Cours de mécanique

Maxime Muller

May 8, 2025

Contents

Chapter 1

Mécanique des fluides

1.1 Fluide au repos

1.1.1 Loi fondamentale de la statique des fluides

Pour un fluide au incompressible ($\rho = \text{cste}$), au repos dans un réferentiel galiléen et placé dans un champ de pensenteur uniforme, la pression ne dépend que de z. On a :

$$P(z) = P_0 + \rho g z$$

Avec :

- $P(z)$ la pression à z
- P_0 la pression à $z = 0$
- ρ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- g l'intensité du champ de pesanteur.

> **Remark** (sens de l'axe). Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le bas, alors on a $P(z) - P_0 \propto z$

1.2 Poussée d'Archimède

1.2.1 Cas d'un cylindre vertical

On considère un cylindre vertical de section S et d'hauteur h plongé dans un fluide incompressible de masse volumique ρ. On effectue le bilan des forces pressantes appliquées aux cylindres.
Cette force se décompose en trois composantes :

- Sur la face latérale, les forces pressantes s'annulent, on a : $\sum \vec{F} = \vec{0}$
- A l'altitude $z = z_1$, $\vec{F_1} = P(z_1)S \cdot \vec{k} = (P_0 + \rho g z_1)S \cdot \vec{k}$
- A l'altitude $z = z_2$, $\vec{F_2} = -P(z_2)S \cdot \vec{k} = -(P_0 + \rho g z_2)S \cdot \vec{k}$

D'après la loi de la statique des fluides, on a :

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 \quad &= P_0 - \rho g z_1 - (P_0 - \rho g z_2) \\ &= \rho g (z_2 - z_1)(\text{axe vers le haut}) \end{aligned}$$

On a donc : $\sum \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \rho g (z_2 - z_1) S \vec{k}$ D'ou :

$$\sum \vec{F} = -\rho V \vec{g} \square$$

Le cylindre est donc soumis à une force pressante exercée par le fluide qui l'entoure égale à l'opposée du poids du fluide déplacé. Cette force pressante est appelée la poussée d'Archimède.

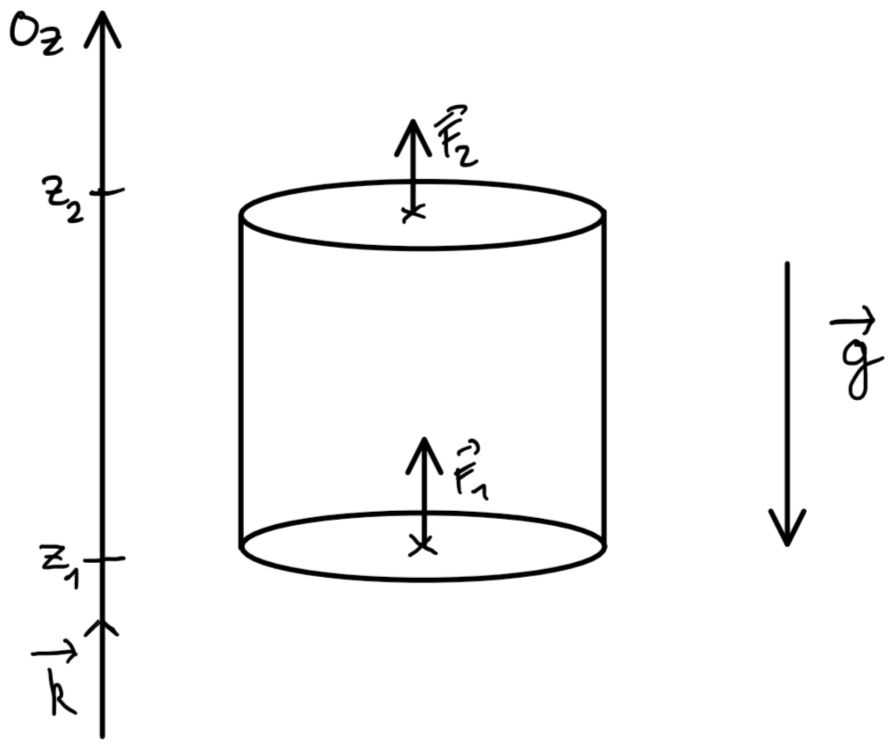

Figure 1.1: Schema de la poussée d'archimède sur un cylindre

1.2.2 Généralisation

Theorem 1.2.1 (Généralisation)**.** La résultat précédent peut être généralisé à tout corps plongé dans un fluide : c'est la poussée d'Archimède :
"Tout corps plongé dans un fluide au repos subit une force dont a valeur est égale au poids du fluide déplacé."

$$\vec{\Pi}_A = -\rho V \vec{g}$$

1.3 Description de l'écoulement d'un fluide

1.3.1 Definition et vocabulaire

Description du mouvement

Un fluide n'étant pas pas un système ponctuel, il faut se poser la question de ce que l'on étudie exactement.

Definition 1.3.1 (Description Lagrangienne du fluide)**.** Etude du fluide en étudiant l'évolution de petites parties au cours du temps.
Cela équivaut à "marquer" une "particule fluide" en utilisant un indicateur coloré :

Remark (pratique)**.** Dans la pratique, il est difficile d'identifier et donc de suivre une "particule fluide" en mouvement. Il apparait donc judicieux d'introduire une description alternative pour le mouvement.

Definition 1.3.2 (Description eulérienne du mouvement)**.** On étudie donc des champs de l'ensemble du fluide (champ de vitesse à un instant t donné par exemple). C'est la description eulérienne du fluide.

Ainsi on est amené à étudier des champs de grandeur cinématique (position, vitesse, accélération) et des champs de grandeur thermodynamiques (masse volumique, température, pression).

Definition 1.3.3 (Fluide incompressible). Un fluide est dit incompressible lorsque $\rho =$ cste sous l'action d'une pressions externe.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Dans la pratique, la compressibilité des liquides et des solides est quasi-nulle (pour l'eau, c'est 1 pour 1000). On les assimile donc généralement comme incompressibles, ce qui n'est pas vrai pour les gaz.

Definition 1.3.4 (Fluide parfait). Un fluide est dit parfait lorsque les forces de frottement au sein du fluide sont négligeables. Sa viscosité est nul. Ce n'est pas le cas de tous les fluides : par exemple le miel.

Definition 1.3.5 (Ecoulement permanent). En régime permanent, les grandeurs cinématiques et thermodynamiques ne dépendent pas du temps. Elles dépendent alors seulement de l'espace.

1.3.2 Débit volumique

Definition 1.3.6 (Débit volumique). Le débit volumique (noté D_v) est le volume du fluide V qui s'écoule par unité de temps à travers la section droite S de la conduite qui délimite le mouvement du fluide.

$$D_v = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{\Delta t} = S \cdot v$$

Proof. Le volume du fluide s'écoulant pendant Δt est :

$$V = S \cdot L$$

Où L est la distance parcourue par le fluide :

$$L = v \cdot \Delta t$$

On a par définition : $D_v = \frac{V}{\Delta t}$

$$\Rightarrow D_v = \frac{S \cdot L}{\Delta} = S \cdot v \square$$

⊛

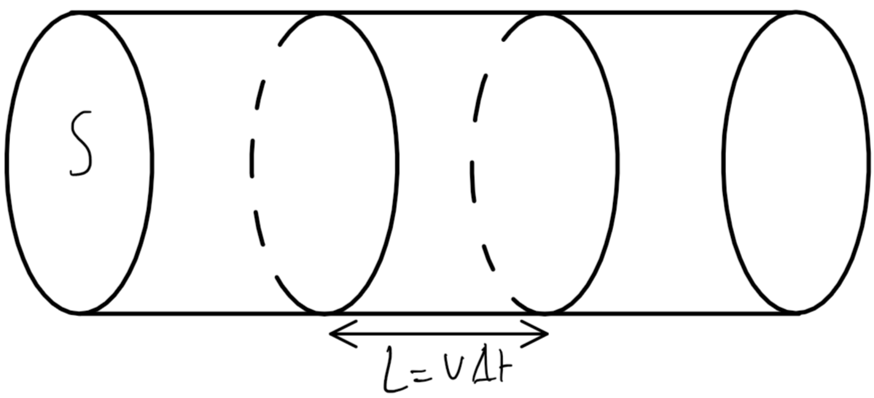

Figure 1.2: Schema du débit volumique dans une canalisation.

Conservation du débit volumique

Theorem 1.3.1 (Conservation du débit vomlumique). Le débit volumique d'un fluide incompressible, parfait, en écoulement permanent est le même à travers toute section droite d'une canalisation.

Corollary 1.3.1 (Conséquence). On a :

$$v \cdot S = \text{ cste } \Leftrightarrow v \propto \frac{1}{S}$$

1.4 Relation de Bernoulli

Definition 1.4.1 (Relation de Bernoulli). La relation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie volumique d'un écoulement parfait, permanent et incompressible. C'est l'analogue de la conservation de l'énergie mécanique en mécanique du point.

Theorem 1.4.1 (Relation de Bernoulli). Si A et B appartiennent à la mmême ligne de courrant, alors, la densité énergétique $\frac{E}{V}$ se conserve. (On prend l'axe (Oz) orienté vers le haut)

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Definition 1.4.2 (Energies du fluide). On a :

- $e_c = \frac{1}{2}\rho v^2$, la densité volumique d'énergie cinétique
- $e_z = \rho g z$, la densité volumique d'énergie cinétique
- $e_p = P$ la densité volumique du travail des forces pressantes.

Remark (Equivalence avec la statique des fluides). Si le fluide est au repos ($v = 0$), on retrouve la loi fondamentale de la statique des fluides.

1.5 Effet Venturi

On considère un fluide incompressible bafait et en écoulement. L'aire de la section droite est variable. A et B sont deux points d'une même ligne de courrant tel que $z_A = z_B$. Le débit volumique D_v étant constant, on a :$s_A \cdot v_A = s_B \cdot v_B$.
Comme $s_A > s_B$, alors $v_B > v_A$. La relation de bernoulli appliquée entre A et B donne :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Leftrightarrow P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2) < P_A$$

En conclusion, en B , la vitesse augmente et la pression diminue.

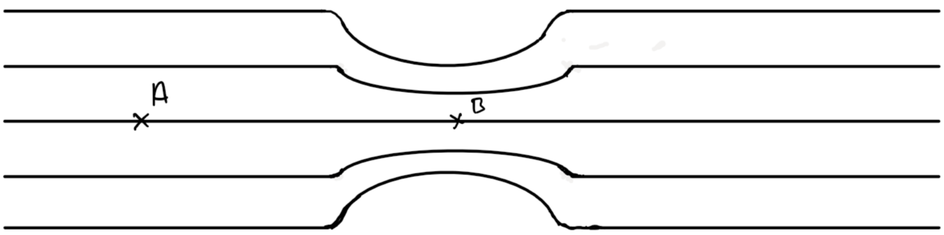

Figure 1.3: L'effet Venturi.