Calculus I

Lorenzo Vaccarecci

A.A. 2022/2023

Indice

Capitolo 1

Nozioni di Base

1.1 Proprietà di $\mathbb{R}$

1. **Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$**: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exists q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$
2. **Densità di $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$**: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exists z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tale che $x < z < y$
3. Dato $x \in \mathbb{R}$, esiste un *unico* elemento $m \in \mathbb{Z}$ tale che $m \leq x < m + 1$. Tale m è detto **parte intera** di x e si indica con $m = [x]$

1.2 Grafici

L'asse orizzontale è detto **asse delle ascisse** e quello verticaale **asse delle ordinate**.

- $(-a, b)$ è simmetrico a (a, b) rispetto all'asse delle ordinate
- $(a, -b)$ è simmetrico a (a, b) rispetto all'asse delle ascisse
- $(-a, -b)$ è simmetrico a (a, b) rispetto all'origine
- (b, a) è simmetrico a (a, b) rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante

1.3 Massimi, minimi, estremi superiori e inferiori

Definizione:
Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{R}$; E si dice **limitato superiormente** se esiste un numero molto grande M per cui risulti che $\forall x \in E, x \leq M$. Il numero M si dice **maggiorante** di E.
L'insieme di E si dice **limitato inferiormente** se esiste un numero molto piccolo m per cui risulti che $\forall x \in E, x \geq m$. Il numero m si dice **minorante** di E.
Se sono verificate entrambe le condizioni ($\forall x \in E, m \leq x \leq M$), allora E si dice **limitato**. **Esempio:** Gli intervalli $(0, 1]$ e $(-1, 2)$ sono insiemi limitati, mentre $(0, +\infty)$ è limitato inferiormente e $(-\infty, 0)$ è limitato superiormente.

- **Massimo**: Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Diremo che E ammette massimo se $\exists x_M \in E$ tale che $\forall x \in E, x \leq x_M$. L'elemento x_M di E (necessariamente unico) si dice il massimo dell'insieme E e si denota con $\max E$.
- **Minimo**:Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Diremo che E ammette minimo se $\exists x_m \in E$ tale che $\forall x \in E, x_m \leq x$. L'elemento x_m di E (necessariamente unico) si dice il minimo dell'insieme E e si denota con $\min E$.

Esempio:
L'intervallo $(0,1]$ ha massimo uguale a 1. Non ha minimo. L'intervallo $(-1,2)$ non ha nè massimo nè minimo e l'intervallo $(0,+\infty)$ non ha minimo e $(-\infty,1)$ non ha massimo.
Definizione:
Sia E un sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di $\mathbb{R}$. Il minimo dell'insieme dei maggiornati di E si chiama **estremo superiore** di E e si denota con $\sup E$.
Sia E un sottoinsieme non vuoto e inferiormente limitato di $\mathbb{R}$. Il massimo dell'insieme dei minoranti di E si chiama **estremo inferiore** di E e si denota con $\inf E$. Se gli estremi esistono sono **unici**.

- Un insieme non vuoto e superiormente limitato ha massimo se e solo se il suo estremo superiore appartiene all'insieme.
- Un insieme non vuoto e inferiormente limitato ha minimo se e solo se il suo estremo inferiore appartiene all'insieme.

Esempio generale:
Sia $E = [-1,3)$. L'insieme dei maggioranti di E è $[3,+\infty]$ il minimo di questo insieme è 3. Quindi 3 è l'estremo superiore di E ma non il suo massimo. L'insieme dei minoranti di E è $(-\infty,-1]$ il massimo di questo insieme è -1. Quindi -1 è l'estremo inferiore di E ed è il suo minimo.

Capitolo 2

Funzioni

$$f : A \to B$$

- A è il dominio di f
- B è il codominio di f

2.1 Iniettività, surgettività, bigettività

Una funzione $f : A \to B$ è detta **iniettiva** se $\forall x_1, x_2 \quad x_1 \neq x_2$ di A risulta che $f(x_1) \neq f(x_2)$, ossia se punti distinti hanno immagini distinte. (E' iniettiva se la funzione è continua e solo se è strettamente monotona)
La funzione f è detta **surgettiva** se $\forall y \in B \quad \exists x \in A | y = f(x)$; ossia ogni elemento del codominio è immagine di qualche punto del dominio.
La funzione f è detta **bigettiva** se è sia iniettiva che surgettiva.

2.2 Funzioni limitate

Una funzione f si dice **limitata superiormente** se l'immagine è limitata superiormente cioè $\exists M \in \mathbb{R} | \forall x \in A \quad f(x) \leq M$
Una funzione f si dice **limitata inferiormente** se l'immagine è limitata inferiormente cioè $\exists m \in \mathbb{R} | \forall x \in A \quad f(x) \geq m$
Una funzione f si dice **limitata** se è sia limitata superiormente che inferiormente cioè $\forall x \in A \quad m \leq f(x) \leq M$.

2.3 Funzioni particolari

2.3.1 Funzione pari

1. $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \text{dom}(f)$
2. Simmetrico rispetto all'asse delle ordinate

2.3.2 Funzione dispari

1. $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \text{dom}(f)$
2. Simmetrico rispetto all'origine

2.3.3 Funzione monotòna

- Descrescente: $\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(f) \quad x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Crescente: $\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(f) \quad x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

2.3.4 Funzione composta

- $\text{dom}(g \circ f) = \{x \in \text{dom}(f) : f(x) \in \text{dom}(g)\}$

2.3.5 Funzione inversa

Una funzione f iniettiva è detta invertibile (f^{-1}).

1. $\text{dom}(f^{-1}) = \text{img}(f)$
2. $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
3. $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in \text{dom}(f)$
4. $(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in \text{img}(f)$

Sia f una funzione strettamente monotòna. Allora f è invertibile e la sua inversa ha la stessa monotonia.

2.3.6 Funzioni elementari

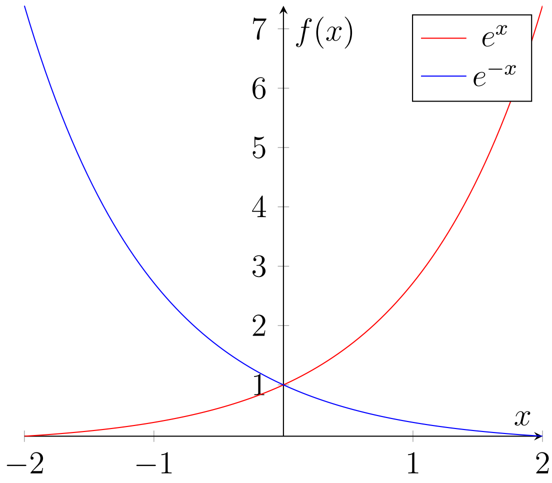
- n dispari
  - $\sqrt[n]{x^n} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  - $(\sqrt[n]{x})^n = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- n pari
  - $\sqrt[n]{x^n} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  - $(\sqrt[n]{x})^n = x \quad \forall x \in [0, +\infty)$

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

2.3.7 Funzioni esponenziali e logaritmiche

- Se $a > 1$ e $x \in \mathbb{R}$
$$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\}$$
- Se $0 < a < 1$
$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

La funzione esponenziale con base $a \neq 1$ è invertibile perchè è strettamente monotona. La sua inversa è la funzione logaritmica di base a e si indica con $\log_a x$.



$e \simeq 2.72$

2.3.8 Funzioni trigonometriche

- Formule di addizione e sottrazione
  - $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
  - $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- Formule di duplicazione
  - $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
  - $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

La funzione tangente è dispari e strettamente crescente in ogni intervallo $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi), k \in \mathbb{Z}$

Capitolo 3

Limiti e continuità

3.1 Intorno

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $r > 0$ un numero reale. Chiameremo **intorno di** x_0 **di raggio** r l'intervallo aperto

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

3.2 Teorema della permanenza del segno

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

Se $l < m$ allora esiste un intorno I tale che $\forall x \in I(x_0) - x_0 : f(x) < g(x)$

3.3 Limiti

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$		
$l \in \mathbb{R}$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c $0 < \|x - x_0\| < \delta$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$\|f(x) - l\| < \varepsilon$
$l = +\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c $0 < \|x - x_0\| < \delta$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$f(x) > M$
$l = -\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c $0 < \|x - x_0\| < \delta$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$f(x) < -M$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$		
$l \in \mathbb{R}$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x > b$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$\|f(x) - l\| < \varepsilon$
$l = +\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x > b$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$f(x) > M$
$l = +\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x > N$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$f(x) > M$
$l = -\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x > b$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$f(x) < -M$
$l = -\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x > N$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$f(x) < -M$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$		
$l \in \mathbb{R}$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x < b$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$\|f(x) - l\| < \varepsilon$
$l = +\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x < b$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$f(x) > M$
$l = +\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x < -N$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$f(x) > M$
$l = -\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x < b$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$f(x) < -M$
$l = -\infty$	$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x < -N$ e $x \in \mathrm{dom}(f)$	$f(x) < -M$

- $\alpha > 0$
  - $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$
  - $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$
- $a > 1$

- $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
- $\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$

• $0 < a < 1$

- $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
- $\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$

3.4 Secondo Teorema del confronto (dei carabinieri)

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$$

Se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l \text{ allora } \lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

3.5 Primo Teorema del confronto (caso infinito)

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$$

Se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ allora } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$

se

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \text{ allora } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

3.6 Limite di funzioni monotone

- Funzione crescente
  - $\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I_+(c), x > c\}$
  - $\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I_-(c), x < c\}$
- Funzione decrescente
  - $\lim_{x\to c^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I_+(c), x > c\}$
  - $\lim_{x\to c^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I_-(c), x < c\}$

3.7 Continuità

Si dice che f è continua in x_0 se esiste il limite di f in x_0 ed è uguale a $f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Sia f una funzione continua nell'intervallo I allora la sua immagine $f(I)$ è un intervallo.

3.8 Discontinuità

- **Di prima specie**:$\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste ma $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$
- **Eliminabile**: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste ma $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Una funzione può non essere definita in un punto x_0 ma essere continua in esso, in tal caso si scrive una nuova funzione f^*:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathrm{dom}(f) \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

3.9 Continuità della funzione composta

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$$

1. se $y_0 \in \mathbb{R}$, g è continua in y_0
2. se $y_0 = \pm\infty$, esiste (finito o infinito) $\lim_{y\to y_0} g(y)$

Allora esiste il limite per $x \to x_0$ della funzione composta $g \circ f$ e si ha:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y)$$

3.10 Teorema degli zeri

Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se f assume valori discordi agli estremi dell'intervallo allora esiste uno zero di f nell'intervallo aperto (a, b).
Siano f e g due funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ tali che $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Allora esiste uno zero nell'intervallo (a, b).

3.11 Valori intermedi

Sia f una funzione continua su un intervallo che assume i valori distinti α e β, allora assume tutti i valori compresi fra α e β.

3.12 Del massimo e del minimo o di Weierstrass

Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f assume massimo e minimo.

Capitolo 4

Derivate

4.1 Introduzione

Coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel punto P:

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sia f una funzione e siano x_0 interno al suo dominio e il rapporto $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ dove h è detto **rapporto incrementale**. Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale, che si indica con $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Usando il cambiamento di variabile $x = x_0 + h$ si può riscrivere il limite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se una funzione f è derivabile in un punto x_0 allora esiste la retta, non verticale, tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, ed ha equazione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Se una funzione f è derivabile in un punto x_0 allora è continua in quel punto.
- La continuità non implica la derivabilità (viceversa si)

4.2 Derivate destra e sinistra

Sia $[x_0, x_0 + \delta) \subset \text{dom}(f)$. Si definisce **derivata destra** di f in x_0 il limite, se esiste finito:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Analogalmente si definisce la derivata sinistra che si indica con $f'_-(x_0)$.
Se le derivate destra e sinistra in un punto x_0 sono (finite e) diverse, allora si dice che in x_0 la funzione ha un punto angoloso. Osserviamo infine che una funzione è derivabile se e solo se esistono le derivate destra e sinistra e sono uguali.

4.3 Derivata funzione composta

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

4.4 Massimi e minimi relativi

- il punto x_0 è detto **punto di massimo relativo** se esiste un intorno $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che $\forall x \in \text{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \quad f(x_0) \geq f(x)$
- il punto x_0 è detto **punto di minimo relativo** se esiste un intorno $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che $\forall x \in \text{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \quad f(x_0) \leq f(x)$

Un punto x_0 interno al dominio di f si dice un punto critico di f se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.

4.5 Teorema di Fermat

Sia f definita in un intorno nel punto x_0 e derivabile in x_0. Se x_0 è un punto di estremo relativo per f allora $f'(x_0) = 0$

4.6 Teorema di Rolle

Sia f continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, derivate nell'intervallo aperto (a, b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste un punto x_0 nell'intervallo (a, b) t.c. $f'(x_0) = 0$

4.7 Teorema di Lagrange

Sia f continua nell'intervallo chiuse e limitato $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b). Allora esiste un punto x_0 nell'intervallo aperto (a, b) tale che:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

4.8 Primo teorema di de l'Hôpital

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.9 Secondo teorema di de l'Hôpital

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.10 Limite della derivata

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = l \quad \text{allora} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$$

Segue che se una funzione f è continua in x_0 ed esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f'(x) = l$ si ha:

- se $l \in \mathbb{R}$ allora f è derivabile in x_0 e si ha $f'(x_0) = l$
- se $l = \pm\infty$ allora f non è derivabile in x_0

4.11 Criterio di monotonia

1. se f è crescente[decrescente] in I allora $f'(x) \geq 0[f'(x) \leq 0]$ per ogni x in I
2. se $f'(x) \geq 0[f'(x) \leq 0]$ in I allora f è crescente[decrescente] su I
3. se $f'(x) > 0[f'(x) < 0]$ in I allora f è strettamente crescente[decrescente] su I

I punti 1 e 2 si possono rovesciare:

1. $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f$ è crescente su I
2. $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \iff f$ è decrescente su I

Mentre non è possibile rovesciare il punto 3.

4.12 Concavità e convessità

Sia f una funzione derivabile in x_0.
Si dice che f è convessa in x_0 se esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ tale che:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$$

Si diche che f è concava se esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ tale che:

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$$

Si diche che f ha un flesso in x_0 se esiote un intorno $I_\delta(x_0)$ tale che:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I_\delta(x_0), x > x_0$$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I_\delta(x_0), x < x_0$$

oppure

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I_\delta(x_0), x < x_0$$
$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I_\delta(x_0), x > x_0$$

Capitolo 5

Integrali

Sia f una funzione definita sull'intervallo aperto finito o infinito I. Una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ è detta una primitiva di f in I se è derivabile in I

$$F'(x) = f(x) \quad x \in I$$

Ogni funzione continua su un intervallo ammette primitiva.
Sia f una funzione che ammette una primitiva F su un intervallo I. Allora la funzione

$$F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

è una primitiva di f in I. Viceversa se F e G sono due primitive di f sull'intervallo I allora esiste una costance c tale che $G(x) - F(x) = c$.
L'insieme di tutte le primitive di f in un intervallo I si chiama **integrale indefinito** di f sull'intervallo I e si indica con il simbolo:

$$\int f(x)dx$$

La funzione f è detta **funzione integranda**. La variabile x è detta **variabile di integrazione**.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

5.1 Integrale di Riemann

Un insieme di punti $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ di intervallo $[a, b]$ tali che $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ è detto **partizione di** $[a, b]$ e verrà denotata con $P(x_0 \ldots x_n)$ o semplicemente con P.
Sia f tale che $m \leq f(x) \leq M$ in $[a, b]$. Date due partizioni P e Q di $[a, b]$ si ha

$$m(b - a) \leq s(f, P) \leq S(f, Q) \leq M(b - a)$$

Una funzione f limitata sull'intervallo $[a, b]$ è detta intergabile in $[a, b]$ se esiste un **unico** numero reale I tale che per ogni partizione P di $[a, b]$ si ha

$$s(f, P) \leq I \leq S(f, P)$$

e tale numero è detto **integrale definito** di f in $[a, b]$ e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

5.1.1 Interpretazione geometrica

Se $f \geq 0$ la regione T del piano definita da

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$T = \int_a^b f(x)dx$$

Se $f(x) \leq 0$ in $[a, b]$ si pone

$$T = -\int_a^b f(x)dx$$

Se f non ha segno costante si definisce trapezoide di f su $[a, b]$ la regione T dl piano definita da

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \vee f(x) \leq y \leq 0\}$$

Sono integrabili sull'intervallo limitato I

1. le funzioni limitate in I che hanno al più un numero finito di punti di discontinuità
2. le funzioni monotone limitate su I

5.2 Teorema della media integrale

Sia f una funzione integrabile sull'intervallo (a, b) e siano

$$m = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \quad M = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$$

allora si ha

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Se inoltre f è continua in $[a, b]$ allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

5.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Se f è una funzione continua si ha che la **derivata della sua funzione integrale è** f

5.4 Calcolo di aree mediante l'integrale definito

Siano f e g due funzioni integrabili sull'intervallo $[a, b]$ e tali che $f(x) \leq g(x)$ per $x \in [a, b]$. Si vuole calcolare l'area della regione T definita da

$$T = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$