

GELSON IZZI
CARLOS MURAKAMI
NILSON JOSÉ MACHADO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Limites
Derivadas
Noções de integral

8

GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI
NILSON JOSÉ MACHADO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Limites | Noções
Derivadas | de integral

8

COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

7^a edição | São Paulo – 2013



© Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado, 2013

Copyright desta edição:

SARAIVA S. A. Livreiros Editores, São Paulo, 2013

Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros

05413-010 — São Paulo — SP

Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268

SAC: 0800-0117875

www.editorasaraiva.com.br

Todos os direitos reservados.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson

Fundamentos de matemática elementar, 8 : limites, derivadas, noções de integral / Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado. — 7. ed. — São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1756-3 (aluno)

ISBN 978-85-357-1757-0 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) — Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Murakami, Carlos. II. Machado, Nilson José. III. Título. IV. Título: Limites, derivadas, noções de integral.

12-01117

CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 8

Gerente editorial: Lauri Cericato

Editor: José Luiz Carvalho da Cruz

Editores-assistentes: Fernando Manenti Santos/Guilherme Regin Gaspar/Juracy Vespucci/
Livio A. D'Ottaviantonio

Auxiliares de serviços editoriais: Margarete Aparecida de Lima/Rafael Rabaçalho Ramos

Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Renata Palermo/
Rhennan Santos/Felipe Toledo/Eduardo Sigrist/Luciana Azevedo/
Patricia Cordeiro/Maura Loria

Consultoria técnica: Maria Luiza Giordano de Figueiredo González

Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa

Supervisor de arte: Antonio Roberto Bressan

Projeto gráfico: Carlos Magno

Capa: Homem de Melo & Tróia Design

Imagen de capa: www.jodymillerphoto.com/Flickr RF/Getty Images

Diagramação: TPG

Encarregada de produção e arte: Grace Alves

Coordenadora de edição eletrônica: Silvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: Robson Cacau Alves

Impressão e acabamento:

731.344.007.003



**Editora
Saraiva**

SAC

0800-0117875
De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30
www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 — Cerqueira César — São Paulo/SP — 05413-909

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 8, Limites/Derivadas/Noções de integral, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos às sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos à professora Irene Torrano Filisetti a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

CAPÍTULO I — Funções	1
CAPÍTULO II — Limite	3
CAPÍTULO III — O infinito	24
CAPÍTULO IV — Complementos sobre limites	34
CAPÍTULO V — Continuidade	47
CAPÍTULO VI — Derivadas	51
CAPÍTULO VII — Regras de derivação	55
CAPÍTULO VIII — Estudo da variação das funções	68
CAPÍTULO IX — Noções de Cálculo Integral	111

CAPÍTULO I — Funções

4. $\left. \begin{array}{l} f(x) = x - 1 \\ g(x) = 2x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$

$x \in A = \{1, 2, 3\}$; temos:

$$x = 1, (g \circ f)(x) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$x = 2, (g \circ f)(x) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$x = 3, (g \circ f)(x) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Portanto: $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$.

5. $f(x) = x^3$

$$g(x) = x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^3 + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 1)^3$$

$$(f \circ f)(x) = (x^3)^3 = x^9$$

$$(g \circ g)(x) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

6. $f(x) = x + 2$

$$g(x) = x^2$$

$$h(x) = 2^x$$

Obtemos, inicialmente, $g(f(x)) = (x + 2)^2$.

Então: $h[g(f(x))] = 2^{(x+2)^2}$.

Obtemos, inicialmente, $g(h(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x}$.

Então: $f[g(h(x))] = 2^{2x} + 2$.

7. a) $F(x) = |x^2 + 1|$

$$\underset{f}{x} \rightarrow \underset{g}{x^2 + 1} \rightarrow |x^2 + 1| \Rightarrow f(x) = x^2 + 1 \text{ e } g(x) = |x|$$

b) $F(x) = \sen(x^2 + 4)$

$$\underset{f}{x} \rightarrow \underset{g}{x^2 + 4} \rightarrow \sen(x^2 + 4) \Rightarrow f(x) = x^2 + 4 \text{ e } g(x) = \sen x$$

c) $F(x) = \tg x^3$

$$\underset{f}{x} \rightarrow \underset{g}{x^3} \rightarrow \tg x^3 \Rightarrow f(x) = x^3 \text{ e } g(x) = \tg x$$

d) $F(x) = \tg^2 x$

$$\underset{f}{x} \rightarrow \underset{g}{\tg x} \rightarrow \tg^2 x \Rightarrow f(x) = \tg x \text{ e } g(x) = x^2$$

e) $F(x) = 2^{\cos x}$

$$x \xrightarrow{f} \cos x \xrightarrow{g} 2^{\cos x} \Rightarrow f(x) = \cos x \text{ e } g(x) = 2^x$$

f) $F(x) = \operatorname{sen} 3^x$

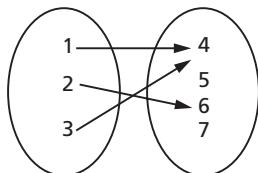
$$x \xrightarrow{f} 3^x \xrightarrow{g} \operatorname{sen} 3^x \Rightarrow f(x) = 3^x \text{ e } g(x) = \operatorname{sen} x$$

8. $F(x) = \cos 2^x + 3$

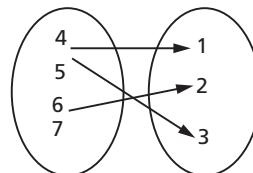
$$x \xrightarrow{f} x + 3 \xrightarrow{g} 2^{x+3} \xrightarrow{h} \cos 2^{x+3} \Rightarrow f(x) = x + 3, g(x) = 2^x \text{ e } h(x) = \cos x$$

9. a) $f^{-1}(x) = \{(a', a), (b', b), (c', c)\}$

b)



g é função
 g não é inversível



g^{-1} não é função

c) $h(x) = 1 - 5x \Leftrightarrow y = 1 - 5x$ é bijetora.

Trocando as variáveis x por y e isolando y , vem:

$$x = 1 - 5y \Rightarrow y = \frac{1-x}{5} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{1-x}{5}.$$

d) $i(x) = x^3 - 2 \Leftrightarrow y = x^3 - 2$ é bijetora.

Trocando as variáveis x por y e isolando y , vem:

$$x = y^3 - 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+2} \Rightarrow i^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}.$$

e) $j(x) : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+, j(x) = x^2 \Leftrightarrow y = x^2$ é bijetora.

Trocando as variáveis x por y e isolando y , vem:

$$x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}.$$

Mas, como $j^{-1}(x) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-$, então $j^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

f) $p(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ é bijetora.

Trocando as variáveis x por y , já fica isolado e , nesse caso, temos

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow p(x) = p^{-1}(x).$$

10. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \text{ (1)} \\ \frac{x+1}{2}, & 1 < x \leq 3 \text{ (2)} \\ x^2 - 7, & x > 3 \text{ (3)} \end{cases}$

$$(1) \ y = x, \ x \leq 1$$

$$(2) \ y = \frac{x+1}{2}, \ 1 < x \leq 3 \Rightarrow \frac{1+1}{2} < \frac{x+1}{2} \leq \frac{3+1}{2} \Rightarrow 1 < y \leq 2$$

Trocando as variáveis e isolando y , vem:

$$x = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow y = 2x - 1, \ 1 < x \leq 2.$$

$$(3) \ y = x^2 - 7, \ x > 3 \Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow x^2 - 7 > 9 - 7 \Rightarrow y > 2$$

Trocando as variáveis e isolando y , vem:

$$x = y^2 - 7 \Leftrightarrow y = \sqrt{x+7}, \ x > 2.$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \sqrt{x+7}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$11. \ f(x) = 2x - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow g^{-1}(x) = x^3 + 1$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = \left(\frac{x+3}{2}\right)^3 + 1 = \frac{x^3 + 9x^2 + 27x + 35}{8}$$

$$12. \ f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = \log \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \log \sqrt{x}$$

Trocando as variáveis e isolando y , vem:

$$x = \log \sqrt{y} \Leftrightarrow 10^x = \sqrt{y} \Leftrightarrow 10^{2x} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = 10^{2x}.$$

$$13. \ f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], \ f(x) = \sin \frac{x}{2} \Leftrightarrow y = \sin \frac{x}{2}$$

Trocando as variáveis e isolando y , vem:

$$x = \sin \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \arcsin x \Leftrightarrow y = 2 \arcsin x$$

$$f^{-1}(x) = 2 \arcsin x$$

CAPÍTULO II — Limite

$$15. \ |f(x) - 5| < 0,01 \Leftrightarrow |3x + 2 - 5| < 0,01 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |3x - 3| < 0,01 \Leftrightarrow 3 \cdot |x - 1| < 0,01 \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{0,01}{3} \\ \text{Portanto: } 0 < \delta \leq \frac{0,01}{3}.$$

$$16. \ |5 - 2x - 9| < 0,001 \Leftrightarrow |-2x - 4| < 0,001 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2|-x - 2| < 0,001 \Leftrightarrow |-x - 2| < 0,0005 \\ \text{Portanto: } 0 < \delta \leq 0,0005.$$

17. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1$

$$|x - 1 + 2| < 0,01 \Leftrightarrow |x + 1| < 0,01$$

Portanto: $0 < \delta \leq 0,01$.

18. $f(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x - 2} = \frac{(3x + 2)(3x - 2)}{3x - 2} = 3x + 2$

$$|3x + 2 - 4| < 0,0001 \Leftrightarrow |3x - 2| < 0,0001 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left|x - \frac{2}{3}\right| < 0,0001 \Leftrightarrow \left|x - \frac{2}{3}\right| < \frac{0,0001}{3}$$

Portanto: $0 < \delta \leq \frac{0,0001}{3}$.

20. a) $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 1) = 7$

Devemos demonstrar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(4x - 1) - 7| < \varepsilon.$$

Temos:

$$|(4x - 1) - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow |4x - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow 4|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Assim, sendo $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, vem:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{4} \mid 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 4|x - 2| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |4x - 8| < \varepsilon \Rightarrow |(4x - 1) - 7| < \varepsilon.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} (4 - 2x) = -2$

Devemos demonstrar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(4 - 2x) + 2| < \varepsilon.$$

Temos:

$$|(4 - 2x) + 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |6 - 2x| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|3 - x| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, sendo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, vem:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} \mid 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2|3 - x| < \varepsilon \Rightarrow |6 - 2x| < \varepsilon \Rightarrow |(4 - 2x) + 2| < \varepsilon.$$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x - 2) = -5$

Devemos demonstrar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow |(3x - 2) + 5| < \varepsilon.$$

Temos:

$$|(3x - 2) + 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x + 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x + 1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, sendo $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, vem:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{3} \mid 0 < |x + 1| < \frac{\varepsilon}{3} &\Rightarrow 3|x + 1| < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow |3x + 3| < \varepsilon &\Rightarrow |(3x - 2) + 5| < \varepsilon. \end{aligned}$$

22. a) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

Devemos provar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Temos:

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon \Rightarrow 4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon.$$

Suponhamos que o valor de δ que queremos encontrar seja menor ou igual a 2, isto é:

$$0 < |x - 2| < \delta \leq 2 \Rightarrow |x - 2| < 2 \Rightarrow -2 < x - 2 < 2 \Rightarrow 0 < x < 4.$$

Sendo $\varepsilon' > 0$ tal que $\begin{cases} \varepsilon' = \varepsilon, & \text{se } 0 < \varepsilon < 4 \\ 0 < \varepsilon' < 4, & \text{se } \varepsilon \geq 4 \end{cases}$ temos:

$$\begin{aligned} 4 - \varepsilon \leq 4 - \varepsilon' < x^2 < 4 + \varepsilon' \leq 4 + \varepsilon &\Rightarrow 0 < 4 - \varepsilon' < x^2 < 4 + \varepsilon' \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon'} < |x| < \sqrt{4 + \varepsilon'} &\Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon'} < x < \sqrt{4 + \varepsilon'} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon'} - 2 < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon'} - 2 &\Rightarrow \begin{cases} |x - 2| < \sqrt{4 + \varepsilon'} - 2 \\ |x - 2| < 2 - \sqrt{4 - \varepsilon'} \end{cases} \end{aligned}$$

Notando que:

$$0 < \sqrt{4 + \varepsilon'} - 2 < 2 - \sqrt{4 - \varepsilon'} < 2, \text{ temos:}$$

para todo $\varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{4 + \varepsilon'} - 2 > 0$,

em que $\begin{cases} \varepsilon' = \varepsilon, & \text{se } 0 < \varepsilon < 4 \\ 0 < \varepsilon' < 4, & \text{se } \varepsilon \geq 4 \end{cases}$

tal que $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$.

De fato:

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < \delta &\Rightarrow |x - 2| < \sqrt{4 + \varepsilon'} - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon'} - 2 &< 2 - \sqrt{4 + \varepsilon'} < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon'} - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon'} - 2 &< x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon'} - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon'} &< x < \sqrt{4 + \varepsilon'} \Rightarrow 4 - \varepsilon' < x^2 < 4 + \varepsilon' \Rightarrow \\ \Rightarrow -\varepsilon' &< x^2 - 4 < \varepsilon' \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon' \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 1) = 10$

Devemos demonstrar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x + 3| < \delta \Rightarrow |(x^2 + 1) - 10| < \varepsilon.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} |(x^2 + 1) - 10| < \varepsilon &\Rightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x^2 - 9 < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow 9 - \varepsilon &< x^2 < 9 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Suponhamos que o valor de δ que queremos encontrar seja menor ou igual a 3, isto é:

$$0 < |x + 3| < \delta < 3 \Rightarrow |x + 3| < 3 \Rightarrow -3 < x + 3 < 3 \Rightarrow -6 < x < 0.$$

Sendo $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' = \varepsilon$ se $0 < \varepsilon < 9$ ou $0 < \varepsilon' < 9$ se $\varepsilon \geq 9$, temos:

$$\begin{aligned} 9 - \varepsilon &\leq 9 - \varepsilon' < x^2 < 9 + \varepsilon' \leq 9 + \varepsilon \Rightarrow 0 < 9 - \varepsilon' < x^2 < 9 + \varepsilon' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{9 - \varepsilon'} < |x| < \sqrt{9 + \varepsilon'} \Rightarrow -\sqrt{9 + \varepsilon'} < x < -\sqrt{9 - \varepsilon'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 - \sqrt{9 + \varepsilon'} < x + 3 < 3 - \sqrt{9 - \varepsilon'} \Rightarrow \begin{cases} |x + 3| < 3 - \sqrt{9 - \varepsilon'} \\ |x + 3| < \sqrt{9 + \varepsilon'} - 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Notando que

$0 < \sqrt{9 + \varepsilon'} - 3 < 3 - \sqrt{9 - \varepsilon'} < 3$, decorre que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon'} - 3$ em que $\varepsilon' = \varepsilon$ se $0 < \varepsilon < 9$ ou $0 < \varepsilon' < 9$ se $\varepsilon \geq 9$, tal que:

$$\begin{aligned} 0 < |x + 3| &< \delta \Rightarrow |x + 3| < \sqrt{9 + \varepsilon'} - 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 - \sqrt{9 + \varepsilon'} < x + 3 < \sqrt{9 + \varepsilon'} - 3 < 3 - \sqrt{9 - \varepsilon'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 - \sqrt{9 + \varepsilon'} < x + 3 < 3 - \sqrt{9 - \varepsilon'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\sqrt{9 + \varepsilon'} < x < -\sqrt{9 - \varepsilon'} \Rightarrow 9 - \varepsilon' < x^2 < 9 + \varepsilon' \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\varepsilon' < x^2 + 9 < \varepsilon' \Rightarrow |x^2 + 9| < \varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (1 - x^2) = -3$

Devemos provar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(1 - x^2) + 3| < \varepsilon.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} |(1 - x^2) + 3| &< \varepsilon \Leftrightarrow |4 - x^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon \Rightarrow 4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Sendo $\varepsilon' > 0$, tal que se $0 < \varepsilon < 4$, então $\varepsilon' = \varepsilon$ ou se $\varepsilon \geq 4$ então $0 < \varepsilon' < 4$, temos:

$$\begin{aligned} 4 - \varepsilon &\leq 4 - \varepsilon' < x^2 < 4 + \varepsilon' \leq 4 + \varepsilon \Rightarrow 0 < 4 - \varepsilon' < x^2 < 4 + \varepsilon' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon'} < |x| < \sqrt{4 + \varepsilon'} \Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon'} < x < \sqrt{4 + \varepsilon'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon} - 2 < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 \Rightarrow \begin{cases} |x - 2| < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 \\ |x - 2| < 2 - \sqrt{4 - \varepsilon} \end{cases} \end{aligned}$$

Notando que $0 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 < 2 - \sqrt{4 - \varepsilon}$, vem:

para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$, em que $\varepsilon' = \varepsilon$ se $0 < \varepsilon < 4$ ou $0 < \varepsilon' < 4$ se $\varepsilon \geq 4$, tal que $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |4 - x^2| < \varepsilon$.

De fato:

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < \delta &\Rightarrow |x - 2| < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon} - 2 < 2 - \sqrt{4 + \varepsilon} < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon} - 2 < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{4 - \varepsilon} < x < \sqrt{4 + \varepsilon} \Rightarrow 4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |4 - x^2| < \varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{x+2} = 2$

Devemos provar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{6}{x+2} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Notemos que:

$$\left| \frac{6}{x+2} - 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{6}{x+2} - 2 < \varepsilon \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{6}{x+2} < 2 + \varepsilon.$$

Considerando $\varepsilon' > 0$, tal que $\varepsilon' = \varepsilon$ se $0 < \varepsilon < 2$ ou $0 < \varepsilon' < 2$ se $\varepsilon \geq 2$, temos:

$$\begin{aligned} 2 - \varepsilon &\leq 2 - \varepsilon' < \frac{6}{x+2} < 2 + \varepsilon' \leq 2 + \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < 2 - \varepsilon' &< \frac{6}{x+2} < 2 + \varepsilon' \Rightarrow \frac{1}{2 - \varepsilon'} > \frac{x+2}{6} > \frac{1}{2 + \varepsilon'} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{6}{2 - \varepsilon'} &> x + 2 > \frac{6}{2 + \varepsilon'} \Rightarrow \frac{6}{2 - \varepsilon'} - 3 > x - 1 > \frac{6}{2 + \varepsilon'} - 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3\varepsilon'}{2 - \varepsilon'} &> x - 1 > \frac{-3\varepsilon'}{2 + \varepsilon'} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{3\varepsilon'}{2 - \varepsilon'} \\ \text{e} \\ |x - 1| < \frac{3\varepsilon'}{2 + \varepsilon'} \end{cases} \end{aligned}$$

Notando que $0 < \frac{3\varepsilon'}{2 + \varepsilon'} < \frac{3\varepsilon'}{2 - \varepsilon'}$ para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \frac{3\varepsilon'}{2 + \varepsilon'} > 0$, em que $\varepsilon' - \varepsilon$, se $0 < \varepsilon < 3$ ou $0 < \varepsilon' < 3$, se $\varepsilon \geq 3$, tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{6}{x+2} - 2 \right| < \varepsilon.$$

De fato:

$$\begin{aligned} 0 < |x - 1| < \delta &\Rightarrow |x - 1| < \frac{3\varepsilon'}{2 + \varepsilon'} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{-3\varepsilon'}{2 + \varepsilon'} &< x - 1 < \frac{3\varepsilon'}{2 + \varepsilon'} < \frac{3\varepsilon'}{2 - \varepsilon'} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{-3\varepsilon'}{2 + \varepsilon'} &< x - 1 < \frac{3\varepsilon'}{2 - \varepsilon'} \Rightarrow \frac{6}{2 + \varepsilon'} - 3 < x + 2 < \frac{6}{2 - \varepsilon'} - 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{6}{2 + \varepsilon'} &< x + 2 < \frac{6}{2 - \varepsilon'} \Rightarrow \frac{1}{2 + \varepsilon'} < \frac{x+2}{6} < \frac{1}{2 - \varepsilon'} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 - \varepsilon' &< \frac{6}{x+2} < 2 + \varepsilon' \Rightarrow -\varepsilon' < \frac{6}{x+2} - 2 < \varepsilon' \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \frac{6}{x+2} - 2 \right| &< \varepsilon' \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

25. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = 4$

Devemos provar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+2}{x-1} - 4 \right| < \varepsilon.$$

Notemos que:

$$\left| \frac{x+2}{x-1} - 4 \right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{x+2}{x-1} - 4 < \varepsilon \Rightarrow 4 - \varepsilon < \frac{x+2}{x-1} < 4 + \varepsilon.$$

Considerando $\varepsilon' > 0$, tal que $\varepsilon' = \varepsilon$ se $0 < \varepsilon < 4$ ou $0 < \varepsilon' < 4$ se $\varepsilon \geq 4$, temos:

$$4 - \varepsilon \leq 4 - \varepsilon' < \frac{x+2}{x-1} < 4 + \varepsilon' \leq 4 + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < 4 - \varepsilon' < \frac{x+2}{x-1} < 4 + \varepsilon'.$$

Considerando ainda que:

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}, \text{ vem:}$$

$$0 < 4 - \varepsilon' < \frac{3}{x-1} + 1 < 4 + \varepsilon' \Rightarrow 3 - \varepsilon' < \frac{3}{x-1} < 3 + \varepsilon' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3 - \varepsilon'} > \frac{x-1}{3} > \frac{1}{3 + \varepsilon'} \Rightarrow \frac{3}{3 - \varepsilon'} > x - 1 > \frac{3}{3 + \varepsilon'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{3 - \varepsilon'} - 1 > x - 2 > \frac{3}{3 + \varepsilon'} - 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon'}{3 - \varepsilon'} > x - 2 > \frac{-\varepsilon'}{3 + \varepsilon'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 2| < \frac{\varepsilon'}{3 - \varepsilon'} \\ |x - 2| < \frac{\varepsilon'}{3 + \varepsilon'} \end{cases}$$

Notando que $0 < \frac{\varepsilon'}{3 + \varepsilon'} < \frac{\varepsilon'}{3 - \varepsilon'}$, temos que para todo $\varepsilon > 0$,

$\exists \delta = \frac{\varepsilon'}{3 + \varepsilon'} > 0$ em que $\varepsilon' = \varepsilon$, se $0 < \varepsilon < 4$ ou $0 < \varepsilon' < 4$, se $\varepsilon \geq 4$,

tal que: $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+2}{x-1} - 4 \right| < \varepsilon$.

De fato:

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon'}{3 + \varepsilon'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\varepsilon'}{3 + \varepsilon'} < x - 2 < \frac{\varepsilon'}{3 + \varepsilon'} < \frac{\varepsilon'}{3 - \varepsilon'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\varepsilon'}{3 + \varepsilon'} < x - 2 < \frac{\varepsilon'}{3 - \varepsilon'} \Rightarrow \frac{3}{3 + \varepsilon'} - 1 < x - 2 < \frac{3}{3 - \varepsilon'} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{3 + \varepsilon'} < x - 1 < \frac{3}{3 - \varepsilon'} \Rightarrow \frac{1}{3 + \varepsilon'} < \frac{x-1}{3} < \frac{1}{3 - \varepsilon'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - \varepsilon' < \frac{3}{x-1} < 3 + \varepsilon' \Rightarrow 4 - \varepsilon' < \frac{3}{x-1} + 1 < 4 + \varepsilon' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - \varepsilon' < \frac{x+2}{x-1} < 4 + \varepsilon' \Rightarrow -\varepsilon' < \frac{x+2}{x-1} - 4 < \varepsilon' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x+2}{x-1} - 4 \right| < \varepsilon' \leq \varepsilon.$$

26. $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$

Devemos provar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x^3 - 1| < \varepsilon.$$

$$\text{Notemos que } |x^3 - 1| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x^3 - 1 < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < x^3 < 1 + \varepsilon.$$

Suponhamos que $\delta \leq 1$:

$$0 < |x - 1| < \delta \leq 1 \Rightarrow |x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 < x < 2$ e, sendo $\varepsilon' > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon' = \varepsilon$ ou se $\varepsilon \geq 1$, então $0 < \varepsilon' < 1$, temos:

$$1 - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon' < x^3 < 1 + \varepsilon' \leq 1 + \varepsilon \Rightarrow 0 < 1 - \varepsilon' < x^3 < 1 + \varepsilon' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1 - \varepsilon'} < x < \sqrt[3]{1 + \varepsilon'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1 - \varepsilon} - 1 < x - 1 < \sqrt[3]{1 + \varepsilon} - 1 \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \sqrt[3]{1 + \varepsilon} - 1 \\ |x - 1| < 1 - \sqrt[3]{1 - \varepsilon} \end{cases}$$

Notando que $0 < 1 - \sqrt[3]{1 - \varepsilon} < \sqrt[3]{1 + \varepsilon} - 1 < 1$, temos que para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = 1 - \sqrt[3]{1 - \varepsilon}$, em que $\varepsilon' = \varepsilon$, se $0 < \varepsilon < 1$ ou $0 < \varepsilon' < 1$ se $\varepsilon \geq 1$, tal que $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x^3 - 1| < \varepsilon$.

De fato:

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1| < 1 - \sqrt[3]{1 - \varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1 - \varepsilon} - 1 < x - 1 < 1 - \sqrt[3]{1 - \varepsilon} < \sqrt[3]{1 + \varepsilon} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1 - \varepsilon} - 1 < x - 1 < \sqrt[3]{1 + \varepsilon} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1 - \varepsilon} < x < \sqrt[3]{1 + \varepsilon} \Rightarrow 1 - \varepsilon < x^3 < 1 + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < x^3 - 1 < \varepsilon \Rightarrow |x^3 - 1| < \varepsilon \leq \varepsilon.$$

28.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 - 7x + 5) \stackrel{(T)}{=} 4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 5 = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2x^2 - 4x + 3) \stackrel{(T)}{=} (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 4$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 2}{x^2 - 6x + 5} \stackrel{(L_7)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 6x + 5)} \stackrel{(T)}{=} \frac{3 \cdot 2 + 2}{2^2 - 6 \cdot 2 + 5} =$

$$= \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3}$$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 5x + 4}{2x + 1} \stackrel{(L_7)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 5x + 4)}{\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 1)} \stackrel{(T)}{=} \frac{12}{-1} = -12$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{5 - 3x} \stackrel{(L_7)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 2x - 3)}{\lim_{x \rightarrow -3} (5 - 3x)} = \frac{0}{14} = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 - 2x - 5}{-x^2 + 3x + 4} \right)^3 \stackrel{(L_6)}{=} \left[\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 - 2x - 5}{-x^2 + 3x + 4} \right) \right]^3 \stackrel{(L_7)}{=}$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x - 5)}{\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 3x + 4)} \right]^3 \stackrel{(T)}{=} \left[\frac{3}{6} \right]^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \\
 g) \quad &\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^3 - 3x^2 - 2x - 5}{2x^2 - 9x + 2} \right)^2 \stackrel{(L_6)}{=} \left[\frac{\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 3x^2 - 2x - 5)}{\lim_{x \rightarrow 4} (2x^2 - 9x + 2)} \right]^2 \stackrel{(T)}{=} \\
 &= \left[\frac{64 - 48 - 8 - 5}{32 - 36 + 2} \right]^2 = \left[\frac{3}{-2} \right]^2 = \left[-\frac{3}{2} \right]^2 = \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) \quad &\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{2x^2 + 3x - 4}{5x - 4}} \stackrel{(L_8)}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2 + 3x - 4}{5x - 4} \right)} \stackrel{(L_7)}{=} \\
 &= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 3x - 4)}{\lim_{x \rightarrow -1} (5x - 4)}} \stackrel{(T)}{=} \sqrt{\frac{2 - 3 - 4}{-5 - 4}} = \sqrt{\frac{-5}{-9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \\
 i) \quad &\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{3x^3 - 5x^2 - x + 2}{4x + 3}} \stackrel{(L_8)}{=} \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3 - 5x^2 - x + 2}{4x + 3}} \stackrel{(L_7)}{=} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{\lim_{x \rightarrow -2} (3x^3 - 5x^2 - x + 2)}{\lim_{x \rightarrow -2} (4x + 3)}} \stackrel{(T)}{=} \sqrt[3]{\frac{-24 - 20 + 2 + 2}{-8 + 3}} = \\
 &= \sqrt[3]{\frac{-40}{-5}} = \sqrt[3]{8} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j) \quad &\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 3x + 2}{6 - 4x}} \stackrel{(L_7)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x^2 + 3x + 2}}{\lim_{x \rightarrow 2} (6 - 4x)} \stackrel{(L_8)}{=} \\
 &= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (6 - 4x)}} \stackrel{(T)}{=} \sqrt{\frac{8 + 6 + 2}{6 - 8}} = \frac{\sqrt{16}}{-2} = -2
 \end{aligned}$$

- 30.**
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{2 + x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{2 + x} = \lim_{x \rightarrow -2} (2 - x) = 4$
 - $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} (2x + 3) = 6$
 - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 1)}{(x - 3)(x + 2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x + 2)} = \frac{2}{5}$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x + 3)}{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x - 2)} = \frac{\frac{1}{2} + 3}{\frac{1}{2} - 2} = -\frac{7}{3}$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{6x^2 + 11x + 3}{2x^2 - 5x - 12} = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2(x - 4)\left(x + \frac{3}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{3\left(x + \frac{1}{3}\right)}{x - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} 3\left(x + \frac{1}{3}\right)}{\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} (x - 4)} = \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{11}{2}} = \frac{7}{11}$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)} = \frac{3}{2}$$

$$\text{h)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{8 + x^3}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2+x)(x^2 - 2x + 4)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4)}{\lim_{x \rightarrow -2} (2 - x)} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{8 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2 + 4)}{(x-2)(-x^2 - 2x - 4)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4)}{\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 - 2x - 4)} = \frac{4 \cdot 8}{-12} = -\frac{8}{3}$$

32. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 5$

33.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 9x + 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x + 3)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} 2\left(x + \frac{3}{2}\right) = \\ = 2 \cdot \left(-3 + \frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$$

35. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^3 - x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 + 2x - 3)}{(x + 1)(x^2 - 2x + 2)} = \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 2} = -\frac{4}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x - 9}{x^3 - 8x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 3)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 1)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 3x + 1} = \frac{21}{19}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 4}{x^3 - 4x^2 + 8x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 2x + 4)}{(x - 1)(x^2 - 3x + 5)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 3x + 5} = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 10x + 4}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x - 2)}{x^2(x - 2)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 + 4x - 2}{x^2} = \frac{11}{2}$

37. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 2)}{(x - 1)(x^3 + x^2 + x - 3)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x^2 + 2x + 3)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 4x^3 + x^2 - 12x - 12}{2x^3 + 7x^2 + 4x - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^3 + 2x^2 - 3x - 6)}{(x + 2)(2x^2 + 3x - 2)} = \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 6}{2x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 3)}{(x + 2)(2x - 1)} = \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3}{2x - 1} = -\frac{1}{5}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^3 - x^2 + 5x + 4}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^3 - 2x^2 + x + 4)}{(x + 1)(x^2 + 3x + 2)} = \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - 3x + 4)}{(x + 1)(x + 2)} =$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 2} = 8 \\
 \text{d)} \quad &\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 12x - 4}{2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 12x - 8} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^3 - 5x - 2)}{(x+2)(2x^3 + 3x^2 - 4x - 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 5x - 2}{2x^3 + 3x^2 - 4x - 4} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x - 1)}{(x+2)(2x^2 - x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x^2 - x - 2} = \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

38.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad &\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = 2a \\
 \text{b)} \quad &\lim_{x \rightarrow -a} \frac{a^2 - x^2}{a^3 + x^3} = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{(a-x)(a+x)}{(a+x)(x^2 - ax + a^2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -a} \frac{a-x}{x^2 - ax + a^2} = \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a} \\
 \text{c)} \quad &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1)}{(x-1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_n = n \\
 \text{d)} \quad &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1} = \frac{m}{n} \\
 \text{e)} \quad &\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1}) = \\
 &= a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + a^2 \cdot a^{n-3} + \dots + a^{n-1} = \\
 &= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1}}_n = n \cdot a^{n-1} \\
 \text{f)} \quad &\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1})}{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1}}{x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1}} = \\
 &= \frac{a^{m-1} + a \cdot a^{m-2} + a^2 + a^{m-3} + \dots + a^{m-1}}{a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + a^2 \cdot a^{n-3} + \dots + a^{n-1}} = \frac{m \cdot a^{m-1}}{n \cdot a^{n-1}} = \\
 &= \frac{m}{n} \cdot a^{(m-1)-(n-1)} = \frac{m}{n} \cdot a^{m-n}
 \end{aligned}$$

- 40.**
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})}{(1 + \sqrt{1-x})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-2x-x^2} - 1)(\sqrt{1-2x-x^2} + 1)}{x(\sqrt{1-2x-x^2} + 1)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(2+x)}{x(\sqrt{1-2x-x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x-2}{\sqrt{1-2x-x^2} + 1} = -1$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{2x} + \sqrt{x+1})}{(x-1)(\sqrt{2x} + \sqrt{x+1})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
- 41.**
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10-x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3 - \sqrt{10-x})(3 + \sqrt{10-x})}{(x^2 - 1)(3 + \sqrt{10-x})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(3 + \sqrt{10-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(3 + \sqrt{10-x})} = \frac{1}{12}$
 - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2 - \sqrt{x+1})(2 + \sqrt{x+1})}{(x^2 - 9)(2 + \sqrt{x+1})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x+3)(x-3)(2 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x+3)(2 + \sqrt{x+1})} = -\frac{1}{24}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{x+3} + 2)} =$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x - 2)(\sqrt{x + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 2)(\sqrt{x + 3} + 2)} = -\frac{1}{4} \\
 \text{d)} \quad &\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2-\sqrt{3x-2}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x+2+\sqrt{3x-2}})}{(\sqrt{x+2-\sqrt{3x-2}})(\sqrt{x+2+\sqrt{3x-2}})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(\sqrt{x+2+\sqrt{3x-2}})}{-2(x - 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(\sqrt{x+2+\sqrt{3x-2}})}{-2} = -8 \\
 \text{e)} \quad &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x - 3}}{x^2 - 3x + 2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x - 3})(\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x - 3})}{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x - 3})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)(\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x - 3})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x - 3})} = \frac{-6}{-2} = 3
 \end{aligned}$$

- 43.**
- $$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad &\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2-\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1} - 3)(\sqrt{2x+1} + 3)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x-2-\sqrt{2}})(\sqrt{2x+1} + 3)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{\sqrt{2x+1} + 3} = \frac{2(2\sqrt{2})}{3 + 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\
 \text{b)} \quad &\lim_{x \rightarrow 6} \frac{4 - \sqrt{10+x}}{2 - \sqrt{10-x}} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(4 - \sqrt{10+x})(4 + \sqrt{10+x})(2 + \sqrt{10-x})}{(2 - \sqrt{10-x})(4 + \sqrt{10+x})(2 + \sqrt{10-x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(6 - x)(2 + \sqrt{10-x})}{(-6 + x)(4 + \sqrt{10+x})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 + \sqrt{10-x}}{-(4 + \sqrt{10+x})} = \\
 &= \frac{2 + 2}{-(4 + 4)} = -\frac{1}{2} \\
 \text{c)} \quad &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1} - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+4})(\sqrt{3x+4} + \sqrt{x+4})(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{3x+4} + \sqrt{x+4})(\sqrt{x+1} + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{x+1} + 1)}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{x+4}} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1 \\
 \text{d)} \quad &\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x-2} - \sqrt{x^2-x+2}}{\sqrt{x+2}-2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+x-2} - \sqrt{x^2-x+2})(\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2-x+2})(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2-x+2})(\sqrt{x+2}+2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\sqrt{x+2}+2)}{\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2-x+2}} = \frac{2(2+2)}{2+2} = 2
 \end{aligned}$$

44.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 2}{\sqrt{3x^2 - 5x - 1} - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 2)(\sqrt{2x^2 - 3x + 2} + 2)(\sqrt{3x^2 - 5x - 1} + 1)}{(\sqrt{3x^2 - 5x - 1} - 1)(\sqrt{2x^2 - 3x + 2} + 2)(\sqrt{3x^2 - 5x - 1} + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - 3x - 2)(\sqrt{3x^2 - 5x - 1} + 1)}{(3x^2 - 5x - 2)(\sqrt{2x^2 - 3x + 2} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(\sqrt{3x^2 - 5x - 1} + 1)}{3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right)(\sqrt{2x^2 - 3x + 2} + 2)} = \\
 &= \frac{2\left(2 + \frac{1}{2}\right)(\sqrt{12 - 10 - 1} + 1)}{3\left(2 + \frac{1}{3}\right)(\sqrt{8 - 6 + 2} + 2)} = \frac{5(1 + 1)}{7(2 + 2)} = \frac{5}{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 4x + 2} - 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 6} - 2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{3x^2 + 4x + 2} - 1)(\sqrt{3x^2 + 4x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 3x + 6} + 2)}{(\sqrt{x^2 + 3x + 6} - 2)(\sqrt{3x^2 + 4x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 3x + 6} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x^2 + 4x + 1)(\sqrt{x^2 + 3x + 6} + 2)}{(x^2 + 3x + 2)(\sqrt{3x^2 + 4x + 2} + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3x + 6} + 2)}{(x + 1)(x + 2)(\sqrt{3x^2 + 4x + 2} + 1)} = \\
 &= \frac{3\left(-1 + \frac{1}{3}\right)(\sqrt{1 - 3 + 6} + 2)}{(-1 + 2)(\sqrt{3 - 4 + 2} + 1)} = -4
 \end{aligned}$$

46.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x+1} - 1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - 1}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+3}-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)\left(\sqrt[3]{(2x+3)^2} + \sqrt[3]{2x+3} + 1\right)}{\left(\sqrt[3]{2x+3} - 1\right)\left(\sqrt[3]{(2x+3)^2} + \sqrt[3]{2x+3} + 1\right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{(2x+3)^2} + \sqrt[3]{2x+3} + 1}{2} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 - 2x + x^2} - 2}{x - x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{8 - 2x + x^2} - 2)(\sqrt[3]{(8 - 2x + x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8 - 2x + x^2 + 4})}{x(1-x)(\sqrt[3]{(8 - 2x + x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8 - 2x + x^2 + 4})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(2-x)}{(1-x)(\sqrt[3]{(8 - 2x + x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8 - 2x + x^2 + 4})} \\
 &= \frac{-2}{1(\sqrt[3]{64} + 2\sqrt[3]{8 + 4})} = -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

47.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{1 + \sqrt[3]{3x-1}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt[3]{1-x})(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})(1 - \sqrt[3]{(3x-1)^2} + \sqrt[3]{(3x-1)^2})}{(1 + \sqrt[3]{3x-1})(1 - \sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{(3x-1)^2})(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{(3x-1)^2}}{3(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} = \frac{1 - (-1) + 1}{3(1 + 1 + 1)} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2-3x}-2}{1+\sqrt[3]{2x+3}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{2-3x}-2)(\sqrt[3]{(2-3x)^2} + 2\sqrt[3]{2-3x} + 4)(1-\sqrt[3]{2+3x} + \sqrt[3]{(2x+3)^2})}{(1+\sqrt[3]{2x+3})(1-\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{(2x+3)^2})(\sqrt[3]{(2-3x)^2} + 2\sqrt[3]{2-3x} + 4)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3(1-\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{(2x+3)^2})}{2(\sqrt[3]{(2-3x)^2} + 2\sqrt[3]{2-3x} + 4)} = \frac{-3(1+1+1)}{2(4+4+4)} = -\frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2-7x+1}+1}{\sqrt[3]{2x^2-5x+3}-1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(\sqrt[3]{3x^2-7x+1}+1)(\sqrt[3]{(3x^2-7x+1)^2} - \sqrt[3]{3x^2-7x+1} + 1)}{(\sqrt[3]{2x^2-5x+3}-1)(\sqrt[3]{(2x^2-5x+3)^2} + \sqrt[3]{2x^2-5x+3} + 1)}}{(\sqrt[3]{(2x^2-5x+3)^2} + \sqrt[3]{2x^2-5x+3} + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(\sqrt[3]{(2x^2-5x+3)^2} + \sqrt[3]{2x^2-5x+3} + 1)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(\sqrt[3]{(3x^2-7x+1)^2} - \sqrt[3]{3x^2-7x+1} + 1)} = \\
 &= \frac{5(1+1+1)}{3(1+1+1)} = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

- 48.**
- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5x+4}-3}{\sqrt[3]{x-2}+1} =$
- $$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{5x+4}-3)(\sqrt[3]{5x+4}+3)(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1)}{(\sqrt[3]{x-2}+1)(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1)(\sqrt[3]{5x+4}+3)} =$$
- $$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1)}{\sqrt[3]{5x+4}+3} = \frac{5(1+1+1)}{3+3} = \frac{5}{2}$$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{\sqrt{x-1}-1} =$
- $$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{5x-2}-2)(\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4)} =$$
- $$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(\sqrt{x-1}+1)}{\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4} = \frac{5 \cdot 2}{4+4+4} = \frac{5}{6}$$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x^3-5x+6}-2}{\sqrt[3]{x^2-3x+1}+1} =$
- $$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{3x^3-5x+6}-2)(\sqrt[3]{3x^3-5x+6}+2)}{(\sqrt[3]{x^2-3x+1}+1)(\sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2-3x+1}+1)} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2-3x+1}+1)}{(\sqrt[3]{3x^3-5x+6}+2)} =$$
- $$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2+3x-2)(\sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2-3x+1}+1)}{(x-2)(\sqrt[3]{3x^3-5x+6}+2)} =$$
- $$= \frac{4(1+1+1)}{(-1)(2+2)} = -3$$
- 50.**
- a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$
- Fazendo $\sqrt[3]{x} = y \Rightarrow x = y^3$, vem:
- $$\lim_{y \rightarrow -1} \frac{y+1}{y^3+1} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y+1}{(y+1)(y^2-y+1)} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{1}{y^2-y+1} = \frac{1}{y^2-y+1} = \frac{1}{3}$$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
- Fazendo $\sqrt{x} = y$, vem: $\sqrt{x} = (\sqrt[6]{x})^3 = y^3$ e $\sqrt[3]{x} = (\sqrt[6]{x})^2 = y^2$.
- $$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}$$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

Fazendo $\sqrt[12]{x} = y$, vem: $\sqrt[3]{x} = (\sqrt[12]{x})^4 = y^4$ e $\sqrt[4]{x} = (\sqrt[12]{x})^3 = y^3$.

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y^2 + 1)(y + 1)(y - 1)}{(y - 1)(y^2 + y + 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y^2 + 1)(y + 1)}{y^2 + y + 1} = \frac{4}{3}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$

Fazendo $\sqrt[6]{1+x} = y$, vem: $\sqrt{1+x} = (\sqrt[6]{1+x})^3 = y^3$ e
 $\sqrt[3]{1+x} = (\sqrt[6]{1+x})^2 = y^2$.

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y - 1)(y^2 + y + 1)}{(y - 1)(y + 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y + 1} = \frac{3}{2}$$

51. a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

Fazendo $\sqrt{x} = y$, vem $x = y^2$ e $\sqrt{a} = z$, vem $a = z^2$.

Além disso, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} = z = \lim_{y \rightarrow z} y$.

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow z} \frac{y^2 \cdot y - z^2 \cdot z}{y - z} &= \lim_{y \rightarrow z} \frac{y^3 - z^3}{y - z} = \lim_{y \rightarrow z} \frac{(y - z)(y^2 + yz + z^2)}{y - z} = \\ &= \lim_{y \rightarrow z} (y^2 + yz + z^2) = 3z^2 = 3a. \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$

Fazendo $\sqrt[n]{x} = y$, vem $x = y^n$ e $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[n]{x} = \lim_{y \rightarrow 1} y$.

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{y^n - 1} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{(y - 1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1} = \underbrace{\frac{1}{1 + 1 + \dots + 1 + 1}}_n = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[mn]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$

Fazendo $\sqrt[mn]{x} = y \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[mn]{x} = (\sqrt[m]{x})^n = y^n \\ \sqrt[n]{x} = (\sqrt[mn]{x})^m = y^m \end{cases}$

Além disso, $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[mn]{x} = 1 = \lim_{y \rightarrow 1} y$.

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^n - 1}{y^m - 1} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y - 1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1)}{(y - 1)(y^{m-1} + y^{m-2} + \dots + y + 1)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1}{y^{m-1} + y^{m-2} + \dots + y + 1} = \underbrace{\frac{1 + 1 + \dots + 1 + 1}{1 + 1 + \dots + 1 + 1}}_m = \frac{n}{m} \end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{x} = y \Rightarrow x = y^n \\ \sqrt[n]{a} = z \Rightarrow a = z^n \end{array} \right\} \text{e } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} = z = \lim_{y \rightarrow z} y$$

$$\lim_{y \rightarrow z} \frac{y - z}{y^n - z^n} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow z} \frac{y - z}{(y - z)(y^{n-1} + y^{n-2} \cdot z + y^{n-3} \cdot z^2 + \dots + y \cdot z^{n-2} + z^{n-1})} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow z} \frac{1}{y^{n-1} + y^{n-2} \cdot z + y^{n-3} \cdot z^2 + \dots + y \cdot z^{n-2} + z^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{z^{n-1} + z^{n-1} + z^{n-1} + \dots + z^{n-1}}_n} = \frac{1}{n \cdot z^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{a})^{n-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt[n]{a}}{n(\sqrt[n]{a})^{n-1}(\sqrt[n]{a})} = \frac{\sqrt[n]{a}}{na}$$

e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[mn]{x} - \sqrt[mn]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$

Fazendo:

$$\sqrt[mn]{x} = y \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[m]{x} = (\sqrt[n]{x})^n = y^n \\ \sqrt[n]{x} = (\sqrt[m]{x})^m = y^m \end{cases}$$

$$\sqrt[mn]{a} = z \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[m]{a} = (\sqrt[n]{a})^n = z^n \\ \sqrt[n]{a} = (\sqrt[m]{a})^m = z^m \end{cases}$$

Além disso:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[mn]{x} = \sqrt[mn]{a} = z = \lim_{y \rightarrow z} y$$

Assim, temos:

$$\lim_{y \rightarrow z} \frac{y^n - z^n}{y^m - z^m} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow z} \frac{(y - z)(y^{n-1} + y^{n-2} \cdot z + y^{n-3} \cdot z^2 + \dots + yz^{n-2} + z^{n-1})}{(y - z)(y^{m-1} + y^{m-2} \cdot z + y^{m-3} \cdot z^2 + \dots + yz^{m-2} + z^{m-1})} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow z} \frac{y^{n-1} + y^{n-2} \cdot z + y^{n-3} \cdot z^2 + \dots + yz^{n-2} + z^{n-1}}{y^{m-1} + y^{m-2} \cdot z + y^{m-3} \cdot z^2 + \dots + yz^{m-2} + z^{m-1}} =$$

$$= \frac{z^{n-1} + z^{n-2} \cdot z + z^{n-3} \cdot z^2 + \dots + z^{n-1}}{z^{m-1} + z^{m-2} \cdot z + z^{m-3} \cdot z^2 + \dots + z^{m-1}} = \frac{n \cdot z^{n-1}}{m \cdot z^{m-1}} =$$

$$= \frac{n(\sqrt[n]{a})^{n-1}}{m \cdot (\sqrt[mn]{a})^{m-1}} = \frac{n}{m} \cdot \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{n-m} = \frac{n}{m} \sqrt[mn]{a^{n-m}}$$

52.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 2) = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x + 1) = 5$
 c) Não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ porque $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$

53.

- a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3 - 2x) = 5$
 b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (4 - x) = 5$
 c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 5$

54.

- a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - 5) = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4 - 5x) = -11$
 c) Não existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ porque $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x).$

55.

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (1 - x^2) = -3$
 c) Não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ porque $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x).$

56.

- a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (8 - 2x) = 2$
 b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 3x + 2) = 2$
 c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

57.

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 6x - 7) = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 - 3x - 1) = 1$
 c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

59.

$$f(x) = \frac{|x + 1|}{x + 1}$$

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1) = -1$

- c) Não existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ porque $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

60. $f(x) = \frac{|3x - 2|}{2 - 3x}$

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2, & \text{se } x \geq \frac{2}{3} \\ -(3x - 2), & \text{se } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} \frac{3x - 2}{2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} \frac{3x - 2}{-(3x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} (-1) = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} \frac{-(3x - 2)}{2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} \frac{2 - 3x}{2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} 1 = 1$

c) $\nexists \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(x)$

61. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{|x - 1|}$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 1 \\ -(x - 1), & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$$

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x - 4)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 4) = -3$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x - 4)}{-(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x - 4) = 3$

c) $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

62. $f(x) = \frac{|3x^2 - 5x - 2|}{x - 2}$

$$|3x^2 - 5x - 2| = \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2, & \text{se } x \leq -\frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 2 \\ -(3x^2 - 5x - 2), & \text{se } -\frac{1}{3} < x < 2 \end{cases}$$

Além disso, $3x^2 - 5x - 2 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)$.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3\left(x + \frac{1}{3}\right) = 7$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[-3\left(x + \frac{1}{3}\right)\right] = -7$

c) $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

63. $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{|x - 2|}$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \geq 2 \\ -(x - 2), & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1)(x - 3) = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{-(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} [-(x - 1)(x - 3)] = 1$

c) $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

64. $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{|2x^2 - 9x + 10|}$

$$|2x^2 - 9x + 10| = \begin{cases} (2x^2 - 9x + 10) = 2(x - 2)\left(x - \frac{5}{2}\right), & \text{se } x \leq 2 \text{ ou } x \geq \frac{5}{2} \\ -(2x^2 - 9x + 10) = -2(x - 2)\left(x - \frac{5}{2}\right), & \text{se } 2 < x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}{-2(x - 2)\left(x - \frac{5}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 1)(x - 3)}{-2\left(x - \frac{5}{2}\right)} = -3$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}{2(x - 2)\left(x - \frac{5}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x + 1)(x - 3)}{2\left(x - \frac{5}{2}\right)} = 3$

c) $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

65. a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$

c) $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} [x]$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - [x]) = 1 - 1 = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - [x]) = 1 - 0 = 1$

f) $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} (x - [x])$

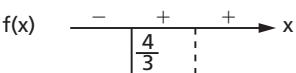
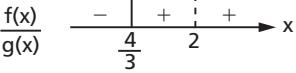
g) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x + [x]) = 1 + 1 = 2$

h) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + [x]) = 1 + 0 = 1$

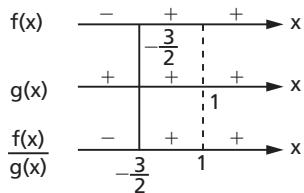
i) $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} (x + [x])$

- 66.** $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x > -1 \\ 3 & \text{se } x = -1 \\ 5 - ax & \text{se } x < -1 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ existe se $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
- $$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x - 2) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (5 - ax) = 5 + a \end{array} \right\} \Rightarrow 5 + a = -5 \Rightarrow a = -10$$
- 67.** $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{se } x \leq -2 \\ 3x + a & \text{se } x > -2 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ existe se $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- $$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (3x + a) = -6 + a \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (4x - 3) = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow -6 + a = -5 \Rightarrow a = 1$$
- 68.** $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ 3 - ax - x^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe se $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- $$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3 - ax - x^2) = 3 - 2a - 4 = -2a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3\left(x + \frac{1}{3}\right) = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
- $\Rightarrow -2a - 1 = 7 \Rightarrow a = -4$

CAPÍTULO III — O infinito

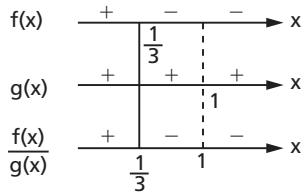
- 70.** a) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 4}{(x - 2)^2}$
- | | | |
|--|------------------------------------|--------------------------|
| $f(x)$
 | $+$
$\frac{4}{3}$
$+$
$+$ | x
$+$
$+$
$+$ |
| $g(x)$
 | $+$
$+$
$+$
$+$ | x
$+$
$+$
$+$ |
| $\frac{f(x)}{g(x)}$
 | $-$
$+$
$+$
$+$ | x
$+$
2
$+$ |
- Notemos que $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando x está próximo de 2.
Então, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 4}{(x - 2)^2} = +\infty$.

b) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 3}{(x - 1)^2}$



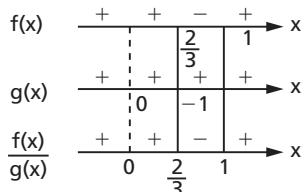
$\left. \begin{array}{l} \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ quando } x \text{ está próximo} \\ \text{de } 1. \end{array} \right\}$
Então, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 3}{(x - 1)^2} = +\infty$.

c) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - 3x}{(x - 1)^2}$



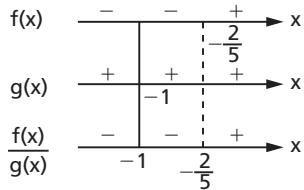
$\left. \begin{array}{l} \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ quando } x \text{ está próximo} \\ \text{de } 1. \end{array} \right\}$
Então, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 3x}{(x - 1)^2} = -\infty$.

d) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2}$



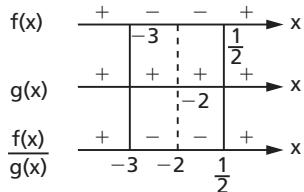
$\left. \begin{array}{l} \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ quando } x \text{ está próximo} \\ \text{de } 0. \end{array} \right\}$
Então, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2} = +\infty$.

e) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x + 2}{|x + 1|}$

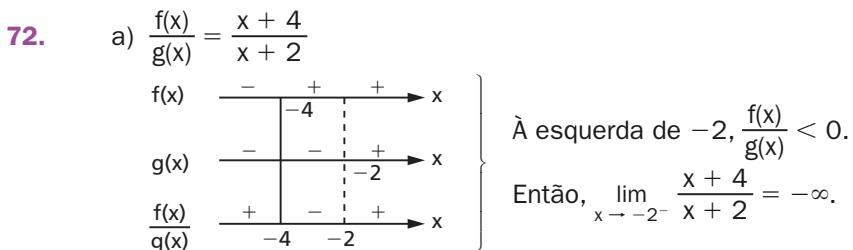


$\left. \begin{array}{l} \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ quando } x \text{ está próximo} \\ \text{de } -1. \end{array} \right\}$
Então, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x + 2}{|x + 1|} = -\infty$.

f) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2 + 5x - 3}{|x + 2|}$

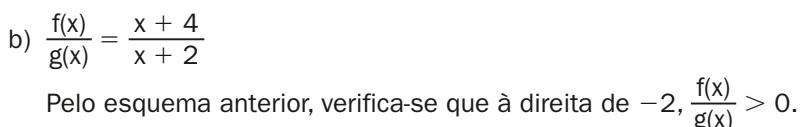


$\left. \begin{array}{l} \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ quando } x \text{ está próximo} \\ \text{de } -2. \end{array} \right\}$
Então, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x - 3}{|x + 2|} = -\infty$.

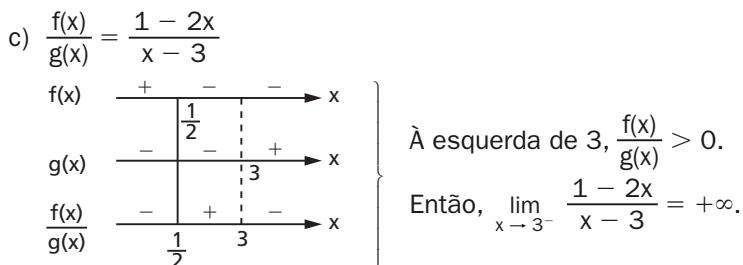


À esquerda de -2 , $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$.

$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+4}{x+2} = -\infty.$$



$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+4}{x+2} = +\infty.$$

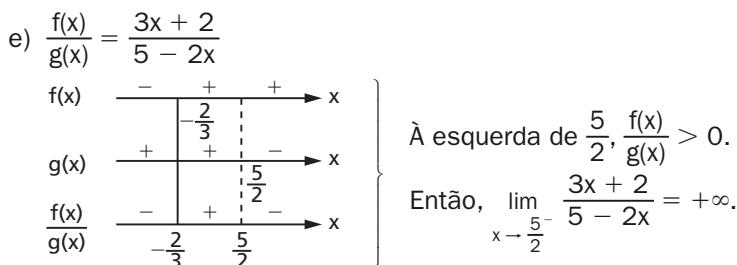


À esquerda de 3 , $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$.

$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = +\infty.$$



$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-2x}{x-3} = -\infty.$$

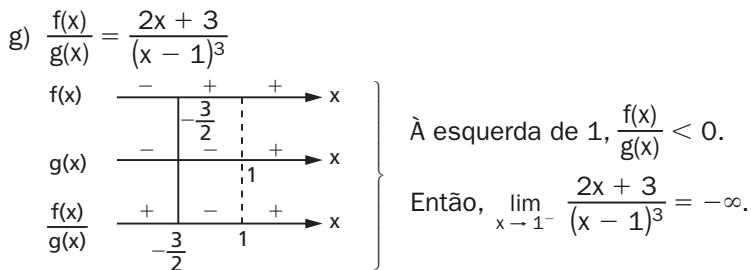


À esquerda de $\frac{5}{2}$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$.

$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^-} \frac{3x+2}{5-2x} = +\infty.$$



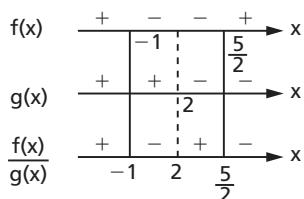
$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} \frac{3x+2}{5-2x} = -\infty.$$



h) Pelo esquema do item anterior, à direita de 1, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$.

Então, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3}{(x - 1)^3} = +\infty$.

i) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2 - 3x - 5}{(2 - x)^3}$



j) Pelo esquema do item anterior, à direita de 2, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$.

Então, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x - 5}{(2 - x)^3} = +\infty$.

73.

Provemos que:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, temos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow x^2 < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Chamando $\frac{1}{\varepsilon} = M$, temos:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

74.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

Para $x < 0$, $f(x) = \frac{1}{x^3} < 0$.

Provemos que:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, temos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x^3| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{x^3} \right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Chamando $\frac{1}{\varepsilon} = M$, temos:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

b) Analogamente, notando que para $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^3} > 0$.

76. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - 5x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^2) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (8 - x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$

77. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty$
($n \in \mathbb{N}^*$)

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^n) = \begin{cases} +\infty, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ -\infty, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}$
($n \in \mathbb{N}^*$)

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (c \cdot x) = \begin{cases} +\infty, \text{ se } c > 0 \\ -\infty, \text{ se } c < 0 \end{cases}$
($c \in \mathbb{R}^*$)

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{c} \right) = \begin{cases} +\infty, \text{ se } c < 0 \\ -\infty, \text{ se } c > 0 \end{cases}$

78. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$

80. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x}{5x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{5x} = -\frac{2}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 3}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{3x^3 + 5x^2 - 6x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{8x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{8x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{8x} = 0$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^3 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{3x^2 + 3x + 1} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^3}{x(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 8 = 8$

(Neste caso não é necessário efetuar todos os cálculos. Basta obter os termos de maior expoente.)

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+2)^3}{2x(3x+1)(4x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27x^3}{24x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27}{24} = \frac{9}{8}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^3 \cdot (3x-2)^2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{72x^5}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 72 = 72$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)^4 - (x-1)^4}{(2x+3)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[(x+2)^2 + (x-1)^2][(x+2)^2 - (x-1)^2]}{(2x+3)^3} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 + 2x + 5)(6x + 3)}{(2x+3)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^3}{8x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

82. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = -1$

$$\begin{aligned} \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x^4 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Já vimos, no item c), que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2$, isto é,

não depende de x . Portanto, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$.

$$\begin{aligned} \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + x\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + 1\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x\sqrt{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}}{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1000}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 \left[1 - \left(\frac{10}{x}\right)^3\right]}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x \sqrt[3]{1 - \left(\frac{10}{x}\right)^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{10}{x}\right)^3}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 0 \end{aligned}$$

- 84.**
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x) =$
- $$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 3x + 4} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 4} + x} =$$
- $$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{x^2 + 3x + 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(3 + \frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} + x} =$$
- $$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(3 + \frac{4}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(3 + \frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1\right)} = \frac{3}{2}$$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x) =$
- $$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 3x + 4} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x + 4} + x)} =$$
- $$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(3 + \frac{4}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(3 + \frac{4}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1\right)} = +\infty$$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-2}) =$
- $$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+4} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-2}} =$$
- $$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)} = 0$$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)} =$
- $$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} =$
- $$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{|x| \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x + 4})(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 3x + 4})}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 3x + 4})} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-1 + \frac{1}{x} \right)}{|x| \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} \right)} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 4})(x + \sqrt{x^2 + 4})}{(x + \sqrt{x^2 + 4})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x + |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \right)} = 0$$

$$\text{h)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + b} - x)(\sqrt{x^2 + ax + b} + x)}{\sqrt{x^2 + ax + b} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(a + \frac{b}{x} \right)}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{a}{2}$$

85. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 - 2}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} - \frac{2}{x^3}} \right)}{x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} \right)} = 2$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \right) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \right)}{-\frac{1}{x} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} = 1$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x)(x + \sqrt{x^2 - x + 1})}{(x - \sqrt{x^2 - x + 1})(x + \sqrt{x^2 - x + 1})(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 4)(x + \sqrt{x^2 - x + 1})}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1\right)} = 2
 \end{aligned}$$

86.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad &\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x \cdot \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}\right]} = \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x} \\
 &\text{Pelo item anterior, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.
 \end{aligned}$$

Então, vem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{4x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)}{\sqrt{4x \left(1 + \frac{1}{4x}\right)}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

- 87.** a) Dado um número real $M > 0$, temos:

$$\forall M > 0, \exists \sqrt{M} > 0 \mid x > \sqrt{M} \Rightarrow x^2 > M$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

- b) Dado um número real $M > 0$, temos:

$$\forall M > 0, \exists -\sqrt{M} < 0 \mid x < -\sqrt{M} \Rightarrow x^2 > M$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

- 88.** a) Dado um número real $M > 0$, temos:
 $\forall M > 0, \exists \sqrt[3]{M} > 0 \mid x > \sqrt[3]{M} \Rightarrow x^3 > M$
 então:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

- b) Dado um número real $M < 0$, temos:
 $\forall M < 0, \exists \sqrt[3]{M} < 0 \mid x < \sqrt[3]{M} \Rightarrow x^3 > M$
 então:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

CAPÍTULO IV — Complementos sobre limites

- 90.** a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sen 3x}{3x} \right) = \frac{3}{2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen 2x}{\sen x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sen 2x}{2x} \cdot \frac{x}{\sen x} \right) = 2$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\sen ax}{ax} \right) = \frac{a}{b}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen ax}{\sen bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\sen ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sen bx} \right) = \frac{a}{b}$
- e) $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg 2x}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sen 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sen 2x}{2x} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 x - 1} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$
- f) $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg ax}{bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\sen ax}{ax} \cdot \frac{1}{\cos ax} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\sen ax}{ax} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 ax - 1} \right) = \frac{a}{b} \end{aligned}$
- g) $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sen x)^2}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos x} \right) = 0 \end{aligned}$
- h) $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2 \cos x (\cos x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sen^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x (\cos x + 1)} \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x + \sen x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sen x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} + \frac{\sen x}{x} \right) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \sen x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \cdot \sen x (1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sen^2 x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sen x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{92. a)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \cdot \sen \frac{x+a}{2} \cdot \sen \frac{x-a}{2}}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(-\frac{\sen \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \sen \frac{x+a}{2} \right) = -\sen \frac{a+a}{2} = -\sen a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tg x - \tg a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \cdot \cos a}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sen(x-a)}{x-a} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos a} \right) = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{\cos x \cdot \cos a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \cdot \sen \frac{x+a}{2} \cdot \sen \frac{x-a}{2}}{(x-a)(\cos x \cdot \cos a)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(-\frac{\sen \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \frac{\sen \frac{x+a}{2}}{\cos x \cdot \cos a} \right) = \frac{\sen a}{\cos^2 a} = \sec a \cdot \tg a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sen x - \cos x}{1 - \tg x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sen x - \cos x}{1 - \frac{\sen x}{\cos x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos x (\cos x - \sen x)}{\cos x - \sen x} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - \sen x}{\sen^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sen x}{\cos x} - \sen x}{\sen^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x (1 - \cos x)}{\sen^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sen x \cos x (1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen^2 x}{\sen x \cos x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{\cos x (1 + \cos x)} = 0 \end{aligned}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 \sin x - 4 \sin^3 x) - 2 \sin x \cos x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (3 - 4 \sin^2 x - 2 \cos x) = 3 - 2 = 1$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2x+3x}{2} \sin \frac{2x-3x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{5x}{2} \sin \left(\frac{-x}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{5x}{2} \sin \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 \frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) - \sin a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos a + \sin a \cos x - \sin a}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos a + \sin a (\cos x - 1)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \cos a + \sin a \cdot \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \cos a - \frac{x \cdot \sin a}{(\cos x + 1)} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = \cos a$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+a) - \cos a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos a - \sin x \cdot \sin a - \cos a}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos a \frac{(\cos x - 1)}{x} - \frac{\sin x}{x} \cdot \sin a \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} \cdot \cos a - \frac{\sin x}{x} \cdot \sin a \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-x \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} \cdot \cos a - \frac{\sin x}{x} \cdot \sin a \right) = -\sin a$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}}{\pi - x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\sin \pi - x}{4} \cdot \cos \frac{\pi + x}{4}}{2 \cdot \frac{\pi - x}{4}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi - x}{4}}{\frac{\pi - x}{4}} \cdot \frac{\cos \frac{\pi + x}{4}}{\frac{4}{4}} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{k)} \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)}{\pi - 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos x\right)}{\pi - 3x} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} 2 \cdot \frac{-2 \sin \frac{\frac{\pi}{3} + x}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{3} - x}{2}}{\pi - 3x} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} -4 \frac{\sin \frac{\pi + 3x}{6} \sin \frac{\pi - 3x}{6}}{6\left(\frac{\pi - 3x}{6}\right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \frac{\pi - 3x}{6}}{\frac{\pi - 3x}{6}} \cdot \sin \frac{\pi + 3x}{6} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\operatorname{sen} \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \pi x} - \frac{x^2}{\operatorname{sen} \pi x} \right) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\pi x} \cdot \frac{\pi x}{\operatorname{sen} \pi x} - \frac{\pi x}{\operatorname{sen} \pi x} \cdot \frac{x}{\pi} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{m)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x + \operatorname{sen} x) = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{n)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{\operatorname{sen}^2 x} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{\operatorname{sen}^2 x \cdot (1 + \cos x)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos^2 x + \cos x + 1}{1 + \cos x} \right) = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{o)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax - \operatorname{sen} bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{(a-b)x}{2} \cos \frac{(a+b)x}{2}}{x} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(a-b) \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right) x}{\left(\frac{a-b}{2} \right) x} \cdot \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) x \right] = a - b
 \end{aligned}$$

$$\text{p)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) x \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right) x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{a-b}{2}x \cdot (a+b) \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x}{\left(\frac{a+b}{2}\right)x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)x}{\left(\frac{a-b}{2}\right)x} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} q) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 - \frac{\sin 2x}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{\sin 3x}{x}\right)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \frac{\sin 2x}{2x}}{1 + 3 \frac{\sin 3x}{3x}} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)}{1-x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(1-x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x})(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}{x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} = 1 \end{aligned}$$

93. a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

Fazendo $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$ e para $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow +\infty$. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sin y}{y} = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

Fazendo $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$ e para $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$.

Então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \\ & = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}}}_{\frac{2}{\pi}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

(ver ex. 92s)

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cotg} 2x \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cotg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \cdot \frac{1}{2 \cos x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

97. a) $\lim_{x \rightarrow 2} 3^{\frac{x^2-4}{x-2}} = 3^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}} = 3^{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)} = 3^4 = 81$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1-x^2}{x-1}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x-1}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\lim_{x \rightarrow 1} [-(1+x)]} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} = 4$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} 2^{\frac{x^3-3x+2}{x^2+x-2}} = 2^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^2+x-2}} = 2^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{x^2+x-2}} =$
 $= 2^{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)} = 2^0 = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}} =$
 $= \left(\frac{1}{3} \right)^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\lim_{x \rightarrow 2} (x-3)} = \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} = 3$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1)} = e^2$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x} - 2}} = \left(\frac{1}{e} \right)^{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x} - 2}} = \\ = \left(\frac{1}{e} \right)^{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}} = \left(\frac{1}{e} \right)^{\lim_{x \rightarrow 4} (x-1)(\sqrt{x}+2)} = \left(\frac{1}{e} \right)^{12} = e^{-12}$$

- 101.**
- $\lim_{x \rightarrow -1} \log_3 \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \log_3 \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+4)} = \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \log_3 \left(\frac{x+2}{x+4} \right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \log \frac{x - x^3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log \frac{x(1-x)(1+x)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \log (1-x) = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow 3} \ln \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \ln \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \ln (\sqrt{x+1}+2) = \ln 4$
 - $\lim_{x \rightarrow -2} \log \frac{3 - \sqrt{1-4x}}{\sqrt{6+x}-2} = \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \log \frac{(3 - \sqrt{1-4x})(3 + \sqrt{1-4x})(\sqrt{6+x}+2)}{(\sqrt{6+x}-2)(\sqrt{6+x}+2)(3 + \sqrt{1-4x})} = \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \log \frac{4(2+x)(\sqrt{6+x}+2)}{(2+x)(3 + \sqrt{1-4x})} = \lim_{x \rightarrow -2} \log \frac{4(\sqrt{6+x}+2)}{3 + \sqrt{1-4x}} = \\ = \log \frac{8}{3}$

- 103.**
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^3 = e^3$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 \right] = e \cdot 1^2 = e$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^x$

Fazendo $\frac{x}{4} = y$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{4y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^4 = e^4$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x}$$

Fazendo $\frac{x}{2} = y$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x} \right)^x \right]^3 = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^{2y} \right]^3 = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^6 = e^6$$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$

Fazendo $\frac{x}{3} = y$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{4}} \right] = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{3y}{4}} \right] = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{4}} \right] = e^{\frac{3}{4}}$$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

Fazendo $\frac{x}{a} = y$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ay} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^a = e^a$$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$

Fazendo $\frac{x}{a} = y$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \right]^b = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ay} \right]^b = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^{ab} = e^{ab}$$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}\right) = \frac{1}{e}$

104. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\right]^x$

Fazendo $-\frac{1}{x} = y$, para $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$.

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\right]^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{-\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \left(-\frac{2}{x}\right)\right]^x$

Fazendo $-\frac{2}{x} = y$, para $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \left(-\frac{2}{x}\right)\right]^x = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{-\frac{2}{y}} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\right)^x \right]^3$

Fazendo $-\frac{1}{x} = y$, para $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \left(-\frac{1}{x} \right) \right)^x \right]^3 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\left(1 + y \right)^{-\frac{1}{y}} \right]^3 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\left(1 + y \right)^{\frac{1}{y}} \right]^{-3} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \left(-\frac{3}{x} \right) \right)^x \right]^2$

Fazendo $-\frac{3}{x} = y$, para $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \left(-\frac{3}{x} \right) \right)^x \right]^2 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\left(1 + y \right)^{-\frac{3}{y}} \right]^2 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\left(1 + y \right)^{\frac{1}{y}} \right]^{-6} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

106. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{x+4}{x}}{\frac{x-3}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{3}{x}} \right)^x =$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^x} = \frac{\frac{1}{e^3}}{e^4} = e^7$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{x+1}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)^x =$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{e^2}{e} = e$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{x-3}{x}}{\frac{x+2}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{x} \right)^x}{\left(1 + \frac{2}{x} \right)^x} =$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x} = \frac{\frac{1}{e^3}}{e^2} = \frac{1}{e^5} = e^{-5}$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-4}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{x-4}{x}}{\frac{x-1}{x}} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{4}{x} \right)^{x+3}}{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+3}} =$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{4}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{4}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right)^3 = \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x} \cdot 1^3 = \frac{\frac{1}{e^4}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^3} = e^{-3}
 \end{aligned}$$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3} \right)^{x^2}$

Fazendo $x^2 = y$, $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y+1}{y-3} \right)^3 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{y+1}{y}}{\frac{y-3}{y}} \right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{y}}{1 - \frac{3}{y}} \right)^y = \\
 &= \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{y} \right)^y} = \frac{e}{\frac{1}{e^3}} = e^4
 \end{aligned}$$

107. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x \left(1 + \frac{3}{2x} \right)}{2x \left(1 + \frac{1}{2x} \right)} \right)^x =$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{2x}}{\frac{1}{1 + \frac{1}{2x}}} \right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} = e
 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x \left(1 - \frac{1}{2x} \right)}{2x \left(1 + \frac{1}{2x} \right)} \right)^x =$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{1 + \frac{1}{2x}}} \right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x} = \frac{\left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{e^1} = e^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x \left(1 + \frac{2}{3x}\right)}{3x \left(1 - \frac{1}{3x}\right)} \right)^{2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{1 + \frac{2}{3x}}{1 - \frac{1}{3x}} \right)^x \right]^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x}} \right)^x \right]^2 = \frac{\left(e^{\frac{2}{3}} \right)^2}{\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} \right)^2} = (e^1)^2 = e^2
 \end{aligned}$$

108. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

Fazendo $e^{2x} - 1 = w \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(w + 1)$ e para $x \rightarrow 0, w \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{\frac{1}{2} \ln(w + 1)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{1}{w} \ln(w + 1)} = \\
 &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{2}{\ln(w + 1)^{\frac{1}{w}}} = \frac{\lim_{w \rightarrow 0} 2}{\lim_{w \rightarrow 0} \left[\ln(1 + w)^{\frac{1}{w}} \right]} = \\
 &= \frac{\lim_{w \rightarrow 0} 2}{\ln \left[\lim_{w \rightarrow 0} (1 + w)^{\frac{1}{w}} \right]} = \frac{2}{\ln e} = 2
 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x}$

Fazendo $2^{3x} - 1 = w \Rightarrow x = \frac{\ln(w + 1)}{3 \ln 2}$ e para $x \rightarrow 0, w \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x} &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{3w \ln 2}{\ln(w + 1)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{3 \ln 2}{\frac{1}{w} \ln(1 + w)} = \\
 &= \frac{\lim_{w \rightarrow 0} 3 \ln 2}{\lim_{w \rightarrow 0} \left[\ln(1 + w)^{\frac{1}{w}} \right]} = \frac{\lim_{w \rightarrow 0} 3 \ln 2}{\ln \left[\lim_{w \rightarrow 0} (1 + w)^{\frac{1}{w}} \right]} = 3 \ln 2
 \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^{3x} - 1} =$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{3x} - 1}{x}} \right) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

↑ ↑
(item a) (análogo ao item a)

$$\begin{aligned}
 d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{2^{5x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^{2x} - 1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{2^{5x} - 1}{x}} \right) = \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2^{5x} - 1}{x}} \right) = 2 \ln 3 \cdot \frac{1}{5 \ln 2} = \frac{2 \ln 3}{5 \ln 2} \\
 &\quad \uparrow \qquad \uparrow \\
 &\text{(item b) (análogo ao item b)}
 \end{aligned}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$$

Fazendo $e^x - e^2 = y \Rightarrow x = \ln(y + e^2)$ e, para $x \rightarrow 2$, $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y + e^2) - 2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y + e^2) - \ln e^2} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln\left(\frac{y + e^2}{e^2}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln\left(1 + \frac{y}{e^2}\right)}
 \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{y}{e^2} = w$, para $y \rightarrow 0$, $w \rightarrow 0$.

Então, vem:

$$\begin{aligned}
 \lim_{w \rightarrow 0} \frac{we^2}{\ln(1+w)} &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{e^2}{\frac{1}{w} \ln(1+w)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{e^2}{\ln(1+w)^{\frac{1}{w}}} = \\
 &= \frac{\lim_{w \rightarrow 0} e^2}{\ln\left[\lim_{w \rightarrow 0} (1+w)^{\frac{1}{w}}\right]} = e^2
 \end{aligned}$$

$$f) \lim_{w \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$$

Idêntico ao exercício anterior, em que $a = 2$.

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^a}{x - a}$$

Fazendo $2^x = 2^a = y$, para $x \rightarrow a$, $y \rightarrow 0$ e $x = \frac{\ln(y+2^a)}{\ln 2}$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\ln(y+2^a)}{\ln 2} - a} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln 2}{\ln(y+2^a) - \ln 2^a} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln 2}{\ln\left(\frac{y+2^a}{2^a}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln 2}{\frac{1}{y} \ln\left(\frac{y}{2^a} + 1\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{y}{2^a} + 1\right)^{\frac{1}{y}}}
 \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{y}{2^a} = w$, para $y \rightarrow 0$, $w \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\ln 2}{\ln \left[(w+1)^{\frac{1}{w}} \right]^{\frac{1}{2^a}}} &= \frac{\lim_{w \rightarrow 0} (\ln 2)}{\ln \left\{ \lim_{w \rightarrow 0} \left[(1+w)^{\frac{1}{w}} \right]^{\frac{1}{2^a}} \right\}} = \\ &= \frac{\ln 2}{\frac{1}{2^a}} = 2^a \cdot \ln 2\end{aligned}$$

109. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$
 $= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} =$
 $= \log \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log e$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

Fazendo $2x = y$, para $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{2}{y}} = \ln \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^2 \right\} = \ln e^2 = 2$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1+3x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

Fazendo $3x = y$, para $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0} \log(1+y)^{\frac{3}{y}} &= \log \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^3 \right\} = \log e^3 = \\ &= 3 \log e = 3 \frac{\ln e}{\ln 10} = \frac{3}{\ln 10}\end{aligned}$$

110. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$

Fazendo $2x = y$, para $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1-y)^{\frac{2}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1-y)^{\frac{1}{y}} \right]^2 = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ [1+(-y)]^{\frac{1}{y}} \right\}^2 = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$$

CAPÍTULO V — Continuidade

112. a) $f(0) = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$f(x)$ não é contínua em $x = 0$.

b) $f(-2) = 4$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x - 2) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x - 2) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq f(-2)$. Portanto, $f(x)$ não é contínua em $x = -2$.

c) $f(1) = -2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} [-(1 + x)] = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(1 + x)] = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f(x)$ é contínua em $x = 1$.

d) $f(-1) = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - x + 1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1) \Rightarrow f(x)$ não é contínua em $x = -1$.

113. a) $f(-2) = 3 \cdot (-2) + 2 = -4$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (3x + 2) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (-2x) = +4 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

Portanto, $f(x)$ não é contínua em $x = -2$.

b) $f(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 4x - 5) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f(x)$ é contínua em $x = 1$.

c) $f(4) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (3x - 10) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (10 - 2x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \Rightarrow f(x)$ é contínua em $x = 4$.

d) $f(1) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 - 3x + 2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x^2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \neq f(x)$ não é contínua em $x = 1$.

114. a) $f(0) = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)$ é contínua em $x = 0$.

b) $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x}{(1 + \cos x)} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)$ é contínua em $x = 0$.

c) $f(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow f(x) \text{ não é contínua em } x = 0.$

d) $f(0) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^2} = \\ &= 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow f(x) \text{ não é contínua em } x = 0.$

115. a) $f(2) = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+2)}{x^2-4} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x+2)}{x^2-4} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) \Rightarrow f(x) \text{ não é contínua em } x = 2.$

b) $f(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \Rightarrow f(x) \text{ não é contínua em } x = 1.$

c) $f(1) = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-x-1} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \Rightarrow f(x) \text{ não é contínua em } x = 1.$

116. a) $f(2) = a$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 3) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

$f(x)$ é contínua em $x = 2$ se $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow a = -1$.

b) $f(1) = a$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{3}$$

$f(x)$ é contínua em $x = 1$ se $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

c) $f(4) = 3 \cdot 4 + a = 12 + a$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} (3x + a) = 12 + a \end{array} \right\} \Rightarrow 12 + a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{47}{4}$$

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ existe se $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$, nessas condições, $a = -\frac{47}{4}$.

A função $f(x)$ é contínua em $x = 4$ se $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \Rightarrow a = -\frac{47}{4}$.

d) $f(0) = a$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - 4x + a) = a$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Para $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ e a função é contínua.

e) $f(0) = a$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} = \frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

117. $f(0) = \cos a$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ f(x) \text{ é contínua em } x = 0 \text{ se } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) \Rightarrow \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

CAPÍTULO VI — Derivadas

118. $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 1 - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$

119. $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 5 - 8}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$

120. $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$

121. $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|1 + \Delta x| - |1|}{\Delta x} =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + \Delta x - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$

122. $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$

Temos, então:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \Rightarrow \nexists f'(0)$$

123. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) - \cos \frac{\pi}{4}}{\Delta x} =$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

124. $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$

125. $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})}{(x - 2)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

126. $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{0}}{x - 0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = +\infty$

Portanto, não existe $f'(0)$.

127. $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Assim:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot |x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot |x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0) = 0$$

130. a) $f(x) = x + 1$

$x_0 = 3 \Rightarrow f(3) = 4 \Rightarrow P(3, 4)$

$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x - 3} = 1$

$y - 4 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 2x$

$x_0 = 1 \Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow P(1, -1)$

$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$

$y + 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y = -1$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \Rightarrow P(0, 0)$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$y = 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$x_0 = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow P(1, 1)$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1$$

$$y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

$$x_0 = 4 \Rightarrow f(4) = 2 \Rightarrow P(4, 2)$$

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$$x_0 = 2\sqrt{2} \Rightarrow f(2\sqrt{2}) = 2 \Rightarrow P(2\sqrt{2}, 2)$$

$$f'(2\sqrt{2}) = \lim_{x \rightarrow 2\sqrt{2}} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2}{x - 2\sqrt{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2\sqrt{2}} \frac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{8x^2} + \sqrt[3]{64})(x + 2\sqrt{2})}{(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{8x^2} + \sqrt[3]{64})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2\sqrt{2}} \frac{(x^2 - 8)(x + 2\sqrt{2})}{(x^2 - 8)(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{8x^2} + \sqrt[3]{64})} = \frac{4\sqrt{2}}{4 + 4 + 4} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Então: } y - 2 = \frac{\sqrt{2}}{3}(x - 2\sqrt{2}) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{2}{3}.$$

132. $s'(t_0) = s'(3) = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{3}}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{-1}{3t} = -\frac{1}{9}$

$$\text{velocidade} = -\frac{1}{9} \text{ m/s.}$$

134. $v'(t_0) = v'(5) = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{5t^2 + 3t + 2 - 142}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{5\left(t + \frac{28}{5}\right)(t - 5)}{t - 5} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 5} 5\left(t + \frac{28}{5}\right) = 53 \Rightarrow \text{aceleração} = 53 \text{ m/s}^2.$$

136. a) $f(x) = c \cdot x^n$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{c(x + \Delta x)^n - cx^n}{\Delta x} = \\ &= \frac{c \left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n \right] - cx^n}{\Delta x} = \\ &= c \cdot \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot \Delta x + \binom{n}{3}x^{n-3} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n}(\Delta x)^{n-1} \right] \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \binom{n}{1}x^{n-1} = c \cdot nx^{n-1}\end{aligned}$$

b) $g(x) = \operatorname{tg} x$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}\end{aligned}$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

c) $h(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{1}{\cos x}}{\Delta x} = \frac{\frac{\cos x - \cos(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\frac{-2 \operatorname{sen}\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{-\Delta x}{2}\right)}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right)}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}\end{aligned}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$$

138. $f(x) = e^x$

$$x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = e^2 \Rightarrow P(2, e^2)$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(2) = e^2$$

$$y - e^2 = e^2(x - 2) \Rightarrow e^2x - y - e^2 = 0$$

$$y = e^2x - e^2$$

140. $s = t^4$

- a) $v(t) = s'(t) = 4t^3 \Rightarrow v(2) = 32 \text{ m/s}$
- b) $a(t) = v'(t) = 12t^2 \Rightarrow a(3) = 108 \text{ m/s}^2$
- c) $v(t) = 108 \Rightarrow 4t^3 = 108 \Rightarrow t = 3\text{s}$
- d) $a(t) = 48 \Rightarrow 12t^2 = 48 \Rightarrow t = 2\text{s}$

CAPÍTULO VII — Regras de derivação

144. a) $f(x) = (3x^2 + x)(1 + x + x^3)$

$$\begin{aligned}f'(x) &= (6x + 1)(1 + x + x^3) + (3x^2 + x)(3x^2 + 1) = \\&= 15x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 8x + 1\end{aligned}$$

b) $f(x) = x^2(x + x^4)(1 + x + x^3)$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x(x + x^4)(1 + x + x^3) + x^2(1 + 4x^3)(1 + x + x^3) + x^2(x + x^4)(1 + 3x^2) \\f'(x) &= (2x^2 + 2x^3 + 4x^5 + 2x^6 + 2x^8) + (x^2 + x^3 + 5x^5 + 4x^6 + 4x^8) + \\&\quad + (x^3 + 3x^5 + x^6 + 3x^8)\end{aligned}$$

$$f'(x) = 9x^8 + 7x^6 + 12x^5 + 4x^3 + 3x^2$$

c) $f(x) = (2 + 3x + x^2)^5$

$$f'(x) = 5(x^2 + 3x + 2)^4 (2x + 3)$$

d) $f(x) = (2x + 3)^{52}$

$$f'(x) = 52(2x + 3)^{51} \cdot 2 = 104(2x + 3)^{51}$$

e) $f(x) = x^3 \cdot e^x$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = (x^3 + 3x^2)e^x$$

f) $f(x) = x \cdot e^x + \cos x$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x - \operatorname{sen} x = e^x(1 + x) - \operatorname{sen} x$$

g) $f(x) = x^4 \cdot a^{2x}$

$$f'(x) = 4x^3 \cdot a^{2x} + x^4 \cdot 2a^{2x} \cdot \ln a = 2a^{2x}x^3(2 + x \ln a)$$

h) $f(x) = e^{3x}$

$$f'(x) = 3e^{3x}$$

i) $f(x) = e^{5x+1} = e^{5x} \cdot e$

$$f'(x) = 5e^{5x} \cdot e + e^{5x} \cdot 0 = 5 \cdot e^{5x+1}$$

j) $f(x) = \cos^5 x$

$$f'(x) = 5 \cos^4 x \cdot (-\operatorname{sen} x) = -5 \cos^4 x \cdot \operatorname{sen} x$$

k) $f(x) = \underbrace{\operatorname{sen}^7 x}_{u} \cdot \underbrace{\cos^3 x}_{v}$

$$f'(x) = \underbrace{7 \operatorname{sen}^6 x \cdot \cos x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos^3 x}_{v} + \underbrace{\operatorname{sen}^7 x}_{u} \cdot \underbrace{3 \cos^2 x \cdot (-\operatorname{sen} x)}_{v'}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 7 \operatorname{sen}^6 x \cos^4 x - 3 \operatorname{sen}^8 x \cos^2 x \\f'(x) &= \operatorname{sen}^6 x \cos^2 x (7 \cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^2 x)\end{aligned}$$

I) $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$
 $f'(x) = a \cos x - b \operatorname{sen} x$

145. $f(x) = (\operatorname{sen} x + e^x)^2 \cdot (\cos x + x^3)^3$

$$u = (\operatorname{sen} x + e^x)^2 \Rightarrow u' = 2(\operatorname{sen} x + e^x)(\cos x + e^x)$$

$$v = (\cos x + x^3)^3 \Rightarrow v' = 3(\cos x + x^3)^2 (-\operatorname{sen} x + 3x^2)$$

$$f'(x) = u'v + uv'$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2(\operatorname{sen} x + e^x)(\cos x + e^x)(\cos x + x^3)^3 + \\&\quad + 3(\operatorname{sen} x + e^x)^2(\cos x + x^3)^2(-\operatorname{sen} x + 3x^2)\end{aligned}$$

$$f'(0) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 4$$

146. $f(x) = (3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x)^5; x_0 = \pi$

$$f(\pi) = (3 \operatorname{sen} \pi + 4 \cos \pi)^5 = (-4)^5 = -1024$$

Portanto, o ponto de tangência é P($\pi, -1024$).

$$f'(x) = 5 \cdot (3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x)^4 \cdot (3 \cos x - 4 \operatorname{sen} x)$$

$$f'(\pi) = 5 \cdot (-4)^4 \cdot (-3) = -3840$$

$$\text{Então: } y - (-1024) = -3840(x - \pi) \Rightarrow y = -3840x + (3840\pi - 1024).$$

147. $s = a \cdot \underbrace{e^{-t}}_x \cdot \underbrace{\cos t}_y$

$$\left. \begin{array}{l} s' = v = a(xy' + x'y) \\ x = e^{-t} \\ x' = -e^{-t} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} y = \cos t \\ y' = -\operatorname{sen} t \end{array} \right\} \Rightarrow v = a [e^{-t}(-\operatorname{sen} t) + (-e^{-t}) \cos t] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = -a \cdot e^{-t} \cdot (\operatorname{sen} t + \cos t)$$

$$\left. \begin{array}{l} v' = \alpha = -a(xw' + x'w) \\ x = e^{-t} \\ x' = -e^{-t} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} w = \operatorname{sen} t + \cos t \\ w' = \cos t - \operatorname{sen} t \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = -a[e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t) + (-e^{-t})(\operatorname{sen} t + \cos t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2ae^{-t} \operatorname{sen} t$$

149. a) $f(x) = \frac{2}{x^7} = 2x^{-7}$

$$f'(x) = 2 \cdot (-7) \cdot x^{-8} \Rightarrow f'(x) = \frac{-14}{x^8} = -14 \cdot x^{-8}$$

b) $f(x) = 3x^{-5}$

$$f'(x) = 3 \cdot (-5) \cdot x^{-6} \Rightarrow f'(x) = -15 \cdot x^{-6}$$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 + x + 1) - 1 \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

e) $f(x) = \frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+3)}{(x-1)^2} + \frac{1(x+1) - 1(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-4(x+1)^2 - (x-1)^2}{[(x-1)(x+1)]^2} = -\frac{5x^2 + 6x + 5}{(x^2 - 1)^2}$$

f) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-2) - (x^2 + 3x + 1) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x-2)^2}$$

g) $f(x) = \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{e^x}$

$$u(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x \quad \left| \begin{array}{l} v(x) = e^x \\ u'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x \end{array} \right.$$

$$v'(x) = e^x$$

$$f'(x) = \frac{(2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x) \cdot e^x - e^x \cdot x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x[2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x - x^2 \operatorname{sen} x]}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{x(2 \operatorname{sen} x + x \cos x - x \operatorname{sen} x)}{e^x}$$

h) $f(x) = \frac{\cos x}{x \cdot e^x}$

$$u(x) = \cos x \quad \left| \begin{array}{l} u(x) = x \cdot e^x \\ u'(x) = -\operatorname{sen} x \end{array} \right.$$

$$u'(x) = e^x + x \cdot e^x$$

$$f'(x) = \frac{-x e^x \operatorname{sen} x - \cos x (e^x + x e^x)}{(x \cdot e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x(x \operatorname{sen} x + x \cos x + \cos x)}{x^2 \cdot (e^x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x(\operatorname{sen} x + \cos x) + \cos x}{x^2 \cdot e^x}$$

150. a) $f(x) = \cotg x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cossec}^2 x$$

b) $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \\ = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$$

c) $f(x) = \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \operatorname{sen} x - 1 \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \\ = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cossec} x$$

d) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

$$f'(x) = 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)'$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \\ = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{Portanto: } f'(x) = 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \text{ ou}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x.$$

e) $f(x) = \sec x - \operatorname{tg} x$

$$f'(x) = (\sec x)' - (\operatorname{tg} x)'$$

$$(\sec x)' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x \text{ (item b)}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x \text{ (item d)}$$

$$\text{Portanto: } f'(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sec x - \sec^2 x = \sec x(\operatorname{tg} x - \sec x).$$

f) $f(x) = \underbrace{(x^2 + 1)}_u \cdot \underbrace{\operatorname{tg} x}_v$

$$u = x^2 + 1 \quad \left| \begin{array}{l} v = \operatorname{tg} x \\ v' = \sec^2 x \text{ (item d)} \end{array} \right.$$

$$u' = 2x \quad \left| \begin{array}{l} v = \operatorname{tg} x \\ v' = \sec^2 x \text{ (item d)} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv' \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \operatorname{tg} x + \\ + (x^2 + 1) \cdot \sec^2 x \end{array} \right\}$$

g) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

$$u = \operatorname{tg} x \quad \left| \begin{array}{l} v = \operatorname{sen} x + \cos x \\ v' = \cos x - \operatorname{sen} x \end{array} \right.$$

$$u' = \sec^2 \text{ (item d)} \quad \left| \begin{array}{l} v = \operatorname{sen} x + \cos x \\ v' = \cos x - \operatorname{sen} x \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) = \frac{\sec^2 x(\operatorname{sen} x + \cos x) - \operatorname{tg} x(\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} \end{array} \right\}$$

$$\text{h) } f(x) = \left(\frac{e^x}{\operatorname{tg} x} \right)^2 \Rightarrow f'(x) = \left[2 \cdot \left(\frac{e^x}{\operatorname{tg} x} \right) \right] \left(\frac{e^x}{\operatorname{tg} x} \right)' \\ \left(\frac{e^x}{\operatorname{tg} x} \right)' = \frac{e^x \cdot \operatorname{tg} x - e^x \cdot \sec^2 x}{(\operatorname{tg} x)^2} \\ \text{Portanto: } f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{e^x}{\operatorname{tg} x} \right) \frac{e^x(\operatorname{tg} x - \sec^2 x)}{(\operatorname{tg} x)^2} \\ f'(x) = \frac{2e^{2x}}{\operatorname{tg}^3 x} (\operatorname{tg} x - \sec^2 x).$$

151. $f(x) = \frac{1}{x} + e^x \quad (x_0 = -1)$

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{e} = \frac{-e + 1}{e} \Rightarrow P\left(-1, \frac{1-e}{e}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + e^x \Rightarrow f'(-1) = -1 + \frac{1}{e} \Rightarrow f'(-1) = \frac{1-e}{e}$$

Então, temos:

$$y - \left(\frac{1-e}{e} \right) = \left(\frac{1-e}{e} \right)(x+1) \Rightarrow y = \left(\frac{1-e}{e} \right)(x+2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \left(\frac{1}{e} - 1 \right)(x+2)$$

152. $f(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x} + \sec^2 x \quad \left(x_0 = \frac{\pi}{4} \right)$

$$u = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u' = -\frac{2}{x^3}$$

$$v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x}$$

$$w = \sec^2 x \Rightarrow w' = 2 \cdot \sec x \cdot (\sec x)' = 2 \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x$$

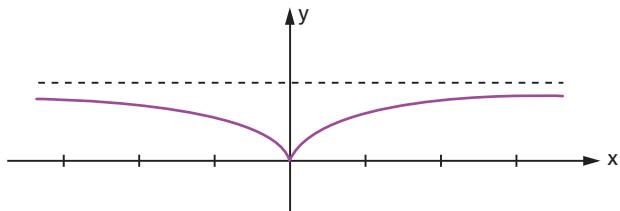
$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= -\frac{2}{x^3} - e^{-x} + 2 \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{-2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3} - e^{-\frac{\pi}{4}} + 2 \cdot 1 \cdot 2 = -\frac{128}{\pi^3} - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}} + 4 \end{aligned}$$

153. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

- $y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$

c) Ponto de tangência: (x_0, y_0) .



$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow f(x_0) = \frac{x_0^2}{x_0^2 + 1} \Rightarrow P\left(x_0, \frac{x_0^2}{x_0^2 + 1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{2x_0}{(x_0^2 + 1)^2}$$

Equação da reta tangente:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x)(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{x_0^2}{x_0^2 + 1} = \frac{2x_0}{(x_0^2 + 1)}(x - x_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \frac{2x_0}{(x_0^2 + 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0^2}{x_0^2 + 1} \end{aligned}$$

Como a reta tangente deve passar por $(0, 0)$, então vem:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2x_0}{(x_0^2 + 1)^2}(-x_0) + \frac{x_0^2}{x_0^2 + 1} \\ \frac{2x_0^2}{(x_0^2 + 1)^2} &= \frac{x_0^2}{x_0^2 + 1} \end{aligned}$$

Essa igualdade vale para $x_0 = 0$, o que implica $y_0 = 0$.

Se $x_0 \neq 0$, então temos:

$$\frac{2}{x_0^2 + 1} = 1 \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}.$$

Então, os pontos do gráfico em que a tangente passa pela origem

$$\text{são: } (0, 0), \left(-1, \frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

155. a) $F(x) = \operatorname{sen} 4x$

$$y = f(x) = 4x \text{ e } z = g(y) = \operatorname{sen} y \Rightarrow y' = 4 \text{ e } z' = \cos y$$

$$F'(x) = y' \cdot z' = 4 \cdot \cos y = 4 \cdot \cos 4x$$

b) $F(x) = \frac{\cos 7x}{x}$

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = 7x \Rightarrow y' = f'(x) = 7 \\ z = g(y) = \cos y \Rightarrow z' = g'(y) = -\operatorname{sen} y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\cos 7x)' = f'(x) \cdot g'(y) = 7 \cdot (-\operatorname{sen} y) = -7 \cdot \operatorname{sen} 7x$$

$$F'(x) = \frac{(-7 \operatorname{sen} 7x)x - 1 \cdot \cos 7x}{x^2}$$

$$F'(x) = \frac{-(7x \operatorname{sen} 7x + \cos 7x)}{x^2}$$

c) $F(x) = a \cdot \operatorname{sen} bx$

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = bx \Rightarrow y' = f'(x) = b \\ z = g(y) = \operatorname{sen} y \Rightarrow z' = g'(y) = \cos y \end{array} \right\} \Rightarrow (\operatorname{sen} bx)' = b \cos bx$$

$$F'(x) = a \cdot b \cdot \cos bx$$

d) $F(x) = \cos(3x^2 + x + 5)$

$$y = f(x) = 3x^2 + x + 5 \Rightarrow y' = f'(x) = 6x + 1$$

$$z = g(y) = \cos y \Rightarrow z' = g'(y) = -\operatorname{sen} y$$

$$F'(x) = f'(x) \cdot g'(y) = (6x + 1)(-\operatorname{sen} y)$$

$$F'(x) = -(6x + 1) \cdot \operatorname{sen}(3x^2 + x + 5)$$

e) $F(x) = \operatorname{sen} e^x$

$$y = f(x) = e^x \Rightarrow y' = f'(x) = e^x$$

$$z = g(y) = \operatorname{sen} y \Rightarrow z' = g'(y) = \cos y$$

$$F'(x) = f'(x) \cdot g'(y) = e^x \cdot \cos y = e^x \cdot \cos e^x$$

f) $F(x) = x + 3 \cdot \operatorname{tg} 4x$

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = 4x \Rightarrow y' = f'(x) = 4 \\ z = g(y) = \operatorname{tg} y \Rightarrow z' = g'(y) = \sec^2 y \end{array} \right\} \Rightarrow (\operatorname{tg} 4x)' = 4 \sec^2 4x$$

$$F'(x) = 1 + 12 \sec^2 4x$$

g) $F(x) = a^{\operatorname{sen} x}$

$$y = f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow y' = f'(x) = \cos x$$

$$z = g(y) = a^y \Rightarrow z' = g'(y) = a^y \cdot \ln a$$

$$F'(x) = f'(x) \cdot g'(y) = \cos x \cdot a^y \cdot \ln a$$

$$F'(x) = a^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot \ln a$$

h) $F(x) = \cotg(3x - 1)$

$$y = f(x) = 3x - 1 \Rightarrow y' = f'(x) = 3$$

$$z = g(y) = \cotg y \Rightarrow z' = g'(y) = -\operatorname{cossec}^2 y$$

$$F'(x) = f'(x) \cdot g'(y) = -3 \operatorname{cossec}^2(3x - 1)$$

i) $F(x) = a^{x^2 + 5x + 1}$

$$y = f(x) = x^2 + 5x + 1 \Rightarrow y' = f'(x) = 2x + 5$$

$$z = g(y) = a^y \Rightarrow z' = g'(y) = a^y \cdot \ln a$$

$$F'(x) = f'(x) \cdot g'(y) = (2x + 5) \cdot a^{x^2 + 5x + 1} \cdot \ln a$$

j) $F(x) = \operatorname{tg}(\cos x)$

$$y = f(x) = \cos x \Rightarrow y' = f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$z = g(y) = \operatorname{tg} y \Rightarrow z' = g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y$$

$$F'(x) = f'(x) \cdot g'(y) = -\operatorname{sen} x \cdot \sec^2(\cos x)$$

k) $F(x) = \operatorname{tg}^3 2x$
 $y = f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2$
 $z = g(y) = \operatorname{tg}^3 y \Rightarrow g'(y) = 3 \operatorname{tg}^2 y \cdot \sec^2 y$
 $F'(x) = f'(x) \cdot g'(y) = 6 \operatorname{tg}^2 2x \cdot \sec^2 2x$

l) $F(x) = e^{\operatorname{sen} 2x}$
 $y = f(x) = 2x \Rightarrow y' = f'(x) = 2$
 $z = g(y) = \operatorname{sen} y \Rightarrow z' = g'(y) = \cos y$
 $t = h(z) = e^z \Rightarrow t' = h'(z) = e^z$
 $F'(x) = f'(x) \cdot g'(y) \cdot h'(z) = 2e^{\operatorname{sen} 2x} \cdot \cos 2x$

156. $f(x) = \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x \quad \left(x_0 = \frac{\pi}{2} \right)$
 $f'(x) = 3 \cos^2 x \cdot (-\operatorname{sen} x) + 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$
 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

157. $f(x) = e^{x^2 + 5x}$
 $y = g(x) = x^2 + 5x \Rightarrow y' = g'(x) = 2x + 5$
 $z = h(y) = e^y \Rightarrow z' = h'(y) = e^y$
 $f'(x) = g'(x) \cdot h'(y) = (2x + 5) \cdot e^{x^2 + 5x}$
 $f'(-1) = (2(-1) + 5)e^{1^2 + 5(-1)} \Rightarrow f'(-1) = 3 \cdot e^{-4}$

158. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x = -2)$
 $f(-2) = \frac{e^{-2} + e^2}{2} \Rightarrow P\left(-2, \frac{e^{-2} + e^2}{2}\right)$

Derivando, vem:

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(-2) = \frac{e^{-2} - e^2}{2}.$$

A equação da reta é:

$$y - \frac{e^{-2} + e^2}{2} = \frac{e^{-2} - e^2}{2}(x + 2)$$

$$y = \frac{e^{-2} - e^2}{2}x + \frac{3e^{-2} - e^2}{2}.$$

161. a) $f(x) = \frac{1}{x} + \ell n x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$
b) $f(x) = x^n \cdot \ell n x$
 $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \ell n x + x^n \cdot \frac{1}{x}$
 $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \ell n x + x^{n-1} \Rightarrow f'(x) = x^{n-1} \cdot (n \cdot \ell n x + 1)$

c) $f(x) = (ax + b) \cdot \ln x$

$$f'(x) = a \cdot \ln x + (ax + b) \cdot \frac{1}{x}$$

d) $f(x) = \sin x \cdot \ln x$

$$f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\begin{aligned} e) \quad f(x) &= \frac{\ln x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{\cos x}{x} + (\ln x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x + x \cdot \ln x \cdot \sin x}{x \cdot \cos^2 x} \end{aligned}$$

f) $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$

$$f'(x) = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

g) $f(x) = \ln(\sin x)$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot g x$$

h) $f(x) = \log_a \log_b x$

$$y = \log_b x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln b}$$

$$z = \log_a y \Rightarrow z' = \frac{1}{y \ln a}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln b} \cdot \frac{1}{y \ln a} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \log_b x \cdot \ln a \cdot \ln b}$$

Observando que $\log_b x \cdot \ln b = \ln x$, vem:

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln a}.$$

162. e) $f(x) = \sqrt[3]{x \sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

g) $f(x) = \sqrt{ax + b} = (ax + b)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (ax + b)^{-\frac{1}{2}} \cdot a \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$$

i) $f(x) = \sqrt{a + b\sqrt{x}} = (a + b\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (a + b\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{x}} = \frac{b}{4\sqrt{x}(a + b\sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \frac{b}{4\sqrt{ax + bx^{\frac{3}{2}}}}$$

j) $f(x) = \left(\frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(2ax + b)(cx^2 + bx + a) - (2cx + b)(ax^2 + bx + c)}{(cx^2 + bx + a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(cx^2 + bx + a)^{\frac{1}{2}}}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{b(a - c)x^2 + 2(a + c)(a - c)x + b(a - c)}{(cx^2 + bx + a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(a - c)[bx^2 + 2(a + c)x + b]}{2\sqrt{(ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a)^3}}$$

n) $f(x) = \underbrace{(x^2 + 1)}_u \cdot \underbrace{\sqrt{3x + 2}}_v$

$$\begin{aligned} u &= (x^2 + 1) & v &= \sqrt{3x + 2} \\ u' &= (2x) & v' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x + 2}} \cdot 3 \end{aligned}$$

$$f'(x) = (x^2 + 1) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}} = 2x\sqrt{3x + 2} = \frac{3(x^2 + 1) + 2x \cdot 2(3x + 2)}{2\sqrt{3x + 2}}$$

$$f'(x) = \frac{15x^2 + 8x + 3}{2\sqrt{3x + 2}}$$

o) $f(x) = \cos \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ z &= \cos y \Rightarrow z' = -\sin y \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow f'(x) = y' \cdot z' = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

s) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

$$y = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y' = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$z = \ln y \Rightarrow z' = \frac{1}{y}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} y' \cdot z' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

t) $f(x) = \log_a \sqrt{1+x}$

$$y = \sqrt{1+x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$z = \log_a y \Rightarrow z' = \frac{1}{y \ln a}$$

$$f'(x) = y' \cdot z' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} \cdot \ln a}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x) \ln a}$$

163. a) $f(x) = \arcsen 3x$

$$y = 3x \Rightarrow y' = 3$$

$$z = \arcsen y \Rightarrow z' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

b) $f(x) = \arccos x^3$

$$y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$$

$$z = \arccos y \Rightarrow z' = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \Rightarrow f'(x) = -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

c) $f(x) = \text{arc tg } \frac{1}{x}$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \\ z = \text{arc tg } y \Rightarrow z' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2}{x^2(x^2+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$$

g) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\arcsen x}$

$$u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \Rightarrow$$

$$v = \arcsen x \Rightarrow v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \arcsen x - \sqrt[3]{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow \frac{(arc \sen x)^2}{(arc \ sen x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsen x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \cdot 3 \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}}{3 \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} \sqrt{1-x^2}} = \\ = \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsen x - 3x}{3 \frac{6}{\sqrt[6]{x^4}} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (\arcsen x)^2}$$

j) $f(x) = x \cdot \arcsen x^2 - e^{x^3}$

$$\left. \begin{array}{l} a = x \cdot \arcsen x^2 \\ b = e^{x^3} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = a' - b' \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a = x \cdot \arcsen x^2 \\ u = x \Rightarrow u' = 1 \\ v = \arcsen x^2 \\ y = x^2 \Rightarrow y' = 2x \\ z = \arcsen y \Rightarrow z' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow v' = y' \cdot z' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Então:

$$a' = uv' + u'v \Rightarrow a' = \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}} + \arcsen x^2$$

$$b = e^{x^3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = x^3 \Rightarrow p' = 3x^2 \\ q = e^p \Rightarrow q' = e^p \end{array} \right. \Rightarrow b' = p' \cdot q' \Rightarrow b' = 3x^2 \cdot e^{x^3}$$

$$\text{Portanto: } f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}} + \arcsen x^2 - 3x^2 \cdot e^{x^3}.$$

k) $f(x) = \arccos \frac{\sqrt{x}}{e^x}$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{e^x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^x - \sqrt{x} \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)}{(e^x)^2} = \frac{1-2x}{2e^{2x}\sqrt{x}}$$

$$z = \arccos y \Rightarrow z' = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x}{e^{2x}}}} = \frac{-e^x}{\sqrt{e^{2x}-x}}$$

$$f'(x) = y' \cdot z' = \frac{1-2x}{2e^{2x}\sqrt{x}} \cdot \frac{-e^x}{\sqrt{e^{2x}-x}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{xe^{2x}-x^2}}$$

l) $f(x) = \ln \frac{\arcsen x}{\arccos x}$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{\arcsen x}{\arccos x} \\ u = \arcsen x \Rightarrow u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \arccos x \Rightarrow v' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow y' = \frac{\arccos x + \arcsen x}{\sqrt{1-x^2} \cdot (\arccos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\arccos x}{\arcsen x} \cdot \frac{\arccos x + \arcsen x}{\sqrt{1-x^2} \cdot (\arccos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\arcsen x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsen x \cdot \arccos x}$$

164. $f(x) = x \cdot \sqrt{x+1}$ ($x_0 = 3$)

$f(3) = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow P(3, 6)$, ponto de tangência

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(3) = \frac{11}{4}$$

$$y - 6 = \frac{11}{4}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{11}{4}x - \frac{9}{4}$$

- 165.** Uma reta é paralela ao eixo dos x se o seu coeficiente angular é igual a zero, isto é, $f'(x_0) = 0$.

Assim, vamos derivar $f(x)$ e obter o ponto x_0 .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \\ u = x+1 \Rightarrow u' = 1 \\ v = \sqrt{x-1} \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{x-3}{2\sqrt{(x-1)^2}}$$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 - 3 = 0 \text{ ou } x_0 = 3$$

Então, $f(x_0) = f(3) = 2\sqrt{2}$.

O ponto procurado é $(x_0, y_0) = (3, 2\sqrt{2})$.

170. a) $f(x) = (\sen x)^{x^2}$

$$u = \sen x \Rightarrow u' = \cos x$$

$$v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$$

$$f'(x) = (\sen x)^{x^2} \cdot \left[2x \cdot \ln \sen x + x^2 \cdot \frac{\cos x}{\sen x} \right]$$

$$f'(x) = (\sen x)^{x^2} \cdot [2x \cdot \ln \sen x + x^2 \cdot \cotg x]$$

b) $f(x) = x^{x^3}$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v = x^3 \Rightarrow v' = 3x^2$$

$$f'(x) = x^{x^3} \cdot \left[3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} \right]$$

$$f'(x) = x^{x^3} \cdot [3x^2 \cdot \ln x + x^2] \Rightarrow f'(x) = x^{x^3+2} \cdot [3 \ln x + 1]$$

c) $f(x) = (x)^{e^x}$

$$\left. \begin{array}{l} u = x \Rightarrow u' = 1 \\ v = e^x \Rightarrow v' = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = (x)^{e^x} \cdot \left[e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x)^{e^x} \cdot e^x \cdot \left[\ln x + \frac{1}{x} \right]$$

d) $f(x) = (e^x)^{\operatorname{tg} 3x}$

$$\left. \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow u' = e^x \\ v = \operatorname{tg} 3x \Rightarrow v' = 3 \sec^2 3x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (e^x)^{\operatorname{tg} 3x} \cdot \left[3 \sec^2 3x \cdot \ln e^x + \operatorname{tg} 3x \cdot \frac{e^x}{e^x} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (e^x)^{\operatorname{tg} 3x} \cdot [3x \cdot \sec^2 3x + \operatorname{tg} 3x]$$

172. a) $v(t) = S'(t) = -a\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

b) $v(0) = -a\omega \operatorname{sen} \varphi$

c) $\alpha(t) = v'(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

d) $\alpha(1) = -a\omega^2 \cos(\omega + \varphi)$

173. $y = A \operatorname{sen} kx$

$$y' = Ak \cos kx \Rightarrow y'(0) = Ak = 12 \quad (1) \quad (A > 0 \Rightarrow k > 0)$$

$$y'' = -Ak^2 \operatorname{sen} kx$$

$$y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow -Ak^2 \operatorname{sen} kx + 4A \operatorname{sen} kx = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem: $A = 6$.

Então, $A = 6$ e $k = 2$.

CAPÍTULO VIII — Estudo da variação das funções

175. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ e $f(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 16x + 9}{(3x - 4)^2}$$

Como $f(x)$ não é contínua para $x = \frac{4}{3}$ e $\frac{4}{3} \notin I$, então vale o teorema de Rolle:

existe $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$.

176. $f(-3) = (-3) + 3 = 0$

$$f(7) = 7 - 7 = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 2 \\ -1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Como $f(x)$ não é derivável para $x = 2$, que pertence ao intervalo I, não vale o teorema de Rolle: não existe $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$.

177. $f(-1) = 1 - 1 = 0$

$$f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Como $f(x)$ não é derivável para $x = 0$, que pertence ao intervalo I, não vale o teorema de Rolle: não existe $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$.

179. $f(x) = x^2 - 6x + 8, I = [2, 4]$

$f(x)$ é contínua e derivável em \mathbb{R} e, portanto, em I.

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ f(4) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow f(2) = f(4)$$

Seja $c \in I$, tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(c) = 2c - 6 = 0 \Rightarrow c = 3$$

180. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2, I = [-1, 2]$

$f(x)$ é contínua e derivável em \mathbb{R} e, portanto, em I.

$$f(-1) = f(2) = 0$$

Seja $c \in I$, tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 4c - 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

181. $f(x) = x^3 - 16x, I = [0, 4]$

$f(x)$ é contínua e derivável em \mathbb{R} e, portanto, em I.

$$f(0) = f(4) = 0$$

Seja $c \in I$, tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 16 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 16 \Rightarrow c = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

183. $f(x) = x^2 + 2x - 1, I = [0, 1]$

$f(x)$ é contínua e derivável em \mathbb{R} e, portanto, em I, e $f'(x) = 2x + 2$.

Ainda $f(0) = -1$ e $f(1) = 2$, isto é, $f(0) \neq f(1)$.

Então:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Rightarrow 2c + 2 = 3 \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

184. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, I = [0, 1]$

$f(x)$ é contínua e derivável em $[0, 1]$ e $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \neq f(1) \quad (2^{\circ} \text{ caso})$$

$$f'(c) = \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{1-0}{1-0} = 1 \Rightarrow c = \frac{8}{27}$$

185. $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $I = [-8, 6]$

$f(x)$ é contínua e derivável em I e $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$.

$$\begin{aligned} f(-8) &= 6 \\ f(6) &= 8 \Rightarrow f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{100 - c^2}} = \frac{8 - 6}{6 + 8} = \frac{1}{7} \Rightarrow \\ \Rightarrow -7c &= \sqrt{100 - c^2} \Rightarrow c = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

186. $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x - 1}$, $I = [2, 6]$

$f(x)$ é contínua e derivável em $I = [2, 6]$ e $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{(x - 1)^2}$.

$$f(6) = 12 = f(2)$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } f'(c) &= \frac{c^2 - 2c - 4}{(c - 1)^2} = \frac{12 - 12}{6 - 2} = 0 \Rightarrow c^2 - 2c - 4 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow c &- 1 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Como $c = 1 - \sqrt{5} \notin I$, então $c = 1 + \sqrt{5}$ é a solução.

188. $f(x) = \frac{4}{(x - 3)^2}$ não é contínua para $x = 3$, que está em $I = [1, 6]$.

189. $f(x) = \frac{2x - 1}{3x - 4}$ não é contínua para $x = \frac{4}{3}$, que está em $I = [1, 2]$.

190. $f'(x) = \begin{cases} 3 \text{ se } x < 1 \\ -3 \text{ se } x > 1 \end{cases}$

$f(x)$ não é derivável para $x = 1$ (embora seja contínua nesse ponto), que está no intervalo $I = [-2, 4]$.

192. a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 13$

$$f'(x) = 6x^2 - 30x - 84 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq 7$$

b) $g(x) = 2 \cos x - x + 1$

$$g'(x) = -2 \sin x - 1$$

$$g'(x) = -(1 + 2 \sin x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin x \leq 0 \Rightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c) $h(x) = \sin x - \cos x$

$$h'(x) = \cos x + \sin x$$

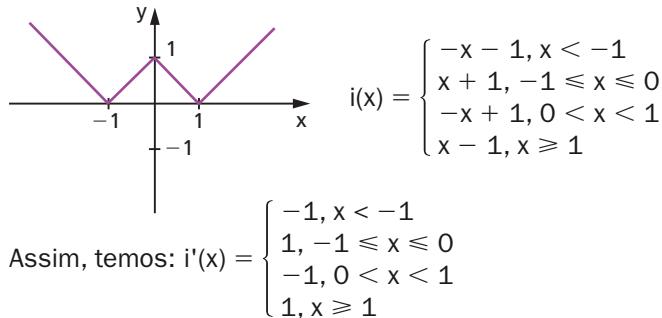
$$h'(x) \geq 0 \Rightarrow \cos x + \sin x \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{Então: } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

d) $i(x) = ||x| - 1|$

Construindo a tabela, podemos ter o gráfico de $i(x)$:



Então: $i'(x) \geq 0$ para $-1 \leq x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

194. a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$

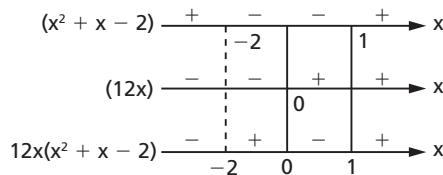
$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 12x$$

$$f'(x) = 12x(x^2 + x - 2)$$

Estudando o sinal de $x^2 + x - 2$, temos:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \text{ para } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 1 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \text{ para } -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Assim, temos:



Portanto, $f'(x) \leq 0$ para $x \leq -2$ ou $0 \leq x \leq 1$.

b) $g(x) = e^x - x$

$$g'(x) = e^x - 1$$

$$g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow \ell n e^x \leq \ell n 1 \Rightarrow x \leq 0$$

c) $h(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$

$$h'(x) = \frac{3(x + 1) - (3x + 2)}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2} \Rightarrow h'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

Então, $h(x)$ é sempre crescente.

d) $i(x) = \arcsen x$

$$i'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow i'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Então, $i(x)$ é sempre crescente.

195. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$

$f'(x)$ é crescente para $x \leq 1$ ou $x \geq 5$.

$f'(x)$ é decrescente para $1 \leq x \leq 5$.

196. $f(x) = x^4 + 4$

$$f'(x) = 4x^3 + 4 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq -1 \Rightarrow x \geq -1 \text{ (crescente)} \\ f'(x) \leq 0 \Rightarrow x^3 \leq -1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ (decrescente)} \end{cases}$$

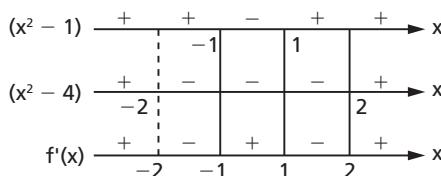
197. $f(x) = x^5 - \frac{25}{3}x^3 + 20x - 2$

$$f'(x) = 5x^4 - 25x^2 + 20$$

Fazendo $x^2 = y$, temos $f'(y) = 5y^2 - 25y + 20$.

Calculando as raízes, temos: $y = 1$ ou $y = 4$.

Assim: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ e $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

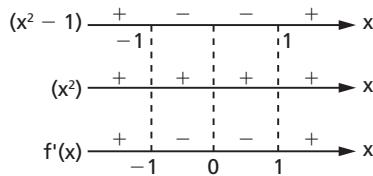


$f(x)$ é crescente se $f'(x) \geq 0$: $x \leq -2$ ou $-1 \leq x \leq 1$ ou $x \geq 2$.

$f(x)$ é decrescente se $f'(x) \leq 0$: $-2 \leq x \leq -1$ ou $1 \leq x \leq 2$.

198. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

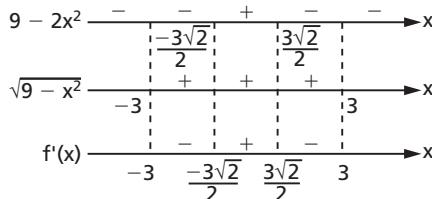


$f(x)$ é crescente se $f'(x) \geq 0$: $x \leq -1$ ou $x \geq 1$.

$f(x)$ é decrescente se $f'(x) \leq 0$: $-1 \leq x \leq 1$ e $x \neq 0$.

199. $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

$$f'(x) = \sqrt{9-x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$



Observação:

$$\sqrt{9-x^2} > 0 \Leftrightarrow 9-x^2 > 0 \Rightarrow -3 < x < 3$$

Se $9-x^2 < 0$, não há significado.

Então: $f(x)$ é crescente para $\frac{-3\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$f(x)$ é decrescente para $-3 < x \leq \frac{-3\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x < 3$.

200. $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x-1}$

$$f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$\frac{-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow (x-1)^2 < 0 \text{ (falso)}$$

$$\frac{-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow (x-1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Então, $f(x)$ é decrescente, para todo x real.

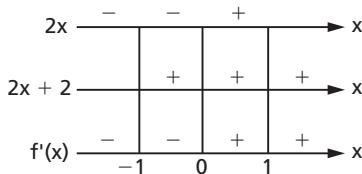
201. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \leq 2 \\ 7 - x, & \text{se } x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 2 \\ -1, & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Então, $f(x)$ é crescente para $x \leq 2$ e decrescente para $x > 2$.

202. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + 2x - 3, & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x < 1 \\ 2x + 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Obtendo as raízes de $f'(x)$, temos:

para $f'(x) = 2x$, $x = 0$ e para $f'(x) = 2x + 2$, $x = -1$.



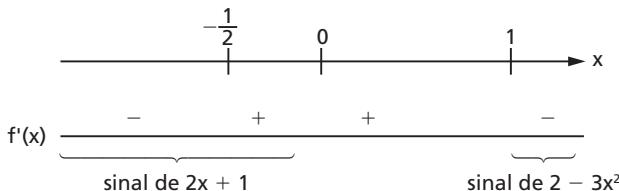
Para $x < 1$, predomina para $f'(x)$ o sinal de $2x$ e para $x > 1$ predomina o sinal de $2x + 2$

Observa-se que em $x = 0$ há mudança de sinal de $f'(x)$.

Então, $f(x)$ é decrescente para $x \leq 0$ e crescente para $x \geq 0$.

203. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{se } x \leq 0 \\ x, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2x - x^3, & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2 - 3x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Daí vem a tabela de sinais de $f'(x)$:



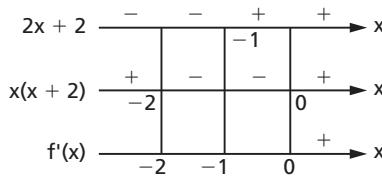
Conclusão:

$f(x)$ é crescente para $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

$f(x)$ é decrescente para $x \leq -\frac{1}{2}$ ou $x \geq 1$.

204. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \ln(x + 2)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+2}{x(x+2)}$$



Como o domínio é \mathbb{R}_+^* , não interessa o que ocorre quando $x < 0$.
 $f(x)$ é crescente para $\forall x, x \in \mathbb{R}_+^*$.

205.
$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq -1 \\ x^2, & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ e^{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < -1 \\ 2x, & \text{se } -1 < x < 1 \\ e^{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Considerando $f'(x) = 2x$, verifica-se que $f'(x) \leq 0$ se $x \leq 0$ e $f'(x) \geq 0$ se $x \geq 0$.

Então, $f'(x) \leq 0$ para $x \leq 0$ e $f'(x) \geq 0$ para $x \geq 0$, porque:

$$x \leq 0 \Rightarrow f'(x) = -1 \text{ ou } f'(x) = 2x \text{ e}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \text{ ou } f'(x) = e^{x-1}$$

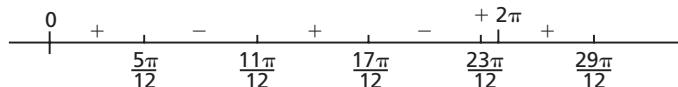
Assim, $f(x)$ é crescente em \mathbb{R}_+ e decrescente em \mathbb{R}_- .

206. $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 3 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$f'(x) = 6 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Determinando as raízes de $f'(x)$, temos:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$



Então, $f(x)$ é crescente para $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$ ou $\frac{11\pi}{12} \leq x \leq \frac{17\pi}{12}$ ou $\frac{23\pi}{12} \leq x \leq 2\pi$ é decrescente para $\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{11\pi}{12}$ ou $\frac{17\pi}{12} \leq x \leq \frac{23\pi}{12}$.

207. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\cos x}$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x}$$

$f(x)$ é crescente se $f'(x) \geq 0$, isto é, $-\operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x} \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x} \leq 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \leq 0 \Rightarrow \pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Analogamente, $f(x)$ é decrescente se $\operatorname{sen} x \geq 0 \Rightarrow 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

208. $f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{\cos x \cdot (x - \operatorname{tg} x)}{x^2}$

Para todo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ temos $x < \operatorname{tg} x$; então, $f'(x) < 0$, e, portanto, $f(x)$ é decrescente.

209. $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 + 5x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^5 \left(3 + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 + 5x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^5 \left(3 + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right) \right] = +\infty$$

Isso significa que a função contínua $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 1$ tem imagem \mathbb{R} . Sua derivada $f'(x) = 15x^4 + 15x^2$ é maior ou igual a zero para todo x real, então $f(x)$ é crescente.

Conclusão: seu gráfico só pode cortar o eixo dos x num único ponto.

212. Sejam $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$.

Temos:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)} \Rightarrow h(x_1) \geq h(x_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow h \text{ é decrescente em } I.$$

213. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ crescentes, isto é:

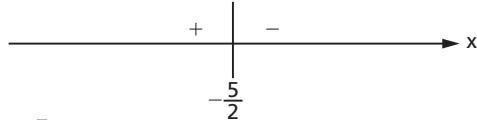
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (1) \text{ e } x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2) \quad (2)$$

Então, sendo $h = f \circ g$, isto é, $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, vem:

$$\text{de (2): } g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \leq f(g(x_2)) \Rightarrow h(x_1) \leq h(x_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow h(x) \text{ é crescente em } I.$$

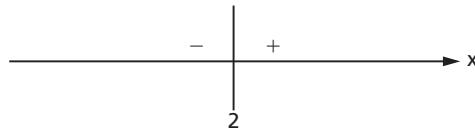
214. $f(x) = -x^2 - 5x - 4$

$$f'(x) = -2x - 5, \text{ cuja raiz é } x = -\frac{5}{2}$$



$-\frac{5}{2}$ é ponto de máximo.

- 215.** $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$
 $f'(x) = 4x - 8$, cuja raiz é $x = 2$



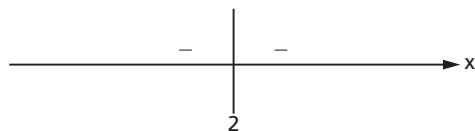
$x = 2$ é ponto de mínimo.

- 216.** $f(x) = x^3 - 27x + 1$
 $f'(x) = 3x^2 - 27$, cujas raízes são $x = -3$ e $x = 3$



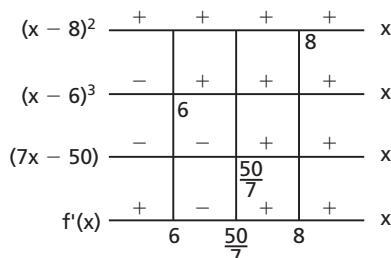
$x = -3$ é ponto de máximo e $x = 3$ é ponto de mínimo.

- 217.** $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$
 $f'(x) = -3x^2 + 12x - 12$, cuja raiz é 2



$x = 2$ é ponto de inflexão.

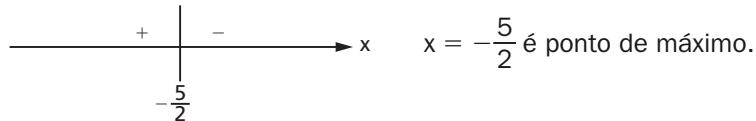
- 218.** $f(x) = (x - 8)^3 \cdot (x - 6)^4$
 $f'(x) = 3(x - 8)^2 \cdot (x - 6)^4 + 4(x - 8)^3 \cdot (x - 6)^3$
 $f'(x) = (x - 8)^2 \cdot (x - 6)^3 [3(x - 6) + 4(x - 8)]$
 $f'(x) = (x - 8)^2 \cdot (x - 6)^3 \cdot (7x - 50)$



Conclusão: $\begin{cases} x = 6 \text{ é ponto de máximo.} \\ x = \frac{50}{7} \text{ é ponto de mínimo.} \end{cases}$

219. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x - 6}$

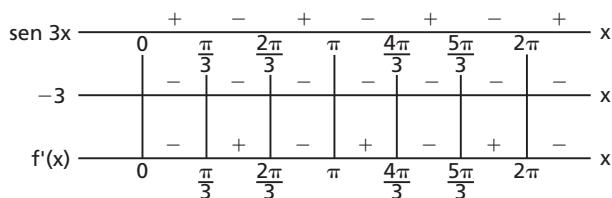
$$f'(x) = \frac{-2x - 5}{(x^2 + 5x - 6)^2}, \text{ cuja raiz é } x = -\frac{5}{2}$$



220. $f(x) = \cos 3x$

$$f'(x) = -3 \sin 3x$$

$$\begin{aligned} \sin 3x = 0 \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 3x = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - 0 + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \end{aligned}$$



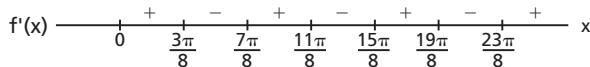
pontos de máximo: $x = \frac{2\pi}{3}; x = \frac{4\pi}{3}; x = 2\pi; \dots$; isto é, $x = \frac{2k\pi}{3}$

pontos de mínimo: $x = \frac{\pi}{3}; x = \pi; x = \frac{5\pi}{3}; \dots$; isto é, $x = \frac{(2k+1)\pi}{3}$

221. $f(x) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$f'(x) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$



pontos de máximo: $x = \frac{3\pi}{8}; x = \frac{11\pi}{8}; x = \frac{19\pi}{8}; \dots$; isto é, $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

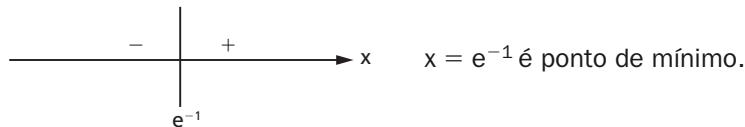
pontos de mínimo: $x = \frac{7\pi}{8}; x = \frac{15\pi}{8}; x = \frac{23\pi}{8}; \dots$; isto é, $x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

222. $f(x) = x \cdot \ln x$

$f'(x) = 1 + \ln x$, cuja raiz é $x = e^{-1}$

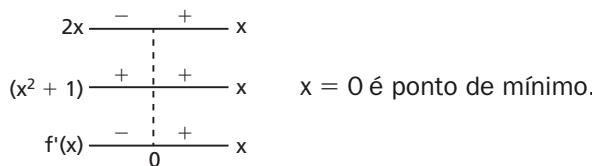
Consideremos $x_1 < x$; seja $x_1 = e^{-2} \Rightarrow 1 + \ln e^{-2} = 1 - 2 = -1 < 0$.

Consideremos $x_2 > x$; seja $x_2 = e^2 \Rightarrow 1 + \ln e^2 = 1 + 2 = +3 > 0$.



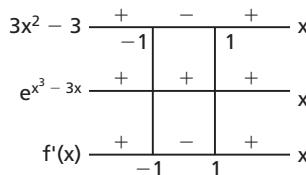
223. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, cuja raiz é $x = 0$



224. $f(x) = e^{x^3 - 3x}$

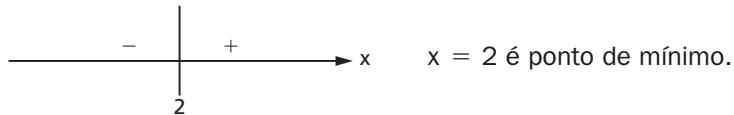
$f'(x) = (3x^2 - 3) \cdot e^{x^3 - 3x}$, cujas raízes são $x = -1$ ou $x = 1$



$x = -1$ é ponto de máximo e $x = 1$ é ponto de mínimo.

226. $f(x) = x^2 - 4x - 1$

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$



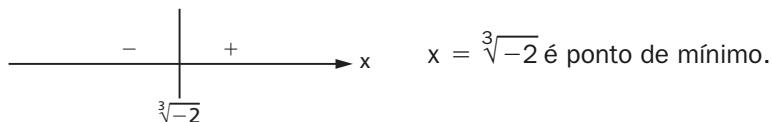
$$f(2) = 4 - 8 - 1 = -5 \Rightarrow f(2) = -5 \text{ é o valor mínimo.}$$

227. $f(x) = x^4 + 8x$

$$f'(x) = 4x^3 + 8 \Rightarrow 4x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2}$$

Seja $x_1 = -2$, $x_1 < x$. Então, $f'(x) = -32 + 8 = -24 < 0$.

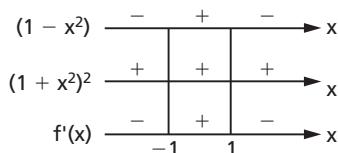
Seja $x_2 = 2$, $x_2 > x$. Então, $f'(x) = 32 + 8 = 40 > 0$.



$$f(\sqrt[3]{-2}) = (\sqrt[3]{-2})^4 + 8\sqrt[3]{-2} = 2\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{-2} \text{ é o valor mínimo.}$$

228. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \text{ cujas raízes são } x = -1 \text{ e } x = 1$$



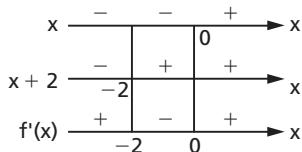
$x = -1$ é ponto de mínimo e
 $x = 1$ é ponto de máximo.

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \text{ é o valor mínimo.}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ é o valor máximo.}$$

229. $f(x) = x^2 e^x$

$$f'(x) = xe^x(x+2)$$
, cujas raízes são $x = 0$ e $x = -2$



$x = -2$ é ponto de máximo e
 $x = 0$ é ponto de mínimo.

$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = 4e^{-2}$ é o valor máximo.
 $f(0) = 0$ é o valor mínimo.

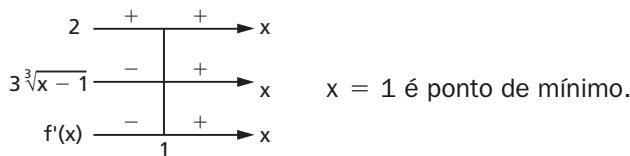
230. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ não tem extremos.

231. $f(x) = (x - 1)^{\frac{2}{3}}$

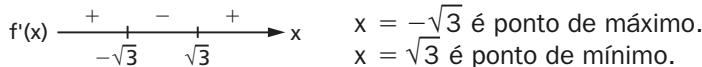
$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$



$f(1) = 0$ é o valor mínimo.

232. $f(x) = x^3 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 9$, cujas raízes são $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$



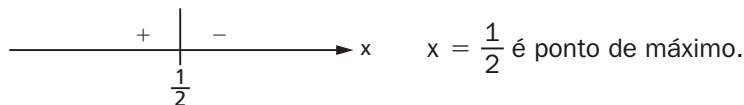
$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$$

Então: $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ é ponto máximo e $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ é ponto mínimo.

233. $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

$$f'(x) = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}, \text{ cuja raiz é } x = \frac{1}{2}$$



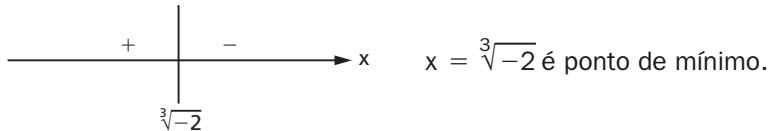
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right) \text{ é ponto máximo.}$$

234. $f(x) = \frac{1 - x^3}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{-(x^3 + 2)}{x^3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2} \text{ é a raiz}$$

Seja $x_1 = -2 < \sqrt[3]{-2} \Rightarrow f'(-2) = -\frac{3}{4} < 0$.

Seja $x_2 = -1 > \sqrt[3]{-2} \Rightarrow f'(-1) = 2 > 0$.



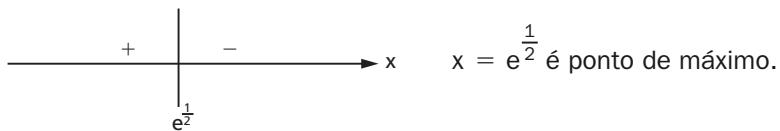
$$f(\sqrt[3]{-2}) = \frac{1 - (\sqrt[3]{-2})^3}{(\sqrt[3]{-2})^2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{-2}, \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right) \text{ é ponto mínimo.}$$

235. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} \text{ é a raiz}$$

Sendo $x_1 = e^{-1} < e^{\frac{1}{2}}$, então $f'(e^{-1}) = 2e^3 > 0$.

Sendo $x_2 = e > e^{\frac{1}{2}}$, então $f'(e) = -\frac{1}{e^3} < 0$.



$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1}{2e} \Rightarrow \left(e^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2e}\right) \text{ é ponto máximo.}$$

236. $f(x) = x^3 + ax^2 + b$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax \Rightarrow 3x^2 + 2ax = 0 \text{ tem raízes} \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2a}{3} \end{cases}$$

Sendo $(1, 5)$ um extremo relativo, então $-\frac{2a}{3} = 1$ e $f(1) = 5$.

Daí $a = -\frac{3}{2}$.

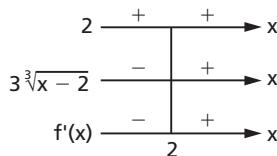
Assim, $f(1) = 1 - \frac{3}{2} + b = 5 \Rightarrow b = \frac{11}{2}$.

Portanto, $a = -\frac{3}{2}$ e $b = \frac{11}{2}$.

238. $f(x) = (x - 2)^{\frac{2}{3}}$

Como f é derivável em $[1, 5]$, apliquemos o teorema de Fermat:

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$



Então, $x = 2$ é ponto de mínimo interior.

Calculemos o valor de f nesse ponto e nos extremos do intervalo $[1, 5]$:

$$f(1) = (1 - 2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$$

$$f(2) = (2 - 2)^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$f(5) = (5 - 2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

O valor máximo absoluto de f no intervalo $[1, 5]$ é o maior dos números $f(1)$, $f(2)$ e $f(5)$; portanto, $f(5) = \sqrt[3]{9}$.

O valor mínimo absoluto de f no intervalo $[1, 5]$ é o menor dos números $f(1)$, $f(2)$ e $f(5)$; portanto, $f(2) = 0$.

Assim, $x = 2$ é o ponto de mínimo absoluto e $x = 5$ é o ponto de máximo absoluto.

239. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ é contínua no intervalo $[3, 6]$, em que não está $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} \text{ então } f'(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ do domínio de } f.$$

Calculando $f(3) = 1$ e $f(6) = \frac{1}{4}$, temos que $x = 3$ é ponto de máximo absoluto e $x = 6$ é um ponto de mínimo absoluto em $[3, 6]$, pois $f(x)$ é decrescente.

240. $h = 30 + 20t - 5t^2$

$$h' = 20 - 10t = 0 \Rightarrow 20 - 10t = 0 \Rightarrow t = 2$$

A altura máxima é atingida no instante $t = 2$ s.

241. $s = a \cdot \cos(kt + \ell)$

$v = s' = -ak \cdot \sin(kt + \ell)$

$\alpha = v' = -ak^2 \cos(kt + \ell)$

a) A velocidade v é máxima no instante em que $\sin(kt + \ell) = -1$,

$\text{ou seja, } kt + \ell = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2k} - \frac{\ell}{k} + \frac{2n\pi}{k}.$

A posição em que isso ocorre é

$s = a \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0.$

b) A aceleração α é mínima no instante em que $\cos(kt + \ell) = 1$, ou seja,

$kt + \ell = 2n\pi \Rightarrow t = -\frac{\ell}{k} + \frac{2n\pi}{k}.$

A posição em que isso ocorre é

$s = a \cdot \cos(2n\pi) = a.$

243.



$x + y = \text{semiperímetro} \Rightarrow x + y = a \Rightarrow y = a - x$

x A área do retângulo é dada por $S = xy$.

$\text{Então: } S = x(a - x) \Rightarrow S = -x^2 + ax.$

y

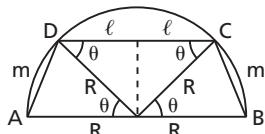
$\text{Derivando: } S' = -2x + a \Rightarrow x = \frac{a}{2} \text{ é raiz.}$

Considerando $0 < x < \frac{a}{2}$, $S' = -2x + a > 0$ e para $\frac{a}{2} < x < a$,

$S' = -2x + a < 0$, isto é, $x = \frac{a}{2}$ é ponto de máximo local.

A área máxima do retângulo se dá para $x = \frac{a}{2}$ e $y = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$, isto é, quando o retângulo é um quadrado.

244.



$\text{perímetro} = 2R + 2\ell + 2m$

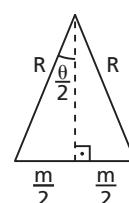
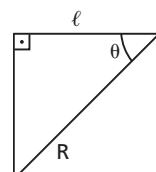
$\ell = R \cdot \cos \theta$

$\frac{m}{2} = R \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$

então:

$\text{perímetro } P = 2R + 2R \cos \theta + 4R \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$

$P' = -2R \operatorname{sen} \theta + 2R \cos \frac{\theta}{2}$



$$P' = 0 \Rightarrow \sin \theta = \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow 2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

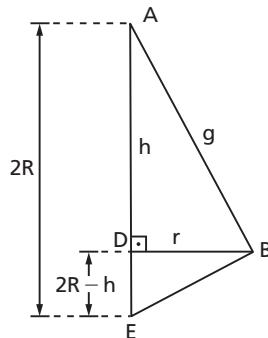
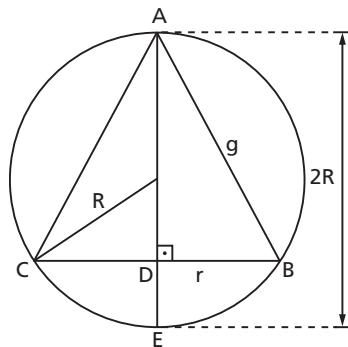
$$\Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow P' > 0 \\ \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow P' < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ é ponto de máximo local}$$

então o perímetro máximo é:

$$P_{\max} = P\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2R + 2R \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 4R \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 5R$$

246.



No $\triangle ABE$, temos:

$$g^2 = 2Rh \Rightarrow g = \sqrt{2Rh}$$

e

$$r^2 = h(2R - h) \Rightarrow r = \sqrt{h(2R - h)}.$$

$$A_\ell = \pi r g$$

$$A_\ell = \pi \sqrt{h(2R - h)} \cdot \sqrt{2Rh}$$

$$A_\ell = \pi \sqrt{4R^2h^2 - 2Rh^3}$$

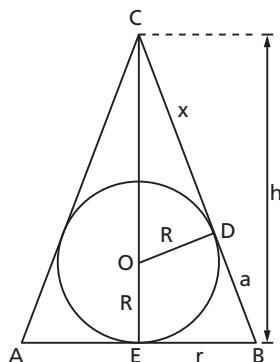
Derivando, vem:

$$A'_\ell = \pi \frac{8R^2h - 6Rh^2}{2\sqrt{4R^2h^2 - 2Rh^3}} = \pi \frac{R(4R - 3h)}{\sqrt{2R(2R - h)}}$$

Determinando os zeros de A'_ℓ , vem:

$$A'_\ell = 0 \Leftrightarrow 4R - 3h = 0 \Rightarrow h = \frac{4}{3}R.$$

$$\text{Sendo } h = \frac{4}{3}R, \text{ vem } A_\ell = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^2 \text{ e } r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R.$$

247.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Considerando o $\triangle COD$, temos:

$$x^2 = (h - R)^2 - R^2 \Rightarrow x = \sqrt{h^2 - 2Rh}$$

Considerando a semelhança entre os triângulos, $\triangle COD \sim \triangle CEB$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{x}{h} &= \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{h^2 - 2Rh}}{h} = \frac{R}{r} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{h^2 - 2Rh}{h^2} &= \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{R^2 h}{h - 2R}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de r^2 na fórmula do volume, vem:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R^2 h}{h - 2R} \right) \cdot h \Rightarrow V = \frac{\pi R^2}{3} \left(\frac{h^2}{h - 2R} \right).$$

Derivando, temos:

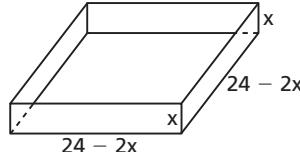
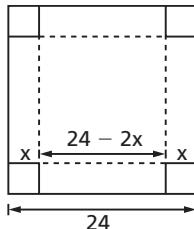
$$V' = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h(h - 4R)}{(h - 2R)^2}.$$

Determinando as raízes de V' , vem:

$$h(h - 4R) = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ ou } h = 4R.$$

Como $h = 0 \Rightarrow V = 0$, então devemos ter $h = 4R$.

Sendo $h = 4R$, vem $V = \frac{8}{3} \pi R^3$ e $r = R\sqrt{2}$.

248.

Volume da caixa aberta = área da base \times altura

$$V = (24 - 2x)^2 \cdot x \Rightarrow V = 4x^3 - 96x^2 + 576x$$

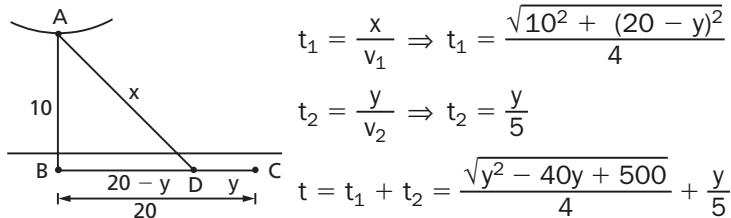
Derivando, temos:

$$V' = 12x^2 - 192x + 576, \text{ cujas raízes são: } x = 4 \text{ e } x = 12.$$



$x = 4$ é ponto de máximo e
 $x = 12$ é ponto de mínimo.

Para o volume maior possível, devemos ter $x = 4$ cm.

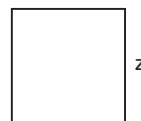
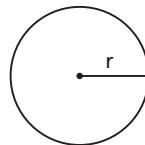
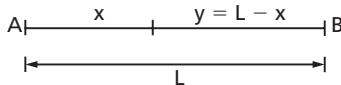
249.

Derivando, temos:

$$t' = \frac{5y - 100 + 4\sqrt{y^2 - 40y + 500}}{20\sqrt{y^2 - 40y + 500}} \text{ e, fazendo } t' = 0, \text{ vem:}$$

$$4\sqrt{y^2 - 40y + 500} = -5y + 100 \Rightarrow y = 33,3 \text{ (rejeitada) ou } y = 6,6.$$

Então, DC = y = 6,6 e BD = 20 - y = 13,4.

250.

$$x = 2\pi r$$

$$L - x = 4z$$

$$r = \frac{x}{2\pi}$$

$$z = \frac{L-x}{4}$$

$$A_O = \pi r^2$$

$$A_{\square} = z^2$$

$$A_O = \frac{\pi x^2}{4\pi^2}$$

$$A_{\square} = \frac{(L-x)^2}{16}$$

$$A_O = \frac{x^2}{4\pi} \quad A_{\square} = \frac{L^2 - 2Lx + x^2}{16}$$

$$A = A_O + A_{\square} = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{L^2 - 2Lx + x^2}{16} = \frac{(4 + \pi)x^2 - 2\pi Lx + \pi L^2}{16\pi}$$

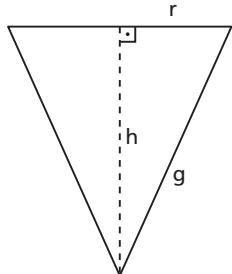
Para procurar o valor máximo, devemos obter A':

$$A' = \frac{2(4 + \pi)x - 2\pi L}{16\pi}$$

$$A' = \frac{(4 + \pi)x - \pi L}{8\pi}$$

$$\text{De onde, } A' = 0 \Rightarrow (4 + \pi)x - \pi L = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi L}{4 + \pi}$$

$$\text{e daí } y = L - x \Rightarrow y = \frac{4L}{4 + \pi}.$$

251.

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow r^2 = \frac{3V}{\pi h} \\ A_\ell &= \pi r g = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \\ &= \pi \sqrt{r^4 + r^2 h^2} = \\ &= \pi \sqrt{\frac{9V^2}{\pi^2 h^2} + \frac{3Vh}{\pi}} = \\ &= \sqrt{\frac{9V^2}{h^2} + 3\pi V h} \end{aligned}$$

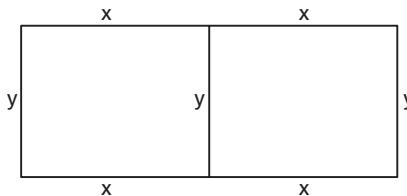
$$A'_\ell = \frac{-\frac{18V^2}{h^3} + 3\pi V}{2\sqrt{\frac{9V^2}{h^2} + 3\pi V h}}$$

$$A'_\ell = 0 \Rightarrow h^3 = \frac{6V}{\pi}$$

De $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ vem $\frac{V}{h^3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2}{h^2}$; então:

$$\frac{r^2}{h^2} = \frac{3V}{\pi h^3} = \frac{3V}{6V} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e daí } \frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

252.

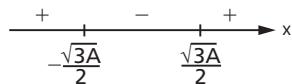
O comprimento da cerca é $L = 4x + 3y$. A área de cada curral é $A = xy$,

então $y = \frac{A}{x}$ e daí:

$$L = 4x + \frac{3A}{x}$$

$$L' = 4 - \frac{3A}{x^2}.$$

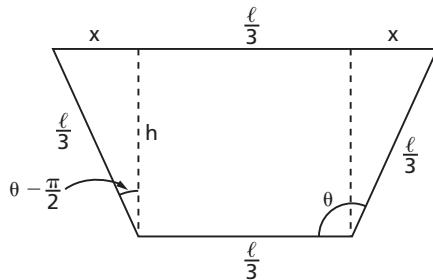
Impondo $L' = 0$, vem $4x^2 - 3A = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3A}}{2}$, que é ponto de mínimo, conforme se vê pela variação de sinal de L' :



Calculemos o valor de L_{\min} :

$$L_{\min} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3A}}{2} + \frac{3A}{\frac{\sqrt{3A}}{2}} = 4\sqrt{3A}.$$

253.



A seção reta da calha é um trapézio de área:

$$A = \frac{h}{2} \cdot \left[2x + 2 \frac{l}{3} \right] = h \left(x + \frac{l}{3} \right).$$

Temos também:

$$h = \frac{l}{3} \cdot \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{l}{3} \cdot \sin \theta$$

$$x = \frac{l}{3} \cdot \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{l}{3} \cdot \cos \theta$$

então:

$$A = -\frac{l^2}{9} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{l^2}{9} \cdot \sin \theta = \frac{l^2}{9} \left(\sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)$$

$$A' = \frac{l^2}{9} (\cos \theta - \cos 2\theta) = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = \cos \theta \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

254.

$$f(x) = x \cdot (x - 2)^3$$

$$f'(x) = (x - 2)^2(4x - 2)$$

$$f''(x) = (x - 2)(12x - 12)$$

Calculando os zeros de $f'(x)$, temos: $x = 2$ e $x = \frac{1}{2}$.

Calculando $f''(x)$ nesses pontos, temos:

$$f''(2) = 0$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ é ponto de mínimo.}$$

255. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1+x^2)^3}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$ (raízes de $f'(x)$)

Substituindo em $f''(x)$, vem:

$$f''(-1) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow x = -1 \text{ é ponto de mínimo.}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x = 1 \text{ é ponto de máximo.}$$

256. $f(x) = x^2 e^x$

$$f'(x) = x e^x (2 + x)$$

$$f''(x) = e^x (2 + 4x + x^2)$$

Obtendo as raízes de $f'(x)$, vem $x = 0$ e $x = -2$.

Calculando $f''(x)$ nesses pontos, vem:

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ é ponto de mínimo.}$$

$$f''(-2) = -2e^{-2} < 0 \Rightarrow x = -2 \text{ é ponto de máximo.}$$

257. $f(x) = e^x + e^{-x}$

$$f'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f''(x) = e^x + e^{-x}$$

Com $f'(x) = 0$ temos, para raiz, $x = 0$.

$$\text{Calculando } f''(0), \text{ vem: } f''(0) = e^0 + e^0 = 2 > 0.$$

Portanto, $x = 0$ é ponto de mínimo.

258. $f(x) = \log_e(1+x^2)$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}; f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Então, $f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow x = 0$ é ponto de mínimo.

259. $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} \neq 0$$

Não é possível determinar os extremos usando o critério da derivada segunda.

260. $f(x) = \frac{\ln \frac{x}{2}}{(\ln x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 2 \ln \frac{x}{2}}{x(\ln x)^3} = \frac{\ln \frac{4}{x}}{x(\ln x)^3}$$

$$f'(x) = \ln \frac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x} = 1 \Rightarrow x = 4$$

Calculemos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{-\left[\ln x + \ln \frac{4}{x} (\ln x + 3)\right]}{x^2(\ln x)^4}.$$

Então: $f''(4) = \frac{-1}{16(\ln 4)^3} < 0 \Rightarrow x = 4$ é ponto de máximo.

Então, determinemos $f(4)$:

$$f(4) = \frac{\ln 2}{(\ln 4)^2} = \frac{1}{4 \ln 2} \Rightarrow P\left(4, \frac{1}{4 \ln 2}\right) \text{ é ponto de máximo.}$$

261. $f(x) = -(x - 1)^2$

$$f'(x) = -2(x - 1); f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x = 1$ é ponto de máximo.

Então: $f(1) = 0$; $f(-2) = -9$; $f(3) = -4$.

Isso significa que:

$x = 1$ é ponto de máximo absoluto.

$x = -2$ é ponto de mínimo absoluto.

262. $f(x) = x^2 - 4x + 8$

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2 \text{ é raiz de } f'(x).$$

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow x = 2$ é ponto de mínimo.

Então: $f(-1) = 13$; $f(2) = 4$; $f(3) = 7$.

Isso significa que:

$x = -1$ é ponto de máximo absoluto.

$x = 2$ é ponto de mínimo absoluto.

263. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 8, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 1 \\ 2x - 6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ é raiz de } f'(x)$$

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ é ponto de mínimo}$$

Calculando os extremantes:

$$f(-6) = -4; f(5) = 3; f(1) = 3; f(3) = -1.$$

Concluímos:

$x = 1$ e $x = 5$ são pontos de máximo absoluto.

$x = -6$ é ponto de mínimo absoluto.

- 265.** Seja $P(x, y)$ um ponto da curva $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 20$.

Notando que $\left(\frac{x-3}{\sqrt{20}}\right)^2 + \left(\frac{y-6}{\sqrt{20}}\right)^2 = 1$, façamos:

$$\frac{x-3}{\sqrt{20}} = \cos \theta \text{ e } \frac{y-6}{\sqrt{20}} = \sin \theta.$$

(Assim teremos a vantagem de lidar com uma só variável: θ .) Temos, então:
 $x = 3 + \sqrt{20} \cdot \cos \theta$ e $y = 6 + \sqrt{20} \cdot \sin \theta$.

Calculemos a distância entre $P(x, y)$ e $(-2, -4)$:

$$d = \sqrt{(x+2)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(5 + \sqrt{20} \cdot \cos \theta)^2 + (10 + \sqrt{20} \cdot \sin \theta)^2} = \\ = \sqrt{145 + 10\sqrt{20} \cdot \cos \theta + 20\sqrt{20} \cdot \sin \theta}$$

Para calcularmos os valores de θ que tornam d mínimo (ou máximo), calculamos d' e impomos $d' = 0$. Resulta $-\sin \theta + 2 \cdot \cos \theta = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \tan \theta = 2$. Daí resultam as alternativas:

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow P(5, 10)$$

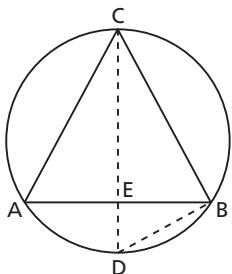
ou

$$\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e } \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow P(1, 2)$$

As distâncias desses pontos ao ponto $(-2, -4)$ são, respectivamente, $\sqrt{245}$ e $\sqrt{45}$.

Conclusão: $(1, 2)$ é que está a distância mínima.

- 267.**



A figura ao lado é uma seção da esfera e do cone inscrito, feita por um plano contendo o eixo de simetria do cone.

O volume do cone é dado por:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h, \text{ em que } r = BE \text{ (raio da base do cone)} \text{ e } h = CE \text{ (altura do cone).}$$

No triângulo retângulo BCD, temos:

$$(BE)^2 = (CE)(ED) \Rightarrow r^2 = h(2R - h) = 2Rh - h^2 \Rightarrow r = \sqrt{2Rh - h^2}.$$

Então, em função de h , temos:

$$V = \frac{\pi}{3} (2Rh^2 - h^3).$$

Procuremos o valor máximo para $0 < h < 2R$:

$$V' = \frac{\pi}{3} (4Rh - 3h^2)$$

$$V' = 0 \Rightarrow h = \frac{4R}{3}$$

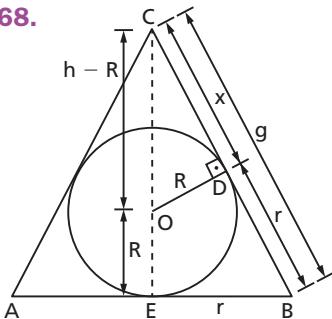
Como $V = 0$ para $h = 0$ ou $h = 2R$ e, sendo $h = \frac{4R}{3}$, então:

$V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{32R^3}{27} \right) \Rightarrow V = \frac{32\pi R^3}{81}$; portanto, $h = \frac{4R}{3}$ é o ponto de máximo

para V e, nesse caso,

$$r = \sqrt{2R \cdot \frac{4R}{3} - \frac{16R^2}{9}} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}R}{3}.$$

268.



A área total é dada por: $A_t = \pi r(g + r)$ (1)
Considerando o $\triangle COD$, temos:

$$x^2 = (h - R)^2 - R^2 \Rightarrow x = \sqrt{h^2 - 2Rh}.$$

$$\text{Como } g = x + r, \text{ então } g = \sqrt{h^2 - 2Rh} + r \quad (2)$$

Mas devemos colocar toda a equação em função de uma única variável.
Então, da semelhança dos triângulos $\triangle COD$ e

$$\triangle CEB, \text{ vem: } \frac{x}{h} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{h^2 - 2Rh}}{h} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{h - 2R}{h} = \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{R^2 h}{h - 2R} \Rightarrow r = R \cdot \sqrt{\frac{h}{h - 2R}} \quad (3)$$

Então, substituindo (2) e (3) em (1), vem:

$$A_t = \pi R \sqrt{\frac{h}{h - 2R}} \cdot \left(\sqrt{h^2 - 2Rh} + R \cdot \sqrt{\frac{h}{h - 2R}} + R \cdot \sqrt{\frac{h}{h - 2R}} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow A_t = \pi R \frac{h^2}{h - 2R}.$$

Derivando, vem:

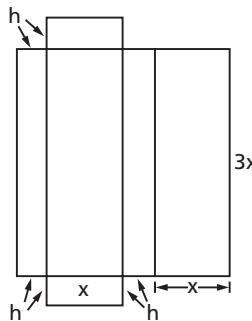
$$A'_t = \frac{h^2 - 4Rh}{(h - 2R)^2} \text{ e, com } A'_t = 0, \text{ temos } h = 0 \text{ ou } h = 4R.$$

Como $A_t = 0$ se $h = 0$, então $h = 4R$ e $A_t = 8\pi R^2$.

$$\text{Então: } r = R \cdot \sqrt{\frac{h}{h - 2R}} \Rightarrow r = \sqrt{2} R.$$

268.

Uma caixa de dimensões x , $3x$ e h , com tampa, planificada, é mostrada na figura abaixo:



A área de papelão utilizada para montar essa caixa é:

$$S = 2(xh) + 2(3x \cdot h) + 2(3x \cdot x) = 6x^2 + 8xh.$$

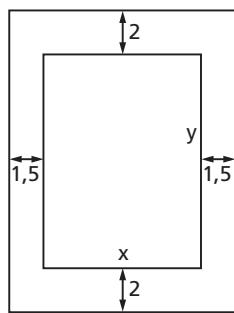
O volume da caixa é $V = (3x)(x)(h)$, então $h = \frac{V}{3x^2}$ e daí

$$S = 6x^2 + \frac{8V}{3x}.$$

$$S' = 12x - \frac{8V}{3x^2}$$

$$S' = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2V}{9}} = \frac{\sqrt[3]{6V}}{3} \Rightarrow h = \frac{\sqrt[3]{6V}}{2}$$

As dimensões procuradas são $\frac{\sqrt[3]{6V}}{3}$, $\sqrt[3]{6V}$ e $\frac{\sqrt[3]{6V}}{2}$.

270.

$$xy = 300 \Rightarrow y = \frac{300}{x}$$

$(x + 4)(y + 3) = A$ (área total da página)

Então: $A = 3x + 4y + 312$.

Como $y = \frac{300}{x}$, vem:

$$A = 3x + 4 \cdot \frac{300}{x} + 312 \Rightarrow \\ \Rightarrow A = \frac{3(x^2 + 104x + 400)}{x}.$$

Derivando A, temos:

$$A' = 3 \cdot \frac{(2x + 104)x - (x^2 + 104x + 400)}{x^2} \Rightarrow A' = 3 \cdot \frac{x^2 - 400}{x^2}.$$

Determinando as raízes de A' , vem $x = -20$ ou $x = 20$.

Só interessa o valor $x = 20 \Rightarrow y = 15$.

Então, as dimensões da página são: $\begin{cases} x + 4 = 24 \\ y + 3 = 18 \end{cases}$

271.

preço de venda, por quilo = $3000 - 30x$ (x é o nº de dias)

variação do peso, por dia = $150 + 2,5x$

preço de venda do porco: $v = (3000 - 30x)(150 + 2,5x)$ (1)

custo do porco por dia: 2000

custo do porco em x dias: $c = 2000x$ (2)

lucro = (1) - (2)

$$\ell = (3000 - 30x)(150 + 2,5x) - 2000x$$

$$\ell = -75x^2 + 1000x + 450000$$

Derivando:

$$\ell' = -150x + 1000.$$

Obtendo a raiz, vem: $x = 6,6$.

Se vender no 6º dia, o preço de um porco será Cr\$ 453 300,00.

Se vender no 7º dia, o preço de um porco será Cr\$ 453 325,00.

Então, o lucro será máximo se o fazendeiro aguardar 7 dias para vender os porcos.

- 272.** custo = $a + bx$ (x unidades)
 venda = $e - dx$ (cada unidade)
 lucro = $\ell = (e - dx)x - (a + bx)$
 $= cx - dx^2 - a - bx$
 $= -dx^2 + (c - b)x - a$

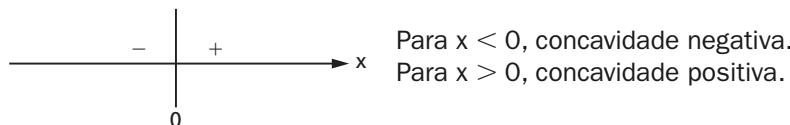
Derivando, vem:

$$\ell' = -2dx + (c - b)$$

Obtendo a raiz de ℓ' , vem:

$$\ell' = 0 \Leftrightarrow -2dx + (c - b) = 0 \Rightarrow x = \frac{c - b}{2d}.$$

- 273.** $f(x) = x^3 + 9x$
 $f'(x) = 3x^2 + 9x$
 $f''(x) = 6x$
 A raiz de $f''(x) = 0$ é $x = 0$.



Calculando $f'''(x)$, vem:

$$f'''(x) = 6 \neq 0.$$

Então, $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ é ponto de inflexão.

- 274.** $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$
 $f'(x) = \frac{(x^2 - 1) - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$
 $f''(x) = -\frac{2x(x^2 - 1)^2 - (x^2 + 1)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^3}$
 $f''(x) = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^4} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$

Fazendo $f''(x) = 0$, vem $x = 0$ como única raiz real.

Os pontos $x = -1$ e $x = 1$ são pontos de descontinuidade, pois anulam o denominador.

Verifiquemos o sinal de $f''(x)$ nos intervalos referentes aos extremos $-1, 0$ e 1 .

$f''(-2) = \frac{2(-2)(4+3)}{(4-1)^3} < 0$ $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+3\right)}{\left(\frac{1}{4}-1\right)^3} > 0$	$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+3\right)}{\left(\frac{1}{4}-1\right)^3} < 0$ $f''(2) = \frac{2(2)(4+3)}{(4-1)^3} > 0$

Assim, temos: concavidade positiva para $-1 < x < 0$ ou $x > 1$
concavidade negativa para $x < -1$ ou $0 < x < 1$

Como $x = 0$ é raiz de $f''(x)$, então vem $f(0) = \frac{0}{0-1} = 0$, que significa $P(0, 0)$ é ponto de inflexão.

275. $f(x) = \sqrt[5]{x-2}$

$$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{(x-2)^4}}$$

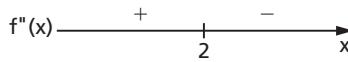
$$f''(x) = \frac{-4\sqrt[5]{x-2}}{25}$$

Resolvendo $f''(x) = 0$, vem $x = 2$.

Analizando o sinal de $f''(x)$ à esquerda e à direita de 2, vem:

$$f''(1) = \frac{-4}{25}\sqrt[5]{-1} > 0$$

$$f''(3) = \frac{-4}{25}\sqrt[5]{1} < 0$$



Então: para $x < 2$, concavidade positiva
para $x > 2$, concavidade negativa

Sendo 2 raiz de $f''(x)$ e $f(2) = 0$, então $P(2, 0)$ é o ponto de inflexão.

276. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt[2]{(x^2-4)^3}}$

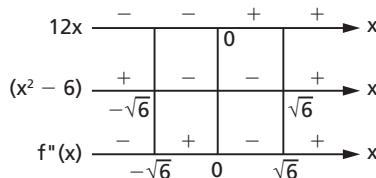
$$f'(x) = \frac{2(x^2+4)^{\frac{3}{2}} - 2x \cdot 3x(x^2+4)^{\frac{1}{2}}}{[(x^2+4)^{\frac{3}{2}}]^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4(x^2-2)}{(x^2+4)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''(x) = \frac{-8x(x^2 + 4)^{\frac{5}{2}} + 4(x^2 - 2) \cdot 5x(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}{[(x^2 + 4)^{\frac{5}{2}}]^2}$$

$$f''(x) = \frac{12x(x^2 - 6)}{(x^2 + 4)^{\frac{7}{2}}}$$

Determinando as raízes de $f''(x)$, temos:

$$12x(x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{6} \text{ ou } x = \sqrt{6} \text{ ou } x = 0$$



Estudando os sinais de $f''(x)$, verificamos que:

para $x < -\sqrt{6}$ ou $0 < x < \sqrt{6}$, concavidade negativa,

para $-\sqrt{6} < x < 0$ ou $x > \sqrt{6}$, concavidade positiva.

Para obter os pontos de inflexão, determinemos $f'''(x)$.

$$f'''(x) = \frac{36(x^2 - 2)(x^2 + 4)^{\frac{7}{2}} - 12x(x^2 - 6) \cdot 7x \cdot (x^2 + 4)^{\frac{5}{2}}}{[(x^2 + 4)^{\frac{7}{2}}]^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-48(x^4 - 12x^2 + 6)}{(x^2 + 4)^{\frac{9}{2}}}$$

Então, temos:

$$f'''(-\sqrt{6}) = \frac{-48(36 - 72 + 6)}{(6 + 4)^{\frac{9}{2}}} \neq 0$$

$$f'''(\sqrt{6}) = \frac{-48(36 - 72 + 6)}{(6 + 4)^{\frac{9}{2}}} \neq 0 \quad f'''(0) = \frac{-48(0 - 0 + 6)}{(0 + 4)^{\frac{9}{2}}} \neq 0$$

Assim, $-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$ e 0 são abscissas de pontos de inflexão.

Determinemos as ordenadas desses pontos:

$$f(-\sqrt{6}) = \frac{2(-\sqrt{6})}{\sqrt{10^3}} = \frac{-\sqrt{60}}{50} \Rightarrow P_1\left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{60}}{50}\right)$$

$$f(\sqrt{6}) = \frac{2(\sqrt{6})}{\sqrt{10^3}} = \frac{\sqrt{60}}{50} \Rightarrow P_2\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{60}}{50}\right)$$

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0}{\sqrt{4^3}} = 0 \Rightarrow P_3(0, 0)$$

277. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ x^3 - 4x^2 + 7x - 3, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x < 1 \\ 3x^2 - 8x + 7, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 1 \\ 6x - 8, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'''(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Determinando a raiz de $f'''(x)$, temos:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}.$$

Para $x \geq 1$, $f'''(\frac{4}{3}) \neq 0$, para $1 < x < \frac{4}{3}$, $f''(x) < 0$ e para $x > \frac{4}{3}$,

$f''(x) > 0$, o que significa que nesses intervalos temos:

para $x < 1$ ou $x > \frac{4}{3}$, concavidade positiva

para $1 < x < \frac{4}{3}$, concavidade negativa

para $x = \frac{4}{3}$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{43}{27} \Rightarrow P\left(\frac{4}{3}, \frac{43}{27}\right)$ é ponto de inflexão.

para $x = 1$, $f(1) = 1 \Rightarrow \theta(1, 1)$ é ponto de inflexão.

278. $f(x) = \sin x - \cos x$

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$

$$f''(x) = -\sin x + \cos x$$

A concavidade é positiva se $f''(x) > 0$.

$$\text{Então: } -\sin x + \cos x > 0 \Rightarrow \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{9\pi}{4} + 2k\pi$$

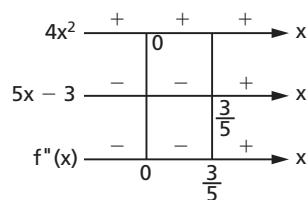
279. $f(x) = x^5 - x^4$

$$f'(x) = 5x^4 - 4x^3$$

$$f''(x) = 20x^3 - 12x^2$$

A concavidade é negativa se $f''(x) < 0$.

$$\text{Então: } 20x^3 - 12x^2 < 0 \Rightarrow 4x^2(5x - 3) < 0.$$



$f''(x) < 0$ para $x < \frac{3}{5}$ e $x \neq 0$.

280. $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$

$$f'(x) = 2x(2x^2 - 5)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 10$$

$$f'''(x) = 24x$$

Obtendo as raízes de $f''(x)$, temos $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$.

$$f''\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = 24\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \neq 0$$

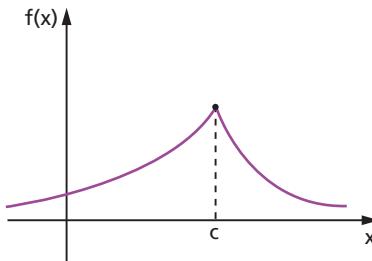
Então, $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$ são as abscissas de pontos de inflexão.

$$\text{Calculando as ordenadas: } f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = \left(\frac{5}{6} - 1\right)\left(\frac{5}{6} - 4\right) = \frac{19}{36}.$$

Então, os pontos de inflexão são: $\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{19}{36}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{19}{36}\right)$.

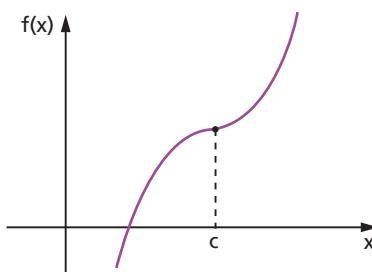
281. $x > c$ e $\begin{cases} f'(x) < 0 \Rightarrow \text{função decrescente} \\ f''(x) > 0 \Rightarrow \text{concavidade positiva} \end{cases}$

$$x < c \text{ e } \begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow \text{função crescente} \\ f''(x) > 0 \Rightarrow \text{concavidade positiva} \end{cases}$$



282. $x > c$ e $\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow \text{função crescente} \\ f''(x) > 0 \Rightarrow \text{concavidade positiva} \end{cases}$

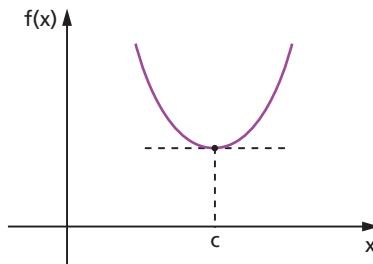
$$x < c \text{ e } \begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow \text{função crescente} \\ f''(x) < 0 \Rightarrow \text{concavidade negativa} \end{cases}$$



283. $f'(c) = f''(c) = 0$ (a reta tangente ao gráfico é paralela ao eixo x)

$x < c$ e $f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

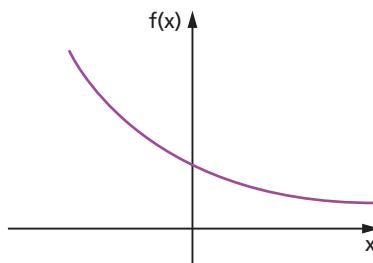
$x > c$ e $f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva



284. $f(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico está todo acima do eixo dos x .

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ função decrescente

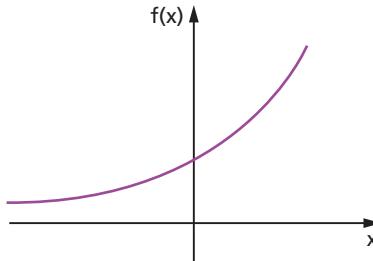
$f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva



285. $f(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico está todo acima do eixo Ox .

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ função crescente

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva



286. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x$$

$$f'''(x) = 6a_3$$

Sendo $(0, 3)$ extremo relativo, vem:

1) $f(0) = a_0$ e $f(0) = 3 \Rightarrow a_0 = 3$

2) $x = 0$ é raiz de $f'(x) \Rightarrow f'(0) = 0$ e $f'(0) = a_1 \Rightarrow a_1 = 0$

Sendo $(1, -1)$ ponto de inflexão, temos:

1) $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow 6a_3 \neq 0 \Rightarrow a_3 \neq 0$

2) $f''(1) = 0 \Rightarrow 2a_2 + 6a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = -3a_3$

3) $f(1) = 3 + a_2 + a_3 = -1 \Rightarrow a_2 = -4 - a_3$

Então, $-4 - a_3 = -3a_3 \Rightarrow a_3 = 2$ e, portanto, $a_2 = -6$.

287. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4x$$

Se o gráfico passa pela origem, então:

$f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$.

Se o gráfico é simétrico em relação ao eixo y , então

$f(x) = f(-x), \forall x$, e daí

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = -a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + a_4x^4, \forall x$$

então $a_1 = -a_1$ e $a_3 = -a_3$, ou seja, $a_1 = 0$ e $a_3 = 0$.

Sendo $(1, -1)$ ponto de inflexão, vem:

1) $f'''(x) = 24a_4 \neq 0 \Rightarrow a_4 \neq 0$

2) $f''(1) = 0 \Rightarrow 2a_2 + 12a_4 = 0 \Rightarrow a_2 = -6a_4$

3) $f(1) = a_2 + a_4 = -1 \Rightarrow a_2 = -1 - a_4$

Então: $-1 - a_4 = -6a_4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{5} \Rightarrow a_2 = -\frac{6}{5}$.

288. $f(x) = 2x^3 - 6x$

a) Seu domínio é \mathbb{R} .

b) A função é ímpar, porque:

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 6(-x) = -2x^3 + 6x = -(2x^3 - 6x) = -f(x).$$

c) Não há pontos de descontinuidade em \mathbb{R} .

d) Fazendo $x = 0$, temos $f(0) = 0$.

Fazendo $f(x) = 0$, temos $2x^3 - 6x = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$.

As interseções com os eixos são os pontos $(0, 0); (-\sqrt{3}, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0)$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

f) $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x + 1)(x - 1)$

então: $x \leq -1$ ou $x \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescente

$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ decrescente

g) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

$$f''(x) = 12x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = -12 < 0 \\ f''(1) = 12 > 0 \end{cases}$$

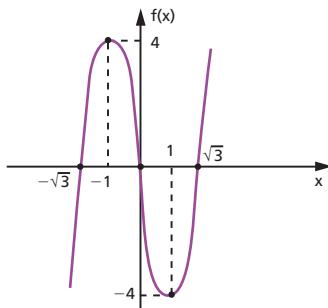
então f tem um máximo em $x = -1$ e um mínimo em $x = 1$.

h) $f''(x) = 12x$ e, então:

$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa

$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

Como o sinal da concavidade muda em $x = 0$, o gráfico tem um ponto de inflexão em $x = 0$.



289.

a) O domínio é \mathbb{R} .

b) A função não é par nem ímpar porque:

$$f(-x) = -4x^3 - x^2 + 24x - 1 \neq f(x) \text{ e } -f(x).$$

c) A função é contínua em \mathbb{R} .

d) $f(0) = -1 \Rightarrow (0, -1) \in$ gráfico

$f(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - x^2 - 24x - 1 = 0 \Rightarrow$ três raízes reais iracionais, sendo uma positiva

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 = -\infty$$

f) $f'(x) = 12x^2 - 2x - 24 = 12\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$$x \leq -\frac{4}{3} \text{ ou } x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ é crescente}$$

$$-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ é decrescente}$$

g) $f''(x) = 24x - 2$

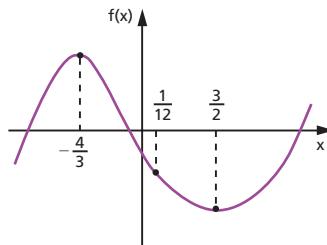
$$x = -\frac{4}{3} \Rightarrow f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \text{ e } f''\left(-\frac{4}{3}\right) < 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} \text{ é ponto de máximo}$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ e } f''\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \text{ é ponto de mínimo}$$

h) $x < \frac{1}{12} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa

$x > \frac{1}{12} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

Como o sinal da concavidade muda em $x = \frac{1}{12}$, este é um ponto de inflexão.

**290.**a) O domínio é \mathbb{R} .

b) A função não é par nem ímpar porque

$$f(-x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4 \neq f(x) \text{ e } -f(x).$$

c) A função é contínua em \mathbb{R} .d) $f(0) = -4 \Rightarrow (0, -4) \in$ gráfico

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \text{duas raízes reais e duas raízes imaginárias.}$$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 = +\infty$$

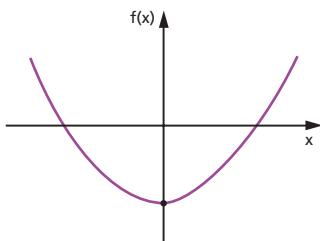
f) $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 + 12x = 12(x - 0)(x^2 + x + 1)$

$$x \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ é decrescente}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ é crescente}$$

g) $f''(x) = 36x^2 + 24x + 12$

$$x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \text{ e } f''(0) > 0 \Rightarrow 0 \text{ é ponto de mínimo}$$

h) $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva.

291. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$

- a) Seu domínio é \mathbb{R} .
- b) A função não é par nem ímpar, pois:

$$f(-x) = (-x - 1)^2(-x + 2)^3 = [-(x + 1)]^2[-(x - 2)]^3 = -(x + 1)^2(x - 2)^3$$
- c) A função polinomial é contínua em \mathbb{R} .
- d) Fazendo $x = 0$, temos:

$$f(0) = (-1)^2(2)^3 = 8.$$
- Fazendo $f(x) = 0$, temos $(x - 1)^2(x + 2)^3 = 0$, isto é, $x = 1$ ou $x = -2$. As interseções com os eixos são os pontos $(0, 8)$; $(1, 0)$ e $(-2, 0)$.
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$$
- f) $f'(x) = (x - 1)(x + 2)^2(5x + 1)$, então

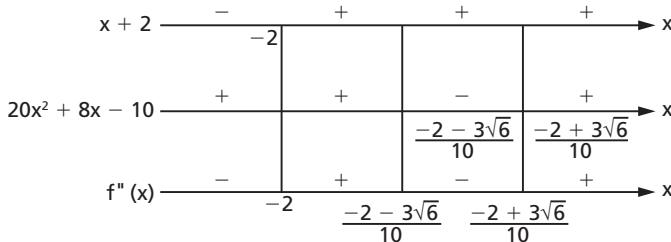
$$x \leq -\frac{1}{5} \text{ ou } x \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ é crescente}$$

$$-\frac{1}{5} \leq x \leq 1 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ é decrescente}$$

g) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = -\frac{1}{5}$
 $f''(x) = (x + 2)(20x^2 + 8x - 10) \Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 54 > 0 \\ f''(-2) = 0 \\ f''\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{485}{25} < 0 \end{cases}$

então f tem um mínimo em $x = 1$ e um máximo em $x = -\frac{1}{5}$.

h) $f''(x) = (x + 2)(20x^2 + 8x - 10)$, então:



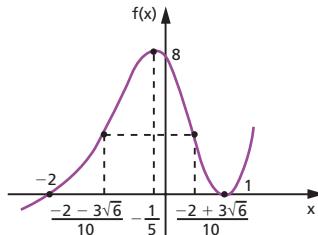
para $x < -2$ ou $\frac{-2 - 3\sqrt{6}}{10} < x < \frac{-2 + 3\sqrt{6}}{10} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$

\Rightarrow concavidade negativa

para $-2 < x < \frac{-2 - 3\sqrt{6}}{10}$ ou $x > \frac{-2 + 3\sqrt{6}}{10} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$

\Rightarrow concavidade positiva

Como o sinal da concavidade muda em $x = -2$, $x = \frac{-2 - 3\sqrt{6}}{10}$
e $x = \frac{-2 + 3\sqrt{6}}{10}$, o gráfico tem 3 pontos de inflexão.



292. $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x$

a) O domínio é \mathbb{R} .

b) $f(-x) = 3(-x)^{\frac{2}{3}} - 2(-x) = 3x^{\frac{2}{3}} + 2x$

A função não é par nem ímpar.

c) Não há pontos de descontinuidade.

d) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{27}{8}$$

Então, os pontos de interseção com os eixos são: $(0, 0)$ e $\left(\frac{27}{8}, 0\right)$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$$

f) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

Variação de sinal de

$$f'(x) = \frac{2 - 2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}$$

$2 - 2\sqrt[3]{x}$	+	+	-
$\sqrt[3]{x}$	-	+	+
$f'(x)$	-	+	-

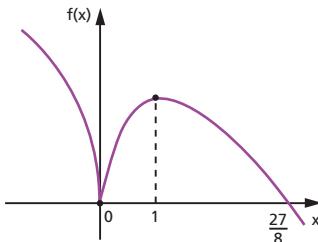
Então: para $0 \leq x \leq 1$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescente e

para $x \leq 0$ ou $x \geq 1$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ decrescente

g) $f''(x) = -\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f''(1) = -\frac{2}{3} < 0$, tem máximo em $x = 1$

h) $f''(x) = -\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, f''(x) < 0 \Rightarrow \text{concavidade negativa} \\ x > 0, f''(x) < 0 \Rightarrow \text{concavidade negativa} \end{cases}$

Como o sinal da concavidade não muda em $x = 0$, então $x = 0$ não é ponto de inflexão.



- 293.** a) O domínio é \mathbb{R} .

- b) A função não é par nem ímpar porque:

$$f(-x) = -x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} \neq f(x) \text{ e } -f(x).$$

- c) A função é contínua em \mathbb{R} .

- d) $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0) \in \text{gráfico}$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} = 0 \Rightarrow 2\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow 8x^4 = -x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow (0, 0) \text{ e } \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ estão no gráfico} \end{aligned}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^{\frac{4}{3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^{\frac{4}{3}} = +\infty$$

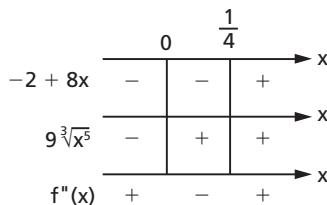
$$f) f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8\sqrt[3]{x}}{3} = \frac{1 + 8x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$x \leq -\frac{1}{8} \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ decrescente}$$

$$x \geq -\frac{1}{8} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ crescente}$$

$$g) f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} + \frac{8}{9\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2 + 8x}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

Variação de sinal de $f''(x)$:

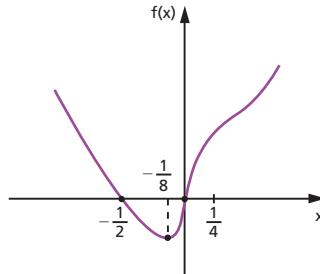


$x < 0$ ou $x > \frac{1}{4} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

$0 < x < \frac{1}{4} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa

pontos de inflexão: $x = 0$ e $x = \frac{1}{4}$.

h) $x = -\frac{1}{8} \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{8}\right) = 0$ e $f''\left(-\frac{1}{8}\right) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{8}$ é ponto de mínimo



294. a) O domínio é \mathbb{R} .

b) A função não é par nem ímpar porque:

$$f(-x) = 1 - (x + 2)^{\frac{1}{3}} \neq f(x) \text{ e } -f(x).$$

c) A função é contínua em \mathbb{R} .

$$d) f(0) = 1 - \sqrt[3]{2} \Rightarrow (0, 1 - \sqrt[3]{2}) \in \text{gráfico}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x - 2} = -1 \Rightarrow x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1, 0) \in \text{gráfico}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)^{\frac{1}{3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2)^{\frac{1}{3}} = -\infty$$

$$f) f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x - 2)^2}}$$

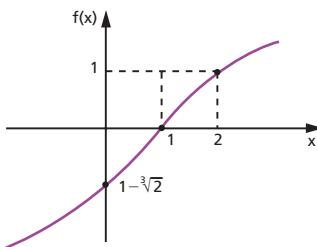
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é crescente em \mathbb{R}

$$g) f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x - 2)^5}}$$

$x < 2 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

$x > 2 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa

$x = 2$ é ponto de inflexão.



295. $f(x) = x\sqrt{1-x}$

- a) Domínio: $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$.
- b) $f(-x) = -x\sqrt{1+x}$; a função não é par nem ímpar
- c) Não há pontos de descontinuidade em $x \leq 1$.
- d) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{1-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

As interseções com os eixos são os pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
Como $x \leq 1$, não há $\lim_{x \rightarrow +\infty}$.

f) $f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

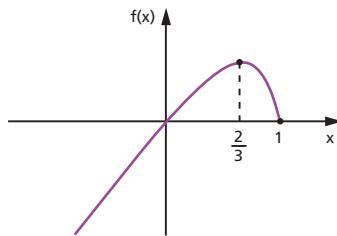
Então, $x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescente

$$x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$$
 decrescente

g) $f''(x) = \frac{3x-4}{4\sqrt{(1-x)^3}}$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 4}{4 \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^3}} < 0 \Rightarrow f \text{ tem máx} \text{ em } x = \frac{2}{3}$$

h) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} > 1$, o que significa que não há ponto de inflexão no domínio de f .

**296.**

- a) O domínio é $\mathbb{R} - \{3\}$.
 b) A função não é par nem é ímpar porque:

$$f(-x) = \frac{-x + 1}{-x - 3} \neq f(x) \text{ e } -f(x).$$

- c) A função não é contínua em $x = 3$.

d) $x = 0 \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{3}\right) \in \text{gráfico}$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x + 1}{x - 3} = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0) \in \text{gráfico}$$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 1$$

f) $f'(x) = \frac{-4}{(x - 3)^2}$

$\forall x \neq 3, f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é decrescente no domínio

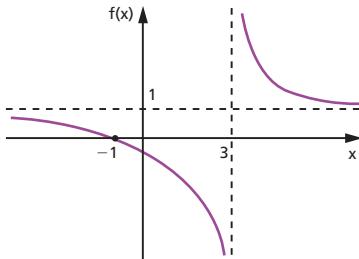
g) $f''(x) = \frac{8}{(x - 3)^3}$

$x < 3 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa

$x > 3 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

$x = 3$ não é ponto de inflexão, pois não está no domínio de f .

h) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$



297. $f(x) = \frac{9x}{x^2 + 9}$

a) Domínio é \mathbb{R} .

b) $f(-x) = \frac{9(-x)}{(-x)^2 + 9} = \frac{-9x}{x^2 + 9} = -f(x) \Rightarrow f$ é ímpar

c) Não há pontos de descontinuidade.

d) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Então $(0, 0)$ é o único ponto de interseção com os eixos.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{x^2 \left(1 + \frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x^2} = 0$$

f) $f'(x) = \frac{9(-x^2 + 9)}{(x^2 + 9)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = +3$

$x \leq -3$ ou $x \geq 3 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ decrescente

$-3 \leq x \leq 3 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescente

g) $f''(x) = \frac{9(2x^3 - 54x)}{(x^2 + 9)^3}$

$f''(-3) = \frac{9[2(-3)^3 - 54(-3)]}{(9+9)^3} > 0 \Rightarrow -3$ é ponto de mínimo

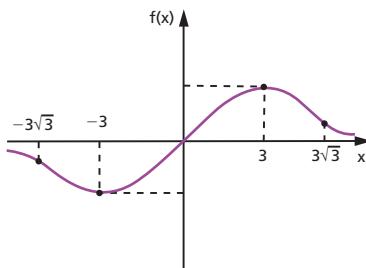
$f''(3) = \frac{9[2(3)^3 - 54(3)]}{(9+9)^3} < 0 \Rightarrow 3$ é ponto de máximo

h) $f''(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 54x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pm 3\sqrt{3}$

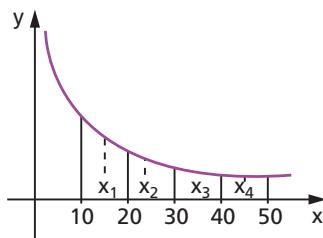
$x < -3\sqrt{3}$ ou $0 < x < 3\sqrt{3} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa

$-3\sqrt{3} < x < 0$ ou $x > 3\sqrt{3} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

Como o sinal da concavidade muda em $x = -3\sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = 3\sqrt{3}$, estes são três pontos de inflexão.



CAPÍTULO IX — Noções de Cálculo Integral

299.

$$x_1 = 15$$

$$x_2 = 25$$

$$x_3 = 35$$

$$x_4 = 45$$

$$A = \sum_{i=1}^4 f(\bar{x}_i) \Delta_i x$$

$$A = \frac{200}{15} \cdot 10 + \frac{200}{25} \cdot 10 + \frac{200}{35} \cdot 10 + \frac{200}{45} \cdot 10$$

$$A = 2000 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} \right)$$

$$A = 2000 \cdot \frac{248}{1575} \Rightarrow A = 314,9$$

301.

a) $\int_1^5 (5x + 7)dx$, para $\bar{x}_i = x_{i-1}$

Como a função $5x + 7$ é contínua em $[1, 5]$, sabemos pelo teorema 1 que a integral existe. Dividindo $[1, 5]$ em n subintervalos iguais de comprimento $\frac{4}{n}$, temos:

$$x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{4}{n}, x_2 = 1 + 2 \cdot \frac{4}{n}, \dots x_{i-1} = 1 + (i-1) \frac{4}{n},$$

$$x_i = 1 + i \frac{4}{n}, x_n = 5.$$

Sendo $\bar{x}_i = x_{i-1}$, vem:

$$f(\bar{x}_i) = 5\bar{x}_i + 7 = 5\left(1 + (i-1)\frac{4}{n}\right) + 7 = 5 + \frac{20}{n}(i-1) + 7 =$$

$$= 12 + \frac{20}{n}i - \frac{20}{n}$$

$$f(\bar{x}_i)\Delta_i x = \left(12 + \frac{20}{n}i - \frac{20}{n}\right) \cdot \frac{4}{n}$$

$$f(\bar{x}_i)\Delta_i x = \frac{48}{n} + \frac{80}{n^2}i - \frac{80}{n^2}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta_i x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{48}{n} - \frac{80}{n^2} + \frac{80}{n^2}i \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= n \cdot \frac{48}{n} - n \cdot \frac{80}{n^2} + \frac{80}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \\
 &= 48 - \frac{80}{n} + \frac{80}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\
 \text{Como } \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2}, \text{ vem:} \\
 \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x &= 48 - \frac{80}{n} + \frac{80}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = 48 - \frac{80}{n} + 40 \left(\frac{n+1}{n} \right). \\
 \text{Como } \Delta_1 x = \Delta_2 x = \Delta_3 x = \dots = \Delta_n x = \frac{4}{n}, \text{ a norma } \mu \text{ será igual a } \frac{4}{n}; \\
 \text{logo, quando } \mu \text{ se aproximar de zero, temos:}
 \end{aligned}$$

1) n cresce arbitrariamente

2) $\frac{80}{n}$ se aproxima de zero

3) $\frac{n+1}{n}$ se aproxima de um

4) $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x$ se aproxima arbitrariamente do número $48 + 40$,

ou seja, $\mu \approx 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x \approx 88$.

b) As considerações iniciais são as mesmas do item a.

Fazendo $\bar{x}_i = 1 + i \cdot \frac{4}{n}$, vem:

$$f(\bar{x}_i) = 5\bar{x}_i + 7 = 5\left(1 + i \cdot \frac{4}{n}\right) + 7 = 12 + \frac{20}{n}i$$

$$f(\bar{x}_i) \cdot \Delta_i x = \left(12 + \frac{20}{n}i\right) \cdot \frac{4}{n} = \frac{48}{n} + \frac{80}{n^2}i$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{48}{n} + \frac{80}{n^2}i \right) = n \cdot \frac{48}{n} + \frac{80}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \\
 &= 48 + \frac{80}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = 48 + 40 \left(\frac{n+1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

Com as mesmas considerações finais, temos:

$$\mu \approx 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x \approx 88.$$

302. $\int_3^6 x^2 dx$

x^2 é contínua em $[3, 6]$, logo a integral existe.

Dividindo $[3, 6]$ em n subintervalos iguais de comprimento $\frac{3}{n}$, temos:

$$x_0 = 3; x_1 = 3 + \frac{3}{n}; x_2 = 3 + 2 \cdot \frac{3}{n}; x_3 = 3 + 3 \cdot \frac{3}{n}; \dots;$$

$$x_{i-1} = 3 + (i-1) \frac{3}{n}; x_i = 3 + i \cdot \frac{3}{n}; x_n = 6.$$

Tomando $\bar{x}_i = x_i = 3 + i \cdot \frac{3}{n}$, vem:

$$f(\bar{x}_i) = \left(3 + i \frac{3}{n}\right)^2 = 9 + \frac{18}{n}i + \frac{9}{n^2}i^2$$

$$f(\bar{x}_i)\Delta_i x = \left(9 + \frac{18}{n}i + \frac{9}{n^2}i^2\right) \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{n} + \frac{54}{n^2}i + \frac{27}{n^3}i^2.$$

Então:

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^6 f(\bar{x}_i)\Delta_i x &= \sum_{i=3}^6 \left(\frac{27}{n} + \frac{54}{n^2}i + \frac{27}{n^3}i^2 \right) = \\ &= n \cdot \frac{27}{n} + \frac{54}{n^2} \sum_{i=3}^6 i + \frac{27}{n^3} \sum_{i=3}^6 i^2 = \\ &= 27 + \frac{54}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{27}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \\ &= 27 + 27 \left(\frac{n+1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Como $\Delta_1 x = \Delta_2 x = \dots = \Delta_n x = \frac{3}{n}$, então $\mu = \frac{3}{n}$; logo, quando μ se aproxima arbitrariamente de zero, temos:

1) n cresce arbitrariamente

2) $\frac{n+1}{n}$ se aproxima de 1

3) $\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$ se aproxima de 2

4) $\sum_{i=3}^6 f(\bar{x}_i)\Delta_i x$ se aproxima arbitrariamente do número $27 + 27 + 9 = 63$, ou seja, $\mu \approx 0 \Rightarrow \sum_{i=3}^6 f(\bar{x}_i)\Delta_i x_i \approx 63$.

308.

a) $\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

b) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(8 - 1) = \frac{7}{3}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx = \left. \sin x \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e) \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx = -\left. \frac{1}{x} \right|_1^2 = -\left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

309. a) $\int_{-1}^1 7 \, dx = 7x \Big|_{-1}^1 = 7 - (-7) = 7 + 7 = 14$

b) $\int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} (1^3 - (-1)^3) = \frac{1}{3} (1 + 1) = \frac{2}{3}$

c) $\int_{-1}^1 x^7 \, dx = \frac{x^8}{8} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{8} (1^8 - (-1)^8) = \frac{1}{8} (1 - 1) = 0$

d) $\int_0^1 (-x^2) \, dx = - \int_0^1 x^2 \, dx = -\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} (1 - 0) = -\frac{1}{3}$

e) $\int_{-1}^1 2x^4 \, dx = 2 \int_{-1}^1 x^4 \, dx = 2 \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5} (1^5 - (-1)^5) = \frac{4}{5}$

310. a) $\int_0^2 (x^2 - 3x + 5) \, dx = \int_0^2 x^2 \, dx - 3 \int_0^2 x \, dx + \int_0^2 5 \, dx =$
 $= \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 - 3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + 5x \Big|_0^2 =$
 $= \frac{1}{3}(8 - 0) - \frac{3}{2}(4 - 0) + 5(2 - 0) = \frac{8}{3} - 6 + 10 = \frac{20}{3}$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx =$
 $= -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) =$
 $= -(0 - 0) + (1 - (-1)) = 2$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 \right) = \frac{\pi}{2} + 1$$

d) $\int_0^1 (x^5 - 1)x \, dx = \int_0^1 (x^6 - x) \, dx = \int_0^1 x^6 \, dx - \int_0^1 x \, dx =$

$$= \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{7} (1 - 0) - \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{7} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{14}$$

e) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \, dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} \, dx + \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} \, dx =$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 + 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) + 2 \left(4^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{2}{3}(8 - 1) + 2(2 - 1) = \frac{14}{3} + 2 = \frac{20}{3}$$

312. a) $f(x) = 4 - x^2, [a, b] = [-2, 2]$

$$F(x) = \int (4 - x^2) \, dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) \, dx = F(2) - F(-2) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

b) $f(x) = x^2 + 7; [a, b] = [0, 3]$

$$F(x) = \int (x^2 + 7) \, dx = \frac{x^3}{3} + 7x$$

$$\int_0^3 (x^2 + 7) \, dx = F(3) - F(0) = 30 - 0 = 30$$

c) $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x; [a, b] = \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

$$F(x) = \int (3 + \operatorname{sen} x) \, dx = 3x - \cos x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + \operatorname{sen} x) \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{3\pi}{2} - (-1) = \frac{3\pi}{2} + 1$$

d) $f(x) = \sqrt{x} + 1; [a, b] = [0, 4]$

$$F(x) = \int (\sqrt{x} + 1) \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x$$

$$\int_0^4 f(x) \, dx = F(4) - F(0) = \frac{28}{3} - 0 = \frac{28}{3}$$

e) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $[a, b] = [0, 1]$

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx = \arctan x$$

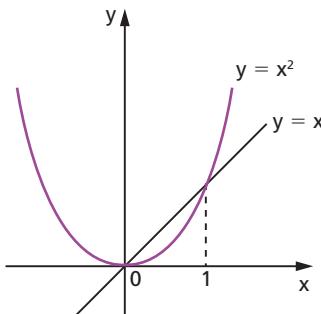
$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

317. a) $y = x$ e $y = x^2$

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$F(x) = \int (x - x^2) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

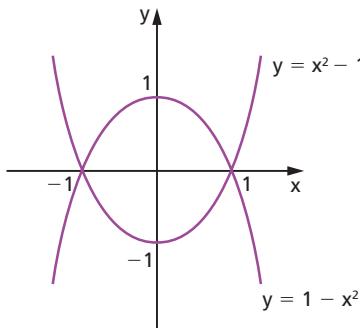
$$\int_0^1 (x - x^2) dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{1}{6}$$



b) $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$

$$x^2 - 1 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$F(x) = \int [1 - x^2 - (x^2 - 1)] dx = \int (-2x^2 + 2) dx = -\frac{2x^3}{3} + 2x$$



$$\int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx = F(1) - F(-1) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

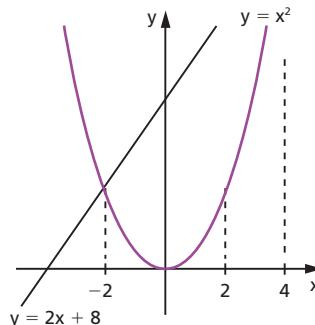
c) $y = x^2$ e $y = 2x + 8$

$$x^2 = 2x + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 4$$

$$F(x) = \int (2x + 8 - x^2) dx = x^2 + 8x - \frac{x^3}{3}$$

$$\int_{-2}^4 (2x + 8 - x^2) dx = F(4) - F(-2) =$$

$$= \frac{80}{3} - \left(-\frac{28}{3} \right) = \frac{108}{3} = 36$$

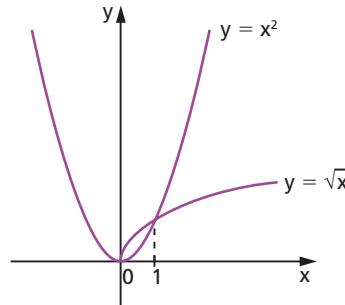


d) $y = x^2$ e $y = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x^3(x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$F(x) = \int (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$



e) $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x^2 - \pi x$

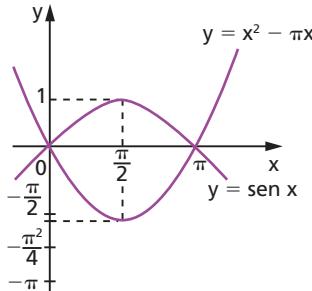
Analisando a função $y = x^2 - \pi x$, temos:

$$x^2 - \pi x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } x = \pi \text{ (raízes)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{+\pi}{2} \\ y_V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{\pi^2}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow V = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4} \right)$$

$$F(x) = \int (\operatorname{sen} x - x^2 + \pi x) dx = -\cos x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{2}$$

$$\int_0^\pi (\operatorname{sen} x - x^2 + \pi x) dx = F(\pi) - F(0) = \left(1 + \frac{\pi^3}{6}\right) - (-1) = 2 + \frac{\pi^3}{6}$$



318. a) $F(x) = \int_1^x (5t + 2) dt = \left(\frac{5t^2}{2} + 2t\right) \Big|_1^x = \frac{5x^2}{2} + 2x - \frac{9}{2}$
 $\frac{dF}{dx} = \frac{2 \cdot 5x}{2} + 2 \Rightarrow \frac{dF}{dx} = 5x + 2$

b) $\int_5^x \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_5^x = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dF}{dx} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

c) $\int_1^x \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^x = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dF}{dx} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

320. a) $3x + 7 = u \quad 3 = u'$ $\Rightarrow \int (3x + 7)^{15} \cdot 3 dx = \int u^{15} \cdot u' dx = \frac{u^{16}}{16} + c = \frac{(3x + 7)^{16}}{16} + c$

b) $3x = u \quad 3 = u'$ $\Rightarrow \int e^{3x} \cdot 3 dx = \int e^u \cdot u' dx = e^u + c = e^{3x} + c$

c) $5x = u \quad 5 = u'$ $\Rightarrow \int 5 \cdot \cos 5x dx = \int \cos u \cdot u' dx = \operatorname{sen} u + c = \operatorname{sen} 5x + c$

d) $3x + 7 = u \quad 3 = u'$ $\Rightarrow \int \sqrt{u} \cdot u' dx = \frac{\frac{3}{2} u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (3x + 7)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(3x + 7)^3} + c$

e) $x + 1 = u \quad 1 = u'$ $\Rightarrow \int u^{-2} \cdot u' dx = -u^{-1} + c = -\frac{1}{x+1} + c$

321. a) $x^3 = u \quad 3x^2 = u'$ $\Rightarrow \int e^{x^3} \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int e^u \cdot u' dx = \frac{1}{3} e^u + c = \frac{1}{3} e^{x^3} + c$

b) $\begin{cases} 3x^2 = u \\ 6x = u' \end{cases} \Rightarrow \int x \cdot \cos 3x^2 dx = \frac{1}{6} \int \cos 3x^2 \cdot 6x dx = \frac{1}{6} \int \cos u \cdot u' dx =$
 $= \frac{1}{6} \operatorname{sen} u + c = \frac{1}{6} \operatorname{sen} 3x^2 + c$

c) $\begin{cases} 5x - 1 = u \\ 5 = u' \end{cases} \Rightarrow \int (5x - 1)^{13} dx = \frac{1}{5} \int (5x - 1)^{13} \cdot 5 dx = \frac{1}{5} \int u^{13} \cdot u' dx =$
 $= \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{14}}{14} + c = \frac{(5x - 1)^{14}}{70} + c$

d) $\begin{cases} 5x - 1 = u \\ 5 = u' \end{cases} \Rightarrow \int \sqrt{5x - 1} dx = \frac{1}{5} \int (5x - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 5 dx = \frac{1}{5} \int u^{\frac{1}{2}} \cdot u' dx =$
 $= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{15} (5x - 1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{15} \sqrt{(5x - 1)^3} + c$

e) $\begin{cases} 3x + 7 = u \\ 3 = u' \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1}{(3x + 7)^2} dx = \frac{1}{3} \int (3x + 7)^{-2} \cdot 3 dx =$
 $= \frac{1}{3} \int u^{-2} \cdot u' dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{3} \cdot (3x + 7)^{-1} + c =$
 $= -\frac{1}{3(3x + 7)} + c$

322. a) $\begin{cases} 3x = u \\ 3 = u' \end{cases} \Rightarrow \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} \cdot 3 dx = \frac{1}{3} \int e^u \cdot u' dx =$
 $= \frac{1}{3} e^u + c = \frac{1}{3} e^{3x} + c$

b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x = u \\ \cos x = u' \end{cases} \Rightarrow \int (\operatorname{sen} x)^5 \cos x dx = \int u^5 \cdot u' dx = \frac{u^6}{6} + c =$
 $= \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} + c$

c) $\begin{cases} 5x = u \\ 5 = u' \end{cases} \Rightarrow \int \operatorname{sen} 5x dx = \frac{1}{5} \int \operatorname{sen} 5x \cdot 5 dx = \frac{1}{5} \int \operatorname{sen} u \cdot u' dx =$
 $= \frac{1}{5} (-\cos u) + c = -\frac{\cos 5x}{5} + c$

d) $\begin{cases} 3x + 1 = u \\ 3 = u' \end{cases} \Rightarrow \int \cos (3x + 1) dx = \frac{1}{3} \int \cos (3x + 1) \cdot 3 dx =$
 $= \frac{1}{3} \int \cos u \cdot u' dx = \frac{1}{3} (\operatorname{sen} u) + c = \frac{\operatorname{sen} (3x + 1)}{3} + c$

e) $\begin{cases} 3 - 2x = u \\ -2 = u' \end{cases} \Rightarrow \int (3 - 2x)^4 dx = \frac{-1}{2} \int (3 - 2x)^4 (-2) dx =$
 $= -\frac{1}{2} \int u^4 \cdot u' dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^5}{5} + c = -\frac{(3 - 2x)^5}{10} + c$

323. a) $\int x \cdot \operatorname{sen} x \, dx$

Fazendo $v(x) = x$ e $u'(x) = \operatorname{sen} x$, então $v'(x) = 1$ e $u(x) = -\cos x$.

Portanto:

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + c$$

b) $\int (3x + 7) \cos x \, dx$

Fazendo $v(x) = 3x + 7$ e $u'(x) = \cos x$, então $v'(x) = 3$ e $u(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\int v \cdot u' \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx \Rightarrow \int (3x + 7) \cos x \, dx =$$

$$= (3x + 7) \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot 3 \, dx = (3x + 7) \operatorname{sen} x - 3 \int \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= (3x + 7) \operatorname{sen} x + 3 \cos x + c$$

c) $\int (2x - 1) \cdot e^x \, dx$

Fazendo $v(x) = 2x - 1$ e $u'(x) = e^x$, então $v'(x) = 2$ e $u(x) = e^x$.

$$\int (2x - 1)e^x \, dx = (2x - 1) \cdot e^x - \int e^x \cdot 2 \, dx = (2x - 1)e^x - 2e^x + c =$$

$$= (2x - 3)e^x + c$$

d) $\int (-3x + 1) \cdot \cos 5x \, dx$

Fazendo $\begin{cases} v(x) = -3x + 1 \Rightarrow v'(x) = -3 \\ u'(x) = \cos 5x \Rightarrow u(x) = \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \end{cases}$

$$\int (-3x + 1) \cos 5x \, dx = (-3x + 1) \cdot \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \int \frac{-3}{5} \operatorname{sen} 5x \, dx =$$

$$= \frac{(-3x + 1)}{5} \cdot \operatorname{sen} 5x + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \int \operatorname{sen} 5x \cdot 5 \, dx =$$

$$= \frac{(-3x + 1)}{5} \cdot \operatorname{sen} 5x + \frac{3}{25} (-\cos 5x) + c =$$

$$= \frac{(-3x + 1)}{5} \cdot \operatorname{sen} 5x - \frac{3 \cos 5x}{25} + c = \frac{5(-3x + 1) \operatorname{sen} 5x - 3 \cos 5x}{25} + c$$

e) $\int (2x - 1) \cdot e^{1-3x} \, dx$

Fazendo $\begin{cases} v(x) = 2x - 1 \Rightarrow v'(x) = 2 \\ u'(x) = e^{1-3x} \Rightarrow u(x) = \int e^{1-3x} \, dx = -\frac{1}{3} e^{1-3x} \end{cases}$

$$\int (2x - 1) e^{1-3x} \, dx = -\frac{1}{3} \cdot e^{1-3x} \cdot (2x - 1) - \int 2 \left(-\frac{1}{3} \right) e^{1-3x} \, dx =$$

$$= -\frac{(2x - 1)}{3} e^{1-3x} + \frac{2}{3} \int e^{1-3x} \, dx =$$

$$= -\frac{(2x - 1)}{3} e^{1-3x} - \frac{2}{9} \cdot e^{1-3x} + c =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{-2x + 3}{3} - \frac{2}{9} \right) e^{1-3x} + c = \\
 &= \left(-\frac{2}{3}x + \frac{7}{9} \right) e^{1-3x} + c
 \end{aligned}$$

- 324.** Sendo A(1, 1) e B(2, 3) determinemos a reta que passa por esses pontos.

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 3 = 2a + b \end{cases} \quad a = 2 \text{ e } b = -1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_1^2 (2x - 1)^2 dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2x - 1)^3}{3} \Big|_1^2 = \\
 &= \frac{\pi}{6} [3^3 - 1^3] = \frac{13\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{325.} \quad V &= \pi \int_1^3 (x^2)^2 dx = \pi \int_1^3 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_1^3 = \\
 &= \frac{\pi}{5} (243 - 1) = \frac{242\pi}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{325.} \quad V &= \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \int_1^4 x^{-2} dx = \pi \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^4 = \\
 &= -\pi \left[\frac{1}{4} - 1 \right] = -\pi \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

VOLUME 1	conjuntos, funções
VOLUME 2	logaritmos
VOLUME 3	trigonometria
VOLUME 4	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
VOLUME 5	combinatória, probabilidade
VOLUME 6	complexos, polinômios, equações
VOLUME 7	geometria analítica
VOLUME 8	limites, derivadas, noções de integral
VOLUME 9	geometria plana
VOLUME 10	geometria espacial
VOLUME 11	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.