Ordinaux et l’hydre de Lerne

Maxime Muller

May 24, 2025

Contents

0.1 Introduction aux ordinaux

Definition 0.1.1 (Ensemble)**.** Un ensemble est une collection d'éléments non ordonnée et non redondante.

Lemma 0.1.1 (Axiome 1)**.** On dispose de l'ensemble vide $\emptyset$.

Lemma 0.1.2 (Axiome 2)**.** Si on dispose d'un objet a, alors $\{a\}$ existe.

Lemma 0.1.3 (Axiome 3)**.** Si $A, B, C, \ldots$ sont des ensembles, alors $A \cup B \cup C \cup \ldots$ est un ensemble.

Corollary 0.1.1 (Construction des entiers.)**.** Question : Est-il possible de construire les entiers?

- 0 sera représenté par $\emptyset$
- 1 sera représenté par $\{0\} = \{\emptyset\}$
- On réprésente alors 2 par $\{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- Dans le cas général, on définit n par : $n = \{1, \ldots, n-1\} = (n-1) \cup \{n-1\}$.

Definition 0.1.2 (Sup)**.** Soit X un ensemble de nombres ($X = \{0, 2, 7\}$) et je veux créer une fonction sup qui à X m'associe le plus grand nombre de X.

$$\sup X = \bigcup_{a \in X} a$$

Definition 0.1.3 (Infini)**.** On cherche $\sup\{0, \ldots, n, \ldots\}$.

$$\begin{aligned} \sup\{0, \ldots\} &= 0 \cup 1 \cup \ldots \\ &= \{0, 0, 1, 0, 1, 2, \ldots\} \\ &= \{0, 1, \ldots\} \\ &= \omega \end{aligned}$$

On a ainsi :

1. $0, 1, \ldots, n$ les entiers
2. $.^+$ la fonction qui à n associe son successeur
3. ω le supérieur de tous les entiers
4. $\omega^+ = 0, 1, \ldots, n, \ldots, \omega$ donc $\omega^+ \neq \omega$

Definition 0.1.4 (Comparaison). Soient x et y des ordinaux.

> **Notation.** Si x appartient à y, on note $x < y$

> **Notation.** Si x est inclus dans y, on note $x \leq y$

Corollary 0.1.2 (Propriétés). Pour tout n un ordinal on a :

$$\begin{cases} n < \omega \\ n < n^+ \end{cases}$$

Notamment, on a :

$$\omega < \omega^+ < \omega^{++}$$

Corollary 0.1.3 (Transitivité). On a :

$$x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$$

Definition 0.1.5 (Ordinal). x est un ordinal, si:

$$y < x \Rightarrow y \leq x$$

$$y < x \wedge z < x \Rightarrow \begin{cases} y < z \\ \text{ou} \\ y = z \\ \text{ou} \\ y > z \end{cases}$$

Lemma 0.1.4 (Axiome de fondation). Soit x_0 un ensemble, $x_1 < x_0$, $x_2 < x_1$..., alors :

$$\exists n, \nexists x_{n+1}$$

Theorem 0.1.1 (Minimum). Soit x un ordinal, $\tilde{x} \leq x, \tilde{x} \neq \emptyset$ alors :

$$\exists y < \tilde{x} \text{ t.q. } \forall z < \tilde{x}, y \leq z$$

Proof. laissée en exercice au lecteur ⊛

Theorem 0.1.2 (Egalité). Soit x, y des ordinaux :

$$x \leq y, y \geq x \Rightarrow x = y$$

Theorem 0.1.3 (thm). Soient x, y des ordinaux, alors :

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x < y \end{cases}$$

Proof. Laissée en exercice au lecteur ⊛

Notation. On note :

$$\text{"Soit x un ordinal"} \Leftrightarrow \text{"Soit } x \in \mathrm{On}\text{"}$$

et toutes les notations que l'on peut en découler.

Theorem 0.1.4 (Construction des ordinaux)**.** Soit $x \in \mathrm{On}^*$, alors l'une exactement des deux choses est vraies :

- $\exists y \in \mathrm{On}, x = y^+$
- $x = \sup_{a<x} a$

Proof. Laissée en exercice au lecteur $\square$. ⊛

Theorem 0.1.5 (BIG theorem)**.**

$$(a, b) \in \mathrm{On}^2 \Rightarrow \begin{cases} a \leq b \\ \text{ ou} \\ b \leq a \end{cases}$$

Proof. Laissée en exercice au lecteur $\square$. ⊛

Theorem 0.1.6 (Le sup)**.**

$$a \in \mathrm{On} \Rightarrow a^+ \in \mathrm{On}$$
$$X \subset \mathrm{On} \Rightarrow \sup X \in \mathrm{On}$$

Proof. Laissée en exercice au lecteur $\square$. ⊛