a) GAUSS $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ RK = 2

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 2x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

VET. X

VETTORE A → AX = ∅

$\begin{pmatrix} -x_2+2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2x_2+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_2 + 2x_3 - x_3$

$-x_2 + 2x_3 - x_3 = 0 \quad -x_2 = -x_3 \quad x_2 = x_3$

$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) GAUSS $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ RK = 2

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 2x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

VET. X

VETTORE A → AX = ∅

$\begin{pmatrix} -x_2+2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2x_2+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_2 + 2x_3 - x_3$

$-x_2 + 2x_3 - x_3 = 0 \quad -x_2 = -x_3 \quad x_2 = x_3$

$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) GAUSS $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ RK = 2

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 2x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

VET. X

VETTORE A → AX = ∅

$\begin{pmatrix} -x_2+2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2x_2+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_2 + 2x_3 - x_3$

$-x_2 + 2x_3 - x_3 = 0 \quad -x_2 = -x_3 \quad x_2 = x_3$

$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) GAUSS $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ RK = 2

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 2x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

VET. X

VETTORE A → AX = ∅

$\begin{pmatrix} -x_2+2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2x_2+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_2 + 2x_3 - x_3$

$-x_2 + 2x_3 - x_3 = 0 \quad -x_2 = -x_3 \quad x_2 = x_3$

$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Esercizio 1	Fare Gauss per il rango, creare il sistema (prendo le x in comune e le tratto come libere), isolo le x, sostituisco le x trovate nel vettore X, eseguo $X \cdot v = 0$, isolo una x, sostituisco nuovamente e poi costruisco il vettore prendendo i coefficienti
Esercizio 2	Calcolare il det di una 2×2 a caso, se det $\neq 0$ allora $rk(A) \geq 2$ possiamo orlarla, altrimenti ne cerco un'altra, calcoliamo il det di tutte le possibili 3×3, le λ in comune alle 3×3 sono quelle che rk(A)=2, tutte le altre rk(A)=3;
Esercizio 3	• Se A è una matrice nilpotente (ossia esiste un intero positivo n tale che $A^n = 0$) allora det $A = 0 \rightarrow$ Nilpotente non invertibile allora det $A = 0$ • Se A è una matrice simmetrica, allora A^2 è simmetrica $\rightarrow M$ simmetrica se $M = M^T \Rightarrow M^T \cdot M^T = (M \cdot M)^T \Rightarrow M = M^T$, sostituisci M con A^2 • Sia $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ di rango 2, allora il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni comunque si scelga la matrice B dei termini noti. $\rightarrow$ Se si sceglie B t.c $rk(A\|B) = 3$ allora il sistema è impossibile (non ammette soluzioni) per Rouché-Capelli (∞^{2-3}) • $A^3 - A = I_2 \rightarrow A(A^2 - I) = I \Rightarrow (A^2 - I) = A^{-1}$ quindi $AA^{-1} = I$ (A è invertibile) • $A^3 - A = 0 \rightarrow A(A^2 - I) = 0 \Rightarrow A = 0, A^2 - I = 0 \Rightarrow A = 0, A^2 = I$ quindi A è invertibile se $A^2 = I$ altrimenti se $A = 0$ non è invertibile • $A^3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A(A^2 - I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ poi calcolo il determinante delle due A e uso il teorema di Binét: det $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1$, det $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \neq 0$, quindi A è invertibile • A è invertibile, allora $\det(A) > 0 \rightarrow$ Falso, per Binét A è invertibile se det $A \neq 0$ (quindi può essere anche negativo). • Se A è B sono invertibili, AB è invertibile $\rightarrow$ Vero, AB è invertibile se $\det(AB) \neq 0$ e per Binét $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$ • Se $A^{13} = B$ e B è invertibile, allora A è invertibile $\rightarrow$ Vero, $\det(A^{13}) = \det(B) \Rightarrow \det(A)^{13} = \det(B)$ sappiamo che $\det(B) \neq 0$ quindi $\det(A) \neq 0$ e quindi A è invertibile • I vettori colonna di $A \in M_n(\mathbb{R})$ generano $\mathbb{R}^n \rightarrow A$ è invertibile perchè visto che i vettori sono base di $\mathbb{R}^n$ allora la matrice ha rango n(massimo) e quindi è invertibile • Se $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ ha due minori distinti di ordine 3 con determinante nullo, $\text{rk}(A) < 3 \rightarrow$ vero, sappiamo che esistono solo due sottomatrici 3×3 quindi se entrambe hanno determinante nullo allora $\text{rk}(A) < 3$ • Tre vettori qualsiasi di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti $\rightarrow$ Usiamo la regola per essere base di R^N che dice che sono linearmente indipendenti se il rango della matrice composta dai vettori è N, quindi basta trovare un vettore per cui il rango non è 2 per avere i vettori linearmente dipendenti
Esercizio 4	• I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono base di R^N se $\text{rk}(M) = N$ con $M = (v_1 \dots v_n)$ (M matrice composta dai vettori) • Base ortogonale di v,w: $\begin{pmatrix} \det(R_2 R_3) \\ -\det(R_1 R_3) \\ \det(R_1 R_2) \end{pmatrix}$, R_i sono le righe dei vettori • Dipendenza lineare: $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$ oppure la matrice composta dai vettori non ha rango N • Indipendenza lineare: $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \rightarrow \alpha = \beta = 0$ oppure la matrice composta dai vettori ha rango N • $v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ è multiplo scalare di $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ se $\frac{x_3}{x_1} = \frac{y_3}{y_1} = \frac{z_3}{z_1} = \alpha$ • Per "generare" R^N i vettori combinati linearmente fanno ottenere qualsiasi vettore in R^N. Gli N vettori in questione devono essere linearmente indipendenti. • $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$ significa che v_2 non appartiene allo spazio generato da v_1 e quindi v_2 non deve essere multiplo scalare di v_1 • Due vettori v_1 e v_2 sono ortogonali tra loro quando il loro prodotto scalare e' 0, ovvero $v_1 \cdot v_2 = v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y} + v_{1z} \cdot v_{2z} = 0$ • Norma vettore $\|\|v\|\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, per "allungare" un vettore a una lunghezza L si usa la formula $v' = L \cdot \frac{1}{\|\|v\|\|} \cdot v$
	• Gauss: $R_i = R_i + \left(\frac{-a_{ij}}{a_{jj}}\right) \cdot R_j$ • Rouché-Capelli: $\infty^{\#incognite - \text{rk}(A)}$ • A invertibile se det $A \neq 0$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ • A non invertibile se $A^N = 0$ • Il prodotto di due matrici diagonali è diagonale, una matrice diagonale non è per forza invertibile (potrebbe avere degli zeri nella diagonale) e ogni matrice diagonale è simmetrica • Teorema di Binét: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ • Calcolo matrice inversa: scriviamo $(M\|I)$, eseguiamo Gauss (da entrambe le parti), gli elementi sopra il pivot li poniamo tutti a 0 (sempre alla Gauss dal basso verso l'alto), otteniamo $(I\|M^{-1})$ • $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ • $AX = B$ ammette soluzioni se $rk(A\|B) = rk(A)$

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{225} = 15$
$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{400} = 20$
$\sqrt{441} = 21$	$\sqrt{484} = 22$	$\sqrt{529} = 23$	$\sqrt{576} = 24$	$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{676} = 26$	$\sqrt{729} = 27$	$\sqrt{784} = 28$	$\sqrt{841} = 29$	$\sqrt{900} = 30$