Probabilités.

Maxime Muller

May 27, 2025

Chapter 1

Sommes de variables aléatoires

1.1 Sommes de variables aléatoires

Definition 1.1.1 (Variable aléatoire). Une variable aléatoire X définie sur l'univers Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Definition 1.1.2 (Produit avec un scalaire). Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et a un réel. On peut définir une variable aléatoire Y telle que :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = aX(\omega)$$

On note, $Y = aX$

Definition 1.1.3 (Sommes de variables aléatoires). Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. On peut définir Z sur Ω tel que :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

Z est appelée **somme des variables aléatoires X et Y**. On note $Z = X + Y$.

1.2 Espérance et variance d'une somme de variables aléatoires

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X définie sur $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ et on note $x_1, \dots, x_s$ l'ensemble des valeurs prises par X avec s et r des entiers naturels non nuls.

1.2.1 Espérance de la somme

Lemma 1.2.1 (Espérance). On a :

$$E(X) = \sum_{j=1}^{r} X(\omega_j)P(\omega_j)$$

Corollary 1.2.1 (Linéarité de l'espérance). Soient X et Y deux variables aléatoires, soit a un réel. On a :

$$E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$$

1.2.2 Variance de la somme

Corollary 1.2.2 (Multiplication par une scalaire). Soit X une variable aléatoire définie sur Ω de variance $V(X)$. Soit a un réel. On a :

$$V(aX) = a^2V(X)$$

Definition 1.2.1 (Indépendance). Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires à valeurs dans $E_1, \dots, E_n \subset \Omega$. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes lorsque :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, P(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} (P(X_i = x_i))$$

Corollary 1.2.3 (Variance de la somme). Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

1.3 Applications

1.3.1 Applications à la loi binomiale

Definition 1.3.1 (Distribution identique). Deux variavles sont dites **identiquement distribuées** lorsqu'elles suivent la même loi de probabilité.

Corollary 1.3.1 (loi Binomiale). Toute variable aléatoire peut s'écrire comme la somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquements distribuées.

Corollary 1.3.2 (Propriétés de la loi de Bernoulli). Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètres n et p, alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

1.3.2 Echantillons de n variables aléatoires identiques et indépendantes

On considère un entier naturel non nul n et $X_1; \dots; X_n$ n variables aléatoires définies sur Ω supposées indépendantes et identiquement distribuées. On note S_n la somme des variables aléatoires ($S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$) et M_n leur moyenne arithmétique ($M_n = \frac{1}{n}S_n$).

Corollary 1.3.3 (Espérance et Variance de la somme).

$$\forall k \in 1; \dots; n, E(S_n) = nE(X_k), V(S_n) = nV(X_k), \sigma(X_k) = \sqrt{n}\sigma(X_k)$$

Corollary 1.3.4 (Espérance et Variance de la moyenne).

$$\forall k \in 1; \dots; n, E(M_n) = E(X_k), V(M_n) = \frac{1}{n}V(X_k), \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X_k)$$

Chapter 2

Loi des grands nombres

2.1 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

2.1.1 L'inégalité de Markov

Definition 2.1.1 (Variable aléatoire positive ou nulle)**.** Une variable aléatoire est dite *positive ou nulle* dans un univers Ω, lorsque toutes les valeurs prises par celles-ci sont des réels positifs ou nuls

Theorem 2.1.1 (L'inégalité de Markov)**.** Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérance $E(X)$. Alors, pour tout réel a strictement positif, $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$. Cette inégalité est appelée *Inégalité de Markov.*

2.1.2 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Theorem 2.1.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Alors, pour tout réel a strictement positif, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$. Cette inégalité est appelée *Bienaymé-Tchebychev*

Corollary 2.1.1 (Propriété)**.** On peut réécrire l'inégalité sous la forme suivante :

$$P(|X - E(X)| < a) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}$$

2.2 Loi des grands nombres

2.2.1 L'inégalité de concentration

Theorem 2.2.1 (L'inégalité de concentration)**.** Soit X une variable aléatoire. On pose M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X, $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ où les variables X_i sont indépendantes et de même loi que X.

Alors, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}$$

Cette inégalité est appelée *inégalité de concentration.*

2.2.2 Loi faible des grands nombres

Theorem 2.2.2 (Loi faible des grands nombres)**.** Soit (X_n) un échantillon d'une variable aléatoire. On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors, pour tout réel a strictement positif, on a :

$$\lim_{n\to\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$$