Esame scritto ALAN 19-07-2024, prima parte.

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) calcolare $\mathrm{rk}(A)$.

b) Dire se esiste una soluzione $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ non nulla perpendicolare a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

2) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Stabilire il rango di A al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Stabilire i $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni.

3) Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ stabilire, motivando la risposta, se nelle seguenti situazioni la matrice A è invertibile o meno.

a) $A^3 - A = I_n$.

b) I vettori colonna di A generano $\mathbb{R}^n$.

c) $A^5 = 0$.

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, per ognuna delle seguenti situazioni esibire, se esiste, un vettore $v_3 \in \mathbb{R}^3$ che la soddisfi:

a) v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}^3$.

b) v_1, v_2, v_3 non generano $\mathbb{R}^3$, ma $v_3 \notin \langle v_1 \rangle \cup \langle v_2 \rangle$.

c) v_1, v_2, v_3 sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.