Laboratorio Errori

Samuele Barrago [5703117], Daniele Sacco [5616921], Lorenzo Livio Vaccarecci [5462843]

1 Primo esercizio

In questo esercizio vogliamo calcolare tramite la matricola del primo componente in ordine alfabetico, due semplici operazioni aritmetiche: $a + (b + c)$ e $(a + b) + c$ utilizzando variabili di tipo double.

1.1 Calcolo di a, b, c

Usando la matricola 5703117, indichiamo con d_0 l'ultima cifra della matricola e con d_1 la penultima.

$$\begin{aligned} a &= (d_0 + 1) \cdot 10^i \text{ con } i = 0, 1, \ldots, 6 \\ b &= (d_1 + 1) \cdot 10^{20} \\ c &= -b \end{aligned}$$

1.2 Analisi dei risultati

a	**b**	**c**	**(a+b)+c**	**a+(b+c)**
$6 \cdot 10^0$	$8 \cdot 10^{20}$	$-8 \cdot 10^{20}$	0	6
$6 \cdot 10^1$	$8 \cdot 10^{20}$	$-8 \cdot 10^{20}$	0	60
$6 \cdot 10^2$	$8 \cdot 10^{20}$	$-8 \cdot 10^{20}$	0	600
$6 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^{20}$	$-8 \cdot 10^{20}$	0	6000
$6 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^{20}$	$-8 \cdot 10^{20}$	0	60000
$6 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^{20}$	$-8 \cdot 10^{20}$	655360	600000
$6 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^{20}$	$-8 \cdot 10^{20}$	$6.03 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^6$

Discutiamo da subito i risultati dell'operazione $a + (b + c)$ che sono quelli che ci si aspetta in quanto la prima operazione che viene fatta è la somma tra opposti di conseguenza avremo $a + 0$.
Quello che è interessante è il risultato dell'operazione $(a + b) + c$ che è sempre 0 tranne per gli ultimi due casi. Normalmente ci si aspetterebbe che il risultato fosse uguale ad a in quanto la prima operazione che viene fatta è la somma tra a e b e poi si sottrae c che è l'opposto di b, però questo è ovvio per il calcolo "umano". In realtà, i risultati sono così perchè il calcolatore esegue degli errori di arrotondamento in quanto le operazioni effettuate sono tra valori molto grandi e molto piccoli quindi, ad esempio, per $i = 0$ il calcolatore è come se eseguisse semplicemente $b + c$.

$$u = \frac{1}{2} \cdot \left(B^{-t+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2^{-51}\right) \simeq 2.22044605 \cdot 10^{-16}$$

Questa è l'errore costant che ad ogni calcolo ci si attende.

2 Secondo esercizio

Consideriamo come valore "corretto" il valore restituito dalla funzione `exp()` della libreria standard di C++.

- Errore assoluto: $|Taylor - exp|$
- Errore relativo: $\left|\frac{Taylor-exp}{exp}\right|$

Alg	x	N	**Taylor**	**exp()**	**Errore assoluto**	**Errore relativo**
1	0.5	3	1.64583	1.64872	0.00289	0.00175
1	0.5	10	1.64872	1.64872	0	0
1	0.5	50	1.64872	1.64872	0	0
1	0.5	100	1.64872	1.64872	0	0
1	0.5	150	1.64872	1.64872	0	0
1	30	3	4981	$1.06865 \cdot 10^{13}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	0.99999
1	30	10	$2.3883 \cdot 10^{8}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	$1.06863 \cdot 10^{13}$	0.99998
1	30	50	$1.06833 \cdot 10^{13}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	$3.2 \cdot 10^{9}$	$2.99443 \cdot 10^{-4}$
1	30	100	$1.06865 \cdot 10^{13}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	0	0
1	30	150	$1.06865 \cdot 10^{13}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	0	0
1	-0.5	3	0.604167	0.606531	0.00236	0.00390
1	-0.5	10	0.606531	0.606531	0	0
1	-0.5	50	0.606531	0.606531	0	0
1	-0.5	100	0.606531	0.606531	0	0
1	-0.5	150	0.606531	0.606531	0	0
1	-30	3	-4079	$9.35762 \cdot 10^{-14}$	4079	$4.35901 \cdot 10^{16}$
1	-30	10	$1.21255 \cdot 10^{8}$	$9.35762 \cdot 10^{-14}$	121255000	$1.29579 \cdot 10^{21}$
1	-30	50	$8.78229 \cdot 10^{8}$	$9.35762 \cdot 10^{-14}$	878229000	$9.38517 \cdot 10^{21}$
1	-30	100	$-3.42134 \cdot 10^{-5}$	$9.35762 \cdot 10^{-14}$	$3.42134 \cdot 10^{-5}$	365620746.4
1	-30	150	$-3.42134 \cdot 10^{-5}$	$9.35762 \cdot 10^{-14}$	$3.42134 \cdot 10^{-5}$	365620746.4
2	-0.5	3	0.607595	1.64872	1.04113	0.63147
2	-0.5	10	0.606531	1.64872	1.04219	0.63212
2	-0.5	50	0.606531	1.64872	1.04219	0.63212
2	-0.5	100	0.606531	1.64872	1.04219	0.63212
2	-0.5	150	0.606531	1.64872	1.04219	0.63212
2	-30	3	0.000201	$1.06865 \cdot 10^{13}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	1
2	-30	10	$1.31395 \cdot 10^{-8}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	1
2	-30	50	$9.36248 \cdot 10^{-14}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	1
2	-30	100	$9.35762 \cdot 10^{-14}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	1
2	-30	150	$9.35762 \cdot 10^{-14}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	$1.06865 \cdot 10^{13}$	1

3 Terzo esercizio

Il più grande numero intero positivo d tale che

$$1 + 2^{-d} > 1$$

è:

- Doppia precisione: $d = 53$
- Singola precisione: $d = 24$