Esercizi Esame ALAN

1 Esercizio 1: Errori

1.1 Condizionamento

Calcolare il condizionamento usando l'algoritmo più semplice usando la formula:

$$C_f = \frac{x(f'(x))}{f(x)}$$

Poi calcolarne il limite:

- "Per piccoli valori di x" $\rightarrow \lim_{x\to 0} C_f$
- "Per piccoli valori positivi di x" $\rightarrow \lim_{x\to 0^+} C_f$
- "Per grandi valori di x" $\rightarrow \lim_{x\to +\infty} C_f$

Se il limite intorno a ± 1 è ben condizionato, altrimenti è mal condizionato.
Il risultato del limite serve per calcolare l'errore inerente:

$$Err.Inerente = C_f \cdot Err.Input$$

1.2 Errori negli algoritmi

Si disegnano i grafi degli algoritmi e l'etichetta degli archi è:

$a \pm b$	$\varepsilon_{a\pm b} = \frac{a}{a\pm b}\varepsilon_a \pm \frac{b}{a\pm b}\varepsilon_b$
$a \cdot b$	$\varepsilon_{a\cdot b} = \varepsilon_b + \varepsilon_a$
$\frac{a}{b}$	$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \varepsilon_b - \varepsilon_a$
$g(x)$	$\varepsilon_{g(x)} = C_{g(x)} \cdot \varepsilon_x$

Per ogni nodo (a partire dal fondo) si apre una parentesi e dentro si moltiplicano tutti gli archi a partire da quel nodo fino alla fine, se ci sono percorsi alternativi si fa la somma dei percorsi.

$$\varepsilon\{(I \cdot II \cdot \ldots) + (\ldots) + \ldots\}$$

Per verificare la stabilità dell'algoritmo bisogna fare il limite tendente a 0^+ di tutti gli archi e se viene finito (per tutti gli archi) è stabile, altrimenti è instabile (ne basta uno per verificarlo).

Esempio

2 Esercizio 2: Rotazioni/Riflessioni

2.1 Rotazioni di Givens

Si indica una rotazione di Givens con:

$$G(i, j, \theta)$$

dove i rappresenta la posizione del perno all'interno della matrice, j la posizione dell'elemento da azzerare e θ l'angolo di rotazione (che ignoreremo per l'esercizio). Ogni rotazione azzera un elemento (j) e cambia il valore del perno i (0 non può essere perno). Si calcola il valore di c e s ad ogni passaggio:

$$c = \cos(\theta) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

$$s = \sin(\theta) = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Si costruisce la matrice quadrata (della stessa dimensione dei vettori) inserendo c e s:

- c in (i, i) e (j, j)
- s in (i, j), se $i > j$ allora in (j, i)
- $-s$ in (j, i), se $i > j$ allora in (i, j)

- c e $-s$ è la riga i
- c e s è la riga j

c va nella diagonale, s e $-s$ bisogna posizionarli in modo da averli sotto/sopra a c.

Esempio

NB: le posizioni partono da 1 e non da 0.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(i, j, \theta) \quad i = pos_\beta, j = \text{posizione da azzerare} \rightarrow G(2, 1, \theta)$$

$$s = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \frac{-x_1}{\sqrt{0 + x_1^2}} = -1$$

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \frac{0}{\sqrt{0 + x_1^2}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si esegue la moltiplicazione e, se necessario, si ripete il processo usando il nuovo vettore ottenuto dalla moltiplicazione fino a quando non si raggiunge lo stesso "layout" del vettore con β.

2.1.1 Interpretazione geometrica

Per ogni rotazione, scrivere su che piano è stata fatta, ad esempio con la rotazione $G(2, 1, \theta)$ si può dire: "si tratta di una rotazione nel piano $< e_2, e_1 >$". Visto che sono tutte isometrie:

$$\|\text{vettore iniziale}\| = \|\text{vettore finale}\|$$

Si può usare come prova.

2.2 Riflessioni di Householder

NB: abbiamo visto solo come ottenere una riflessione di Householder nel caso in cui α sia il primo elemento del vettore risultante.

1. Si calcola $\alpha = \|x\|_2$
2. Si calcola $u = x - \alpha_{e_1}$ (dove α_{e_1} è il vettore con al primo posto il valore di α e i restanti valori a 0)
3. Si calcola $u^T u$
4. Si calcola uu^T
5. Infine si calcola P:

$$P = I2ww^T = I - 2\frac{uu^T}{u^T u} = I - \frac{2}{u^T u} \cdot uu^T$$

2.2.1 Verifiche

- P è ortogonale: colonne perpendicolari, prodotto scalare = 0, colonne normalizzate ($\|\text{colonna}\|_2 = 1$)
- $P \cdot x = \alpha e_1$

2.2.2 Interpretazione geometrica

Si scrive: $P = (\dots)$ riflette $x = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$ rispetto al piano perpendicolare (al vettore w)

Esempio

Esercizio 3: Minimi quadrati

Dati i valori di x e y

1. Si disegna il grafico con i valori di x e y
2. Si costruisce la matrice A:
   - Se nel testo ci sono parametri (può anche essere semplicemente l'equazione della parabola) ogni colonna di A contiene tutti i valori usando le x, se c'è un parametro che non moltiplica si mette la colonna tutta a 1
   - Se non ci sono parametri (caso della retta) si mettono le x nella prima colonna e nella seconda colonna tutti 1
3. Si costruisce il vettore b con i valori di y
4. Si calcola $A^T A$ e $A^T b$
5. Si risolve il sistema:
   - Senza parametri (caso della retta): $A^T A \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^T b$
   - Con parametri: $A^T A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dots \end{pmatrix} = A^T b$

Infine, scrivere la funzione risultante con i valori trovati.

2.3 Mia versione di come farlo

$$f(x) = \alpha g(x) \pm \beta h(x)$$

x	x_1 x_2 $\dots x_n$
y	y_1 y_2 $\dots y_n$

$$A = \begin{pmatrix} g(x_1) & h(x_1) \\ g(x_2) & h(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ g(x_n) & h(x_n) \end{pmatrix}$$

- Se ci sono le costanti α e β, allora $h(x)$ è sempre 1
- Matrice incognite: $A^T A$
- Matrice soluzioni: $A^T b$
- Le metto a sistema, isolo α e β e sostituisco a $f(x)$

2.4 Interpretazione geometrica

Disegnare il grafico con i punti e la funzione ricavata, evidenziando le distanze tra i punti dati e il grafico. In più si può scrivere: "la retta di regressione minimizza la somma degli scarti tra i valori di y dei punti ed i valori (equazione del grafico) dell* (nome funzione) calcolat* nelle ascisse x dei punti dati".

2.5 Esempio

Esercizio 4: Diagonalizzazione

1. Controllare se A è simmetrica, se lo è, allora è diagonalizzabile
2. Trovare gli autovalori risolvendo
   $$\det(A - \lambda I) = 0$$
   e riordinarli per il massimo modulo (non strettamente necessario ?)
3. Verificare la cardinalità degli autovalori (uguale all'ordine della matrice)

4. Per ogni autovalore trovare gli autovettori usando la matrice $A-\lambda I$ (sostituendo a λ l'autovalore) e risolvendo il sistema

$$(A-\lambda I)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

5. Creare la matrice V composta dagli autovettori, e la sua inversa
6. Creare la matrice D usando gli autovalori nello stesso ordine degli autovettori. Si otterrà la diagonalizzazione della matrice di partenza composta nel seguente modo:

$$A = VDV^{-1}$$

2.6 Convergenza: Metodo delle potenze

Converge all'autovalore di massimo modulo

1. Si riordinano gli autovalori in base al massimo modulo, ottenendo $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ dove λ_1 è l'autovalore di massimo modulo
2. Converge se $\lambda_1 > \lambda_2$
3. Si trova la velocità di convergenza con:

$$V=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k$$

2.7 Convergenza: Metodo delle potenze inverse

1. Dato uno shift p, bisogna trovare l'autovalore più vicino a $p(\lambda_1)$ ed il secondo più vicino a $p(\lambda_2)$
2. Si calcola

$$\mu_1=\frac{1}{\lambda_1-p}$$

   Per ogni λ
3. μ_1 sarà quello di massimo modulo tra tutti i μ calcolati, mentre μ_2 sarà il secondo di massimo modulo
4. La velocità di convergenza si calcola:

$$V=\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k$$

Se si hanno due autovalori con lo stesso modulo massimo, allora non converge.

3 Esercizio 5: Spline

Si ha una spline se:

- S è composta da polinomi di grado $\leq n$, dove n è il grado della spline (ad esempio, una spline di grado 3 sarà composta da soli polinomi di grado ≤ 3)
- S è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x\to n^-} S(x) = \lim_{x\to n^+} S(x)$$

- S' è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x\to n^-} S'(x) = \lim_{x\to n^+} S'(x)$$

- S'' è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x\to n^-} S''(x) = \lim_{x\to n^+} S''(x)$$

3.1 Calcolo dei momenti

Dato un nodo K, si calcola $S''(K)$

3.2 Periodicità di una spline

Una spline è periodica se:

$$\lim_{x\to e_1^-} S(x) = \lim_{x\to e_2^+} S(x)$$
$$\lim_{x\to e_1^-} S'(x) = \lim_{x\to e_2^+} S'(x)$$
$$\lim_{x\to e_1^-} S''(x) = \lim_{x\to e_2^+} S''(x)$$

Dove e_1 e e_2 sono i due estremi (sinistro e destro rispettivamente) della spline.

4 Esercizio 5: Condizionamento matrice e di una norma

Per verificare se la matrice A^{-1} è l'inversa bisogna vedere se $\det(A) \neq 0$ e se $A^{-1}A = I$. Per calcolare il condizionamento relativo ad una norma, bisogna fare:

$$\|A\|_{nm}$$

$$\|A^{-1}\|_{nm}$$

dove nm indica la norma in questione. Poi $M(A) = \|A\|_{nm} \cdot \|A^{-1}\|_{nm}$ per calcolare la maggiorazione dell'errore:

$$\varepsilon_x = \frac{\|\bar{x} - x\|_{nm}}{\|x\|_{nm}}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\|\delta b\|_{nm}}{\|b\|_{nm}}$$

$$\varepsilon_x \leq u(A)\varepsilon_b$$

Quindi se l'esercizio chiede di calcolare una maggiorazione, basta calcolarsi $u(A)$ e ε_b

4.1 Norme

4.1.1 Vettori

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^T x}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

4.1.2 Matrici

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una colonna e prendo il massimo)

$$\|A\|_2$$

Esiste ma non calcolabile esplicitamente

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una riga e prendo il massimo)

5 Esercizio 5: SVD

Una SVD viene utilizzata per trovare una diagonalizzazione di una matrice non simmetrica scritta nella forma

$$A = U\Sigma V^T$$

- U è una matrice ortogonale (ovvero $U^T U = UU^T = I$)
- Σ è una matrice diagonale con i valori singolari sulla diagonale in ordine decrescente
- V è una matrice ortogonale (ovvero $V^T V = VV^T = I$)

5.1 Proprietà

Data una matrice $A \in R^{m \times n}$
Immagine: trovare il valore singolare r-esimo, ovvero il più piccolo elemento strrettamente maggiore di 0. Per trovare l'immagine scriveremo tutti i vettori u da 1 a r:

$$R(A) = < u_1, u_2, \ldots, u_r >$$

Nucleo: indichiamo con v i vettori che lo compongono, partiranno da $r + 1$ fino a n:

$$N(A) = < v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n >$$

Certi esercizi potrebbero chiedere di determinare i valori singolari delle matrici $A^T A, AA^T, A^T$: esistono proprietà specifiche per questi casi.

5.2 Pseudoinversa

Dimensione: $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \exists A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$