

Mécanique classique

Maxime Muller

July 12, 2025

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Principes de la mécanique | 2 |
| 1.1 | Cinématique | 2 |
| 1.2 | Lois de Newton | 5 |
| 2 | Mouvement dans un champ uniforme indépendant du temps | 6 |
| 2.1 | Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme | 6 |
| 2.2 | Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme | 8 |
| 3 | Satellites et planètes | 10 |
| 3.1 | Force d'attraction gravitationnelle | 10 |
| 3.2 | Repère de Frénet | 10 |
| 3.3 | Mouvement d'un satellite | 11 |
| 3.4 | Loi de Képler : généralisation | 12 |
| 4 | Mécanique des fluides | 14 |
| 4.1 | Fluide au repos | 14 |
| 4.2 | Poussée d'Archimède | 14 |
| 4.3 | Description de l'écoulement d'un fluide | 15 |
| 4.4 | Relation de Bernoulli | 17 |
| 4.5 | Effet Venturi | 17 |

Chapter 1

Principes de la mécanique

1.1 Cinématique

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 (Cinématique). La cinématique consiste à décrire la manière dont un point matériel solide se déplace dans l'espace en fonction du temps.

Définition 1.1.2 (Référentiel). Un référentiel est un solide de référence muni d'un repère d'espace et de temps. On utilise souvent les référentiels suivants :

- Le référentiel terrestre
- Le référentiel géocentrique
- Le référentiel héliocentrique (les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) pointent vers des étoiles fixes)

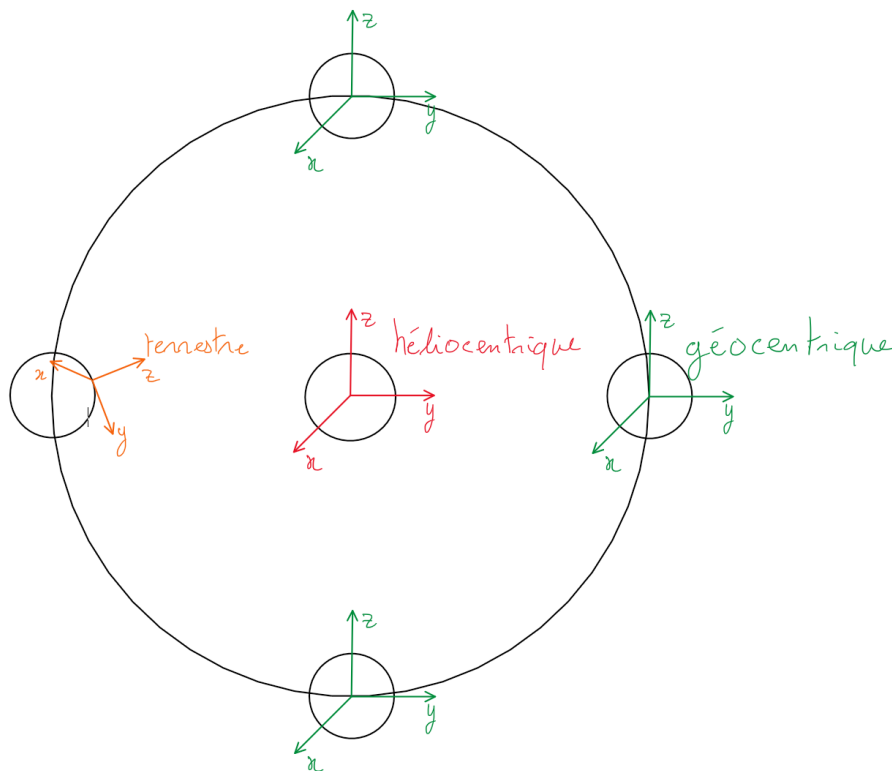


Figure 1.1: Schema des différents référentiels habituels

Definition 1.1.3 (Système, particule et point matériel). Le corps étudié est appelé le système. Si les dimensions de systèmes sont très petites par rapport à son domaine d'évolution, le système est considéré comme une particule. On assimile alors le système à un point matériel de même masse m située au centre d'inertie du système.

Definition 1.1.4 (Vecteur position \vec{OM}). On considère un référentiel R muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec O un point fixe et \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} fixes en fonction du temps. Le vecteur position est le vecteur \vec{OM} (le système se trouve en M) tel que : $\vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Definition 1.1.5 (Trajectoire). La trajectoire d'un point matériel est l'ensemble des positions occupées par ce point au cours du temps.

Definition 1.1.6 (Vitesse). On définit la vitesse moyenne avec la formule suivante :

$$v = \frac{d}{t}$$

Avec d la distance parcourue par le point M et t le temps de parcours. On en déduit une formule pour la vitesse instantanée :

$$\vec{v} = \frac{\vec{OM}(t_2) - \vec{OM}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{OM}(t + \Delta t) - \vec{OM}(t)}{\Delta t}$$

On fait alors tendre Δt vers 0. La vitesse instantanée est alors la dérivée du vecteur position :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

La norme du vecteur vitesse s'exprime alors en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Corollary 1.1.1 (En coordonnées cartésiennes). En coordonnées cartésiennes, on a l'expression suivante de la vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} \\ &= \frac{d(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k})}{dt} \\ &= \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \\ &= \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \\ &= v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k} \end{aligned}$$

Definition 1.1.7 (Accélération). De la même manière que la vitesse est définie comme la dérivée de la position, on peut définir l'accélération comme la dérivée de la vitesse.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Corollary 1.1.2 (L'accélération en coordonnées cartésiennes). De la même manière que pour la vitesse, on peut montrer que :

$$\vec{a} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

1.1.2 Les différents types de mouvement

Definition 1.1.8 (Mouvement rectiligne). Le mouvement est rectiligne si la trajectoire est une droite. On distingue le mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v} = \text{cste}$) et le mouvement rectiligne uniformément accéléré ($\vec{a} = \text{cste}$ et $\|\vec{v}\|$ augmente). On distingue aussi le mouvement rectiligne uniformément retardé: $\vec{a} = \text{cste}$ et $\|\vec{v}\|$ diminue.

Definition 1.1.9 (Mouvement circulaire). Un point matériel en mouvement circulaire a pour trajectoire un cercle de centre C et de rayon r .

Corollary 1.1.3 (Cas particulier du mouvement circulaire uniforme). On a $\|\vec{v}\| = \text{cste}$. Calculons $\frac{d}{dt}(\vec{v}^2)$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = 2\vec{v} \frac{d}{dt}\vec{v} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}$$

De plus, $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 = \text{cste}$. Donc $\frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = 0$. Conclusion :

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$$

Lorsque le mouvement est circulaire uniforme, l'accélération est constamment dirigée vers le centre de la trajectoire, on dit que l'accélération est centripète.

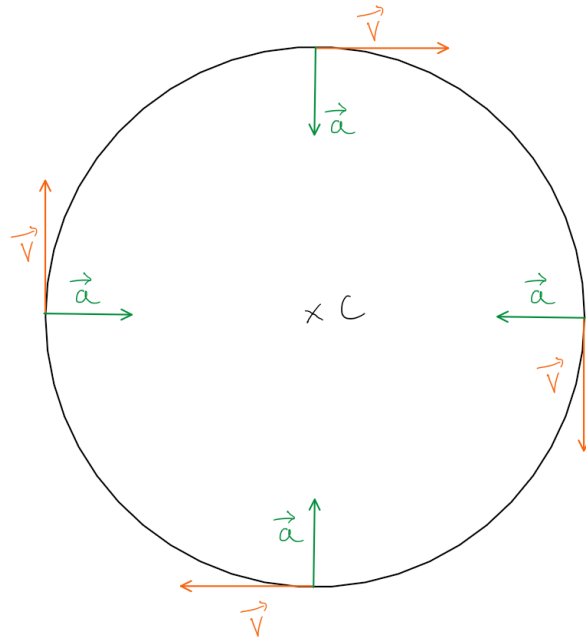


Figure 1.2: Schema du mouvement circulaire uniforme

1.2 Lois de Newton

1.2.1 Première loi de Newton : le principe d'inertie

Theorem 1.2.1 (Le principe d'inertie). Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie G d'un système isolé (le système ne subit aucune force) ou pseudo-isolé (la résultante des forces est nulle) est soit au repos ($\vec{v}_g = \vec{0}$) ou en mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v}_g = \vec{cste}$)

Definition 1.2.1 (Référentiels galiléens). Le principe d'inertie suppose l'existence de référentiels galiléens. Tout référentiel R' en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel R galiléen est lui-même galiléen.

1.2.2 Deuxième loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique (PFD)

Theorem 1.2.2 (PFD). Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide de masse m est égale au produit de la masse m par le vecteur accélération \vec{a} de son centre d'inertie. Soit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_g$$

Avec, $\|\vec{F}_{ext}\|$ en N, m en kg et $\|\vec{a}\|$ en $m \cdot s^{-2}$

Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

Theorem 1.2.3 (Principe des actions réciproques). Si un corps A exerce sur un corps B une force (action), alors le corps B exerce sur le corps A une force (réaction) de même direction et norme, mais de sens contraire. Soit :

$$\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$$

Chapter 2

Mouvement dans un champ uniforme indépendant du temps

2.1 Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

2.1.1 Application de la deuxième loi de Newton

On étudie le mouvement d'un projectile lancé avec une vitesse initiale \vec{v}_0 faisant un angle α avec l'horizontale.

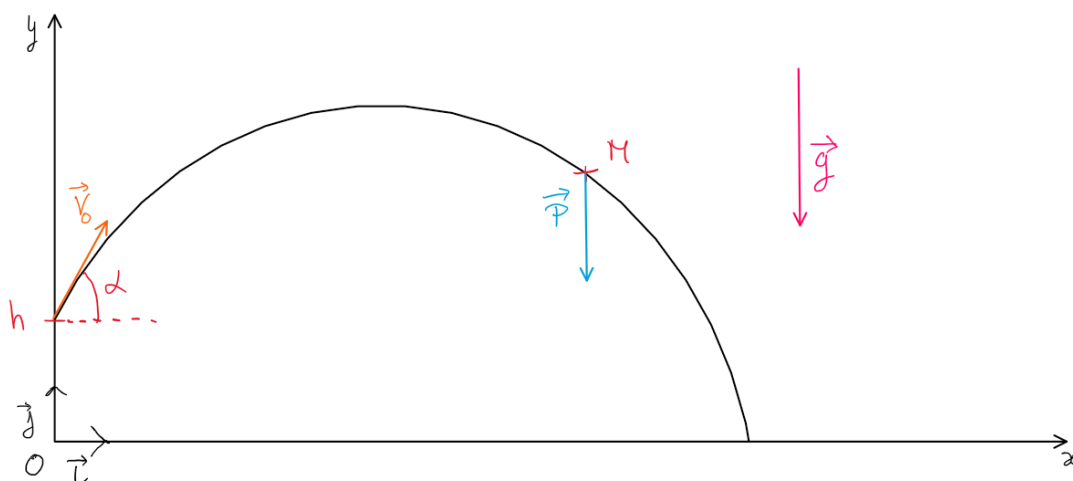


Figure 2.1: Schema de la chute libre

- Système : projectile de masse m assimilé à un point matériel
- Référentiel : terrestre supposé galiléen
- Repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j})
- Bilan des forces :

$$- \vec{P} = m\vec{g}$$

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

On projette les vecteurs sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

2.1.2 Vitesse du projectile

Corollary 2.1.1 (Vitesse du projectile). On a :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Proof. Comme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, \vec{v} est une primitive de \vec{a} par rapport au temps.

Donc \vec{v} peut s'écrire : $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) = k \\ v_y(t) = -gt + k' \end{pmatrix}$ On utilise les conditions initiales, soit à $t = 0s$, on a : $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$. D'où on a :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

⊗

2.1.3 Equations horaires du mouvement

Corollary 2.1.2 (Equations horaires du mouvement). On a :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t \\ y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha t + h \end{cases}$$

Proof. De même, $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{OM}$, donc \vec{OM} est une primitive de \vec{v} . On montre alors de la même manière que pour l'expression de la vitesse les expressions recherchées. ⊗

2.1.4 Equations de la trajectoire du mouvement

Corollary 2.1.3 (Equation de la trajectoire). On a pour équation de la trajectoire :

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x + h$$

Proof. On isole une expression de t :

$$t(x) = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

On remplace alors cette expression dans l'expression de $y(t)$ pour exprimer $y(x)$:

$$y(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} + h$$

On trouve donc bien l'expression de la trajectoire cherchée. ⊗

2.1.5 Aspect Energétique

Le système n'est soumis qu'au poids qui est une force conservative. Le théorème de l'énergie mécanique entre un point A et un point M quelconque nous donne alors : $E_m(A) = E_m(M)$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A &= \frac{1}{2}mv_M^2 + mgz_M \\ \Leftrightarrow v_A^2 + 2gz_A &= v_M^2 + 2gz_M \\ \Leftrightarrow v_M &= \sqrt{v_A^2 + 2g(z_A - z_M)} \end{aligned}$$

2.2 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

2.2.1 Application du PFD et accélération de la particule

On étudie le mouvement d'une particule M chargée, de masse m et de charge q , pénétrant dans un condensateur plan, de champ électrostatique \vec{E} , avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{i}$ orthogonal à \vec{E} . De plus, $U = V_A - V_B > 0$ et $\vec{E} = \frac{U}{d} \vec{j}$.

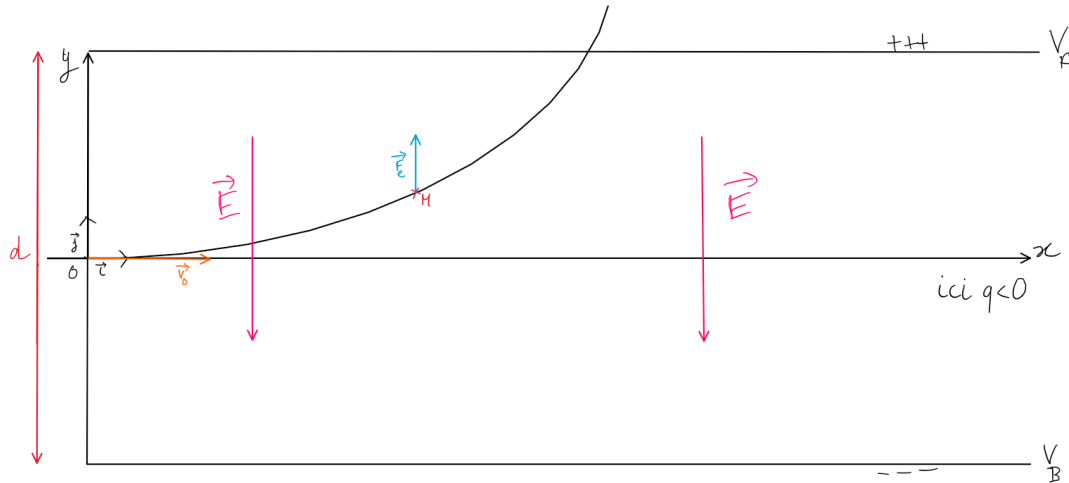


Figure 2.2: Schema du montage

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

système : particule

référentiel : terrestre supposé galiléen

repère : cartésien (O, \vec{i}, \vec{j})

Bilan des forces : $\vec{F}_e = q\vec{E}$ (le poids est négligeable devant \vec{F}_e).

D'après la deuxième loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\text{D'où } \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = -\frac{q}{m}\frac{U}{d}\vec{j}$$

En projetant sur les axes on a :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{qU}{md} \end{cases}$$

2.2.2 Vitesse de la particule

$$\vec{v} : \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -\frac{qU}{md}t \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales : $\vec{v}(t=0) : \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$

On a donc :

$$\vec{v}(t) : \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -\frac{qU}{md}t \end{cases}$$

2.2.3 Equations horaires

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = v_0 t + k'' \\ y(t) = -\frac{1}{2} \frac{qU}{md} t^2 + k''' \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales : $\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases}$

D'où :

$$\overrightarrow{OM} : \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{qU}{2md} t^2 \end{cases}$$

2.2.4 Equations de la trajectoire

On note $t = \frac{x}{v_0}$ ce qui nous donne :

$$y(x) = -\frac{qU}{mdv_0^2} x^2$$

Si $q < 0$, la trajectoire est une parabole tournée vers le haut.

Si $q > 0$, la trajectoire est une parabole tournée vers le bas.

Applications : télévisions à tube cathodique et oscilloscopes analogiques.

2.2.5 Aspect énergétique

Le système (la particule) n'est soumis qu'à la force électrostatique qui est une force conservative (son travail est indépendant de la trajectoire et ne dépend que des points de départ et d'arrivée). L'énergie potentielle d'une particule liée à la force électrostatique d'une particule située au point M s'écrit :

$$E_{pe}(M) = qV(M)$$

Avec $V(M)$ le potentiel électrique au point M .

Le théorème de l'énergie mécanique entre M et M' nous donne alors :

$$E_m(M) = E_m(M') \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_M^2 + qV(M) = \frac{1}{2}mv_{M'}^2 + qV(M')$$

Implication Accélération linéaire de particules chargées :

Dans ce cas, le champ \vec{E} est alors collinéaire au vecteur vitesse \vec{v} (Voir doc 12 et 17 page 355).

Chapter 3

Satellites et planètes

3.1 Force d'attraction gravitationnelle

On se place dans un référentiel géocentrique supposé galiléen. Un satellite de masse m assimilé à un point matériel M subit une force d'attraction gravitationnelle (loi de la gravitation ou loi d'attraction universelle) de la part de la Terre de masse m_T :

$$\vec{F}_{T/S} = -G \frac{m m_T}{r^2} \vec{u}_{OM}$$

Avec :

- $\|\vec{F}_{T/S}\|$ en N
- m et m_T en kg
- r la distance centre à centre en m
- G la constante de gravitation universelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ USI

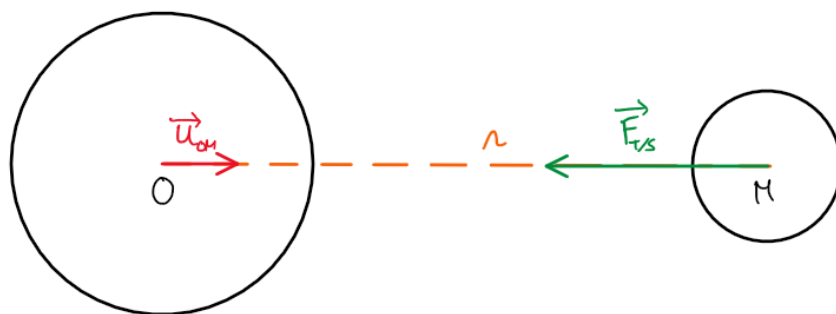


Figure 3.1: Schema du bilan des forces s'appliquant sur un satellite en orbite

3.2 Repère de Frénet

Definition 3.2.1 (Repère de Frénet). Un point matériel M en mouvement circulaire a pour trajectoire un cercle de centre O et de rayon R . Pour décrire le mieux le mouvement, on utilise un repère de Frénet défini comme suit :

- \vec{u}_t est tangent à la trajectoire en M dans le sens du mouvement.
- \vec{u}_n est orthogonal à la trajectoire en M et dirigé vers O
- $\|\vec{u}_t\| = \|\vec{u}_n\| = 1$

Dans le repère de Frénet on a :

- $\vec{v} = v(t)\vec{u}_t$
- $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\vec{u}_n$

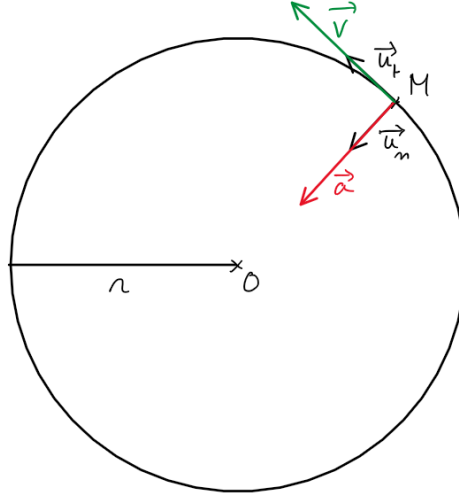


Figure 3.2: Schema du repère de Frénet

3.3 Mouvement d'un satellite

3.3.1 Application de la deuxième loi de Newton

référentiel : géocentrique supposé galiléen

système : satellite de masse m

repère : Frénet

Bilan des forces :

$$\vec{F}_{T/S} = -G \frac{m m_T}{r^2} \vec{u}_{OM}$$

D'après le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}_{T/S} = m \vec{a}$$

D'où on a :

$$\vec{a} = \frac{G m_t}{r^2} \vec{u}_n$$

On observe que l'accélération est centripète.

3.3.2 Vitesse orbitale

Si on suppose r constant, alors, dans le repère de Frénet :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{v^2}{r} = \frac{G m_t}{r^2} \end{array} \right.$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = 0 \\ v = \sqrt{\frac{G m_t}{r}} \end{array} \right.$$

La valeur de la vitesse est constante, ainsi que le rayon. Le mouvement du satellite est bien rectiligne uniforme.

3.3.3 Période de révolution

La période de révolution T d'un satellite est la durée mise pour faire un tour complet autour de la Terre.

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

Or $v = \sqrt{\frac{Gm_t}{r}}$, d'où :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{Gm_t}}$$

3.4 Loi de Képler : généralisation

3.4.1 Première loi de loi de Képler : loi des trajectoires

Theorem 3.4.1 (Loi des trajectoires). Soit un corps céleste assimilé à un point matériel P et soumis uniquement à la force gravitationnelle exercée par un corps de position fixe en F de masse M_0 . Alors la trajectoire de P est une ellipse dont l'un des deux foyers est F .

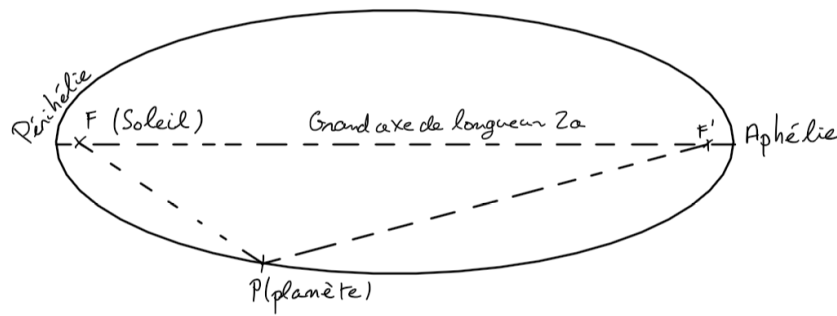


Figure 3.3: Schema de l'orbite d'une planète autour du soleil

Corollary 3.4.1 (Distance aux foyers). F et F' sont les foyers de l'ellipse et $FP + FP' = 2a$.

Definition 3.4.1 (Points particuliers de la trajectoire). Le point de la trajectoire le plus proche de l'astre est appelé périastre ou périhélie/périgée quand le Soleil ou la Terre est le corps attracteur.

Le point de la trajectoire est appelé apoastre ou aphélie/apogée quand le corps attracteur est le Soleil ou la Terre.

3.4.2 Deuxième loi de Kepler : loi des aires

Theorem 3.4.2 (Loi des aires). Pendant des durées égales, FP balaye des aires égales, i.e. $A_1 = A_2$.

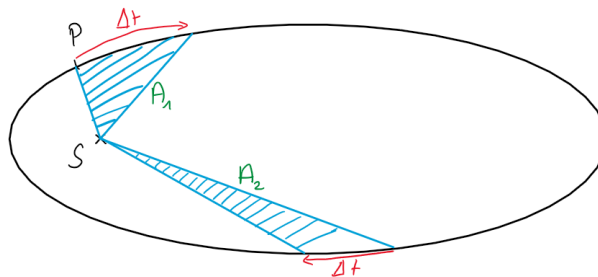


Figure 3.4: Schema de la loi des aires

Corollary 3.4.2 (Minimum et maximum de la vitesse). Conséquence : la vitesse de P est minimale à l'apoastre et est maximale au périastre.

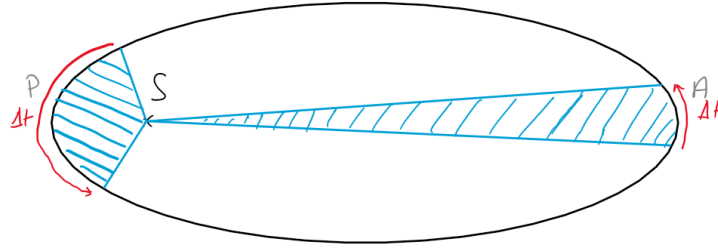


Figure 3.5: Schema des vitesses au voisinage du périastre et de l'apoastre

3.4.3 Troisième loi de Kepler : loi des périodes

Theorem 3.4.3 (Loi des périodes). Pour un corps de masse M_0 donné, l'ensemble des corps céleste en orbite gravitationnelle (M) autour de celui-ci vérifient :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$$

Avec :

- T la période de M en s
- a le demi-grand axe de l'ellipse de M en m
- M_0 la masse de M_0 en kg

Proof. Preuve dans le cas du mouvement circulaire

Pour un mouvement circulaire, on a :

$$T = \frac{2\pi r}{v} \text{ or, } v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 r^2 \frac{r}{GM}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

Pour ce qui concerne les trajectoires circulaires, si l'on reprend la formule de la période de révolution, on retrouve bien la troisième loi de Kepler. *

3.4.4 Analyse des lois de Kepler

Les trois lois de Kepler s'appliquent donc en particulier au mouvement d'une planète autour du Soleil (fixe dans le référentiel héliocentrique). Mais elles s'appliquent aussi à tout satellite (naturel ou artificiel) en mouvement autour de la planète (Terre, Jupiter, exoplanètes...)

Chapter 4

Mécanique des fluides

4.1 Fluide au repos

4.1.1 Loi fondamentale de la statique des fluides

Pour un fluide incompressible ($\rho = \text{cste}$), au repos dans un référentiel galiléen et placé dans un champ de pesanteur uniforme, la pression ne dépend que de z . On a :

$$P(z) = P_0 + \rho g z$$

Avec :

- $P(z)$ la pression à z
- P_0 la pression à $z = 0$
- ρ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- g l'intensité du champ de pesanteur.

Remark (sens de l'axe). Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le bas, alors on a $P(z) - P_0 \propto z$

4.2 Poussée d'Archimède

4.2.1 Cas d'un cylindre vertical

On considère un cylindre vertical de section S et d'hauteur h plongé dans un fluide incompressible de masse volumique ρ . On effectue le bilan des forces pressantes appliquées aux cylindres.

Cette force se décompose en trois composantes :

- Sur la face latérale, les forces pressantes s'annulent, on a : $\sum \vec{F} = \vec{0}$
- A l'altitude $z = z_1$, $\vec{F}_1 = P(z_1)S \cdot \vec{k} = (P_0 + \rho g z_1)S \cdot \vec{k}$
- A l'altitude $z = z_2$, $\vec{F}_2 = -P(z_2)S \cdot \vec{k} = -(P_0 + \rho g z_2)S \cdot \vec{k}$

D'après la loi de la statique des fluides, on a :

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= P_0 - \rho g z_1 - (P_0 - \rho g z_2) \\ &= \rho g (z_2 - z_1) \text{ (axe vers le haut)} \end{aligned}$$

On a donc : $\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \rho g (z_2 - z_1) S \vec{k}$ D'où :

$$\sum \vec{F} = -\rho V \vec{g}$$

Le cylindre est donc soumis à une force pressante exercée par le fluide qui l'entoure égale à l'opposée du poids du fluide déplacé. Cette force pressante est appelée la poussée d'Archimède.

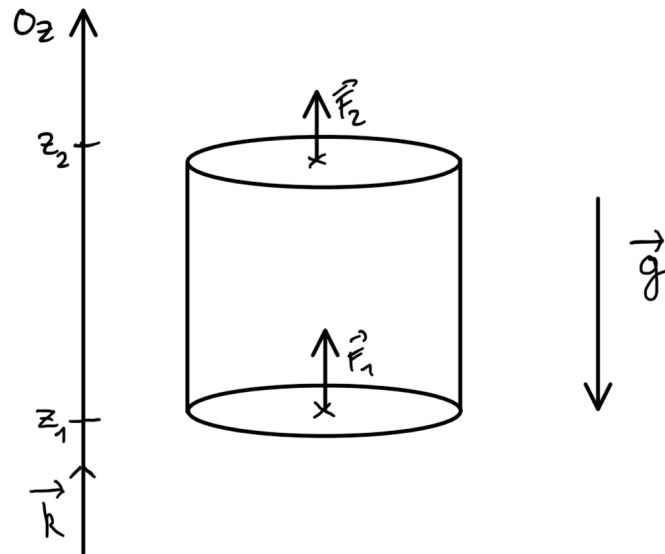


Figure 4.1: Schema de la poussée d'archimède sur un cylindre

4.2.2 Généralisation

Theorem 4.2.1 (Généralisation). La résultat précédent peut être généralisé à tout corps plongé dans un fluide : c'est la poussée d'Archimède :

"Tout corps plongé dans un fluide au repos subit une force dont la valeur est égale au poids du fluide déplacé."

$$\vec{\Pi}_A = -\rho V \vec{g}$$

4.3 Description de l'écoulement d'un fluide

4.3.1 Définition et vocabulaire

Description du mouvement

Un fluide n'étant pas un système ponctuel, il faut se poser la question de ce que l'on étudie exactement.

Definition 4.3.1 (Description Lagrangienne du fluide). Etude du fluide en étudiant l'évolution de petites parties au cours du temps.

Cela équivaut à "marquer" une "particule fluide" en utilisant un indicateur coloré :

Remark (pratique). Dans la pratique, il est difficile d'identifier et donc de suivre une "particule fluide" en mouvement. Il apparaît donc judicieux d'introduire une description alternative pour le mouvement.

Definition 4.3.2 (Description eulérienne du mouvement). On étudie donc des champs de l'ensemble du fluide (champ de vitesse à un instant t donné par exemple). C'est la description eulérienne du fluide.

Ainsi on est amené à étudier des champs de grandeur cinématique (position, vitesse, accélération) et des champs de grandeur thermodynamiques (masse volumique, température, pression).

Définition 4.3.3 (Fluide incompressible). Un fluide est dit incompressible lorsque $\rho = \text{cte}$ sous l'action d'une pression externe.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Dans la pratique, la compressibilité des liquides et des solides est quasi-nulle (pour l'eau, c'est 1 pour 1000). On les assimile donc généralement comme incompressibles, ce qui n'est pas vrai pour les gaz.

Définition 4.3.4 (Fluide parfait). Un fluide est dit parfait lorsque les forces de frottement au sein du fluide sont négligeables. Sa viscosité est nulle. Ce n'est pas le cas de tous les fluides : par exemple le miel.

Définition 4.3.5 (Ecoulement permanent). En régime permanent, les grandeurs cinématiques et thermodynamiques ne dépendent pas du temps. Elles dépendent alors seulement de l'espace.

4.3.2 Débit volumique

Définition 4.3.6 (Débit volumique). Le débit volumique (noté D_v) est le volume du fluide V qui s'écoule par unité de temps à travers la section droite S de la conduite qui délimite le mouvement du fluide.

$$D_v = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{\Delta t} = S \cdot v$$

Proof. Le volume du fluide s'écoulant pendant Δt est :

$$V = S \cdot L$$

Où L est la distance parcourue par le fluide :

$$L = v \cdot \Delta t$$

On a par définition : $D_v = \frac{V}{\Delta t}$

$$\Rightarrow D_v = \frac{S \cdot L}{\Delta t} = S \cdot v \quad \square$$

⊛

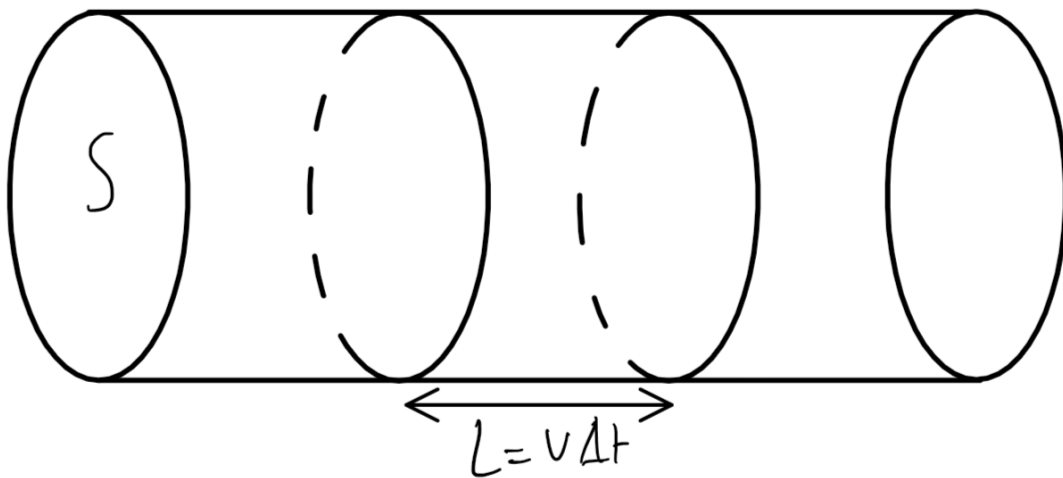


Figure 4.2: Schéma du débit volumique dans une canalisation.

Conservation du débit volumique

Theorem 4.3.1 (Conservation du débit volumique). Le débit volumique d'un fluide incompressible, parfait, en écoulement permanent est le même à travers toute section droite d'une canalisation.

Corollary 4.3.1 (Conséquence). On a :

$$v \cdot S = \text{cste} \Leftrightarrow v \propto \frac{1}{S}$$

4.4 Relation de Bernoulli

Definition 4.4.1 (Relation de Bernoulli). La relation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie volumique d'un écoulement parfait, permanent et incompressible. C'est l'analogie de la conservation de l'énergie mécanique en mécanique du point.

Theorem 4.4.1 (Relation de Bernoulli). Si A et B appartiennent à la même ligne de courant, alors, la densité énergétique $\frac{E}{V}$ se conserve. (On prend l'axe (Oz) orienté vers le haut)

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Definition 4.4.2 (Energies du fluide). On a :

- $e_c = \frac{1}{2}\rho v^2$, la densité volumique d'énergie cinétique
- $e_z = \rho g z$, la densité volumique d'énergie potentielle
- $e_p = P$ la densité volumique du travail des forces pressantes.

Remark (Equivalence avec la statique des fluides). Si le fluide est au repos ($v = 0$), on retrouve la loi fondamentale de la statique des fluides.

4.5 Effet Venturi

On considère un fluide incompressible parfait en écoulement. L'aire de la section droite est variable. A et B sont deux points d'une même ligne de courant tel que $z_A = z_B$. Le débit volumique D_v étant constant, on a : $s_A \cdot v_A = s_B \cdot v_B$.

Comme $s_A > s_B$, alors $v_B > v_A$. La relation de Bernoulli appliquée entre A et B donne :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Leftrightarrow P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2) < P_A$$

En conclusion, en B , la vitesse augmente et la pression diminue.

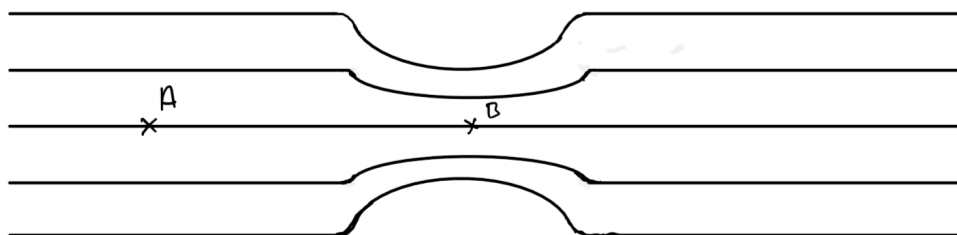


Figure 4.3: L'effet Venturi.