Esercizi Esame ALAN

1 Esercizio 1: Errori

1.1 Condizionamento

Calcolare il condizionamento usando l'algoritmo più semplice usando la formula:

$$C_f = \frac{x(f'(x))}{f(x)}$$

Poi calcolarne il limite:

- "Per piccoli valori di x" $\to \lim_{x\to 0} C_f$
- "Per piccoli valori positivi di x" $\to \lim_{x\to 0^+} C_f$
- "Per grandi valori di x" $\to \lim_{x\to +\infty} C_f$

Se il limite intorno a ± 1 è ben condizionato, altrimenti è mal condizionato.
Il risultato del limite serve per calcolare l'errore inerente:

$$Err.Inerente = C_f \cdot Err.Input$$

1.2 Errori negli algoritmi

Si disegnano i grafi degli algoritmi e l'etichetta degli archi è:

$a \pm b$	$\varepsilon_{a\pm b} = \frac{a}{a\pm b}\varepsilon_a \pm \frac{b}{a\pm b}\varepsilon_b$
$a \cdot b$	$\varepsilon_{a\cdot b} = \varepsilon_b + \varepsilon_a$
$\frac{a}{b}$	$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \varepsilon_b - \varepsilon_a$
$g(x)$	$\varepsilon_{g(x)} = C_{g(x)} \cdot \varepsilon_x$

Per ogni nodo (a partire dal fondo) si apre una parentesi e dentro si moltiplicano tutti gli archi a partire da quel nodo fino alla fine, se ci sono percorsi alternativi si fa la somma dei percorsi.

$$\varepsilon\{(I \cdot II \cdot \ldots) + (\ldots) + \ldots\}$$

Per verificare la stabilità dell'algoritmo bisogna fare il limite tendente a 0^+ di tutti gli archi e se viene finito (per tutti gli archi) è stabile, altrimenti è instabile (ne basta uno per verificarlo).

Esempio

2 Esercizio 2: Rotazioni/Riflessioni

2.1 Rotazioni di Givens

Si indica una rotazione di Givens con:

$$G(i, j, \theta)$$

dove i rappresenta la posizione del perno all'interno della matrice, j la posizione dell'elemento da azzerare e θ l'angolo di rotazione (che ignoreremo per l'esercizio). Ogni rotazione azzera un elemento (j) e cambia il valore del perno i (0 non può essere perno). Si calcola il valore di c e s ad ogni passaggio:

$$c = \cos(\theta) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

$$s = \sin(\theta) = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Si costruisce la matrice quadrata (della stessa dimensione dei vettori) inserendo c e s:

- c e $-s$ nella riga i
- c e s nella riga j

c va nella diagonale, s e $-s$ bisogna posizionarli nella colonna dove c'è l'altro c.
Si moltiplica la matrice per il vettore iniziale per ottenere il vettore finale/intermedio γ. Usiamo γ per fare un'altra rotazione fino a quando non è uguale al vettore finale.

Esempio

$$c = \cos\theta = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = 0$$

$$s = \sin\theta = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = 1$$

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{7} \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$G(\overset{i}{2}, \overset{j}{3}, \theta)$ ROTAZIONE NEL PIANO $< e_2, e_3 >$

$$c = \frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{7+9}} = \frac{-\sqrt{7}}{4} \qquad s = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{7}/4 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -3/4 & -\sqrt{7}/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VERIFICA

$$\|x\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \text{VALORE PERNO "FINALE"}$$

2

2.1.1 Interpretazione geometrica

Per ogni rotazione, scrivere su che piano è stata fatta, ad esempio con la rotazione $G(2, 1, \theta)$ si può dire: "si tratta di una rotazione nel piano $< e_2, e_1 >$". Visto che sono tutte isometrie:

$$\|\text{vettore iniziale}\| = \|\text{vettore finale}\|$$

Si può usare come prova.

2.2 Riflessioni di Householder

NB: abbiamo visto solo come ottenere una riflessione di Householder nel caso in cui α sia il primo elemento del vettore risultante.

1. Si calcola $\alpha = \|x\|_2$
2. Si calcola $u = x - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
3. Si calcola $u^T \bigotimes u \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \bigotimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_2 \\ x_2 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_2 \end{pmatrix}$
4. Si crea la matrice (quadrata) identità I con dimensione del vettore x
5. Si calcola P:
$$P = I - \frac{2}{\|u\|^2} \cdot uu^T$$
6. Infine si calcola Px trovando così il vettore risultante

2.2.1 Verifiche

- P è ortogonale: colonne perpendicolari, prodotto scalare = 0, colonne normalizzate ($\|\text{colonna}\|_2 = 1$)
- $P \cdot x = \alpha e_1$

2.2.2 Interpretazione geometrica

Si scrive: $P = (\ldots)$ riflette $x = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$ rispetto al piano perpendicolare (al vettore w)

Esempio

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$, con η opportuno (esplicitare la matrice). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

$$\alpha = \|x\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$u = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\|u\| = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

$$uu^T = u \otimes u^T = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix}$$

$$P = I - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{80}_{\,40}} \begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{40}\left(\begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$Px = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9+16}{5} \\ \frac{-12+12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3: Minimi quadrati

$$f(x) = \alpha g(x) \pm \beta h(x) \pm \ldots \pm \gamma k(x)$$

x	x_1 x_2 $\ldots x_n$
y	y_1 y_2 $\ldots y_n$

$$A = \begin{pmatrix} g(x_1) & h(x_1) & \ldots & \gamma k(x_1) \\ g(x_2) & h(x_2) & \ldots & \gamma k(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(x_n) & h(x_n) & \ldots & \gamma k(x_n) \end{pmatrix}$$

- Se c'è solo la costante senza funzione associata, la sua colonna corrispondente sarà composta solo da 1
- Matrice incognite: $A^T A$
- Matrice soluzioni: $A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
- Usiamo la matrice delle incognite per costruire il sistema (ad esempio α è associata alla prima colonna, β alla seconda e così via moltiplicando le incognite con i valori della colonna e sommandoli tra loro) e poniamo ogni riga uguale alla corrispondente riga della matrice soluzioni. Isolo le incognite e poi le sostituisco nella funzione di partenza.

2.3 Interpretazione geometrica

Disegnare il grafico con i punti e la funzione ricavata, evidenziando le distanze tra i punti dati e il grafico. In più si può scrivere: "la retta di regressione minimizza la somma degli scarti tra i valori di y dei punti ed i valori (equazione del grafico) dell* (nome funzione) calcolat* nelle ascisse x dei punti dati".

2.4 Esempio

3. Data la funzione

$$g(x) = a\frac{6}{x} + b\,x + c$$

calcolare i coefficienti a, b e c per approssimare ai minimi quadrati i seguenti dati:

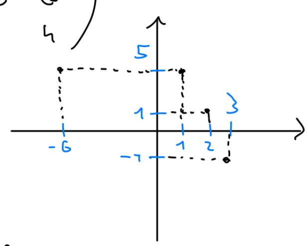
x	-6	1	2	3
y	5	5	1	-1

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 24 & 10 \\ 24 & 50 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -26 \\ 10 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} 50a + 24b + 10c = 26 \\ 24a + 50b = -26 \\ 10a + 4c = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \varnothing \end{cases} \qquad g(x) = \frac{6}{x} - x$$

Esercizio 4: Diagonalizzazione

1. Controllare se A è simmetrica, se lo è, allora è diagonalizzabile
2. Trovare gli autovalori risolvendo
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
e ordinarli in ordine decrescente
3. Verificare che la quantità di autovalori sia uguale all'ordine della matrice (es. una 2×2 ha ordine 2), altrimenti non è diagonalizzabile
4. Per ogni autovalore trovare gli autovettori usando la matrice $A - \lambda I$ (sostituendo a λ l'autovalore) e risolvendo il sistema
$$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
5. Normalizzare gli autovettori usando: $\frac{x_i}{\|v\|}$ dove v è l'autovettore e x_i è l'elemento i-esimo dell'autovettore, controllare se sono indipendenti tra di loro altrimenti non è diagonalizzabile
6. Creare la matrice V composta dagli autovettori, e la sua inversa
7. Creare la matrice D usando gli autovalori in ordine decrescente sulla diagonale. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$
8. Si otterrà la diagonalizzazione della matrice di partenza composta nel seguente modo:
$$A = VDV^{-1}$$

Esempio

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -4 + \lambda^2 \quad \lambda = \pm 2 \quad \lambda = \{2, -2\}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -4x_2 = 0 \end{cases} \quad v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{x_1}{\|v_1\|} = 1 \quad \frac{0}{\|v_1\|} = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2 \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4x_1 + x_2 = 0 \quad x_2 = -4x_1 \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 \end{pmatrix} \quad \frac{x_1}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{17}}{17} \quad \frac{-4x_1}{\|v_2\|} = \frac{-4\sqrt{17}}{17}$$

$$\rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{17} \\ \frac{-4\sqrt{17}}{17} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{17}}{17} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{17}}{17} \end{pmatrix} \qquad V^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{\sqrt{17}}{17} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4\sqrt{17}}{17} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{\sqrt{17}}{17} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{-4\sqrt{17}} \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{-4\sqrt{17}} \end{array}\right)$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 17/-4\sqrt{17} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$|\lambda_1| \not> |\lambda_2|$ non converge

2.5 Convergenza: Metodo delle potenze

Converge all'autovalore di massimo modulo

1. Si riordinano gli autovalori in base al massimo modulo, ottenendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dove λ_1 è l'autovalore di massimo modulo
2. Converge se $\lambda_1 > \lambda_2$
3. k il numero di volte in cui si esegue la moltiplicazione $v_i = A \cdot v_{i-1}$, $v_n = A \cdot v_{n-1} = A^2 \cdot v_{n-2} = \dots = A^n \cdot v_0$
4. Si trova la velocità di convergenza con:
$$V = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k$$

2.6 Convergenza: Metodo delle potenze inverse

1. Dato uno shift p, bisogna trovare l'autovalore più vicino a $p(\lambda_1)$ ed il secondo più vicino a $p(\lambda_2)$
2. Si calcola
$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1 - p}$$
Per ogni λ

3. μ_1 sarà quello di massimo modulo tra tutti i μ calcolati, mentre μ_2 sarà il secondo di massimo modulo
4. La velocità di convergenza si calcola:

$$V = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k$$

Se si hanno due autovalori con lo stesso modulo massimo, allora non converge.

3 Esercizio 5: Spline

Si ha una spline se:

- S è composta da polinomi di grado $\leq n$, dove n è il grado della spline (ad esempio, una spline di grado 3 sarà composta da soli polinomi di grado ≤ 3)
- S è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x \to n^-} S(x) = \lim_{x \to n^+} S(x)$$

- S' è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x \to n^-} S'(x) = \lim_{x \to n^+} S'(x)$$

- S'' è continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x \to n^-} S''(x) = \lim_{x \to n^+} S''(x)$$

3.1 Calcolo dei momenti

Dato un nodo K, si calcola $S''(K)$

3.2 Periodicità di una spline

Una spline è periodica se:

$$\lim_{x \to e_1^-} S(x) = \lim_{x \to e_2^+} S(x)$$
$$\lim_{x \to e_1^-} S'(x) = \lim_{x \to e_2^+} S'(x)$$
$$\lim_{x \to e_1^-} S''(x) = \lim_{x \to e_2^+} S''(x)$$

Dove e_1 e e_2 sono i due estremi (sinistro e destro rispettivamente) della spline.

4 Esercizio 5: Condizionamento matrice e di una norma

Per verificare se la matrice A^{-1} è l'inversa bisogna vedere se $\det(A) \neq 0$ e se $A^{-1}A = I$. Per calcolare il condizionamento relativo ad una norma, bisogna fare:

$$\|A\|_{nm}$$
$$\|A^{-1}\|_{nm}$$

dove nm indica la norma in questione. Poi $M(A) = \|A\|_{nm} \cdot \|A^{-1}\|_{nm}$ per calcolare la maggiorazione dell'errore:

$$\varepsilon_x = \frac{\|\bar{x} - x\|_{nm}}{\|x\|_{nm}}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\|\delta b\|_{nm}}{\|b\|_{nm}}$$

$$\varepsilon_x \leq u(A)\varepsilon_b$$

Quindi se l'esercizio chiede di calcolare una maggiorazione, basta calcolarsi $u(A)$ e ε_b

4.1 Norme

4.1.1 Vettori

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^T x}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

4.1.2 Matrici

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una colonna e prendo il massimo)

$$\|A\|_2$$

Esiste ma non calcolabile esplicitamente

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Somma di tutti gli elementi in modulo di una riga e prendo il massimo)

5 Esercizio 5: SVD

Una SVD viene utilizzata per trovare una diagonalizzazione di una matrice non simmetrica scritta nella forma

$$A = U\Sigma V^T$$

- U è una matrice ortogonale (ovvero $U^TU = UU^T = I$)
- Σ è una matrice diagonale con i valori singolari sulla diagonale in ordine decrescente
- V è una matrice ortogonale (ovvero $V^TV = VV^T = I$)

5.1 Proprietà

Data una matrice $A \in R^{m\times n}$
Immagine: trovare il valore singolare r-esimo, ovvero il più piccolo elemento strrettamente maggiore di 0. Per trovare l'immagine scriveremo tutti i vettori u da 1 a r:

$$R(A) =< u_1, u_2, \dots, u_r >$$

Nucleo: indichiamo con v i vettori che lo compongono, partiranno da $r+1$ fino a n:

$$N(A) =< v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n >$$

Certi esercizi potrebbero chiedere di determinare i valori singolari delle matrici A^TA, AA^T, A^T: esistono proprietà specifiche per questi casi.

5.2 Pseudoinversa

Dimensione: $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} : \exists A^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$