

虚几何 (Imaginary Geometry)

蔡格非

2024 年 8 月 13 日

1 导论

在复平面的单连通区域上考虑共形平坦度量 $e^{\lambda h} d^2 x$ ，其中 h 是一个光滑函数。当 λ 取实数时这是我们熟知的二维 Riemann 几何，其 Gauss 曲率为 $K = -\frac{1}{2}e^{-\lambda h}\Delta(\lambda h)$ 。进一步，设 P 为光滑的简单闭曲线，则根据 Gauss-Bonnet 定理，向量场绕此环路一圈将会产生角度变化

$$\int_D K dA = \int_D -\frac{1}{2}\Delta(\lambda h) d^2 x, \quad (1)$$

其中 D 是 P 围成的区域（同时模长不变）。当 h 是一个 Gauss 场（广义函数）时，它可以定式化为 Liouville 量子引力 (LQG)，可以认为是二维 Riemann 几何的一种随机化。

当 λ 取纯虚数时，(1) 的右边变成纯虚数，这时它将解释为向量场绕环路一圈，角度不变而模长发生了伸缩，这就是**虚几何** (imaginary geometry) 名称的由来（作者在此处加了一个有趣的注释：在《爱丽丝漫游仙境 (Alice in Wonderland)》一书中，主人公吃下东西之后身体变大或者缩小。“仙境”中的这种现象也与“虚 (imaginary)”一词相符合）。换言之，它的完整群 (holonomy group) 完全由伸缩变换组成；对比我们熟知的二维 Riemann 几何，其完整群则完全由旋转变换构成。我们考察虚几何的测地线。测地线 $\eta(t)$ 定义为自平行线，满足微分方程

$$(\eta^k)''(t) + \Gamma_{ij}^k (\eta^i)'(t) (\eta^j)'(t) = 0, \quad (2)$$

其中 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ 是虚几何度量 $e^{\lambda h} d^2 x$ ($\lambda \in i\mathbb{R}$) 对应的 Levi-Civita 联络。根据联络的计算公式，可以计算出 $\Gamma_{ij}^k = \lambda \delta_i^k \frac{\partial h}{\partial x^j}$ 。代入(2)得到

$$\begin{pmatrix} (\eta^1)''(t) \\ (\eta^2)''(t) \end{pmatrix} = -i|\lambda| \frac{dh(\eta(t))}{dt} \begin{pmatrix} (\eta^1)'(t) \\ (\eta^2)'(t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

我们把右边的因子 i 解释为转动 $(x, y) \mapsto (-y, x)$ 。令 $\eta = \eta^1 + i\eta^2$ ，则(3)变为

$$\eta''(t) = -i|\lambda| \frac{dh(\eta(t))}{dt} \eta'(t). \quad (4)$$

这样结合初始条件，(4)积分后等价于

$$\eta'(t) = e^{-i|\lambda|(h(\eta(t))+\theta)}, \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (5)$$

这就是角度为 θ 的测地射线，正是向量场 $e^{-i|\lambda|(h+\theta)}$ 的流线 (flow line). 本文的中心任务是考虑将 h 推广为 Gauss 场 (广义函数) 时，如何使得流线方程(5)有自然推广. 一个很自然的想法是作磨光 h_ε ，考虑磨光后的场的流线，然后试图证明 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的收敛性，但这个还是未知的. 本文则另辟蹊径，通过直接构造 SLE 与 GFF 的耦合，证明了在特定的意义下 GFF 的流线就是 SLE.

2 预备知识

除非特殊指明，以下我们始终记 $\kappa \in (0, 4)$ ，定义

$$\chi = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}, \quad \lambda = \lambda(\kappa) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

同时记 $\kappa' = \frac{16}{\kappa}$ ，此时 $\lambda' = \lambda(\kappa') = \lambda - \frac{\pi\chi}{2}$.

2.1 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$

所谓 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 过程是经典的 SLE_κ 的一种变体，增加了若干强迫点 (force point). 它是由对区域 Markov 性作带有边界点标记情况的推广而自然得来. 具体地，考虑上半平面，假设向量

$$(x^L; x^R) = (x^{k,L} \leq \dots \leq x^{1,L} \leq 0 \leq x^{1,R} \leq \dots \leq x^{m,R})$$

给出实轴上强迫点的位置，实向量

$$\rho = (\rho^L, \rho^R) = (\rho^{k,L}, \dots, \rho^{1,L}; \rho^{1,R}, \dots, \rho^{m,R})$$

给出对应强迫点的权，则对应的 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 过程的驱动函数 W_t 定义为下列随机微分方程的解：

$$\begin{cases} V_t^{i,q} = \int_0^t \frac{2}{V_s^{i,q} - W_s} ds + x^{i,q}, \quad q \in \{L, R\} \\ W_t = \sqrt{\kappa} B_t + \sum_{i,q} \int_0^t \frac{\rho^{i,q}}{W_s - V_s^{i,q}} ds. \end{cases} \quad (6)$$

可以证明，上述微分方程在延续阈值（见下一节）之前均有有意义的解；在这个解中，左（右）边的强迫点始终在左（右）边而不会穿越，只会反弹；两个强迫点碰撞之后它们将汇合在一起作为一个点.

$\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 有如下鞅刻画. 设 $g_t : \mathbb{H} \setminus K_t \rightarrow \mathbb{H}$ 为 Loewner 映射， $f_t = g_t - W_t$ 为其中心化.

命题 2.1. 定义函数

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_t^*(z) = & - \sum_i \rho^{i,L} \log(f_t(z) - f_t(x^{i,L})) - \log f_t(z) + \sum_i \rho^{i,R} [i\pi - \log(f_t(z) - f_t(x^{i,R}))] \\ & + (i\pi - \log f_t(z)) - \frac{\pi\chi}{\lambda} \log f_t'(z). \end{aligned} \quad (7)$$

则它成立 $d\mathfrak{h}_t^*(z) = \frac{2}{f_t(z)} dB_t$.

证明. 根据 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 的定义(6)直接计算. □

2.2 延续阈值

SLE_κ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均有定义, 但对 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 则并非如此. 这是来源于驱动函数 W_t 靠近强迫点时 SDE 行为分析的技术性问题. 一个简单的情形是只有一个强迫点 x_0 , 此时有

$$V_t = \int_0^t \frac{2}{V_s - W_s} ds + x_0, \quad W_t = \sqrt{\kappa} B_t + \int_0^t \frac{\rho}{W_s - V_s} ds,$$

从而 $X_t = \frac{V_t - W_t}{\sqrt{\kappa}}$ 成为一个 $\delta = \frac{2(\rho+2)}{\kappa} + 1$ 维的 Bessel 过程. 由 Bessel 过程的性质, 当 $\delta \geq 2$ 即 $\rho \geq \frac{\kappa}{2} - 2$ 时, 此 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 不会碰到边界; 当 $\delta > 1$ 即 $\rho > -2$ 时, 此 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 对任何 $t > 0$ 均有定义; 当 $\delta \leq 1$ 即 $\rho \leq -2$ 时, $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 在首次 $V_t = W_t$ 之后就不再有定义 (即所谓延续阈值).

一般地, 当 W_t 靠近驱动点 $V^{i,q}$, $|W_t - V_t^{i,q}|$ 的行为 (局部上) 是一个 δ 维的 Bessel 过程, 其中 $\delta = 1 + \frac{2(\rho^{i,q}+2)}{\kappa}$. 我们知道小于 1 维的 Bessel 过程难以定义碰到 0 以后的行为, 从而只有当

$$\sum_{\text{Force points colliding with } W_t} \rho^{i,q} > -2 \quad (8)$$

条件得到满足时, 在这之后的过程才能良定义. 所谓延续阈值 (continuation threshold) 就定义为首次不等式(8)不成立的时刻. 根据定义, 延续阈值总是在 W_t 碰到一个新的强迫点, 亦即曲线碰到边界的时候发生. 另外我们还知道大于或等于 2 维的 Bessel 过程是暂态的, 因此当 $\sum_{i,q} \rho^{i,q} \geq \frac{\kappa}{2} - 2$ 时曲线碰不到边界, 与 SLE_κ 互相绝对连续.

2.3 边界条件

我们现在试图对 Gauss 自由场 h 定义流线, 也就是考虑形式上满足

$$\eta'(s) = e^{i(h(\eta(s))/\chi + \theta)}, \quad \eta(0) = 0 \quad (9)$$

的解. 我们先假设 h 是连续函数, η 是光滑曲线.

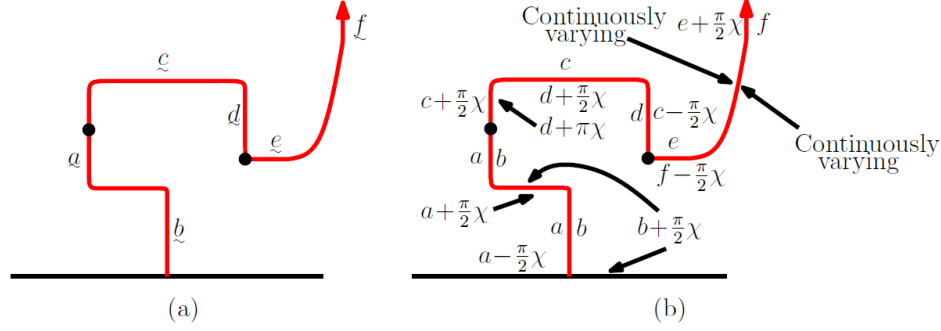
引理 2.2. 设 η 满足(9), 则 $\forall x \in \eta[0, t]$, 成立

$$\begin{cases} \chi \arg f'_t(z) \rightarrow -h(x) - \theta, & z \text{ approaches from the left side of } \eta; \\ \chi \arg f'_t(z) \rightarrow -h(x) - \theta + \chi\pi, & z \text{ approaches from the right side of } \eta \end{cases} \quad (10)$$

这里 $\eta(t)$ 表示上半平面容度参数化 (与(9)不同).

证明. 以 s_\pm 表示 0 在 f_t 下的两个像, 则 $s \mapsto f_t^{-1}(s)|_{[0, s_+]}$ 及 $s \mapsto f_t^{-1}(-s)|_{[s_-, 0]}$ 给出了两种 $\eta[0, t]$ 的参数化. 以前一种为例, 记 $\phi^{-1}(u)$ 为 $f_t^{-1}(u)$ 在上半平面容度参数化 $\eta[0, t]$ 时的参数值, 则 $f_t^{-1}(\phi(u)) = \eta(u)$. 两端关于 u 求导数得到 $\eta'(u) = (f_t^{-1})'(\phi(u))\phi'(u)$; 注意 ϕ 递减且 $(f_t^{-1})'(\phi(u)) = \frac{1}{f'_t(\eta(u))}$ ($f'_t(\eta(u))$ 解释为在 $\eta(u)$ 右侧素端的导数). 从而两边取幅角可得当 z 趋于 $\eta(u)$ 右侧时, $-\arg f'_t(z) - \pi \rightarrow \frac{h(x) + \theta}{\chi}$. $\eta(u)$ 的左侧情形证明类似. \square

由引理2.2可见, 流线 η 两侧 h 的取值将随着 η 的拐弯而变化. 例如在下图中, 流线每往左 (右) 拐弯 90° , h 的值就增加 (减少) $\frac{\pi}{2}\chi$.



虚几何在场光滑和不光滑的时候将会产生重要区别. 以 $\kappa = 4$ ($\chi = 0$) 为例, 如果 h 是连续函数, 则根据(10), h 在流线上应取相同的值, 或者说对应所谓水平线 (level line). 然而当 h 为 Gauss 自由场时, 根据构造, 流线左右两边的取值将会相差常数 2λ . 这个差值可以认为是 h 粗糙性的标志.

3 基本结果

3.1 耦合构造

定理 3.1. 设 $\kappa > 0$, $(\rho^L; \rho^R)$ 为给定向量. 设 K_t 为 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 生成的包, $\mathfrak{h}_t^0: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ 为满足以下边值条件的调和函数

$$\begin{cases} -\lambda(1 + \sum_i \rho^{i,L}), & s \in [V_t^{j+1,L}, V_t^{j,L}], \\ \lambda(1 + \sum_i \rho^{i,R}), & s \in [V_t^{j,R}, V_t^{j+1,R}]. \end{cases}$$

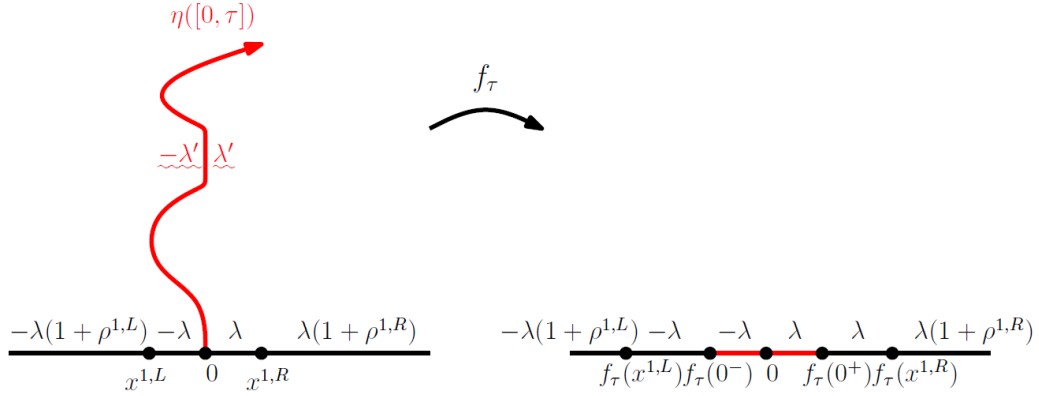
并且令 $\mathfrak{h}_t(z) = \mathfrak{h}_t^0(f_t(z)) - \chi \arg f_t'(z)$. 令 (\mathcal{F}_t) 为 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 对应的域流, $h = \tilde{h} + \mathfrak{h}_0$, 其中 \tilde{h} 是上半平面上零边值 GFF. 则存在 (K, h) 的耦合, 使得对任意停时 τ , K_τ 是场 h 的局部集 (local set), 且给定 \mathcal{F}_τ 下 $h|_{\mathbb{H} \setminus K_\tau}$ 的条件分布是 $\mathfrak{h}_\tau + \tilde{h} \circ f_\tau$.

证明. 令 G_t 是区域 $\mathbb{H} \setminus K_t$ 的 Green 函数, 根据 Green 函数的共形不变性有 $G_t(y, z) = G(f_t(y), f_t(z))$. 我们通过计算证明 $\mathfrak{h}_t(y)\mathfrak{h}_t(z) + G_t(y, z)$ 是连续局部鞅. 事实上, 回顾命题 2.1, 这里的 \mathfrak{h}_t 实际上是那里的 \mathfrak{h}_t^* 的虚部. 从而我们有 $d\mathfrak{h}_t = \text{Im} \left(\frac{2}{f_t(z)} \right) dB_t$. 由 Hadamard 公式 (或者直接计算), $dG_t(y, z) = -\text{Im} \left(\frac{2}{f_t(y)} \right) \text{Im} \left(\frac{2}{f_t(z)} \right) dt$, 从而得证.

这说明可构造下列耦合. 取一个停时 τ ; 首先取样 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 生成包 K_τ ; 再独立地于 $\mathbb{H} \setminus K_\tau$ 上取零边值 GFF h^0 , 最后令 $h_\tau = h^0 + \mathfrak{h}_\tau$. 则 h_τ 与 h 有相同分布. 事实上, 任取 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{H})$, 令 $E_t(\phi) = \iint \phi(y)G_t(y, z)\phi(z)dydz$, 则由上一段知 $(\mathfrak{h}_t, \phi)^2 + E_t(\phi)$ 是连续局部鞅. 于是

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{i\theta(\mathfrak{h}_\tau, \phi)} &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [e^{i\theta(h^0, \phi)} | \mathcal{F}_\tau] e^{i\theta(\mathfrak{h}_\tau, \phi)} \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ i\theta(\mathfrak{h}_\tau, \phi) - \frac{\theta^2}{2} E_\tau(\phi) \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ i\theta(\mathfrak{h}_0, \phi) - \frac{\theta^2}{2} E_0(\phi) \right\} \right] = \mathbb{E} e^{i\theta(h, \phi)}. \end{aligned}$$

类似地, 设有两个停时 $\tau_1 \leq \tau_2$, 则可先在 τ_1 构造上述耦合, 再由 Markov 性质在给定 \mathcal{F}_{τ_1} 下对 τ_2 构造耦合. 进而可推广至多个停时; 最后由 Kolmogorov 扩张定理实现定理陈述中的耦合. \square



注意以上并未限定 $\kappa \in (0, 4)$. 由 $\chi' = \chi(\kappa') = -\chi$, 从而 $\kappa' > 4$ 的情形可视为关于 $e^{-i\frac{h}{\chi}}$ 的流线.

定义 3.1. 在定理3.1的耦合中, 对 $\kappa \in (0, 4)$, 我们称 η 为 h (角度为 0) 的**流线** (flow line) (它是 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$). 一般地, 我们称 $h + \chi\theta$ 的流线为角度为 θ 的流线.

对 $\kappa' \in (4, \infty)$, 我们称与 $-h$ 耦合的流线为 h (角度为 0) 的**反流线** (counterflow line) (它是 $\text{SLE}_{\kappa'}(\rho)$). 我们称 $h + \chi\theta$ 的反流线为角度为 θ 的反流线.

到现在为止我们尚不知道流线 (或反流线) 是否为场 h 所决定. 这将是下面4-5两节的中心内容.

3.2 虚几何随机曲面等价类

在定理3.1的耦合中, 如果考虑将区域和场组成的对 (D, h) 作共形变换 ψ 映到另一区域 (D', h') , 则场的边界条件必须附加系数 $\chi \arg \psi'$, 才能保证对应的流线互为共形映射的像. 这启发了虚几何随机曲面等价类的概念.

定义 3.2. 虚几何随机曲面等价类 (imaginary random surface) 是区域和场组成的对 (D, h) 上定义的等价类, 其中 $(D, h) \sim (D', h')$ 当且仅当存在共形变换 $\psi: D' \rightarrow D$ 使得 $h' = h \circ \psi - \chi \arg \psi'$.

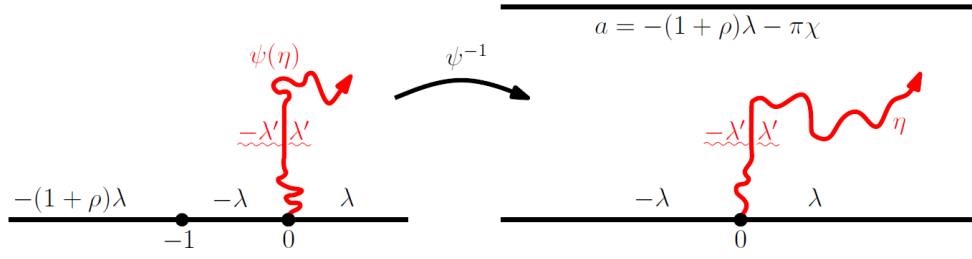
4 流线与反流线的相互作用

本节中为方便起见, 将上半平面映至 $\mathcal{S} = \mathbb{R} \times [0, 1]$, 取 $\psi(0) = 0, \psi(+\infty) = \infty, \psi(-\infty) = -1$.

4.1 Dubédat 引理

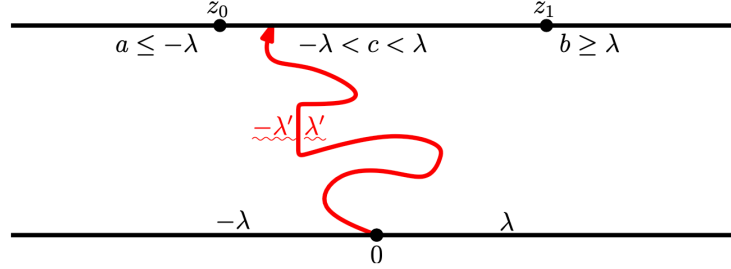
引理 4.1. 设 h 为 \mathcal{S} 上 GFF, 边界条件如下图, η 为从 0 开始的流线. 则当 $a \geq \lambda$ 时, η 将首先击中 $-\infty$; 当 $a \leq -\lambda$ 时, η 将首先击中 $+\infty$; 当 $a \in (-\lambda, \lambda)$ 时, η 将首先击中 $\partial_U \mathcal{S}$. 当 λ 换成 λ' 时, 相似结果对反流线也成立.

证明. 注意 η 是 $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ 曲线, 强迫点在 $x_0 = -1$. 由2.2节中分析, 当 $\rho \geq \frac{\kappa}{2} - 2$ 即 $a \leq -\lambda$ 时, η 不会碰到边界而 (在上半平面上) 趋于 ∞ ; 这证明了第一个论断. 第二个论断根据区域 \mathcal{S} 的对称性得出. 第三个论断是由于在 $a \in (-\lambda, \lambda)$ 时, 首先 η 将碰到边界, 其次如果它首先碰到的是 $\partial_L \mathcal{S}$, 它将绝对连续于 SLE_κ , 这与 SLE_κ 不会碰到边界相矛盾. \square



引理 4.2. 设 h 为 \mathcal{S} 上 GFF, 边界条件如下图, 其中 $a \leq -\lambda, c \in (-\lambda, \lambda), b \geq \lambda$, η 为从 0 开始的流线. 则它首先击中区间 (z_0, z_1) .

证明. 通过将 z_0 及 z_1 映到 $\mp\infty$, 这实际上可以视为上面引理的推广 (对 $\partial_L \mathcal{S}$ 上边界条件). 这可以通过绝对连续性证明. \square



4.2 基本相互作用

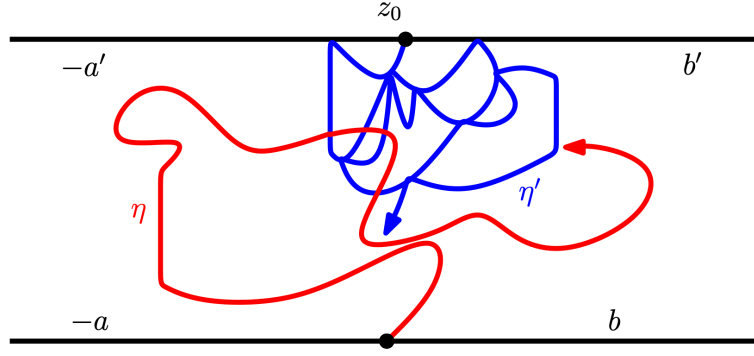
我们首先证明反流线的轨迹包含流线. 这事实上由引理4.2给出.

命题 4.3. 设 η 是 h 从 0 开始角度为 θ 的流线, η' 为条件独立的 z_0 从开始的反流线. 设 τ 为 η 的停时. 则几乎必然地, η' 在 $\eta(\tau)$ 处首先击中 $\partial_L \mathcal{S} \cup \eta[0, \tau]$. 特别地, η' 的轨迹包含 η , 且以 η 的反时序击中 (即 $s < t$, η' 在击中 $\eta(s)$ 之前击中 $\eta(t)$).

证明. 由 Markov 性, 给定 $\eta[0, \tau]$, η' 是区域 $\mathcal{S} \setminus \eta[0, \tau]$ 上的反流线 (在 η 边界上取流线边界条件). 将这一区域通过共形变换映回 \mathcal{S} , 由 Dubédat 引理4.2立得. \square

命题 4.4. 设 $\eta = \eta_{\pi/2}$ 是从 0 开始、角度为 $\frac{\pi}{2}$ 的流线, η' 是从 z_0 开始, 角度为 θ 的反流线, 且与 η 条件独立. 则几乎必然地, η 是 η' 的左边界. 类似地, $\eta_{-\pi/2}$ 几乎必然是 η' 的右边界.

证明. 只证明左边界情形. 由引理4.3可知 η 的轨迹包含于 η' ; 只需证明 η' 不会在 η 的左边. 设 τ' 是 η' 的停时, 只需证明 $\eta(\tau')$ 在 η 的右边. 根据引理4.2, η 首先击中 $\partial_U \mathcal{S} \cup \eta'[0, \tau']$ 的点必定出现在 $\partial_U \mathcal{S}$ 或 $\eta'[0, \tau']$ 的左侧. 若出现第一种情况, 已经证完. 若出现第二种情况, 如果此后 $\eta'(\tau')$ 出现在 η 的左边, 那么 η 必然在 $\eta'(\tau')$ 之下绕行 (见下图), 然后击中 $\eta'[0, \tau']$ 的右边; 这与命题4.3中 η' 以反时序击中 η 相矛盾. \square



推论 4.5. 设 h 是 S 上 GFF, $\theta_1 < \theta_2$, 则几乎处处地 η_{θ_2} 在 η_{θ_1} 的左侧.

证明. 取 h 的角度为 $\theta_1 - \frac{\pi}{2}$ 的反流线 η' , 则由命题10, η' 的左边界就是 η_{θ_2} ; 在 $\theta_2 - \theta_1 \leq \pi$ 条件下由引理4.3, η' 的轨迹包含 η_{θ_1} , 从而结论证完. 一般的情况只需递归考虑 $\theta_2 - \theta_1 \leq k\pi$. \square

推论 4.6. 在定理3.1的耦合中, 流线 η 被场 h 几乎必然决定.

证明. 条件独立地取反流线 η' , 使得 η 是 η' 的左边界. 条件独立说明给定 h 和同时给定 h, η' 下 η 的条件分布相同; 然而只要给定 η' 就能决定 η . 这说明给定 h 就能决定 η . \square

在本节结束我们列出流线的如下相互作用性质. 通过交点处的角度分析, 下面的结论是直观的. 其主要技术困难在于证明流线相交点附近共形映射的正则性.

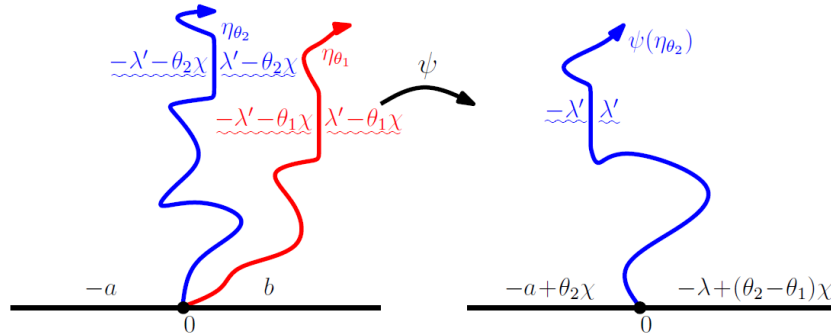


图 1: 设边界条件如左图, 则条件在 $\eta_{\theta_1}, \eta_{\theta_1}$ 左侧的虚几何随机曲面等价于右图. 于是给定 η_{θ_1} 下 η_{θ_2} 的条件分布是 $\text{SLE}_\kappa\left(\frac{a-\theta_2\chi}{\lambda} - 1; \frac{(\theta_2-\theta_1)\chi}{\lambda} - 2\right)$; 反之也有相似结论.

定理 4.7. 设 h 为上半平面上 GFF, 边界条件分段常值. 对任一 $\theta \in \mathbb{R}$ 及 $x \in \partial\mathbb{H}$, 记 η_θ^x 为从 x 出发角度为 θ 的流线. 固定 $x_1 \geq x_2$.

1. 若 $\theta_1 < \theta_2$, 则 $\eta_{\theta_1}^{x_1}$ 几乎必然在 $\eta_{\theta_2}^{x_2}$ 右侧. 进一步若 $\theta_2 - \theta_1 < \frac{\pi\kappa}{4-\kappa}$ (即 $\frac{(\theta_2-\theta_1)\chi}{\lambda} - 2 < \frac{\kappa}{2} - 2$), $\eta_{\theta_1}^{x_1}$ 与 $\eta_{\theta_2}^{x_2}$ 会碰撞后反弹; 否则它们不会相交.

2. 若 $\theta_1 = \theta_2$, 则 $\eta_{\theta_1}^{x_1}$ 与 $\eta_{\theta_2}^{x_2}$ 可能相交, 且相交后两条曲线汇合在一起.
3. 若 $\theta_2 + \pi > \theta_1 > \theta_2$, 则 $\eta_{\theta_1}^{x_1}$ 与 $\eta_{\theta_2}^{x_2}$ 可能相交, 相交时交叉穿越彼此, 且此后不会再交叉穿越. 进一步若 $\theta_1 - \theta_2 < \frac{\pi\kappa}{4-\kappa}$ (即 $\frac{(\theta_1 - \theta_2)\chi}{\lambda} - 2 < \frac{\kappa}{2} - 2$), $\eta_{\theta_1}^{x_1}$ 与 $\eta_{\theta_2}^{x_2}$ 在交叉之后仍能碰撞反弹; 否则此后不再相交.

5 光锥

本节将证明反流线的轨迹与所谓光锥相一致, 从而证明反流线也被场 a.s. 决定.

定义 5.1. 设 $(\theta_1, \dots, \theta_\ell)$ 为一组角度, $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_\ell$ 为一组停时. 在 $\tau_{\theta_1}(\tau_1)$ 之后取从 $\tau_{\theta_1}(\tau_1)$ 开始、角度为 θ_2 的流线, 直至 τ_2 , 这样得到的曲线记作 $\eta_{\theta_1, \theta_2}^{\tau_1, \tau_2}$. 递归定义 $\eta_{\theta_1, \dots, \theta_\ell}^{\tau_1, \dots, \tau_\ell}$, 称为关于停时列 (τ_i) 、角度为 (θ_i) 的**变角流线** (angle-varying flow line).

定义 5.2. 我们称**光锥** (light cone) \mathbf{L} 为从 0 开始关于所有有理数停时及取值在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cap \mathbb{Q}$ 中的变角流线并集的闭包. 一般地, 对变角流线 $\eta_{\theta_1, \dots, \theta_\ell}^{\tau_1, \dots, \tau_\ell}$, 光锥 $\mathbf{L}(\eta_{\theta_1, \dots, \theta_\ell}^{\tau_1, \dots, \tau_\ell})$ 定义为从 $\eta_{\theta_1, \dots, \theta_\ell}^{\tau_1, \dots, \tau_\ell}$ 顶点出发所有关于有理数角度和停时的变角流线的闭包.

注 5.1. 容易验证取其它可数稠密集所得的结果相同 (必须取可数稠密集, 因为我们没有定义不可数多个耦合). 事实上, 设有一列 $\theta_i \rightarrow \theta$, 则几乎必然成立 (在 Hausdorff 拓扑下) $\eta_{\theta_i} \rightarrow \eta_\theta$. 但必须指出我们不能固定 Gauss 场 h 去谈论连续取值角度的流线.

由归纳法容易证明, 任何变角流线都是简单连续曲线, 在击中边界 $\partial\mathcal{S}$ 之前被 η' 以逆序击中, 从而进一步可以证明变角流线也被 h 几乎必然决定.

定理 5.2. 几乎必然地, 光锥 $\mathbf{L}(\eta_{\theta_1, \dots, \theta_\ell}^{\tau_1, \dots, \tau_\ell})$ 与首次击中 $\eta_{\theta_1, \dots, \theta_\ell}^{\tau_1, \dots, \tau_\ell}$ 之前的反流线 η' 的轨迹一致.

证明. 由共形不变性, 只需证明光锥 \mathbf{L} 的情形. 光锥包含于反流线已经由引理 4.3 给出. 任取 η' 的停时 τ' , 我们证明可以通过变角流线到达 $\eta'(\tau')$. 通过共形映射 ψ 可以将 $\eta'(\tau')$ 映为 ∞ (保持 0 不变), 于是只需证明变角流线可以到达 ∞ .

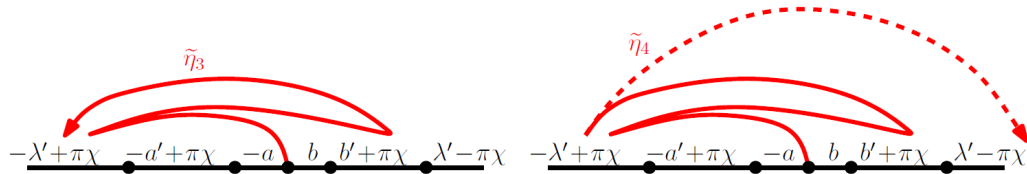


Figure 5.7: In order to prove that the construction in Figure 5.6 accumulates at $\eta'(\tau')$, we apply a conformal map ψ which takes the unbounded connected component of $\mathcal{S} \setminus \eta'([0, \tau'])$ to \mathbf{H} and which sends $\eta'(\tau')$ to ∞ and fixes 0. Then it suffices to show that $\tilde{\eta}_j := \psi(\eta_{\theta_1, \dots, \theta_j}^{\tau_1, \dots, \tau_j})$ is almost surely unbounded as $j \rightarrow \infty$. To prove this, it suffices so show that the amount of capacity time it takes $\tilde{\eta}_j$ to traverse from left to right (resp. right to left) if j is even (resp. odd) is stochastically bounded from below by a non-negative random variable whose law has positive mean.

我们取 $\theta_j = (-1)^{j+1} \frac{\pi}{2}$, 对应的停时取在每一个将要接近 x 轴的时刻, 这样得到曲线 $\tilde{\eta}$. 我们只需要证明 $\tilde{\eta}$ 无界; 根据半平面容量参数化, 又只需要证明 $\tilde{\eta}$ 对任意 $t > 0$ 均有定义. 这是由决定 $\tilde{\eta}$ 的 SDE 具有近似 i.i.d. 的结构给出的. \square

推论 5.3. 反流线被场 *a.s.* 决定.

证明. 由定理5.2, 我们已经证明反流线的轨迹被场 *a.s.* 决定, 现在只需要确定击中顺序. 事实上, 两个光锥必然有相互包含关系, 这将蕴含 η' 的一个全序. \square

最后我们介绍所谓 SLE 风扇 (SLE fan), 它是由从边界给定点出发在一个可数稠密集中取角度的流线轨迹集合的闭包. 注意这里的可数稠密集同样是因为我们没有对连续统个流线定义耦合; 但可以验证 SLE 风扇的定义不依赖于可数稠密集的选取. 注意 SLE 风扇显然包含于光锥中; 而光锥与反流线轨迹一致, 后者具有 Hausdorff 维数 $1 + \frac{\kappa'}{8} < 2$, 从而 SLE 风扇也是零测集. 这是与 h 光滑情形显著不同的; 它指出流线随着角度 θ 是极度不连续地变化.

