



北京大學 確率論

概率方向本科生科研经验谈

蔡格非

北京国际数学研究中心 2022级博士生

2023年9月24日





北京大學 確率論

什么是本科生科研



官方本研VS非官方本研



北京大学 確率論

- 本科生科研：顾名思义，就是本科生尝试去做科研课题。
- 官方本研：指学校官方的本科生科研立项项目。由此获得的学分还可以作为一门专业课程计入毕业学分（并计入个人GPA）。
- 一般来说，官方本研是在大二春季学期时立项，立项之前需要联系一位老师做研究指导教师。
- 经过一年的研究，大三春季学期需要提交一份中期进展报告。
- 大四秋季学期研究项目结题，提交结题论文书面报告。
- 项目结题时根据投入时间认定本研学分，一般为2-4学分。



官方本研VS非官方本研



北京大学 確率論

- 非官方本研：就是没有上面这些流程和规矩，在任何时候联系老师进行本研。
- 联系老师：先确定感兴趣的方向、找方向对应的老师，然后与老师聊一次，从此迈上本研之路
- 优点是灵活、不需要提交各类材料，而且可以尽早联系。科研训练的效果上几乎没有区别，唯官方本研可能更加正式。
- 官方本研会得到学校的资助和报销（4k）。本研结题需要答辩，结题论文可以被评北京大学本科生科研优秀项目，并获得奖金（3k）。
- 当然，非官方本研也有可能得到老师发给的科研补助（一般来说如此，如果你不划水的话）。



概率论方向与其他方向的区别与联系



北京大学 確率論

- 如何选择方向：主要是个人兴趣。通过在数院的若干年学习，对哪些内容更感兴趣
- 概率论方向：强调直观和例子，学科扁平，入手较快（相对其他基础数学方向）
- 概率论仍然属于严格的数学（或基础数学），与分析、代数、几何、数学物理等均有密切交叉（复分析与SLE，Virasoro代数，Riemann流形上的布朗运动，CFT等等）
- 与统计学：统计主要强调结合实际的应用而非理论，是基于实际数据的分析。当然它的基础是（经典的）概率论与数理统计理论
- 离散概率论与统计学、理论计算机有研究兴趣的交叉，例如图匹配，算法复杂度等等



我的本研经历



北京大学 確率論

- (声明：本人时间表仅供参考)
- 2020.9.22联系李欣意老师（大二上）。
- 2020.9-2021.1先学习《高等概率论》，同时旁听讨论班。
- 2021.1-2021.3寒假自学讲义。
- 2021.3-2021.6参加李欣意老师组织的总括和专题讨论班。同时自学一些感兴趣的知识。
- (其中2021.6官方本研立项)
- 2021.7至今做具体问题。（其中2021.11官方本研结题）





北京大學 確率論

概率论方向本研介绍



课本上的概率论



北京大学 確率論

- 《概率论》：古典概型；分布函数和密度函数计算；期望和方差计算；特征函数的性质；大数定律和中心极限定理。
- 《应用随机过程》：马氏链；跳过程；（唯象的）布朗运动。
- 《高等概率论》：用测度论表述的概率论严格证明大数定律和中心极限定理。
- 《随机过程论》：离散鞅；遍历定理；（严格的）布朗运动。
- 《随机分析》：连续鞅；随机积分；随机微分方程。
- 当代概率论的主要三块：极限理论，概率模型，随机分析。
- 课本中仅仅展示了概率论最为基础的一面。即使是《高等概率论》课程，也只是介绍了第二次世界大战之前的概率论学界（《随机过程论》和《随机分析》涉及了一些冷战前期的概率论学界）。



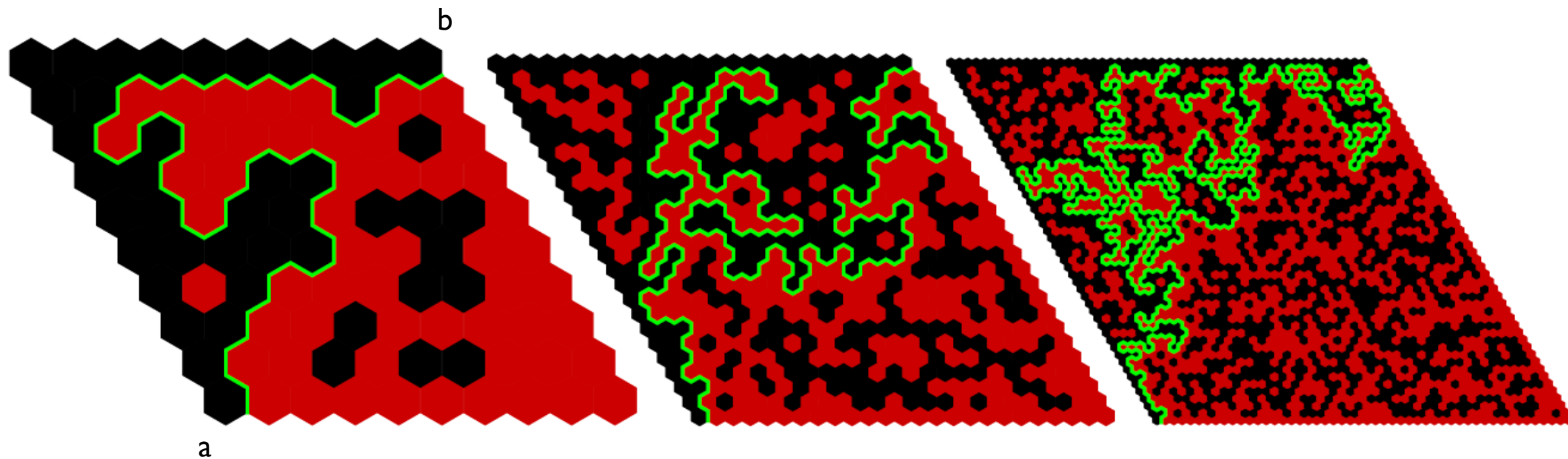
课本外的概率论



北京大學 確率論

- 当代概率论的一个重要分支是处理各类不同随机模型。
- 例子：随机图；相互作用粒子系统；来自统计物理的例子（渗流，Ising模型等等）
- 以统计物理模型为例。当代概率论研究临界统计物理模型的标度极限（scaling limit）。
- 例如考虑某一区域上的临界平面渗流（critical planar percolation），即平面六边形网格上每个单元独立以 $1/2$ 概率取红色或黑色。
- 如果把区域的边界用两个点 a 和 b 分为两段，分别强制规定为黑色和红色，那么就存在一条从 a 到 b 的分界线（interface），它的左端始终是黑色而右端始终是红色。
- 当代概率论证明，在网格尺度趋于0的标度极限，包括临界平面渗流、Ising模型等在内的一大类格点统计物理模型的分界线将收敛于一类随机曲线——Schramm-Loewner演化（SLE）。





渗流模型的分界线。在格点尺度趋于0时它将收敛于SLE₆曲线



课本外的概率论



北京大学 確率論

- SLE统一地处理了各类二维临界模型。以此为工具，人们对二维统计物理模型有了更加深刻的认识。
- 具体地，过去物理上通过共形场论（CFT）得到的关于格点模型的公式可以翻译为SLE的语言，而为数学家所理解，例如矩形上临界渗流模型的连通概率（Cardy公式）。
- 反之，CFT中若干未曾解决的问题，也可以用SLE作为主要工具得到解决（例如Backbone exponent）。
- “SLE在概率论和共形场论这两个分属数学和物理的领域之间成功建立起了桥梁。在此之后，标度极限具有了严格的数学定义；共形场论的观测量变成了关于SLE域流的鞅，共形场论的中心荷则成为SLE在应用伊藤公式时引出的二次变差项，从而与SLE参数建立了对应。在此之后，SLE衍生出了共形圈系综、共形熔接理论等诸多有力工具，许多共形场论导出的公式据此已被概率学家严格地证明；它也反过来影响了共形场论，作为一类几何实现，SLE成为了理论物理学家研究二维共形场论的重要途径。至今，SLE已然成为研究二维统计物理模型相变行为的中心对象；相变这一过去为雾霭所笼罩的胜景，正渐渐清晰而愈发引人入胜。”（见去年的《白露|标度极限》一文，<https://mp.weixin.qq.com/s/y0wN6SJDP4ic6MaGbPI8Cw>）



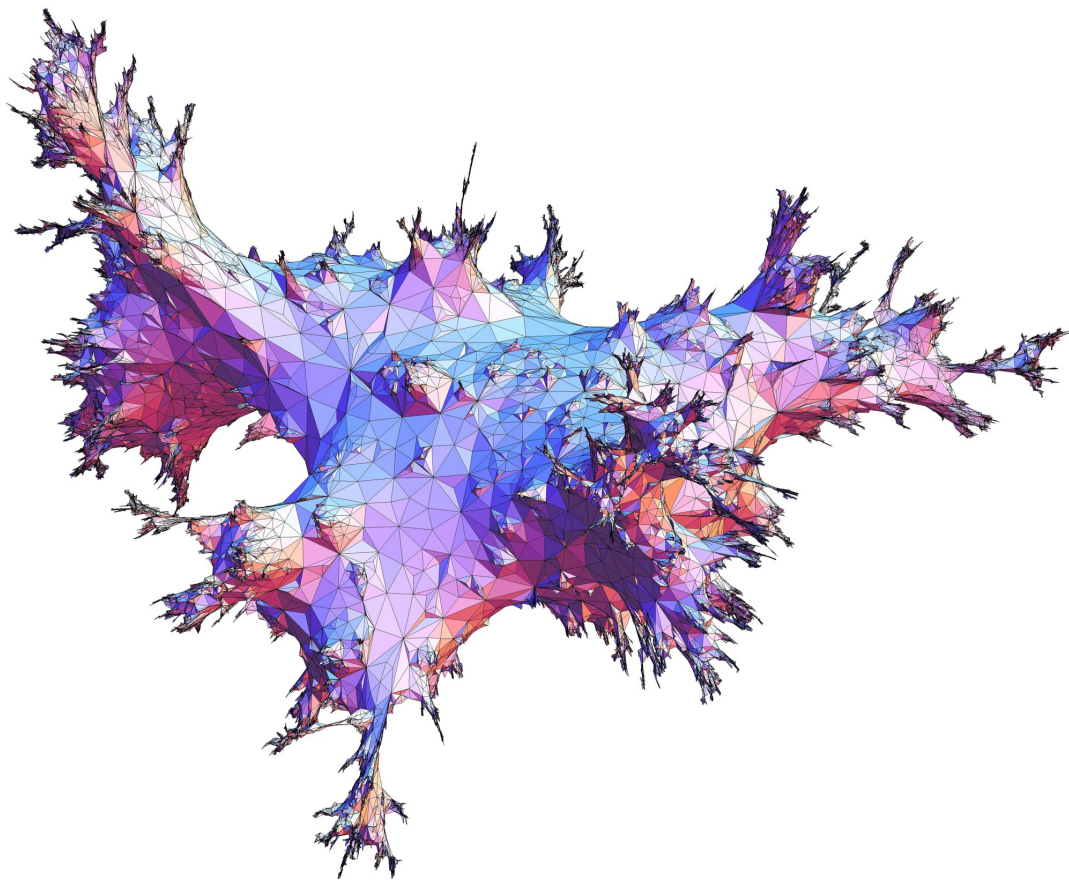
课本外的概率论



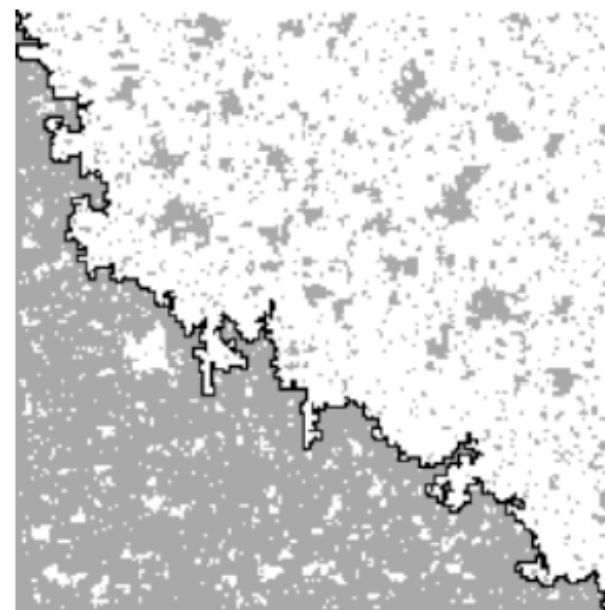
北京大學 確率論

- 又例如，布朗运动给出了“典则的”一维随机路径的直观。
- 所谓“典则的”意指它是在连续函数空间上满足独立稳定增量的连续路径之唯一概率测度，同时它又是“普适的”（universal），因为它是一维简单随机游动等一大类过程的标准极限。
- 布朗运动定义的Wiener测度为工具可以严格定义物理中的路径积分。以上是六十年代已知的。
- 二维“典则的”随机曲面的直观则是十分近期的结果。它被称为Liouville量子引力场（Liouville quantum gravity），严格化了Liouville量子引力理论，在数学上也具有丰富的结构。
- 它是在共形变换下保持不变之唯一概率测度，同时也是随机平面地图（random planar map）等的标准极限。它的存在沟通了概率论和共形场论。





Liouville量子引力场模拟图



Ising模型的分界线



当代概率论的一些特点



北京大学 確率論

- 概率论强烈依赖于所谓“概率直觉”，这一点和物理非常相似。只不过作为数学的分支，概率需要将自己的直觉严格化。
- “概率直觉”又很大程度上体现为对条件期望的理解。简单的例子：首步分析法。
- 概率论虽然是严格的数学，但和基础数学其他方向相比是相对扁平的（尤其是概率模型这一块）。也就是说不需要学许多前置知识就能上手科研。特别是离散概率论。
- 一些想法非常基本，不需要十分高级和艰深的数学工具也能做出不错的结果。
- 不过上面提到的SLE、LQG这些和物理有交叉的东西还是需要较长时间的积累。
- （随机分析方向应该也一样）



概率本研一般会做些什么



北京大學 確率論

- 自学前沿讲义或者论文
- 如前所述，概率论方向较为扁平，直接读（特别是离散概率模型有关的）前沿材料不会有很大障碍。基本有《概率论》课程的知识以及《应用随机过程》的基本知识就可以阅读。
- 上讨论班（尤其是讲讨论班）；或自己组织讨论班
- 和老师、同学讨论
- 做课题（有大有小，有难有易）。和离散概率论有关的题目不少可以直接上手做。



如何开始概率本研



北京大學 確率論

- 没有流程和规矩，随时开始。时间节点：大二或大三“左右”
- 浏览老师们的个人主页，找到与自己感兴趣的方向相匹配的老师（离散/连续概率论；与组合密切相关的问题、粒子系统、统计物理、随机分析等等）
- 直接发邮件或当面请求与老师聊
- 参加讨论班；已学到一些东西之后向老师要问题
- 不需要顾虑“前置知识不足”问题。在本研中学习
- 学习一个东西的最好方式是上手做



欢迎大家加入概率论本研队伍



北京大学 確率論

- 长于直观、（组合）技巧，对概率模型有特殊兴趣（如果有一些计算机或物理的背景则能更好了解这些概率模型的直观，或提供研究思路）
- 概率论方向师资雄厚、课程齐备、有很多讨论班
- 今年以来也有大量的国外学者给报告或短期课程
- 讨论班大佬众多，思维活跃
- 讨论班后有美食鉴赏环节（披萨/烧烤，也有奶茶/酒水）
- 也有团建环节（踏青等等）





北京大学 確率論



概率论讨论班实况 (2022)





THANKS

联系方式：邮箱CAIGEFELI917@PKU.EDU.CN

个人一孔之见，仅供参考。欢迎交流、垂询与批评指正。

