

Cinématique Relativiste

Maxime Muller

April 4, 2025

Ceci est une transcription des cours de cinématique relativiste donné par le professeur Xavier Ovido au lycée St Louis de Gonzague dans le cadre du club Phythème.

1 La fin de l'âge classique

A la fin du 19e siècle et au début du 20e, on trouve trois grandes théories.

- La mécanique de Newton
- L'électromagnétisme de Maxwell (électricité + magnétisme + optique)
- La thermodynamique

1.0.1 Maxwell

Prédiction d'ondes électromagnétiques qui ont les même propriétés que la lumière et ont une vitesse de propagation :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Avec :

- ε_0 : permittivité du vide
- μ_0 : perméabilité du vide

1.0.2 Thermodynamique

Elle s'intéresse aux machines thermiques et plus généralement aux échanges d'énergie.

1.1 La vieille mécanique de Newton

1.1.1 La première loi de Newton

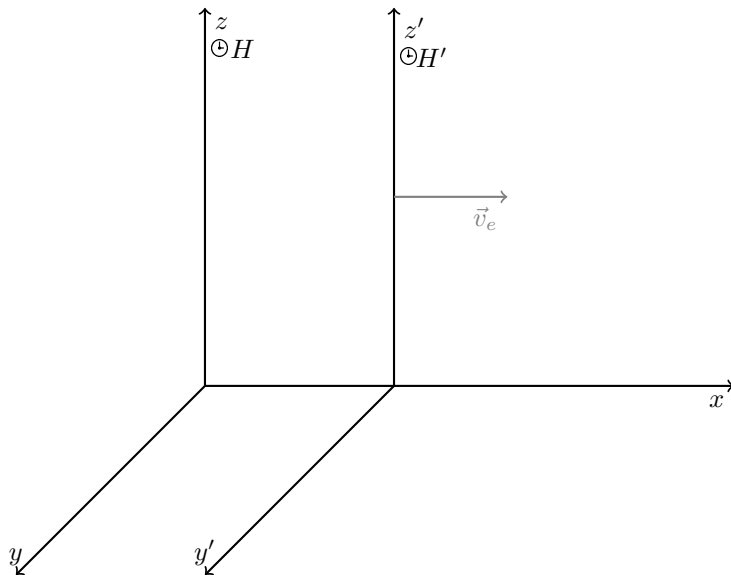
- Aucun référentiel absolu
- Pas de vitesse absolue

1.1.2 La deuxième loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, on a :

$$\vec{f} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La mécanique est basée sur un postulat fondamental, qui est le principe de relativité : Les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléen.



Cinématique relativiste :

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_e t \end{cases}}$$

D'après le PFD :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m} \cdot \vec{f}$$

et de même :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \cdot \vec{f} &= \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \\ &= \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r} - \vec{v}_e t) \\ &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ &= \frac{1}{m} \cdot \vec{f} \end{aligned}$$

La résultante des forces \vec{f} est la même dans les deux référentiels.

1.1.3 La troisième loi de Newton

$$\vec{f}_{i \leftarrow j} = -\vec{f}_{j \leftarrow i}$$

La vitesse de propagation des interactions est infinie.

1.1.4 Pourquoi la relativité restreinte?

L'électromagnétisme conduit à l'existence d'onde de vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

De plus, une particule électromagnétique subit une force qui est la force de Lorentz :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \\ &= q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= \vec{F}_e + \vec{F}_m \end{aligned}$$

Calculons f' :

$$\begin{aligned} \vec{f}' &= q \cdot (\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') \\ \vec{f}' &= q[\vec{E}' + (\vec{v} - \vec{v}_e) \wedge \vec{B}] \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{B} \\ \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

La force de Lorentz n'est pas un invariant par transformation de Galilée.
Comment résoudre le problème?

1. Admettre que la théorie de Maxwell est fausse (difficile, car elle explique et prédit plusieurs phénomènes physiques)
2. Rendre les particules de la mécanique classique et d'électromagnétisme compatibles en ajoutant des principes qui n'ont pas lieu d'être
3. Admettre que les postulats de la mécanique classique sont faux

2 Postulats de la Relativité restreinte

2.1 Premier postulat

Les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels d'inertie.

$$\Phi(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \Rightarrow \Phi'(x', y', z', t') = f(x', y', z', t')$$

2.2 Deuxième postulat

La vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels d'inertie. On y ajoute le principe d'équivalence :

Pour $v \ll c$ on retrouve les lois de Newton et les transformations de Galilée.

3 Evenements et transformations spéciales de Lorentz

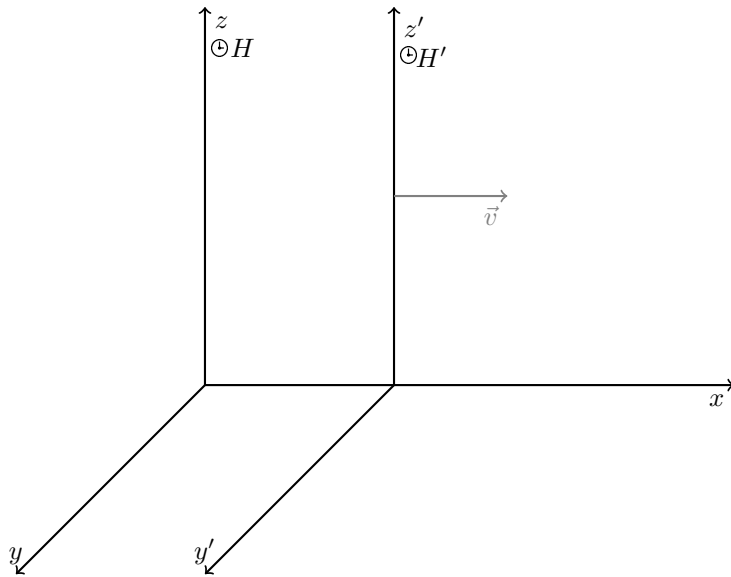
3.1 Evenements

Def : on appelle évènement un phénomène ϕ supposé infiniment localisé dans l'espace et le temps

3.1.1 Coïncidence

Deux évènements sont coïncidents s'ils ont lieu au même endroit et au même moment. La coïncidence de deux évènements est un fait absolu, indépendant du référentiel.

3.1.2 Horloges Synchrones



Si pour tout t_a on a $t_b = t_a + \frac{AB}{c}$, alors les horloges sont synchrones. Il s'agit d'un protocole pour synchroniser toutes les horloges dans un référentiel donné.

3.1.3 Evenements simultanés

Deux événements sont simultanés s'ils ont lieux au même moment selon les horloges locales de A et de B préalablement synchronisées.

La simultanéité n'est pas un invariant par changement de référentiel.

3.1.4 Intervalle entre deux évènements

Soit : $(\Delta s)^2 = c^2(t - t')^2 - [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]$ Si :

- $(\Delta s)^2 = 0 \Rightarrow$ Sur le cone de lumière
- $(\Delta s)^2 > 0 \Rightarrow$ intervalle de temps
- $(\Delta s)^2 < 0 \Rightarrow$ intervalle de temps

On peut montrer que $(\Delta s)^2$ est un invariant scalaire par changement de référentiel.

3.2 Transformations de Lorentz (1904)

3.2.1 Matrices de transformation

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Avec : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\beta = \frac{v}{c}$ Pour passer du référentiel R' à R, il suffit de remplacer v par $-v$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$v \ll c \Rightarrow \beta \ll 1$ et $\gamma \rightarrow 1$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ \approx ct \\ t' = t \end{cases}$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \approx x - vt$$

\Rightarrow On retrouve les transformations de Galilée

3.2.2 Transformations des vitesses

On a : $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$

Or :

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - \beta cdt) \\ cdt' = \gamma(cdt - \beta dx) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{c} \frac{dx'}{dt'} &= \frac{\gamma(dx - \beta cdt)}{\gamma(cdt - \beta dx)} \\ &= \frac{dt(\frac{dx}{dt} - v)}{cdt(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt})} \\ &= \frac{1}{c} \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x \cdot v}{c^2}} \\ \Rightarrow v'_x &= \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x \cdot v}{c^2}} \end{aligned}$$

Si $v_x = c$

$$v'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{c \cdot v}{c^2}} = (c - v) \cdot \frac{c^2}{c^2 - cv} = \frac{c^2}{c} = c$$

Donc la vitesse de la lumière est un invariant par rapport au référentiel.

Si $v_x \ll c$

alors $\frac{v_x}{c} \ll 1$, on trouve $v'_x \approx v_x - v$ (Le terme $\frac{v_x \cdot v}{c^2}$ est négligeable dans la formule)

\rightarrow On retrouve la loi classique de transformation.

4 Temps propre et dilatation des durées

Def : L'intervalle de temps propre est l'intervalle de temps séparant deux horloges dans le référentiel R' dans laquelle les horloges sont aux repos.

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

Si H est au Repos dans R' :

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta x' &= 0 \\ \Rightarrow c\Delta t &= c\gamma\Delta t' \\ \Rightarrow \Delta t &= \gamma\Delta t' \\ \text{Or : } \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1\end{aligned}$$

\Rightarrow Dans R, il y a dilatation des durées par rapport au référentiel propre R

Remarque : On peut le montrer aussi avec $(\Delta s)^2$

$$\begin{aligned}ds^2 &= c^2 d\tau^2 \text{ (où } d\tau \text{ est le temps propre)} \\ &= c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}\right) \\ &= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right) \\ &= c^2 dt^2 (1 - \beta^2) \\ \Rightarrow d\tau^2 &= \frac{dt^2}{\gamma^2} \Leftrightarrow dt = \gamma d\tau\end{aligned}$$

5 Longueurs propres et contraction des longueurs

Définition : La longueur propre d'un objet est égale à la longueur de l'objet mesuré dans le référentiel où l'objet est immobile.

Pour l'observateur dans R :

$$\begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct) \end{cases}$$

$$\Rightarrow L' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$$

Dans R, il y a une contraction des longueurs (car $\gamma \geq 1$)

Conséquences :

Les volumes subissent eux aussi une contraction :

$dV_0 = dx_0 dy_0 dz_0$ est le volume propre

Pour un mouvement selon O_x :

$$dV = dx dy dz = \frac{dx_0}{\gamma} dy_0 dz_0 = \sqrt{1-\beta^2} dV_0$$

Or la charge est un invariant relativiste, on a donc :

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \gamma \frac{dq}{dV_0} = \gamma \rho_0$$

6 Notion de quadrivecteur

Définition : 4 quantités $A_1; A_2; A_3; A_4$ sont les composantes d'un quadrivecteur \tilde{A} si vis à vis d'un changement de référentiel galiléen, elles se transforment de la même manière que les composantes du

quadrivecteur $\vec{OM} = (ct; \vec{r})$

Si R et R' sont dans les conditions de la transformation de Lorentz, la transformation de \vec{A} est régi par la matrice de Lorentz.

Définition : On définit la pseudonorme du 4-vecteur \vec{A} comme suit:

$$\text{Soit } \vec{A} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \vec{A} \cdot \vec{A} = A_0^2 - (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2).$$

On peut avoir $\vec{A} \cdot \vec{A}$ positif ou négatif.

Exemple : Dans (R): $\vec{OM} : (ct; \vec{OM})$ et $dt = \gamma d\tau$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

De façon évidente : $\tilde{v} = \frac{d\vec{OM}}{d\tau}$

$$\tilde{v} = \frac{d\vec{OM}}{d\tau} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}.$$

Or : $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ et $d\vec{OM} = (cdt; d\vec{OM})$

$$\Rightarrow \tilde{v} = \gamma(c; \frac{d\vec{OM}}{dt}) \text{ et } \tilde{v} \cdot \tilde{v} = \gamma(c^2 - v^2) = \frac{c^2}{c^2 - v^2}(c^2 - v^2) = c^2 \text{ Invariant } \square.$$