Exercice 5.4 Déterminer le reste de la division de 247^{349} par 7 puis de 1987^{1987} par 13.

> **Proposition.**
> Si $a_1 \equiv a_2[n]$ et $b_1 \equiv b_2[n]$, alors :
> - $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2[n]$;
> - $a_1 \times b_1 \equiv a_2 \times b_2[n]$.

$$\begin{array}{r|l} 1987 & 13 \\ \hline 68 & 15 \\ 37 & \\ 11 & \end{array}$$

brouillon

donc $1987 \equiv 11\,[13]$

$1987 \equiv 11\,[13]$

$1987^2 \equiv 11^2\,[13]$.

$1987^{1987} \equiv 11^{1987}\,[13]$.

donc $1987 \equiv 11\,[13]$

donc $1987^{1987} \equiv 11^{1987}\,[13]$.

$11^2 = 121 \equiv 4\,[13]$

$11^3 = 11^2 \times 11 \equiv 4 \times 11\,[13] \equiv 5\,[13]$

$11^4 = 11^2 \times 11^2 \equiv 4 \times 4\,[13] \equiv 3\,[13]$

$11^5 = 11^3 \times 11^2 \equiv 5 \times 4\,[13] \equiv 7\,[13]$

$11^6 = 11^3 \times 11^3 \equiv 5 \times 5\,[13] \equiv 12\,[13]$

$11^7 = 11^4 \times 11^3 \equiv 3 \times 5\,[13] \equiv 2\,[13]$

$11^8 = 11 \times 11^7 \equiv 11 \times 2\,[13] \equiv 9\,[13]$

$11^9 = 11^5 \times 11^4 \equiv 7 \times 3\,[13] \equiv 8\,[13]$

$11^{10} = 11^5 \times 11^5 \equiv 7 \times 7\,[13] \equiv 10\,[13]$

$11^{11} = 11^7 \times 11^4 \equiv 2 \times 3\,[13] \equiv 6\,[13]$

$\boxed{11^{12} = 11^7 \times 11^5 \equiv 2 \times 7\,[13] \equiv 1\,[13]}$

$$\begin{array}{r|l} 1987 & 12 \\ \hline 78 & 165 \\ 67 & \\ 7 & \end{array}$$

$$11^{1987} = 11^{12\times 165+7}$$

$$= 11^{12\times 165} \times 11^{7}$$

$$= (11^{12})^{165} \times 11^{7}$$

$$\equiv 1^{165} \times 11^{7} \quad [13]$$

$$\equiv 1 \times 2 \, [13]$$

$$\equiv 2 \, [13]$$

$$\overbrace{1987 \times 1987 \times 1987 \times \cdots \times 1987}^{1987 \text{ facteurs -}}$$

$$\equiv 11 \times 11 \times 11 \times \cdots\cdots \times 11 \qquad [13]$$

$$\equiv \underbrace{(\underbrace{11\times\cdots\cdots 11}_{12 f})\times(\underbrace{11\times\cdots\times 11}_{12 f.})\times\cdots\times(\underbrace{11\times\cdots 11}_{12 f.})}_{165 f \text{ égaux à } (\underbrace{11\times\cdots 11}_{12 f})} \times \underbrace{11\times\cdots\times 11}_{\substack{7 \text{ facteurs} \\ (11^{7} \equiv 2[13]}} \, [13]$$

$$\equiv \underbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}_{165 f. \text{ égaux } 1} \times 2 \qquad [13]$$

$$\equiv 2 \, [13]$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 13 \\ \hline 2 & 0 \end{array}$$

Exemple

Calculer $11 \wedge 7$ et $2992 \wedge 3172$

On utilise l'algorithme d'Euclide.

$$
\begin{aligned}
3172 &= 2992 \times 1 + 180 \\
2992 &= 180 \times 16 + 112 \\
180 &= 112 \times 1 + 68 \\
112 &= 68 \times 1 + 44 \\
68 &= 44 \times 1 + 24 \\
44 &= 24 \times 1 + 20 \\
24 &= 20 \times 1 + 4 \\
20 &= 4 \times 5 + 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 3172 \wedge 2992 \\
&= 2992 \wedge 180 \\
&= 180 \wedge 112 \\
&= 112 \wedge 68 \\
&= 68 \wedge 44 \\
&= 44 \wedge 24 \\
&= 24 \wedge 20 \\
&= 20 \wedge 4 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

donc $3172 \wedge 2992 = 4$

- 11 et 7 sont premiers et $7 \nmid 11$ donc $7 \wedge 11 = 1$.

ou

$$
\begin{aligned}
11 &= 7 \times 1 + 4 \\
7 &= 4 \times 1 + 3 \\
4 &= 3 \times 1 + 1 \\
3 &= 3 \times 1 + 0
\end{aligned}
$$

donc $11 \wedge 7 = 1$

$3172 = 2992 \times 1 + 180$

$2992 = 180 \times 16 + 112$

$180 = 112 \times 1 + 68$

$112 = 68 \times 1 + 44$

$68 = 44 \times 1 + 24$

$44 = 24 \times 1 + 20$

$24 = \boxed{20} \times 1 + 4$

$20 = 4 \times 5 + 0$

$4 = 24 - 20 \times 1$

$= 24 - (44 - 24 \times 1) \times 1$

$= -1 \times 44 + 2 \times 24$

$= -1 \times 44 + 2\,(68 - 44 \times 1)$

$= 2 \times 68 - 3 \times 44$

$\vdots$

Exercice 5.7 Calculer les PGCD des couples suivants en utilisant l'algorithme d'Euclide :

43 et 16 ; $\boxed{\text{44231 et 2750 ;}}$ 6234 et 3312 ; 87657 et 876

Exercice 5.8 Dans chacun des cas suivants, déterminer des nombres u et v vérifiant l'identité de Bézout $au + bv = a \wedge b$.

46 et 16 ; 21 et 56 ; $\boxed{\text{124 et 64 ;}}$ 3450 et 331 ; 65432 et 876

$$44231 = 2750 \times 16 + 231$$
$$2750 = 231 \times 11 + 209$$
$$231 = 209 \times 1 + 22$$
$$209 = 22 \times 9 + 11$$
$$22 = 11 \times 2 + 0$$

donc $44231 \wedge 2750 = 11$

$$124 = 64 \times 1 + 60$$
$$64 = 60 \times 1 + 4$$
$$\cancel{60 = 4 \times 15 + 0}$$

donc $124 \wedge 64 = 4$

60

$$\begin{aligned} 4 &= 64 - 60 \times 1 \\ &= 64 - (124 - 64 \times 1) \times 1 \\ &= -1 \times 124 + 2 \times 64 \end{aligned}$$