Calculus 2 – Esercitazione guidata
3 GIUGNO 2025

Esercizio 1. Consideriamo la funzione ottenuta prolungando per periodicità di periodo 2π

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \\ 1 & x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & x = \pm\pi/2 \end{cases}.$$

a) Calcolare a_k per ogni $k \geq 0$.
b) Determinare i coefficienti di Fourier $\hat{f}_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
c) Calcolare la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza puntuale.
d) Data $g(x) = f(x-1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, determinare il coefficiente $\hat{g}_2$ di g.

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$.
b) Calcolare la derivata direzionale di f lungo il vettore non nullo $v = (v_1, v_2)$ in $(0,0)$, e stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
c) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(P_0, f(P_0))$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0)$ con $P_0 = (2,-1)$ e $v = (1,1)$.

Esercizio 3. Sia $f(x,y) = 4x^2y - y^3 - x^4y$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
a) Stabilire se f è di classe $\mathcal{C}^2$ e determinare l'equazione della retta tangente in Q alla curva di livello di quota $f(Q)$ di f, dove $Q = (-3,-2)$.
b) Dato $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$, stabilire se C è chiuso e limitato, e calcolare i punti di massimo e minimo relativi ed assoluti di f su C.