1 Serie Notevoli

Tipo di Serie	Forma	Comportamento
Armonica Generalizzata	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$	$\begin{cases} \text{Converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$
Geometrica	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (o $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$)	$\begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } \lvert q\rvert < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{Indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$

2 Serie di Funzioni

Data la serie di funzioni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

1. **Converge puntualmente** su I se la serie converge $\forall x \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$
2. **Converge assolutamente** su I se la serie a termini positivi ($|f_n(x)|$) converge $\forall x \in I$

Se per qualche $x \in I$ la serie diverge o è indeterminata, bisogna restringere il dominio della funzione somma $f(x)$ all'insieme:

$$\left\{ x \in I \mid \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$$

2.1 Criterio di Weierstrass

Data una serie di funzioni, se la serie numerica a termini positivi converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$$

allora la serie di funzioni converge assolutamente e puntualmente (= totalmente) su I.

2.2 Strategia di Studio della Convergenza

1. **Convergenza Puntuale:** Determinare l'insieme I_p per cui $\forall x \in I_p$, la serie numerica $\sum f_n(x)$ converge. (Spesso con Criteri per serie numeriche).
2. **Convergenza Assoluta:** Su I_p, studiare $\sum |f_n(x)|$.
3. **Convergenza Uniforme/Totale:**
   - Tentare il **Criterio di Weierstrass**: se $\sum \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ converge, allora la serie converge totalmente su I.
   - Se Weierstrass non funziona su I_p (es. perché $\sup |f_n(x)|$ diverge, ma la serie converge comunque), cercare intervalli $J \subset I_p$ dove $\sup |f_n(x)|$ è finito e applicare Weierstrass.
   - (Meno comune per gli esami, ma utile: altri criteri come quello di Abel-Dirichlet per convergenza uniforme.)

Convergenza totale $\Rightarrow$ convergenza puntuale

2.3 Corollari

2.3.1 Continuità della somma

Se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $I \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su I ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è continua su I.

2.3.2 Integrazione temine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni f_n sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su $[a, b]$ ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

2.3.3 Derivazione termine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su I se:

1. Le funzioni f_n sono derivabili e le derivate sono funzioni continue $\forall n \geq 1$
2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente su I
3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge totalmente su I

Allora $f(x)$ derivabile e:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in I$$

2.3.4 Corollario 1.34

Data una serie di funzioni definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalamente su (a, b)

Allora la serie converge totalmente su $[a, b]$ e la funzione somma è continua su $[a, b]$

3 Serie di potenze

La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si chiama **serie di potenze di centro 0**

3.1 Raggio di Convergenza R

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze di centro 0. Esiste un unico $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, detto Raggio di Convergenza, tale che:

- Se $R = 0$: la serie converge **solo in** $x = 0$.
- Se $0 < R < +\infty$:
  - Converge **assolutamente** su $(-R, R)$.
  - Converge **totalmente** su $[-K, K]$ per ogni $0 < K < R$.
  - Non converge per $|x| > R$.
- Se $R = +\infty$: la serie converge **assolutamente** su $\mathbb{R}$ e **totalmente** su $[-K, K]$ per ogni $K > 0$.

Nota: La convergenza agli estremi $x = \pm R$ deve essere studiata separatamente (convergenza puntuale).

3.1.1 Calcolo di R (Criteri del Rapporto/Radice)

Sia $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ o $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora il raggio di convergenza R è dato da:

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ \frac{1}{l} & \text{se } l \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

3.2 Insieme di Convergenza Puntuale I_c

L'insieme di convergenza puntuale si ottiene studiando la convergenza della serie negli estremi dell'intervallo $(-R, R)$.

1. Sostituire $x = R$ nella serie e studiare la convergenza della serie numerica $\sum a_n R^n$.
2. Sostituire $x = -R$ nella serie e studiare la convergenza della serie numerica $\sum a_n (-R)^n$.
3. L'insieme I_c sarà $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$ o $[-R, R]$ a seconda della convergenza agli estremi.

3.3 Proprietà della Funzione Somma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$.

- **Continuità:** La funzione somma $f(x)$ è continua sull'intervallo aperto $(-R, R)$.
- **Derivabilità Termine a Termine:** $f(x)$ è derivabile infinite volte su $(-R, R)$, e la sua derivata k-esima si ottiene derivando la serie termine a termine:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad \forall x \in (-R, R)$$

  Il raggio di convergenza delle serie derivate è ancora R.
- **Integrazione Termine a Termine:** $f(x)$ è integrabile su ogni intervallo compatto contenuto in $(-R, R)$, e la sua primitiva si ottiene integrando la serie termine a termine:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

  Il raggio di convergenza della serie integrata è ancora R.
- **Coefficienti di Maclaurin:** I coefficienti a_n della serie di potenze sono legati alle derivate della funzione somma $f(x)$ nel centro $(x = 0)$ dalla relazione fondamentale:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{o equivalentemente } f^{(n)}(0) = n!a_n$$

  Questo significa che la serie di potenze è lo sviluppo di Maclaurin della sua funzione somma.
- **Unicità dello Sviluppo:** Se due serie di potenze di centro 0 convergono alla stessa funzione su un intervallo $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$, allora i loro coefficienti devono essere identici: $a_n = b_n$ per ogni n.

4 Convergenza e Divergenza delle Serie Numeriche

4.1 Convergenza Assoluta e Semplice

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente se } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge.}$$

Teorema: Se una serie converge assolutamente $\implies$ converge semplicemente.

4.2 Condizione Necessaria di Cauchy per le Serie

Data una serie qualsiasi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{può} \text{ convergere o divergere (caso dubbio)} \\ \neq 0 \text{ o non esiste} & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{diverge} \text{ sicuramente} \end{cases}$$

Nota: Questa condizione è **necessaria ma non sufficiente** alla convergenza della serie.

4.3 Criteri di Convergenza/Divergenza per Serie a Termini Definitivamente Positivi

(*Ovvero* $\exists n_0$ *tale che* $a_n \geq 0$ *per ogni* $n \geq n_0$)

- **Criterio del Rapporto** (Utile con fattoriali $n!$ o potenze con n all'esponente): Sia $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
  1. Se $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge.
  2. Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge.
  3. Se $l = 1 \Rightarrow$ il criterio non fornisce informazioni (la serie può convergere o divergere).
- **Criterio della Radice** (Utile con potenze n-esime come $(f(n))^n$): Sia $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.
  1. Se $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge.
  2. Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge.
  3. Se $l = 1 \Rightarrow$ il criterio non fornisce informazioni.
- **Criterio del Confronto**: Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente.
  - Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
  - Se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.
- **Criterio del Confronto Asintotico**: Siano $a_n, b_n > 0$ definitivamente. Sia $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

$$\begin{cases} L \in (0, +\infty) & \Rightarrow \sum a_n \text{ e } \sum b_n \text{ hanno lo stesso comportamento (convergenza/divergenza)} \\ L = 0 & \Rightarrow \text{Se } \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge (se } \sum b_n \text{ diverge, nulla si può dire)} \\ L = +\infty & \Rightarrow \text{Se } \sum b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge (se } \sum b_n \text{ converge, nulla si può dire)} \end{cases}$$

  Suggerimento per scegliere b_n: Prendi i termini di grado maggiore in numeratore e denominatore di a_n. (Es. $a_n = \frac{n+1}{n^2+3} \Rightarrow b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$)
- **Test dell'Integrale**: Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva e decrescente. Posto $a_n = f(n)$ per ogni $n \geq 1$, allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

  Inoltre, valgono le disuguaglianze per la somma S della serie e l'integrale improprio I:

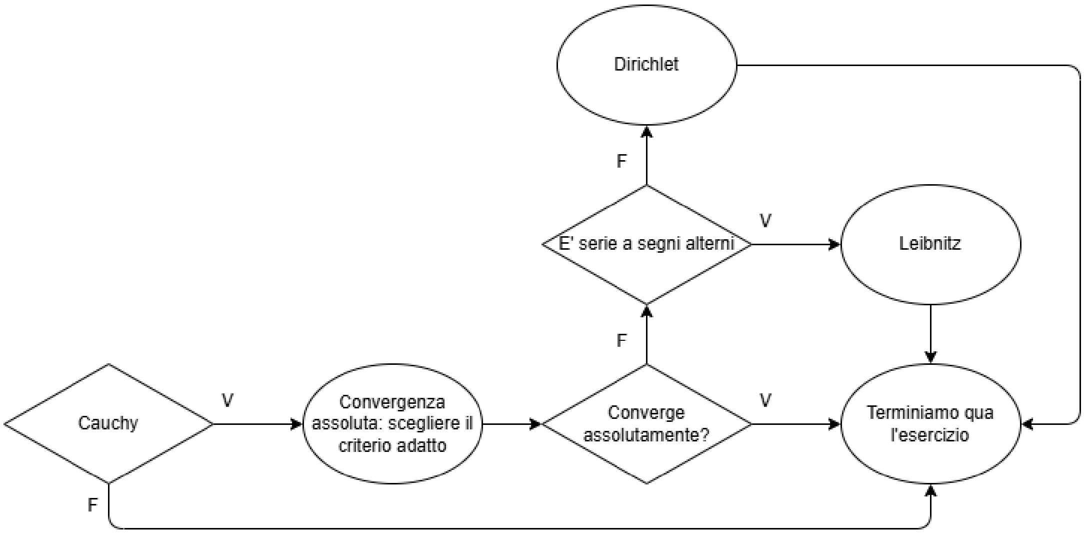
$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \leq S \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

4.4 Criteri di Convergenza per Serie a Termini di Segno Alterno

- **Criterio di Leibniz** (per serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$): Se la successione a_n soddisfa le seguenti condizioni:
  1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
  2. a_n è decrescente definitivamente ($a_{n+1} \leq a_n$ per $n \geq n_0$)

  allora la serie converge **semplicemente**.
- **Stima dell'Errore per Serie di Leibniz**: Se una serie converge per il criterio di Leibniz a una somma S, e S_N è la somma parziale fino all'N-esimo termine, allora l'errore commesso è limitato dal primo termine tralasciato: $|S - S_N| \leq a_{N+1}$.
- **Criterio di Dirichlet (per serie numeriche)**: Consideriamo una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Se valgono le seguenti condizioni:
  1. Le somme parziali di $\sum a_n$ sono limitate: $\exists M > 0 \mid \left|\sum_{k=1}^{N} a_k\right| \leq M \quad \forall N \geq 1$.
  2. La successione b_n è monotona (crescente o decrescente) definitivamente.
  3. $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

  Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. *(Questo criterio è più generale di Leibniz, che è un caso particolare di Dirichlet con* $a_n = (-1)^n$ *o* $(-1)^{n+1}$*).*


Dirichlet
F
E' serie a segni alterni
V
Leibnitz
F
Cauchy
V
Convergenza assoluta: scegliere il criterio adatto
Converge assolutamente?
V
Terminiamo qua l'esercizio
F

4.5 Esercizio d'esame

Stabilire se le seguenti serie sono a termini positivi e convergono semplicemente e/o assolutamente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

   (a) **Cauchy**: $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)=\sin\left(\frac{1001}{\infty}\right)=\sin(0)=0$

   (b) **Convergenza assoluta**: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

      i. **Criterio di confronto asintotico**: $a_n=\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right), b_n=\frac{1001}{\sqrt{n}}\to\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1001}{\sqrt{n}}}=1$
      $\to a_n$ e b_n hanno lo stesso comportamento.

      ii. **Serie armonica generalizzata**: $\frac{1001}{\sqrt{n}}\to\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow$ diverge

      iii. Grazie al punto precedente possiamo dire che la serie originale non converge assolutamente (perchè è una serie a segno alternato), ora procederemo con Leibnitz

   (c) **Criterio di Leibnitz**:

      i. $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)=0$? L'abbiamo già fatto nel punto (a)

      ii. Decrescente?

         A. $a_n'=\cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)=\cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2n^{\frac{1}{2}}n}\right)=\cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)$

         B. $a_n'>0\begin{cases}\cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)>0\to-\frac{\pi}{2}\le\frac{1001}{\sqrt{n}}\le\frac{\pi}{2}\to n\ge 406269\\ \left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)>0\to \text{Impossibile sarà sempre negativo perchè } n\ge 1\end{cases}$

         C. Quindi sapendo che la serie è decrescente con $n\ge 406269$, possiamo dire che anche questo requisito è soddisfatto

   (d) **Conclusione**: visto che la serie soddisfa tutti i requisiti del criterio di Leibnitz allora converge semplicemente.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}$

   (a) **Cauchy**: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}=0$

   (b) **Convergenza assoluta**: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}\right|$

      i. **Criterio di confronto asintotico:** $a_n=\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}, b_n=\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(3-(\cos n)^2\right)}{n^3+2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(3-(\cos n)^2\right)}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=3$$

      ii. **Serie armonica generalizzata**: $\frac{1}{n^2}\to\alpha=2\Rightarrow b_n$ converge

   (c) **Conclusione:** Grazie al punto precedente e al teorema del confronto possiamo affermare che la serie converge assolutamente e, di conseguenza, semplicemente.

3. *Data la serie di potenze* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}x^n$ *determinare il raggio di convergenza* ρ *e l'insieme di convergenza puntuale* I.

   (a) **Cauchy**: $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}=0$

   (b) **Convergenza assoluta**: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}\right|$

Le forme indeterminate del tipo $f(n)^{g(n)}=\{0^0,\infty^0,1^\infty\}$ si risolvono $f(n)^{g(n)}=e^{g(n)\ln(f(n))}$

      i. **Criterio della radice**:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{2^n}{n^2}\right|\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^n}{n^2}\right)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\left(\ln(2^n)-\ln\left(n^2\right)\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}(n\ln(2)-2\ln(n))}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln(2)-\frac{2\ln(n)}{n}}=e^{\ln(2)}=2$$

      ii. **Determiniamo** ρ: $\rho=\frac{1}{2}$ per definizione

iii. **Determinare** I_c:

A. si "creano" due serie diverse usando l'intervallo $[x_0 - p, x_0 + p]$ e sostituendo x con entrambi gli estremi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^{-n}}{n^2} (x_0 - p)^n$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^{-n}}{n^2} (x_0 + p)^n$$

B. **Studiamo la convergenza di entrambe**:

$$\frac{2^n + 3^{-n}}{n^2}\left(0 - \frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(2^n + 3^{-n}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^2} = \frac{(-1)^n + \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}$$
$$\rightarrow \left|\frac{(-1)^n + \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}\right| = \frac{1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}$$
$$= \frac{1}{n^2} + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{serie armonica, converge} \\ \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} \rightarrow \frac{\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} & \text{per confronto asintoto } b_n \text{ converge perchè serie geometrica} \end{cases}$$
$$\frac{2^n + 3^{-n}}{n^2}\left(0 + \frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \text{analogamente a quella di sopra converge}$$

C. Quindi, visto che converge per entrambi gli estremi $I_c = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

5 Polinomio di McLaurin

Consideriamo:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$
$$f^{(k)}(0) = c_k \cdot k!$$
$$P_k(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{k} c_k x^k$$

Funzione $f(x)$	**Serie di Maclaurin**
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
$\frac{1}{1-x}$ (Serie Geometrica)	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$
$(1+x)^\alpha$ (Serie Binomiale)	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$ dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$
$(1-x)^{-k}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k+1)}{2!} x^2 + \dots$ (Questo è un caso speciale della serie binomiale con $\alpha = -k$)

5.1 Esercizio da esame

- *Data la funzione $f(x) = x(e^x - 1) + \ln(1 + x^2) + \sin(2x)$, calcolarne il polinomio di McLaurin di ordine 4*

  1. Dividiamo $f(x)$ in polinomi che contengono le funzioni elementari quindi avremo:
     - $x(e^x - 1) = x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - 1\right) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3!}$
     - $\ln(1 + x^2) = \left(x^2 - \frac{(x^2)^2}{2}\right) = x^2 - \frac{x^4}{2}$
     - $\sin(2x) = 2\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!}$
  2. Costruiamo una tabella di questo tipo:

Ordine	$x(e^x - 1)$	$\ln(1 + x^2)$	$\sin(2x)$	**Somma**
1	/	/	$2x$	$2x$
2	x^2	x^2	/	$2x^2$
3	$\frac{x^3}{2}$	/	$-\frac{(2x)^3}{3!}$	$-\frac{5x^3}{6}$
4	$\frac{x^4}{3!}$	$-\frac{x^4}{2}$	/	$-\frac{x^4}{3}$

     Dove andiamo a prendere gli elementi di ciascun polinomio dell'ordine indicato nella prima colonna ed eseguiamo la somma della riga nell'ultima colonna.
  3. Poi costruiamo il polinomio $P_4(x)$ sommando l'ultima colonna: $P_4(x) = 2x + 2x^2 - \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{3}$

- *Scrivere il resto di Lagrange $R_1(x)$ di ordine 1 (con centro in 0) della funzione $g(x) = \cos(x^2) + \sin(3x)$ e determinarne una stima per $x \in (0, \frac{1}{4}]$*

  1.

6 Formula di Taylor

$f^{(n)}$ indica l'ordine di derivazione n-esimo

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile infinite volte (C^∞)

6.1 Polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n

$$T^f_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

6.2 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + R_n f(x)$$
$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \quad \text{con } c_n \in \{x_0, x\}$$

Se $x = b$ e x_0 è vicino a b, $T^f_{x_0,n}(b)$ approssima $f(b)$ e $\left|f(b) - T^f_{x_0,n}(b)\right| = |R_n f(b)|$

6.3 Formula di Taylor con resti di Peano

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + (x - x_0)^n + \varepsilon(x - x_0) \text{ con } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

6.4 Unicità del Polinomio di Taylor

$$f(x) = (a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n) + \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)^n$$

Dove $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ allora:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Polinomi di Taylor di centro $x_0 = 0$ di alcune funzioni elementari.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x) \\
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x) \\
\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_n(x) \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R_n(x) \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_n(x) \\
\arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x) \qquad \alpha \notin \mathbb{N} \\
(1-x)^{-k} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k-1}{k-1} x^j + R_n(x) \qquad k \in \mathbb{N},\, k \geq 1
\end{aligned}
$$

7 Fourier

7.1 Coefficienti

Data una funzione f periodica di periodo T, i coefficienti di Fourier sono dati da:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}kx} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

E usando l'identità di Eulero:

$$\hat{f}_k = \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx\right) - i\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx\right)$$

7.1.1 Coefficienti reali

- $a_k = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$
- $b_k = i(\hat{f}_k + \hat{f}_{-k}) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$

Proprietà:

- Se $f(x)$ è pari $\Rightarrow b_k$ nulli
- Se $f(x)$ è dispari $\Rightarrow a_k$ nulli tranne $a_0 = 0$

7.2 Serie di Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right]$$

7.3 Criterio di Dirichelet

Permette di dire a cosa converge

- **Punti di continuità**: se x_0 è un punto in cui $f(x)$ è continua, la serie di Fourier converge al valore della funzione in quel punto:
$$S(x_0) = f(x_0)$$
- **Punti di discontinuità**: se x_0 è un punto di discontinuità, la serie di Fourier $S(x_0)$ converge al valore medio tra il limite destro e il limite sinistro della funzione in quel punto:
$$S(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$
- **Punti agli estremi dell'intervallo**: per i punti agli estremi dell'intervallo di integrazione, la serie di Fourier converge a:
$$S(\pm L) = \frac{f(L^-) + f(L^+)}{2}$$

7.4 Esercizio d'esame

Sia f la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2\pi + x & x \in [-\pi, 0) \\ 2\pi - x & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

- *Disegna il grafico di f*
- *Calcolare il coefficiente di Fourier $\hat{f}_0$*
  1. Sappiamo che $\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(2\pi + x)dx + \int_0^{\pi}(2\pi - x)dx\right] = \frac{3\pi}{2}$
- *Calcolare il coefficiente di Fourier $\hat{f}_k$ per $k \neq 0$*
  1. Se $f(x)$ è pari, i coefficienti b_k sono nulli e i coefficienti $a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(\frac{2\pi}{2\pi}kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$
  2. Poichè $\hat{f}_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ nel nostro caso sarà $\hat{f}_k = \frac{a_k}{2}$

3. Calcoliamo a_k

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2\pi - x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi k^2}[1-(-1)^k]$$

4. Quindi dobbiamo calcolare per k pari e $\neq 0$ e dispari:

$$\hat{f}_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ pari e } \neq 0 \end{cases}$$

- *Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo* $[-\pi, \pi)$

1. Sappiamo che $T = 2\pi$
2. Calcoliamo a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 2\pi dx - \int_0^{\pi} x dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(2\pi\,[x]_0^{\pi} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(2\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{3\pi^2}{2} = 3\pi \end{aligned}$$

3. Sostituiamo a_0, a_k e b_k con quelli calcolati in precedenza

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{2}{\pi k^2}[1-(-1)^k]\cos(kx)\right]$$

8 Funzioni a due variabili

8.1 Derivata parziale

Deriviamo la funzione fissando una variabile e l'altra la trattiamo come costante:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y + 3xy^2 \\ f_x(x,y) &= \frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 2xy + 3y^2 \\ f_y(x,y) &= \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = x^2 + 6x \end{aligned}$$

8.1.1 Di ordine superiore

Equivalgono alle derivate di ordine superiore al primo, nel caso di derivata parziale mista prima deriviamo per la prima variabile e poi deriviamo il risultato fissando la seconda variabile

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y + 3xy^2 \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta x}(2xy + 3y^2) = 2y \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta y}(2xy + 3y^2) = 2x \end{aligned}$$

8.2 Gradiente

$$\bigtriangledown f(x_0, y_0) = \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0, y_0), \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0, y_0)\right)$$

8.3 Derivata direzionale

Dato u di modulo 1 $\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1\right)$

$$D_u f(x_0, y_0) = \bigtriangledown f(x_0, y_0)\cdot u = \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0, y_0)\cdot u_x\right) + \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0, y_0)\cdot u_y\right)$$

8.3.1 Normalizzazione vettore v

$$u = \frac{v}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

8.4 Equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ z &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0 \end{aligned}$$

8.5 Punti critici di f

Un punto (x_0, y_0) nel dominio di f è un punto critico se:

- $\bigtriangledown f(x_0, y_0) = (0, 0)$ (Punti **stazionari**)
  1. Calcola $\bigtriangledown f(x, y)$
  2. Trova i punti in cui il gradiente è nullo:
  $$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$
  3. Le coppie di (x, y) che risolvono il sistema ma non appartengono al dominio non sono punti critici.
- oppure, una o entrambe le derivate parziali $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ non esistono

8.5.1 Classificazione

1. Calcolo le derivate parziali seconde:
   - $f_{xx}(x, y)$
   - $f_{yy}(x, y)$
   - $f_{xy}(x, y)$
2. Costruisco la matrice Hessiana (*non necessario*):
$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$
3. Calcolo il determinante: $D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$
4. Per ogni punto critico (x_0, y_0) calcolo $D(x_0, y_0)$:

$D(x_0, y_0) > 0$	$D(x_0, y_0) < 0$	$D(x_0, y_0) = 0$
Minimo locale ($f_{xx}(x_0, y_0) > 0$) Massimo locale ($f_{xx}(x_0, y_0) < 0$)	Punto di sella	Test inconcludente

8.6 Esercizio da esame

Sia $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - 8x - 4xy + 4y^2 + 12 \ln x$

1. *Determinare il dominio di f e dire dove f è differenziabile*
   (a) Dom$f$: $(0, +\infty)$
   (b) $f_x(x, y) = 3x - 8 - 4y + \frac{12}{x}$ e $f_y(x, y) = -4x + 8y$. Il dominio di queste derivate parziali è $(0, +\infty)$
   (c) Concludiamo dicendo che è differenziabile su tutto il dominio
2. *Calcolare il gradiente nel punto* $(1, 0)$*, la derivata direzionale* $\frac{\vartheta f(1,0)}{\vartheta v}$ *per* $v = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ *e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in* $(1, 0, f(1, 0))$
   (a) $\bigtriangledown f(1, 0) = (7, -4)$
   (b) $||v|| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$
   (c) $D_v f(1, 0) = \bigtriangledown f(1, 0) \cdot v = (7, -4) \cdot (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = -\frac{28}{5} - \frac{12}{5} = -8$
   (d)
$$\begin{aligned} z &= f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) + z_0 \\ z &= f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) + f(1, 0) \\ z &= 7(x - 1) - 4y - \frac{13}{2} \\ z &= 7x - 7 - 4y - \frac{13}{2} \\ z &= 7x - 4y - \frac{27}{2} \end{aligned}$$

3. *Stabilire quali sono i punti critici di f sul suo dominio e classificarli*

   (a)

$$\begin{cases} 3x-8-4y+\frac{12}{x}=0 \rightarrow x-8+\frac{12}{x}=0 \rightarrow x^2-8x+12=0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm4}{2}=\begin{cases} x_1=6 \\ x_2=2 \end{cases} \\ -4x+8y=0 \rightarrow 8y=4x \rightarrow y=\frac{x}{2} \end{cases}$$

   I punti critici sono $(6,3)$ e $(2,1)$

   (b) Calcolo f_{xx}, f_{yy} e f_{xy}

   - $f_{xx}(x,y)=3-\frac{12}{x^2}$
   - $f_{yy}(x,y)=8$
   - $f_{xy}(x,y)=-4$

   (c) Calcolo $D(x,y)=\left(3-\frac{12}{x^2}\right)\cdot 8-16=24-\frac{96}{x^2}-16=8-\frac{96}{x^2}$

   (d)
   - $(2,1)\rightarrow D(2,1)=8-\frac{96}{4}=-16 \Rightarrow$ Punto di sella
   - $(6,3)\rightarrow D(6,3)=8-\frac{96}{36}=\frac{16}{3}, f_{xx}(6,3)=3-\frac{12}{36}=\frac{8}{3} \Rightarrow$ Minimo locale