Valore di un gioco

Lorenzo Livio Vaccarecci (matr. 5462843)

A.A. 2023/2024

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Compito 4.2: Dimostra che $V_R < V_C$, determina le strategie miste ottimali di Roberta e Carlo e il valore del gioco.

a)

$$V_R = \max\{-1, -2\} = -1, V_C = \min\{4, 3\} = 3$$

$V_R < V_C$

b)

$$p = (p \quad 1-p)^T, q = (q \quad 1-q)^T$$

$$\begin{aligned} p^T M q &= (p \quad 1-p) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} \\ &= 10qp - 5q - 4p + 3 \\ &= 10 \left(qp - \frac{5}{10}q - \frac{4}{10}p + \frac{3}{10} \right) \\ &= 10 \left(qp - \frac{1}{2}q - \frac{2}{5}p + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \right) \\ &= 10 \left(p - \frac{1}{2} \right) \left(q - \frac{2}{5} \right) + 1 \end{aligned}$$

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \hat{q} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^T$$

c)

Quando vengono utilizzate le strategie miste ottimali $\hat{p}, \hat{q}$, il valore del gioco è:

$$V = V_R = V_C = 1$$

Dimostrazione:

$$\hat{p}^T M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M\hat{q} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$