

Physique théorique : Mécanique, L. Landau et E. Lifchitz

Maxime Muller

May 24, 2025

Abstract

Ceci sont mes notes prises sur le livre : Physique Théorique : Mécanique écrit par L. Landau et E. Lifchitz.

Contents

1	Equations du mouvement	2
1.1	Cordonnées généralisées	2
1.2	Le principe de moindre action	3
1.3	Le principe de relativité de Galilée	4

Chapter 1

Equations du mouvement

Lecture 1: Session 1

1.1 Cordonnées généralisées

21 Mai 11:30

Definition 1.1.1 (Point matériel). Un point matériel (ou particule) désigne un corps dont on peut négliger les dimensions lors de la description de son mouvement.

Example (Exemples). Les planètes sont donc des points matériels lorsqu'on étudie leur mouvement par rapport au soleil, mais pas lorsqu'on étudie leur mouvement de rotation diurne.

Definition 1.1.2 (Position). La position d'un point dans l'espace est donnée par son rayon-vecteur \vec{r} dont les composantes coïncident avec ses coordonnées cartésiennes x, y, z .

Definition 1.1.3 (La vitesse). La vitesse d'un point matériel est la dérivée de \vec{r} par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}$$

Definition 1.1.4 (Accélération). La dérivée seconde de la position est l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}$$

Notation. On note la dérivée par rapport au temps d'une grandeur au moyen d'un point sur la lettre. Les dérivées nièmes sont notées avec n points sur la lettre :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} r = \dot{r} \\ \frac{d^2}{dt^2} r = \ddot{r} \end{cases}$$

Definition 1.1.5 (Degrés de libertés). Le nombre de grandeurs nécessaires pour déterminer de façon univoque la position d'un système est appelée *degrés de libertés*. Dans le cas d'un système constitué de N points matériels se déplaçant dans l'espace, le degré de liberté est $3N$, par exemple.

Definition 1.1.6 (Coordonnées et vitesses généralisées). s grandeurs quelconques q_1, q_2, \dots, q_s caractérisant totalement la position d'un système à s degrés de libertés sont appelées *coordonnées généralisées* d'un système.

Leur dérivées $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ sont appelées *vitesse généralisées* du système.

Notation. Pour simplifier les écritures, on note q l'ensemble des coordonnées généralisées et \dot{q} l'ensemble des vitesses généralisées.

Theorem 1.1.1 (Prédiction du système). Il ne suffit pas de connaître les coordonnées générales du système pour pouvoir déterminer "l'état mécanique" du système à un instant donné, car celles-ci ne permettent pas de prévoir la position du système à l'instant suivant.

Cependant, l'expérience montre que la donnée simultanée des coordonnées et des vitesses permet de déterminer complètement l'état du système et permet donc de prédire, en principe, son mouvement futur.

Les relations qui lient les accélérations aux coordonnées et aux vitesses sont appelées *équations du mouvement*. Ce sont des équations différentielles du second ordre dont l'intégration permet, en principe, de déterminer $q(t)$ et donc la trajectoire.

1.2 Le principe de moindre action

Theorem 1.2.1 (principe de moindre action). La formule la plus générale de la loi du mouvement des systèmes mécaniques est fournie par le *principe de moindre action* (ou *principe de Hamilton*). Selon ce principe, tout système mécanique est caractérisé par une fonction définie :

$$L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = L(q, \dot{q}, t)$$

Si aux instants $t = t_1$ et $t = t_2$, le système occupe des positions déterminées $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$ respectivement, alors, entre ces positions, le système se meut de la façon telle que :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.1)$$

prenne la plus petite valeur possible. La fonction L est appelée *fonction de Lagrange* du système et l'intégrale [Equation 1.1](#) est appelée *l'action*.

On cherche donc les équations qui permettent de minimiser l'intégrale [Equation 1.1](#). Pour simplifier les calculs, on étudie le cas avec un seul degré de liberté, de sorte à ce que la position soit décrite par une unique fonction $q(t)$.

Soit $q = q(t)$ la fonction pour laquelle S est minimale. Cela signifie que S croît lorsque l'on remplace $q(t)$ par une fonction quelconque :

$$q(t) + \delta q(t) \quad (1.2)$$

où $\delta q(t)$ est une fonction petite sur l'intervalle t_1, t_2 appelée variation de la fonction $q(t)$. Puisque l'on connaît les positions du système à $t = t_1$ et $t = t_2$, on a :

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (1.3)$$

Le changement dans la valeur de S lorsqu'on remplace q par $q + \delta q$ est décrit par :

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

La condition nécessaire du minimum de S est que l'ensemble des termes du développement en série de la différence est que l'ensemble des termes en δq s'annulent. On peut donc réécrire le principe d'Hamilton comme suit :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (1.4)$$

Soit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = 0$$

On peut faire une intégration par parties en utilisant le fait que $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$. On a :

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

En utilisant, [Equation 1.3](#), on remarque que le premier terme est nul. Le reste de l'intégrale doit être nul pour toute valeur de δq . Ceci est le cas seulement lorsque l'autre membres sous le signe somme s'annule également. On a donc :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.5)$$

S'il y a s degrés de libertés, chacune des fonctions $q_i(t)$ doit varier indépendamment. Nous obtenons alors s équations de la forme :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (1.6)$$

C'est en résolvant ces équations différentielles, appelées *équations de Lagrange*, que l'on peut minimiser S .

Corollary 1.2.1 (Additivité de la fonction Lagrange). Soit un système mécanique de fonction Lagrange L , composé de deux parties : A et B , dont chacune, étant fermée, aura pour fonction de Lagrange respectivement : L_A et L_B . Lorsque leurs interactions tendent à disparaître, on a :

$$\lim L = L_A + L_B \quad (1.7)$$

Remark (Translation de l'action dans le temps). Considérons deux fonctions $L'(q, \dot{q}, t)$ et $L(q, \dot{q}, t)$, ne différant que l'une de l'autre par une dérivée totale par rapport au temps d'une fonction quelconque $f(q, t)$:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (1.8)$$

On calcule alors S' :

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) dt \\ &= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1) \end{aligned}$$

Les actions diffèrent l'une de l'autre d'une constante. C'est à dire que la condition $\delta S' = 0$ coïncide avec la condition $\delta S = 0$ et donc la forme des équations du mouvement reste inchangée.

De cette façon, la fonction de Lagrange est définie n'est définie qu'à la dérivée totale près d'une fonction des coordonnées et du temps.

Lecture 2: Session 2

1.3 Le principe de relativité de Galilée

24 Mai 10:00

Definition 1.3.1 (Système de référence). Pour étudier les phénomènes mécaniques, il faut choisir un *un système de référence*. Un système de référence est dit galiléen si l'espace est homogène et isotrope et que le temps est uniforme.

Theorem 1.3.1 (Principe d'inertie). Étudions une particule se déplaçant librement dans un référentiel galiléen. Dans un référentiel galiléen, le temps et l'espace sont uniformes, donc L ne dépend ni de \vec{r} ni de t . De plus, l'espace est aussi isotrope, d'où L ne dépend pas de la direction de la vitesse, d'où :

$$L = L(v^2) \quad (1.9)$$

Corollary 1.3.1 (Principe d'inertie). On a alors :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v} = \text{cste.}$$

Mais $L = L(v^2)$, donc on en déduit que $v = \text{cste}$.

Donc dans un référentiel galiléen, tout mouvement libre s'effectue avec une vitesse constante : c'est le *principe d'inertie*.