a) GAUSS $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Rk = 2$

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \to \dots \to \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 2x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

VET. X — VETTORE $A \to AX = \emptyset$

$\begin{pmatrix} -x_2+2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2x_2+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_2 + 2x_3 - x_3$

$-x_2 + 2x_3 - x_3 = 0 \quad -x_2 = -x_3 \quad x_2 = x_3$

$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3\lambda & \lambda-1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix} 1 & -3\lambda \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 6\lambda = 6\lambda$

se $\lambda = 0$ $\det\begin{pmatrix} 1 & -3\lambda \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$rk(A) \geq 2 \ \forall \lambda \neq \emptyset$

$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -3\lambda & \lambda-1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -3\lambda \\ 2 & 0 \end{matrix} = 9\lambda^2 + \lambda - 10$

$\Delta = b^2 - 4ac = 361 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{10}{9} \end{cases}$

$rk(A) = 3 \ \forall \lambda \neq \{-\frac{10}{9}, 1\}$

$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -3\lambda & 2 \\ 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -3\lambda \\ 2 & 0 \end{matrix} = 3\lambda(\lambda-1) - 8(\lambda-1) \to (3\lambda^2-8)(\lambda-1) = 0 \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \quad \lambda = 1 \\ 3\lambda^2 - 8 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 96$

$\lambda_{1,2} = \frac{\pm 2\sqrt{6}}{3}$ $rk(A) = 3 \ \forall \lambda \neq \{1, \frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\}$

IN COMUNE TRA LE 3X3 C'È $\lambda \neq 1$, $Rk(A) = 2$ SE $\lambda = 1$, $Rk(A) = 3$ SE $\lambda \neq 1$

b) $Ax = B \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$

• $\lambda = 0 \quad \infty^{4-3} = \infty^1$ soluz. • $\lambda = -\frac{10}{9} \quad \infty^{4-3} = \infty^1$ soluz.

• $\lambda = 1 \quad Rk(A) = Rk(A|B) \ != \ \to$ NO SOLUZ.

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & | & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix} \to$ impossibile

b) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti, ma v_3 non è multiplo scalare di v_1 né di v_2.

$\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 = 0 \to$ lin. dipendenti

scelgo $\lambda = 1$ per comodità

$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad v_3 = -v_1 - v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_1 \quad v_2$

$\frac{x_3}{x_1} = \frac{-2}{1} \neq \frac{y_3}{y_1} = \frac{-3}{1} \neq \frac{z_3}{z_1} = \frac{-1}{1}$

idem per v_2

b) $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tale che $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ tali che $v_3 \perp v_4$ e $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle = \mathbb{R}^3$.

b) $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to$ NON MULTIPLO DI v_1 E v_2 IN QUESTO CASO $\langle v_1, v_2 \rangle$ LIN. IND. (NEL NOSTRO CASO) $\hookrightarrow = \mathbb{R}^2$ QUINDI $\langle v_1, v_3 \rangle$ E $\langle v_2, v_3 \rangle$ LINEARM. INDIP.

c) $v_3 \cdot v_4 = \emptyset \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\hookrightarrow$ DAL PUNTO b

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $y_1 + y_2 + y_3 = 0 \quad y_1 = -y_2 - y_3$ $\nearrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_4$

a) Dire quanti sono i sottoinsiemi $A \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ tali che i vettori v_i con $i \in A$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

b) Esiste un sottoinsieme $A \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ tali che i vettori v_i con $i \in A$ formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$?

a) v_1 E v_4 SONO MULTIPLI TRA LORO $\to$ NON POSSONO STARE INSIEME $\Rightarrow$ IN TUTTI GLI ALTRI CASI VANNO BENE

$v_3 = v_1 + v_2 \to v_1, v_2, v_3$ NON SONO LIN. IND.

b) PER ESSERE BASE DEVONO ESSERE LIN. IND. ED ESSERE ORTOGONALI (PRENDIAMO SOLO QUELLI DEL PUNTO a)

Esercizio 1	Fare Gauss per il rango, creare il sistema (prendo le x in comune e le tratto come libere), isolo le x, sostituisco le x trovate nel vettore X, eseguo $X \cdot v = 0$, isolo una x, sostituisco nuovamente e poi costruisco il vettore prendendo i coefficienti
Esercizio 2	Calcolare il det di una 2×2 a caso, se det $\neq 0$ allora $rk(A) \geq 2$ possiamo orlarla, altrimenti ne cerco un'altra, calcoliamo il det di tutte le possibili 3×3, le λ in comune alle 3×3 sono quelle che rk(A)=2, tutte le altre rk(A)=3;
Esercizio 3	• Se A è una matrice nilpotente (ossia esiste un intero positivo n tale che $A^n = 0$) allora $\det A = 0 \to$ Nilpotente non invertibile allora $\det A = 0$ • Se A è una matrice simmetrica, allora A^2 è simmetrica $\to M$ simmetrica se $M = M^T \Rightarrow M^T \cdot M^T = (M \cdot M)^T \Rightarrow M = M^T$, sostituisci M con A^2 • Sia $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ di rango 2, allora il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni comunque si scelga la matrice B dei termini noti. $\to$ Se si sceglie B t.c $rk(A\|B) = 3$ allora il sistema è impossibile (non ammette soluzioni) per Rouché-Capelli (∞^{2-3}) • $A^3 - A = I_2 \to A(A^2 - I) = I \Rightarrow (A^2 - I) = A^{-1}$ quindi $AA^{-1} = I$ (A è invertibile) • $A^3 - A = 0 \to A(A^2 - I) = 0 \Rightarrow A = 0, A^2 - I = 0 \Rightarrow A = 0, A^2 = I$ quindi A è invertibile se $A^2 = I$ altrimenti se $A = 0$ non è invertibile • $A^3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to A(A^2 - I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ poi calcolo il determinante delle due A e uso il teorema di Binét: $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1, \det\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \neq 0$, quindi A è invertibile • A è invertibile, allora $\det(A) > 0 \to$ Falso, per Binét A è invertibile se $\det A \neq 0$ (quindi può essere anche negativo). • Se A è B sono invertibili, AB è invertibile $\to$ Vero, AB è invertibile se $\det(AB) \neq 0$ e per Binét $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$ • Se $A^{13} = B$ e B è invertibile, allora A è invertibile $\to$ Vero, $\det(A^{13}) = \det(B) \Rightarrow \det(A)^{13} = \det(B)$ sappiamo che $\det(B) \neq 0$ quindi $\det(A) \neq 0$ e quindi A è invertibile • I vettori colonna di $A \in M_n(\mathbb{R})$ generano $\mathbb{R}^n \to A$ è invertibile perchè visto che i vettori sono base di $\mathbb{R}^n$ allora la matrice ha rango n(massimo) e quindi è invertibile • Se $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ ha due minori distinti di ordine 3 con determinante nullo, $rk(A) < 3 \to$ vero, sappiamo che esistono solo due sottomatrici 3×3 quindi se entrambe hanno determinante nullo allora $rk(A) < 3$ • Tre vettori qualsiasi di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti $\to$ Usiamo la regola per essere base di R^N che dice che sono linearmente indipendenti se il rango della matrice composta dai vettori è N, quindi basta trovare un vettore per cui il rango non è 2 per avere i vettori linearmente dipendenti
Esercizio 4	• I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono base di R^N se $rk(M) = N$ con $M = (v_1 \dots v_n)$ (M matrice composta dai vettori) • Base ortogonale di v, w: $\begin{pmatrix} \det(R_2 R_3) \\ -\det(R_1 R_3) \\ \det(R_1 R_2) \end{pmatrix}$, R_i sono le righe dei vettori. v, w devono essere ortogonali • Dipendenza lineare: $\alpha v_1 + \beta v_2 + \dots + k v_n = 0$ oppure la matrice composta dai vettori non ha rango N • Indipendenza lineare: $\alpha v_1 + \beta v_2 + \dots + k v_n = 0 \to \alpha = \beta = 0$ oppure la matrice composta dai vettori ha rango N • $v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ è multiplo scalare di $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ se $\frac{x_3}{x_1} = \frac{y_3}{y_1} = \frac{z_3}{z_1} = \alpha$ • Per "generare" R^N i vettori combinati linearmente fanno ottenere qualsiasi vettore in R^N. Gli N vettori in questione devono essere linearmente indipendenti. • $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$ significa che v_2 non appartiene allo spazio generato da v_1 e quindi v_2 non deve essere multiplo scalare di v_1 • Due vettori v_1 e v_2 sono ortogonali ($v_1 \perp v_2$) tra loro quando il loro prodotto scalare e' 0 • Norma vettore $\|\|v\|\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, per "allungare" un vettore a una lunghezza L si usa la formula $v' = L \cdot \frac{1}{\|\|v\|\|} \cdot v$
	• Gauss: $R_i = R_i + \left(\frac{-a_{ij}}{a_{jj}}\right) \cdot R_j$ • Rouché-Capelli: $\infty^{\#incognite - rk(A)}$ • A invertibile se $\det A \neq 0$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ • A non invertibile se $A^N = 0$ • Il prodotto di due matrici diagonali è diagonale, una matrice diagonale non è per forza invertibile (potrebbe avere degli zeri nella diagonale) e ogni matrice diagonale è simmetrica • Teorema di Binét: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ • Calcolo matrice inversa: scriviamo $(M\|I)$, eseguiamo Gauss (da entrambe le parti), gli elementi sopra il pivot li poniamo tutti a 0 (sempre alla Gauss dal basso verso l'alto), otteniamo $(I\|M^{-1})$ • Prodotto scalare: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ • $AX = B$ ammette soluzioni se $rk(A\|B) = rk(A)$

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{225} = 15$
$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{400} = 20$
$\sqrt{441} = 21$	$\sqrt{484} = 22$	$\sqrt{529} = 23$	$\sqrt{576} = 24$	$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{676} = 26$	$\sqrt{729} = 27$	$\sqrt{784} = 28$	$\sqrt{841} = 29$	$\sqrt{900} = 30$