Analyse

Maxime Muller

May 13, 2025

Contents

Chapter 1

Primitives et équations differentielles

1.1 Equations differentielles de type : $y' = f$

Definition 1.1.1 (Primitive)**.** Soit :

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) \end{aligned}$$

F est une primitive de f ssi $F'(x) = f(x)$. On note $F' = f$

Theorem 1.1.1 (Primitive d'une fonction continue)**.** Si f est continue, alors l'équation $y' = f$ admet au moins une solution.

Theorem 1.1.2 (Unicité de la primitive)**.** Deux primitives d'une même fonction sont égales à une constante près.

Proof. Soient F_1 et F_2, deux primitives de f. On a : $F_1' = f$ et $F_2' = f$. D'ou, par différence de fonctions dérivables, $F_1 - F_2$ est dérivable.
$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ D'ou on a : $F_1 - F_2 = a, a \in \mathbb{R}$ ⊛

Corollary 1.1.1 (Propriété : unicité de la solution)**.** Si $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ et $F(x_0) = y_0$, alors on a :

$$\exists! F : x \mapsto F(x), F' = f$$

Proof. Supposons : $\exists(F;G) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ t.q. $\begin{cases} F' = G' = f \\ F(x_0) = G(x_0) = y_0 \\ F \neq G \end{cases}$

Donc, d'après Theorem 1.1.2 $\exists a \in \mathbb{R}^*, F(x) = G(x) + a$

$$\begin{aligned} F(x_0) = G(x_0) &\Leftrightarrow y_0 = y_0 + a \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ absurde!} \end{aligned}$$

Donc $F = G$ ⊛

1.2 Recherche de primitives

Pour identifier une primitive de f on peut :

1. Reconnaitre la dérivée d'une fonction de réference
2. Adapter éventuellement le coefficient

3. Reconnaitre une des formules suivantes :

Fonction reconnue	Primitive
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u' \cdot v' \circ u$	$v \circ u$

Table 1.1: Formules de primitives

Corollary 1.2.1 (Propriétés de la primitive).

- Si F est une primitve de f, alors aF est une primitive de af
- Si F et G sont des primitives de f et g respectivement, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$

Example (Exemples).

- $f_1(x) = \frac{7x}{x^2+1} \Rightarrow F_1(x) = \frac{7}{2}\ln|x^2+1|$
- $f_2(x) = 2x(x^2+3) \Rightarrow F_2(x) = \frac{1}{2}(x^2+3)^2$
- $f_3(x) = \cos x \sin^3 x \Rightarrow F_3(x) = \frac{1}{4}\sin^4(x)$
- $f_4(x) = x^3\sqrt{x} = x^{\frac{7}{2}}, \Rightarrow F_4(x) = \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9}x^4\sqrt{x}$

1.3 Equations differentielles de la forme $y' = ay + f$ ou $y' = ay + f$

1.3.1 Equation de la forme $y' = ay$

L'équation différentielle $y' = ay$ est une equation différentielle du premier ordre linéaire et homogène à coefficient constant. Cette équation (E_0) s'écrit également souvent $y' - ay = 0$

Corollary 1.3.1 (Propriétés). Les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$\lambda e^{ax}, C \in \mathbb{R}$$

Si on ajoute la condition initiale $y(x_0) = y_0$, on a une solution unique.

Corollary 1.3.2 (Propriété). Si (E_0) a deux solutions y_1 et y_2 : $\forall k \in \mathbb{R}$ ky_1 est solution et $y_1 + y_2$ est solution.

1.3.2 Equation de la forme $y' = ay + b$

L'équation différentielle $y' = ay + b$ est appelée équation differentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant avec second membre constant. Elle s'écrit également $y' - ay = b$.

Corollary 1.3.3 (Propriétés). Les solutions sont de la forme :

$$y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$$

Example (Exemple). Résoudre l'équation différentielle $(E) \Leftrightarrow -2y' = 7y + 6$.

On a : $(E) \Leftrightarrow y' = -\frac{7}{2}y - 3$. On reconnait une équation de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{7}{2}$ et $b = -3$. $\frac{b}{a} = \frac{6}{7}$. Les solutions sont donc de la forme $y(x) = \lambda e^{-\frac{7}{2}x} + \frac{6}{7}, \lambda \in \mathbb{R}$

1.4 Equation $y' = ay + f$

L'équation différentielle $y' = ay + f$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, et f un fonction est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant avec second membre.

Corollary 1.4.1 (Solutions Particulières). Si φ est une solution particulière de cette équation, alors y est une solution de l'équation si et seulement si $y - \varphi$ est solution de l'équation homogène : $y' - ay = 0$

Chapter 2

Intégration

2.1 Intégrale et aire

2.1.1 Cas d'une fonction positive sur un intervalle donné.

Definition 2.1.1 (Intégrale)**.** Soit $f \in C^0([a;b], \mathbb{R}^+)$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f notée $\int_a^b dx$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, (Ox) et les droites déquation $x = a$, $x = b$.

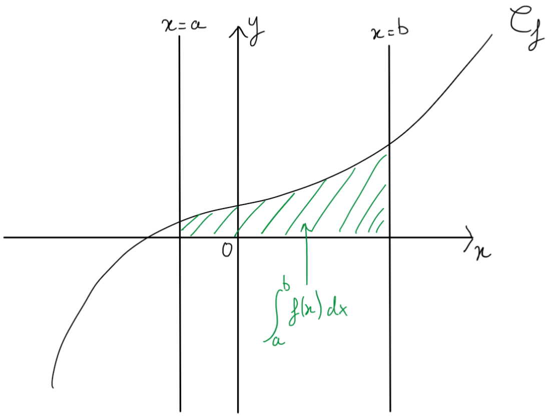

Figure 2.1: Défintion de l'intégrale

Remark (Unités)**.** L'aire du domaine est exprimée en unités d'aire $(u.a)$ égale à l'aire du parallelogramme engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

- Si le repère est orthogonal, le parallelogramme est un rectangle.
- Si le repère est orthonormé, le parallelogramme est un carré.

Example (Exemples)**.** $I_1 = \int_0^1 x dx$ On reconnait un triangle rectangle de base 1 et de hauteur 1. $I_1 = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

$I_2 = \int_1^2 2x + 1 dx$ On reconnait un parallelogramme rectangle. $I_2 = \frac{(3+5)1}{2} = 4$

Remark (Variable muette). La variable d'intégration est muette :

$$\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(u)du = \int_b^a f(t)dt \dots$$

Corollary 2.1.1 (Propriétés). Soit $f, g \in C^0([a;b], \mathbb{R}^+)$, soit $c \in [a;b]$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Corollary 2.1.2 (Relation de Chasles).

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \int_c^b f(x)dx.$$

Corollary 2.1.3 (Valeur moyenne). La valeur moyenne μ de f entre a et b est la valeur tel que l'integrale de f est égale au rectangle de hauteur μ.

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_b^a f(x)dx$$

Corollary 2.1.4 (Linéarité et Ordre). .

- $\int_a^b \lambda f(x) + g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Pour l'ordre, il n'y a pas d'équivalence.

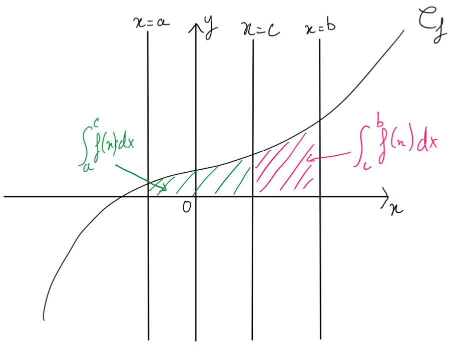

Figure 2.2: La relation de Chasles

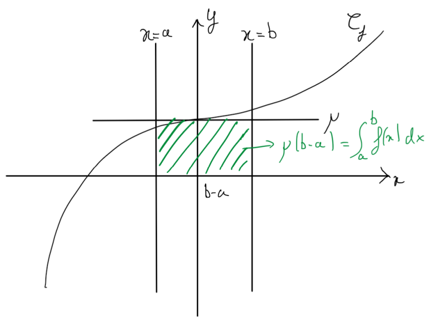

Figure 2.3: μ, la valeur moyenne d'une fonction

2.1.2 Cas d'une fonction négative sur un intervalle donné

Definition 2.1.2 (Intégrale d'une fonction négative)**.** Soit $f \in C^0([a;b], \mathbb{R}^-)$.
L'intégrale de f entre a et b est l'opposé de l'aire géométrique du domaine délimité par, $\mathcal{C}_f$, (Ox), $x = a$ et $x = b$. C'est donc une aire algébrique et non géométrique.

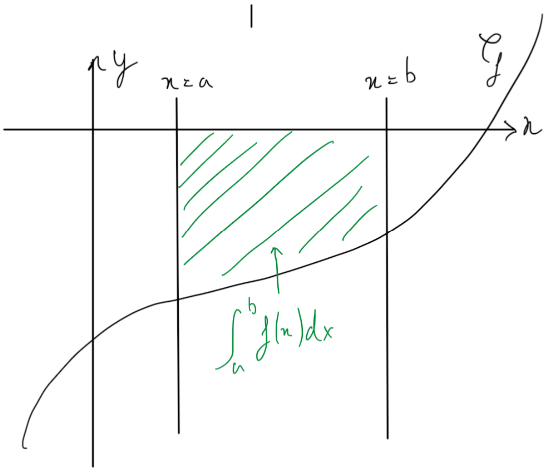

Figure 2.4: Intégrale d'une fonction négative

Corollary 2.1.5 (Propriétés)**.** Les propriétés sont les mêmes que pour les fonctions négatives, voir Corollary 2.1.1.

2.1.3 Cas d'une fonction de signe quelconque

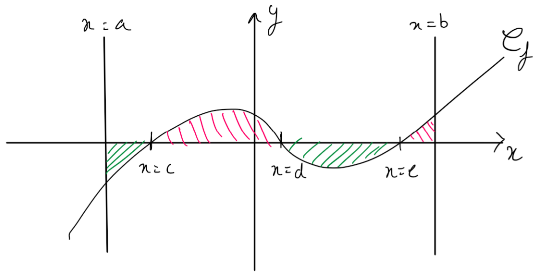

Figure 2.5: Décomposition d'une fonction sur des intervalles ou le signe est monotne

Definition 2.1.3 (Integrale d'une fonction de signe quelconque)**.** Soit $f \in C^0([a;b], \mathbb{R})$, pour définir l'intégrale de f entre a et b on utilise Chasles pour décomposer f sur des intervalles où f est de signe constant :

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^d f dx + \int_d^e f dx + \int_e^b f dx$$

Corollary 2.1.6 (Propriétés)**.** On a les mêmes propriétés que sur les fonctions de signe constant (voir Corollary 2.1.1).

Corollary 2.1.7 (Simplification).

$$\begin{aligned}\int_a^a f(x)dx &= 0\\ \int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx\end{aligned}$$

Proof.

$$0=\int_a^a f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx\,\square$$

⊛

Corollary 2.1.8 (Fonctions périodiques). Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, t.q. $f(x+T)=f(x)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+\lambda T}^{b+\lambda T} f(x)dx$$

Corollary 2.1.9 (Fonctions paires). Soit $f \in C^0, f(x)=f(-x)$.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

Corollary 2.1.10 (Fonctions impaires). Soit $f \in C^0$ t.q. $f(x)=-f(-x)$

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0$$

Corollary 2.1.11 (Fonctions bornées). Soit $f \in C^0 \Rightarrow \exists (M;m) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [a;b] m \leq f(x) \leq M$.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \quad m \leq \mu \leq M\\ &\Rightarrow \quad (b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M\end{aligned}$$

Remark (Intégrale d'une fonction constante). Soit $k \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b kdx=k(b-a)$$

2.2 Primitive d'une fonction

Theorem 2.2.1 (Théorème fondamentale de l'analyse).

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$$

2.3 Intégrales et primitives

Theorem 2.3.1 (Théorème fondamentale). Soit $f \in C^0(I \subset \mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $a \in I$. $F \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$.

Proof. Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R}^+)$, f croissante. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $F : x \mapsto \int_a^x f(x)dx$.
Montrons que $F'(x) = f(x)$.
Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)dx$$

On peut donc l'encadrer avec deux rectangles, $hf(x)$ et $hf(x+h)$. D'où :

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

On fait tendre h vers 0. D'après le théorème des gendarmes, il existe bien une limite pour $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ et : $\lim_{h \to 0^+}(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}) = f(x)$. On montre le même résultat pour $h \in \mathbb{R}_-^*$. On peut donc conclure :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x) \square$$

⊛

Remark (Activité).

- Si $h \in \mathbb{R}_0^-$, rien ne change.
- Le théorème des gendarmes démontre aussi <u>l'existence de la limite</u>.
- On a bien $\int_a^a f(x)dx = 0$

Corollary 2.3.1 (Existence de la primitive). Si $f \in C^0$, f admet des primitives

Corollary 2.3.2 (Calcul d'intégrales). Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Notation.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$