1 Serie Notevoli

Tipo di Serie	Forma	Comportamento
Armonica Generalizzata	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$	$\begin{cases} \text{Converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$
Geometrica	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (o $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$)	$\begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } \lvert q\rvert < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{Indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$

2 Serie di Funzioni

Data la serie di funzioni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

1. **Converge puntualmente** su I se la serie converge $\forall x \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$
2. **Converge assolutamente** su I se la serie a termini positivi ($|f_n(x)|$) converge $\forall x \in I$

Se per qualche $x \in I$ la serie diverge o è indeterminata, bisogna restringere il dominio della funzione somma $f(x)$ all'insieme:

$$\left\{ x \in I \mid \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$$

2.1 Criterio di Weierstrass

Data una serie di funzioni, se la serie numerica a termini positivi converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$$

allora la serie di funzioni converge assolutamente e puntualmente (= totalmente) su I.

2.2 Strategia di Studio della Convergenza

1. **Convergenza Puntuale:** Determinare l'insieme I_p per cui $\forall x \in I_p$, la serie numerica $\sum f_n(x)$ converge. (Spesso con Criteri per serie numeriche).
2. **Convergenza Assoluta:** Su I_p, studiare $\sum |f_n(x)|$.
3. **Convergenza Uniforme/Totale:**
   - Tentare il **Criterio di Weierstrass**: se $\sum \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ converge, allora la serie converge totalmente su I.
   - Se Weierstrass non funziona su I_p (es. perché $\sup |f_n(x)|$ diverge, ma la serie converge comunque), cercare intervalli $J \subset I_p$ dove $\sup |f_n(x)|$ è finito e applicare Weierstrass.
   - (Meno comune per gli esami, ma utile: altri criteri come quello di Abel-Dirichlet per convergenza uniforme.)

$$\boxed{\text{Convergenza totale} \Rightarrow \text{convergenza puntuale}}$$

2.3 Corollari

2.3.1 Continuità della somma

Se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $I \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su I ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è continua su I.

2.3.2 Integrazione temine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni f_n sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su $[a, b]$ ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

2.3.3 Derivazione termine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su I se:

1. Le funzioni f_n sono derivabili e le derivate sono funzioni continue $\forall n \geq 1$
2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente su I
3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge totalmente su I

Allora $f(x)$ derivabile e:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in I$$

2.3.4 Corollario 1.34

Data una serie di funzioni definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalamente su (a, b)

Allora la serie converge totalmente su $[a, b]$ e la funzione somma è continua su $[a, b]$

3 Serie di potenze

La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si chiama **serie di potenze di centro 0**

3.1 Raggio di Convergenza R

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze di centro 0. Esiste un unico $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, detto Raggio di Convergenza, tale che:

- Se $R = 0$: la serie converge **solo in** $x = 0$.
- Se $0 < R < +\infty$:
  - Converge **assolutamente** su $(-R, R)$.
  - Converge **totalmente** su $[-K, K]$ per ogni $0 < K < R$.
  - Non converge per $|x| > R$.
- Se $R = +\infty$: la serie converge **assolutamente** su $\mathbb{R}$ e **totalmente** su $[-K, K]$ per ogni $K > 0$.

Nota: La convergenza agli estremi $x = \pm R$ deve essere studiata separatamente (convergenza puntuale).

3.1.1 Calcolo di R (Criteri del Rapporto/Radice)

Sia $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ o $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora il raggio di convergenza R è dato da:

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ \frac{1}{l} & \text{se } l \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

3.2 Insieme di Convergenza Puntuale I_c

L'insieme di convergenza puntuale si ottiene studiando la convergenza della serie negli estremi dell'intervallo $(-R, R)$.

1. Sostituire $x = R$ nella serie e studiare la convergenza della serie numerica $\sum a_n R^n$.
2. Sostituire $x = -R$ nella serie e studiare la convergenza della serie numerica $\sum a_n (-R)^n$.
3. L'insieme I_c sarà $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$ o $[-R, R]$ a seconda della convergenza agli estremi.

3.3 Proprietà della Funzione Somma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$.

- **Continuità:** La funzione somma $f(x)$ è continua sull'intervallo aperto $(-R, R)$.
- **Derivabilità Termine a Termine:** $f(x)$ è derivabile infinite volte su $(-R, R)$, e la sua derivata k-esima si ottiene derivando la serie termine a termine:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad \forall x \in (-R, R)$$

  Il raggio di convergenza delle serie derivate è ancora R.
- **Integrazione Termine a Termine:** $f(x)$ è integrabile su ogni intervallo compatto contenuto in $(-R, R)$, e la sua primitiva si ottiene integrando la serie termine a termine:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

  Il raggio di convergenza della serie integrata è ancora R.
- **Coefficienti di Maclaurin:** I coefficienti a_n della serie di potenze sono legati alle derivate della funzione somma $f(x)$ nel centro ($x = 0$) dalla relazione fondamentale:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{o equivalentemente } f^{(n)}(0) = n! a_n$$

  Questo significa che la serie di potenze è lo sviluppo di Maclaurin della sua funzione somma.
- **Unicità dello Sviluppo:** Se due serie di potenze di centro 0 convergono alla stessa funzione su un intervallo $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$, allora i loro coefficienti devono essere identici: $a_n = b_n$ per ogni n.

4 Convergenza e Divergenza delle Serie Numeriche

4.1 Convergenza Assoluta e Semplice

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente se } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge.}$$

Teorema: Se una serie converge assolutamente $\implies$ converge semplicemente.

4.2 Condizione Necessaria di Cauchy per le Serie

Data una serie qualsiasi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{può} \text{ convergere o divergere (caso dubbio)} \\ \neq 0 \text{ o non esiste} & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{diverge} \text{ sicuramente} \end{cases}$$

Nota: Questa condizione è **necessaria ma non sufficiente** alla convergenza della serie.

4.3 Criteri di Convergenza/Divergenza per Serie a Termini Definitivamente Positivi

(*Ovvero* $\exists n_0$ *tale che* $a_n \geq 0$ *per ogni* $n \geq n_0$)

- **Criterio del Rapporto** (Utile con fattoriali $n!$ o potenze con n all'esponente): Sia $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
  1. Se $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge.
  2. Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge.
  3. Se $l = 1 \Rightarrow$ il criterio non fornisce informazioni (la serie può convergere o divergere).
- **Criterio della Radice** (Utile con potenze n-esime come $(f(n))^n$): Sia $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.
  1. Se $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge.
  2. Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge.
  3. Se $l = 1 \Rightarrow$ il criterio non fornisce informazioni.
- **Criterio del Confronto**: Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente.
  - Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
  - Se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.
- **Criterio del Confronto Asintotico**: Siano $a_n, b_n > 0$ definitivamente. Sia $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

$$\begin{cases} L \in (0, +\infty) & \Rightarrow \sum a_n \text{ e } \sum b_n \text{ hanno lo stesso comportamento (convergenza/divergenza)} \\ L = 0 & \Rightarrow \text{Se } \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge (se } \sum b_n \text{ diverge, nulla si può dire)} \\ L = +\infty & \Rightarrow \text{Se } \sum b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge (se } \sum b_n \text{ converge, nulla si può dire)} \end{cases}$$

  Suggerimento per scegliere b_n: Prendi i termini di grado maggiore in numeratore e denominatore di a_n. (Es. $a_n = \frac{n+1}{n^2+3} \Rightarrow b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$)
- **Test dell'Integrale**: Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva e decrescente. Posto $a_n = f(n)$ per ogni $n \geq 1$, allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

  Inoltre, valgono le disuguaglianze per la somma S della serie e l'integrale improprio I:

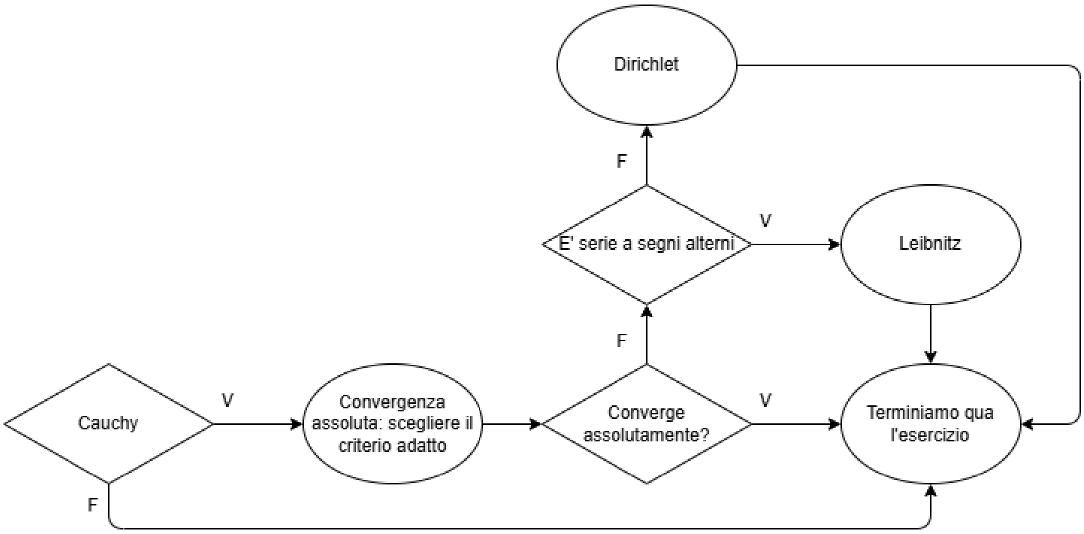
$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \leq S \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

4.4 Criteri di Convergenza per Serie a Termini di Segno Alterno

- **Criterio di Leibniz** (per serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$): Se la successione a_n soddisfa le seguenti condizioni:
  1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
  2. a_n è decrescente definitivamente ($a_{n+1} \leq a_n$ per $n \geq n_0$)

  allora la serie converge **semplicemente**.
- **Stima dell'Errore per Serie di Leibniz**: Se una serie converge per il criterio di Leibniz a una somma S, e S_N è la somma parziale fino all'N-esimo termine, allora l'errore commesso è limitato dal primo termine tralasciato: $|S - S_N| \leq a_{N+1}$.
- **Criterio di Dirichlet (per serie numeriche)**: Consideriamo una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Se valgono le seguenti condizioni:
  1. Le somme parziali di $\sum a_n$ sono limitate: $\exists M > 0 \mid \left|\sum_{k=1}^{N} a_k\right| \leq M \quad \forall N \geq 1$.
  2. La successione b_n è monotona (crescente o decrescente) definitivamente.
  3. $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

  Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. *(Questo criterio è più generale di Leibniz, che è un caso particolare di Dirichlet con* $a_n = (-1)^n$ *o* $(-1)^{n+1}$*).*



4.5 Esercizio d'esame

Stabilire se le seguenti serie sono a termini positivi e convergono semplicemente e/o assolutamente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

   (a) **Cauchy**: $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\frac{1001}{\infty}\right) = \sin(0) = 0$

   (b) **Convergenza assoluta**: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

      i. **Criterio di confronto asintotico**: $a_n = \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right), b_n = \frac{1001}{\sqrt{n}} \to \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1001}{\sqrt{n}}} = 1$
      $\to a_n$ e b_n hanno lo stesso comportamento.

      ii. **Serie armonica generalizzata**: $\frac{1001}{\sqrt{n}} \to \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ diverge

      iii. Grazie al punto precedente possiamo dire che la serie originale non converge assolutamente (perchè è una serie a segno alternato), ora procederemo con Leibnitz

   (c) **Criterio di Leibnitz**:

      i. $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) = 0$? L'abbiamo già fatto nel punto (a)

      ii. Decrescente?

         A. $a_n' = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}\right) = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2n^{\frac{1}{2}}n}\right) = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)$

         B. $a_n' > 0 \begin{cases}\cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) > 0 \to -\frac{\pi}{2} \leq \frac{1001}{\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{2} \to n \geq 406269 \\ \left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right) > 0 \to \text{Impossibile sarà sempre negativo perchè } n \geq 1\end{cases}$

         C. Quindi sapendo che la serie è decrescente con $n \geq 406269$, possiamo dire che anche questo requisito è soddisfatto

   (d) **Conclusione**: visto che la serie soddisfa tutti i requisiti del criterio di Leibnitz allora converge semplicemente.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}$

   (a) **Cauchy**: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1} = 0$

   (b) **Convergenza assoluta**: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}\right|$

      i. **Criterio di confronto asintotico:** $a_n = \frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}, b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(3-(\cos n)^2\right)}{n^3+2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(3-(\cos n)^2\right)}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = 3$$

      ii. **Serie armonica generalizzata**: $\frac{1}{n^2} \to \alpha = 2 \Rightarrow b_n$ converge

   (c) **Conclusione:** Grazie al punto precedente e al teorema del confronto possiamo affermare che la serie converge assolutamente e, di conseguenza, semplicemente.

3. *Data la serie di potenze* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} x^n$ *determinare il raggio di convergenza* ρ *e l'insieme di convergenza puntuale I.*

   (a) **Cauchy**: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} = 0$

   (b) **Convergenza assoluta**: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}\right|$

      i. **Criterio della radice**:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\left|\frac{2^n}{n^2}\right|\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^n}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\left(\ln(2^n)-\ln\left(n^2\right)\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}(n\ln(2)-2\ln(n))} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(2)-\frac{2\ln(n)}{n}} = e^{\ln(2)} = 2\end{aligned}$$

      ii. **Determiniamo** ρ: $\rho = \frac{1}{2}$ per definizione

      iii. **Determinare** I_c:

         A. si "creano" due serie diverse usando l'intervallo $[x_0 - p, x_0 + p]$ e sostituendo x con entrambi gli estremi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2}(x_0-p)^n$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2}(x_0+p)^n$$

         B. **Studiamo la convergenza di entrambe**:

$$\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}\left(0-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2^n+3^{-n})\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^2} = \frac{(-1)^n+\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}$$
$$\to \left|\frac{(-1)^n+\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}\right| = \frac{1+\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}$$
$$= \frac{1}{n^2} + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{serie armonica, converge} \\ \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} \to \frac{\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} & \text{per confronto asintoto } b_n \text{ converge perchè serie geometrica} \end{cases}$$
$$\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}\left(0+\frac{1}{2}\right)^n \to \text{analogamente a quella di sopra converge}$$

         C. Quindi, visto che converge per entrambi gli estremi $I_c = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

5 Polinomio di McLaurin

Consideriamo:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$f^{(k)}(0) = c_k \cdot k!$$

$$P_k(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{k} c_k x^k$$

Funzione $f(x)$	**Serie di Maclaurin**
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
$\frac{1}{1-x}$ (Serie Geometrica)	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$
$(1+x)^\alpha$ (Serie Binomiale)	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$ dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$
$(1-x)^{-k}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k+1)}{2!} x^2 + \dots$ (Questo è un caso speciale della serie binomiale con $\alpha = -k$)

5.1 Trovare $f^{(n)}(0)$ con n molto grande

1. Scomponi $f(0)$ in funzioni le cui serie di McLaurin sono note e riscrivile come sommatorie (praticamente copia e incolla dalla tabella adattando l'argomento)
2. Prendi il coefficiente di ordine n di ogni sommatoria e poi sommali per ottenere il coefficiente totale
3. Sapendo la formula del coefficiente c_k dobbiamo isolare $f^{(k)}(0)$ moltiplicando entrambi i lati per $k!$

Esempio: calcolare $f^{(15)}(0)$ *di* $f(x) = e^{2x} - \frac{x^2}{1+x}$

1. $e^{2x} \to \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2x)^n}{n!} \right) \xrightarrow{n=15} \frac{(2x)^{15}}{15!}$
2. $\frac{x^2}{1+x} \to \sum_{n=0}^{\infty} \left((-x)^n \cdot x^2 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot x^n \cdot x^2 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot x^{n+2} \right) \xrightarrow{n=13} -x^{15}$
3. $a_{15} = \frac{2^{15}}{15!} x^{15} + x^{15} = x^{15} \left(\frac{2^{15}}{15!} + 1 \right) \xrightarrow{\text{togliamo le x}} \frac{2^{15}}{15!} + 1$
4. $f^{(15)}(0) = 15! \cdot a_{15} = 2^{15} \cdot 15!$

5.2 Esercizio da esame

- *Data la funzione* $f(x) = x(e^x - 1) + \ln(1 + x^2) + \sin(2x)$*, calcolarne il polinomio di McLaurin di ordine 4*
  1. Dividiamo $f(x)$ in polinomi che contengono le funzioni elementari quindi avremo:
     - $x(e^x - 1) = x \left(1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 - 1 \right) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3!} + o\left(x^4\right)$
     - $\ln(1 + x^2) = \left(x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)$
     - $\sin(2x) = 2 \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o\left(x^4\right)$
  2. Costruiamo una tabella di questo tipo:

Ordine	$x(e^x-1)$	$\ln(1+x^2)$	$\sin(2x)$	**Somma**
1	/	/	$2x$	$2x$
2	x^2	x^2	/	$2x^2$
3	$\frac{x^3}{2}$	/	$-\frac{(2x)^3}{3!}$	$-\frac{5x^3}{6}$
4	$\frac{x^4}{3!}$	$-\frac{x^4}{2}$	/	$-\frac{x^4}{3}$

Dove andiamo a prendere gli elementi di ciascun polinomio dell'ordine indicato nella prima colonna ed eseguiamo la somma della riga nell'ultima colonna.

3. Poi costruiamo il polinomio $P_4(x)$ sommando l'ultima colonna: $P_4(x) = 2x + 2x^2 - \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{3}$

- *Scrivere il resto di Lagrange $R_1(x)$ di ordine 1 (con centro in 0) della funzione $g(x) = \cos(x^2) + \sin(3x)$ e determinarne una stima per $x \in (0, \frac{1}{4}]$*

1.
$$g'(x) = \frac{d}{dx}(g(x)) = -2x\sin(x^2) + 3\cos(3x)$$
$$g''(x) = \frac{d}{dx}(g'(x)) = -4x^2\cos(x^2) - 2\sin(x^2) - 9\sin(3x)$$

2.
$$R_1(x) = \frac{g''(x)}{2!}x^2$$

3.
$$|g''(x)| \le M$$
$$\left|4x^2\cos(x^2) + 2\sin(x^2) + 9\sin(3x)\right| \le \left|4x^2\cos(x^2)\right| + \left|2\sin(x^2)\right| + |9\sin(3x)|$$

4. Troviamo gli equivalenti asintotici per i singoli elementi di "M"
$$\sin(x^2) \sim x^2$$
$$\sin(3x) \sim 3x$$
$$\cos(x^2) \sim 1 \rightarrow \text{Usiamo 1 perchè vogliamo fare una stima grossolana}$$

5.
$$\left|4x^2\cos(x^2)\right| + \left|2\sin(x^2)\right| + |9\sin(3x)| = 4x^2 + 2x^2 + 27x = 6x^2 + 27x$$

6. Sostituiamo $x = \frac{1}{4}$ perchè è la x più grande che possiamo usare:
$$\frac{3}{8} + \frac{27}{4} = \frac{57}{8}$$

7. Quindi:
$$|R_1(x)| \le \frac{M}{2!}x^2 \rightarrow \frac{57}{8}\frac{1}{2}x^2 = \frac{57}{16}x^2 \simeq 3.56x^2$$

6 Formula di Taylor

$f^{(n)}$ indica l'ordine di derivazione n-esimo

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile infinite volte (C^∞)

6.1 Polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n

$$T^f_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

6.2 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + R_n f(x)$$

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \text{ con } c_n \in \{x_0, x\}$$

Se $x = b$ e x_0 è vicino a b, $T^f_{x_0,n}(b)$ approssima $f(b)$ e $\left|f(b) - T^f_{x_0,n}(b)\right| = |R_n f(b)|$

6.2.1 Determinare una stima del resto di Lagrange

Se dobbiamo calcolarlo con $x \in (0, a]$ al posto della x negli argomenti delle sotto-funzioni ci mettiamo a e calcoliamo M in base a quello.

$$\left|f^{(k+1)}(c)\right| \leq M$$

Dove M è il maggiorante quindi prendiamo tutte le "sotto-funzioni" di $f^{(k+1)}(x)$ e combiniamo tutti i maggioranti tra di loro oppure calcoliamo $f^{(k+1)}(a)$. Per calcolare la stima quindi:

$$|R_k(x)| \leq \frac{M}{(k + 1)!}x^{k+1}$$

Esempio:

$$|f''(x)| = \left|e^{-2x} \cdot 13 \sin(3x + \phi)\right|$$

I valori maggioranti di questi sono 1 e 13 (perchè la funzione seno oscilla tra -1 e 1 ma stiamo usando il modulo). Quindi:

$$M = 1 \cdot 13 = 13$$

Oppure calcoliamo $|f''(a)|$ per trovare M.

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2!}x^2$$

6.3 Formula di Taylor con resti di Peano

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + (x - x_0)^n + \varepsilon(x - x_0) \text{ con } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

6.4 Unicità del Polinomio di Taylor

$$f(x) = (a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n) + \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)^n$$

Dove $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ allora:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

7 Fourier

7.1 Coefficienti

Data una funzione f periodica di periodo T, i coefficienti di Fourier sono dati da:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}kx} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

E usando l'identità di Eulero:

$$\hat{f}_k = \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx\right) - i\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx\right)$$

7.1.1 Coefficienti reali

- $a_k = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$
- $b_k = i(\hat{f}_k + \hat{f}_{-k}) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$

Proprietà:

- Se $f(x)$ è pari $\Rightarrow b_k$ nulli
- Se $f(x)$ è dispari $\Rightarrow a_k$ nulli tranne $a_0 = 0$

7.2 Serie di Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right]$$

7.3 Criterio di Dirichelet

Permette di dire a cosa converge

- **Punti di continuità**: se x_0 è un punto in cui $f(x)$ è continua, la serie di Fourier converge al valore della funzione in quel punto:
$$S(x_0) = f(x_0)$$
- **Punti di discontinuità**: se x_0 è un punto di discontinuità, la serie di Fourier $S(x_0)$ converge al valore medio tra il limite destro e il limite sinistro della funzione in quel punto:
$$S(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$
- **Punti agli estremi dell'intervallo**: per i punti agli estremi dell'intervallo di integrazione, la serie di Fourier converge a:
$$S(\pm L) = \frac{f(L^-) + f(L^+)}{2}$$

7.4 Esercizio d'esame

Sia f la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2\pi + x & x \in [-\pi, 0) \\ 2\pi - x & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

- *Disegna il grafico di f*
- *Calcolare il coefficiente di Fourier $\hat{f}_0$*
  1. Sappiamo che $\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(2\pi + x)dx + \int_{0}^{\pi}(2\pi - x)dx\right] = \frac{3\pi}{2}$
- *Calcolare il coefficiente di Fourier $\hat{f}_k$ per $k \neq 0$*
  1. Se $f(x)$ è pari, i coefficienti b_k sono nulli e i coefficienti $a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(\frac{2\pi}{2\pi}kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$
  2. Poichè $\hat{f}_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ nel nostro caso sarà $\hat{f}_k = \frac{a_k}{2}$

3. Calcoliamo a_k

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (2\pi - x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi k^2} [1 - (-1)^k]$$

4. Quindi dobbiamo calcolare per k pari e $\neq 0$ e dispari:

$$\hat{f}_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ pari e } \neq 0 \end{cases}$$

- *Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo* $[-\pi, \pi)$

1. Sappiamo che $T = 2\pi$
2. Calcoliamo a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (2\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 2\pi dx - \int_0^{\pi} x dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(2\pi \, [x]_0^{\pi} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(2\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{3\pi^2}{2} = 3\pi \end{aligned}$$

3. Sostituiamo a_0, a_k e b_k con quelli calcolati in precedenza

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\pi k^2} [1 - (-1)^k] \cos(kx) \right]$$

8 Funzioni a due variabili

8.1 Derivata parziale

Deriviamo la funzione fissando una variabile e l'altra la trattiamo come costante:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 y + 3xy^2 \\ f_x(x, y) &= \frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 2xy + 3y^2 \\ f_y(x, y) &= \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = x^2 + 6x \end{aligned}$$

8.1.1 Di ordine superiore

Equivalgono alle derivate di ordine superiore al primo, nel caso di derivata parziale mista prima deriviamo per la prima variabile e poi deriviamo il risultato fissando la seconda variabile

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 y + 3xy^2 \\ f_{xx}(x, y) &= \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta x} \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x} \right) = \frac{\vartheta}{\vartheta x} (2xy + 3y^2) = 2y \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = \frac{\vartheta}{\vartheta y} \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x} \right) = \frac{\vartheta}{\vartheta y} (2xy + 3y^2) = 2x \end{aligned}$$

8.2 Gradiente

$$\triangledown f(x_0, y_0) = \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0, y_0), \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0, y_0) \right)$$

8.3 Derivata direzionale

Dato u di modulo 1 $\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1 \right)$

$$D_u f(x_0, y_0) = \triangledown f(x_0, y_0) \cdot u = \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0, y_0) \cdot u_x \right) + \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0, y_0) \cdot u_y \right)$$

8.3.1 Normalizzazione vettore v

$$u = \frac{v}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

8.4 Equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0, z_0)

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0$$

8.5 Punti critici di f

Un punto (x_0, y_0) nel dominio di f è un punto critico se:

- $\bigtriangledown f(x_0, y_0) = (0, 0)$ (Punti **stazionari**)
  1. Calcola $\bigtriangledown f(x, y)$
  2. Trova i punti in cui il gradiente è nullo:
  $$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$
  3. Le coppie di (x, y) che risolvono il sistema ma non appartengono al dominio non sono punti critici.
- oppure, una o entrambe le derivate parziali $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ non esistono

8.5.1 Classificazione

1. Calcolo le derivate parziali seconde:
   - $f_{xx}(x, y)$
   - $f_{yy}(x, y)$
   - $f_{xy}(x, y)$
2. Costruisco la matrice Hessiana (*non necessario*):
$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$
3. Calcolo il determinante: $D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$
4. Per ogni punto critico (x_0, y_0) calcolo $D(x_0, y_0)$:

$D(x_0, y_0) > 0$	$D(x_0, y_0) < 0$	$D(x_0, y_0) = 0$
Minimo locale ($f_{xx}(x_0, y_0) > 0$) Massimo locale ($f_{xx}(x_0, y_0) < 0$)	Punto di sella	Test inconcludente

8.6 Massimi e minimi vincolati (Metodo di Lagrange)

Dato un vincolo $g(x, y) = 0$, cerchiamo i massimi e minimi locali della funzione $f(x, y)$ vincolati a $C = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$. **Metodo:** si introducono i moltiplicatori di Lagrange e si risolve il sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Dove:

- $\nabla f(x, y) = (f_x, f_y)$ è il gradiente della funzione obiettivo
- $\nabla g(x, y) = (g_x, g_y)$ è il gradiente del vincolo
- λ è il moltiplicatore di Lagrange

Interpretazione geometrica: in un punto vincolato di massimo o minimo, i gradienti di f e g sono paralleli $\Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$

Procedura:

1. Calcola ∇f e ∇g
2. Imposta il sistema: $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g(x, y) = 0$
3. Risolvi il sistema per trovare i punti (x, y) candidati
4. Verifica quali sono massimi, minimi (per ogni punto calcola $f(x_0, y_0)$ e guarda qual è il massimo e il minimo)

Con più vincoli: $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y) = 0$ $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ $g_1(x, y) = 0$, $\quad g_2(x, y) = 0$

8.7 Esercizio da esame

Sia $f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - 8x - 4xy + 4y^2 + 12\ln x$

1. *Determinare il dominio di* f *e dire dove* f *è differenziabile*
   (a) Dom$f$: $(0, +\infty)$
   (b) $f_x(x,y) = 3x - 8 - 4y + \frac{12}{x}$ e $f_y(x,y) = -4x + 8y$. Il dominio di queste derivate parziali è $(0, +\infty)$
   (c) Concludiamo dicendo che è differenziabile su tutto il dominio

2. *Calcolare il gradiente nel punto* $(1,0)$*, la derivata direzionale* $\frac{\vartheta f(1,0)}{\vartheta v}$ *per* $v = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ *e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di* f *in* $(1, 0, f(1,0))$
   (a) $\bigtriangledown f(1,0) = (7, -4)$
   (b) $||v|| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$
   (c) $D_v f(1,0) = \bigtriangledown f(1,0) \cdot v = (7,-4) \cdot (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = -\frac{28}{5} - \frac{12}{5} = -8$
   (d)

$$
\begin{aligned}
z &= f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) + z_0 \\
z &= f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) + f(1,0) \\
z &= 7(x-1) - 4y - \frac{13}{2} \\
z &= 7x - 7 - 4y - \frac{13}{2} \\
z &= 7x - 4y - \frac{27}{2}
\end{aligned}
$$

3. *Stabilire quali sono i punti critici di* f *sul suo dominio e classificarli*
   (a)

$$
\begin{cases}
3x - 8 - 4y + \frac{12}{x} = 0 \to x - 8 + \frac{12}{x} = 0 \to x^2 - 8x + 12 = 0 \to x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\
-4x + 8y = 0 \to 8y = 4x \to y = \frac{x}{2}
\end{cases}
$$

   I punti critici sono $(6,3)$ e $(2,1)$
   (b) Calcolo f_{xx}, f_{yy} e f_{xy}
   - $f_{xx}(x,y) = 3 - \frac{12}{x^2}$
   - $f_{yy}(x,y) = 8$
   - $f_{xy}(x,y) = -4$

   (c) Calcolo $D(x,y) = \left(3 - \frac{12}{x^2}\right) \cdot 8 - 16 = 24 - \frac{96}{x^2} - 16 = 8 - \frac{96}{x^2}$
   (d)
   - $(2,1) \to D(2,1) = 8 - \frac{96}{4} = -16 \Rightarrow$ Punto di sella
   - $(6,3) \to D(6,3) = 8 - \frac{96}{36} = \frac{16}{3}, f_{xx}(6,3) = 3 - \frac{12}{36} = \frac{8}{3} \Rightarrow$ Minimo locale

9 Extra

9.1 Metodo dell'angolo aggiunto

Utile per riscrivere funzioni del tipo (a scelta)

$$
A\sin(x) + B\cos(x) = \begin{cases} R\sin(x+\phi) \\ R\cos(x-\phi) \end{cases}
$$

9.1.1 Caso $R\sin(x+\phi)$

1. Sappiamo che $R\sin(x+\phi) = R(\sin(x)\cos(\phi)) + R(\cos(x)\sin(\phi))$
2. $R = \sqrt{A^2 + B^2}$
3.

$$
\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) = \begin{cases} \phi & A > 0, B > 0 \\ \phi + \pi & A < 0, B > 0 \\ \phi + \pi & A < 0, B < 0 \\ \phi & A > 0, B < 0 \end{cases}
$$

9.1.2 Caso $R\cos(x-\phi)$

1. Sappiamo che $R\cos(x-\phi) = R(\cos(x)\cos(\phi)) + R(\sin(x)\sin(\phi))$
2. $R = \sqrt{A^2+B^2}$
3. $$\phi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right) = \begin{cases} \phi & A>0, B>0 \\ \phi+\pi & A<0, B>0 \\ \phi+\pi & A<0, B<0 \\ \phi & A>0, B<0 \end{cases}$$

9.1.3 Esempio

$$\begin{aligned} & -5\sin(3x) - 12\cos(3x) \\ & A=-5, B=-12 \\ & R=\sqrt{25+144}=13 \\ & \phi = \arctan\left(\frac{-12}{-5}\right) \simeq 1.17+\pi \\ & -5\sin(3x)-12\cos(3x) \to 13\sin(3x+\phi) \end{aligned}$$

9.2 Determinare crescenza/decrescenza velocemente

Se $h(n) = f(g(n))$

$g(n)$	$f(x)$	$h(n)$
decrescente	crescente	descrescente
descrescente	decrescente	crescente
crescente	crescente	crescente
crescente	decrescente	decrescente

9.3 Formule utili

Le forme indeterminate del tipo $f(n)^{g(n)} = \{0^0, \infty^0, 1^\infty\}$ si risolvono: $f(n)^{g(n)} = e^{g(n)\ln(f(n))}$

9.4 Equivalenze Asintotiche Notevoli (per $x \to 0$ e $n \to +\infty$ rispettivamente):

Funzione	**Equivalenza asintotica**	**Dominio**
$\sin x$	x	$x \to 0$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2}$	$x \to 0$
$\tan x$	x	$x \to 0$
$\arcsin x$	x	$x \to 0$
$\arctan x$	x	$x \to 0$
$\ln(1+x)$	x	$x \to 0$
e^x-1	x	$x \to 0$
$(1+x)^\alpha-1$	αx	$x \to 0, \alpha \neq 0$
$\sqrt{1+x}-1$	$\frac{x}{2}$	$x \to 0$
$\cos x-1$	$-\frac{x^2}{2}$	$x \to 0$
$1-\cos x$	$\frac{x^2}{2}$	$x \to 0$
$\cosh x-1$	$\frac{x^2}{2}$	$x \to 0$
$\sinh x$	x	$x \to 0$
$\tanh x$	x	$x \to 0$

Funzione	**Equivalenza asintotica**
$\sin\left(\frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{n}$
$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{n}$
$e^{1/n}-1$	$\frac{1}{n}$
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$	$\frac{e}{2n}$
$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$
$\ln(n+1)-\ln n$	$\frac{1}{n}$

Formule di Stirling:

- $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ per $n \to +\infty$
- $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ per $n \to +\infty$
- $\{(n!)^2\} \sim \frac{2\pi n}{e^{2n}}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} = \frac{2\pi n}{e^{2n}}(n!)^2$