

1 Classical Problems

1.1 矩阵乘法

明显地，给矩阵乘法加括号的方案数等于卡特兰数。

另外，我们有以下性质：

1. 每一次做矩阵乘法的时候，都是将一个序列内连续区间的矩阵相乘，然后再乘上另外一个区间中的矩阵的乘积，最后再将两个矩阵乘起来。
2. 第一个区间中的矩阵乘积的行数等于第二个区间中矩阵乘积的列数。

定义 $dp[i, j]$ 表示把 $[i, j]$ 这个区间中的矩阵全部乘起来所需要花费的最小代价，则最终答案为 $dp[1][n]$ ，在转移时，枚举一个 k ，表示最后一个乘上去的矩阵是 k ，则我们有以下状态转移方程：

$$dp[i, j] = \min\{dp[i, k] + dp[k + 1, j] + r[i] \times c[j] \times c[k].\}$$

注意转移时不能按照正常的顺序转移，枚举的应该是区间长度，然后再转移。或者可以使用 DFS 的方式进行转移。以上代码有一个极大的缺陷，会重复搜索很多状态，所以可以使用记忆化搜索的方式进行优化。可以参照第一节记忆化搜索的写法。

可以很容易的发现，在递归的顺序或枚举的拓扑序不是十分明显时，使用 DFS 加上记忆化搜索可以使代码清晰明了。

时间复杂度 $O(n^3)$ 。

1.2 最优三角剖分 (Uva 1626)

把一个 n 个顶点的凸多边形剖分成三角形。每一个三角形有唯一的权值函数 $w(i, j, k)$ 。求最优剖分方法，最大化权值和。 n 不超过 100，假设函数 w 定义如下：

$$w(i, j, k) = e \cos C + i \sin S.$$

设有两个向量：

$$\alpha = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\beta = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

$$\frac{1}{2}(\alpha \times \beta) = \frac{1}{2}|(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)|$$

.....(其余内容被留作课后作业)

$dp[i,j]$ 表示以 i,j 两个顶点构成的三角形的最大权值, 则有:

$$dp[i,j] = \begin{cases} 0 & , i = j, \\ \min_{i \leq k \leq j} \{t[i,k] + t[k+1,j] + w(v_{i-1}v_kv_j)\} & , i < j. \end{cases}$$

1.3 括号序列

令 $dp[i,j]$ 表示区间 $[i,j)$ 范围内最少需要补多少个括号。

$$dp[i,j] = \begin{cases} 0 & , i = j, \\ 1 & , i + 1 = j, \\ dp[i+1,j-1] & , of (s) or [s], \\ dp[i,k] + dp[k,j] & , i \leq k < j. \end{cases}$$

1.4 区间染色 II

与括号序列有些类似, 不妨参照括号序列的状态转移。令 $dp[i,j]$ 把区间 $[i,j)$ 全部染色所需要的最小代价, 则有:

$$dp[i,j] = \begin{cases} 0 & , i = j, \\ 1 & , i + 1 = j, \\ dp[i,k] + dp[k,j] & , ...TODO... \end{cases}$$

1.5 传球问题 II