1 Classical Problems

1.1 矩阵乘法

明显地，给矩阵乘法加括号的方案数等于卡特兰数。

另外，我们有以下性质：

1. 每一次做矩阵乘法的时候，都是将一个序列内连续区间的矩阵相乘，然后再乘上另外一个区间中的矩阵的乘积，最后再将两个矩阵乘起来。

2. 第一个区间中的矩阵乘积的行数等于第二个区间中矩阵乘积的列数。

定义 $dp[i,j]$ 表示把 $[i,j]$ 这个区间中的矩阵全部乘起来所需要花费的最小代价，则最终答案为 $dp[1][n]$，在转移时，枚举一个 k，表示最后一个乘上去的矩阵是 k，则我们有以下状态转移方程：

$$dp[i,j] = \min\{dp[i,k] + dp[k+1,j] + r[i] \times c[j] \times c[k].\}$$

注意转移时不能按照正常的顺序转移，枚举的应该是区间长度，然后再转移。或者可以使用 DFS 的方式进行转移。以上代码有一个极大的缺陷，会重复搜索很多状态，所以可以使用记忆化搜索的方式进行优化。可以参照第一节记忆化搜索的写法。

可以很容易的发现，在递归的顺序或枚举的拓扑序不是十分明显时，使用 DFS 加上记忆化搜索可以使代码清晰明了。

时间复杂度 $O(n^3)$.

1.2 最优三角剖分（Uva 1626）

把一个 n 个顶点的凸多边形剖分成三角形。每一个三角形有唯一的权值函数 $w(i,j,k)$。求最优剖分方法，最大化权值和。n 不超过 100，假设函数 w 定义如下：

$$w(i,j,k) = e\cos C + i\sin S.$$

设有两个向量：

$$\alpha = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\beta = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

$$\frac{1}{2}(\alpha \times \beta) = \frac{1}{2}|(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_1)|$$

……（其余内容被留作课后作业）

dp[i,j] 表示以 i,j 两个顶点构成的三角形的最大权值，则有：

$$dp[i,j] = \begin{cases} 0 & ,i = j, \\ \min\limits_{i \le k \le j} \{t[i,k] + t[k+1,j] + w(v_{i-1}v_k v_j)\} & ,i < j. \end{cases}$$

1.3 括号序列

令 $dp[i,j]$ 表示区间 $[i,j)$ 范围内最少需要补多少个括号。

$$dp[i,j] = \begin{cases} 0 & ,i = j, \\ 1 & ,i+1 = j, \\ dp[i+1,j-1] & ,of\,(s)\,or\,[s], \\ dp[i,k] + dp[k,j] & ,i \le k < j. \end{cases}$$

1.4 区间染色 II

与括号序列有些类似，不妨参照括号序列的状态转移。令 dp[i,j] 把区间 $[i,j)$ 全部染色所需要的最小代价，则有：

$$dp[i,j] = \begin{cases} 0 & ,i = j, \\ 1 & ,i+1 = j, \\ dp[i,k] + dp[k,j] & ,\textbf{...TODO...} \end{cases}$$

1.5 传球问题 II

假设两个人来回传球，类似等比数列求和公式的处理。

$$\text{等比数列求和公式:} 1 + p + p^2 + \cdots + p^n = \frac{p^n - 1}{p - 1}, p \neq 1.$$

可以把相互传球的人看成一个整体，因为这些人无论相互传球传多少次，球最终总会被传出这些人的手里。考虑矩阵乘法这道题目，合并 $n \times m$ 的代价等于合并 $n \times k$ 的代价加上 $k \times m$ 的代价。

用类似的方法只考虑两个人，假设右边的人拿到了球向左传球的概率为 p_i，定义另外一个 $q_i = 1 - p_i$ 表示向右传球的概率。则球从右边传出去的概率 $P = q_j + p_j q_i p_j + p_j q_i p_j q_i p_j + \cdots$，容易看出这是一个等比数列，则

从左边传出的概率与从右边传出的概率是一个定值，所以这两个人与一个人是没有区别的。

对于两个点而言，我们已经知道球从左边出去和从右边出去的概率是多少，我们可以合并过来第三个人表示在这两个人右边的人所构成的整体，同样的我们也可以合并过来这两个人左边的人，问题就转换成四个人的问题。上述合并过程可以使用递归来实现。

现在我们需要设法求解一下四个人的问题：

（弃疗……）