Esercizi Esame ALAN

1 Esercizio 1: Errori

1.1 Condizionamento

Calcolare il condizionamento usando l'algoritmo più semplice usando la formula:

$$C_f = \frac{x(f'(x))}{f(x)}$$

Poi calcolarne il limite:

- "Per piccoli valori di x" $\rightarrow \lim_{x\to 0} C_f$
- "Per piccoli valori positivi di x" $\rightarrow \lim_{x\to 0^+} C_f$
- "Per grandi valori di x" $\rightarrow \lim_{x\to +\infty} C_f$

Se il limite intorno a ± 1 è ben condizionato, altrimenti è mal condizionato.
Il risultato del limite serve per calcolare l'errore inerente:

$$Err.Inerente = C_f \cdot Err.Input$$

1.2 Errori negli algoritmi

Si disegna il grafo del primo algoritmo partendo da x e ogni nodo sarà composto da un'operazione elementare. Si assegna ad ogni nodo un nome(ε_x con x contenuto del nodo) ed a ogni arco la costante moltiplicativa dell'errore, tranne agli input e alle costanti. Per calcolare l'errore di ogni operazione si usano le seguenti formule:

$$\varepsilon_{a\pm b} = \frac{a}{a \pm b}\varepsilon_a \pm \frac{b}{a \pm b}\varepsilon_b$$

$$\varepsilon_{a\cdot b} = \varepsilon_b + \varepsilon_a$$

$$\varepsilon_{a/b} = \varepsilon_b - \varepsilon_a$$

$$\varepsilon_{g(x)} = C_{g(x)} \cdot \varepsilon_x$$

Si calcola l'errore algoritmico sommando tutti gli errori partendo dal nodo etichettato con quell'errore moltiplicando le costanti moltiplicative fino al nodo finale, in caso di più cammini vengono sommate le varie parti (ovvero le moltiplicazioni).
Per verificare che l'algoritmo sia stabile si calcola il limite che tende al valore dato nel testo (vedi 1.1) di ogni errore (ovvero quello dentro le parentesi); se il limite viene ∞ allora l'algoritmo è instabile (basta che ci sia una parte che tende a infinito per poter dire che l'algoritmo è instabile) se invece il risultato del limite è finito per tutti i casi, allora l'algoritmo è stabile (bisogna calcolare tutti i limiti per poterlo dire).
Prendo tutte le etichette nodo e ci metto tutti i possibili percorsi da quel nodo fino alla fine

$$\varepsilon\{(I \cdot II \cdot \ldots) + (\ldots) + \ldots\}$$

I "..." sono tutti i possibili percorsi.

Esempio

2 Esercizio 2: Rotazioni/Riflessioni

2.1 Rotazioni di Givens

Si indica una rotazione di Givens con:

$$G(i, j, \theta)$$

dove i rappresenta la posizione del perno all'interno della matrice, j la posizione dell'elemento da azerare e θ l'angolo di rotazione (che ignoreremo per l'esercizio). Ogni rotazione azzera un elemento (j) e cambia il valore del perno i (0 non può essere perno). Si calcola il valore di c e s ad ogni passaggio:

$$c = \cos(\theta) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

$$s = \sin(\theta) = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Si costruisce la matrice inserendo c e s:

- c in (i, i) e (j, j)
- s in (i, j), se $i > j$ allora in (j, i)
- $-s$ in (j, i), se $i > j$ allora in (i, j)

Esempio

NB: le posizioni partono da 1 e non da 0.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(i, j, \theta) \quad i = pos_\beta, j = \text{posizione da azzerare} \rightarrow G(2, 1, \theta)$$

$$s = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \frac{-x_1}{\sqrt{0 + x_1^2}} = -1$$

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \frac{0}{\sqrt{0 + x_1^2}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si esegue la moltiplicazione e, se necessario, si ripete il processo usando il nuovo vettore ottenuto dalla moltiplicazione fino a quando non si raggiunge lo stesso "layout" del vettore con β.

2.1.1 Interpretazione geometrica

Per ogni rotazione, scrivere su che piano è stata fatta, ad esempio con la rotazione $G(2, 1, \theta)$ si può dire: "si tratta di una rotazione nel piano $< e_2, e_1 >$". Visto che sono tutte isometrie:

$$\|\text{vettore iniziale}\| = \|\text{vettore finale}\|$$

Si può usare come prova.

2.2 Riflessioni di Householder

NB: abbiamo visto solo come ottenere una riflessione di Householder nel caso in cui α sia il primo elemento del vettore risultante.

1. Si calcola $\alpha = \|x\|_2$
2. Si calcola $u = x - \alpha_{e_1}$ (dove α_{e_1} è il vettore con al primo posto il valore di α e i restanti valori a 0)
3. Si calcola $u^T u$
4. Si calcola uu^T
5. Infine si calcola P:

$$P = I2ww^T = I - 2\frac{uu^T}{u^T u} = I - \frac{2}{u^T u} \cdot uu^T$$

2.2.1 Verifiche

- P è ortogonale: colonne perpendicolari, prodotto scalare = 0, colonne normalizzate ($\|\text{colonna}\|_2 = 1$)
- $P \cdot x = \alpha e_1$

2.2.2 Interpretazione geometrica

Si scrive: $P = (\dots)$ riflette $x = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$ rispetto al piano perpendicolare (al vettore w)

Esempio

Esercizio 3: Minimi quadrati

Dati i valori di x e y

1. Si disegna il grafico con i valori di x e y
2. Si costruisce la matrice A:
   - Se nel testo ci sono parametri (può anche essere semplicemente l'equazione della parabola) ogni colonna di A contiene tutti i valori usando le x, se c'è un parametro che non moltiplica si mette la colonna tutta a 1
   - Se non ci sono parametri (caso della retta) si mettono le x nella prima colonna e nella seconda colonna tutti 1
3. Si costruisce il vettore b con i valori di y
4. Si calcola A^TA e A^Tb
5. Si risolve il sistema:
   - Senza parametri (caso della retta): $A^TA \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^Tb$
   - Con parametri: $A^TA \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dots \end{pmatrix} = A^Tb$

Infine, scrivere la funzione risultante con i valori trovati.

2.3 Mia versione di come farlo

$$f(x) = \alpha g(x) \pm \beta h(x)$$

x	x_1 x_2 $\dots x_n$
y	y_1 y_2 $\dots y_n$

$$A = \begin{pmatrix} g(x_1) & h(x_1) \\ g(x_2) & h(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ g(x_n) & h(x_n) \end{pmatrix}$$

- Se ci sono le costanti α e β, allora $h(x)$ è sempre 1
- Matrice incognite: A^TA
- Matrice soluzioni: A^Tb
- Le metto a sistema, isolo α e β e sostituisco a $f(x)$

2.4 Interpretazione geometrica

Disegnare il grafico con i punti e la funzione ricavata, evidenziando le distanze tra i punti dati e il grafico. In più si può scrivere: "la retta di regressione minimizza la somma degli scarti tra i valori di y dei punti ed i valori (equazione del grafico) dell* (nome funzione) calcolat* nelle ascisse x dei punti dati".

2.5 Esempio

Esercizio 4: Diagonalizzazione

1. Controllare se A è simmetrica, se lo è, allora è diagonalizzabile
2. Trovare gli autovalori risolvendo
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
   e riordinarli per il massimo modulo (non strettamente necessario ?)
3. Verificare la cardinalità degli autovalori (uguale all'ordine della matrice)
4. Per ogni autovalore trovare gli autovettori usando la matrice $A - \lambda I$ (sostituendo a λ l'autovalore) e risolvendo il sistema
$$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Creare la matrice V composta dagli autovettori, e la sua inversa
6. Creare la matrice D usando gli autovalori nello stesso ordine degli autovettori. Si otterrà la diagonalizzazione della matrice di partenza composta nel seguente modo:

$$A = VDV^{-1}$$

2.6 Convergenza: Metodo delle potenze

Converge all'autovalore di massimo modulo

1. Si riordinano gli autovalori in base al massimo modulo, ottenendo $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dove λ_1 è l'autovalore di massimo modulo
2. Converge se $\lambda_1 > \lambda_2$
3. Si trova la velocità di convergenza con:

$$V = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k$$

2.7 Convergenza: Metodo delle potenze inverse

1. Dato uno shift p, bisogna trovare l'autovalore più vicino a $p(\lambda_1)$ ed il secondo più vicino a $p(\lambda_2)$
2. Si calcola

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1 - p}$$

   Per ogni λ
3. μ_1 sarà quello di massimo modulo tra tutti i μ calcolati, mentre μ_2 sarà il secondo di massimo modulo
4. La velocità di convergenza si calcola:

$$V = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k$$

Se si hanno due autovalori con lo stesso modulo massimo, allora non converge.

3 Esercizio 5: Spline

Si ha una spline se:

- S è composta da polinomi di grado $\leq n$, dove n è il grado della spline (ad esempio, una spline di grado 3 sarà composta da soli polinomi di grado ≤ 3)
- S è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x \to n^-} S(x) = \lim_{x \to n^+} S(x)$$

- S' è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x \to n^-} S'(x) = \lim_{x \to n^+} S'(x)$$

- S'' è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x \to n^-} S''(x) = \lim_{x \to n^+} S''(x)$$

3.1 Calcolo dei momenti

Dato un nodo K, si calcola $S''(K)$

3.2 Periodicità di una spline

Una spline è periodica se:

$$\lim_{x \to e_1^-} S(x) = \lim_{x \to e_2^+} S(x)$$

$$\lim_{x \to e_1^-} S'(x) = \lim_{x \to e_2^+} S'(x)$$

$$\lim_{x \to e_1^-} S''(x) = \lim_{x \to e_2^+} S''(x)$$

Dove e_1 e e_2 sono i due estremi (sinistro e destro rispettivamente) della spline.

4 Esercizio 5: Condizionamento matrice e di una norma

Per verificare se la matrice A^{-1} è l'inversa bisogna vedere se $\det(A) \neq 0$ e se $A^{-1}A = I$. Per calcolare il condizionamento relativo ad una norma, bisogna fare:

$$\|A\|_{nm}$$

$$\|A^{-1}\|_{nm}$$

dove nm indica la norma in questione. Poi $M(A) = \|A\|_{nm} \cdot \|A^{-1}\|_{nm}$ per calcolare la maggiorazione dell'errore:

$$\varepsilon_x = \frac{\|\bar{x} - x\|_{nm}}{\|x\|_{nm}}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\|\delta b\|_{nm}}{\|b\|_{nm}}$$

$$\varepsilon_x \leq u(A)\varepsilon_b$$

Quindi se l'esercizio chiede di calcolare una maggiorazione, basta calcolarsi $u(A)$ e ε_b

4.1 Norme

4.1.1 Vettori

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^T x}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

4.1.2 Matrici

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una colonna e prendo il massimo)

$$\|A\|_2$$

Esiste ma non calcolabile esplicitamente

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una riga e prendo il massimo)

5 Esercizio 5: SVD

Una SVD viene utilizzata per trovare una diagonalizzazione di una matrice non simmetrica scritta nella forma

$$A = U\Sigma V^T$$

- U è una matrice ortogonale (ovvero $U^T U = UU^T = I$)
- Σ è una matrice diagonale con i valori singolari sulla diagonale in ordine decrescente
- V è una matrice ortogonale (ovvero $V^T V = VV^T = I$)

5.1 Proprietà

Data una matrice $A \in R^{m \times n}$
Immagine: trovare il valore singolare r-esimo, ovvero il più piccolo elemento strrettamente maggiore di 0. Per trovare l'immagine scriveremo tutti i vettori u da 1 a r:

$$R(A) =< u_1, u_2, \ldots, u_r >$$

Nucleo: indichiamo con v i vettori che lo compongono, partiranno da $r+1$ fino a n:

$$N(A) =< v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n >$$

Certi esercizi potrebbero chiedere di determinare i valori singolari delle matrici $A^T A, AA^T, A^T$: esistono proprietà specifiche per questi casi.

5.2 Pseudoinversa

Dimensione: $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \exists A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$