Esercizi Esame ALAN

1 Esercizio 1: Errori

1.1 Condizionamento

Calcolare il condizionamento usando l'algoritmo più semplice usando la formula:

$$C_f = \frac{x(f'(x))}{f(x)}$$

Poi calcolarne il limite:

- "Per piccoli valori di x" $\rightarrow \lim_{x\to 0} C_f$
- "Per piccoli valori positivi di x" $\rightarrow \lim_{x\to 0^+} C_f$
- "Per grandi valori di x" $\rightarrow \lim_{x\to +\infty} C_f$

Se il limite intorno a ± 1 è ben condizionato, altrimenti è mal condizionato.
Il risultato del limite serve per calcolare l'errore inerente:

$$Err.Inerente = C_f \cdot Err.Input$$

1.2 Errori negli algoritmi

Si disegnano i grafi degli algoritmi e l'etichetta degli archi è:

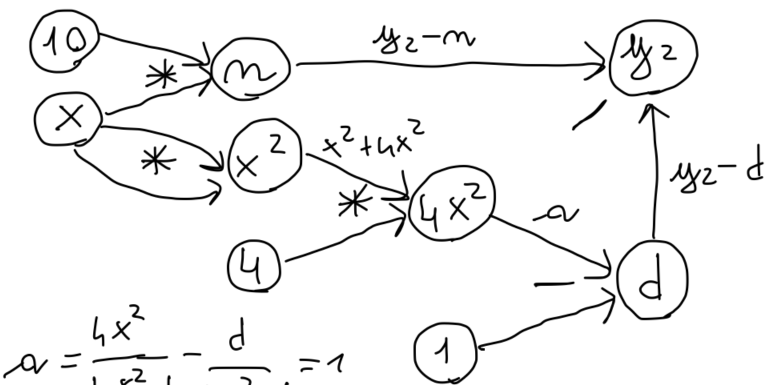
$a \pm b$	$\varepsilon_{a\pm b} = \frac{a}{a\pm b}\varepsilon_a \pm \frac{b}{a\pm b}\varepsilon_b$
$a \cdot b$	$\varepsilon_{a\cdot b} = \varepsilon_b + \varepsilon_a$
$\frac{a}{b}$	$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \varepsilon_b - \varepsilon_a$
$g(x)$	$\varepsilon_{g(x)} = C_{g(x)} \cdot \varepsilon_x$

Per ogni nodo (a partire dal fondo) si apre una parentesi e dentro si moltiplicano tutti gli archi a partire da quel nodo fino alla fine, se ci sono percorsi alternativi si fa la somma dei percorsi.

$$\varepsilon\{(I \cdot II \cdot \ldots) + (\ldots) + \ldots\}$$

Per verificare la stabilità dell'algoritmo bisogna fare il limite tendente a 0^+ di tutti gli archi e se viene finito (per tutti gli archi) è stabile, altrimenti è instabile (ne basta uno per verificarlo).

Esempio



$$a = \frac{4x^2}{4x^2-d} - \frac{d}{4x^2-d} = 1$$

$$\varepsilon_{dy_2} = \varepsilon_{y_2} + \varepsilon_m\{y_2 - m\} + \varepsilon_d\{y_2 - d\} + \varepsilon_{4x^2}\{1\cdot(y_2-d)\}$$
$$+ \varepsilon_{x^2}\{(x^2+4x^2)(y_2-d)\cdot 1\}$$

$$\lim_{x\to 0^+} y_2 - m = \lim_{x\to 0} \frac{10x}{1-4x^2} - 10x = \frac{0}{1} - 0 = \emptyset$$

$$\lim_{x\to 0^+} y_2 - d = \lim_{x\to 0} \frac{10x}{1-4x^2} - (1-4x^2) = \frac{0}{1} - (1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2+4x^2 = 0+0 = 0$$

TUTTI LIMITI FINITI, QUINDI STABILE

2 Esercizio 2: Rotazioni/Riflessioni

2.1 Rotazioni di Givens

Si indica una rotazione di Givens con:

$$G(i, j, \theta)$$

dove i rappresenta la posizione del perno all'interno della matrice, j la posizione dell'elemento da azzerare e θ l'angolo di rotazione (che ignoreremo per l'esercizio). Ogni rotazione azzera un elemento (j) e cambia il valore del perno i (0 non può essere perno). Si calcola il valore di c e s ad ogni passaggio:

$$c = \cos(\theta) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

$$s = \sin(\theta) = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Si costruisce la matrice quadrata (della stessa dimensione dei vettori) inserendo c e s:

- c e $-s$ nella riga i
- c e s nella riga j

c va nella diagonale, s e $-s$ bisogna posizionarli nella colonna dove c'è l'altro c.
Si moltiplica la matrice per il vettore iniziale per ottenere il vettore finale/intermedio γ. Usiamo γ per fare un'altra rotazione fino a quando non è uguale al vettore finale.

Esempio

$$c = \cos\theta = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}} = 0$$

$$s = \sin\theta = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}} = 1$$

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{7} \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(\overset{i}{2}, \overset{j}{3}, \theta) \qquad \text{ROTAZIONE NEL PIANO } \langle e_2, e_3 \rangle$$

$$c = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7+9}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad s = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7}/4 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -3/4 & \sqrt{7}/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VERIFICA

$$\|x\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \text{VALORE PERNO "FINALE"}$$

2.1.1 Interpretazione geometrica

Per ogni rotazione, scrivere su che piano è stata fatta, ad esempio con la rotazione $G(i, j, \theta)$ si può dire: "si tratta di una rotazione nel piano $< e_i, e_j >$". Visto che sono tutte isometrie:

$$\|\text{vettore iniziale}\| = \|\text{vettore finale}\|$$

Si può usare come prova.

2.2 Riflessioni di Householder

NB: abbiamo visto solo come ottenere una riflessione di Householder nel caso in cui α sia il primo elemento del vettore risultante.

1. Si calcola $\alpha = \|x\|_2$

2. Si calcola $u = x - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
3. Si calcola $u^T \bigotimes u \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \bigotimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_2 \\ x_2 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_2 \end{pmatrix}$
4. Si crea la matrice (quadrata) identità I con dimensione del vettore x
5. Si calcola P:
$$P = I - \frac{2}{\|u\|^2} \cdot uu^T$$
6. Infine si calcola Px trovando così il vettore risultante

2.2.1 Verifiche

- P è ortogonale: colonne perpendicolari, prodotto scalare = 0, colonne normalizzate ($\|\text{colonna}\|_2 = 1$)
- $P \cdot x = \alpha e_1$

2.2.2 Interpretazione geometrica

Si scrive: $P = (\ldots)$ riflette $x = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$ rispetto al piano perpendicolare (al vettore w)

Esempio

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$, con η opportuno (esplicitare la matrice). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

$$\alpha = \|x\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$u = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\|u\| = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

$$uu^T = u \otimes u^T = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix}$$

$$P = I - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{80}_{40}} \begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{40}\left(\begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$Px = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9+16}{5} \\ \frac{-12+12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3: Minimi quadrati

$$f(x) = \alpha g(x) \pm \beta h(x) \pm \ldots \pm \gamma k(x)$$

x	x_1 x_2 $\ldots x_n$
y	y_1 y_2 $\cdots y_n$

$$A = \begin{pmatrix} g(x_1) & h(x_1) & \ldots & \gamma k(x_1) \\ g(x_2) & h(x_2) & \ldots & \gamma k(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(x_n) & h(x_n) & \ldots & \gamma k(x_n) \end{pmatrix}$$

- Se c'è solo la costante senza funzione associata, la sua colonna corrispondente sarà composta solo da 1
- Matrice incognite: $A^T A$
- Matrice soluzioni: $A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
- Usiamo la matrice delle incognite per costruire il sistema (ad esempio α è associata alla prima colonna, β alla seconda e così via moltiplicando le incognite con i valori della colonna e sommandoli tra loro) e poniamo ogni riga uguale alla corrispondente riga della matrice soluzioni. Isolo le incognite e poi le sostituisco nella funzione di partenza.

2.3 Interpretazione geometrica

Disegnare il grafico con i punti e la funzione ricavata, evidenziando le distanze tra i punti dati e il grafico. In più si può scrivere: "la retta di regressione minimizza la somma degli scarti tra i valori di y dei punti ed i valori (equazione del grafico) dell* (nome funzione) calcolat* nelle ascisse x dei punti dati".

2.4 Esempio

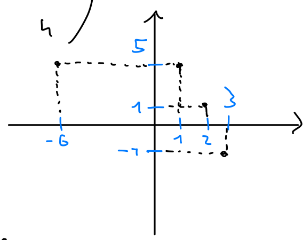
3. Data la funzione
$$g(x) = a\frac{6}{x} + b\,x + c$$
calcolare i coefficienti a, b e c per approssimare ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-6	1	2	3
y	5	5	1	-1

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 24 & 10 \\ 24 & 50 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



$$A^T b = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -26 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 50a + 24b + 10c = 26 \\ 24a + 50b = -26 \\ 10a + 4c = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \emptyset \end{cases} \qquad g(x) = \frac{6}{x} - x$$

Esercizio 4: Diagonalizzazione

1. Controllare se A è simmetrica, se lo è, allora è diagonalizzabile (altrimenti **potrebbe** esserlo)
2. Trovare gli autovalori risolvendo
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
e ordinarli in ordine decrescente
3. Verificare che la quantità di autovalori sia uguale all'ordine della matrice (es. una 2×2 ha ordine 2), altrimenti non è diagonalizzabile
4. Per ogni autovalore trovare gli autovettori usando la matrice $A - \lambda I$ (sostituendo a λ l'autovalore) e risolvendo il sistema
$$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
5. Normalizzare gli autovettori usando: $\frac{x_i}{\|v\|}$ dove v è l'autovettore e x_i è l'elemento i-esimo dell'autovettore, controllare se sono indipendenti tra di loro altrimenti non è diagonalizzabile
6. Creare la matrice V composta dagli autovettori, e la sua inversa
7. Creare la matrice D usando gli autovalori in ordine decrescente sulla diagonale. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$
8. Si otterrà la diagonalizzazione della matrice di partenza composta nel seguente modo:
$$A = VDV^{-1}$$

Esempio

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -4+\lambda^2 \qquad \lambda = \pm 2 \qquad \lambda = \{2,-2\}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -4x_2 = 0 \end{cases} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{x_1}{\|v_1\|} = 1 \qquad \frac{0}{\|v_1\|} = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2 \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4x_1 + x_2 = 0 \qquad x_2 = -4x_1 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 \end{pmatrix} \qquad \frac{x_1}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{17}}{17} \qquad \frac{-4x_1}{\|v_2\|} = \frac{-4\sqrt{17}}{17}$$

$$\rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{17} \\ -\frac{4\sqrt{17}}{17} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{17}}{17} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{17}}{17} \end{pmatrix} \qquad V^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{\sqrt{17}}{17} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4\sqrt{17}}{17} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{\sqrt{17}}{17} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{-4\sqrt{17}} \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{-4\sqrt{17}} \end{array}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 17/-4\sqrt{17} \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_1| \not> |\lambda_2| \quad \text{non converge}$$

2.4.1 Matrice Inversa

Si scrive la matrice come $(A|I)$ dove I è la matrice identità della stessa dimensione di A. Si esegue Gauss da entrambe le parti, poi si cerca di trasformare i pivot ottenuti in 1 (l'operazione algebrica per ottenerlo la si applica su tutta la riga), infine si esegue Gauss "dal basso verso l'alto". Si avrà quindi $(I|A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/\sqrt{2} & 2 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/\sqrt{2} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/\sqrt{2} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 \cdot \sqrt{6}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\sqrt{6}/\sqrt{2} & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/\sqrt{2} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + \frac{2}{\sqrt{2}} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\sqrt{6}/\sqrt{2} & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{array}\right)$$

2.5 Convergenza: Metodo delle potenze

Converge all'autovalore di massimo modulo

1. Si riordinano gli autovalori in base al massimo modulo, ottenendo $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dove λ_1 è l'autovalore di massimo modulo
2. Converge se $\lambda_1 > \lambda_2$
3. k il numero di volte in cui si esegue la moltiplicazione $v_i = A \cdot v_{i-1}$, $v_n = A \cdot v_{n-1} = A^2 \cdot v_{n-2} = \ldots = A^n \cdot v_0$
4. Si trova la velocità di convergenza con:
$$V = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k$$

2.6 Convergenza: Metodo delle potenze inverse

1. Dato uno shift p, bisogna trovare l'autovalore più vicino a $p(\lambda_1)$ ed il secondo più vicino a $p(\lambda_2)$
2. Si calcola (da $(A - pI)^{-1}$):
$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1 - p}$$
Per ogni λ
3. μ_1 sarà quello con $|\lambda_j - p|$ più piccolo, mentre μ_2 sarà il secondo di minimo modulo
4. La velocità di convergenza si calcola:
$$V = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k$$

Se si hanno due autovalori con lo stesso modulo massimo, allora non converge.

Per ogni coppia λ_1, λ_2 si esegue la disequazione:

$$|\lambda_1 - p| < |\lambda_2 - p|$$

e si isola la p e possiamo dire che la matrice converge a λ_1 per quella p.

PARTE 1

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$

$|2 - p| < |1 - p|$

$$\begin{cases} 2-p < 1-p \rightarrow 2-p \geq 0,\ 1-p \geq 0 \xrightarrow{\text{INTERSEZ}} \emptyset \\ 2-p < -(1-p) \rightarrow 2-p \geq 0,\ 1-p < 0 \longrightarrow p > 3/2 \wedge p \leq 2 \\ -(2-p) < 1-p \rightarrow 2-p < 0,\ 1-p \geq 0 \longrightarrow \emptyset \\ -(2-p) < -(1-p) \rightarrow 2-p < 0,\ 1-p < 0 \longrightarrow p \geq 2 \end{cases}$$

FACCIO UNIONE DI TUTTE LE INTERSEZIONI E OTTENGO $\Rightarrow p > 3/2$

CONVERGE A 2 CON

IDEM PER ALTRE COPPIE DI λ

3 Esercizio 5: Spline

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a, b] \\ g(x) & \text{se } x \in [b, c] \end{cases}$$

1. Controllare:
   - $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^+} g(x)$
   - $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \lim_{x\to b^+} g'(x)$
   - $\lim_{x\to b^-} f''(x) = \lim_{x\to b^+} g''(x)$
   - Fare lo stesso fino ad arrivare a $n-1$-esima derivata

   Se tutte le condizioni sono verificate, allora è una spline.
2. Calcolare i momenti: $S''(x_i)$, per tutti i nodi richiesti
3. Periodicità:
   - $S(a) = S(c)$

- $S'(a) = S'(c)$
- $S''(a) = S''(c)$
- Fare lo stesso fino ad arrivare a $n-1$-esima derivata

4. Interpolazione: controllare se $S(x_i) = h(x_i)$ per tutti i nodi richiesti, con $h(x)$ funzione interpolante
5. S è naturale se $S''(a) = S''(c) = 0$

Esempio

5. Si consideri la funzione

$$S(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ -2x^3 + 3x^2 & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che la funzione S è una spline sui nodi $-1, 0, 1$. È anche periodica?

(ii) Verificare che S è interpolante per la funzione $f(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ sui nodi $-1, 0, 1$.

$\lim_{x \to 0} 2x^3 + 3x^2 = 0$ $\quad$ $\lim_{x \to 0} -2x^3 + 3x^2 = 0$

$\lim_{x \to 0} 6x^2 + 6x = 0$ $\quad$ $\lim_{x \to 0} -6x^2 + 6x = 0$

$\lim_{x \to 0} 12x + 6 = 6$ $\quad$ $\lim_{x \to 0} -12x + 6 = 6$

$n = -1 \quad S''(-1) = -6$
$n = 1 \quad S''(1) = -6$
$n = 0 \quad S''(0) = 6$

Periodica

$S''(-1) = S''(1)$ ✓ $\quad S(-1) = S(1)$ ✓ $\quad S'(-1) = S'(1)$ ✓

$S(-1) = f(-1) \rightarrow 1 = 1$
$S(0) = f(0) \rightarrow 0 = 0$
$\rightarrow 0 = 0$
$S(1) = f(1) \rightarrow 1 = 1$

interpola $f(x)$ per i nodi $-1, 0, 1$

4 Esercizio 5: Condizionamento matrice e di una norma

1. Verificare se la matrice A è invertibile (ovvero $\det(A) \neq 0$)
2. Verificare se la matrice A^{-1} è l'inversa di A (ovvero $A^{-1}A = I$)
3. Calcolare le norme
4. Risolvere il sistema lineare dato dall'equazione $A\bar{x} = \delta b$ per trovare $\bar{x}$
5. Calcolare la maggiorazione dell'errore:

$$\varepsilon_x = \frac{\|\bar{x} - x\|_k}{\|x\|_k} \leq (\|A^{-1}\| \cdot \|A\|)\varepsilon_b, \quad \varepsilon_b = \frac{\|\delta b\|_{nm}}{\|b\|_{nm}}$$

4.1 Norme

4.1.1 Vettori

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

4.1.2 Matrici

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una colonna e prendo il massimo)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una riga e prendo il massimo)

Esempio

5. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 50 & -49 \end{pmatrix}$ e i vettori

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = A \cdot x$ e $\delta b = \begin{pmatrix} -10^{-2} \\ 10^{-2} \\ -10^{-2} \end{pmatrix}$.

(i) Verificare che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 1 \\ 0 & 50 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Calcolare i condizionamenti $\mu_1(A)$ e $\mu_\infty(A)$ relativi alle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ rispettivamente.

(iii) Calcolare le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ per ognuno dei vettori x, b e δb.

(iv) Calcolare una maggiorazione dell'errore $\|\tilde{x} - x\|_1$ per la soluzione del sistema lineare perturbato $A\tilde{x} = b + \delta b$.

1) $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 50 & -49 \end{pmatrix} = 99 \rightarrow \neq 0 \rightarrow$ OK

$A^{-1} A = i \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 1 \\ 0 & 50 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 50 & -49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -98 \\ 0 & 0 & -99 \end{pmatrix}$ FALSO $\rightarrow A^{-1} A \neq i$

2) $\mu_1(A) = 0 + (-1) + 50 = 49$ $\quad \mu_\infty(A) = 1$

3) $\|x\|_1 = |1| + |-1| + |-1| = 3$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

$b = A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \|b\|_1 = 4$ $\quad \|b\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ $\quad \|\delta b\|_1 = 30^{-2}$ $\quad \|\delta b\|_2 = \sqrt{30^{-4}}$

4) $A\tilde{x} = b + \delta b$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 50 & -49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 10^{-2} \\ 2 + 10^{-2} \\ -1 - 10^{-2} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x_1 = 1 - 10^{-2} = 1 - \frac{1}{10^2} = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100} \\ -x_2 - x_3 = 2 + 10^{-2} \\ 50x_2 - 49x_3 = -1 - 10^{-2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \tilde{x}_1 = \frac{99}{100} \\ \tilde{x}_2 = -\frac{199}{198} \\ \tilde{x}_3 = -\frac{9949}{9900} \end{cases}$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 99/100 \\ -199/198 \\ -9949/9900 \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{x} - x = \begin{pmatrix} -1/100 \\ -1/198 \\ -49/9900 \end{pmatrix}$ $\quad \|\tilde{x} - x\|_1 = \frac{1}{50}$ $\quad \varepsilon_x = \frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1} = \frac{1}{150}$

5 Esercizio 5: SVD

Una SVD viene utilizzata per trovare una diagonalizzazione di una matrice non simmetrica scritta nella forma

$$A = U \Sigma V^T$$

- U è una matrice ortogonale (ovvero $U^T U = I$ oppure $U U^T = I$)
- Σ è una matrice diagonale con i valori singolari sulla diagonale in ordine decrescente
- V è una matrice ortogonale (ovvero $V^T V = I$ oppure $V V^T = I$)

Esempio di sistema cubico

$$\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -4 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -15 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -20 & 0 & 3 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -15 & -4 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -15x_1 - 4x_7 = 0 \\ 10x_4 = -10 \\ -20x_1 - 3x_7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = -1 \\ x_7 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -15x_2 - 4x_8 = -15 \\ 10x_5 = 0 \\ -20x_2 - 3x_8 = -20 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_5 = 0 \\ x_7 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -15x_3 - 4x_9 = -4 \\ 10x_6 = 0 \\ -20x_3 + 3x_9 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_6 = 0 \\ x_9 = 1 \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to v_1 = \begin{cases} 1x_1 + 2x_4 + 3x_7 = 9 \\ 4x_1 + 5x_4 + 6x_7 = 6 \\ 7x_1 + 8x_4 + 9x_7 = 3 \end{cases} \quad \ldots$$

Uso le colonne delle incognite x e la soluzione associata è sempre nella colonna delle soluzioni

5.1 Proprietà

Data una matrice $A \in R^{m \times n}$
Immagine: trovare il valore singolare r-esimo, ovvero il più piccolo elemento strrettamente maggiore di 0. Per trovare l'immagine scriveremo tutti i vettori u da 1 a r:

$$R(A) = < u_1, u_2, \ldots, u_r >$$

Nucleo: indichiamo con v i vettori che lo compongono, partiranno da $r+1$ fino a n:

$$N(A) = < v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n >$$

Certi esercizi potrebbero chiedere di determinare i valori singolari delle matrici $A^T A$, AA^T, A^T: esistono proprietà specifiche per questi casi.

5.2 Pseudoinversa

Dimensione: $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \exists A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Esempio

5. a) Richiamare le proprietà che devono soddisfare le matrici U, Σ, V di una SVD.

b) Verificare le seguenti uguaglianze, e dire (giustificando la risposta) per quali di queste le matrici a primo membro verificano la definizione di SVD per la rispettiva matrice a secondo membro.

✗ i) $\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -4 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 3 \end{pmatrix}$ No perché U non ortogonale, oppure Σ sbagliata

✗ ii) $\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 20 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -15 \end{pmatrix}$ Σ decrescente

✓ iii) $\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -4 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 3 \end{pmatrix}$ $U^T U \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $V^T V \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

! ✓ iv) $\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & -8 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 6 \end{pmatrix}$ $U^T U = I$ $V^T V \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$