Info

Maxime Muller

April 8, 2025

Contents

Chapter 1

Calculabilité

1.1 Fonctions recursives primitives

Definition 1.1.1 (But). Définir les fonctions "calculables" :

- Machine de Turing
- λ-calcul
- fonction récursive
- fonction que je peux calculer en python

These de Church-Turing : tous ces moyens sont équivalents ce sont les fonctions calculables

Example (Exemples :).

$$\begin{cases} add: & \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} \\ & (x;y) \longmapsto x+y \text{ est d'arité 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Succ: & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto x+1 \text{ est d'arité 2} \end{cases}$$

...

Definition 1.1.2 (Fonctions récursives primitives). On note FPR_k les fonctions $\in FPR$ et d'arité k
L'ensemble des fonctions récursives primitives (p,r) noté FPR est le plus petit de fonctions d'arité $n \geq 1$ tq :

$$\begin{cases} C_0: & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & x \mapsto 0 \in FPR \end{cases}$$

$$\begin{cases} Succ: & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & x \mapsto x+1 \in FPR \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_i^n: & \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \\ & (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \in FPR \end{cases}$$

Composition si $f_1 \in FPR_k, \dots, f_n \in FPR_k$ et $g \in FPR_k$, alors :

$$\begin{cases} h: & \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \\ & x_1, \dots, x_n \mapsto g(f_1((x_1, \dots, x_k)), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k)) \end{cases}$$

On a : $h \in FPR_k$
Recursion : si $f \in FPR_n$ et $g \in FPR_{n+2}$, alors on définit :

$$\begin{cases} h: & \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N} \\ & x_1, \dots, x_n, y \mapsto \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow y = 0 \\ g(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n, y-1), y) \Leftrightarrow y \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Corollary 1.1.1 (Condition). Soit $g_1, g_2, P \in FPR$ On cherche f tq :

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x), siP(x) = 0 \\ g_2(x) \end{cases}$$

Definition 1.1.3 (Ensemble primitif récursif). Soit $E \subset \mathbb{N}^k$. On dir que E est p.r. si :

$$\exists f \in FPR_k \text{ t.q. } \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}^k f(x_1, \dots, x_k) = 0 \Leftrightarrow x_1, \dots, x_k \in E$$

On a :

$$f(x) = (1 \dot{-} P(x))g_1(x) + (1 \dot{-} (1 \dot{-} P(x)))g_2(x)$$

La vérification est laissée en exercice.

Corollary 1.1.2 (Propriété). Si $g_1, g_2 \in FPR_k$ et E est un ensemble p.r., alors :

$$f : x_1, \dots, x_k \mapsto \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_k) \Leftrightarrow x_1, \dots, x_k \in E \\ g_2(x_1, \dots, x_k) \text{ sinon} \end{cases}$$

Corollary 1.1.3 (Prop). Si $E \subset \mathbb{N}^k$ et $F \subset \mathbb{N}^k$ sont p.r, alors $E \cap F$ est p.r.

On note $x_1, \dots, x_k = \underline{x}$

Proof. $E \wedge F$ sont p.r., donc $\exists F_1 \wedge F_2$ t.q. :

$$\begin{cases} F_1(\underline{x}) \neq 0 \Leftrightarrow \underline{x} \notin E \\ F_2(\underline{x}) \neq 0 \Leftrightarrow \underline{x} \notin F \\ F_1 = F_2 = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

faire par somme ⊛

Corollary 1.1.4 (Union). Si E et F sont pr, alors $E \cup F$ est pr.

Proof. mul □ ⊛

Corollary 1.1.5 (Privé). Si $E \subset \mathbb{N}^k$ est pr, alors $\mathbb{N}^k \setminus E$ est pr

Proof. sous entre 1 et P ⊛

Corollary 1.1.6 (Produit cartésion). Si $E \subset \mathbb{N}_k, F \subset \mathbb{N}_l$ pr, alors $E \times F \subset \mathbb{N}^{k+l}$ pr

Proof. somme □ ⊛