

# 1 Classical Problems

## 1.1 矩阵乘法

明显地，给矩阵乘法加括号的方案数等于卡特兰数。

另外，我们有以下性质：

1. 每一次做矩阵乘法的时候，都是将一个序列内连续区间的矩阵相乘，然后再乘上另外一个区间中的矩阵的乘积，最后再将两个矩阵乘起来。
2. 第一个区间中的矩阵乘积的行数等于第二个区间中矩阵乘积的列数。

定义  $dp[i, j]$  表示把  $[i, j]$  这个区间中的矩阵全部乘起来所需要花费的最小代价，则最终答案为  $dp[1][n]$ ，在转移时，枚举一个  $k$ ，表示最后一个乘上去的矩阵是  $k$ ，则我们有以下状态转移方程：

$$dp[i, j] = \min\{dp[i, k] + dp[k + 1, j] + r[i] \times c[j] \times c[k]\}$$

注意转移时不能按照正常的顺序转移，枚举的应该是区间长度，然后再转移。或者可以使用 DFS 的方式进行转移。可以使用记忆化搜索的方式进行优化。可以参照第一节记忆化搜索的写法。

可以很容易的发现，在递归的顺序或枚举的拓扑序不是十分明显时，使用 DFS 加上记忆化搜索可以使代码清晰明了。

时间复杂度  $O(n^3)$ 。

## 1.2 最优三角剖分 (Uva 1626)

把一个  $n$  个顶点的凸多边形剖分成三角形。每一个三角形有唯一的权值函数  $w(i, j, k)$ 。求最优剖分方法，最大化权值和。 $n$  不超过 100，假设函数  $w$  定义如下：

$$w(i, j, k) = e \cos C + i \sin S.$$

设有两个向量：

$$\alpha = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\beta = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

$$\frac{1}{2}(\alpha \times \beta) = \frac{1}{2}|(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)|$$

……(其余内容被留作课后作业)

$dp[i,j]$  表示以  $i,j$  两个顶点构成的三角形的最大权值，则有：

$$dp[i,j] = \begin{cases} 0 & , i = j, \\ \min_{i \leq k \leq j} \{t[i,k] + t[k+1,j] + w(v_{i-1}v_kv_j)\} & , i < j. \end{cases}$$

### 1.3 括号序列

令  $dp[i,j]$  表示区间  $[i,j)$  范围内最少需要补多少个括号。

$$dp[i,j] = \begin{cases} 0 & , i = j, \\ 1 & , i + 1 = j, \\ dp[i+1,j-1] & , of(s) or [s], \\ dp[i,k] + dp[k,j] & , i \leq k < j. \end{cases}$$

### 1.4 区间染色 II

与括号序列有些类似，不妨参照括号序列的状态转移。令  $dp[i,j]$  把区间  $[i,j)$  全部染色所需要的最小代价，则有：

$$dp[i,j] = \begin{cases} 0 & , i = j, \\ 1 & , i + 1 = j, \\ dp[i,k] + dp[k,j] & , ...TODO... \end{cases}$$

### 1.5 传球问题 II

假设两个人来回传球，类似等比数列求和公式的处理。

$$\text{等比数列求和公式: } 1 + p + p^2 + \dots + p^n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}, p \neq 1.$$

可以把相互传球的人看成一个整体，因为这些人无论相互传球传多少次，球最终总会被传出这些人的手里。考虑矩阵乘法这道题目，合并  $n \times m$  的代价等于合并  $n \times k$  的代价加上  $k \times m$  的代价。

用类似的方法只考虑两个人，假设右边的人拿到了球向左传球的概率为  $p_i$ ，定义另外一个  $q_i = 1 - p_i$  表示向右传球的概率。则球从右边传出去的概率  $P = q_j + p_j q_i p_j + p_j q_i p_j q_i p_j + \dots$ ，容易看出这是一个等比数列，则

从左边传出的概率与从右边传出的概率是一个定值，所以这两个人与一个人是没有区别的。

对于两个点而言，我们已经知道球从左边出去和从右边出去的概率是多少，我们可以合并过来第三个人表示在这两个人右边的人所构成的整体，同样的我们也可以合并过来这两个人左边的人，问题就转换成四个人的问题。上述合并过程可以使用递归来实现。

现在我们需要设法求解一下四个人的问题：

（弃疗……）