

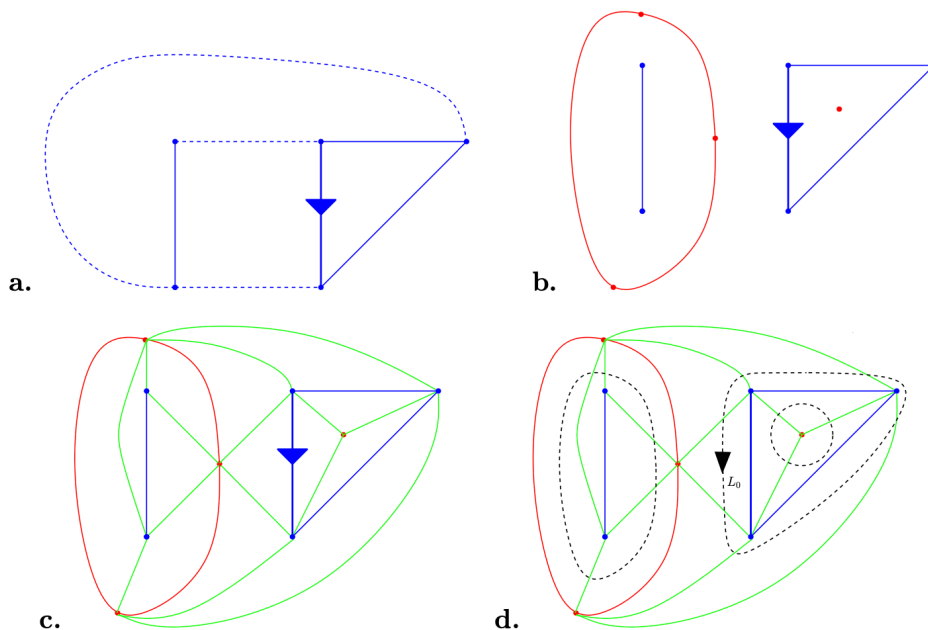
随机几何简介*

蔡格非

2024 年 8 月 13 日

1 随机平面图

这次主要介绍随机平面图¹ (Random planar map)，主要参考材料。据称随机平面图是近代概率的一大显学，其动机最初又来源于量子场论。所谓平面图就是一个图在扩充复平面上的恰当嵌入（模去球面到自身的保定向自同胚）。



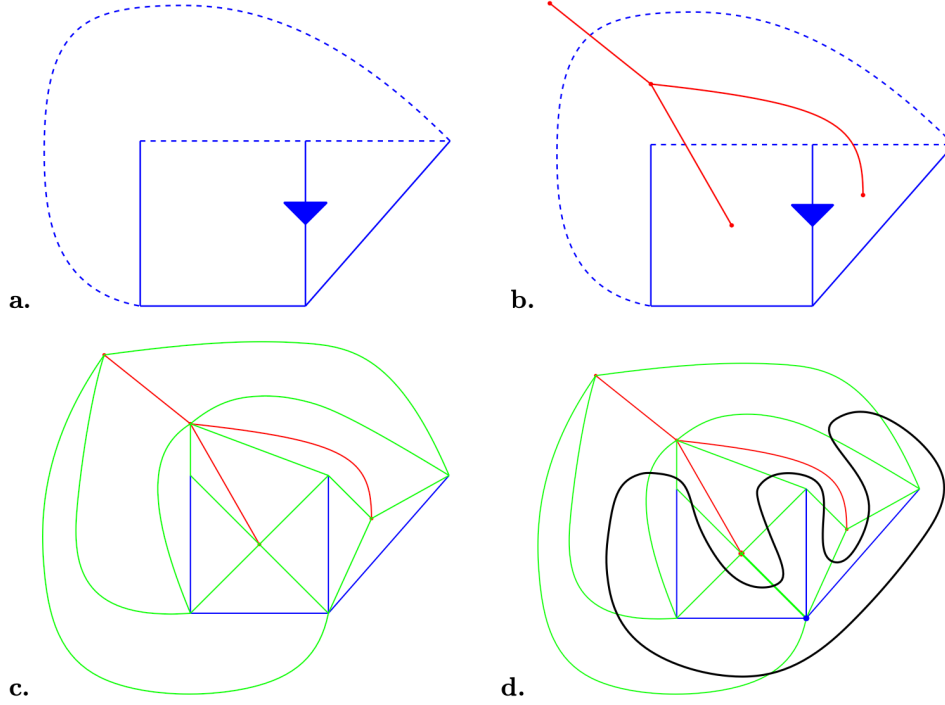
设 m 是一个平面图，则首先可以画出其对偶图 m^\dagger ，又设 t 是 m 的一个囊括所有顶点的边集。现在视 t 中每一条边为开边（其它边均为闭边）；对应地在 m^\dagger 中， t^\dagger 中每一条边视为闭边（其它边

*两篇均见于知乎专栏近代概率学习笔记，原名“近代概率分支 (II)”与“近代概率分支 (III)”，分别写于 2021 年 6 月 22 日及 2021 年 11 月 4 日。

¹原知乎文章中将 map 翻译为“映像”，现均改为较常见的译法“图”。注意这里的“图”与 graph 所指的图不同（后者只有顶点和边结构），因而有的文献中也翻译成“地图”以示区别。

均为开边)，这样我们就得到了（分别由原图和对偶图的）开边组成的**团簇**（cluster）。显然原图的团簇和对偶图的团簇彼此相间，可以画一些圈把这些团簇分割开来，这些圈的总数就记作 $l(\mathbf{m}, \mathbf{t})$ 它等于原图与对偶图团簇数之和减 1。另外，对于对偶图的每个顶点，我们可以将之与其对应原图的面的每个顶点都连接一条边，这样就得到了三角剖分。

下图中，第一幅图是平面图 \mathbf{m} ，其中蓝色实线是边集 \mathbf{t} 。第二幅图中红色部分是对偶图的开团簇。第三、四幅图中绿色边是三角剖分，而黑线是一条填充空间的遍历所有这些三角形的环路。



所谓 Fortuin-Kasteleyn 模型是指在 n 条边构成的图的集合 \mathcal{M}_n 上，对于参数 $q \geq 0$ ，赋以概率 $\mathbb{P}[M_n = \mathbf{m}, T_n = \mathbf{t}] \propto (\sqrt{q})^l, l = l(\mathbf{m}, \mathbf{t})$ 。显然 $q = 0$ 是一个十分特殊的情况，这时模型变成均匀生成树加权的平面图（权等于图上均匀生成树的个数）。这里的 Fortuin-Kasteleyn 模型正是渗流理论中的自对偶随机团簇模型。

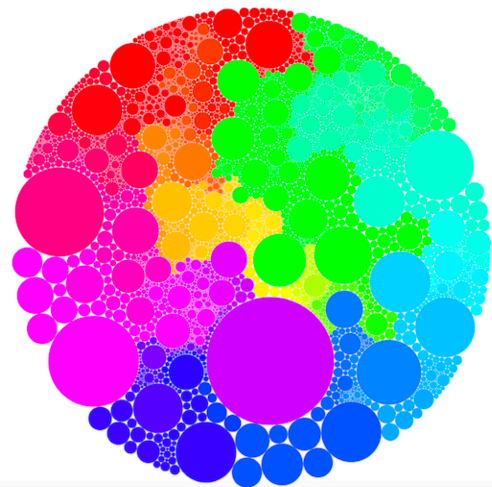
研究随机平面图的重要原因是它具有一个宏大的绘景，与其它概率分支有密切而深刻的联系。人们猜测 $n \rightarrow \infty$ 时参数为 q 的 Fortuin-Kasteleyn 模型的几何结构与参数为 γ 的 Liouville 量子引力场密切相关，其中 $q = 2 + 2 \cos\left(\frac{\gamma^2 \pi}{2}\right)$ 。所谓几何结构可以通过多种视角体现，一种经典的表现方式是所谓的**圆堆**（circle packing），如图所示。指上述加权的随机平面图的圆堆。

根据 Rodin 及 Sullivan 于 1987 年的结果（由 William Thurston 于 1985 年猜想），一致化映射可由圆堆可视化。这就是圆堆和共形映射密切相关的原因。

一个圆堆是平面上的一些圆组成的集合，这些圆之间或者没有重叠部分，或者两者相切。现在，我们把圆堆中每个圆的圆心视为一个顶点，两个顶点之间连着一一条边当且仅当其对应的两个圆周之间

相切，那么我们就得到了圆堆到平面图的一个对应（这种平面图的优势在于它的所有边都是不交叠的直线段）。图论的一个经典结果是，任何有限平面图都有一个圆堆与之对应；其证明方法大致是首先赋以每个顶点一个初始半径，然后考察用这些半径画出来的圆的集合与真正圆堆的差距，然后改进这些半径值，重复这些改进步骤最后将收敛到真正的圆堆。进一步，我们可以把这个圆堆画到单位圆盘内部且使得外面的一圈与单位圆周相切。这可以通过在原图上新加一个顶点，然后将这个顶点和原来所有顶点都连一条边来实现：考察新图的圆堆，可以通过平移和缩放使得新顶点在圆堆中对应的圆恰好是单位圆，然后通过映射 $z \mapsto 1/z$ 的保持圆周性质得到我们想要的圆堆。

圆堆的疏密程度是圆堆天然携带着的几何结构，考虑单位圆盘的一个子集，考察这个集合内包含了多少个圆心，这事实上诱导了单位圆盘上的一个测度。人们就假想这个测度当 $n \rightarrow \infty$ 时收敛到 **Liouville 量子引力场**。所谓 Liouville 量子引力场是物理学家 Polyakov 研究弦论时提出的模型，在数学上它是一个二维随机曲面，张量形如 $e^{\gamma h(x)} dx$ ，其中 h 是一个连续高斯自由场；当然作为广义函数 h 不能作非线性运算，因而这一形式需要经过定式化（有关系 $q = 4 \cos^2 \frac{\pi\gamma^2}{4}$ ）。



另外在此嵌入之下，每个（原图）团簇的边界也被认为收敛到所谓**共形圈系综**（Conformal Loop Ensemble）；形象地理解就是绕成一圈的 SLE 曲线，并且局部来看的确如此。这实际上给出了 LQG 与 CLE 的独立耦合。

随机平面图的收敛性也可以由其图遍历的收敛性描述。图的遍历始终是研究图的重要方法，大抵是由于遍历对应的行走过程的极限行为是容易研究且较为熟知的。对于我们上面提到的图，下面我们要求 t 是原图的生成树也就是考虑均匀生成树对应的随机平面图（ $q = 0$ ）。经过三角剖分，每一条原图或对偶图的边都唯一地是一个四边形的对角线。图中的三角形分为两类，一类三角形带有原图的边，另一类三角形带有对偶图的边；这两类分别将对应于“汉堡”和“芝士堡”。考虑一条以填充空间方式遍历所有三角形的环路（如下图黑色路径所示），并指定其出发点。当它首次进入一个原图的边对应的四边形时，我们把这件事叫做“生产了一个汉堡”，并记录一个 H ；而第二次进入这个四边形时（这个时候路径通过了对面的那个三角形），我们把这件事叫做“汉堡被吃掉了”，然后记录一个 h 。

对应地，对于对偶图的边对应的四边形的进出，这些事被称为“生产了一个芝士堡”或“芝士堡被吃掉了”，分别记录 C 或 c 。

于是遍历所有三角形之后，就得到了一个 H - h - C - c 字符串，如上图所示。事实上这个对应是一个所谓的 Sheffield 双射，也即给出一个合理的 H - h - C - c 字符串后就能找出原来的 m 和 t （合理性是必不可少的，例如不可能在生产一个汉堡之前就把它吃掉具体来说是在下列规则下字符串应当可以约化为空： $\overline{cC} = \overline{hH} = \emptyset$, $\overline{cH} = \overline{Hc}$ 以及 $\overline{hC} = \overline{Ch}$ ）。一种表现 H - h - C - c 字符串的方式是设计两个游弋 X 和 Y ；其中 X 的值增加或减少 1 当且仅当我们生产或吃掉一个汉堡，而 Y 的值增加或减少 1 则当且仅当生产或吃掉一个芝士堡。合理的 H - h - C - c 字符串保证了 X 和 Y 非负，如图所示。

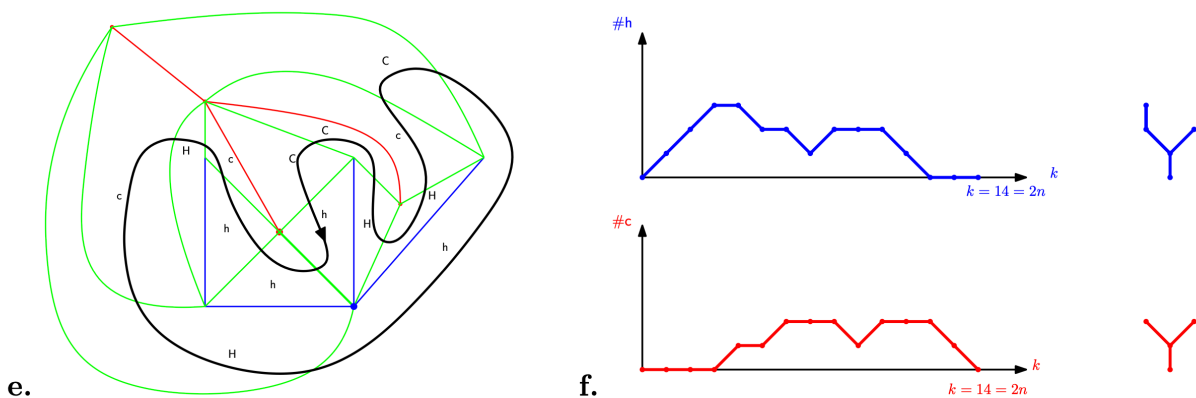


Figure 9: **e:** The word associated to (m_n, t_n) is: $w = hhhcHcHhCcHHCC$ **f:** The hamburger and cheeseburger counts, as well as the trees encoded by these excursions (which are identical to the primal and dual spanning trees, respectively).

人们证明了在均匀生成树加权平面图下，游弋 (X, Y) 在尺度变换后收敛到两个分量彼此独立的布朗游弋。事实上这个结论表明均匀生成树和它的对偶在尺度变换后的极限是一对独立的连续随机树 (Continuous Random Tree, CRT)。注意图 M_n 本身对应生成树和它的对偶之间的一种粘合方法，对于连续情形，这种粘合称为树的交配² (Mating of trees)，它是研究 Liouville 量子引力场的重要工具。

上述游弋收敛的结论并不是孤立的。一个应用是，根据均匀生成树的 Wilson 算法和 KPZ 关系，人们能够较快得出消圈随机游动的 Hausdorff 维数是 $5/4$ 。此外，上面的 Sheffield 双射有推广的版本，此时不再要求 t 是生成树；对应游弋的收敛也不再是独立的，而有更加普适而有趣的结果。变成一般的 FK 模型 ($q \neq 0$)，此时对应的是所谓空间填充 SLE (space-filling SLE)，两游弋有非零协方差。

最后再提一些圆堆问题。有限图的圆堆是纯粹的组合，无限图的圆堆则与概率相关。例如 He 和 Schramm 曾证明，对于度数有界的简单平面无限三角图，此图常返当且仅当它有在单位圆盘中的圆堆实现；否则其圆堆必定充满全平面。

圆堆在初等概率论中还有其它应用。例如人们能够以此证明对于局部收敛的度数有界有限平面随机图列，其收敛到的极限几乎处处是常返的。另外，在无穷图中我们可以定义自由均匀生成森林 (Free

²这是 L 老师给出的翻译。更多地翻译为“树的匹配”（根据 F 同学的提议，也可以将之翻译为“树的贴贴”）。

uniform spanning forest), 它是其穷竭图列的均匀生成树的弱极限, 自然它可以有不只一个连通分支。然而, 人们通过圆堆工具可以证明对于简单暂态度数有界且单端的平面三角图, 其自由均匀生成森林是几乎处处连通的。对于圆堆问题, 可以参见讲义。

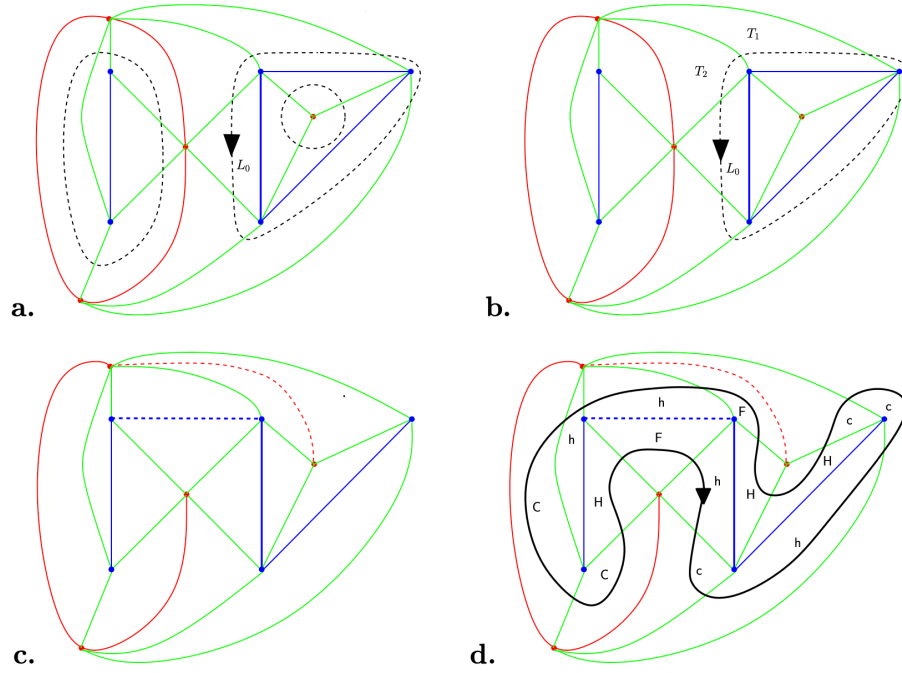


图 1: 第二次经过有翻转的四边形的时候记为 F。所得字符串为 hchccHHFhhCCHF。

2 共形熔接理论

曰若稽古。在 2014 年, Duplantier、Miller 与 Sheffield 三者在他们的工作《Liouville Quantum Gravity as Mating of Trees》中系统地定义了量子表面 (quantum surface) 的概念, 进而提出了把 *Liouville* 量子引力场 (LQG) 与树的交配 (Mating of trees) 相结合的理论。其中的核心是有关量子楔的共形熔接 (conformal welding of quantum wedges) 的有关定理。

量子楔是 Gauss 自由场的变体。考虑 $\mathcal{S} = \mathbb{R} \times [0, i\pi]$, 有 Sobolev 空间分解 $H(\mathcal{S}) = \mathcal{H}_1(\mathcal{S}) \oplus \mathcal{H}_2(\mathcal{S})$, 其中 $\mathcal{H}_1(\mathcal{S})$ 中元素在每一条垂直割线 $x + [0, i\pi]$, $x \in \mathbb{R}$ 上为常数, $\mathcal{H}_2(\mathcal{S})$ 中元素在每一条垂直割线上的积分值为零。设 $\gamma \in (0, 2)$, $Q = \frac{\gamma}{2} + \frac{2}{\gamma}$ 。在 $\alpha < Q$ 时, 取 $A_u = \begin{cases} B_{2u} + (Q - \alpha)u, u > 0 \\ \hat{B}_{-2u} + (Q - \alpha)u, u < 0 \end{cases}$ 其中 B 是零初值、条件在 $\{B_{2u} + (Q - \alpha)u > 0, \forall u > 0\}$ 上的布朗运动, \hat{B} 是独立于 B 的标准布朗运动。在 $\mathcal{H}_1(\mathcal{S})$ 上投影为 A_u , 在 $\mathcal{H}_2(\mathcal{S})$ 投影和自由边界条件 Gauss 自由场在 $\mathcal{H}_2(\mathcal{S})$ 上的投影一致的随机分布 h 就定义为权为 $W = \gamma(\frac{\gamma}{2} + Q - \alpha) > \frac{\gamma^2}{2}$ 的量子楔。它被称为厚的 (thick), 由于量子表面 $(\mathcal{S}, h)/\sim$ 与半平面有同样的拓扑。在 $\alpha \in (Q, Q + \gamma/2)$ 时, 取 $Y \sim \text{BES}^\delta, \delta = 2 + 2(Q - \alpha)/\gamma$ 。

对其每个游弋 e ，参数化 $2\log(e)/\gamma$ 使其二次变差为 $2dt$ 。以之为在 $\mathcal{H}_1(\mathcal{S})$ 上的投影，同时在 $\mathcal{H}_2(\mathcal{S})$ 投影和自由边界条件 Gauss 自由场在 $\mathcal{H}_2(\mathcal{S})$ 上的投影一致的随机分布 h_e 形成的族就定义为权为 $W = \gamma(\frac{\gamma}{2} + Q - \alpha) < \frac{\gamma^2}{2}$ 的量子楔。它被称为薄的 (thin)，事实上它可视为一个 Poisson 点过程。在一个量子楔上独立运行一个 SLE 时，SLE 将会把原来的曲面分成三个部分：曲线左边、曲线自交形成的圈和曲线右边。他们的工作指出，这三个部分，结合以它们所在区域的 LQG 背景，正是三个彼此独立的、权之和与原来一致的量子楔。权刻画了量子楔的厚薄程度。反过来，如果给出若干独立的量子楔，将它们的边界共形地“熔接”到一起时，得到的结构就是一个权为其和的量子楔，而熔接的边界又是 SLE 曲线（如下图）。

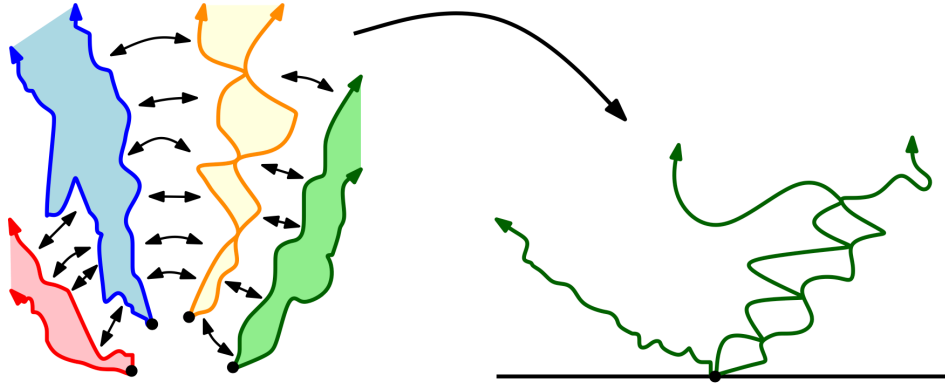


图 2: 共形熔接四个量子楔。右边的绿色曲线就是 SLE。

由定义可以看出量子楔本身具有良好的概率性质，特别是薄量子楔具有 Poisson 结构；更精确地说，构成它的一串对象实际上是值为量子圆盘的 Poisson 点过程。从而，在我们研究有关 SLE 的问题时，如果加入独立的 LQG 背景将有极大的方便。事实上，这正如作者在文中指出的那样：“One reason that this result is intriguing is ... in principle, this could allow future researchers to derive properties of SLE, LQG, and related structures in papers that *never mention either Loewner evolution or the GFF*.” 共形熔接的理论在此后得到了进一步发展，人们定义了量子圆盘 (quantum disk)、量子球面 (quantum sphere) 等诸多量子楔的变体，又把共形熔接推广到有限体积的情形。在此基础上，人们也能够精确地计算许多有关量子表面的定量结果。

在另一方面，David、Kupiainen、Rhodes 和 Vargas 等人在其工作《Liouville Quantum Gravity on the Riemann Sphere》中用 **Gauss 乘法噪声**³ (Gaussian Multiplicative Chaos) 的一般理论，通过用 Gauss 自由场作为随机场，完成了 **Liouville 共形场论** (LCFT) 的最终定式化。在其后继工作中，他们严格地构造了能动张量，以此证明了 Ward 恒等式和 BPZ 恒等式。不久，他们又证明了精确表达 LCFT 三点关联函数解析形式的 DOZZ 公式（此公式早年间曾被物理学家 Dorn、Otto 与 Zamolodchikov 兄弟分别在 1994 年和 1996 年作为天才的猜想提出）。

³也有翻译成 Gauss 倍乘混沌的。考虑到概率中有通用名词“白噪声”，因此“噪声”一词似乎更好。

上面两条平行的发展脉络在注意到量子表面与 LCFT 本身构造的关系后交织在一起了。这本身是一个纯粹的、关于布朗运动的观察（这由量子楔的定义也可以看出；可见这里1.2 节）。具体地说，标记三点的量子球面事实上与插入三点的复平面上的 Liouville 场等价。它也有半平面的版本，亦即标记三点的量子圆盘与插入三点的上半平面 Liouville 场等价，从而在涉及树的交配的有关问题时我们能够利用 LCFT 的有关结果。

现在，在研究 SLE、CLE 等经典的随机对象时，我们可以首先添加独立的 LQG 背景，然后利用树的交配以及 LCFT 的有关理论；特别是我们可以利用其中存在解析形式的公式（例如上面提到的 DOZZ 公式以及关于 SLE 量子长度的有关公式），精确计算有关随机对象的一些定量结果。这正是当代概率论前沿课题——**可积性**（integrability）的研究方法。

例如我们考虑上半平面上从原点到无穷远的 $SLE_\kappa(\rho_1, \rho_2)$ 曲线 η ，取 $\rho_- > -2, \rho_+ > (-2) \vee (\kappa/2 - 4)$ 使得 1 不在其轨迹上，令 D 为 $\mathbb{H} \setminus \eta$ 包含 1 的连通分支，取共形映射 $\psi: D \rightarrow \mathbb{H}, 1 \mapsto 1$ 。Ang、Holden 和 Sun 在其工作中给出了 $\mathbb{E}[\psi'(1)^\lambda]$ 的精确形式（ λ 为自变量），其基础就是通过（无限体积的）共形熔接理论视 η 为熔接的边界，再利用 LCFT 的有关解析结果。

另外，Ang 和 Sun 也给出了 CLE 三点关联函数的确切公式。考虑全平面上的 CLE 构型 Γ ，取定 $z \in \mathbb{C}$ ，有唯一的绕 z 的圈 $\eta \in \Gamma$ 以及单值化映射 $\psi: D_\eta \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto 0$ （ D_η 是 η 所围的单连通区域）。定义 $CR(\eta, z) = |\psi(0)'|$ 。确定复平面上三点 z_1, z_2, z_3 后考虑三点关联函数 $\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^3 CR(\eta_i, z_i)^{\lambda_i} \right]$ （自变量是权 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ ），根据 CLE 的共形不变性我们知道它能够表达成 $C_\kappa^{CLE}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \prod_{i=1}^3 |z_i - z_{i+1}|^{\lambda_i + \lambda_{i+1} - \lambda_{i+2}}$ 的形式。注意到 CLE 的每一个圈局部上绝对连续于 SLE。为了利用共形熔接的理论，文中提出了适应于圈的拓扑的一些新量子表面的概念——例如量子圆环（quantum annulus）、量子裤（quantum pants）；根据绝对连续性，这些对象的规律是清楚的。作者正是根据树的交配与 LCFT 等解析结果写出了 $C_\kappa^{CLE}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 的显式形式。

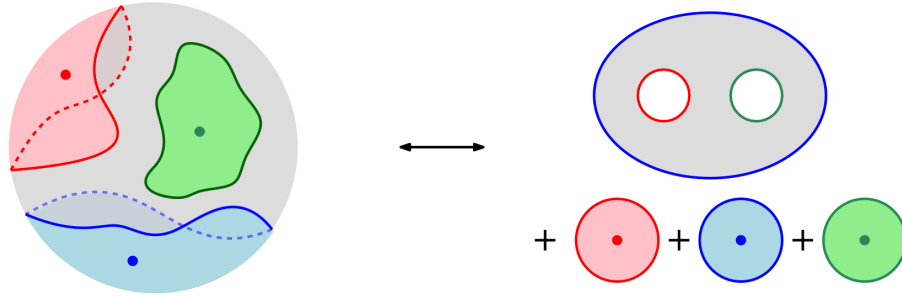


图 3: 量子球面作为三个量子圆盘和一个量子裤的熔接。熔接边界就是 CLE 的圈。