $\Delta \subset x(U) \subset S$ ein geodätisches Dreieck mit Innenwinkeln α, β, γ. Dann gilt:

$$\int \int_\Delta K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Satz von Gauß-Bonnet globale Version
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte reguläre Fläche mit Geschlecht g. Dann gilt:

$$\int \int_S K dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$$

Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke
Der hyperbolische Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks Δ ist durch die drei Innenwinkel α, β, γ bestimmt und durch π beschränkt.

$$0 \leq \mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Insbesondere ist also $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ und $\mu(\Delta) < \pi$

8 Hyperbolische Geometrie

8.1 Gaußsches Axiomensystem und Riemmansche Geometrie

Zur erweiterung des bisher Betrachtenen wollen wir jetzt weg von der einschränkung die es bei regulären Flächen gab das wir eine einbettung in den $\mathbb{R}^3$ haben müssen und wollen auf allgemeine differenzierbare Mannigfaltigkeiten übergehen.
Dafür betrachtet man zuerst einmal ein Axiomensystem für die euklidische Ebene wie wir sie kennen:

Geodätische Linie
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine **geodätische Linie** g in X ist das Bild einer abstandserhaltenden Abbilddung $\gamma : \mathbb{R} \to X$ also $g = \gamma(\mathbb{R})$ und $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$ für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
Falls d eine Längenmetrik ist realisiert eine **geodätische Linie** gerade den kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten $p, q \in X$
Analog gilt umgekehrt: Ist $c : \mathbb{R} \to X$ eine kürzeste Verbindung zwischen je zwei ihrer Punkt so ist c eine geodätische Linie.

Der begriff geodätische Linie und Geodätische sind häufig identisch nur das eine geodätische Linie eben global kürzeste Verbindungen für alle Punkte die auf ihr liegen beschreibt während "normale"Geodätische im Allgemeinen nur lokal kürzeste Verbindungen beschreiben.

Axiomensystem ebene Geometrie

1. **Inzidenz-Axiom:**Durch je zwei verschiedene Punkt $p, q \in X$ geht genau eine eine geodätische Linie,d.h. für $p, q \in X,\ p \neq q$ existiert genau eine geodätische Linie g so dass $p, q \in g$
2. **Spiegelungs-Axiom:** Für jede geodätische Linie g hat das Komplement $X \setminus g$ (also der Raum X ohne die Punkte die auf g liegen) genau zwei Zusammenhangskomponenten und es gibt eine Isometrie die die Punkte von g fixiert(also nicht verändert) und die Zusammenhangskomponenten von X vertauscht. Also zerlegt die geodätische Linie g den Raum X in zwei Hälften.
3. **Parallelen-Axiom:**Durch einen Punkt außerhalb einer gegebenen geodätischen Linie existiert genau eine weitere geodätische Linie die diese nicht schneidet. Also gibt es eine geodätische Linie die parallel zu der gegeben ist und in der der Punkt liegt.

Eindeutigkeit von Geomtrien
Das bekannteste Modell das die drei obigen Axiome erfüllt ist die euklidische Ebene $(\mathbb{R}^2, d_e)$ wobei d_e die allseits bekannte euklidische Metrik ist.
Ein Modell das zwar das Inzidenz-und Spiegelungs-Axiom erfüllt, das Parallelen-Axiom aber nicht erfüllt beschreiben die **hypergeometrische Geometrie** die bestandteil dieses Abschnittes sind. Ein solches Modell/bzw das Modell ist das Poincaré- oder Halbebenen Modell (H^2, d_h) der hyperbolischen Ebene

Tatsächlich sind $(\mathbb{R}^2, d_e)$ und (H^2, d_h) die einzigen Modelle für alle mögichen Geometrien, d.h:

- Ein metrischer Raum (X, d), der alle drei Axiome der ebenen Geometrie erfüllt, ist isometrisch zur euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, d_e)$
- Ein metrischer Raum (X, d), der alle das Inzidenz- und Spiegelungs-Axiom der euklidischen Ebene erfüllt, das Parallel-Axiom jedoch nicth ist isometrisch (bis auf Skalierungen) zur hyperbolischen Ebene (H^2, d_h)

Riemannsche Metrik
Für eine reguläre Flächen S hatten wir in jeden Punkt $p \in S$ einen 2-dimensionalen Vektorraum, den Tangentialraum T_pS konstruiert und dann mithilfe der 1.Fundamentalform jedem solchen Punkt ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ auf T_pS definiert.
Da diese konstruktion durch die Einbettung in den $\mathbb{R}^2$ von regulären Flächen "limitiertïst von der wir weg wollen wurde der Begirff der **Riemmanschen Metrik** eingeführt.

Für eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M konstruiert man nun einen (abstrakten/beliebigen) n-dimensionalen Vektorraum, den Tangentialraum T_pM(wir gehen hier von den 2-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten die reguläre Flächen sind auf n-dimensionale über und passen entsprechend die Tangentialebene zu einem entsprechenden Tangentialraum)
Eine **Riemannsche Metrik** ordnet nun jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ auf T_pM zu.

Beachte das eine **Riemannsche Metrik** keine Metrik gemäß vorheriger Definition ist, man jedoch weiterhin die Länge einer Kurve darüber definieren kann.

Eine Riemannsche Metrik kann durch eine Familie von positiv definiten symmetrische $(n \times n)$-Matrizen beschrieben werden, die eine Familie von Skalarprodukten auf der entsprechenden Mannigfaltigkeit definiert.

Sei $U = M$ eine offene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, dann ist $T_pM = T_pU \cong T_p\mathbb{R}^n \cong R^n$. Eine Riemannsche Metrik auf U ist dann gegeben durch eine Abbildung

$$g : U \to Sym(n);\ (u_1, \ldots, u_n) \mapsto (g_{ij}(u_1, \ldots, u_n))$$

für $\frac{1}{2}n(n+1)$ C^∞-Funktionen g_{ij} von U in die Menge der positiv definiten, symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen $Sym(n)$ also genau den Matrizen von Skalarprodukten auf $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Standardbasis.

Riemannsche Mannigfaltigkeit
Eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit** ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit versehen mit einer **Riemannschen Metrik**.

Offensichtlich sind reguläre Flächen Riemannsche Mannigfaltigkeiten wobei die Riemannsche Metrik die 1.Fundamentalform ist.

Beispiele

(1) Die euklidische Eben als Riemannsche Mannigfaltigkeit:
$U = \mathbb{R}^2,\ g_{ij}(u_1, u_2) = \delta_{ij}$ d.h

$$(g_{ij}(u_1, u_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Sym(2)$$

(2) Die hyperbolische Ebene/Halbebene als Riemannsche Mannigfaltigkeit:
$U = H^2 = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 |\ u_2 > 0\},\ g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{u_2^2}$ d.h:

$$(g_{ij}(u_1, u_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_2^2} \end{pmatrix} \in Sym(2)$$

Skalarprodukt,Länge und Winkel von Tangentialvektoren
Mithilfe einer Riemannschen Metrik kann man mithilfe des dadurch definierte Skalarprodukt für zwei Tangentialvektoren $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ auf einer offenen Untermannigfaltikeit $U \subset \mathbb{R}^2$ entsprechende Größen definieren:

- **Skalarprodukt:**

$$\langle a, b \rangle_p = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_1, u_2) a_i b_j$$

- **Länge:**

$$||a||_{(u_1,u_2)} = \sqrt{\langle a, a \rangle_{(u_1,u_2)}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_1, u_2) a_i b_j}$$

- **Winkel:**

$$\cos \angle(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle_{(u_1,u_2)}}{||a||_{(u_1,u_2)} ||b||_{(u_1,u_2)}}$$

  Der hyperbolische Winkel stimmt mit dem euklidischen Winkel überein anders als die hyperbolische Länge die sich anders als die euklidische Länge verhält.

8.2 Hyperbolische Ebene und Poincaré-Halbebene

Die Poincaré-Halbebene/Halbebenen-Modell
Die **Poincaré-Halbebene** oder **Halbebenen-Modell** ist ein Modell für hypergeometrische Geomtrie
Sie wird beschrieben durch die obere Halbebene $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y > 0\}$ versehen mit der Riemannschen Metrik $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{y^2}$ d.h:

$$(g_{ij}(u_1, u_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Bildlich führt das so definierte Skalarprodukt dazu, dass das Skalarprodukt eines Vektors unendlich groß wird, je näher er an die x-Achse kommt also je kleiner die y-Komponente wird. Der Raum $\mathbb{R}^2$ wird also nach oben hin gestreckt und nach unten unendliche gestaucht.

Anstelle von reellen Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verwendet man in der regel alternativ komplexe Koordinaten $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und somit
$H^2 = \{z \in \mathbb{C} | \ Im(z) > 0\}$

hyperbolische Länge
Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a, b] \to H^2; \ t \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$$

definiert man die **hyperbolische Länge**

$$L_h(c) = \int_a^b ||c'(t)||_{c(t)} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt$$

In der komplexen Darstellung gilt für die Kurve: $c(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ und damit:

$$L_h(c) = \int_a^b ||z'(t)||_{z(t)} = \int_a^b \frac{|z'(t)|}{Im(z(t))}$$

Beachte das wegen der konvergenz des Skalarprodukts gegen ∞ für $y \to 0$ folgt das $L_h(c) \to \infty$ für $a \to 0$.

Die hyperbolische Länge ist invariant unter Möbiustransformationen von H^2. D.h für eine differenzierbare Kurve c in H^2 gilt: $L_h(c) = L_h(T_A \circ c)$

hyperbolischer Flächeninhalt
Für eine Teilmenge $G \subset H^2$ von H^2 ist der **hyperbolische Flächeninhalt** definiert durch:

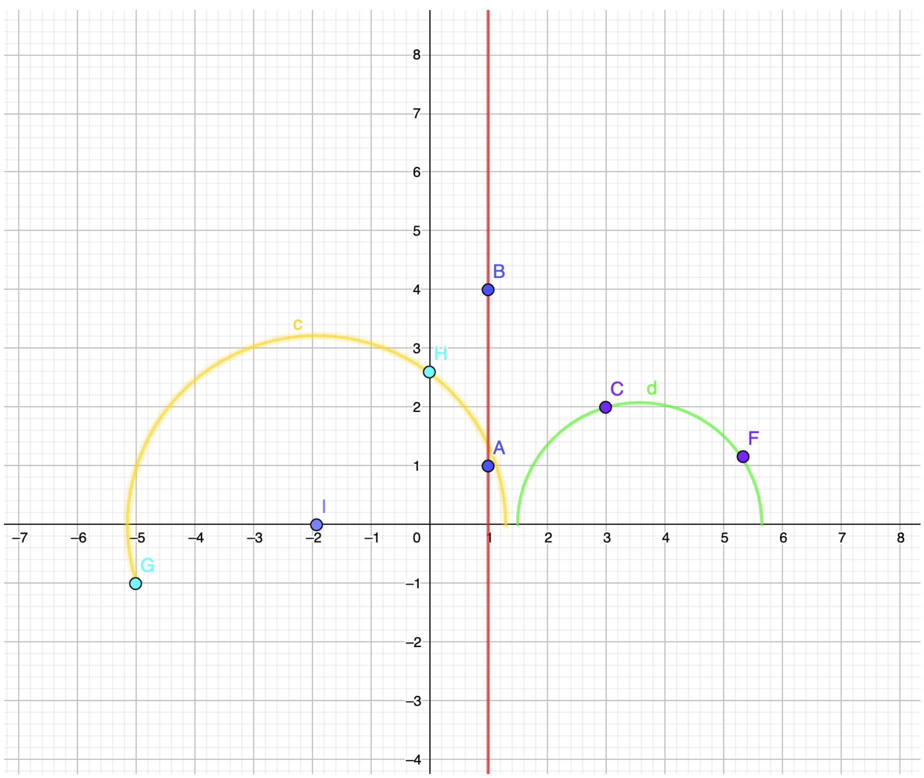
$$0 \leq \mu(G) = \int \int_G \frac{1}{y^2} dx dy \leq \infty$$

Der **hyperbolische Flächeninhalt** ist invariant unter Möbiustransformationen.
d.h. Falls $G \subset H^2$ und $\mu(G)$ existiert so ist für alle $A \in SL(2, \mathbb{R}) : \quad \mu(G) = \mu(T_A(G))$

Geodätische Linien der Poincaré-Ebene
In der Poincaré-Halbebene gibt es zwei Formen von **Geodätischen Linien**.

- Einmal klassische Geraden die parallel zu der y-Achse laufen, da diese kürzeste Verbindungen von zwei Punkten beschreibt, die gleiche x-Komponente haben da die definierte Riemannsche Metrik nur von y-abhängt.
- Die zweite Art von Geodätischen sind Halbkreise, die die beiden Punkte auf ihrem Rand schneiden, die eine kürzeste Verbindung von zwei Punkten darstellt, die verschiedene x-Komponenten haben, selbst wenn die y-Komponente übereinstimmt da hier der invers, quadratische Faktor von y ins Spiel kommt

Formal gilt: Die kürzeste Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in der hyperbolischen Ebene H^2 sind (mit hyperbolischer Bogenlänge parametrisierte) Halbkreise und Geraden orthogonal zur reellen Ebene bzw der x-Achse. Solche Kurven sind genau die **geodätischen Linie** in H^2.
Je zwei Punkte $p, q \in H^2$ können durch eine eindeutige geodätische Linie verbunden werden und der hyperbolische Abstand $d_h(p, q)$ entspricht gerade der Länge dieses geodätischen Segments.
Die Halbkreise die geodätische Linien sind haben ihren Mittelpunkt auf der reellen-/x-Achse.



Beispiel Bogenlänge parametrisierte imaginäre Achse

Hyperbolische geodätische Linien in $X = H^2$ sind genau die Bilder von abstandserhaltenden Abbildungen $\gamma : \mathbb{R} \to X$ mit $d_h(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$ für den (Bogenlängen-)parameter t. Die Parametrisierung der imaginären-/y-Achse nach hyperbolischer Bogenlänge ist gegeben durch:

$$A_t = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix},\ \gamma(t) = T_{A_t}(i) = \frac{e^{\frac{t}{2}} i + 0}{0i + e^{-\frac{t}{2}}}$$

Damit gilt für $t_2 \geq t_1$:

$$d_h(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = d_h(e^{t_1} i, e^{t_2} i) = \ln e^{t_2} - \ln e^{t_1} = t_2 - t_1$$

damit ist t Bogenlängenparameter.

Abstand von Punkten auf der imaginären Achse
Für den Abstand von zwei Punkten $t_1, t_2 \in H^2$ die auf der imaginären Achse liegen, d.h $t_1 = \lambda_1 i, t_2 = \lambda_2 i, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$d_h(t_1, t_2) = d_h(\lambda_1 i, \lambda_2 i) = |ln(\lambda_2) - ln(\lambda_1)|$$

Der einfachheithalber ändere o.B.d.A die Komponenten sodass man den größeren Wert vom kleineren subtrahiert.

$$d_h(2i, \frac{1}{2}i) = |\ln(\frac{1}{2}) - \ln(2)| = |\ln\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)| = |\ln(\frac{1}{4})| = |\ln(1) - \ln(4)| = |0 - \ln(4)| = |-2\ln(2)| = 2\ln(2)$$

$$d_h(\frac{1}{2}i, 2i) = |\ln(2) - \ln(\frac{1}{2})| = |\ln(\frac{2}{\frac{1}{2}})| = |\ln(4)| = |2\ln(2)| = 2\ln(2)$$

Möbiustransformation von geodätischen auf die y-Achse
Sei L ein euklidischer Halbkrei oder eine Halbgerade in H^2, welche die reelle-/x-Achse in einem Punkt α orthogonal schneidet, also ist L gerade eine geodätische Linie in der hyperbolischen Ebene.
Dann ist $T(z) = -\frac{1}{z-\alpha} + \beta,\ \beta \in \mathbb{R}$ eine Möbiustransformation die L für ein geeignetes β auf die imaginäre-/y-Achse abbildet. d.h es existiert ein $A \in SL(2, \mathbb{R})$ so, dass $T = T_A$. Also gibt es eine Möbiustransformation die eine geodätische Linie auf die imaginäre-/y-Achse abbildet also insbesondere die Punkte die durch diese verbunden werden wobei die Länge zwischen diesen erhalten bleibt, da Möbiustransformationen Isometrien sind.

Möbiustransformation
Für eine Matrix

$$A \in SL(2, \mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ det(A) = ad - bc = 1$$

definiere die **Möbiustransformation**

$$T_A : H^2 \to H^2;\ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Es gilt $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$

Die Möbiustransformation entspricht der Translation und Rotation von euklidischen Ebenen.

Die Möbiustransformationen $\{T_A |\ A \in SL(2, \mathbb{R})\}$ sind Isometrien der hyperbolischen Ebene (H^2, d_h) also insbesondere abstandserhaltend.

Für beliebige Punkte $p, q \in H^2$ existiert eine Isometrie/Möbiustransformation T_A so, dass $T_A(p) = q$.

Streckung in Hpyerbolischer Ebene
In der hyperbbolischen Ebene H^2 ist die Streckung der Fläche um $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ ist gegeben

durch $s_\lambda : H^2 \to H^2$ und wird durch eine Möbiustransformation definiert:

$$s_\lambda = T_A \text{ für } A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$

Insondere gibt es also beliebig viele verschiedene streckungen der hyperbolischen Ebene und jede ist eine Isometrieå anders als in der euklidischen wo die einzige Streckung die gleichzeitig eine Isometrie ist die Identität ist.

Hyperbolische Ebene als Metrischer Raum
Nachdem man nun auf der hyperbolischen Ebene H^2 mit dem Halbebenen-Modell eine Längenmetrik durch die hypergeometrische Bogenlänge definiert hat kann man diese nun zu einem Metrischen Raum erweitern.

Definiere dazu für Punkte $p, q \in H^2$ die Menge Ω_{pq} als die Menge aller stückweise differenzierbaren Kurven zwischen p und q. Dann wird durch

$$d_h(p, q) = \inf\{L_h(c) |\ c \in \Omega_{pq}\}$$

eine Metrik definiert und (H^2, d_h) ist ein metrischer Raum

Unendlicher Rand
Man kann die hyperbolische Ebene "kompaktifizierenïndem man die reelle-/x-Achse und einen Punkt ∞ hinzunimmt: $\overline{H^2} = H^2 \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$.
Das ist zu verstehen als alle Punkte die von einem Punkt i in jeder Richtung unendlich weit entfernt sind.
Die Menge $\partial_\infty H^2 = \mathbb{R} \cup \infty$ heißt der **unendliche Rand** von H^2.

hyperbolische Dreiecke
Ein **hyperbolisches Dreieck** $\Delta \subset \overline{H^2}$ ist eine konvexe Teilmenge (d.h für zwei Punkte $p, q \in \Delta$ liegt auch das Geradensegment $\overline{pq}$ ganz in Δ) begrenzt von 3 Segmenten von geodätischen Linien, die sich paarweise in Punkten A, B, C den **Ecken** des Dreiecks schneiden. Die Ecken A, B, C dürfen dabei im unendlichen Rand $\partial_\infty H^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ liegen, die Seiten jedoch nicht.

Der **Innenwinkel** φ in einer Ecke E eines Dreickes ist definiert durch die zugrundeliegende Riemannsche Metrik als die entsprechenden Winkel zwischen den Tangentialvektoren an die geodätischen Linien wie hier definiert, falls die Ecke in H^2 liegt. Falls die Ecke auf dem unendlichen Rand liegt setzte $\varphi = 0$
Beachte das der hyperbolische Winkel mit dem euklidischen Winkel übereinstimmt obwohl die hyperbolische Länge sich anders verhält als die euklidische Länge.

Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke
Der hyperbolische Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks Δ ist durch die drei Innenwinkel α, β, γ bestimmt und durch π beschränkt.

$$0 \leq \mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Insbesondere ist also $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ und $\mu(\Delta) < \pi$

8.3 Einheitskreis-Modell und Gauß-Krümmung

Wir haben bereits ein Modell für die hypergeometrische Eben gesehen das Poincaré-Halbebenen-Modell. Hier betrachtet man nun ein alternatives aber offensichtlich äquivalentes Modell das **Einheitskreis-Modell** was ßymmetrischer aussiehtäls das Halbebenen-Modell

Von Poincaré zum Einheitskreis
Sei $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 < 1\} = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Die Abbildung

$$M : H^2 \subset \mathbb{C} \to D^2 \subset \mathbb{C}; \ z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$$

ist eine bijektive Abbildung von der Poincaré-Halbebene H^2 in die Einheitskreisscheibe. Analog zur Poincaré-Halbebene definiert man für das Einheitskreis-Modell eine Metrik

$$d_h^*(z,w) = d_h(M^{-1})(z), M^{-1}(w))$$

wobei d_h die Metrik der Poincaré-Halbebene ist also die Länge der kürzesten Kurve die zwei Punkte verbindet.
Damit ist nach Konstruktion M automatisch abstandserhaltend also eine Isometrie also inbesondere eine Möbiustransformation T_A für

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Metrik des Einheitskreismodells
d_h^* ist die Längenmetrik die von der Riemmanschen Metrik

$$(g_{ij}(z)) = \left(\frac{4\delta_{ij}}{(1-|z|^2)^2} \right)$$

auf D^2 induziert wird. Also ist insbesondere (D^2, d_h^*) ein Metrischer Raum.

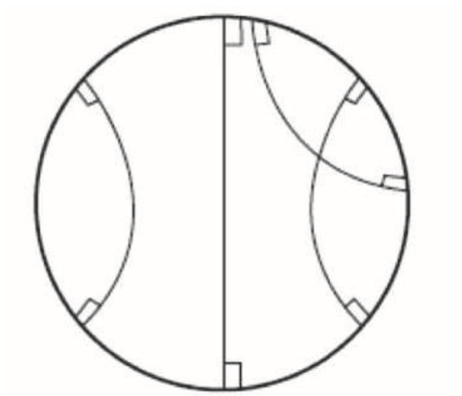
Für $0 \leq r < 1$ gilt:

$$d_h^*(0, ri) = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

Isometrien des metrischen Raums (D^2, d_h^*)
Neben den Möbiustransformationen T_A die bekannt sind, sind die Rotationen um $0 \in D^2$ Isometrien im Einheitskreismodell (D^2, d_h^*)

Geodätische Linien
Geodätische Linien also kürzeste Verbindungsstrecken im Einheitskreismodell (D^2, d_h^*) sind :

- (geeignet parametrisierte) Geraden durch 0
- Alle anderen Geodätische Linien sind euklidische Kreise, die den Einheitskreis orthogonal schneiden.



Der unendliche Rand $\partial_\infty D^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ von D^2 ist gerade der Einheitskreis S_1^1

hyperbolische Kreis
Der **hyperbolische Kreis** $S_\varrho(0)$ in D^2 mit Zentrum 0 und hyperbolischen Radius (also der Radius gemessen gemäß der hyperbolischen Länge L_{h^*}) ist der euklidische Kreis S_1^1 um 0 mit euklidischen Radius r, wobei

$$\varrho = 2arctan(r) \Longleftrightarrow r = \tanh(\frac{\varrho}{2})$$

insbesondere gilt $\varrho \to \infty$ für $r \to 1$.

Die hyperbolische Länge des hyperbolischen Kreises $S_\varrho(0)$ ist:

$$L_{h^*}(S_\varrho(0)) = 2\pi \sinh(\varrho) = 2\pi \frac{1}{2}(e^\varrho - e^{-\varrho}) \text{ } (\sim \pi e^\varrho \text{ für großes } \varrho)$$

Gauß-Krümmung
Die **Gauß-Krümmung** einer hyperbolischen Ebene also von H^2 bzw D^2 ist konstant $K(p) \cong -1$

Reskaliert man die hyperbolische Metrik d_{h^*}, setzt also $d_{\tilde{h}} = \lambda d_{h^*}$ für $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ so gilt für die Länge des hyperbolischen Kreises:

$$L_{\tilde{h}}(S_\varrho(0)) = 2\pi \sinh(\frac{\varrho}{\lambda})$$

daraus folgt für die Gauß-Krümmung von $(D^2, d_{\tilde{h}})$:

$$K_{\tilde{h}}(p) = -\frac{1}{\lambda^2} = \text{konstant}$$

Durch passende Reskalierungen erhält man also Modelle der hypergeometrischen Ebene mit beliebiger, konstanter negativer Krümmung.

Abschließend erhält man also nun für jede reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reguläre Fläche bzw 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit die genau konstante Krümmung α hat.

- Für $\alpha > 0$ die 2-Sphäre $S^2_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ mit Radius $R = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
- Für $\alpha = 0$ die euklidische Ebene
- Für $\alpha < 0$ die Einheitskreisscheibe D^2 (bzw das isometrische Modell H^2 der Poincaré-Halbebene) mit der Metrik $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} d_{h^*}$ bzw $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} d_h$