

# Compléments de cinématique

Maxime Muller

June 2, 2025

### **Abstract**

Ceci est une transcription des cours de cinématique Newtonienne donné par le professeur Xavier Ovido au lycée St Louis de Gonzague dans le cadre du club Phythème.

# Contents

<b>1</b>	<b>Différents systèmes de coordonnées</b>	<b>2</b>
1.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	2
1.2	Coordonnées polaires . . . . .	3
1.3	Coordonnées cylindropolaires . . . . .	5
1.4	Coordonnées sphériques . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Grandeurs cinématiques</b>	<b>7</b>
2.1	Quantité de mouvement . . . . .	7
2.2	Energie mécanique d'un point matériel. Petits mouvements au voisinage d'un point d'équilibre stable . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Mouvement dans un champ de force centrale newtonien</b>	<b>19</b>
3.1	Force centrale conservative . . . . .	19
3.2	Lois de conservation . . . . .	20
3.3	Mouvement dans un champ de force centrale attractive . . . . .	23

# Chapter 1

## Différents systèmes de coordonnées

### 1.1 Coordonnées cartésiennes

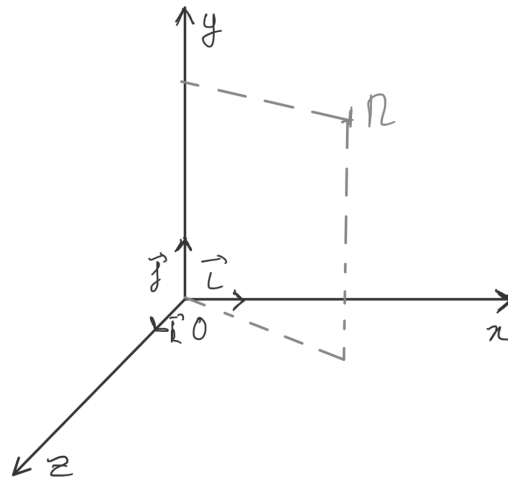


Figure 1.1: Schema des coordonnées cartésiennes

**Definition 1.1.1** (Coordonnées cartésiennes). On définit les coordonnées avec 3 vecteurs unitaires orthonormés  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  de direction et sens indépendant du temps.

**Corollary 1.1.1** (Vecteur Position). On a :  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .  
D'où on a pour le déplacement élémentaire:  $d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

**Corollary 1.1.2** (Vecteur vitesse). Par définition :  $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ . Or, on a  $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$ .  
D'où :  $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

**Corollary 1.1.3** (Vecteur accélération). On a :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \\ \vec{a} &= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\end{aligned}$$

## 1.2 Coordonnées polaires

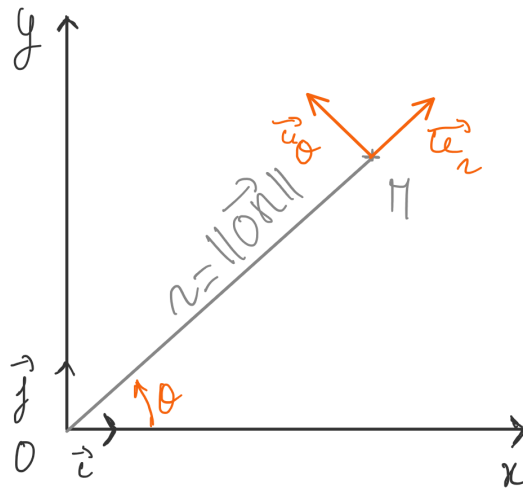


Figure 1.2: Schema des coordonnées polaires

**Definition 1.2.1** (Coordonnées polaires). On définit les coordonnées polaires (en 2 dimensions) avec deux vecteurs :  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$ .  $u_r$  est colinéaire au vecteur position ( $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ ) et  $u_\theta$  est orthogonal à ce dernier, dans le même sens que l'angle orienté  $(\vec{i}, \vec{OM})$ .

**Remark** (Changement de base). Dans le repère d'étude,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont constants, contrairement à  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_r$ . On peut passer de coordonnées polaires à cartésiennes et vice-versa :

- Si on connaît les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r}\end{aligned}$$

- Si on connaît les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

**Corollary 1.2.1** (Expression des vecteurs unitaires). On peut donc exprimer les vecteurs unitaires  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  :

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j} \\ \vec{u}_\theta &= -\sin \theta(t) \vec{i} + \cos \theta(t) \vec{j}.\end{aligned}$$

**Corollary 1.2.2** (Dérivées des vecteurs unitaires). On dérive les vecteurs unitaires  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  en fonction du temps :

**Corollary 1.2.3** ( $\vec{u}_r$ ).

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \frac{d}{dt}(\cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j}) \\ &= \dot{\theta}(-\sin \theta) \vec{i} + \dot{\theta} \cos \theta \vec{j} \\ &= \dot{\theta}(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \\ &= \dot{\theta} \vec{u}_\theta.\end{aligned}$$

**Corollary 1.2.4** ( $\vec{u}_\theta$ ).

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= \frac{d}{dt}(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \\ &= \dot{\theta}(-\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \\ &= -\dot{\theta} \vec{u}_r\end{aligned}$$

**Corollary 1.2.5** (Vecteur position et déplacement élémentaire). D'après la définition de  $\vec{u}_r$ , on a :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \text{ Où } r = \|\overrightarrow{OM}\|$$

Cependant,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont constants, contrairement à  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_r$ . Le déplacement élémentaire s'exprime alors :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

**Corollary 1.2.6** (Vecteur vitesse). Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  s'exprime :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

**Proof.** D'après [Corollary 1.2.5](#), on a :  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$ .

D'où,  $\vec{v} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{OM}] = \frac{d}{dt} [r \vec{u}_r] = \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d}{dt} \vec{u}_r$ .

Or, d'après [Corollary 1.2.3](#),  $\frac{d}{dt} \vec{u}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ .

D'où,  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \square$

⊗

**Corollary 1.2.7** (Vecteur accélération). Le vecteur accélération  $\vec{a}$  s'exprime :  $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$

**Proof.**

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt} [\vec{v}] \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \\ &= \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\end{aligned}$$

Or, d'après [Corollary 1.2.4](#),  $\frac{d}{dt}\vec{u}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$  et d'après [Corollary 1.2.3](#),  $\frac{d}{dt}\vec{u}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ .

D'où  $\vec{a}(t) = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{u}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$   $\square$

$\otimes$

**Example** (Cas particulier du mouvement circulaire). On a :  $r = R = \text{cste}$  (donc  $\dot{r} = 0$ ). Et :  $\omega = \dot{\theta}$  (vitesse angulaire) D'après [Corollary 1.2.6](#) et [Corollary 1.2.7](#), on a :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

Or,  $\dot{r} = 0$ , d'où :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= R\omega\vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= -R\omega^2\vec{u}_r + r\dot{\omega}\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

Dans le cas du MCU, on a  $\dot{\omega} = 0$  :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= R\omega\vec{u}_\theta = \text{cste} \\ \vec{a} &= -R\omega^2\vec{u}_r\end{aligned}$$

### 1.3 Coordonnées cylindropolaires

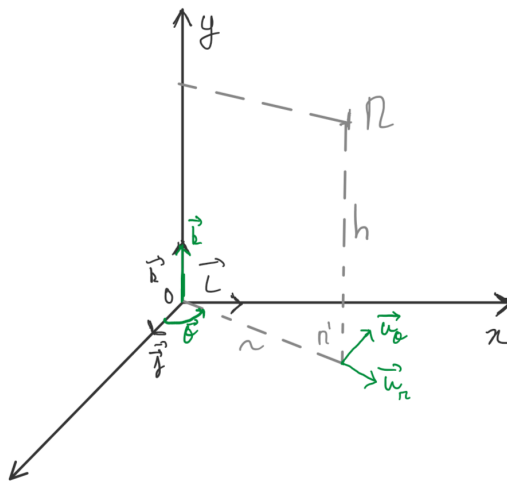


Figure 1.3: Schema des coordonnées cylindro-polaires

**Definition 1.3.1** (Coordonnées cylindro polaires). On définit les coordonnées cylindro-polaires en 3 dimensions avec trois vecteurs unitaires :  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$ , et  $\vec{k}$ , avec deux vecteurs en coordonnées polaires ( $\vec{u}_r$ , et  $\vec{u}_\theta$ ) et un troisième ( $\vec{k}$ ), normal à ces deux, indépendant du temps, représentant la hauteur.

**Corollary 1.3.1** (Vecteur position). On décompose  $\overrightarrow{OM}$ , en deux composantes. La première,  $MM'$  est exprimée en coordonnées polaires, alors que la deuxième,  $M'M$  est un vecteur selon le dernier vecteur unitaire,  $\vec{k}$ .

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + h\vec{k}$$

Le déplacement élémentaire s'exprime alors comme-ci :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dh\vec{k}$$

**Corollary 1.3.2** (Vecteurs vitesse et accélération). On a le vecteur position, [Corollary 1.3.1](#), et les vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et polaires. On utilise le fait que les composantes en coordonnées polaires et cartésiennes sont indépendantes en fonction du temps pour facilement obtenir les vecteurs position et accélération.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{h}\vec{k} \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (\ddot{\theta}r + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{h}\vec{k}\end{aligned}$$

## 1.4 Coordonnées sphériques

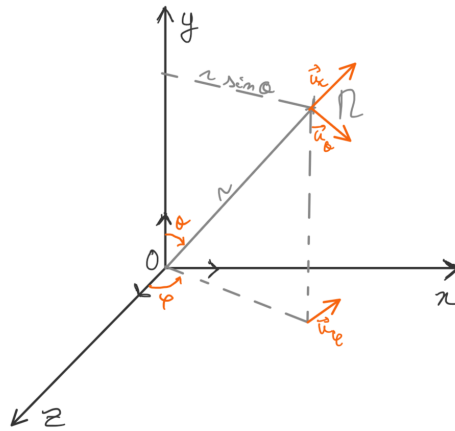


Figure 1.4: Schema des coordonnées sphériques

**Definition 1.4.1** (Coordonnées sphériques). On définit les coordonnées sphériques avec 3 vecteurs, un colinéaire avec la position  $\vec{u}_r$ , et deux représentant les angles :  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$ .

**Corollary 1.4.1** (Vecteur position). On a :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

**Corollary 1.4.2** (Vecteur vitesse). On donne, sans preuve, le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$$



## Chapter 2

# Grandeurs cinématiques

### 2.1 Quantité de mouvement

**Definition 2.1.1** (Quantité de mouvement). Par définition, la quantité de mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  et animé d'une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel d'étude est :

$$\vec{p}(t) = m \vec{v}$$

**Theorem 2.1.1** (Principe fondamentale de la dynamique). Dans un référentiel galiléen, on a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

**Corollary 2.1.1** (Cas d'un système isolé). Si le système est isolé ou pseudo-isolé, on a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{cste}$$

**Corollary 2.1.2** (Cas d'un système fermé). Dans le cas d'un système fermé ( $m = \text{cste}$ ) on a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a}$$

#### 1<sup>ère</sup> application : chez les particules

La vitesse (et donc  $\vec{p}$ ) dépend du référentiel.

La Bille(1) a une vitesse initiale  $\vec{v}_1$  et la bille(2) est immobile.

Hypothèses :

1. Toutes les billes sont identiques (elles ont la même masse)
2. on suppose le choc élastique (il y a donc conservation de l'énergie cinétique)

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :  $\vec{P} = m \vec{g}$  et  $\vec{R}_n$  (On a :  $\vec{P} + \vec{R}_n = 0$ )

D'après le principe d'inertie,  $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ . Avant et après le choc,  $\vec{P}_{tot}$  et  $E_c$  sont conservées :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \text{ (Or on a : } m_1 = m_2 = m \text{ et } \vec{v}_2 = 0 \text{).}$$

D'où :  $\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$

Conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_2'^2.$$

D'où :  $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$

$$\text{Or : } \begin{cases} v_1^2 = \vec{v}_1^2 = (\vec{v}_1' + \vec{v}_2')^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' \\ v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{cases}$$

il faut donc :  $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0$

2 solutions :

$$1. \begin{cases} \vec{v}_1' \neq 0 \\ \vec{v}_2' = \vec{0} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{v}_1' = \vec{0} \\ \vec{v}_2' \neq \vec{0} \end{cases} .$$

2.  $\vec{v}_1' \perp \vec{v}_2'$  (les deux billes forment un angle de  $\frac{\pi}{2}$ )

### Application : recul d'une arme à feu

m : masse du projectile et M : masse du canon.

$$\vec{P}_{\text{avant}} = \vec{0} = \vec{P}_{\text{après}} = m\vec{v} + M\vec{v}$$

D'où :  $\vec{v}_1 = -\frac{m}{M}\vec{v}_2$

### PFD pour un système ouvert (fusée)

$$\begin{cases} \vec{p}(t) &= m\vec{v} \\ \vec{p}(t+dt) &= (m-dm)(\vec{v}) + dm(\vec{v} + d\vec{v}) \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) \\ &= m\vec{v} + md\vec{v} - dmd\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} + dm\vec{v}_e - m\vec{v} \\ &= md\vec{v} + dm\vec{v}_e. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}_e$$

$$\text{Donc : } m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{v}_e$$

$$\text{D'où : } f_{\vec{p}} = -\frac{dm}{dt}\vec{v}_e \text{ (force de poussée de la fusée)}$$

### 2.1.1 Moment cinétique

**Notation.** On note le produit vectoriel  $\wedge$ , entre deux vecteurs non colinéaires, le produit qui renvoie un troisième vecteur normal aux deux premiers.

**Corollary 2.1.3** (Vecteurs unités). En coordonnées cartésiennes, [Definition 1.1.1](#), on a :

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \end{aligned}$$

**Corollary 2.1.4** (Propriétés du produit vectoriel). On a :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$
- $\lambda \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp (\vec{u}, \vec{v})$

**Definition 2.1.2 (Moment cinétique).** On définit le moment cinétique,  $\vec{\sigma}_0 = \vec{L}_0$ , d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  animé d'une vitesse  $\vec{v}$  comme suit :

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}$$

### En coordonnées cylindropolaires

**Corollary 2.1.5 (Expression du moment cinétique).** On considère que  $\overrightarrow{OM}$  est d'altitude nulle. D'après, [Corollary 1.2.5](#), on a :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$$

et :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Or,

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} \\ &= r \vec{u}_r \wedge m(\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ &= rm(\dot{r} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_r + \vec{u}_r \wedge r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ &= rm \cdot r \dot{\theta} \vec{u}_z \\ \vec{L}_0 &= mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z. \end{aligned}$$

**Corollary 2.1.6 (Conservation du moment cinétique).** On cherche à trouver quand est ce que  $\vec{L}_0 = \text{cste} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \vec{L}_0 = 0$  On rappelle que :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{u} &= \vec{0} \\ \vec{v} &= \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \\ m &= \text{cste.} \\ \vec{f} &= m \frac{d}{dt} \vec{v} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_0 &= \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}) \\ &= \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt} m \vec{v} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \propto \vec{f}$

**Definition 2.1.3 (Moment cinétique d'une force).** On note  $M_0(f)$  le moment cinétique d'une force  $f$ .

**Theorem 2.1.2 (Moment cinétique d'une force).** Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  subissant uniquement une force  $f$ . On a :

$$M_0(f) = \frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

**Corollary 2.1.7 (Conservation du moment cinétique).** Pour un point  $M$  de masse  $m$  animé d'une vitesse  $\vec{v}$  soumis à une unique force  $f$ . Le moment cinétique  $\vec{L}_0$  se conserve alors lorsque :

$$M_0(f) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \propto \vec{f}$$

**Exemple (Conservation du moment cinétique).** Dans un champ de force centrale, où  $\vec{f} \propto \vec{u}_r$ , le moment cinétique se conserve alors. C'est le cas, par exemple de la force gravitationnelle,  $\vec{F}_G = G \frac{mM}{r^2} \cdot \vec{u}_r$ , et de la loi de Coulomb,  $\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$ .

## 2.1.2 Application des théorèmes de la physique

On considère un pendule de longueur  $l$  constitué d'un fil inextensible de longueur  $l$ , de masse négligeable, et de l'objet  $M$  de masse  $m$  assimilé à un point matériel.

A  $t = 0s$ , on l'écarte d'un angle  $\theta_0$  et on le lâche sans vitesse initiale. On néglige les frottements.

On cherche à établir l'équation du mouvement  $\Leftrightarrow \theta(t)$

### 1ère Méthode : le PFD

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : objet (M)

BDF : Le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et la tension du fil  $\vec{T}$ .

On projette les vecteurs :

$$\vec{P} \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } \vec{T} \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après le PFD :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

Or en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

Or le fil étant inextensible, on a :  $r = l = cste$  (donc  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ )

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= -l\dot{\theta}\vec{u}_r + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

Or :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

D'où :

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta} = mg \cos \theta - T = 0 \\ ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

### 2e méthode, conservation de l'énergie mécanique

$\Delta E_m = \Sigma \vec{F}_{nc} = 0$  car à tout instant,  $W\vec{T} = \vec{T} \cdot d\vec{l} = 0$ .

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_{pp}$$

---

Or :  $(\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

.

Or :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= 0 \\ &= \frac{1}{2}ml^2 \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl(-1)\dot{\theta}(-\sin \theta) \\ \Rightarrow 0 &= ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin \theta \\ \Leftrightarrow 0 &= ml^2\dot{\theta} \left[ \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin \theta \right] \\ \Leftrightarrow 0 &= \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin \theta. \end{aligned}$$

**3e méthode : TMC**

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \\ &= l\vec{u}_r \wedge m(l\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \\ &= ml^2\dot{\theta}\vec{u}_z \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) &= l\vec{u}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta) \\ &= -mgl \sin \theta \vec{u}_z \\ \Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) \\ &= ml^2\ddot{\theta} \\ &= -mgl \sin \theta \\ \Rightarrow 0 &= \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin \theta. \end{aligned}$$

## 2.2 Energie mécanique d'un point matériel. Petits mouvements au voisinage d'un point d'équilibre stable

### 2.2.1 $E_m$ d'un point matériel

Théorème de l'énergie cinétique

Puissance et travail d'une force

**Definition 2.2.1 (Puissance d'une force).** La puissance  $P$  d'une force  $\vec{f}$  qui s'applique à un point matériel de masse  $m$  évoluant à une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel d'étude est :

$$P = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

**Remark (Remarques).** •  $1\text{N} = 1\text{kg m s}^{-2}$

- $1\text{W} = 1\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$
- $P = \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{f}, \vec{v})$ 
  - Si  $P > 0$ , alors  $\vec{f}$  est motrice
  - Si  $P < 0$ , alors  $\vec{f}$  est résistante

**Definition 2.2.2 (Travail élémentaire).** Le travail élémentaire  $\delta W$  entre 2 instants d'une force  $\vec{f}$  s'exerçant sur le point  $M$  est :

$$\delta W^{\vec{f}} = P \cdot dt$$

**Corollary 2.2.1 (Expression alternative).**

$$\begin{aligned}\delta W^{\vec{f}} &= P \cdot dt \\ &= \vec{f} \cdot \vec{v} dt \text{ Or: } \vec{v} = \dot{\vec{OM}} \\ &= \vec{f} \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} dt \\ &= \vec{f} \cdot d\vec{OM} \\ &= \vec{f} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

Avec :

$\delta W^{\vec{f}}$  en J

- $\vec{f}$  en N
- $d\vec{l}$  en m

**Remark (Entre deux instants connus).** Entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , ou entre deux positions  $M_1$  et  $M_2$ , le travail d'une force  $\vec{f}$  vaut :

$$W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{f}} = \int_{t_1}^{t_2} P dt \text{ ou } W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{f}} = \int_{m_1}^{M_2} \vec{f} d\vec{OM}$$

**Théorème de l'énergie cinétique** Dans un référentiel galiléen, le PFD affirme :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Pour un point matériel,  $m = \text{cste}$ , alors :

$$\vec{f} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Or,

$$\begin{aligned} P(\vec{f}) &= \vec{f} \cdot \vec{v} \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) \end{aligned}$$

En effet,  $\frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$

**Theorem 2.2.1** (Théorème de l'énergie cinétique). On a donc, pour un point matériel  $M$ ,

$$P(\vec{f}) = \frac{dE_c}{dt}$$

Soit,

$$E_c(t_2) - E_c(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{f}) dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{f} d\vec{l} = W_{m_1 \rightarrow M_2}^{\vec{f}}$$

## 2.2.2 Forces conservatives et $E_p$

**Definition 2.2.3** (Force conservative). Une force est dite conservative si son travail est indépendant du chemin suivi.

**Example** (Le poids).  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$

$$\begin{aligned} W_{M_1 \rightarrow M_2}^{\vec{P}} &= \int_{M_1}^{M_2} \vec{P} d\vec{OM} \\ &= \int_{M_1}^{M_2} -mg\vec{k} (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) \\ &= \int_{M_1}^{M_2} -mg dz \\ &= -mg(z_2 - z_1) \\ &= -mg(z_1 - z_2) \end{aligned}$$

**Example** (Interaction électrostatique). Loi de Coulomb :  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$

$$\begin{aligned}
 W_{M_1 \rightarrow M_2}^{\vec{F}_e} &= \int_{M_1}^{M_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{u}_r d\vec{OM} \\
 \text{En coordonnées sphériques} &: d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi \\
 W_{M_1 \rightarrow M_2}^{\vec{F}_e} &= \int_{M_1}^{M_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr \\
 &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{M_1}^{M_2} \frac{1}{r^2} dr \\
 &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{M_1}^{M_2} \\
 &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]
 \end{aligned}$$

**Definition 2.2.4** (Energie potentielle). Il apparait dans ces exemples qu'il existe une fonction  $E_p$ , appelée énergie potentielle, définie en tout point de l'espace telle que :

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = -W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{f}}$$

A toute force conservative, on peut associer une énergie potentielle ne dépendant que des coordonnées de position.

#### Relation entre force et $E_p$ associée

**Definition 2.2.5** (Gradient). On définit un opérateur mathématique le quotient noté  $\overrightarrow{\text{grad}}$  ou  $\vec{\nabla}$  tel que :

$$\begin{aligned}
 df &= \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} \\
 \vec{\nabla} f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**Notation.** Ou  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est la dérivée partielle par rapport à  $x$  :

**Example** (Exemple).

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + xy^2) = 2x + y^2$$

**Notation.** A partir de maintenant, on notera  $\vec{\nabla}$  avec  $\nabla$

**Corollary 2.2.2** (Application à l'énergie potentielle). Par définition du gradient, on a :

$$dE_p = \nabla E_p \cdot d\vec{OM}$$

La force conservative s'obtient par dérivation de l'énergie potentielle selon les trois coordonnées et :

$$\vec{f}_c = -\nabla E_p$$



**Corollary 2.2.3** (Evolution de la position). Le gradient en un point est dirigé dans le sens de la plus grande croissance de l'énergie potentielle. Il découle de cette relation qu'une force conservative tend à faire évoluer le système dans le sens de la minimisation de son énergie potentielle.

## Energie mécanique

**Theorem 2.2.2** (Theorème de l'énergie mécanique). On a :

$$dE_m = \sum \vec{f}_{nc} \cdot d\vec{l}$$

Soit :

$$\Delta E_m = E_m(t_2) - E_m(t_1) = \sum W_{t_1 \rightarrow t_2}^{\vec{f}_{nc}}$$

**Proof.** D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} dE_c &= \sum \delta W^{\vec{f}} \\ &= \sum \delta W^{\vec{f}_c} + \sum \delta W^{\vec{f}_{nc}} \\ &= \sum \vec{f}_c \cdot d\vec{l} + \sum \vec{f}_{nc} \cdot d\vec{l} \\ &= \sum (-dE_p) + \sum \vec{f}_{nc} \cdot d\vec{l} \\ \Rightarrow dE_c + \sum dE_p &= \sum \vec{f}_{nc} \cdot d\vec{l} \\ dE_m &= \sum \vec{f}_{nc} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

⊗

## 2.2.3 Equilibre et stabilité

### Raisonnement sur les forces

**Definition 2.2.6** (Position d'équilibre). On se place dans un système à une dimension, décrit par une variable  $x$ . La particule est à l'équilibre en un point  $x_0$  si elle reste en ce point lorsqu'elle y est déposée immobile. Il faut pour cela que  $\vec{v} = \vec{0}$  et  $\vec{a} = \vec{0}$  en  $x_0$ .

**Corollary 2.2.4** (Forces à l'équilibre). Donc, d'après le PFD, on a :  $F_x(x_0) = 0$  où  $F_x(x_0)$  est la résultante des forces en  $x_0$ .

**Definition 2.2.7** (Position d'équilibre stable). Une position d'équilibre est dite stable si la particule à tendance à y revenir une fois écartée de celle-ci.

**Remark** (Force). La force autour d'une position d'équilibre stable doit être une force de rappel :

$$\frac{dF_x}{dx} < 0$$

### Raisonnement sur l'énergie potentielle

**Theorem 2.2.3** (Energie potentielle et équilibre). Si la force est conservative, alors on a :

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

Ainsi, la condition d'équilibre est donc :

$$\frac{dE_p}{dx} = 0$$

Et la condition d'équilibre est :

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} > 0$$

## Exemples

**Theorem 2.2.4** (Développement limité).

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x)$$

Ainsi on a au point d'équilibre :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0)\frac{dE_p}{dx}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0) = E_p(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0)$$

On distingue trois cas en fonction du signe de  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0)$ .

Cas 1 :  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0) > 0$  on a un équilibre stable.

Cas 2 :  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0) < 0$ , on a un équilibre instable.

Cas 3 :  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0) = 0$ , on a un équilibre indifférent.

## 2.2.4 Petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable

### Approche générale d'oscillateur harmonique

Soit un système unidimensionnel caractérisé par une variable  $x$ , soumis à un ensemble de forces résultantes  $\vec{f}$ .

$$\vec{f} = f_x \vec{i}, f(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

Soit  $x_0$  la position d'équilibre stable et  $k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0)$ .

$$E_p(x) \approx E_p(x_0) + (x - x_0)\frac{dE_p}{dx}(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 k$$

$$E_p(x) \approx E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$$\vec{f} = -\frac{dE_p}{dx} \vec{i} = -k(x - x_0) \vec{i}$$

Autour d'une position d'équilibre stable, si l'écart à l'équilibre n'est pas trop important, le système subit **une force de rappelle élastique linéaire**, c-à-d proportionnelle à l'écart.

L'équation du mouvement peut s'écrire :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0)$$

On pose :  $X = x - x_0$ , donc  $\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ . Et on pose  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0$$

**Theorem 2.2.5** (Résolution d'équations différentielles du second ordre). On considère une ED du second ordre, SSM, à coefficients constants :

$$ay'' + by' + cy = 0, a \neq 0$$

A cette ED, on associe le polynôme caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

3 cas :

- Cas 1 :  $\Delta > 0$   
 $\exists, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  solutions de l'équations.

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

La solution de l'ED est :  $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ , avec  $A$  et  $B$  à déterminer.

- Cas 2 :  $\Delta = 0$   
 $\exists! r$  solution :  $r = -\frac{b}{2a}$ .  
La solution de l'ED est :  $y = (A'x + B')e^{rx}$  avec  $A'$  et  $B'$  à déterminer.
- Cas 3 :  $\Delta < 0$   
 $\exists r_3, r_4 \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{cases} r_3 = \frac{-b-j\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ r_4 = \frac{-b+j\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases} \quad \text{avec } j^2 = -1$$

On a alors :

$$\begin{aligned} y &= A''e^{r_3 x} + B''e^{r_4 x} \\ &= \left( A'' \exp \left[ \frac{-j - \sqrt{-\Delta}}{2a} x \right] + B'' e^{\frac{-j + \sqrt{-\Delta}}{2a} x} \right) e^{-\frac{b}{2a} x} \\ &= \left( \alpha \cos \left( \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x \right) + \beta \sin \left( \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x \right) \right) e^{-\frac{b}{2a} x} \end{aligned}$$

On a donc ici une ED du second ordre, sans second membre :

$$\frac{d^2 x}{dx^2} + \omega_0^2 x = 0$$

On y associe donc le polynome caracteristique :

$$r^2 + \omega_0^2 = 0, \Delta = -4\omega_0^2$$

On a donc deux racines complexes et la solution est donc :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

**Exemple** (Exemple du pendule).  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ . Mais si  $\theta$  ( en rad )  $\ll 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ . D'où :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\theta} \omega_0^2 \theta &= 0, \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{g}{l} \\ \Rightarrow \theta &= A \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

On utilise les conditions initiales pour déterminer les valeurs des constantes ( $A$  et  $\varphi$ ) :

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

---

On a donc :

$$\begin{aligned}\theta(0) &= A \cos(\varphi) \\ \dot{\theta}(t) &= -A\omega_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ \Rightarrow \dot{\theta}(0) &= -A\omega_0 \sin(\varphi) \\ \Rightarrow \sin \varphi &= 0 \\ \Rightarrow \varphi &= 0 \\ \Rightarrow A \cos 0 &= \theta_0 \\ \Rightarrow A &= \theta_0\end{aligned}$$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$$

Or  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Donc  $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$ , c'est la période propre de l'oscillateur harmonique.

## Chapter 3

# Mouvement dans un champ de force centrale newtonien

### 3.1 Force centrale conservative

#### 3.1.1 Force centrale

**Definition 3.1.1** (force centrale). On considère un point  $M$  de masse  $m$  soumis à une force  $\vec{F}$ .  $\vec{F}$  est une force centrale si on a :

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_r$$

ie la norme de la force ne dépend que de la distance à un point  $O$  origine.

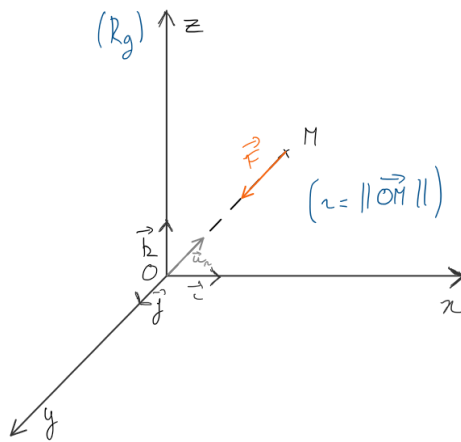


Figure 3.1: Schema d'une force centrale

**Example** (Exemple). Cette force est dirigée vers le point  $O$ , le centre de force. Le point  $O$  est immobile dans le référentiel  $(Rg)$ .

#### 3.1.2 Force conservative

**Definition 3.1.2** (Force conservative). Une force conservative est une force qui dérive d'une énergie potentielle.

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$

**Corollary 3.1.1** (En coordonnées sphériques). En coordonnées sphériques on a :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

$$\Rightarrow \nabla E = \frac{\partial E}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$$

**Corollary 3.1.2** (Dans le cas d'une force centrale). Dans le cas d'une force centrale, l'énergie potentielle ne dépend que de  $r = \|\vec{OM}\|$ . On a alors :

$$\vec{F}(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}\vec{u}_r$$

### 3.1.3 Champ de force centrale newtonien

**Definition 3.1.3** (Champ de force centrale newtonien). Si la force centrale  $\vec{F}$  est telle que  $\|\vec{F}\| \propto \frac{1}{r^2}$ , et que le centre de force est fixe dans le référentiel galiléen d'étude, on parle de champ de force centrale newtonien.

$$\vec{F}(r) = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r, k = \text{cste}$$

**Example** (Exemple). • La loi de gravitation de Newton :  $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u}_r$

• La loi de Coulomb :  $\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\vec{u}_r$

## 3.2 Lois de conservation

### 3.2.1 Conservation du moment cinétique : loi des aires

D'après le [Corollary 2.1.6](#), on a :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge \vec{F}}$$

Or pour une force centrale,  $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ , d'où :

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge F(r) \cdot \vec{u}_r = 0$$

D'où, pour un champ de force centrale, le moment cinétique est constant.

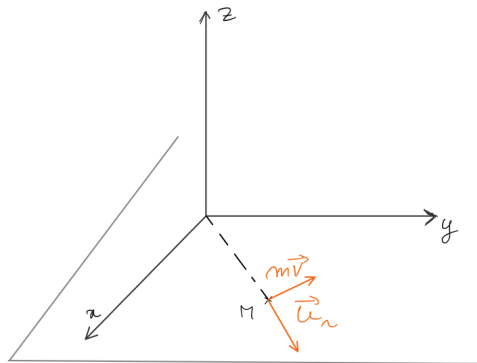


Figure 3.2: Schema de vitesse et position

Or :  $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z$ , donc le moment cinétique est à tout instant normal au plan  $\overrightarrow{OM}; m\vec{v}$ . Si on se place en coordonnées cylindro-polaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{L}_0 &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \\ &= r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \\ &= r^2\dot{\theta}\vec{u}_r \wedge m\vec{u}_\theta \\ &= mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z \\ \Rightarrow mr^2\dot{\theta} &= \text{cste} \\ \Rightarrow r^2\dot{\theta} &= \text{cste} = l \end{aligned}$$

**Intéprétation : Loi des aires**

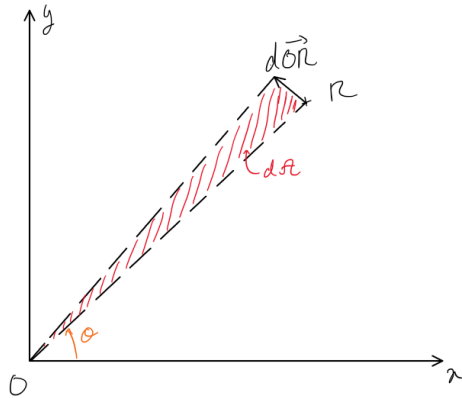


Figure 3.3: Schema de l'aire balayée

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\|$$

$$\text{Or } \vec{v} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} \Rightarrow d\overrightarrow{OM} = \vec{v}dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\mathcal{A} &= \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}dt\| \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \|r\vec{u}_r \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)\| dt \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\| \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{L}_0\| \\ &= \frac{l}{2} \\ \Rightarrow \boxed{\Delta\mathcal{A} = \frac{l}{2}\Delta t} \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que l'aire balayée est constante pour un temps donné, c'est la deuxième loi de Kepler : la loi des aires.

### 3.2.2 Conservation de l'énergie mécanique

La force est conservative, on a donc :

$$\begin{aligned}
 E_m &= E_c + E_p = \text{cste} \\
 \Rightarrow E_m &= \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) \\
 \text{Or } \vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\
 \Rightarrow v^2 &= \vec{v} \cdot \vec{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \\
 \text{Or } r^2\dot{\theta} &= \text{cste} = l \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{r^2} \\
 \Rightarrow E_m &= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}) + E_p(r) \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{mc^2}{r^2} + E_p(r)
 \end{aligned}$$

On définit une énergie potentielle effective comme la partie de  $E_m$  ne dépendant que de  $r$

$$\begin{aligned}
 E_{peff} &= \frac{1}{2}\frac{ml^2}{r^2} + E_p(r) \\
 \Rightarrow E_m &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)
 \end{aligned}$$

### 3.2.3 Discussion graphique

On a donc, dans le cas d'un champ de force centrale newtonien :

$$E_{peff} = \frac{k}{r} + \frac{ml^2}{2r^2}$$

**1er cas : si  $k > 0$ .**

On a :

$$\begin{cases} E_{peff} \geq 0 \\ E_c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow E_m \geq 0$$

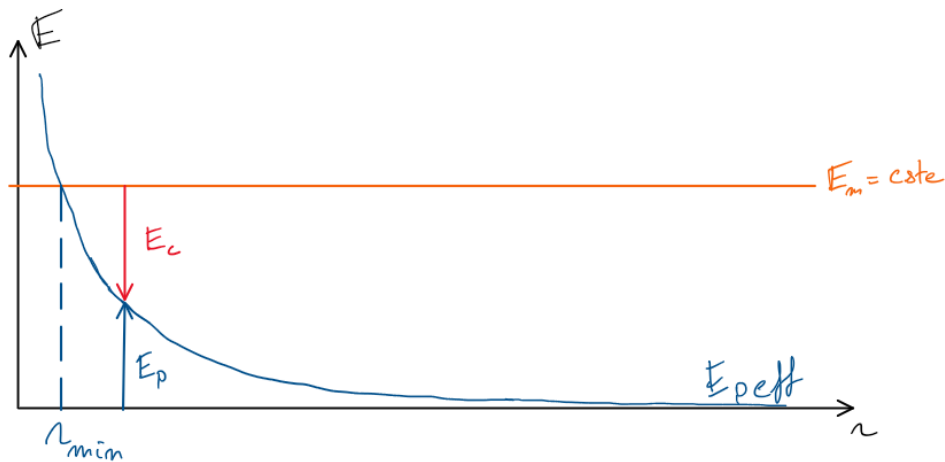


Figure 3.4: Représentation graphique du cas 1

Indépendamment des conditions initiales, on a un mouvement qui n'est pas borné :  $r \in [r_{min}; \infty]$ . On parle d'un état de diffusion.



2eme cas :  $k < 0$

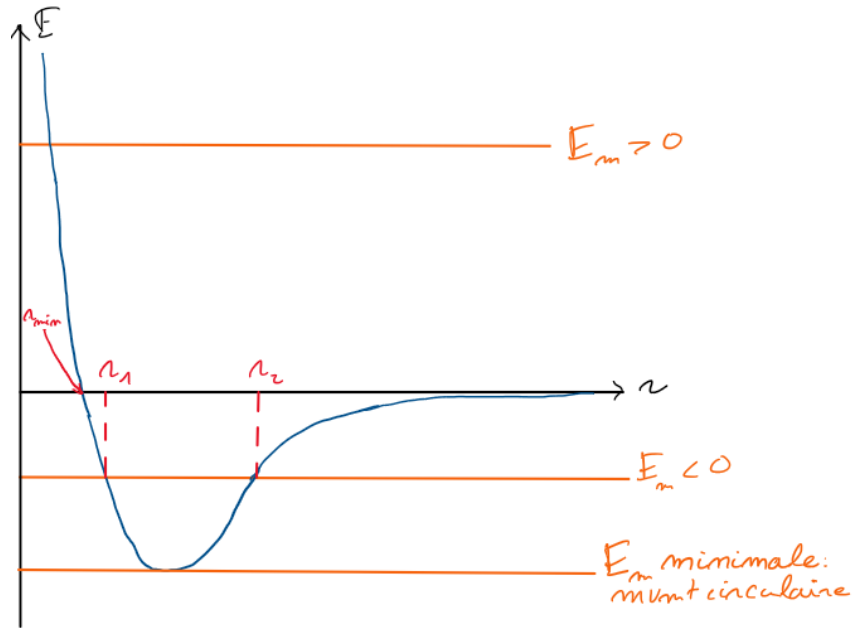


Figure 3.5: Représentation graphique du cas 2

Si  $E_m \geq 0$  Le mouvement est toujours non borné.  $r \in [r_{\min}; \infty]$ , on retrouve l'état de diffusion.

Si  $E_m < 0$  Si  $E_m < 0$ , le mouvement est borné,  $r \in [r_1; r_2]$ , on est dans un état lié.

**Corollary 3.2.1** (Calcul de  $r_1$  et  $r_2$ ).

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{k}{r} + \frac{ml^2}{2r^2} = \text{cste}$$

Or pour  $r = r_1$  ou  $r = r_2$ , on a  $\dot{r} = 0$

$$E = \frac{k}{r} + \frac{ml^2}{2r^2}$$

$$2Er^2 - 2kr - ml^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4k^2 + 8Eml^2$$

$$\Rightarrow (r_1; r_2) = \left( \frac{k - \sqrt{k^2 + 2Eml^2}}{2E}; \frac{k + \sqrt{k^2 + 2Eml^2}}{2E} \right)$$

### 3.3 Mouvement dans un champ de force centrale attractive

#### 3.3.1 Formule de Binet

**Theorem 3.3.1** (Formule de Binet). On étudie un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans un champ de force central. On a alors :

$$\vec{a} = -l^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{u}_r, u = \frac{1}{r}$$

**Proof.** On rappelle que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \\ \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta \end{cases}$$

Or on a  $r^2 \dot{\theta} = l = \text{cste}$ .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{d}{dt} (r^2 - \dot{\theta}) = 0 \\ &\Rightarrow 2r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} = 0 \\ &\Rightarrow r (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) = 0 \\ &\Rightarrow 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r \end{aligned}$$

On pose  $u = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{u}$ . On cherche à calculer  $\dot{r}$  et  $\ddot{r}$ .

Calcul de  $\dot{r}$  :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u} \right) \\ &= \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d}{d\theta} \frac{1}{u} \\ &= \dot{\theta} \left( -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \end{aligned}$$

Or  $r^2 \dot{\theta} = l \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{r^2} = lu^2$

$$\begin{aligned} &= lu^2 \left( -\frac{1}{u^2} \frac{d^2 u}{d\theta} \right) \\ &= -l \frac{du}{d\theta} \end{aligned}$$

Calcul de  $\ddot{r}$  :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \dot{r} \\ &= \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left( -l \frac{du}{d\theta} \right) \\ &= lu^2 - l \frac{d^2 u}{d\theta^2} \\ \ddot{r} &= -l^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \end{aligned}$$

D'où on a donc :

$$\vec{a} = -l^2 u^2 \left[ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] \vec{u}_r$$

⊛

### 3.3.2 Trajectoires

On rappelle que dans un référentiel  $(Rg)$  galiléen, pour une force centrale newtonienne, on a :

$$m \vec{a} = F(r) \vec{u}_r, F(r) = \frac{k}{r^2}$$

D'où par projection sur  $\vec{u}_r$ , on a :

$$-l^2 u^2 \left[ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] m = ku^2$$

$$\begin{aligned}
-l^2 u^2 \left[ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] m &= k u^2 \\
\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{k}{m l^2}
\end{aligned}$$

On résoud l'équation différentielle :

Solution homogène :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u_h}{d\theta^2} + u_h &= 0 \\
\Rightarrow u_h &= A \cos(\theta(t) - \theta_0)
\end{aligned}$$

Solution particulière :  $\frac{d^2 u_p}{d\theta^2} = 0$

$$\Rightarrow u_p = -\frac{k}{m l^2}$$

Solution générale

$$: u(\theta) = u_h + u_p = A \cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{m l^2}$$

Or  $r = \frac{1}{u}$ , d'où :

$$r(\theta) = \frac{-\frac{m l^2}{k}}{1 - \frac{A m l^2}{k} \cos(\theta - \theta_0)}$$

Or la formule générale d'un conique en coordonnées polaires est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

1. Si  $e = 0$ , la trajectoire est circulaire
2. Si  $e \in [0; 1]$ , la trajectoire est une ellipse.
3. Si  $e = 1$ , la trajectoire est une parabole de foyer  $O$
4. Si  $e > 1$  la trajectoire est hyperbolique

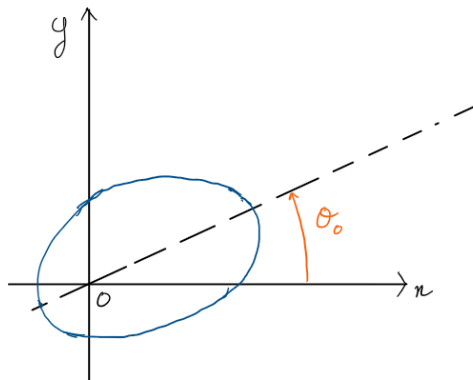


Figure 3.6: Représentation d'une trajectoire elliptique. On peut toujours prendre  $\theta_0 = 0$

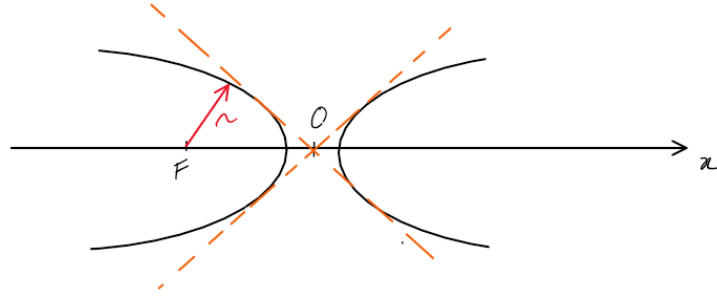


Figure 3.7: Représentation d'une trajectoire hyperbolique

**Definition 3.3.1** (Axes d'une ellipse). On appelle  $a = OA$  le demi grand axe de l'ellipse,  $b = OB$  le demi petit axe de l'ellipse. Les deux sont liés par la formule :  $p = \frac{b^2}{a}$ .

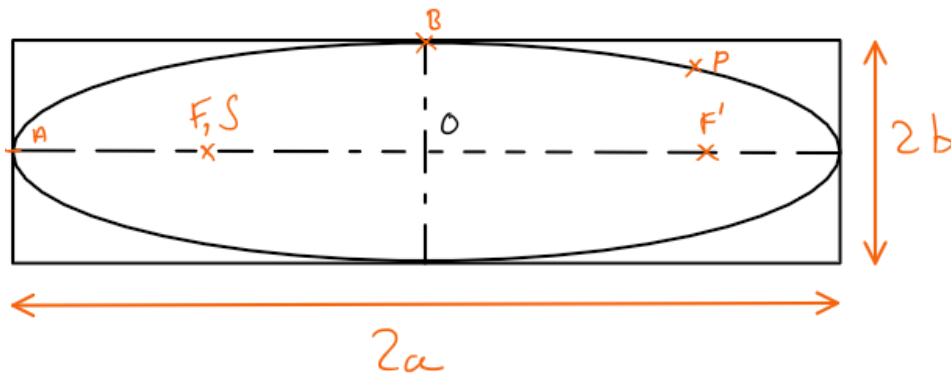


Figure 3.8: Caractéristiques d'une ellipse

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

**Corollary 3.3.1** (Distances maximales et minimales). On a donc :

1. La distance maximale, appelée apoastre (aphélie autour du soleil) :  $r_{\max} = \frac{p}{1-e}$
2. La distance minimale, appelée périastre (périhélie autour du soleil) :  $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$

### 3.3.3 Vitesse aérolaire, troisième loi de Kepler

**Theorem 3.3.2** (Troisième loi de Kepler). Pour un objet en orbite elliptique autour d'un astre de période  $T$  et de demi grand axe  $a$ , on a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

**Proof.** On rappelle que la vitesse aéroloire  $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{l}{2}$  est constante et que l'aire d'une ellipse est  $\pi ab$ .

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t} &= \frac{l}{2} \\ \Rightarrow \frac{\pi ab}{T} &= \frac{l}{2} \\ \Rightarrow \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2} &= \frac{l^4}{4}\end{aligned}$$

Or  $p = \frac{b^2}{a} = -\frac{ml^2}{k} = \frac{l^2}{GM}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow c^2 &= \frac{GMb^2}{a} \\ \Rightarrow \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2} &= \frac{GMb^2}{4a} \\ \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2} \quad \square\end{aligned}$$

⊛