Dynamique relativiste

Maxime Muller

March 28, 2025

1 Le PFD

Pour un système isolé, dans un réferentiel galiléen, il y a conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie totale.

$$\implies \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \implies d\vec{p} = \vec{f} \cdot dt \\ dE = \vec{f} \cdot dr \end{cases} .$$

2 4-vecteur implusion énergie

L'impulsion est une généralisation de $\vec{p}$ (la quantité de mouvement). Pour une onde :

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \text{ avec } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$$

D'après les deux relations précédentes :
$dE \cdot dt - d\vec{p} \cdot d\vec{r} = 0$ Or $d\tilde{OM} = (cdt; d\vec{OM})$. Donc : $(\frac{dE}{c})cdt - d\vec{p} \cdot d\vec{r} = 0$

$$\implies \tilde{p} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

est le 4-vecteur impulsion énergie. Soit m la masse propre de la particule. On pose, par définition, $\tilde{p} = m{\cdot}\tilde{v}$

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \gamma m(c, \vec{v}) \\ &= (\gamma mc, \gamma m\vec{v}). \end{aligned}$$

Les trois dernières composantes sont les composantes de l'impulsion.
$\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ avec $\beta = \frac{v}{c}$
Notamment, en édtudiant la première composoante, on obtient :

$$\frac{E}{c} = \gamma mc \Leftrightarrow E = \gamma m.$$

Valeur de la pseudo norme :

$$\begin{aligned} \tilde{p} \cdot \tilde{p} &= \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \\ &= \frac{\gamma^2 m^2 c^4}{c^2} - \gamma^2 m^2 v^2 \\ &= \gamma^2 m^2 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) \\ &= m^2 c^2 \\ \tilde{p} \cdot \tilde{p} &= m^2 c^2 \text{ (ce qui est une constante) } \square. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \pm\beta\gamma & 0 & 0 \\ \pm\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

2.1 Pour $v \ll c \Leftrightarrow \beta \ll 1$

$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx m\vec{v}$ et $E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ Or $x \ll_1 \implies (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

$$\implies E \approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right] = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \text{ (avec } mc^2 \text{ l'énergie au repos).}$$

$E_0 = mc^2$ l'énergie au repos de la particule et $E = \gamma mc^2$ est l'énergie totale de la particule. $\implies E_c = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$

2.2 Cas du photon

Le photon est "la particule" associée au CEM. Cette particule se propage à la vitesse de la lumière : $v = c$
Or $E = \gamma mc^2 \implies m = 0$ (pour avoir $E \neq \infty$) $\implies$ 1 photon n'est pas une particule matérielle.

L'étude du CEM montre que le photon associé à un CEM de fréquence ν transporte une énergie : $E = h\nu = \hbar\omega$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Or : $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Donc pour le photon, on a : $E = pc = h\nu \implies p = \frac{h\nu}{c}$.

La direction de $\vec{p}$ est la même que celle de l'onde, d'où : $\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{u}$.
On a bien : $\tilde{p} \cdot \tilde{p} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = 0$ donc la pseudo norme est bien un invariant.

3 Loi fondamentale de la dynamique

3.1 Equation du mouvement

Peut-on préserver : $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$?
Déja pour Newton l'impulsion $\vec{p}$ et la vitesse $\vec{v}$ sont deux concepts distincts. On peut avoir par exemple $\vec{v}$ constant alors que $\vec{p}$ varie (Par exemple avec une fusée qui perd de la masse mais dont la vitesse est constante).
En relativité réstreinte on a : $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

$$\begin{aligned}
\vec{f} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] \\
&= \gamma m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}) \\
&= \lambda\frac{d\vec{v}}{dt} + \mu\vec{v}(\text{ avec } \lambda \neq \mu).
\end{aligned}$$

Le vecteur force $\vec{f}$ n'est pas colinéaire avec l'accélération $\frac{d\vec{v}}{dt}$.
On définit ainsi le 4-vecteur force : $\tilde{f} = \frac{d\tilde{p}}{d\tau}$ avec $\tilde{p} : (\frac{E}{c}; \vec{p})$

$$
\begin{aligned}
\implies \tilde{f} &= \frac{d\tilde{p}}{d\tau} \\
&= \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d\tilde{p}}{dt} \\
&= \gamma \frac{d\tilde{p}}{dt} \\
&= \gamma \frac{d}{dt} \left[\frac{E}{c} ; \vec{p} \right]
\end{aligned}
$$

Or : $\begin{cases} dE & = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{v} dt \\ d\vec{p} & = \vec{f} \cdot dt \end{cases}$

$$
\implies \tilde{f} = \left[\gamma \vec{f} \cdot \vec{\beta} ; \gamma \vec{f} \right].
$$

avec : $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \implies \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Et on a :

$$
\begin{aligned}
\tilde{f} \cdot \tilde{f} &= (\gamma \vec{f} \cdot \vec{\beta})^2 - (\gamma \vec{f})^2 \\
&= \gamma^2 \vec{f}^2 \vec{\beta}^2 - \gamma^2 \vec{f}^2 \\
&= \gamma^2 \vec{f}^2 (1 - \beta^2) \\
&= -\vec{f}^2 \\
&= -f^2 \square.
\end{aligned}
$$

Si la vitesse par rapport à l'observateur est nulle, on a : $\vec{v} = \vec{0} \implies \begin{cases} \vec{\beta} & = \vec{0} \\ \gamma & = 1 \end{cases}.$

$$
\implies \tilde{f} = \left[0 ; \vec{f} \right].
$$

On retrouve les forces classiques. L'introduction de $\tilde{f}$ permer d'obtenir une loi de transformation des forces :

$$
\tilde{f}' = \mathcal{L} \cdot \tilde{f} \text{ avec } \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \gamma_e & \beta\gamma_e & 0 & 0 \\ \beta\gamma_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

3.2 Théorème de l'énergie cinétique

En Relativité restreinte, les lois de la physiques ont la même forme, d'ou on a :

$$
\Delta E_c = W^{\vec{F}_{ext}}.
$$

Pour un électron de masse m et de charge $e < 0$, accéléré dans un accélérateur linéaire soumis à une tension $U_{BA} < 0$ avec une vitesse initiale $v_A = 0$, on a :

En mécanique classique, on a

$$
\begin{aligned}
&\Delta E_c = qU_{AB} = eU_{BA} > 0 \\
&\implies \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = eU_{BA} \\
&\implies v_B = \sqrt{\frac{2eU_{BA}}{m}} \text{ et } U_{BA} = \frac{mv_B^2}{2e}.
\end{aligned}
$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
e &\approx 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C} \sim 10^{-19} \\
m &\approx 9.1 \cdot 10^{-31}\text{kg} \sim 10^{-30} \\
v &\approx 10\% c \approx 3 \cdot 10^{7}\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \\
v^2 &\approx (3 \cdot 10^7)^2 \sim 10^{15} \\
U_{BA} &\sim \frac{10^{-30} \cdot 10^{15}}{10^{-19}} \sim 10^{4}\text{V}.
\end{aligned}$$

Ce qui est absurdément peu de tension pour atteindre des vitesses relativistes

En relativité restreinte :

$$\begin{aligned}
&\Delta E_c = W^{\vec{F}_{ext}} \\
&\implies (\gamma - 1)mc^2 = eU_{BA} \\
&\implies (\gamma - 1) = \frac{eU_{BA}}{mc^2} \\
&\implies \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{eU}{mc^2} \\
&\implies 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{(1 + \frac{eU}{mc^2})^2} \\
&\implies \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{(1 + \frac{eU}{mc^2})^2} \\
&\implies v^2 = c^2 \frac{(1 + \frac{eU}{mc^2})^2 - 1}{(1 + \frac{eU}{mc^2})^2} \\
&\implies v = c \frac{\sqrt{(1 + \frac{eU}{mc^2})^2 - 1}}{1 + \frac{eU}{mc^2}}
\end{aligned}$$

On a : $\begin{cases} eU & \to E_c \\ mc^2 & \to E_{\text{de masse}} \to \text{inertie} \end{cases}$

Si $\frac{eU}{mc^2} \ll 1$, l'énergie de masse est prépondérante, l'énergie cinétique, et donc la vitesse sont très faible.

Alors, $v \approx c\frac{\sqrt{1+2\cdot\frac{eU}{mc^2}-1}}{1} \approx \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ On retrouve le can classique.

Si $\frac{eU}{mc^2} \gg 1$ on se trouve dans le cas ultra relativiste. On a alors $(1 + \frac{eU}{mc^2})^2 - 1 \approx (1 + \frac{eU}{mc^2})^2$, D'où, $v \approx c \cdot \frac{1+\frac{eU}{mc^2}}{1+\frac{eU}{mc^2}} \approx c$. On a alors $v \to c$

Fin du cours.