# Cours Parimaths su 17 mai 2025, théorie de l'information

Maxime Muller

May 17, 2025

# Contents

# Chapter 1

# Théorie de l'information

## 1.1 Probabilités

**Definition 1.1.1** (L'univers)**.** L'univers, $\Omega$ est un ensemble fini ou dénombrable non vide

**Definition 1.1.2** (Une probabilité)**.** Une probabilité sur $\Omega$ est une fonction, $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, 2 à 2 disjoints, $P(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

**Definition 1.1.3** (Variable aléatoire)**.** Soit E un ensemble. Une variable aléatoire à valeurs dans E est : $X : \Omega \to E$

**Notation.** Pour $x \in E$, on note :

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$$

$$P(X = x) = P((X = x))$$

**Definition 1.1.4** (Sommes de variable aléatoires)**.** Soit $X, Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $E$ et $F$. $X$ et $Y$ sont... voir le cours du manuel de maths

**Remark** (Indépendances)**.** Soit $X_1, \ldots, X_{n+1}$ des variables aléatoires. Elles sont indépendantes ssi $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et $(X_1, \ldots, X_n)$ sont indépendantes

**Definition 1.1.5** (Espérance)**.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle positive. L'espérance de $X$ est :

$$E(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} P(X = x)x \in [0, \inf]$$

**Lemma 1.1.1** (Inégalité de Markov)**.** Soit $X$ une VAR positive d'espérance finie. Soit $a > 0$.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

**Proof.** Soit $Y$ une variable aléatoire telle que : $Y(\omega) = \begin{cases} a \Leftrightarrow X(\omega) \geq a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$$\begin{aligned} Y &\leq X \\ E(Y) &\leq E(X) \\ E(Y) &= aP(X \geq a) + 0 \\ aP(X \geq a) &\leq E(X) \end{aligned}$$

⊛

**Lemma 1.1.2** (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit $X$ une VAR positive de variance finie. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$P(|X - E(X) \geq \varepsilon|) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

**Lemma 1.1.3** (Loi faibe des grands nombres). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des VAR positives de variance finies, indépendantes et de même loi. Alors, $\forall \varepsilon \gg 0$,

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_i)|) \to 0(n \to \inf)$$

**Proof.** Laissée en exercice au lecteur ⊛

**Definition 1.1.6** (Convexité). Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. $f$ est convexe sur $I$ ssi :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

**Theorem 1.1.1** (Inégalité de jensen). Soit $I$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $x_1, \ldots, x_n \in I^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ t.q. $\sum \lambda_i = 1$ Alors :

$$f(\sum \lambda_i x_i) \leq \sum \lambda_i f(x_i)$$

**Proof.** Laissée en exercice au lecteur. ⊛

**Lemma 1.1.4** (Inégalité sur l'espérance). Soit $X$ à valeurs dans $I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe telles que $X$ et $f(X)$ sont d'espérance finie.

$$E(f(X)) \geq f(E(X))$$

**Proof.** Laissée en exercice au lecteur. ⊛

## 1.2 Theorie de l'information

### 1.2.1 Entropie

**Definition 1.2.1** (Entropie). Soit $\mathcal{X}$ fini telle que $|\mathcal{X}| \geq 2$, $p : X \to [0, 1]$ une distribution probabiliste. L'entropie de $p$ est :

$$H(p) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log(p(x))$$

**Theorem 1.2.1** (Inégalité de Gibbs)**.** Soit $p, q : \mathcal{X} \to [0, 1]$ une distribution de probabilités.

$$H(p) \leq -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log((x))$$

avec égalité ssi $p = q$

**Proof.** Laissée en exercice au lecteur. ⊛

**Lemma 1.2.1** (Proposition)**.** Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des VAR à valeurs dans $\mathcal{X}$ Alors :

$$H(X_1, \dots, X_n) \leq \sum_{i=1} H(X_i)$$

avec égalité ssi les $X_i$ sont indépendants

**Proof.** Laissée en exercice au lecteur. ⊛

**Theorem 1.2.2** (1er théorème de Shannon)**.** Soit $p : \Xi \to [0, 1]$ une distribution de probabilités. On note $D = |\Xi|$. On note $\log = \log_D$. Soit $R \in [0, 1]$. Si $R$

**Proof.** Laissée en exercice au lecteur. ⊛