

# Electricité

Maxime Muller

May 30, 2025

### **Abstract**

Ceci est une transcription des cours donné par Xavier Ovido au club Phythème sur l'Electricité.

# Contents

<b>1</b>	<b>Bobine et dipole RL</b>	<b>2</b>
1.1	La bobine . . . . .	2
1.2	Le dipôle RL . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Oscillation libre dans un circuit RLC</b>	<b>5</b>
2.1	Décharge oscillante d'un condensateur dans une bobine idéale . . . . .	5
2.2	Décharge dans un résistor . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé (RSF)</b>	<b>12</b>
3.1	Notation . . . . .	12
3.2	Indépendance complexe . . . . .	13
3.3	Etude d'un circuit RLC en RSF . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Filtrage linéaire</b>	<b>20</b>
4.1	Principe du filtrage linéaire . . . . .	20
4.2	Filtre du 1er ordre . . . . .	21
4.3	Filtre du deuxième ordre . . . . .	22

# Chapter 1

## Bobine et dipole RL

### 1.1 La bobine

#### 1.1.1 Def et symbole

**Definition 1.1.1 (Bobine).** Une bobine est constituée par un enroulement d'un fil autour d'un conducteur.

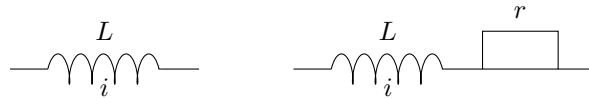
Symbole :

On a  $r$  la resistance interne de la bobine,  $r \sim \text{quelques } \Omega$

Pour une bobine idéale,  $r = 0\Omega$

On a aussi  $L$  : inductance de la bobine, il s'agit d'une grandeur positive qui ne dépend que de la géométrie de la bobine.

#### 1.1.2 Modelisation d'une bobine



On peut montrer que :

$$U_{AB} = L \frac{di}{dt} + ri$$

Le terme  $\frac{di}{dt}$  est caractéristique d'une bobine.

#### 1.1.3 Exploitation de la relation

On suppose que  $r \approx 0\Omega \Rightarrow U_{AB} = L \frac{di}{dt}$ .

1. Si  $i(t) \uparrow \Rightarrow \frac{di}{dt} > 0 \Rightarrow U_{AB} > 0$
2. Si  $i(t) \downarrow \Rightarrow \frac{di}{dt} < 0 \Rightarrow U_{AB} < 0$
3. Plus l'intensité varie rapidement dans le circuit, plus  $\|U_{AB}\|$  aux bornes de la bobine est élevée.

### 1.1.4 Puissance et énergie aux bornes d'une bobine idéale

Par définition, on a :  $p(t) = U(t) \cdot i(t)$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (1.1)$$

$$= L \frac{di}{dt} \cdot i(t) \quad (1.2)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} L i^2(t) \right] \quad (1.3)$$

$$= \frac{dE_U}{dt} \quad (1.4)$$

L'énergie emmagasinée par la bobine est donc:

$$E_U(t) = \frac{1}{2} L i^2$$

Rappel : pour un condensateur on a :  $P(t) = u_c(t) \cdot i_c(t) = u_c(t) \cdot C \frac{du_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} C u_c^2(t) \right]$ .  
La tension est continue alors que l'intensité est discontinue.

## 1.2 Le dipôle RL

à  $t = 0s$ , on ferme l'interrupteur. D'après la loi des mailles :  $\sum_k u_k E_k = 0$  le long d'une maille orientée.

$$\Rightarrow E - u_k - u_l = 0 \quad (1.5)$$

$$\Leftrightarrow E = u_r + u_l \quad (1.6)$$

$$\Leftrightarrow E = R_i(t) + L \frac{di}{dt} \quad (1.7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E}{L} \quad (1.8)$$

Or  $U_l = L \frac{di}{dt} \Rightarrow [L] = v \times s \times A^{-1}$

et  $U_r = R i \Rightarrow [R] = V \cdot A^{-1}$

D'où on a :  $\left[ \frac{L}{R} \right] = s$  On pose :  $\tau = \frac{L}{R}$  On a donc :  $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$

$$1. \text{ SSH : } \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \Rightarrow i_H(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$2. \text{ SP : } \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow i_P(t) = \frac{E\tau}{L} = \frac{E}{R}$$

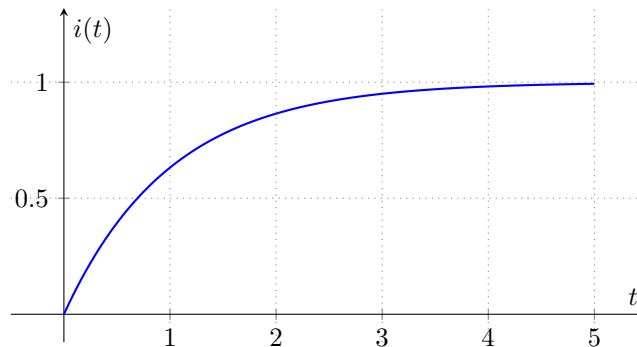
$$3. \text{ SG : } i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

D'après les CI on a :

$$i(0) = 0 \Rightarrow 0 = \lambda + \frac{E}{R} \quad (1.9)$$

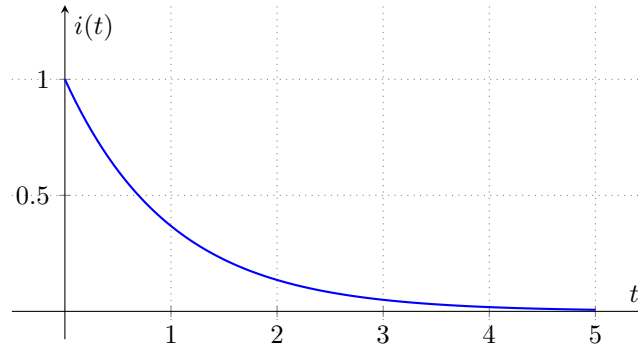
$$\Rightarrow \lambda = -\frac{E}{R} \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (1.11)$$



Que vaut alors la tension?

$$\begin{aligned}
 U_l = L \frac{di}{dt} \Rightarrow U_l &= L \frac{d}{dt} \left[ \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right] \\
 &= \frac{EL}{R} \frac{d}{dt} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \\
 &= \frac{EL}{R} \cdot \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{or } \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}) \\
 &= \frac{EL}{R} \cdot \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \\
 &= E e^{-\frac{t}{\tau}}
 \end{aligned}$$



**Corollary 1.2.1 (Remarque).**  $U_l = L \frac{di}{dt} \approx L \frac{\Delta i}{\Delta t}$  On suppose que  $i$  passe de  $1A$  à  $0A$  en  $1ms$ ,  $L \approx 1H$ .  
 $\Rightarrow U_l \approx 1 \times (\frac{0-1}{10^{-3}}) \approx -1000V$

**Corollary 1.2.2 (Bobines en série).** On prend deux bobines en série :  $L_1$  et  $L_2$  avec aux bornes des tensions  $U_1$  et  $U_2$ . On cherche la bobine  $L_{eq}$ , avec aux bornes la tension  $U$ , équivalente aux deux bobines en série. On a :  $U = U_1 + U_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$ . D'où on a :  $L_{eq} = L_1 + L_2$

**Corollary 1.2.3 (Bobines en dérivation).** On prend deux bobines en dérivation :  $L_1$  et  $L_2$  traversées par des intensités  $i_1$  et  $i_2$ . On cherche la bobine  $L_{eq}$ , traversée par une intensité  $i$ , équivalente aux deux bobines en dérivation. On a :  $U = U_1 = U_2$

$$\begin{aligned}
 i &= i_1 + i_2 \\
 \Rightarrow \frac{U}{L_{eq}} = \frac{di}{dt} &= \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{U_1}{L_1} + \frac{U_2}{L_2} = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) U \\
 \Rightarrow \frac{1}{L_{eq}} &= \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}
 \end{aligned}$$

## Chapter 2

# Oscillation libre dans un circuit RLC

## 2.1 Décharge oscillante d'un condensateur dans une bobine idéale

### 2.1.1 Expression de la tension

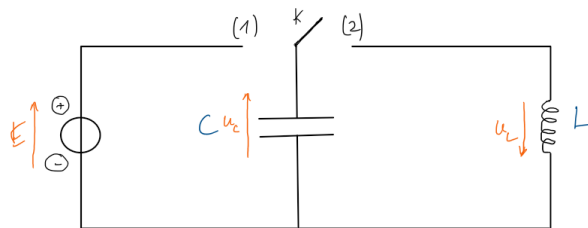


Figure 2.1: Schema de montage

A  $t = 0s$ , on a  $u_c(0) = E$  et  $i(0) = 0A$  et on bascule  $K$  en position 2.

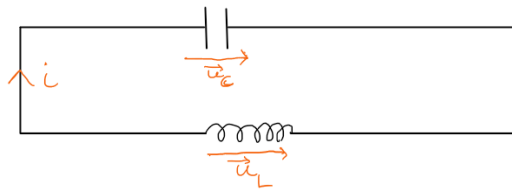


Figure 2.2: Schema du montage à  $t = 0s$

D'après la loi des mailles :

$$\begin{aligned}
 u_L + u_C &= 0 \\
 \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + u_C &= 0 \\
 \text{or } i &= C \frac{du_C}{dt} \\
 \Leftrightarrow LC \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt} u_c \right] + u_c &= 0 \\
 \text{On pose } \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\
 \Rightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c &= 0
 \end{aligned}$$

On cheche l'unité de  $[RC]$  =?

$$\begin{cases} u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow [L] = V \cdot s \cdot A^{-1} \\ i = C \frac{du_c}{dt} \Rightarrow [C] = A \cdot s \cdot V^{-1} \end{cases} \Rightarrow [LC] = s^2 \Rightarrow [\omega_0] = s^{-1}$$

**Theorem 2.1.1** (Résolution d'équations différentielles du second ordre). On considère une ED du second ordre, SSM, à coefficients constants :

$$ay'' + by' + cy = 0, a \neq 0$$

A cette ED, on associe le polynome caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

3 cas :

- Cas 1 :  $\Delta > 0$   
 $\exists, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  solutions de l'équations.

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

La solution de l'ED est :  $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ , avec  $A$  et  $B$  à déterminer.

- Cas 2 :  $\Delta = 0$   
 $\exists! r$  solution :  $r = -\frac{b}{2a}$ .  
 La solution de l'ED est :  $y = (A'x + B')e^{rx}$  avec  $A'$  et  $B'$  à déterminer.

- Cas 3 :  $\Delta < 0$   
 $\exists r_3, r_4 \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{cases} r_3 = \frac{-b-j\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ r_4 = \frac{-b+j\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases} \quad \text{avec } j^2 = -1$$

On a alors :

$$\begin{aligned} y &= A''e^{r_3 x} + B''e^{r_4 x} \\ &= \left( A'' \exp \left[ \frac{-j - \sqrt{-\Delta}}{2a} x \right] + B'' e^{\frac{-j + \sqrt{-\Delta}}{2a} x} \right) e^{-\frac{b}{2a} x} \\ &= \left( \alpha \cos \left( \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x \right) + \beta \sin \left( \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x \right) \right) e^{-\frac{b}{2a} x} \end{aligned}$$

On a :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

L'équation caractéristique est donc :

$$\begin{aligned} \Rightarrow r^2 + \omega_0^2 &= 0 \\ \Rightarrow \Delta &= -4\omega_0^2 \\ \Rightarrow r &= \pm j \frac{\sqrt{4\omega_0^2}}{2} = \pm j\omega_0 \\ \Rightarrow u_c(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ \Rightarrow u_c(t) &= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Pour trouver  $A$  et  $B$ , on utilise les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_c(0) = E \\ i(0) = C \frac{d}{dt}(u_c)(0) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
i(t) &= C[-A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t] \\
i(0) &= 0 = CB\omega_0 \Rightarrow B = 0 \\
&\text{De plus, } u_c(0) = E = A \\
&\Rightarrow u_c(t) = E \cos(\omega_0 t)
\end{aligned}$$

On sait que la période propre de l'oscillation  $T_0$  est celle t.q. :

$$\begin{aligned}
u_c(t + T_0) &= u_c(t) \\
\Rightarrow \cos(\omega_0(t + T_0)) &= \cos(t) \\
\Rightarrow \cos(\omega_0 t + \omega_0 T_0) &= \cos(t) \\
&\text{Or } \cos \text{ est } 2\pi \text{ périodique} \\
\Rightarrow \omega_0 T_0 = 2\pi \Rightarrow \omega_0 &= \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \\
&\text{Or, } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T_0} \\
\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}, &\text{ On appelle } T_0 \text{ la période propre de l'oscillateur.}
\end{aligned}$$

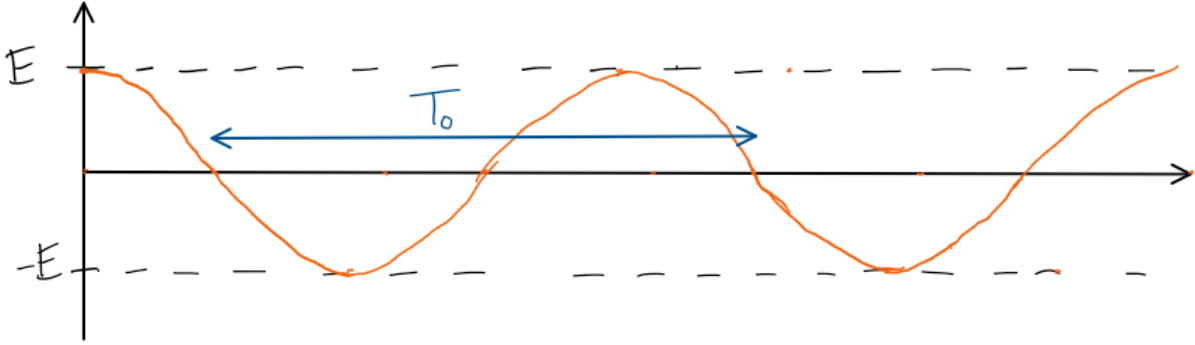


Figure 2.3: Schema de  $u_c$  ( en V ) en fonction du temps

Et pour  $i(t)$ ?

$$\begin{aligned}
i(t) &= C \frac{d}{dt} u_c(t) = C \frac{d}{dt} E \cos(\omega_0 t) \\
i(t) &= -\omega_0 C E \sin \omega_0 t \\
&= -\frac{CE}{\sqrt{LC}} \sin(\omega_0 t) \\
i(t) &= -\sqrt{\frac{C}{L}} E \sin(\omega_0 t) \\
i(t) &= -\sqrt{\frac{C}{L}} E \cos(2\pi - \omega_0 t)
\end{aligned}$$

Lorsque  $u_c(t) = 0$ ,  $i(t)$  est maximale ou minimale. On dit que  $u_c(t)$  et  $i(t)$  sont en quadrature de phase.

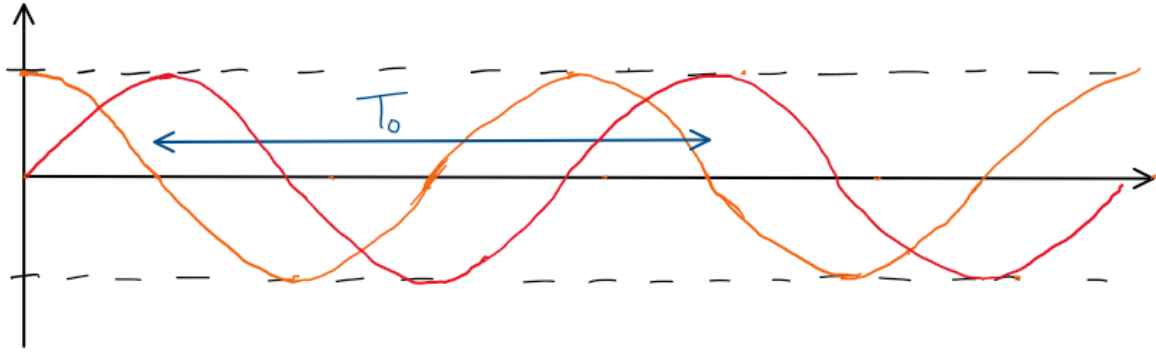


Figure 2.4: Représentation de  $u_c$  et  $i$  en fonction du temps

### 2.1.2 Approche énergétique

Pour tout instant  $t$ ,  $E_{tot}$  est la somme des énergies enmagasinées par la bobine et le condensateur.

$$\begin{aligned}
 E_{em} &= E_c + E_m \\
 &= \frac{1}{2}cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2 \\
 &\text{Or } i(t) = C \frac{d}{dt}u_c(t) \\
 \frac{d}{dt}E_{em} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2}C2u_c \frac{d}{dt}u_c + \frac{1}{2}L2i \frac{d}{dt}i \\
 &= \left[ u_c + LC \frac{d^2u_c}{dt^2} \right] \cdot i \\
 &= 0 \text{ (car le membre de gauche dans le produit est nul)} \\
 \Rightarrow E_{em} &= \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_c^2 = \text{cste}
 \end{aligned}$$

**Remark (Parallèle avec la mécanique).** On peut faire un parallèle avec les oscillateurs harmoniques en mécanique (par exemple, la masse au bout du ressort) :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x} + \frac{1}{2}kx^2$$

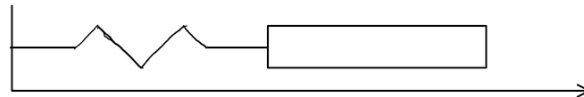


Figure 2.5: Analogie avec le ressort

## 2.2 Décharge dans un résistor

A  $t = 0$ s, on bascule l'interrupteur en position 2. On a :

$$\begin{aligned}
 u_c(0) &= E \\
 i(0) &= 0
 \end{aligned}$$

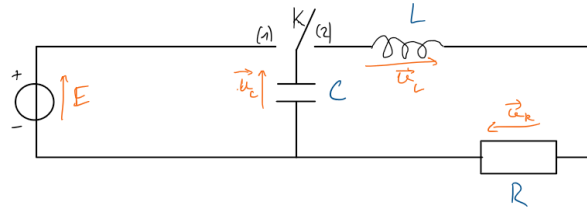


Figure 2.6: Schema du montage

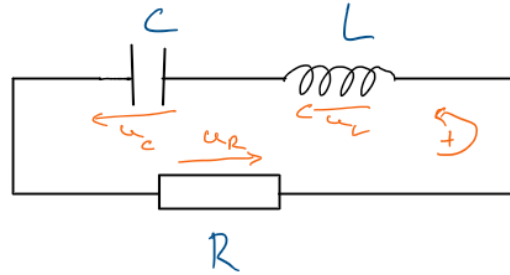


Figure 2.7: Schema du montage à  $t = 0s$

D'après la loi des mailles :

$$\begin{aligned}
 u_L + u_R + u_C &= 0 \\
 \Leftrightarrow u_C + Ri + L \frac{di}{dt} &= 0 \\
 \text{Or : } u_C = \frac{q}{C} \text{ et } i &= \frac{dq}{dt} \Rightarrow i = C \frac{du_C}{dt} \\
 \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0
 \end{aligned}$$

**Notation.** A partir de maintenant on notera :

$$u = u_C \Rightarrow \dot{u} = \frac{du_C}{dt} \wedge \ddot{u} = \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

On a :

$$\ddot{u} + \frac{R}{L} \dot{u} + \frac{1}{LC} u = 0$$

**Notation.** On pose :  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  et  $2\lambda = \frac{R}{L}$ .

D'où :

$$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

On associe l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned}
 r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 &= 0 \\
 \Rightarrow \Delta &= 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)
 \end{aligned}$$

**Remark (Régime critique).** Si  $\Delta = 0$  alors, on a le régime critique :  $\lambda = \omega_0$ .

Alors :  $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . C'est la valeur de la résistance pour laquelle la décharge est la plus rapide.

On traite alors le cas où :  $\Delta < 0$ .

$$\begin{aligned} r &= \frac{-2\lambda \pm 2j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}{2} \\ r &= -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \end{aligned}$$

On a un régime pseudo périodique :

$$u(t) = A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right)e^{-\lambda t} + B \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right)e^{-\lambda t}$$

On trouve des valeurs des constantes inconnues en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(0) &= E \Rightarrow A = E \\ i(t) &= \frac{du}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ e^{-\lambda t} \left( E \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right) B \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right) \right) \right] \\ &= -\lambda e^{-\lambda t} \left( E \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right) B \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right) \right) \\ &\quad + e^{-\lambda t} \left( -E \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right) + B \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right) \right) \end{aligned}$$

Or :  $i(0) = 0$

$$\Rightarrow B \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} - \lambda E = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{\lambda E}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

On peut définir une pseudo période propre :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

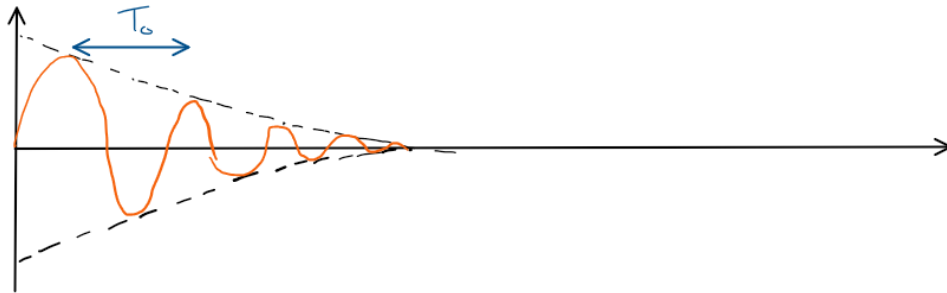


Figure 2.8: Représentation de  $u_c$  en fonction du temps

D'où on a :

$$u(t) = \left[ E \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right) + \frac{\lambda E}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right) \right]$$

### Aspect énergétique

**Definition 2.2.1** (L'énergie mécanique en électromagnétique). On définit ainsi l'énergie électro mag-

néétique du système :

$$\begin{aligned} E_{em} &= E_e + E_m \\ &= \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 \end{aligned}$$

**Corollary 2.2.1** (Variation de l'énergie électromagnétique). Dans le cas de la décharge dans un résistor, on a :

$$\frac{dE_{em}}{dt} = -Ri^2$$

Donc l'énergie du système tends vers 0.

**Proof.**

$$\begin{aligned} E_{em} &= \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 \\ \Rightarrow \dot{E}_{em} &= \frac{dE_{em}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}Cu^2 \right] + \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}Li^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}Cu\dot{u} + \frac{1}{2}L2i\dot{i} \\ &= i \left[ L\frac{di}{dt} + u \right] \\ &= i [LC\ddot{u} + u] \end{aligned}$$

Or, d'après la loi des mailles :  $LC\ddot{u} + u = -RC\dot{u} = -Ri$

$$\Rightarrow \dot{E}_{em} = -Ri^2 = -P_J < 0 \square$$

⊛

## Chapter 3

# Circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé (RSF)

### 3.1 Notation

**Definition 3.1.1** (Sinusoïdal). Une sinusoïdal est une fonction qui peut s'écrire :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Avec  $X_m$  l'amplitude,  $\omega$  la pulsation et  $\varphi$  la phase à l'origine.

**Definition 3.1.2** (La valeur moyenne et valeur efficace). La valeur moyenne d'une sinusoïdale est donnée par la formule suivante :

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = 0$$

Celle-ci étant la même pour toutes les sinusoïdals, on définit alors la valeur efficace :

$$X_{eff} = \sqrt{\langle x(t)^2 \rangle}$$

**Theorem 3.1.1** (Valeur efficace). La valeur efficace d'une sinusoïdale  $x(t)$  est :

$$X_{eff} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

**Proof.** On calcule  $X_{eff}^2$  :

$$\begin{aligned}
X_{eff}^2 &= \langle x(t)^2 \rangle \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T X_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt \\
&= \frac{X_m^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt \\
\text{Or : } \cos^2(\theta) &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\
&= \frac{X_m^2}{T} \left( \int_0^T \frac{1}{2} dt + \int_0^T \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi) dt \right) \\
\text{Or l'intégrale d'un cosinus} &\quad \text{est nulle sur sa période, d'où :} \\
X_{eff}^2 &= \frac{X_m^2}{T} \cdot \frac{T}{2} \\
&= \frac{X_m^2}{2} \\
\Rightarrow X_{eff} &= \frac{X_m}{\sqrt{2}} \quad \square
\end{aligned}$$

⊗

**Lemma 3.1.1** (Grandeur complexe associée à un régime sinusoïdal). À une grandeur réelle  $x(t) = X_m \cos \omega t + \varphi$ , on associe la grandeur complexe  $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$  avec  $j^2 = -1$  et  $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$ . On appelle  $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$  l'amplitude complexe de  $\underline{x}_t$ . On a alors :

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} X_m = |\underline{X}_m| \\ \varphi = \arg(\underline{X}_m) \end{cases}$$

**Remark (Equivalence des solutions).** Si une grandeur  $x(t)$  est solution d'une équation linéaire différentielle, alors la grandeur complexe l'est aussi.

De plus,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \underline{x}_t = j\omega \underline{x}(t) \\ \int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{x}(t) \end{cases}$$

## 3.2 Indépendance complexe

**Theorem 3.2.1** (Loi d'Ohm généralisée). Soit  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$  et  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ .

On peut alors écrire une version généralisée de la loi d'Ohm pour tous les dipôles linéaires (bobine, résistor, condensateur...) :

$$\underline{u}(t) = \underline{z} \cdot \underline{i}(t) \Leftrightarrow \underline{U}_m = \underline{Z} \cdot \underline{I}_m$$

**Corollary 3.2.1** (Expression de  $\underline{Z}$ ). On peut donc écrire :  $\underline{Z} = R + jS$  où  $R$  est la résistance du

dipôle,  $S$  est la réactance et  $|\underline{Z}| = Z$  est l'impédance du dipôle.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{U_m}{I_m} \\ &= \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= Z e^{j\varphi} \\ \Rightarrow \quad &\begin{cases} |\underline{Z}| = Z = \frac{U_m}{I_m} \\ \arg(\underline{Z}) = \varphi = \varphi_u - \varphi_i \end{cases}\end{aligned}$$

**Definition 3.2.1 (admittance).** On définit alors une admittance complexe :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

**Example (Exemples).** Pour un résistor, on a  $\underline{Z} = R$ .

Que vaut l'impédance d'une bobine?

Pour une bobine idéale, on a :  $u_L = L \frac{di}{dt}$ .

$$\begin{aligned}\Rightarrow \underline{u}_L(t) &= Lj\omega \underline{i}(t) \\ &= \underline{Z}_L \underline{i}(t) \\ \Rightarrow \underline{Z}_L &= Lj\omega \\ \Rightarrow \quad &\begin{cases} |\underline{Z}_L| = L\omega \\ \varphi = \arg \underline{Z}_L = \frac{\pi}{2} = \varphi_u - \varphi_i \end{cases}\end{aligned}$$

**Remark (Cas d'une bobine réelle).** Pour une bobine réelle, on a  $u_l(t) = L\dot{i}(t) + ri(t)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \underline{u}(t) &= (L\omega j + r)\underline{i}(t) \\ \Rightarrow \underline{Z}_l &= L\omega j + r \\ \Rightarrow |\underline{Z}_L| &= \sqrt{r^2 + L^2\omega^2}\end{aligned}$$

Or  $\omega = 2\pi f$ , donc l'impédance augmente avec la fréquence.

Que vaut l'impédance du condensateur?

Pour le condensateur idéal,

$$\begin{aligned}i(t) &= C\dot{u}(t) \\ \Rightarrow \underline{u}_l(t) &= \frac{1}{j\omega C} \underline{i}(t) \\ \Leftarrow \underline{Z}_C &= \frac{1}{j\omega C} \\ \Rightarrow \quad &\begin{cases} |\underline{Z}_C| = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

**Theorem 3.2.2 (Equivalence régime continu et RSF).** L'ensemble des théorèmes du régime continu (loi des noeuds, loi des mailles,...) est valable en RSF.

### 3.3 Etude d'un circuit RLC en RSF

**Notation.** Un Générateur de tension alternatif se note : (Voir Schema en dessous)





Figure 3.1: Notation d'un générateur de tension alternatif

On construit un circuit RLC avec un générateur de tension alternatif :

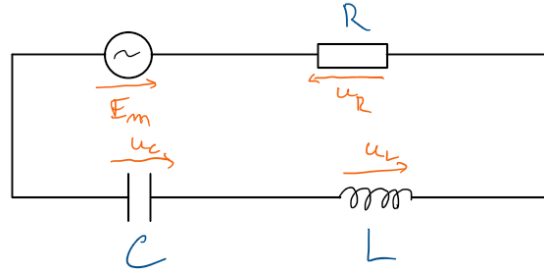


Figure 3.2: Schemadu montage

**Theorem 3.3.1** (Loi de Pouillet). Dans un circuit en série avec : un générateur de tension  $E$ , un moteur de tension  $E'$  et de résistance  $r$ , et deux résistances  $R_1$  et  $R_2$ , on a :

$$I = \frac{E - E'}{R_1 + R_2 + r}$$

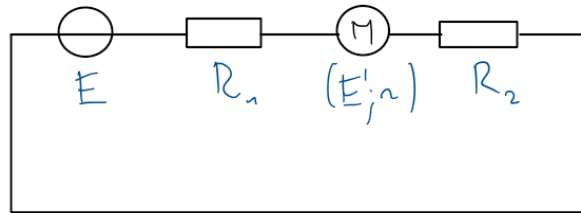


Figure 3.3: Schema de la Loi de Pouillet

Puisque les théorème du régime continu s'appliquent en RSF, on applique la loi de Pouillet :

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{E_m}{Z_R + Z_c + Z_L} \\ \Rightarrow E_m &= I_m \left( R + j \left( L\omega - \frac{1}{c\omega} \right) \right) \end{aligned}$$

### 3.3.1 Résonance en intensité aux bords d'un condensateur

D'après la relation précédente, on a :

$$I_m = |I_m| = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2}}$$

Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $I_m \rightarrow 0$  et lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $I_m \rightarrow 0$ .

Le numérateur est indépendant de la pulsation  $\omega$ , donc l'intensité ne circule que lorsque le dénominateur est minimal, ce qui est le cas pour  $L\omega_r - \frac{1}{c\omega_r} = 0$

$$\Rightarrow \omega_r^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

L'équation différentielle du circuit RLC donne (on note  $u_c(t) = u$ ) :

$$\begin{aligned} Li + Ri + u &= e(t) \\ LC\ddot{u} + RC\dot{u} + u &= e(t) \\ \Rightarrow \ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{u}{LC} &= \frac{e(t)}{LC} \\ \text{On pose : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} &= \frac{R}{L} \\ \Rightarrow Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{LC}} &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}$$

Il semble me manquer du contenu ici dans la partie sur la résonance en intensité

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2}} \\ \Rightarrow U_m &= R \cdot I_m = \frac{E}{D} \\ \text{avec } D &= \sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } Q = \frac{L\omega_0}{R} \end{aligned}$$

Il y a donc une résonance en intensité pour toute valeur de  $Q$  et la pulsation de résonance est indépendante de  $Q$

**Definition 3.3.1** (Bande passante). Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  définis par :

$$I_m(\omega = \omega_1) = I_m(\omega = \omega_2) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

et :

$$I_{m,\max} = I_m(\omega = \omega_0) = \frac{E}{R}$$

**Remark** (rem).

$$I_m = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2}}$$

**Corollary 3.3.1** (Valeurs de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ ). On cherche à calculer  $\omega_1$  et  $\omega_2$

$$\begin{aligned} I_m(\omega) &= \frac{E_m}{\sqrt{LR}} \\ \Rightarrow R\sqrt{2} &= \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2} \\ \Rightarrow 2R^2 &= R^2 + (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2 \\ \Rightarrow R^2 &= (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2 \\ \Rightarrow (L\omega - \frac{1}{c\omega}) &= \pm R \\ \Rightarrow Lc\omega^2 \pm RC\omega - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2 \text{ solutions :} \\ &\Rightarrow \omega = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4\omega_0^2}}{2} \\ &\text{or } \omega = 2\pi f \geq 0 \\ &\Rightarrow \omega_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L} + 4\omega_0^2} \\ &\text{De même :} \\ &\omega^2 - \frac{R}{L}\omega - \omega_0^2 = 0 \\ &\Rightarrow \omega = \frac{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L} + 4\omega_0^2}}{2} = 0 \\ &\Rightarrow \omega_2 = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L} + 4\omega_0^2} \end{aligned}$$

**Definition 3.3.2 (Largeur de la bande passante).** On définit la largeur de la bande passante comme suit :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

On peut en déduire une version adimensionnée :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L} \times \sqrt{LC} = \frac{R\sqrt{C}}{\sqrt{L}}$$

Or :  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$  D'où :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

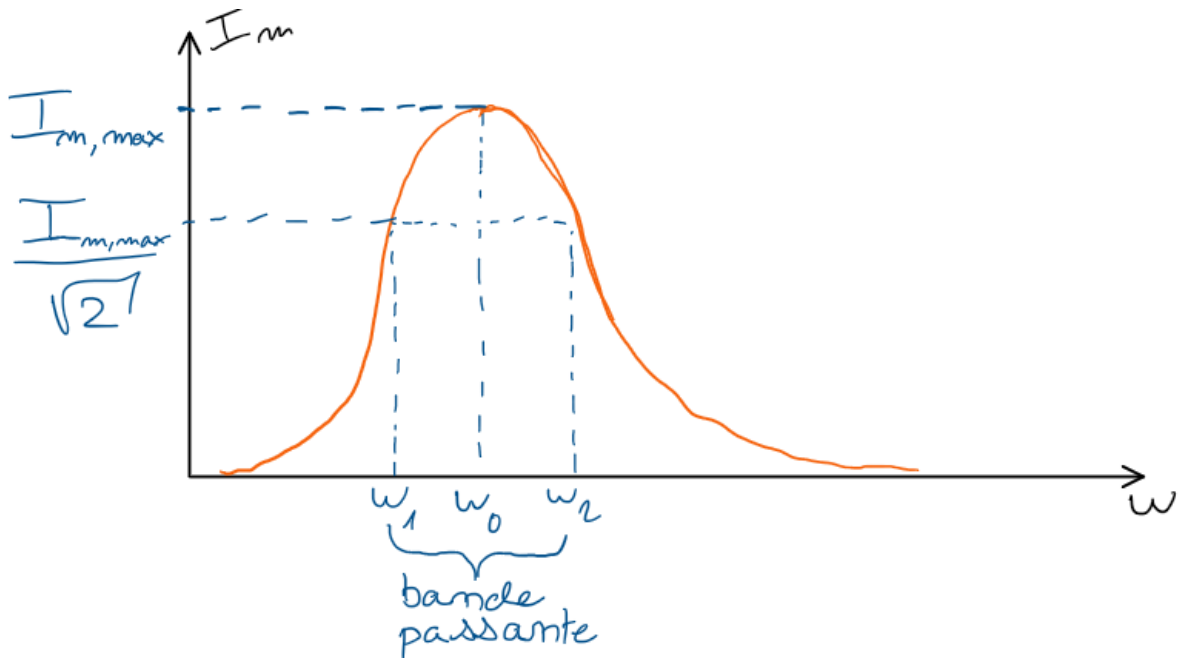


Figure 3.4: Représentation de  $I_m$  en fonction de  $\omega$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arg \underline{I_m} \\
\underline{I_m} &= \frac{E}{R + j(L\omega - \frac{1}{c\omega})} \\
\varphi &= \arg\left(\frac{E}{R + j(L\omega - \frac{1}{c\omega})}\right) \\
\varphi &= -\arg\left(R + j(L\omega - \frac{1}{c\omega})\right) \\
\phi &= -\varphi \\
\Rightarrow \tan \phi &= \tan\left(\frac{(L\omega - \frac{1}{c\omega})}{R}\right) \\
\Rightarrow \tan \varphi &= \tan \frac{\frac{1}{c\omega} - L\omega}{R} \\
\Rightarrow \varphi &\in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

**Remark** (Analogie mécanique).

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx \Rightarrow x = F_m \cos(\omega t)$$

On a le même type d'équations qu'en mécanique classique :

$$\begin{aligned}
m &\leftrightarrow L \\
\lambda &\leftrightarrow R \\
k &\leftrightarrow \frac{1}{C}
\end{aligned}$$

### 3.3.2 Résonance en tension aux bornes d'un condensateur

**Remark** (Pont diviseur de tension).

$$\begin{aligned}
u_2 &= R_2 \cdot I \\
\text{et } I &= \frac{E}{R_1 + R_2} \\
\Rightarrow u_2 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} E
\end{aligned}$$

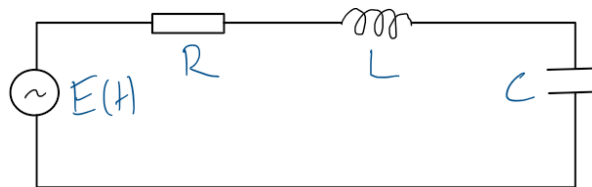


Figure 3.5: Schema du pont diviseur de tension

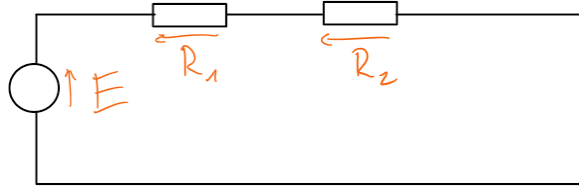


Figure 3.6: Schema du montage

On a un pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
 u_{cm} &= \frac{Z_c}{Z_R + Z_L + Z_c} E \\
 &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} E \\
 &= \frac{E}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \\
 \Rightarrow U_{cm} = |u_{cm}| &= \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \\
 U_m(\omega_0) &= E \\
 U_m(\omega \rightarrow \infty) &= 0 \\
 \text{On pose } \omega_0 \frac{1}{\sqrt{LC}}; Q &= \frac{L\omega_0}{R} \text{ et } x = \frac{\omega}{\omega_0} \\
 u_{cm} &= \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \\
 \Rightarrow u_{cm} &= \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \\
 \Rightarrow u_{cm} &= \frac{E}{D} \\
 \Rightarrow \frac{d}{dx} D^2 &= -4x(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} \\
 \Rightarrow \frac{d}{dx} D^2 = 0 &\Rightarrow 1 - x^2 = \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}
 \end{aligned}$$

On peut avoir résonance que si :

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{2Q^2} &> 0 \\
 \Rightarrow 2Q^2 &> 1 \\
 \Rightarrow Q &> \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

**Remark (Existence de la résonance).** ATTENTION : La résonance en intensité existe toujours mais la résonance en tension n'existe que pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

## Chapter 4

# Filtrage linéaire

### 4.1 Principe du filtrage linéaire

**Definition 4.1.1 (Un filtre).** 1 filtre est un quadripôle admettant une tension d'entrée et délivrant une tension de sortie.

On dit que le filtre est linéaire si :

$$\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \underline{H}(j\omega) \Rightarrow \underline{s}(t) = \underline{H}(j\omega)\underline{e}(t)$$

Où  $\underline{H}(j\omega)$  est une fraction rationnelle.

**Definition 4.1.2 (Gain).** On appelle le gain du filtre :  $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ .

On définit le gain en décibels :  $G_{db} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$ .

On définit le déphasage  $\phi(\omega)$  :

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= \arg \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{e}(\omega) \\ &= \arg(\underline{H}(j\omega)) + \arg(\underline{e}(\omega))\end{aligned}$$

On peut toujours prendre  $\arg(\underline{e}(\omega)) = 0$

**Definition 4.1.3 (Types de filtres).** On a quatres types de filtres :

1. Passe haut
2. Passe bas
3. passe bande
4. coupe bande

## 4.2 Filtre du 1er ordre

### 4.2.1 Passe bas du 1er ordre

**Exemple : circuit RC**

On cherche la fonction de transfert :

$$\begin{aligned}\underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \\ &= \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \\ &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + Rj\omega C}\end{aligned}$$

Or  $\underline{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow \infty$  quand  $\omega \rightarrow 0$ . C'est un interrupteur ouvert.

$$\Rightarrow \underline{s}(t) = \underline{e}(t)$$

Si  $\omega \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned}\underline{Z}_c &= \frac{1}{j\omega C} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \underline{s}(t) &= 0\end{aligned}$$

On a bien un filtre passe bas.  $RC$  doit être homogène à un temps. On pose  $RC = \frac{1}{\omega_0}$  Donc :

$$\begin{aligned}G(\omega) &= |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \\ \Rightarrow G_{dB} &= 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = -10 \log [1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2]\end{aligned}$$

et :

$$\phi(\omega) = -\arg[1 + j\frac{\omega}{\omega_0}] = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Si  $\omega \rightarrow 0$  :  $G_{dB} \rightarrow 0$ .

Si  $\omega \rightarrow \infty$  :  $G_{dB} \rightarrow -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Pour  $\phi(\omega)$  : Si  $\omega \rightarrow 0$  :  $\phi(\omega) \rightarrow 0$

Si  $\omega \rightarrow \infty$  :  $\phi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

**Definition 4.2.1 (Bande passante).** La bande passante à  $-3dB$  est l'ensemble des pulsations telles que :  $G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB} \geq G_{\max dB} - 3dB$ .

Dans notre cas :  $G(\omega = \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

### 4.2.2 Passe haut du premier ordre

On fait la même chose que la partie précédent mais on invertit le résistor et le condensateur.

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{s(t)}{e(t)} \\
 &= \frac{R}{R + \frac{1}{jRc\omega}} \\
 &= \frac{jRc\omega}{1 + jRc\omega} \\
 &= \frac{j(\frac{\omega}{\omega_0})}{1 + j(\frac{\omega}{\omega_0})} \\
 \Rightarrow G &= |\underline{H}(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \\
 \Rightarrow G_{dB} &= 20 \log |\underline{H}(j\omega)| \\
 &= 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) - 10 \log \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

## 4.3 Filtre du deuxième ordre

### 4.3.1 Passe bas du 2nd ordre

#### Etude asymptotique

A basse fréquence, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine est équivalente à un fil passant. A haute fréquence, on a l'opposé.

A basse fréquence  $s(t) \neq 0$  et à haute fréquence,  $s(t) = 0$ .

On cherche la fonction de transfert :

$$\underline{e}(t) = \underline{H}(j\omega)\underline{s}(t)$$

On a un pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
 \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \\
 \underline{H}(j\omega) &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + Lj\omega + \frac{1}{j\omega C}} \\
 &= \frac{1}{1 + jR\omega C - L\omega^2}
 \end{aligned}$$

On cherche la forme canonique, on pose :  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  et  $\frac{1}{Q\omega_0} = RC \Rightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} \\
 \Rightarrow G &= |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}} \\
 \Rightarrow G_{dB} &= 20 \log G = -10 \log \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2} \right]
 \end{aligned}$$

A basse fréquence :

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G_{dB} \rightarrow 0$$

A haute fréquence :

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G_{dB} \approx -10 \log \left( \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \right) \approx -40 \log \omega \Rightarrow \text{Pente de 40 décibels par décade.}$$

Pour  $\omega = \omega_0$  :  $G_{dB} = 20 \log(Q)$



---

### Coupe bande du seconde ordre

Pour  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ , on a bien  $s \neq 0$ .

$$\begin{aligned}\underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{Z}_c + \underline{Z}_L}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R} \\ &= \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \\ &= \frac{j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jCR\omega}}{1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jRC\omega}}\end{aligned}$$

On pose :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Et on trouve :

$$\frac{jQ(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})}{1 + jQ(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\Rightarrow G &= \frac{|Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})|}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} \\ \Rightarrow G_{dB} &= 20 \log G \\ &= 20 \log |Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})| - 10 \log \left[ 1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2 \right]\end{aligned}$$