

Esercizio 1	Fare Gauss per il rango, creare il sistema (prendo le x in comune e le tratto come libere), isolo le x, sostituisco le x trovate nel vettore X, eseguo $X \cdot v = 0$ , isolo una x, sostituisco nuovamente e poi costruisco il vettore prendendo i coefficienti
Esercizio 2	Calcolare il det di una $2 \times 2$ a caso, se $\det \neq 0$ allora $rk(A) \geq 2$ possiamo orlarla, altrimenti ne cerco un'altra, calcoliamo il det di tutte le possibili $3 \times 3$ , le $\lambda$ in comune alle $3 \times 3$ sono quelle che $rk(A)=2$ , tutte le altre $rk(A)=3$ ;
Esercizio 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se <math>A</math> è una matrice nilpotente (ossia esiste un intero positivo <math>n</math> tale che <math>A^n = 0</math>) allora <math>\det A = 0 \rightarrow</math> Nilpotente non invertibile allora <math>\det A = 0</math></li> <li>Se <math>A</math> è una matrice simmetrica, allora <math>A^2</math> è simmetrica <math>\rightarrow M</math> simmetrica se <math>M = M^T</math> <math>\Rightarrow M^T \cdot M^T \Rightarrow M = M^T</math>, sostituisci <math>M</math> con <math>A^2</math></li> <li>Sia <math>A \in M_{3,2}(\mathbb{R})</math> di rango 2, allora il sistema lineare <math>AX = B</math> ammette soluzioni comunque si scelga la matrice <math>B</math> dei termini noti. <math>\rightarrow</math> Se si sceglie <math>B</math> t.c <math>rk(A B) = 3</math> allora il sistema è impossibile (non ammette soluzioni) per Rouché-Capelli (<math>\infty 2-3</math>)</li> <li><math>A^3 - A = I_2 \rightarrow A(A^2 - I) = I \Rightarrow (A^2 - I) = A^{-1}</math> quindi <math>AA^{-1} = I</math> (<math>A</math> è invertibile)</li> <li><math>A^3 - A = 0 \rightarrow A(A^2 - I) = 0 \Rightarrow A = 0, A^2 - I = 0 \Rightarrow A = 0, A^2 = I</math> quindi <math>A</math> è invertibile se <math>A^2 = I</math> altrimenti se <math>A = 0</math> non è invertibile</li> <li><math>A^3 - A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ 2 &amp; 3 \end{pmatrix} \rightarrow A(A^2 - I) = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ 2 &amp; 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ 2 &amp; 3 \end{pmatrix}, A^2 - I = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ 2 &amp; 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ 2 &amp; 3 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 2 &amp; 1 \\ 2 &amp; 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} &amp; 1 \\ \sqrt{2} &amp; 2 \end{pmatrix}</math> poi calcolo il determinante delle due <math>A</math> e uso il teorema di Binét: <math>\det \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ 2 &amp; 3 \end{pmatrix} = 1, \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} &amp; 1 \\ \sqrt{2} &amp; 2 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \neq 0</math>, quindi <math>A</math> è invertibile</li> <li><math>A</math> è invertibile, allora <math>\det(A) &gt; 0 \rightarrow</math> Falso, per Binét <math>A</math> è invertibile se <math>\det A \neq 0</math> (quindi può essere anche negativo).</li> <li>Se <math>A</math> è <math>B</math> sono invertibili, <math>AB</math> è invertibile <math>\rightarrow</math> Vero, <math>AB</math> è invertibile se <math>\det(AB) \neq 0</math> e per Binét <math>\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0</math></li> <li>Se <math>A^{13} = B</math> e <math>B</math> è invertibile, allora <math>A</math> è invertibile <math>\rightarrow</math> Vero, <math>\det(A^{13}) = \det(B) \Rightarrow \det(A)^{13} = \det(B)</math> sappiamo che <math>\det(B) \neq 0</math> quindi <math>\det(A) \neq 0</math> e quindi <math>A</math> è invertibile</li> <li>I vettori colonna di <math>A \in M_n(\mathbb{R})</math> generano <math>\mathbb{R}^n \rightarrow A</math> è invertibile perchè visto che i vettori sono base di <math>\mathbb{R}^n</math> allora la matrice ha rango <math>n</math> (massimo) e quindi è invertibile</li> <li>Se <math>A \in M_{3,4}(\mathbb{R})</math> ha due minori distinti di ordine 3 con determinante nullo, <math>rk(A) &lt; 3 \rightarrow</math> vero, sappiamo che esistono solo due sottomatrici <math>3 \times 3</math> quindi se entrambe hanno determinante nullo allora <math>rk(A) &lt; 3</math></li> <li>Tre vettori qualsiasi di <math>\mathbb{R}^2</math> sono linearmente dipendenti <math>\rightarrow</math> Usiamo la regola per essere base di <math>\mathbb{R}^N</math> che dice che sono linearmente indipendenti se il rango della matrice composta dai vettori è <math>N</math>, quindi basta trovare un vettore per cui il rango non è 2 per avere i vettori linearmente dipendenti</li> </ul>
Esercizio 4	<ul style="list-style-type: none"> <li>I vettori <math>v_1, \dots, v_n</math> sono base di <math>\mathbb{R}^N</math> se <math>rk(M) = N</math> con <math>M = (v_1 \dots v_n)</math> (M matrice composta dai vettori)</li> <li>Base ortogonale di v, w: <math>\begin{pmatrix} \det(R_2 R_3) \\ -\det(R_1 R_3) \\ \det(R_1 R_2) \end{pmatrix}, R_i</math> sono le righe dei vettori</li> <li>Dipendenza lineare: <math>\alpha v_1 + \beta v_2 = 0</math> oppure la matrice composta dai vettori non ha rango <math>N</math></li> <li>Indipendenza lineare: <math>\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \rightarrow \alpha = \beta = 0</math> oppure la matrice composta dai vettori ha rango <math>N</math></li> <li><math>v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}</math> è multiplo scalare di <math>v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}</math> se <math>\frac{x_3}{x_1} = \frac{y_3}{y_1} = \frac{z_3}{z_1} = \alpha</math></li> <li>Per "generare" <math>\mathbb{R}^N</math> i vettori combinati linearmente fanno ottenere qualsiasi vettore in <math>\mathbb{R}^N</math>. Gli <math>N</math> vettori in questione devono essere linearmente indipendenti.</li> <li><math>v_2 \notin \langle v_1 \rangle</math> significa che <math>v_2</math> non appartiene allo spazio generato da <math>v_1</math> e quindi <math>v_2</math> non deve essere multiplo scalare di <math>v_1</math></li> <li>Due vettori <math>v_1</math> e <math>v_2</math> sono ortogonali tra loro quando il loro prodotto scalare e' 0, ovvero <math>v_1 \cdot v_2 = v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y} + v_{1z} \cdot v_{2z} = 0</math></li> <li>Norma vettore <math>\ v\  = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}</math>, per "allungare" un vettore a una lunghezza L si usa la formula <math>v' = L \cdot \frac{1}{\ v\ } \cdot v</math></li> <li>Gauss: <math>R_i = R_i + \left( \frac{-a_{ij}}{a_{jj}} \right) \cdot R_j</math></li> <li>Rouché-Capelli: <math>\infty \#incognite - rk(A)</math></li> <li>A invertibile se <math>\det A \neq 0, \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}</math></li> <li>A non invertibile se <math>A^N = 0</math></li> <li>Il prodotto di due matrici diagonali è diagonale, una matrice diagonale non è per forza invertibile (potrebbe avere degli zeri nella diagonale) e ogni matrice diagonale è simmetrica</li> <li>Teorema di Binét: <math>\det(AB) = \det A \cdot \det B</math></li> <li>Calcolo matrice inversa: scriviamo <math>(M I)</math>, eseguiamo Gauss (da entrambe le parti), gli elementi sopra il pivot li poniamo tutti a 0 (sempre alla Gauss dal basso verso l'alto), otteniamo <math>(I M^{-1})</math></li> <li><math>\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2</math></li> </ul>

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{225} = 15$	
$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{400} = 20$
$\sqrt{441} = 21$	$\sqrt{484} = 22$	$\sqrt{529} = 23$	$\sqrt{576} = 24$	$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{676} = 26$	$\sqrt{729} = 27$	$\sqrt{784} = 28$	$\sqrt{841} = 29$	$\sqrt{900} = 30$

Qui ci andranno gli esercizi già fatti