

Convergence of Critical Percolation.

1. Interface to SLE₆

D : Jordan domain (简单闭曲线围成单连通区域)

$(a, b) \in \partial D$. $(D^\delta, a^\delta, b^\delta)$: δ -approximation.

D^δ 上考虑 Dobrushin b.c. 临界渗流. 记分界成为 $\gamma_{D, a, b}^\delta$ ($\mu_{D, a, b}^\delta$)

收敛的拓扑: $d(\gamma_1, \gamma_2) \equiv \inf_{t \in [0, 1]} \sup_{t \in [0, 1]} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$ (*)

即取遍 γ_1, γ_2 的离散化.

称为连续曲线上的收敛度量.

定理1 (Smirnov). $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \partial D$. $\delta \rightarrow 0$ 时 $\overline{z_1^\delta z_2^\delta}$ 到 $\overline{z_3^\delta z_4^\delta}$

的开口路径的概率收敛到 Cardy 公式

$$\phi_D(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{P(1/3)}{P(1/3)P(1/3)} \eta^{1/3} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \eta\right)$$

其中 $\phi: D \rightarrow D$, $\phi(1) = 0$, $\phi'(1) > 0$; $z_j = \phi(w_j)$,

$$\eta = \frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)} \text{ 为交比.}$$

(Smirnov 原始论文中要求 $\partial D \in C^2$; C-N 指出可放宽为 Jordan)

定理2

令 $\gamma_{D, a, b}$ 为 D 上从 a 到 b 的弦 SLE₆, $\mu_{D, a, b}$ 表其概率测度.

取度量 $\rho(\mu_{D, a, b}, \mu_{D, a, b}^\delta) = \inf_{\epsilon > 0} \left\{ \begin{array}{l} \mu_{D, a, b}(U) \leq \mu_{D, a, b}^\delta(\bigcup_{z \in U} B_\delta(z)) + \epsilon \\ \text{for all Borel } U \subset W \end{array} \right\}$

W 为 a 到 b 所有连续曲线集合, $B_\delta(z) = \{x \mid d(x, z) \leq \delta\}$ 为度量 $d(x)$ 下半径为 δ 的球.

及 Prohorov 距离

$$d_p(\mu_{D, a, b}, \mu_{D, a, b}^\delta) = \rho(\mu_{D, a, b}, \mu_{D, a, b}^\delta) \vee \rho(\mu_{D, a, b}^\delta, \mu_{D, a, b}).$$

则主边界形状 (关于 (*)) 下有局部一致收敛. $\gamma_{D, a, b}^\delta \xrightarrow{d} \gamma_{D, a, b}$

i.e. for (D, a, b) Jordan, $a, b \in \partial D$. $\forall \epsilon > 0 \exists \alpha_0 = \alpha_0(\epsilon)$,

$\delta_0 = \delta_0(\epsilon)$ s.t. $\forall (D', a', b')$ s.t. D' Jordan,

$$\max\{d(\partial D, \partial D'), |a - a'|, |b - b'|\} \leq \alpha_0, \delta \leq \delta_0,$$

$$d_p(\mu_{D', a', b'}, \mu_{D', a', b'}^\delta) \leq \epsilon.$$



△ 区域马氏性 + Scaling inv $\Rightarrow SLE_k$

hitting proba. 符合 Cardy formula: $k=6$. ([LSW01]).

$\eta: H \perp z \rightarrow \infty \subset SLE_6$. $(K_t) = \text{hull}$

$$T_0 = \sup\{t \geq 0: K_t \cap (-\infty, 0] = \emptyset\}$$

$$T_1 = \sup\{t \geq 0: K_t \cap [1, \infty) = \emptyset\}$$

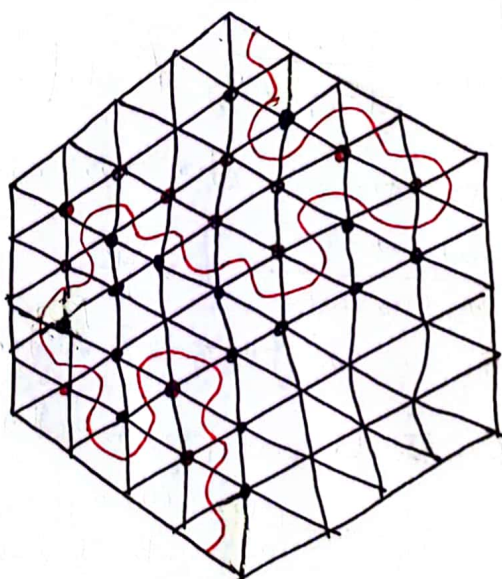
$$T = T_0 \wedge T_1. \quad \text{则} \quad (f_t(z) = \frac{g_t(z) - g_t(0)}{g_t(1) - g_t(0)})$$

$$\wedge (1-x, b) \triangleq \mathbb{E}_x \{ \mathbb{1}_{\{T_0 < T_1\}} f'_T(1) \} \quad \text{可由超几何函数表示}$$

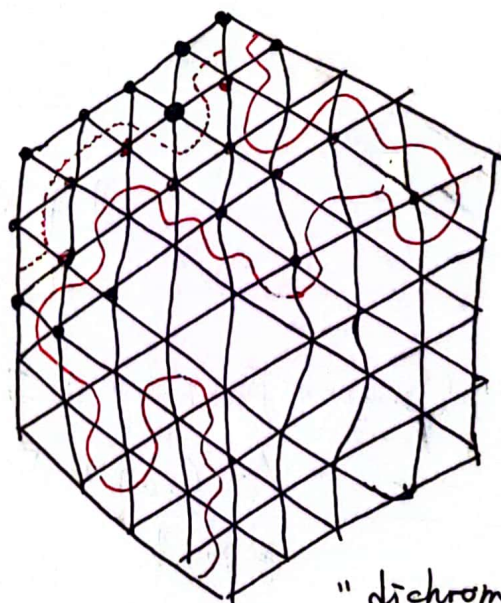
($b=0$ 就是 Cardy 公式).

或, 由 percolation \hookrightarrow locality 也给出 $k=6$.

2 Full scaling limit & CLE_6



SLE_6 , 第一层
假象左红右蓝 "mono--"



"dichromatic"
左右边界分出的区域
上搞第二层.

连续迭代此类过程得到所有 interface. 连续刻至:



$a \rightarrow b$
 SLE_6

dichromatic 区域
independently run SLE_6
形成 loop.

剩下区域迭代:
(mono--)



总之，目标是：在黑色单色边界条件下找红色单色边界，为此先假设 $b.c.$ 为红色。找到 interface；再在 dichromatic bubble 内找 interface 补全 loop。剩下区域合为黑色单色边界条件。迭代操作 $(\text{CLE}_6 \text{ (non-nested)})$ (loop 以外)。

若主得到 ∞ loop 内部也作迭代，所得为 ~~non~~ nested CLE_6 。

CN'ob: full interface (i.e. 所有 nested loop) convergence.

拓扑: $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ 曲线族。则定义

$$\text{dist}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \leq \varepsilon \iff (\forall \gamma \in \mathcal{F}, \exists \gamma' \in \mathcal{F}' \text{ with } d(\gamma, \gamma') \leq \varepsilon, \text{ and vice versa})$$

回顾曲线距离定义 (*)。

显而易见，由于定理 2 对 D 边界仅 Jordan，迭代操作可行。

Δ 对一般 $4 < \kappa' < 8$ ，也可以同理构造 $\text{CLE}_{\kappa'}$ 。只是需要改用 $\text{SLE}_{\kappa'}(\kappa'-6)$ (第二步还是 $\text{SLE}_{\kappa'}$)

$\text{CLE}_{\kappa'}$ 有以下性质：

- (1) 可取多个 loop, non-crossing. can touch each other, 但不会有三重交 (三个 loop 碰一起; 一个点被同一个 loop 经过多次 etc)。
 - (2) 每个点 $z \in D$ 有可数多 loop 环绕。但 $r_1 < r_2 < \infty$ ，圆环 $N(z, r_1, r_2)$ 中只有有限多个。
 - (3) 任一 loop 可由有限多个 touching loops 相连。
 - (4) Domain Markov Property
 - (5) Conformal Inv.
- } $\kappa \in (\frac{8}{3}, 4)$ 合理。
 $\kappa' \in (4, 8)$ open

3. Joint convergence with natural measures [GPS13].

以下记 ω_η 为 η 下临界流。所谓 Q -pivotal (Q : 拓扑四边形) 点 z 是指 Q 两边连开路径与否取决于 z 是否打开。

定义 $\mu_\eta^Q = \mu_\eta^Q(\omega_\eta) = \sum_{z \text{ is } Q \text{ piv.}} \delta_z \frac{\eta^2}{\alpha_4^2(\eta, 1)}$

定理 3 $\text{quad } Q \subset D$ 边界光滑，则 $(\omega_\eta, \mu_\eta^Q)$ 联合收敛至极限



(ω, μ^Q) . (乘积拓扑; 测度收敛)

定理 设 $f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ 共形, $Q \subset \bar{Q} \subset \Omega$, $\tilde{\omega} = f(\omega)$, $f_*(\mu^Q(\omega))$ 为测度 $\mu^Q \hookrightarrow$ pushforward. 则 $\mu^{f(Q)}(\tilde{\omega})$ 与 $f_*(\mu^Q(\omega))$ 绝对连续, 且 $\forall w \in f(Q) \in \tilde{\Omega}$,

$$\frac{d\mu^{f(Q)}(\tilde{\omega})}{df_*(\mu^Q(\omega))}(w) = |f'(z)|^{3/4} \quad (\text{共形协变性}).$$

其他分形上也可定义自然测度.

interface: $a, b \in \partial\Omega$. $\gamma_\eta: a \rightarrow b$ 曲线

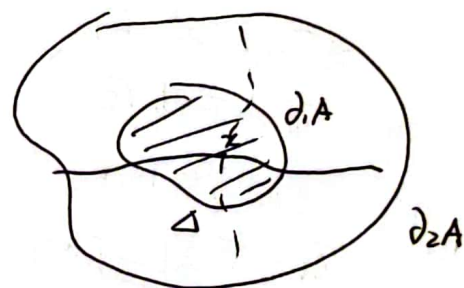
$$\tau_\eta^{\Omega, ab} = \sum_{e \in \gamma_\eta} \delta_e \frac{\eta^2}{\alpha_\epsilon^\eta(\eta, 1)} \quad (\text{natural parametrization})$$

cluster: A annulus. 外边界 $\partial_2 A$, 内圆 Δ .

$$\lambda_\eta^A = \sum_{x \in \Delta: \{x \in \partial_2 A\}} \delta_x \frac{\eta^2}{\alpha_1^\eta(\eta, 1)}.$$

仅说明 pivotal measure 情况.

$$\mu_\eta^A = \sum_{x \in \Delta: A\text{-important}} \delta_x \frac{\eta^2}{\alpha_4^\eta(\eta, 1)}$$



A -important.
(A 边界含段光滑)

Thm A fix. $\eta \rightarrow 0$, $(\omega_\eta, \mu_\eta^A) \xrightarrow{d} (\omega, \mu^A)$, μ^A 关于 ω 可测.

• 胎紧性

令 $d = \text{dist}(\partial_1 A, \partial_2 A)$, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mu_\eta^A(\Delta)] &= \sum_{x \in \Delta} \mathbb{P}[x \text{ is } A\text{-important}] \cdot \eta^2 \alpha_4^\eta(\eta, 1)^{-1} \\ &\leq \sum_{x \in \Delta} \alpha_4^\eta(d, d) \eta^2 \alpha_4^\eta(\eta, 1)^{-1} \quad (\text{拟可乘性}) \\ &\propto \text{area}(\Delta) \alpha_4(d, 1)^{-1} < \infty. \end{aligned}$$

• 极限唯一性

idea: 证明极限是 limit configuration ω 的函数. $BC \Delta$

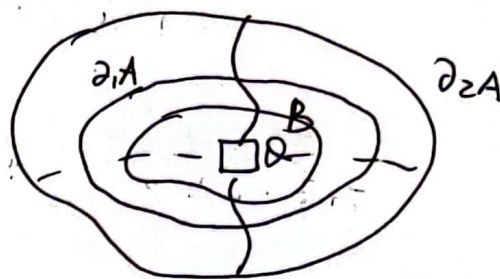
$$\mu_\eta^A(B) = \frac{X}{\eta^2 \alpha_4^\eta(\eta, 1)}. \quad X = B \text{ 中 } A\text{-important 点数目}.$$

要证 $X \hookrightarrow$ 极限只依赖于“宏观”信息.

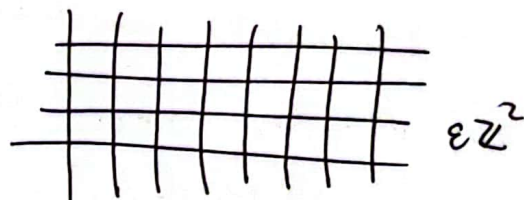


介观: 引入 ε 尺度及 ε -方体 Q . 记 $Y = Y_\gamma^\varepsilon$ 为 $2Q$ 到 ∂A 有 4 -arm
 $\hookrightarrow \varepsilon$ -box Q 数量. 往证可由 Y "推断" X .

i.e. $\exists \beta = \beta(\varepsilon, \gamma)$ s.t. $X \approx \beta Y$
 (具体地, $\mathbb{E}[|X - \beta Y|^2] = o(\mathbb{E} X^2) = o(\mathbb{E} \beta Y^2)$).



为此, 记 Q_1, \dots, Q_p 为 B 内 ε -box 列表, y_i 指示
 是否有 $2Q_i$ 到 ∂A 4 -arm. x_i 为 Q_i 内 A -
 important 点数目, 则 (先不管边界)



$$X = x_1 + \dots + x_p, \quad Y = y_1 + \dots + y_p.$$

一阶矩. $\mathbb{E}(X - \beta Y) = \sum_i \mathbb{E}(x_i - \beta y_i)$
 $= \sum_i \mathbb{P}(y_i = 1) [\mathbb{E}[x_i | y_i = 1] - \beta]$
 (注意 $y_i = 0$ 时, 必有 $x_i = 0$).

$\mathbb{E}[x_i | y_i = 1]$: 已知 $2Q_i \longleftrightarrow \partial A$ 有 4 -arm, 问内部 A -important
 点数量. coupling result: 几乎不依赖于 ∂A .

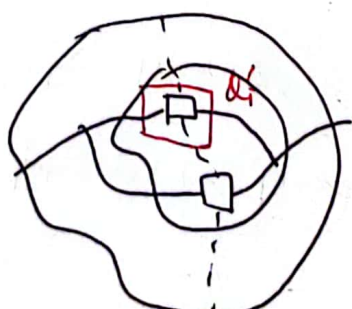
从而对任意 i , $\mathbb{E}[x_i | y_i = 1]$ 几乎一样. 这就是 β

二阶矩. $\mathbb{E}[(X - \beta Y)^2] = \sum_{i, j} \mathbb{E}[(x_i - \beta y_i)(x_j - \beta y_j)]$
 $= \sum_{i, j} \mathbb{E}[y_i y_j] \mathbb{E}[(x_i - \beta)(x_j - \beta) | y_i = 1, y_j = 1]$

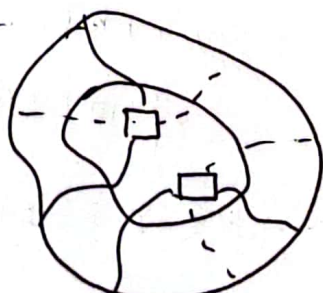
在整个求和中, i, j 距离适中"的占绝大部分. 取 $r \gg \varepsilon$, 考虑
 (若两方块间独立).
 $d(Q_i, Q_j) \geq r \gg \varepsilon$. 由 coupling argument, 内外渐进独立, 从而

$$\mathbb{E}[(x_i - \beta)(x_j - \beta) | y_i = 1, y_j = 1] \approx \mathbb{E}[(x_i - \beta) | y_i = 1] \mathbb{E}[(x_j - \beta) | y_j = 1]$$

故上面定义的 β 将符合二阶矩为小量的要求.



独立性不成立



独立性成立

但两方块间有可能不独立.
 这需要引入更大的方块 Q'_i ,
 条件在 Q'_i 之外信息 \mathcal{F}
 及 Q'_i 是否有 4 -arm 连至 Q_i
 的信息 $\cup \emptyset$.



s.t. $Q_i \subset (Q_i')^c$. 视

$$\mathbb{E}[(x_i - \beta y_i)(z_i - \beta y_i)] = \mathbb{E}[(x_i - \beta y_i) \underbrace{\mathbb{E}[z_i - \beta y_i | \mathcal{F}_i, \mathcal{U}_i]}_{\text{decompose}}]$$

Q_i' 有超过 4 个 face 是小概率事件, 当 Q_i' 尺度 r 满足 $\varepsilon \ll r \ll 1$.

• 连续情形下刻画 natural measure

Minkowski content.

$A \subset \mathbb{C}$, $r > 0$, $A^r = \{z \in \mathbb{C} : B(z, r) \cap A \neq \emptyset\}$. $d \in [0, 2]$, 定义其 d 维 Mink 密度为 $\text{Mink}_d(A) = \lim_{r \rightarrow 0} r^{d-2} \text{Area}(A^r)$

[HLS 18]: [GPS 13], interface 自然测度 \rightarrow SLE₆ Mink Content
Protal measure \rightarrow protal point Mink content.

Conj: Cluster measure \rightarrow CLE₆ gsk Mink content.

(现有结果: 若 CLE₆ gsk Mink content 存在, 则上述收敛成立).

4. Camia's conformal cov. of connection proba.

mesh size a . $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, 定义 $P_n^a(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[x_1, \dots, x_n \text{ 互不}$

\rightarrow 开团簇]. 则 $P_n(x_1, \dots, x_n) \triangleq \lim_{a \rightarrow 0} \pi_a^{-n} P_n^a(x_1, \dots, x_n)$ 存在. (**)

$$\pi_a = \mathbb{P}(0 \leftrightarrow \partial B(1))$$

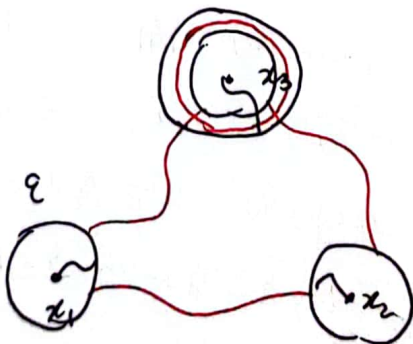
且若 ϕ 为 Möbius 映射, 则有协变性

$$P_n(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) = \prod_{i=1}^n |\phi'(x_i)|^{-5/48} P_n(x_1, \dots, x_n).$$

Cor $P_2(x_1, x_2) = C_2 \|x_1 - x_2\|^{-5/4}$, $P_3(x_1, x_2, x_3) = C_3 \|x_1 - x_2\|^{-5/48} \|x_2 - x_3\|^{-5/48} \|x_1 - x_3\|^{-5/48}$

没有普遍量

$$\frac{P_3(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{P_2(x_1, x_2) P_2(x_1, x_3) P_2(x_2, x_3)}} = \frac{C_3}{C_2^{3/2}} \approx 1.022$$



RSW + FK G: (**) 存在性.

不过详细证明仍然需要使用 coupling.

事实上 [GPS 13] 已证了酉实情形.



令 $\Gamma(r, u)$ 记图环 $A(r, u)$ 中最外层开环路. ($\eta < r < u$). (若无则令为空)

命题

Ω 边界光滑. 单连通, $0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$, $d \triangleq \text{dist}(0, \partial\Omega)$,

$d' = d/10$. 对 $10\eta < r < \frac{d'}{100}$, 令 v 表 $P[\cdot | A(r, \partial\Omega)]$,

v_0 表 $P[\cdot | A(r, d)]$.

$n = \lfloor \log_2 \frac{d'}{r} \rfloor$, $u = 2^{n/2} r$, $\Gamma = \Gamma(r, u)$, $\Gamma^0 = \Gamma^0(r, u)$

为 v, v_0 下最外层环路.

则存在 v, v_0 耦合 s.t. $\text{valp} \geq 1 - \left(\frac{r}{d'}\right)^k$, Γ, Γ^0 均作类似相同.

其中 $k > 0$ 为绝对常数.

命题

$\exists C > 0$ universal, $x, y \in \mathbb{C}$, $d \triangleq |x - y|$,

$$P[x \xleftrightarrow{\omega_\eta} y] = (C + o(1)) \alpha_1^\eta(\eta, \frac{d}{2})^2$$

证明

$$P[x \xleftrightarrow{\omega_\eta} y] = P[x \leftrightarrow y | B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \varepsilon)] P[B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \varepsilon)]$$

$$\text{设 } P[x \leftrightarrow y | B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \varepsilon)]$$

$$= P[x \leftrightarrow \partial B(x, \frac{d}{2}), y \leftrightarrow \partial B(y, \frac{d}{2}) | B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \varepsilon)] (1 + o(1))$$

$$(B_1 \triangleq A_1(x, \frac{d}{2}) \cap A_1(y, \frac{d}{2}) \cap \{B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \varepsilon)\})$$

$$B_2 \triangleq \{x \leftrightarrow y\}, \quad B_1 \Delta B_2 \subset A_1(x, \varepsilon) \cap A_2(y, \varepsilon) \cap (A_4(x, \frac{d}{2}) \Delta A_4(y, \frac{d}{2}))$$

$$\text{而 } \alpha_4 \ll \alpha_1$$

故只需讨论 $P[A_1(x, \frac{d}{2}), A_1(y, \frac{d}{2}) | B(x, \varepsilon)$

$$\leftrightarrow B(y, \varepsilon)].$$



令 $v_{x,y}$ 表 $P[\cdot | B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \varepsilon)]$,

v_x, v_y 表 $P[\cdot | B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(x, \frac{d}{2})]$, $P[\cdot | B(y, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \frac{d}{2})]$

由上命题, 可耦合 $v_{x,y}$ 与 $v_x \otimes v_y$, 成功概率 $1 - \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^k$.

$$\text{则 } P[A_1(x, \frac{d}{2}), A_1(y, \frac{d}{2}) | B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \varepsilon)]$$

$$= P[A_1(x, \frac{d}{2}), A_1(y, \frac{d}{2}) | \mathcal{S}, B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \varepsilon)] P[\mathcal{S} | B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \varepsilon)]$$

$$+ P[\dots | \neg \mathcal{S}, \dots] P[\neg \mathcal{S} | \dots]$$

$$\leq P[A_1(x, \varepsilon), A_1(y, \varepsilon)] = \alpha_1(\eta, \varepsilon)^2$$

条件内部分与 ε 球内无关.

对前一次, 第 n 个因子 $P[\mathcal{S} | B(x, \varepsilon) \leftrightarrow B(y, \varepsilon)] = 1 - o(1)$,



而第一个因子等于 (耦合成功定义)

$$P[A_1(x, \frac{d}{2}), A_2(y, \frac{d}{2}) | \mathcal{I}, B(x, \epsilon) \leftrightarrow B(y, \epsilon) \leftrightarrow B(y, \frac{d}{2})]$$

$$\text{对 } \nu_x \otimes \nu_y [A_1(x, \frac{d}{2}), A_2(y, \frac{d}{2})] = P[x \leftrightarrow B(x, \frac{d}{2}) | B(x, \epsilon) \leftrightarrow B(x, \frac{d}{2})]^2 \\ = \frac{\alpha_1^\eta(\eta, \frac{d}{2})^2}{\alpha_1^\eta(\epsilon, \frac{d}{2})^2} \sim \alpha_1^\eta(\eta, \epsilon)^2 \text{ 称作 S-78 因子.}$$

$$\text{则 } \nu_x \otimes \nu_y [A_1(x, \frac{d}{2}), A_2(y, \frac{d}{2})]$$

$$= (1 - o(1)) P[A_1(x, \frac{d}{2}), A_2(y, \frac{d}{2}) | \mathcal{I}, \overset{x}{\epsilon} \leftrightarrow \frac{d}{2}, \overset{y}{\epsilon} \leftrightarrow \frac{d}{2}]$$

$$\text{从而 } \nu_{x,y} [A_1(x, \frac{d}{2}), A_2(y, \frac{d}{2})] = (1 + o(1)) \alpha_1^\eta(\eta, \frac{d}{2})^2 / \alpha_1^\eta(\epsilon, \frac{d}{2})^2$$

$$\text{从而 } P[x \overset{\omega_\eta}{\leftrightarrow} y] = (1 + o(1)) \frac{\alpha_1^\eta(\eta, \frac{d}{2})^2}{\alpha_1^\eta(\epsilon, \frac{d}{2})^2} P[B(x, \epsilon) \overset{\omega_\eta}{\leftrightarrow} B(y, \epsilon)]$$

$$o(1) \rightarrow 0 \text{ as } \epsilon \rightarrow 0.$$

注意 SLE 技术给出 $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{P[B(x, \epsilon) \leftrightarrow B(y, \epsilon)]}{\alpha_1^\eta(\epsilon, \frac{d}{2})^2} \triangleq C(\frac{\epsilon}{d})$ 只依赖于 $\frac{\epsilon}{d}$.

而最后再求极限 $C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C(\frac{\epsilon}{d})$. 这也说明 C 与 x, y 无关.

