Capitolo 2

Lorenzo Vaccarecci

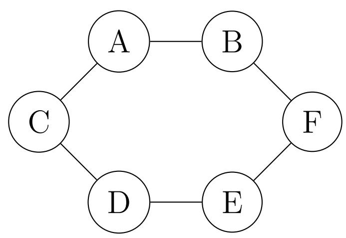
12 Marzo 2024

1 Introduzione e terminologia

Un grafo (orientato) è una coppia $G = (V, E)$ dove:

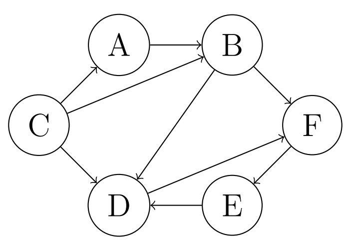
- V è un insieme i cui elementi sono detti *nodi* o *vertici*
- E è un insieme di archi (edges), dove un arco è una coppia di nodi detti estremi dell'arco.

Dato il seguente grafo non orientato:



- l'arco (A, B) è **incidente** sui nodi A e B
- i nodi A e B sono **adiacenti**, A è adiacente a B e viceversa
- il grado $\delta(u)$ di un nodo u è il numero di archi incidenti sul nodo, per esempio $\delta(B) = 4$

Dato il seguente grafo non orientato:



- l'arco (A, B) è incidente sui nodi A e B, *uscente* da A e *entrante* in B
- il nodo B è adiacente a A, ma A non è adiacente a B
- i nodi adiacenti a un nodo A si chiamano anche **vicini** di A
- il grado $\delta(u)$ di un nodo u è il numero di archi incidenti sul nodo, per esempio $\delta(B) = 4$

- il grado **uscente** $\delta_{out}(u)$ di un nodo u è il numero di archi uscenti dal nodo, per esempio $\delta_{out}(B) = 2$
- il grado **entrante** $\delta_{in}(u)$ di un nodo u è il numero di archi entranti nel nodo, per esempio $\delta_{in}(B) = 2$

Dato un grafo con n nodi e m archi, si ha che:

- se il grafo non è orientato
  - la somma dei gradi dei nodi è il doppio del numero degli archi: $\sum_{u \in V} \delta(u) = 2m$
  - m è al massimo il numero di tutte le possibili coppie non ordinate di nodi, ossia $n + (n-1) + \cdots + 1 = n(n+1)/2$ quindi $m = O(n^2)$
- se il grafo è orientato
  - la somma dei gradi uscenti dei nodi e la somma dei gradi entranti dei nodi sono uguali al numero degli archi: $\sum_{u \in V} \delta_{out}(u) = \sum_{u \in V} \delta_{in}(u) = m$, quindi $\sum_{u \in V} \delta(u) = 2m$
  - m è al massimo il numero di tutte le possibili coppie ordinate di nodi, ossia n^2, quindi $m = O(n^2)$

Un grafo in cui il numero degli archi sia dell'ordine di n^2 si dice **grafo denso**.

- un cammino (path) è una sequenza di nodi in cui ciascun nodo è adiacente al successivo
- nel caso di un grafo non orientato si trova anche il termine catena invece di cammino
- gli archi (u_i, u_{i+1}) si dicono contenuti nel cammino
- $n - 1$, ossia il numero degli archi, è la lunghezza del cammino
- un cammino è degenere o nullo se è costituito da un solo nodo, ossia ha lunghezza 0
- è semplice se i nodi sono distinti, tranne al più il primo e l'ultimo
- in un grafo orientato, un cammino non nullo forma un ciclo se il primo nodo coincide con l'ultimo
- in un grafo non orientato, un cammino(catena) di lunghezza $\geq$3 forma un ciclo o circuito (semplice) se il primo nodo coincide con l'ultimo e tutti gli altri nodi sono distinti
- v è raggiungibile da u se esiste un cammino da u a v

Un grafo G è **aciclico** se non vi sono cicli in G, nel caso di un grafo orientato è anche detto **DAG (directed acyclic graph)**. Un grafo orientato si dice **fortemente connesso** se ogni nodo è raggiungibile da ogni altro, **debolmente connesso** se il grafo non orientato corrispondente è connesso. Un **sottografo** di $G = (V, E)$ è un grafo ottenuto da G, non considerando alcuni archi o alcuni nodi insieme agli archi incidenti su di essi. Il **sottografo indotto** da un sottoinsieme V' di nodi è il sottografo di G costituito dai nodi di V' e dagli archi di G che connettono tali nodi. Un **albero libero** è un grafo non orientato connesso aciclico. Dato un grafo non orientato e connesso G, un **albero ricoprente** (*spanning tree*) di G è un sottografo di G che contiene tutti i nodi ed è un albero libero. Dato un grafo non orientato (eventualmente non connesso) G, si chiama **foresta ricoprente** di G un sottografo di G che contiene tutti i nodi ed è una foresta libera.

1.1 Rappresentazione di un grafo

Lista di archi Si memorizza l'insieme dei nodi e la lista degli archi, spazio totale $O(n+m)$

Liste di adiacenza Per ogni nodo si memorizza la lista dei nodi adiacenti. Si hanno n liste, di lunghezza totale $2m$ per grafo non orientato, m per grafo orientato, quindi complessità spaziale $O(n+m)$

Matrice di adiacenza Assumendo corrispondenza tra nodi e $1\dots n$, matrice quadrata M di dimensione n a valori booleani (oppure 0,1), dove $M_{i,j}$ vero se e solo se esiste l'arco (u_i, u_j). Richiede più spazio, $O(n^2)$ ma permette di verificare in tempo costante se esiste un arco tra due nodi mentre per trovare gli adiacenti diventa più costoso.

La rappresentazione generalmente più conveniente è quella con liste di adiacenza, in particolare per grafi *sparsi* ossia con un numero di archi m molto minore di n^2. La rappresentazione con matrice di adiacenza può essere preferibile quando il grafo è denso (m prossimo a n^2) o quando è importante controllare in modo efficiente se esiste un arco tra due vertici dati. Entrambe le rappresentazioni sono facilmente adattabili ai grafi *pesati*, ossia dove ogni arco ha un perso(costo) associato.

2 Visite

Per visitare un grafo si possono usare algoritmi simili a quelli per gli alberi. L'insieme dei nodi viene partizionato in tre insiemi, tradizionalmente indicati con i colori bianco, grigio, nero:

Bianco inesplorato, ossia non ancora toccato dall'algoritmo

Grigio aperto, ossia toccato dall'algoritmo (visita iniziata)

Nero chiuso (visita conclusa)

Le visite iterative usano un insieme F detto **frangia** da cui vengono via via estratti i nodi da visitare.