Problème 4450

Maxime Muller

March 27, 2025

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : a_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$

Pour $n = 1 :\ a_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

Pour $n = 2 :\ a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2} \leq \frac{1}{2 \cdot 3}$
Pour $n \geq 3$, On procède par récurrence, l'initialisation étant

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq P_{n-1}. Montrons que P_n

$$\begin{aligned}
a_n \leq \frac{1}{n(n+1)} &\Leftrightarrow a_{n-1} \cdot \frac{2n-3}{2n} \leq_1 \\
&\Leftrightarrow \frac{n(n+1)(2n-3)}{2n} \cdot a_{n-1} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{(n+1)(2n-3)}{2} a_{n-1} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow a_{n-1} \leq \frac{2}{(n+1)(2n-3)}
\end{aligned}$$

Etudions le signe de $\frac{1}{n(n-1)} - \frac{2}{(n+1)(2n-3)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n-1)} - \frac{2}{(n+1)(2n-3)} &= \frac{(n+1)(2n-3) - 2n(n-1)}{n(n-1)(2n-3)(n+1)} \\
&= \frac{n-3}{n(n-1)(2n-3)(n+1)}
\end{aligned}$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, n(n-1)(2n-3)(n+1) \geq 0$ et $n - 3 \geq 0$
D'où : $a_{n-1} \leq \frac{1}{n(n-1)} \Leftrightarrow a_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$
Donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$

On a: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ D'où $\sum_{k=1}^{n} a_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}$
$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_n \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$