1 Classical Problems

1.1 矩阵乘法

明显地，给矩阵乘法加括号的方案数等于卡特兰数。

另外，我们有以下性质：

1. 每一次做矩阵乘法的时候，都是将一个序列内连续区间的矩阵相乘，然后再乘上另外一个区间中的矩阵的乘积，最后再将两个矩阵乘起来。

2. 第一个区间中的矩阵乘积的行数等于第二个区间中矩阵乘积的列数。

定义 $dp[i,j]$ 表示把 $[i,j]$ 这个区间中的矩阵全部乘起来所需要花费的最小代价，则最终答案为 $dp[1][n]$，在转移时，枚举一个 k，表示最后一个乘上去的矩阵是 k，则我们有以下状态转移方程：

$$dp[i,j] = \min\{dp[i,k] + dp[k+1,j] + r[i] \times c[j] \times c[k].\}$$

注意转移时不能按照正常的顺序转移，枚举的应该是区间长度，然后再转移。或者可以使用 DFS 的方式进行转移。以上代码有一个极大的缺陷，会重复搜索很多状态，所以可以使用记忆化搜索的方式进行优化。可以参照第一节记忆化搜索的写法。

可以很容易的发现，在递归的顺序或枚举的拓扑序不是十分明显时，使用 DFS 加上记忆化搜索可以使代码清晰明了。

时间复杂度 $O(n^3)$.

1.2 最优三角剖分（Uva 1626）

把一个 n 个顶点的凸多边形剖分成三角形。每一个三角形有唯一的权值函数 $w(i,j,k)$。求最优剖分方法，最大化权值和。n 不超过 100，假设函数 w 定义如下：

$$w(i,j,k) = e\cos C + i\sin S.$$

设有两个向量：

$$\alpha = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\beta = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

$$\frac{1}{2}(\alpha \times \beta) = \frac{1}{2}|(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_1)|$$

……（其余内容被留作课后作业）

dp[i,j] 表示以 i,j 两个顶点构成的三角形的最大权值，则有：

$$dp[i,j]=\begin{cases}0 & ,i=j,\\ \min\limits_{i\le k\le j}\{t[i,k]+t[k+1,j]+w(v_{i-1}v_kv_j)\} & ,i<j.\end{cases}$$

1.3 括号序列

令 $dp[i,j]$ 表示区间 $[i,j)$ 范围内最少需要补多少个括号。

$$dp[i,j]=\begin{cases}0 & ,i=j,\\ 1 & ,i+1=j,\\ dp[i+1,j-1] & ,of\ (s)\ or\ [s],\\ dp[i,k]+dp[k,j] & ,i\le k<j.\end{cases}$$

1.4 区间染色 II

与括号序列有些类似，不妨参照括号序列的状态转移。令 dp[i,j] 把区间 $[i,j)$ 全部染色所需要的最小代价，则有：

$$dp[i,j]=\begin{cases}0 & ,i=j,\\ 1 & ,i+1=j,\\ dp[i,k]+dp[k,j] & ,\textbf{...TODO...}\end{cases}$$

1.5 传球问题 II

假设两个人来回传球，类似等比数列求和公式的处理。

$$\text{等比数列求和公式:}1+p+p^2+\cdots+p^n=\frac{p^n-1}{p-1},p\neq 1.$$

可以把相互传球的人看成一个整体，因为这些人无论相互传球传多少次，球最终总会被传出这些人的手里。考虑矩阵乘法这道题目，合并 $n\times m$ 的代价等于合并 $n\times k$ 的代价加上 $k\times m$ 的代价。用类似的方法只考虑两个人，假设右边的人拿到了球向左传球的概率为 p_i，定义另外一个 $q_i=1-p_i$ 表示向右传球的概率。则球从右边传出去的概率 $P=q_j+p_jq_ip_j+p_jq_ip_jq_ip_j+\cdots$，容易看出这是一个等比数列，则从左边传出的概率与从右边传出的概率是一个定值，所以这两个人与一个人是没有区别的。