a) GAUSS $\begin{pmatrix}1&-3&0&2\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ RK = 2

b) $\begin{cases}x_1-3x_2+2x_4=0\\2x_2+x_3-x_4=0\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases} \to \dots \to \begin{cases}x_1=-x_2+2x_3\\x_4=2x_2+x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}$

VET. X

VETTORE A → AX=∅

$\begin{pmatrix}-x_2+2x_3\\x_2\\x_3\\2x_2+x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=-x_2+2x_3-x_3$

$-x_2+2x_3-x_3=0 \quad -x_2=-x_3 \quad x_2=x_3$

$\begin{pmatrix}x_3\\x_3\\x_3\\3x_3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$

a) $A=\begin{pmatrix}1-\lambda&2&1&-1\\1&-3\lambda&\lambda-1&2\\2&0&3&\lambda\end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix}1&-3\lambda\\2&0\end{pmatrix}=0+6\lambda=6\lambda$

SE $\lambda=0$ $\det\begin{pmatrix}1&-3\lambda\\2&0\end{pmatrix}=0$

$rk(A)\geq 2 \ \forall\lambda\neq\emptyset$

$\det\begin{pmatrix}1-\lambda&2&1\\1&-3\lambda&\lambda-1\\2&0&3\end{pmatrix}\begin{matrix}1-\lambda&2\\1&-3\lambda\\2&0\end{matrix}=9\lambda^2+\lambda-10$

$\Delta=b^2-4ac=361 \quad \lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\begin{cases}1\\-\frac{10}{9}\end{cases}$

$rk(A)=3\ \forall\lambda\neq\{-\frac{10}{9},1\}$

$\det\begin{pmatrix}1-\lambda&2&-1\\1&-3\lambda&2\\2&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}1-\lambda&2\\1&-3\lambda\\2&0\end{matrix}=3\lambda^2(\lambda-1)-8(\lambda-1)\to(3\lambda^2-8)(\lambda-1)=0\begin{cases}\lambda-1=0 \quad \lambda=1\\3\lambda^2-8=0\end{cases}$

$\Delta=96$

$\lambda_{1,2}=\frac{\pm2\sqrt6}{3}$ $rk(A)=3\ \forall\lambda\neq\{1,-\frac{2\sqrt6}{3},\frac{2\sqrt6}{3}\}$

IN COMUNE TRA LE 3X3 C'È $\lambda\neq1$, $Rk(A)=2$ SE $\lambda=1$, $Rk(A)=3$ SE $\lambda\neq1$

b) $Ax=B$ $\quad B=\begin{pmatrix}1\\0\\\lambda\end{pmatrix}$

- $\lambda=0$ $\quad \infty^{4-3}=\infty^1$ SOLUZ.
- $\lambda=-\frac{10}{9}$ $\quad \infty^{4-3}=\infty^1$ SOLUZ.
- $\lambda=1$ $\quad Rk(A)=Rk(A|B)$!= → NO SOLUZ.

$\left(\begin{matrix}0&2&1&-1\\1&-3&0&2\\2&0&3&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}\right)\xrightarrow{\text{GAUSS}}\left(\begin{matrix}1&-3&0&2\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\1\\-4\end{matrix}\right)\to$ impossibile

a) GAUSS $\begin{pmatrix}1&-3&0&2\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ RK = 2

b) $\begin{cases}x_1-3x_2+2x_4=0\\2x_2+x_3-x_4=0\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases} \to \dots \to \begin{cases}x_1=-x_2+2x_3\\x_4=2x_2+x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}$

VET. X

VETTORE A → AX=∅

$\begin{pmatrix}-x_2+2x_3\\x_2\\x_3\\2x_2+x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=-x_2+2x_3-x_3$

$-x_2+2x_3-x_3=0 \quad -x_2=-x_3 \quad x_2=x_3$

$\begin{pmatrix}x_3\\x_3\\x_3\\3x_3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$

a) GAUSS $\begin{pmatrix}1&-3&0&2\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ RK = 2

b) $\begin{cases}x_1-3x_2+2x_4=0\\2x_2+x_3-x_4=0\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases} \to \dots \to \begin{cases}x_1=-x_2+2x_3\\x_4=2x_2+x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}$

VET. X

VETTORE A → AX=∅

$\begin{pmatrix}-x_2+2x_3\\x_2\\x_3\\2x_2+x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=-x_2+2x_3-x_3$

$-x_2+2x_3-x_3=0 \quad -x_2=-x_3 \quad x_2=x_3$

$\begin{pmatrix}x_3\\x_3\\x_3\\3x_3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$

Esercizio 1	Fare Gauss per il rango, creare il sistema (prendo le x in comune e le tratto come libere), isolo le x, sostituisco le x trovate nel vettore X, eseguo $X\cdot v=0$, isolo una x, sostituisco nuovamente e poi costruisco il vettore prendendo i coefficienti
Esercizio 2	Calcolare il det di una 2×2 a caso, se det $\neq 0$ allora $rk(A)\geq 2$ possiamo orlarla, altrimenti ne cerco un'altra, calcoliamo il det di tutte le possibili 3×3, le λ in comune alle 3×3 sono quelle che rk(A)=2, tutte le altre rk(A)=3;
Esercizio 3	• Se A è una matrice nilpotente (ossia esiste un intero positivo n tale che $A^n=0$) allora $\det A=0\to$ Nilpotente non invertibile allora $\det A=0$ • Se A è una matrice simmetrica, allora A^2 è simmetrica $\to M$ simmetrica se $M=M^T\Rightarrow M^T\cdot M^T=(M\cdot M)^T\Rightarrow M=M^T$, sostituisci M con A^2 • Sia $A\in M_{3,2}(\mathbb{R})$ di rango 2, allora il sistema lineare $AX=B$ ammette soluzioni comunque si scelga la matrice B dei termini noti. → Se si sceglie B t.c $rk(A\|B)=3$ allora il sistema è impossibile (non ammette soluzioni) per Rouché-Capelli (∞^{2-3}) • $A^3-A=I_2\to A(A^2-I)=I\Rightarrow(A^2-I)=A^{-1}$ quindi $AA^{-1}=I$ (A è invertibile) • $A^3-A=0\to A(A^2-I)=0\Rightarrow A=0$, $A^2-I=0\Rightarrow A=0$, $A^2=I$ quindi A è invertibile se $A^2=I$ altrimenti se $A=0$ non è invertibile • $A^3-A=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\to A(A^2-I)=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$, $A^2-I=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}+I=\begin{pmatrix}2&1\\2&4\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\sqrt2&1\\\sqrt2&2\end{pmatrix}$ poi calcolo il determinante delle due A e uso il teorema di Binét: $\det\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}=1$, $\det\begin{pmatrix}\sqrt2&1\\\sqrt2&2\end{pmatrix}=2\sqrt2-\sqrt2\neq0$, quindi A è invertibile • A è invertibile, allora $\det(A)>0\to$ Falso, per Binét A è invertibile se $\det A\neq0$ (quindi può essere anche negativo). • Se A è B sono invertibili, AB è invertibile → Vero, AB è invertibile se $\det(AB)\neq0$ e per Binét $\det(AB)=\det A\cdot\det B\neq0$ • Se $A^{13}=B$ e B è invertibile, allora A è invertibile → Vero, $\det(A^{13})=\det(B)\Rightarrow\det(A)^{13}=\det(B)$ sappiamo che $\det(B)\neq0$ quindi $\det(A)\neq0$ e quindi A è invertibile • I vettori colonna di $A\in M_n(\mathbb{R})$ generano $\mathbb{R}^n\to A$ è invertibile perchè visto che i vettori sono base di $\mathbb{R}^n$ allora la matrice ha rango n(massimo) e quindi è invertibile • Se $A\in M_{3,4}(\mathbb{R})$ ha due minori distinti di ordine 3 con determinante nullo, $rk(A)<3\to$ vero, sappiamo che esistono solo due sottomatrici 3×3 quindi se entrambe hanno determinante nullo allora $rk(A)<3$ • Tre vettori qualsiasi di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti → Usiamo la regola per essere base di R^N che dice che sono linearmente indipendenti se il rango della matrice composta dai vettori è N, quindi basta trovare un vettore per cui il rango non è 2 per avere i vettori linearmente dipendenti
Esercizio 4	• I vettori $v_1,\dots,v_n$ sono base di R^N se $rk(M)=N$ con $M=(v_1\dots v_n)$ (M matrice composta dai vettori) • Base ortogonale di v,w: $\begin{pmatrix}\det(R_2R_3)\\-\det(R_1R_3)\\\det(R_1R_2)\end{pmatrix}$, R_i sono le righe dei vettori • Dipendenza lineare: $\alpha v_1+\beta v_2=0$ oppure la matrice composta dai vettori non ha rango N • Indipendenza lineare: $\alpha v_1+\beta v_2=0\to\alpha=\beta=0$ oppure la matrice composta dai vettori ha rango N • $v_3=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$ è multiplo scalare di $v_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ se $\frac{x_3}{x_1}=\frac{y_3}{y_1}=\frac{z_3}{z_1}=\alpha$ • Per "generare" R^N i vettori combinati linearmente fanno ottenere qualsiasi vettore in R^N. Gli N vettori in questione devono essere linearmente indipendenti. • $v_2\notin\langle v_1\rangle$ significa che v_2 non appartiene allo spazio generato da v_1 e quindi v_2 non deve essere multiplo scalare di v_1 • Due vettori v_1 e v_2 sono ortogonali tra loro quando il loro prodotto scalare e' 0, ovvero $v_1\cdot v_2=v_{1x}\cdot v_{2x}+v_{1y}\cdot v_{2y}+v_{1z}\cdot v_{2z}=0$ • Norma vettore $\|\|v\|\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$, per "allungare" un vettore a una lunghezza L si usa la formula $v'=L\cdot\frac{1}{\|\|v\|\|}\cdot v$
	• Gauss: $R_i=R_i+\left(\frac{-a_{ij}}{a_{jj}}\right)\cdot R_j$ • Rouché-Capelli: $\infty^{\#incognite-\text{rk}(A)}$ • A invertibile se $\det A\neq0$, $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}$ • A non invertibile se $A^N=0$ • Il prodotto di due matrici diagonali è diagonale, una matrice diagonale non è per forza invertibile (potrebbe avere degli zeri nella diagonale) e ogni matrice diagonale è simmetrica • Teorema di Binét: $\det(AB)=\det A\cdot\det B$ • Calcolo matrice inversa: scriviamo $(M\|I)$, eseguiamo Gauss (da entrambe le parti), gli elementi sopra il pivot li poniamo tutti a 0 (sempre alla Gauss dal basso verso l'alto), otteniamo $(I\|M^{-1})$ • $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ • $AX=B$ ammette soluzioni se $\text{rk}(A\|B)=\text{rk}(A)$

$\sqrt1=1$	$\sqrt4=2$	$\sqrt9=3$	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{25}=5$
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{100}=10$
$\sqrt{121}=11$	$\sqrt{144}=12$	$\sqrt{169}=13$	$\sqrt{196}=14$	$\sqrt{225}=15$
$\sqrt{256}=16$	$\sqrt{289}=17$	$\sqrt{324}=18$	$\sqrt{361}=19$	$\sqrt{400}=20$
$\sqrt{441}=21$	$\sqrt{484}=22$	$\sqrt{529}=23$	$\sqrt{576}=24$	$\sqrt{625}=25$
$\sqrt{676}=26$	$\sqrt{729}=27$	$\sqrt{784}=28$	$\sqrt{841}=29$	$\sqrt{900}=30$