

Corso di Laurea in Informatica
Algebra Lineare e Analisi Numerica
Esame del 12/2/2024 (6 CFU + seconda parte per 9 CFU)

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

per piccoli valori positivi di x .

- (a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.
- (b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.
- (c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:
 - (a1): $x \mapsto p := \frac{\pi}{6} + x, m := \frac{\pi}{6} - x \mapsto s1 := \sin p, s2 := \sin m \mapsto y1 := s1 - s2$
 - (a2): $x \mapsto s := \sin x \mapsto y2 := \sqrt{3} \cdot s$

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$, con η opportuno (esplicitare la matrice). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Data la funzione

$$g(x) = \alpha x + \beta$$

calcolare i coefficienti α e β per approssimare ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-2	-1	0	1	2	4
y	0	0	-10	2	2	4

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare, se esiste, una diagonalizzazione della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dire se il metodo delle potenze converge, e in caso affermativo, a quale autovalore converge e con quale velocità.

5. Che relazione c'è tra la SVD di una matrice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, la sua immagine $\mathcal{R}(A)$ e il suo nucleo $\mathcal{N}(A)$?

Nel seguito, sia $A = U\Sigma V^t$, dove

$$U = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Verificare che le matrici U, Σ, V soddisfano tutte le proprietà richieste dalla definizione per i fattori della SVD di A .
- (b) Determinare il rango della matrice A .
- (c) Scrivere (se esistono) due vettori, distinti e non nulli, appartenenti a $\mathcal{R}(A)$.
- (d) Scrivere (se esistono) due vettori, distinti e non nulli, appartenenti a $\mathcal{N}(A)$.