Mécanique classique

Maxime Muller

July 11, 2025

Contents

Chapter 1

Principes de la mécanique

1.1 Cinématique

1.1.1 Définitions

Definition 1.1.1 (Cinématique)**.** La cinématique consiste à décrire la manière dont un point matériel solide se déplace dans l'espace en fonction du temps.

Definition 1.1.2 (Réferentiel)**.** Un réferentiel est un solide de référence muni d'un repère d'espace et de temps. On utilise souvent les réferentiels suivants :

- Le réferentiel terrestre
- Le réferentiel géocentrique
- Le réferentiel héliocentrique (les axes (Ox), (Oy) et (Oz) pointent vers des étoiles fixes)

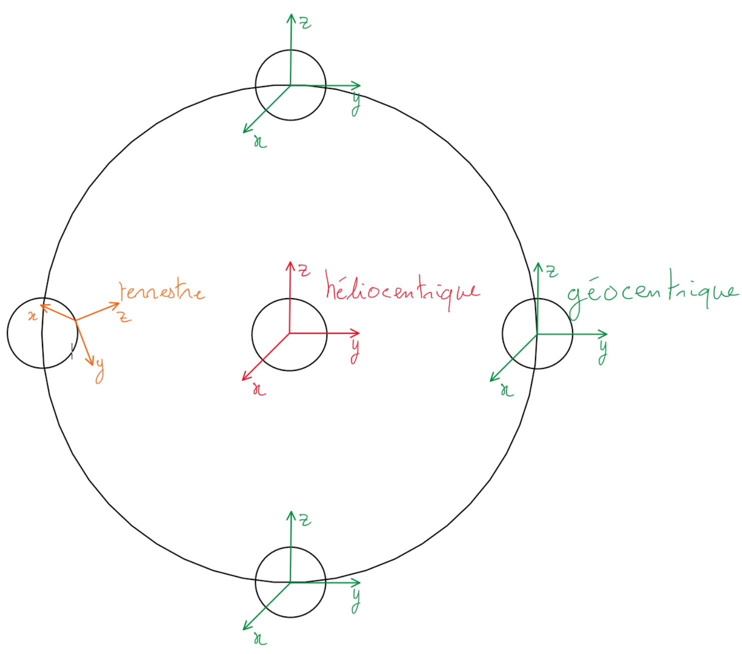

Figure 1.1: Schema des différents réferentiels habituels

Definition 1.1.3 (Système, particule et point matériel)**.** Le corps étudié est appelé le système. Si les dimensions de systèmes sont très petites par rapport à son domaine d'évolution, le système est considéré comme une particule. On assimile alors le système à un point matériel de même masse m située au centre d'inertie du système.

Definition 1.1.4 (Vecteur position $\vec{OM}$)**.** On considère un réferentiel R muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ avec O un point fixe et $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ fixes en fonction du temps. Le vecteur position est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (le syustème se trouve en M) tel que : $\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$

Definition 1.1.5 (Trajectoire)**.** La trajectoire d'un point matériel est l'ensemble des positions occupées par ce point au cours du temps.

Definition 1.1.6 (Vitesse)**.** On définit la vitesse moyenne avec la formule suivante :

$$v = \frac{d}{t}$$

Avec d la distance parcourue par le point M et t le temps de parcours. On en déduit une formule pour la vitesse instantannée :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

On fait alors tendre Δt vers 0. La vitesse instantanée est alors la dérivée du vecteur position :

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

La norme du vecteur vitesse s'exprime alors en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Corollary 1.1.1 (En coordonnées cartésiennes)**.** En coordonnées cartésiennes, on a l'expression suivante de la vitesse :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\
&= \frac{d(x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k})}{dt} \\
&= \frac{dx(t)\overrightarrow{i}}{dt} + \frac{dy(t)\overrightarrow{j}}{dt} + \frac{dz(t)\overrightarrow{k}}{dt} \\
&= \frac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy(t)}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz(t)}{dt} \\
&= v_x(t)\overrightarrow{i} + v_y(t)\overrightarrow{j} + v_z(t)\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

Definition 1.1.7 (Accélération)**.** De la même manière que la vitesse est définie comme la dérivée de la position, on peut définir l'accélération comme la dérivée de la vitesse.

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$$

Corollary 1.1.2 (L'accélération en coordonnées cartésiennes)**.** De la même manière que pour la vitesse, on peut monter que :

$$\vec{a} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

1.1.2 Les différents types de mouvement

Definition 1.1.8 (Mouvement rectiligne)**.** Le mouvement est rectiligne si la trajectoire est une droite. On distingue le mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v}$ = cste) et le mouvement rectiligne uniformément accéléré ($\vec{a}$ = cste et $\|\vec{v}\|$ augmente). On distingue aussi le mouvement rectiligne uniformément retardé: $\vec{a}$ = cste et $\|\vec{v}\|$ diminue.

Definition 1.1.9 (Mouvement circulaire)**.** Un point matériel en mouvement circulaire a pour trajectoire un cercle de centre C et de rayon r.

Corollary 1.1.3 (Cas particulier du mouvement circulaire uniforme)**.** On a $\|\vec{v}\| =$ cste. Calculons $\frac{d}{dt}(\vec{v}^2)$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = 2\vec{v}\frac{d}{dt}\vec{v} = 2\vec{v}\cdot\vec{a}$$

De plus, $\vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2 =$ cste. Donc $\frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = 0$. Conclusion :

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$$

Lorsque le mouvement est circulaire uniforme, l'accélération est constamment dirigée vers le centre de la trajectoire, on dit que l'accélération est centripète.

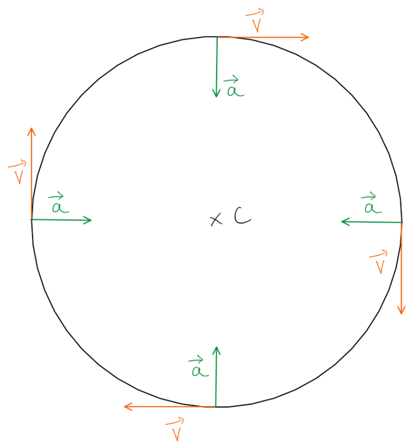

Figure 1.2: Schema du mouvement circulaire uniforme

1.2 Lois de Newton

1.2.1 Première loi de Newton : le principe d'inertie

Theorem 1.2.1 (Le principe d'inertie)**.** Dans un réferentiel galiléen, le centre d'inertie G d'un système isolé (le système ne subit aucine force) ou pseudo-isolé (la résultante des forces est nulle) est soit au repos ($\vec{v}_g = \vec{0}$) ou en mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v}_g = \overrightarrow{\text{cste}}$)

Definition 1.2.1 (Réferentiels galiléens)**.** Le principe d'inertie suppose l'existence de réferentiels galiléens. Tout réferentiel R' en translation rectiligne uniforme par rapport à un referentiel R galiléen est lui-même galiléen.

1.2.2 Deuxième loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique (PFD)

Theorem 1.2.2 (PFD)**.** Dans un réferentiel galiléen, la somme des forces extérieurs appliquée à un solide de masse m est égale au produit de la masse m par le vecteur accélération $\vec{a}$ de son centre d'inertie. Soit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_g$$

Avec, $\|\vec{F}_{ext}\|$ en N, $m$enkg et $\|\vec{a}\|$ en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Troisièmme loi de Newton : principe des action réciproques

Theorem 1.2.3 (Principe des actions réciproques)**.** Si un corps A exerce sur un corps B une force (action), alors le corps B exerce sur le corps A une force (réaction) de même direction et norme, mais de sens contraire. Soit :

$$\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$$

Chapter 2

Mouvement dans un champ uniforme indépendant du temps

2.1 Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

2.1.1 Application de la deuxième loi de Newton

On étudie le mouvement d'un projectile lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.

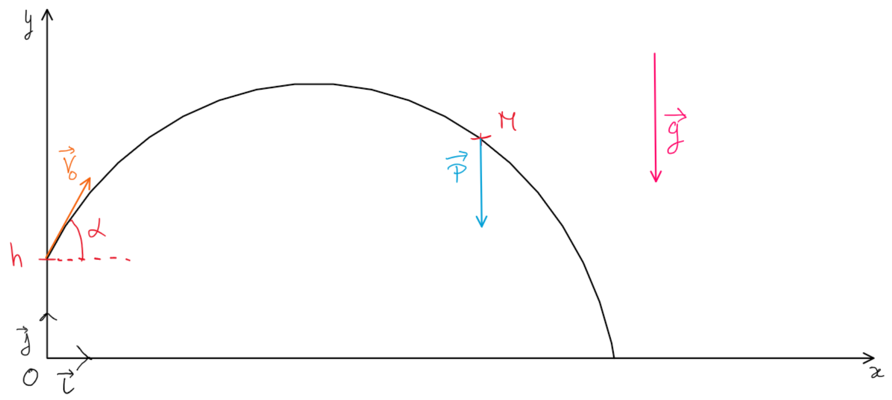

Figure 2.1: Schema de la chute libre

- Système : projectile de masse m assimilé à un point matériel
- Réferentiel : terrestre supposé galiléen
- Repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- Bilan des forces :
  - $\vec{P} = m\vec{g}$

  D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

On projette les vecteurs sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

2.1.2 Vitesse du projectile

Corollary 2.1.1 (Vitesse du projectile)**.** On a :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Proof. Comme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, $\vec{v}$ est une primitive de $\vec{a}$ par rapport au temps.

Donc $\vec{v}$ peut s'écrire : $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) = k \\ v_y(t) = -gt + k' \end{pmatrix}$ On utilise les conditions initiales, soit à $t = 0$s, on a : $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$. D'où on a :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

⊛

2.1.3 Equations horaires du mouvement

Corollary 2.1.2 (Equations horaires du mouvement)**.** On a :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t \\ y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha t + h \end{cases}$$

Proof. De même, $\vec{v} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}$, donc $\overrightarrow{OM}$ est une primitive de $\vec{v}$. On montre alors de la même manière que pour l'expression de la vitesse les expressions recherchées. ⊛

2.1.4 Equations de la trajectoire du mouvement

Corollary 2.1.3 (Equation de la trajectoire)**.** On a pour équation de la trajectoire :

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha x + h$$

Proof. On isole une expression de t :

$$t(x) = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

On remplace alors cette expression dans l'expression de $y(t)$ pour exprimer $y(x)$:

$$y(t) = -\frac{1}{2} g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + h$$

On trouve donc bien l'expression de la trajectoire cherchée. ⊛

2.1.5 Aspect Energétique

Le système n'est soumis qu'au poids qui est une force conservative. Le théorème de l'énergie mécanique entre un point A et un point M quelconque nous donne alors : $E_m(A) = E_m(M)$, d'où:

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2} m v_A^2 + mgz_A = \tfrac{1}{2} m v_M^2 + mgz_M \\ \Leftrightarrow \quad & v_A^2 + 2gz_A = v_M^2 + mgz_M \\ \Leftrightarrow \quad & v_M = \sqrt{v_A^2 + 2g(z_A - z_M)} \end{aligned}$$

2.2 Mouvement d'une particule chargée dans un champ electrostatique uniforme

2.2.1 Application du PFD et accélération de la particule

On étudie le mouvement d'une particule M chargée, de masse m et de charge q, pénétrant dans un condensateur plan, de champ électrostatique $\vec{E}$, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{i}$ orthogonal à $\vec{E}$. De plus, $U = V_A - V_B > 0$ et $\vec{E} = \frac{U}{D}\vec{j}$.

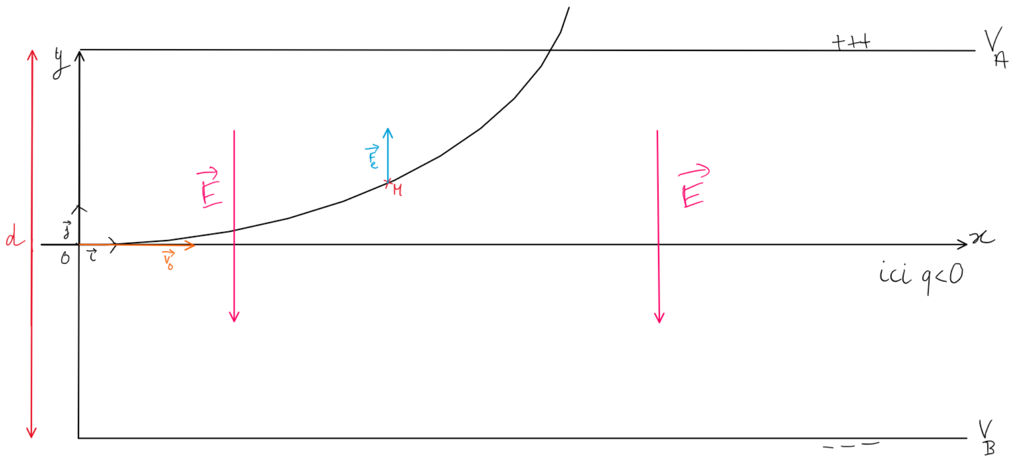

Figure 2.2: Schema du montage

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

système : particule
réferentiel : terrestre supposé galiléen
repère : cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Bilan des forces : $\vec{F}_e = q\vec{E}$ (le poids est négligeable devant $\vec{F}_e$).
D'après la deuxième loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

D'où $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = -\frac{q}{m}\frac{U}{d}\vec{j}$
En projettant sur les axes on a :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{qU}{md} \end{cases}$$

2.2.2 Vitesse de la particule

$$\vec{v} : \begin{cases} v_x(t) = k \\ v_y(t) = -\frac{qU}{md}t + k' \end{cases}$$

On untilise les conditions initiales : $\vec{v}(t=0) : \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$

On a donc :

$$\vec{v}(t) : \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t)\frac{qU}{md}t \end{cases}$$

2.2.3 Equations horaires

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = v_0 t + k'' \\ y(t) = -\frac{1}{2}\frac{qU}{md}t^2 + k''' \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales : $\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases}$

D'où :

$$\overrightarrow{OM} : \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{qU}{2md}t^2 \end{cases}$$

2.2.4 Equations de la trajectoire

On note $t = \frac{x}{v_0}$ ce qui nous donne :

$$\boxed{y(x) = -\frac{qU}{mdv_0^2}}x^2$$

Si $q < 0$, la trajectoire est une parabole tournée vers le haut.
Si $q > 0$, la trajectoire est une parabole tournée vers le bas.
Applications : télévisions à tube cathodique et oscilloscopes analogiques.

2.2.5 Aspect énergétique

Le système (la particule) n'est soumis qu'à la force électrostatique qui est une force conservative (son travail est indépendant de la trajectoire et ne dépend que des points de départ et d'arrivée). L'énergie potentielle d'une particule liée à la force électrostatique d'une particule située au point M s'écrit :

$$E_{pe}(M) = qV(M)$$

Avec $V(M)$ le potentiel électrique au point M.
Le théorème de l'énergie mécanique entre M et M' nous donne alors :

$$E_m(M) = E_m(M') \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_M^2 + qV(M) = \frac{1}{2}mv_{M'}^2 + qV(M')$$

Implication Accélération linéaire de particules chargées :
Dans ce cas, le champ $\overrightarrow{E}$ est alors collinéaire au vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ (Voir doc 12 et 17 page 355).

Chapter 3

Mécanique des fluides

3.1 Fluide au repos

3.1.1 Loi fondamentale de la statique des fluides

Pour un fluide au incompressible ($\rho = \text{cste}$), au repos dans un réferentiel galiléen et placé dans un champ de pensenteur uniforme, la pression ne dépend que de z. On a :

$$P(z) = P_0 + \rho g z$$

Avec :

- $P(z)$ la pression à z
- P_0 la pression à $z = 0$
- ρ en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
- g l'intensité du champ de pesanteur.

> **Remark** (sens de l'axe). Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le bas, alors on a $P(z) - P_0 \propto z$

3.2 Poussée d'Archimède

3.2.1 Cas d'un cylindre vertical

On considère un cylindre vertical de section S et d'hauteur h plongé dans un fluide incompressible de masse volumique ρ. On effectue le bilan des forces pressantes appliquées aux cylindres.
Cette force se décompose en trois composantes :

- Sur la face latérale, les forces pressantes s'annulent, on a : $\sum \vec{F} = \vec{0}$
- A l'altitude $z = z_1$, $\vec{F_1} = P(z_1)S \cdot \vec{k} = (P_0 + \rho g z_1)S \cdot \vec{k}$
- A l'altitude $z = z_2$, $\vec{F_2} = -P(z_2)S \cdot \vec{k} = -(P_0 + \rho g z_2)S \cdot \vec{k}$

D'après la loi de la statique des fluides, on a :

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 \quad &= P_0 - \rho g z_1 - (P_0 - \rho g z_2) \\ &= \rho g (z_2 - z_1)(\text{axe vers le haut}) \end{aligned}$$

On a donc : $\sum \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \rho g (z_2 - z_1) S \vec{k}$ D'ou :

$$\sum \vec{F} = -\rho V \vec{g} \square$$

Le cylindre est donc soumis à une force pressante exercée par le fluide qui l'entoure égale à l'opposée du poids du fluide déplacé. Cette force pressante est appelée la poussée d'Archimède.

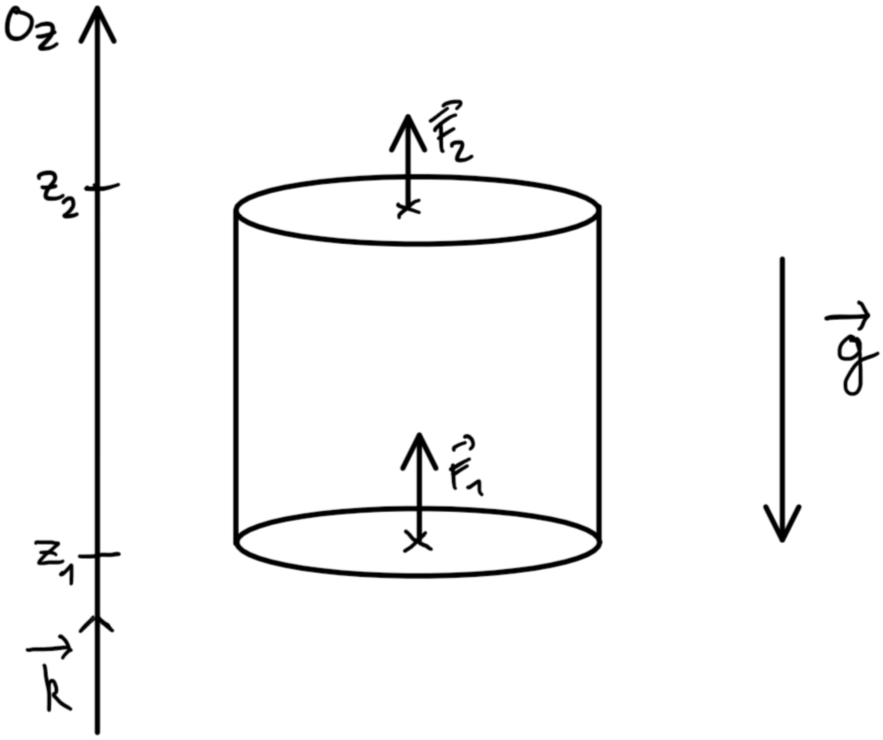

Figure 3.1: Schema de la poussée d'archimède sur un cylindre

3.2.2 Généralisation

Theorem 3.2.1 (Généralisation)**.** La résultat précédent peut être généralisé à tout corps plongé dans un fluide : c'est la poussée d'Archimède :
"Tout corps plongé dans un fluide au repos subit une force dont a valeur est égale au poids du fluide déplacé."

$$\vec{\Pi}_A = -\rho V \vec{g}$$

3.3 Description de l'écoulement d'un fluide

3.3.1 Definition et vocabulaire

Description du mouvement

Un fluide n'étant pas pas un système ponctuel, il faut se poser la question de ce que l'on étudie exactement.

Definition 3.3.1 (Description Lagrangienne du fluide)**.** Etude du fluide en étudiant l'évolution de petites parties au cours du temps.
Cela équivaut à "marquer" une "particule fluide" en utilisant un indicateur coloré :

Remark (pratique)**.** Dans la pratique, il est difficile d'identifier et donc de suivre une "particule fluide" en mouvement. Il apparait donc judicieux d'introduire une description alternative pour le mouvement.

Definition 3.3.2 (Description eulérienne du mouvement)**.** On étudie donc des champs de l'ensemble du fluide (champ de vitesse à un instant t donné par exemple). C'est la description eulérienne du fluide.

Ainsi on est amené à étudier des champs de grandeur cinématique (position, vitesse, accélération) et des champs de grandeur thermodynamiques (masse volumique, température, pression).

Definition 3.3.3 (Fluide incompressible). Un fluide est dit incompressible lorsque $\rho =$ cste sous l'action d'une pressions externe.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Dans la pratique, la compressibilité des liquides et des solides est quasi-nulle (pour l'eau, c'est 1 pour 1000). On les assimile donc généralement comme incompressibles, ce qui n'est pas vrai pour les gaz.

Definition 3.3.4 (Fluide parfait). Un fluide est dit parfait lorsque les forces de frottement au sein du fluide sont négligeables. Sa viscosité est nul. Ce n'est pas le cas de tous les fluides : par exemple le miel.

Definition 3.3.5 (Ecoulement permanent). En régime permanent, les grandeurs cinématiques et thermodynamiques ne dépendent pas du temps. Elles dépendent alors seulement de l'espace.

3.3.2 Débit volumique

Definition 3.3.6 (Débit volumique). Le débit volumique (noté D_v) est le volume du fluide V qui s'écoule par unité de temps à travers la section droite S de la conduite qui délimite le mouvement du fluide.

$$D_v = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{\Delta t} = S \cdot v$$

Proof. Le volume du fluide s'écoulant pendant Δt est :

$$V = S \cdot L$$

Où L est la distance parcourue par le fluide :

$$L = v \cdot \Delta t$$

On a par définition : $D_v = \frac{V}{\Delta t}$

$$\Rightarrow D_v = \frac{S \cdot L}{\Delta} = S \cdot v \square$$

⊛

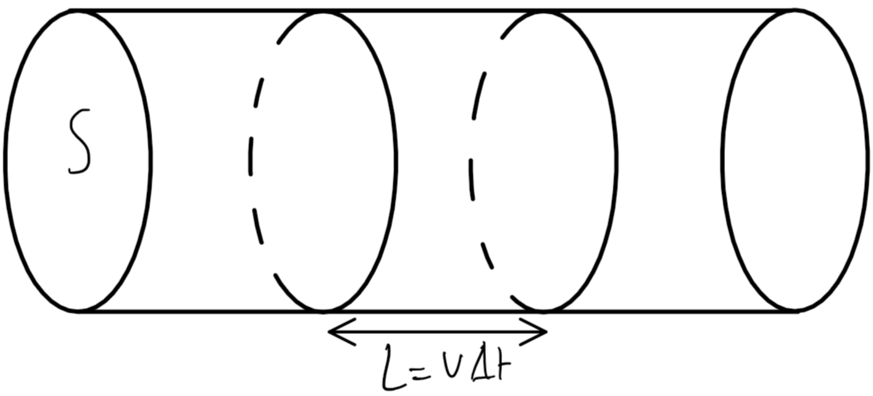

Figure 3.2: Schema du débit volumique dans une canalisation.

Conservation du débit volumique

Theorem 3.3.1 (Conservation du débit vomlumique)**.** Le débit volumique d'un fluide incompressible, parfait, en écoulement permanent est le même à travers toute section droite d'une canalisation.

Corollary 3.3.1 (Conséquence)**.** On a :

$$v \cdot S = \text{ cste } \Leftrightarrow v \propto \frac{1}{S}$$

3.4 Relation de Bernoulli

Definition 3.4.1 (Relation de Bernoulli)**.** La relation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie volumique d'un écoulement parfait, permanent et incompressible. C'est l'analogue de la conservation de l'énergie mécanique en mécanique du point.

Theorem 3.4.1 (Relation de Bernoulli)**.** Si A et B appartiennent à la mmême ligne de courrant, alors, la densité énergétique $\frac{E}{V}$ se conserve. (On prend l'axe (Oz) orienté vers le haut)

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Definition 3.4.2 (Energies du fluide)**.** On a :

- $e_c = \frac{1}{2}\rho v^2$, la densité volumique d'énergie cinétique
- $e_z = \rho g z$, la densité volumique d'énergie cinétique
- $e_p = P$ la densité volumique du travail des forces pressantes.

Remark (Equivalence avec la statique des fluides)**.** Si le fluide est au repos ($v = 0$), on retrouve la loi fondamentale de la statique des fluides.

3.5 Effet Venturi

On considère un fluide incompressible bafait et en écoulement. L'aire de la section droite est variable. A et B sont deux points d'une même ligne de courrant tel que $z_A = z_B$. Le débit volumique D_v étant constant, on a :$s_A \cdot v_A = s_B \cdot v_B$.
Comme $s_A > s_B$, alors $v_B > v_A$. La relation de bernoulli appliquée entre A et B donne :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Leftrightarrow P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2) < P_A$$

En conclusion, en B , la vitesse augmente et la pression diminue.

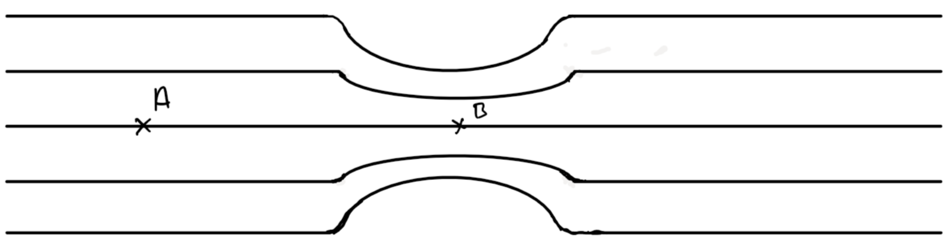

Figure 3.3: L'effet Venturi.