

# Esercizi Esame ALAN

## 1 Esercizio 1: Errori

### 1.1 Condizionamento

Calcolare il condizionamento usando l'algoritmo più semplice usando la formula:

$$C_f = \frac{x(f'(x))}{f(x)}$$

Poi calcolarne il limite:

- "Per piccoli valori di  $x$ "  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} C_f$
- "Per piccoli valori positivi di  $x$ "  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} C_f$
- "Per grandi valori di  $x$ "  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} C_f$

Se il limite intorno a  $\pm 1$  è ben condizionato, altrimenti è mal condizionato.

Il risultato del limite serve per calcolare l'errore inerente:

$$Err.Inerente = C_f \cdot Err.Input$$

### 1.2 Errori negli algoritmi

Si disegnano i grafi degli algoritmi e l'etichetta degli archi è:

$a \pm b$	$\varepsilon_{a \pm b} = \frac{a}{a \pm b} \varepsilon_a \pm \frac{b}{a \pm b} \varepsilon_b$
$a \cdot b$	$\varepsilon_{a \cdot b} = \varepsilon_b + \varepsilon_a$
$\frac{a}{b}$	$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \varepsilon_b - \varepsilon_a$
$g(x)$	$\varepsilon_{g(x)} = C_{g(x)} \cdot \varepsilon_x$

Per ogni nodo (a partire dal fondo) si apre una parentesi e dentro si moltiplicano tutti gli archi a partire da quel nodo fino alla fine, se ci sono percorsi alternativi si fa la somma dei percorsi.

$$\varepsilon\{(I \cdot II \cdot \dots) + (\dots) + \dots\}$$

Per verificare la stabilità dell'algoritmo bisogna fare il limite tendente a  $0^+$  di tutti gli archi e se viene finito (per tutti gli archi) è stabile, altrimenti è instabile (ne basta uno per verificarlo).

### Esempio

## 2 Esercizio 2: Rotazioni/Riflessioni

### 2.1 Rotazioni di Givens

Si indica una rotazione di Givens con:

$$G(i, j, \theta)$$

dove  $i$  rappresenta la posizione del perno all'interno della matrice,  $j$  la posizione dell'elemento da azzerare e  $\theta$  l'angolo di rotazione (che ignoreremo per l'esercizio). Ogni rotazione azzerava un elemento ( $j$ ) e cambia il valore del perno  $i$  (0 non può essere perno). Si calcola il valore di  $c$  e  $s$  ad ogni passaggio:

$$c = \cos(\theta) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

$$s = \sin(\theta) = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Si costruisce la matrice quadrata (della stessa dimensione dei vettori) inserendo  $c$  e  $s$ :

- $c$  e  $-s$  è la riga  $i$
- $c$  e  $s$  è la riga  $j$

$c$  va nella diagonale,  $s$  e  $-s$  bisogna posizionarli nella colonna dove c'è l'altro  $c$ .

#### Esempio

**NB:** le posizioni partono da 1 e non da 0.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(i, j, \theta) \quad i = pos_\beta, j = \text{posizione da azzerare} \rightarrow G(2, 1, \theta)$$

$$s = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \frac{-x_1}{\sqrt{0 + x_1^2}} = -1$$

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \frac{0}{\sqrt{0 + x_1^2}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si esegue la moltiplicazione e, se necessario, si ripete il processo usando il nuovo vettore ottenuto dalla moltiplicazione fino a quando non si raggiunge lo stesso "layout" del vettore con  $\beta$ .

#### 2.1.1 Interpretazione geometrica

Per ogni rotazione, scrivere su che piano è stata fatta, ad esempio con la rotazione  $G(2, 1, \theta)$  si può dire: "si tratta di una rotazione nel piano  $\langle e_2, e_1 \rangle$ ". Visto che sono tutte isometrie:

$$\|\text{vettore iniziale}\| = \|\text{vettore finale}\|$$

Si può usare come prova.

### 2.2 Riflessioni di Householder

**NB:** abbiamo visto solo come ottenere una riflessione di Householder nel caso in cui  $\alpha$  sia il primo elemento del vettore risultante.

1. Si calcola  $\alpha = \|x\|_2$
2. Si calcola  $u = x - \alpha e_1$  (dove  $\alpha e_1$  è il vettore con al primo posto il valore di  $\alpha$  e i restanti valori a 0)
3. Si calcola  $u^T u$
4. Si calcola  $uu^T$
5. Infine si calcola  $P$ :

$$P = I - 2 \frac{uu^T}{u^T u} = I - \frac{2}{u^T u} \cdot uu^T$$

#### 2.2.1 Verifiche

- $P$  è ortogonale: colonne perpendicolari, prodotto scalare = 0, colonne normalizzate ( $\|colonna\|_2 = 1$ )
- $P \cdot x = \alpha e_1$

### 2.2.2 Interpretazione geometrica

Si scrive:  $P = (\dots)$  riflette  $x = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$  rispetto al piano perpendicolare (al vettore  $w$ )

### Esempio

## Esercizio 3: Minimi quadrati

Dati i valori di  $x$  e  $y$

1. Si disegna il grafico con i valori di  $x$  e  $y$
2. Si costruisce la matrice  $A$ :
  - Se nel testo ci sono parametri (può anche essere semplicemente l'equazione della parabola) ogni colonna di  $A$  contiene tutti i valori usando le  $x$ , se c'è un parametro che non moltiplica si mette la colonna tutta a 1
  - Se non ci sono parametri (caso della retta) si mettono le  $x$  nella prima colonna e nella seconda colonna tutti 1
3. Si costruisce il vettore  $b$  con i valori di  $y$
4. Si calcola  $A^T A$  e  $A^T b$
5. Si risolve il sistema:

- Senza parametri (caso della retta):  $A^T A \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^T b$

- Con parametri:  $A^T A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dots \end{pmatrix} = A^T b$

Infine, scrivere la funzione risultante con i valori trovati.

## 2.3 Mia versione di come farlo

$$f(x) = \alpha g(x) \pm \beta h(x)$$

x	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
y	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

$$A = \begin{pmatrix} g(x_1) & h(x_1) \\ g(x_2) & h(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ g(x_n) & h(x_n) \end{pmatrix}$$

- Se ci sono le costanti  $\alpha$  e  $\beta$ , allora  $h(x)$  è sempre 1
- Matrice incognite:  $A^T A$
- Matrice soluzioni:  $A^T b$
- Le metto a sistema, isolo  $\alpha$  e  $\beta$  e sostituisco a  $f(x)$

## 2.4 Interpretazione geometrica

Disegnare il grafico con i punti e la funzione ricavata, evidenziando le distanze tra i punti dati e il grafico. In più si può scrivere: "la retta di regressione minimizza la somma degli scarti tra i valori di  $y$  dei punti ed i valori (equazione del grafico) dell\* (nome funzione) calcolat\* nelle ascisse  $x$  dei punti dati".

## 2.5 Esempio

## Esercizio 4: Diagonalizzazione

1. Controllare se  $A$  è simmetrica, se lo è, allora è diagonalizzabile
2. Trovare gli autovalori risolvendo

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

e riordinarli per il massimo modulo (non strettamente necessario ?)

3. Verificare la cardinalità degli autovalori (uguale all'ordine della matrice)
4. Per ogni autovalore trovare gli autovettori usando la matrice  $A - \lambda I$  (sostituendo a  $\lambda$  l'autovalore) e risolvendo il sistema

$$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Creare la matrice  $V$  composta dagli autovettori, e la sua inversa
6. Creare la matrice  $D$  usando gli autovalori nello stesso ordine degli autovettori. Si otterrà la diagonalizzazione della matrice di partenza composta nel seguente modo:

$$A = VDV^{-1}$$

## 2.6 Convergenza: Metodo delle potenze

Converge all'autovalore di massimo modulo

1. Si riordinano gli autovalori in base al massimo modulo, ottenendo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  dove  $\lambda_1$  è l'autovalore di massimo modulo
2. Converge se  $\lambda_1 > \lambda_2$
3. Si trova la velocità di convergenza con:

$$V = \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k$$

## 2.7 Convergenza: Metodo delle potenze inverse

1. Dato uno shift  $p$ , bisogna trovare l'autovalore più vicino a  $p(\lambda_1)$  ed il secondo più vicino a  $p(\lambda_2)$
2. Si calcola

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1 - p}$$

Per ogni  $\lambda$

3.  $\mu_1$  sarà quello di massimo modulo tra tutti i  $\mu$  calcolati, mentre  $\mu_2$  sarà il secondo di massimo modulo
4. La velocità di convergenza si calcola:

$$V = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^k$$

Se si hanno due autovalori con lo stesso modulo massimo, allora non converge.

## 3 Esercizio 5: Spline

Si ha una spline se:

- $S$  è composta da polinomi di grado  $\leq n$ , dove  $n$  è il grado della spline (ad esempio, una spline di grado 3 sarà composta da soli polinomi di grado  $\leq 3$ )
- $S$  è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} S(x)$$

- $S'$  è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} S'(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} S'(x)$$

- $S''$  è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} S''(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} S''(x)$$

### 3.1 Calcolo dei momenti

Dato un nodo  $K$ , si calcola  $S''(K)$

### 3.2 Periodicità di una spline

Una spline è periodica se:

$$\lim_{x \rightarrow e_1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow e_2^+} S(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow e_1^-} S'(x) = \lim_{x \rightarrow e_2^+} S'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow e_1^-} S''(x) = \lim_{x \rightarrow e_2^+} S''(x)$$

Dove  $e_1$  e  $e_2$  sono i due estremi (sinistro e destro rispettivamente) della spline.

## 4 Esercizio 5: Condizionamento matrice e di una norma

Per verificare se la matrice  $A^{-1}$  è l'inversa bisogna vedere se  $\det(A) \neq 0$  e se  $A^{-1}A = I$ . Per calcolare il condizionamento relativo ad una norma, bisogna fare:

$$\frac{\|A\|_{nm}}{\|A^{-1}\|_{nm}}$$

dove  $nm$  indica la norma in questione. Poi  $M(A) = \|A\|_{nm} \cdot \|A^{-1}\|_{nm}$  per calcolare la maggiorazione dell'errore:

$$\varepsilon_x = \frac{\|\bar{x} - x\|_{nm}}{\|x\|_{nm}}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\|\delta b\|_{nm}}{\|b\|_{nm}}$$

$$\varepsilon_x \leq u(A)\varepsilon_b$$

Quindi se l'esercizio chiede di calcolare una maggiorazione, basta calcolarsi  $u(A)$  e  $\varepsilon_b$

### 4.1 Norme

#### 4.1.1 Vettori

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^T x}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

#### 4.1.2 Matrici

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una colonna e prendo il massimo)

$$\|A\|_2$$

Esiste ma non calcolabile esplicitamente

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una riga e prendo il massimo)

## 5 Esercizio 5: SVD

Una SVD viene utilizzata per trovare una diagonalizzazione di una matrice non simmetrica scritta nella forma

$$A = U \Sigma V^T$$

- $U$  è una matrice ortogonale (ovvero  $U^T U = U U^T = I$ )
- $\Sigma$  è una matrice diagonale con i valori singolari sulla diagonale in ordine decrescente
- $V$  è una matrice ortogonale (ovvero  $V^T V = V V^T = I$ )

### 5.1 Proprietà

Data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Immagine: trovare il valore singolare  $r$ -esimo, ovvero il più piccolo elemento strettamente maggiore di 0. Per trovare l'immagine scriveremo tutti i vettori  $u$  da 1 a  $r$ :

$$R(A) = \langle u_1, u_2, \dots, u_r \rangle$$

Nucleo: indichiamo con  $v$  i vettori che lo compongono, partiranno da  $r+1$  fino a  $n$ :

$$N(A) = \langle v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n \rangle$$

Certi esercizi potrebbero chiedere di determinare i valori singolari delle matrici  $A^T A, A A^T, A^T$ : esistono proprietà specifiche per questi casi.

### 5.2 Pseudoinversa

Dimensione:  $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \exists A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$