

# Esercizi Esame ALAN

## 1 Esercizio 1: Errori

### 1.1 Condizionamento

Calcolare il condizionamento usando l'algoritmo più semplice usando la formula:

$$C_f = \frac{x(f'(x))}{f(x)}$$

Poi calcolarne il limite:

- "Per piccoli valori di  $x$ "  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} C_f$
- "Per piccoli valori positivi di  $x$ "  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} C_f$
- "Per grandi valori di  $x$ "  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} C_f$

Se il limite intorno a  $\pm 1$  è ben condizionato, altrimenti è mal condizionato.

Il risultato del limite serve per calcolare l'errore inerente:

$$Err.Inerente = C_f \cdot Err.Input$$

### 1.2 Errori negli algoritmi

Si disegnano i grafi degli algoritmi e l'etichetta degli archi è:

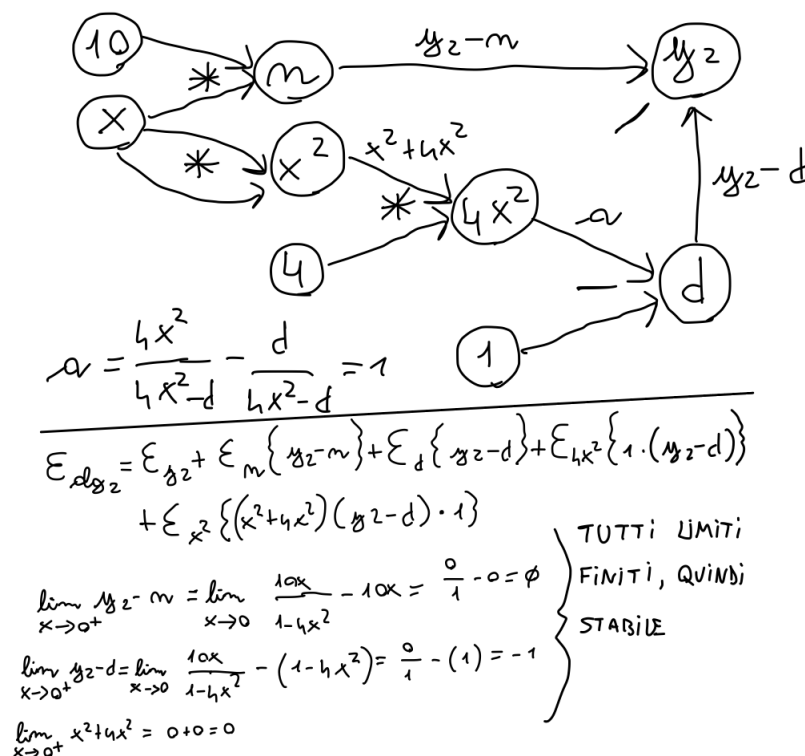
$a \pm b$	$\varepsilon_{a \pm b} = \frac{a}{a \pm b} \varepsilon_a \pm \frac{b}{a \pm b} \varepsilon_b$
$a \cdot b$	$\varepsilon_{a \cdot b} = \varepsilon_b + \varepsilon_a$
$\frac{a}{b}$	$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \varepsilon_b - \varepsilon_a$
$g(x)$	$\varepsilon_{g(x)} = C_{g(x)} \cdot \varepsilon_x$

Per ogni nodo (a partire dal fondo) si apre una parentesi e dentro si moltiplicano tutti gli archi a partire da quel nodo fino alla fine, se ci sono percorsi alternativi si fa la somma dei percorsi.

$$\varepsilon\{(I \cdot II \dots) + (\dots) + \dots\}$$

Per verificare la stabilità dell'algoritmo bisogna fare il limite tendente a  $0^+$  di tutti gli archi e se viene finito (per tutti gli archi) è stabile, altrimenti è instabile (ne basta uno per verificarlo).

### Esempio



## 2 Esercizio 2: Rotazioni/Riflessioni

### 2.1 Rotazioni di Givens

Si indica una rotazione di Givens con:

$$G(i, j, \theta)$$

dove  $i$  rappresenta la posizione del perno all'interno della matrice,  $j$  la posizione dell'elemento da azzerare e  $\theta$  l'angolo di rotazione (che ignoreremo per l'esercizio). Ogni rotazione azzerava un elemento ( $j$ ) e cambia il valore del perno  $i$  (0 non può essere perno). Si calcola il valore di  $c$  e  $s$  ad ogni passaggio:

$$c = \cos(\theta) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

$$s = \sin(\theta) = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Si costruisce la matrice quadrata (della stessa dimensione dei vettori) inserendo  $c$  e  $s$ :

- $c$  e  $-s$  nella riga  $i$
- $c$  e  $s$  nella riga  $j$

$c$  va nella diagonale,  $s$  e  $-s$  bisogna posizionarli nella colonna dove c'è l'altro  $c$ .

Si moltiplica la matrice per il vettore iniziale per ottenere il vettore finale/intermedio  $\gamma$ . Usiamo  $\gamma$  per fare un'altra rotazione fino a quando non è uguale al vettore finale.

#### Esempio

$$c = \cos \theta = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = 0$$

$$s = \sin \theta = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = -1$$

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{7} \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}, \theta\right)$$

ROTAZIONE NEL PIANO  $\langle e_2, e_3 \rangle$

$$c = \frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{7+9}} = \frac{-\sqrt{7}}{4}$$

$$s = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{7}}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{7}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VERIFICA

$$\|x\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \text{VALORE PERNO "FINALE"}$$

#### 2.1.1 Interpretazione geometrica

Per ogni rotazione, scrivere su che piano è stata fatta, ad esempio con la rotazione  $G(i, j, \theta)$  si può dire: "si tratta di una rotazione nel piano  $\langle e_i, e_j \rangle$ ". Visto che sono tutte isometrie:

$$\|\text{vettore iniziale}\| = \|\text{vettore finale}\|$$

Si può usare come prova.

### 2.2 Riflessioni di Householder

**NB:** abbiamo visto solo come ottenere una riflessione di Householder nel caso in cui  $\alpha$  sia il primo elemento del vettore risultante.

1. Si calcola  $\alpha = \|x\|_2$

2. Si calcola  $u = x - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Si calcola  $u^T \otimes u \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_2 \\ x_2 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_2 \end{pmatrix}$

4. Si crea la matrice (quadrata) identità  $I$  con dimensione del vettore  $x$

5. Si calcola  $P$ :

$$P = I - \frac{2}{\|u\|^2} \cdot uu^T$$

6. Infine si calcola  $Px$  trovando così il vettore risultante

### 2.2.1 Verifiche

- $P$  è ortogonale: colonne perpendicolari, prodotto scalare = 0, colonne normalizzate ( $\|colonna\|_2 = 1$ )
- $P \cdot x = \alpha e_1$

### 2.2.2 Interpretazione geometrica

Si scrive:  $P = (\dots)$  riflette  $x = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$  rispetto al piano perpendicolare (al vettore  $w$ )

### Esempio

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore  $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  nella forma  $\begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $\eta$  opportuno (esplicitare la matrice). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

$$\alpha = \|x\| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$u = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\|u\| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

$$uu^T = u \otimes u^T = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix}$$

$$P = I - 2 \frac{uu^T}{\|u\|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{80} \begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$Px = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9+16}{5} \\ \frac{-12+12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Esercizio 3: Minimi quadrati

$$f(x) = \alpha g(x) \pm \beta h(x) \pm \dots \pm \gamma k(x)$$

x	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
y	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

$$A = \begin{pmatrix} g(x_1) & h(x_1) & \dots & \gamma k(x_1) \\ g(x_2) & h(x_2) & \dots & \gamma k(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(x_n) & h(x_n) & \dots & \gamma k(x_n) \end{pmatrix}$$

- Se c'è solo la costante senza funzione associata, la sua colonna corrispondente sarà composta solo da 1
- Matrice incognite:  $A^T A$

• Matrice soluzioni:  $A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

- Usiamo la matrice delle incognite per costruire il sistema (ad esempio  $\alpha$  è associata alla prima colonna,  $\beta$  alla seconda e così via moltiplicando le incognite con i valori della colonna e sommandoli tra loro) e poniamo ogni riga uguale alla corrispondente riga della matrice soluzioni. Isolo le incognite e poi le sostituisco nella funzione di partenza.

## 2.3 Interpretazione geometrica

Disegnare il grafico con i punti e la funzione ricavata, evidenziando le distanze tra i punti dati e il grafico. In più si può scrivere: "la retta di regressione minimizza la somma degli scarti tra i valori di  $y$  dei punti ed i valori (equazione del grafico) dell\*" (nome funzione) calcolat\* nelle ascisse  $x$  dei punti dati".

## 2.4 Esempio

3. Data la funzione

$$g(x) = a \frac{6}{x} + b x + c$$

calcolare i coefficienti  $a$ ,  $b$  e  $c$  per approssimare ai minimi quadrati i seguenti dati:

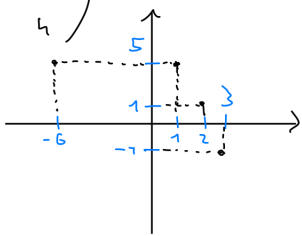
$$\begin{array}{c|cccc} x & -6 & 1 & 2 & 3 \\ y & 5 & 5 & 1 & -1 \end{array}$$

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 24 & 10 \\ 24 & 50 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -26 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 50a + 24b + 10c = 26 \\ 24a + 50b = -26 \\ 10a + 4c = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \quad g(x) = \frac{6}{x} - x$$


## Esercizio 4: Diagonalizzazione

1. Controllare se  $A$  è simmetrica, se lo è, allora è diagonalizzabile (altrimenti **potrebbe** esserlo)
2. Trovare gli autovalori risolvendo

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

e ordinarli in ordine decrescente

3. Verificare che la quantità di autovalori sia uguale all'ordine della matrice (es. una  $2 \times 2$  ha ordine 2), altrimenti non è diagonalizzabile
4. Per ogni autovalore trovare gli autovettori usando la matrice  $A - \lambda I$  (sostituendo a  $\lambda$  l'autovalore) e risolvendo il sistema

$$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Normalizzare gli autovettori usando:  $\frac{x_i}{\|v\|}$  dove  $v$  è l'autovettore e  $x_i$  è l'elemento  $i$ -esimo dell'autovettore, controllare se sono indipendenti tra di loro altrimenti non è diagonalizzabile
6. Creare la matrice  $V$  composta dagli autovettori, e la sua inversa

7. Creare la matrice  $D$  usando gli autovalori in ordine decrescente sulla diagonale.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

8. Si otterrà la diagonalizzazione della matrice di partenza composta nel seguente modo:

$$A = V D V^{-1}$$

## Esempio

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -4 + \lambda^2 \quad \lambda = \pm 2 \quad \lambda = \{2, -2\}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -4x_2 = 0 \end{cases} \quad v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{x_1}{\|v_1\|} = 1 \quad \frac{0}{\|v_1\|} = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2 \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4x_1 + x_2 = 0 \quad x_2 = -4x_1 \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 \end{pmatrix} \quad \frac{x_1}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{17}}{17} \quad \frac{-4x_1}{\|v_2\|} = \frac{-4\sqrt{17}}{17}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{17} \\ -\frac{4\sqrt{17}}{17} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{17}}{17} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{17}}{17} \end{pmatrix} \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{17}}{17} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{17}}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{17}}{17} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_1| \neq |\lambda_2| \quad \text{non converge}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{17}{4\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

### 2.4.1 Matrice Inversa

Si scrive la matrice come  $(A|I)$  dove  $I$  è la matrice identità della stessa dimensione di  $A$ . Si esegue Gauss da entrambe le parti, poi si cerca di trasformare i pivot ottenuti in 1 (l'operazione algebrica per ottenerlo la si applica su tutta la riga), infine si esegue Gauss "dal basso verso l'alto". Si avrà quindi  $(I|A^{-1})$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 \cdot \sqrt{6}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + \frac{2}{\sqrt{2}} R_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} R_3}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right)$$

## 2.5 Convergenza: Metodo delle potenze

Converge all'autovalore di massimo modulo

1. Si riordinano gli autovalori in base al massimo modulo, ottenendo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  dove  $\lambda_1$  è l'autovalore di massimo modulo
2. Converge se  $\lambda_1 > \lambda_2$
3.  $k$  il numero di volte in cui si esegue la moltiplicazione  $v_i = A \cdot v_{i-1}$ ,  $v_n = A \cdot v_{n-1} = A^2 \cdot v_{n-2} = \dots = A^n \cdot v_0$
4. Si trova la velocità di convergenza con:

$$V = \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k$$

## 2.6 Convergenza: Metodo delle potenze inverse

1. Dato uno shift  $p$ , bisogna trovare l'autovalore più vicino a  $p(\lambda_1)$  ed il secondo più vicino a  $p(\lambda_2)$
2. Si calcola (da  $(A - pI)^{-1}$ ):

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1 - p}$$

Per ogni  $\lambda$

3.  $\mu_1$  sarà quello con  $|\lambda_j - p|$  più piccolo, mentre  $\mu_2$  sarà il secondo di minimo modulo
4. La velocità di convergenza si calcola:

$$V = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^k$$

Se si hanno due autovalori con lo stesso modulo massimo, allora non converge.

---

Per ogni coppia  $\lambda_1, \lambda_2$  si esegue la disequazione:

$$|\lambda_1 - p| < |\lambda_2 - p|$$

e si isola la  $p$  e possiamo dire che la matrice converge a  $\lambda_1$  per quella  $p$ .

PARTE 1

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$$
$$|2 - p| < |1 - p|$$
$$\left\{ \begin{array}{l} 2 - p < 1 - p \rightarrow 2 - p \geq 0, 1 - p \geq 0 \xrightarrow{\text{INTERSEZ}} \emptyset \\ 2 - p < -(1 - p) \rightarrow 2 - p \geq 0, 1 - p < 0 \rightarrow p > 3/2 \wedge p \leq 2 \\ -(2 - p) < 1 - p \rightarrow 2 - p < 0, 1 - p \geq 0 \rightarrow \emptyset \\ -(2 - p) < -(1 - p) \rightarrow 2 - p < 0, 1 - p < 0 \rightarrow p \geq 2 \end{array} \right.$$

FACCIO UNIONE DI TUTTE LE INTERSEZIONI E OTTENGONO  $\Rightarrow p > 3/2$   
IDEM PER ALTRE COPPIE DI  $\lambda$  CONVERGE A 2 CON  $\uparrow$

## 3 Esercizio 5: Spline

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a, b] \\ g(x) & \text{se } x \in [b, c] \end{cases}$$

1. Controllare:

- $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g'(x)$
- $\lim_{x \rightarrow b^-} f''(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g''(x)$
- Fare lo stesso fino ad arrivare a  $n - 1$ -esima derivata

Se tutte le condizioni sono verificate, allora è una spline.

2. Calcolare i momenti:  $S''(x_i)$ , per tutti i nodi richiesti
3. Periodicità:

- $S(a) = S(c)$

- $S'(a) = S'(c)$
- $S''(a) = S''(c)$
- Fare lo stesso fino ad arrivare a  $n - 1$ -esima derivata

4. Interpolazione: controllare se  $S(x_i) = h(x_i)$  per tutti i nodi richiesti, con  $h(x)$  funzione interpolante
5.  $S$  è naturale se  $S''(a) = S''(c) = 0$

## Esempio

5. Si consideri la funzione

$$S(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ -2x^3 + 3x^2 & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

- (i) Dimostrare che la funzione  $S$  è una spline sui nodi  $-1, 0, 1$ . È anche periodica?
- (ii) Verificare che  $S$  è interpolante per la funzione  $f(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  sui nodi  $-1, 0, 1$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} 2x^3 + 3x^2 &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0} -2x^3 + 3x^2 &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 6x^2 + 6x &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0} -6x^2 + 6x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 12x + 6 &= 6 & \lim_{x \rightarrow 0} -12x + 6 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = -1 & \quad S''(-1) = -6 \\ n = 1 & \quad S''(1) = -6 \\ n = 0 & \quad S''(0) = 6 \end{aligned} \quad \text{Periodica}$$

$$S''(-1) = S''(1) \quad S(-1) = S(1) \quad S'(-1) = S'(1)$$

$$\left. \begin{aligned} S(-1) &= f(-1) \rightarrow 1 = 1 \\ S(0) &= f(0) \rightarrow 0 = 0 \\ S(1) &= f(1) \rightarrow 1 = 1 \end{aligned} \right\} \text{interpolante } S(x) \text{ per i nodi } -1, 0, 1$$

## 4 Esercizio 5: Condizionamento matrice e di una norma

1. Verificare se la matrice  $A$  è invertibile (ovvero  $\det(A) \neq 0$ )
2. Verificare se la matrice  $A^{-1}$  è l'inversa di  $A$  (ovvero  $A^{-1}A = I$ )
3. Calcolare le norme
4. Risolvere il sistema lineare dato dall'equazione  $A\bar{x} = \delta b$  per trovare  $\bar{x}$
5. Calcolare la maggiorazione dell'errore:

$$\varepsilon_x = \frac{\|\bar{x} - x\|_k}{\|x\|_k} \leq (\|A^{-1}\| \cdot \|A\|) \varepsilon_b, \quad \varepsilon_b = \frac{\|\delta b\|_{nm}}{\|b\|_{nm}}$$

### 4.1 Norme

#### 4.1.1 Vettori

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

## 4.1.2 Matrici

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una colonna e prendo il massimo)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una riga e prendo il massimo)

### Esempio

5. Si considerino la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 50 & -49 \end{pmatrix}$  e i vettori

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, b = A \cdot x \text{ e } \delta b = \begin{pmatrix} -10^{-2} \\ 10^{-2} \\ -10^{-2} \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 1 \\ 0 & 50 & 1 \end{pmatrix}$ .

(ii) Calcolare i condizionamenti  $\mu_1(A)$  e  $\mu_\infty(A)$  relativi alle norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  rispettivamente.

(iii) Calcolare le norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  per ognuno dei vettori  $x$ ,  $b$  e  $\delta b$ .

(iv) Calcolare una maggiorazione dell'errore  $\|\tilde{x} - x\|_1$  per la soluzione del sistema lineare perturbato  $A\tilde{x} = b + \delta b$ .

1)  $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 50 & -49 \end{pmatrix} = 99 \rightarrow \neq 0 \rightarrow OK$

$A^{-1}A = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 1 \\ 0 & 50 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 50 & -49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -98 \\ 0 & 0 & -99 \end{pmatrix} \text{ FALSO} \rightarrow A^{-1}A \neq I$

2)  $\mu_1(A) = 0 + (-1) + 50 = 49$   $\mu_\infty(A) = 1$

3)  $\|x\|_1 = |1| + |-1| + |-1| = 3$   $\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

$b = A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$   $\|b\|_1 = 4$   $\|b\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$   $\|\delta b\|_1 = 3 \cdot 10^{-2}$   $\|\delta b\|_2 = \sqrt{3 \cdot 10^{-4}}$

4)  $A\tilde{x} = b + \delta b$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 50 & -49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 10^{-2} \\ 2 + 10^{-2} \\ -1 - 10^{-2} \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 = 1 - 10^{-2} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100} \\ -x_2 - x_3 = 2 + 10^{-2} = 2 + \frac{1}{100} = \frac{200+1}{100} = \frac{201}{100} \\ 50x_2 - 49x_3 = -1 - 10^{-2} = -1 - \frac{1}{100} = -\frac{100+1}{100} = -\frac{101}{100} \end{cases}$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 99/100 \\ -199/100 \\ 99/100 \end{pmatrix}$   $\tilde{x} - x = \begin{pmatrix} -1/100 \\ -1/100 \\ -49/100 \end{pmatrix}$   $\|\tilde{x} - x\|_1 = \frac{1}{50}$   $\epsilon_x = \frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1} = \frac{1}{150}$

## 5 Esercizio 5: SVD

Una SVD viene utilizzata per trovare una diagonalizzazione di una matrice non simmetrica scritta nella forma

$$A = U\Sigma V^T$$

- $U$  è una matrice ortogonale (ovvero  $U^T U = I$  oppure  $U U^T = I$ )
- $\Sigma$  è una matrice diagonale con i valori singolari sulla diagonale in ordine decrescente
- $V$  è una matrice ortogonale (ovvero  $V^T V = I$  oppure  $V V^T = I$ )



## Esempio di sistema cubico

$$\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -4 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -20 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -4 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -15x_1 - 4x_7 = 0 \\ 10x_4 = -10 \\ -20x_1 - 3x_7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = -1 \\ x_7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -15x_2 - 4x_8 = -15 \\ 10x_5 = 0 \\ -20x_2 - 3x_8 = -20 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_5 = 0 \\ x_8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -15x_3 - 4x_9 = -4 \\ 10x_6 = 0 \\ -20x_3 + 3x_9 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_6 = 0 \\ x_9 = 1 \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{cases} 1x_1 + 2x_4 + 3x_7 = 9 \\ 4x_1 + 5x_4 + 6x_7 = 6 \\ 7x_1 + 8x_4 + 9x_7 = 3 \end{cases} \dots$$

Uso le colonne delle incognite  $x$  e la soluzione associata è sempre nella colonna delle soluzioni

## 5.1 Proprietà

Data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Immagine: trovare il valore singolare  $r$ -esimo, ovvero il più piccolo elemento strettamente maggiore di 0. Per trovare l'immagine scriveremo tutti i vettori  $u$  da 1 a  $r$ :

$$R(A) = \langle u_1, u_2, \dots, u_r \rangle$$

Nucleo: indichiamo con  $v$  i vettori che lo compongono, partiranno da  $r+1$  fino a  $n$ :

$$N(A) = \langle v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n \rangle$$

Certi esercizi potrebbero chiedere di determinare i valori singolari delle matrici  $A^T A$ ,  $AA^T$ ,  $A^T$ : esistono proprietà specifiche per questi casi.

## 5.2 Pseudoinversa

Dimensione:  $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \exists A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$

## Esempio

5. a) Richiamare le proprietà che devono soddisfare le matrici  $U, \Sigma, V$  di una SVD.

b) Verificare le seguenti uguaglianze, e dire (giustificando la risposta) per quali di queste le matrici a primo membro verificano la definizione di SVD per la rispettiva matrice a secondo membro.

$\times$  i)  $\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -4 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 3 \end{pmatrix}$  *No perché U non ortogonale, oppure Σ sbagliato?*

$\times$  ii)  $\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 20 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -15 \end{pmatrix}$  *Σ decrescente*

$\checkmark$  iii)  $\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -4 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 3 \end{pmatrix}$   $U^T U = I$   $\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $V^T V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\checkmark$  iv)  $\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & -8 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 6 \end{pmatrix}$   $U^T U = I$   $V^T V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

