

Tipo di Serie	Forma	Comportamento
Armonica Generalizzata	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$	$\begin{cases} \text{Converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$
Geometrica	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (o $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$)	$\begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{Indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$
Serie di Funzioni	$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$	
Serie di Potenze	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n+1)}$	
Serie a segni alterni	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$	
Serie a segni positivi	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	

1 Serie di potenze

1.1 Raggio di Convergenza R

Sia $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ o $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora il raggio di convergenza R è dato da:

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ \frac{1}{l} & \text{se } l \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

1.2 Insieme di Convergenza Puntuale I_c

L'insieme di convergenza puntuale si ottiene studiando la convergenza della serie negli estremi dell'intervallo $(-R, R)$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\pm R)^n$
- L'insieme I_c sarà $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$ o $[-R, R]$ a seconda della convergenza agli estremi.

2 Convergenza e Divergenza delle Serie Numeriche

2.1 Convergenza Assoluta e Semplice

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente se } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge.}$$

Teorema: Se una serie converge assolutamente \implies converge semplicemente.

2.2 Condizione Necessaria di Cauchy per le Serie

Data una serie qualsiasi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{la serie **può** convergere o divergere (caso dubbio)} \\ \neq 0 \text{ o non esiste} & \Rightarrow \text{la serie **diverge** sicuramente} \end{cases}$$

Nota: Questa condizione è **necessaria ma non sufficiente** alla convergenza della serie.

2.3 Criteri di Convergenza/Divergenza per Serie a Termini Definitivamente Positivi

(Ovvero $\exists n_0$ tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq n_0$)

- **Criterio del Rapporto** (Utile con fattoriali $n!$ o potenze con n all'esponente): Sia $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
 1. Se $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge.
 2. Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge.
 3. Se $l = 1 \Rightarrow$ il criterio non fornisce informazioni (la serie può convergere o divergere).
- **Criterio della Radice** (Utile con potenze n -esime come $(f(n))^n$): Sia $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$.
 1. Se $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge.
 2. Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge.
 3. Se $l = 1 \Rightarrow$ il criterio non fornisce informazioni.
- **Criterio del Confronto**: Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente.
 - Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
 - Se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.
- **Criterio del Confronto Asintotico**: Siano $a_n, b_n > 0$ definitivamente. Sia $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

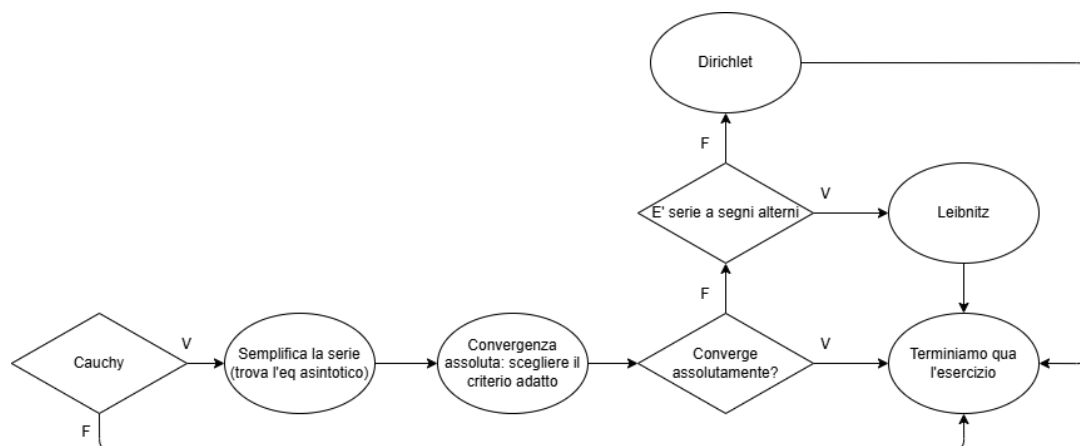
$$\begin{cases} L \in (0, +\infty) & \Rightarrow \sum a_n \text{ e } \sum b_n \text{ hanno lo stesso comportamento (convergenza/divergenza)} \\ L = 0 & \Rightarrow \text{Se } \sum b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum a_n \text{ converge (se } \sum b_n \text{ diverge, nulla si può dire)} \\ L = +\infty & \Rightarrow \text{Se } \sum b_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge (se } \sum b_n \text{ converge, nulla si può dire)} \end{cases}$$

Suggerimento per scegliere b_n : Prendi i termini di grado maggiore in numeratore e denominatore di a_n . (Es. $a_n = \frac{n+1}{n^2+3} \Rightarrow b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$)

2.4 Criteri di Convergenza per Serie a Termini di Segno Alterno

- **Criterio di Leibniz** (per serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$): Se la successione a_n soddisfa le seguenti condizioni:
 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
 2. a_n è decrescente definitivamente ($a_{n+1} \leq a_n$ per $n \geq n_0$)
 allora la serie converge **semplicemente**.
- **Stima dell'Errore per Serie di Leibniz**: Se una serie converge per il criterio di Leibniz a una somma S , e S_N è la somma parziale fino all' N -esimo termine, allora l'errore commesso è limitato dal primo termine tralasciato: $|S - S_N| \leq a_{N+1}$.
- **Criterio di Dirichlet (per serie numeriche)**: Consideriamo una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Se valgono le seguenti condizioni:
 1. Le somme parziali di $\sum a_n$ sono limitate: $\exists M > 0 \mid \left| \sum_{k=1}^N a_k \right| \leq M \quad \forall N \geq 1$.
 2. La successione b_n è monotona (crescente o decrescente) definitivamente.
 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. (Questo criterio è più generale di Leibniz, che è un caso particolare di Dirichlet con $a_n = (-1)^n$ o $(-1)^{n+1}$).



2.5 Esercizio d'esame

Dire se le seguenti serie convergono semplicemente e/o assolutamente

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n} - 1}{\binom{2n}{3n}}$

1. $\binom{2n}{3n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{27}{4}\right)^n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^n \sim \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^n$

2. Cauchy: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n} - 1}{\binom{2n}{3n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi n}} \left(\frac{27}{4}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n\sqrt{\pi} - 2\sqrt{\pi n}}{\sqrt{3} \left(\frac{27}{4}\right)^n} = 0$ verificato

3. Equivalente asintotico: $\frac{4n\sqrt{\pi} - 2\sqrt{\pi n}}{\sqrt{3} \left(\frac{27}{4}\right)^n} \sim \frac{n}{\left(\frac{27}{4}\right)^n}$

4. Criterio della radice: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\left(\frac{27}{4}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\frac{27}{4}}\right) = \frac{1}{\frac{27}{4}} = \frac{4}{27} < 1 \Rightarrow$ converge assolutamente

• $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{n^2 - 2n + 1}$

1. Cauchy: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{n^2 - 2n + 1} = \frac{+\infty}{+\infty_2} = 0$ verificato

2. Equivalente asintotico: $\frac{3n}{n^2 - 2n + 1} \sim \frac{n}{n^2} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow$ non converge assolutamente (serie armonica generalizzata $\alpha \leq 1$)

3. Leibnitz:

(a) Cauchy verificato prima

(b) Decrescente?

$$\frac{3n}{(n-1)^2} \geq \frac{3(n+1)}{((n+1)-1)^2}$$

$$\frac{n}{(n-1)^2} \geq \frac{(n+1)}{((n+1)-1)^2}$$

$$n \geq \frac{(n+1)(n-1)^2}{((n+1)-1)^2}$$

$$n((n+1)-1)^2 \geq (n+1)(n-1)^2$$

$$n^2 + n - 1 \geq 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow \text{decrescente da qua in poi}$$

(c) Soddisfa entrambi i requisiti quindi converge semplicemente

• Determinare l'insieme di convergenza puntuale I della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n} x^n$

1. Cauchy: $\frac{n}{5^n} = 0$

2. Criterio della radice: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{5^n}\right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{5} = \frac{1}{5}$

3. $R = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

4. $\sum \frac{n}{5^n} (-5)^n = \sum -n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |-n| = +\infty$

5. $\sum \frac{n}{5^n} 5^n = \sum n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

6. $I = (-5, 5)$

3 Polinomio di McLaurin

Consideriamo:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$f^{(k)}(0) = c_k \cdot k!$$

$$P_k(x) = f(0) + \sum_{n=1}^k c_k x^k$$

Funzione $f(x)$	Serie di Maclaurin
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
$\frac{1}{1-x}$ (Serie Geometrica)	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$
$(1+x)^\alpha$ (Serie Binomiale)	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$ dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$
$(1-x)^{-k}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k+1)}{2!} x^2 + \dots$ (Questo è un caso speciale della serie binomiale con $\alpha = -k$)

3.1 Trovare $f^{(n)}(0)$ con n molto grande

1. Scomponi $f(0)$ in funzioni le cui serie di McLaurin sono note e riscrivile come sommatorie (praticamente copia e incolla dalla tabella adattando l'argomento)
2. Prendi il coefficiente di ordine n di ogni sommatoria e poi sommalo per ottenere il coefficiente totale
3. Sapendo la formula del coefficiente c_k dobbiamo isolare $f^{(k)}(0)$ moltiplicando entrambi i lati per $k!$

Esempio: calcolare $f^{(15)}(0)$ di $f(x) = e^{2x} - \frac{x^2}{1+x}$

1. $e^{2x} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2x)^n}{n!} \right) \xrightarrow{n=15} \frac{(2x)^{15}}{15!}$
2. $\frac{x^2}{1+x} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ((-x)^n \cdot x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n \cdot x^n \cdot x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n \cdot x^{n+2}) \xrightarrow{n=13} -x^{15}$
3. $a_{15} = \frac{2^{15}}{15!} x^{15} + x^{15} = x^{15} \left(\frac{2^{15}}{15!} + 1 \right) \xrightarrow{\text{togliamo le } x} \frac{2^{15}}{15!} + 1$
4. $f^{(15)}(0) = 15! \cdot a_{15} = 2^{15} \cdot 15!$

3.2 Resto di Lagrange

Per trovare il resto di Lagrange di ordine k con centro x_0 (solitamente è 0) di una funzione $g(x)$:

$$R_k(x) = \frac{g''(x)}{(k+1)!} x^{(k+1)}$$

Per fare una stima in un intervallo $x \in I$:

1. $|g''(x)| \leq M$
2. M è la sommatoria di tutti gli elementi di $g''(x)$ a modulo, è possibile usare la disuguaglianza triangolare:
 $|x - y| \leq |x| + |y|$

3. Troviamo gli equivalenti asintotici di M
4. Sostituiamo x con il valore di I più grande che possiamo usare
5. La stima è $|R_k(x)| \leq \frac{M}{(k+1)!} x^{(k+1)}$

3.3 Esercizio da esame

- Data la funzione $f(x) = x(e^x - 1) + \ln(1 + x^2) + \sin(2x)$, calcolarne il polinomio di McLaurin di ordine 4

1. Dividiamo $f(x)$ in polinomi che contengono le funzioni elementari quindi avremo:

$$\begin{aligned} - x(e^x - 1) &= x \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - 1 \right) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3!} + o(x^4) \\ - \ln(1 + x^2) &= \left(x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ - \sin(2x) &= 2 \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^4) \end{aligned}$$

2. Costruiamo una tabella di questo tipo:

Ordine	$x(e^x - 1)$	$\ln(1 + x^2)$	$\sin(2x)$	Somma
1	/	/	$2x$	$2x$
2	x^2	x^2	/	$2x^2$
3	$\frac{x^3}{2}$	/	$-\frac{(2x)^3}{3!}$	$-\frac{5x^3}{6}$
4	$\frac{x^4}{3!}$	$-\frac{x^4}{2}$	/	$-\frac{x^4}{3}$

Dove andiamo a prendere gli elementi di ciascun polinomio dell'ordine indicato nella prima colonna ed eseguiamo la somma della riga nell'ultima colonna.

3. Poi costruiamo il polinomio $P_4(x)$ sommando l'ultima colonna: $P_4(x) = 2x + 2x^2 - \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{3}$

- Scrivere il resto di Lagrange $R_1(x)$ di ordine 1 (con centro in 0) della funzione $g(x) = \cos(x^2) + \sin(3x)$ e determinarne una stima per $x \in (0, \frac{1}{4}]$

1. $g''(x) = \frac{d}{dx}(g'(x)) = -4x^2 \cos(x^2) - 2 \sin(x^2) - 9 \sin(3x)$

2. $R_1(x) = \frac{g''(x)}{2!} x^2$

- 3.

$$\begin{aligned} |g''(x)| &\leq M \\ |-4x^2 \cos(x^2) - 2 \sin(x^2) - 9 \sin(3x)| &\leq |4x^2 \cos(x^2)| + |2 \sin(x^2)| + |9 \sin(3x)| \end{aligned}$$

4. Troviamo gli equivalenti asintotici per i singoli elementi di M

$$\begin{aligned} \sin(x^2) &\sim x^2 \\ \sin(3x) &\sim 3x \\ \cos(x^2) &\sim 1 \rightarrow \text{Usiamo 1 perchè vogliamo fare una stima grossolana} \end{aligned}$$

5. Riscriviamo M :

$$|4x^2 \cos(x^2)| + |2 \sin(x^2)| + |9 \sin(3x)| = 4x^2 + 2x^2 + 27x = 6x^2 + 27x$$

6. Sostituiamo $x = \frac{1}{4}$ perchè è la x più grande che possiamo usare:

$$\frac{3}{8} + \frac{27}{4} = \frac{57}{8}$$

7. Quindi:

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2!} x^2 \rightarrow \frac{57}{8} \frac{1}{2} x^2 = \frac{57}{16} x^2 \simeq 3.56x^2$$

3.4 Esercizio da esame

Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 8 attorno ad $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \ln(\cos(x^2))$. Quanto vale $f^{(8)}(0)$?

1. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + O(x^{10})$

2. $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + O(x^{12})$

$$3. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + O(x^9)$$

$$4. \ln(1 + \cos(x^2) - 1) = -\frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} \right)^2 + \dots = -\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^8}{8} + O(x^{12}) \rightarrow P_8(x)$$

$$5. c_8 = x^8 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} \right) = -\frac{1}{12} x^8$$

$$6. f^{(8)}(0) = -\frac{1}{12} \cdot 8! = -3360$$

4 Formula di Taylor

 $f^{(n)}$ indica l'ordine di derivazione n -esimo

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile infinite volte (C^∞)

4.1 Polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n

$$T_{x_0,n}^f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

4.2 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = T_{x_0,n}^f(x) + R_n f(x)$$

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ con } c_n \in \{x_0, x\}$$

Se $x = b$ e x_0 è vicino a b , $T_{x_0,n}^f(b)$ approssima $f(b)$ e $|f(b) - T_{x_0,n}^f(b)| = |R_n f(b)|$

4.2.1 Determinare una stima del resto di Lagrange

Se dobbiamo calcolarlo con $x \in (0, a]$ al posto della x negli argomenti delle sotto-funzioni ci mettiamo a e calcoliamo M in base a quello.

$$|f^{(k+1)}(c)| \leq M$$

Dove M è il maggiorante quindi prendiamo tutte le "sotto-funzioni" di $f^{(k+1)}(x)$ e combiniamo tutti i maggioranti tra di loro oppure calcoliamo $f^{(k+1)}(a)$. Per calcolare la stima quindi:

$$|R_k(x)| \leq \frac{M}{(k+1)!} x^{k+1}$$

Esempio:

$$|f''(x)| = |e^{-2x} \cdot 13 \sin(3x + \phi)|$$

I valori maggioranti di questi sono 1 e 13 (perchè la funzione seno oscilla tra -1 e 1 ma stiamo usando il modulo). Quindi:

$$M = 1 \cdot 13 = 13$$

Oppure calcoliamo $|f''(a)|$ per trovare M .

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2!} x^2$$

4.3 Formula di Taylor con resti di Peano

$$f(x) = T_{x_0,n}^f(x) + (x - x_0)^n + \varepsilon(x - x_0) \text{ con } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

4.4 Unicità del Polinomio di Taylor

$$f(x) = (a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n) + \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)^n$$

Dove $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ allora:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

5 Fourier

5.1 Coefficienti

Data una funzione f periodica di periodo T , i coefficienti di Fourier sono dati da:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} kx} \quad k \in \mathbb{Z}$$

E usando l'identità di Eulero:

$$\hat{f}_k = \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx \right) - i \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx \right)$$

5.1.1 Coefficienti reali

- $a_k = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx$
- $b_k = i(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx$

Proprietà:

- Se $f(x)$ è pari $\Rightarrow b_k$ nulli
- Se $f(x)$ è dispari $\Rightarrow a_k$ nulli tranne $a_0 = 0$

5.2 Serie di Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right]$$

5.3 Criterio di Dirichelet

Permette di dire a cosa converge

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se continua} \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se discontinua in } x \end{cases}$$

5.3.1 Utilizzo

1. Se la funzione è definita a tratti cerchiamo i punti di giunzione e controlliamo se sono continui o no (usando la tecnica del limite sinistro e destro), se la funzione è periodica anche gli estremi devono essere considerati come punti di giunzione
2. Riscrivi $\tilde{f}(x)$ impostando la condizione (se periodica di periodo T) come $x = x_0 + Tk$ o $x \neq x_0 + Tk$ dove x_0 è il punto di discontinuità

Una serie di Fourier converge **uniformemente** se f è continua su tutto \mathbb{R} (o su T). Per vedere se una serie converge uniformemente basta usare una di queste strategie:

- Funzione continua e derivabile a tratti \Rightarrow converge
- Usare il criterio di Weierstrass
- E' funzione Lipschitziana ($|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$)

5.4 Esercizio d'esame

Sia f la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto \mathbb{R} la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2\pi + x & x \in [-\pi, 0) \\ 2\pi - x & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

- Disegna il grafico di f
- Calcolare il coefficiente di Fourier \hat{f}_0

1. Sappiamo che $\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (2\pi + x) dx + \int_0^{\pi} (2\pi - x) dx \right] = \frac{3\pi}{2}$

- Calcolare il coefficiente di Fourier \hat{f}_k per $k \neq 0$

1. Se $f(x)$ è pari, i coefficienti b_k sono nulli e i coefficienti $a_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\frac{2\pi}{2\pi} kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$
2. Poichè $\hat{f}_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ nel nostro caso sarà $\hat{f}_k = \frac{a_k}{2}$
3. Calcoliamo a_k

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (2\pi - x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi k^2} [1 - (-1)^k]$$

4. Quindi dobbiamo calcolare per k pari e $\neq 0$ e dispari:

$$\hat{f}_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ pari e } \neq 0 \end{cases}$$

- Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[-\pi, \pi)$

1. Sappiamo che $T = 2\pi$
2. Calcoliamo a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (2\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 2\pi dx - \int_0^{\pi} x dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(2\pi [x]_0^{\pi} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(2\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{3\pi^2}{2} = 3\pi \end{aligned}$$

3. Sostituiamo a_0, a_k e b_k con quelli calcolati in precedenza

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\pi k^2} [1 - (-1)^k] \cos(kx) \right]$$

5.5 Esercizio d'esame

Consideriamo la funzione di periodo 4 ottenuta prolungando per periodicità: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-2, 0) \\ 2x & x \in [0, 2) \end{cases}$

- Disegnare il grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[-10, 10]$
- Calcolare i coefficienti a_k e b_k per ogni $k \geq 0$

1. $a_0 = b_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 0 dx + \int_0^2 2x dx \right) = \frac{1}{2} (0 + 4) = 2$
2. $a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 0 dx + \int_0^2 2x \cos\left(\frac{\pi}{2} kx\right) dx \right) = \frac{4}{(\pi k)^2} ((-1)^k - 1)$

3.

$$\begin{aligned} \int 2x \cos\left(\frac{\pi}{2} kx\right) dx &\xrightarrow{t=\frac{\pi}{2} kx; dt=\frac{\pi}{2} k dx} \int \frac{2t}{\frac{\pi}{2} k} \cos(t) \left(\frac{2}{\pi k}\right) dt = \frac{2}{\pi k} \cdot \frac{4}{\pi k} \int t \cos(t) dt = \frac{8}{(\pi k)^2} \int t \cos(t) dt \\ &\xrightarrow{f'=\cos(t); g=t} \frac{8}{(\pi k)^2} \left(t \sin(t) - \int \sin(t) dt \right) = \frac{8}{(\pi k)^2} (t \sin(t) + \cos(t)) \\ &\xrightarrow{t=\frac{\pi}{2} kx} \frac{8}{(\pi k)^2} \left(\frac{\pi}{2} kx \sin\left(\frac{\pi}{2} kx\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} kx\right) \right) = \frac{4x}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi}{2} kx\right) + \frac{8}{(\pi k)^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} kx\right) \end{aligned}$$

$$4. b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx = (-1)^{k+1} \left(\frac{2}{\pi k} \right)$$

- Calcolare la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza puntuale

$$1. f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{4}{(\pi k)^2} ((-1)^k - 1) \right) \cos\left(\frac{\pi k}{2} x\right) + \left((-1)^{k+1} \left(\frac{2}{\pi k} \right) \sin\left(\frac{\pi k}{2} x\right) \right) \right]$$

2. Dirichlet:

$$(a) x = 0 \rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{cases} \quad \text{continua in } x = 0$$

$$(b) x = 2 \rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \\ \lim_{n \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \end{cases} \quad \text{discontinua in } x = 2, \tilde{f}(2) = \frac{4+0}{2} = 2 \leftarrow \text{converge a 2 per } x = 2$$

$$(c) \tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 2 + 4k \\ 2 & \text{se } x = 2 + 4k \end{cases}$$

6 Funzioni a due variabili

6.1 Proprietà degli insiemi

- Un insieme è **chiuso** se c'è $\leq, \geq, =$
- Un insieme è **limitato** se è limitato "orizzontalmente" ($i \leq x \leq j$) e "verticalmente" ($k \leq y \leq z$)

6.2 Derivata parziale

Deriviamo la funzione fissando una variabile e l'altra la trattiamo come costante:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2y + 3xy^2 \\f_x(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2 \\f_y(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6x\end{aligned}$$

6.2.1 Di ordine superiore

Equivalgono alle derivate di ordine superiore al primo, nel caso di derivata parziale mista prima deriviamo per la prima variabile e poi deriviamo il risultato fissando la seconda variabile

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2y + 3xy^2 \\f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy + 3y^2) = 2y \\f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy + 3y^2) = 2x\end{aligned}$$

6.3 Gradiente

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

6.4 Derivata direzionale

Dato u di modulo 1 ($\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1$)

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u_x \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot u_y \right)$$

6.4.1 Normalizzazione vettore v

$$u = \frac{v}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

6.5 Equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned}z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\z &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0\end{aligned}$$

6.6 Punti critici di f

Un punto (x_0, y_0) nel dominio di f è un punto critico se:

- $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ (Punti **stazionari**)

1. Calcola $\nabla f(x, y)$
2. Trova i punti in cui il gradiente è nullo:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. Le coppie di (x, y) che risolvono il sistema ma non appartengono al dominio non sono punti critici.

- oppure, una o entrambe le derivate parziali $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ non esistono

6.6.1 Classificazione

1. Calcolo le derivate parziali seconde:

- $f_{xx}(x, y)$
- $f_{yy}(x, y)$
- $f_{xy}(x, y)$

2. Costruisco la matrice Hessiana:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

3. Calcolo il determinante: $D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$

4. Per ogni punto critico (x_0, y_0) calcolo $D(x_0, y_0)$:

$D(x_0, y_0) > 0$	$D(x_0, y_0) < 0$	$D(x_0, y_0) = 0$
Minimo locale ($f_{xx}(x_0, y_0) > 0$) Massimo locale ($f_{xx}(x_0, y_0) < 0$)	Punto di sella	Test inconcludente

6.7 Massimi e minimi vincolati (Metodo di Lagrange)

Dato un vincolo $g(x, y) = 0$, cerchiamo i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y)$ vincolati a $C = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} = \begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Interpretazione geometrica: in un punto vincolato di massimo o minimo, i gradienti di f e g sono paralleli $\Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$

Procedura:

1. Una volta scritto il sistema risolvere usando questo meccanismo:

- Trova quelle variabili per cui a destra dell'uguale viene 0 e fai un sistema per variabile che soddisfa questo requisito
- Se per un caso viene impossibile il sistema sappiamo per certo che quella variabile deve essere $\neq 0$ altrimenti bisogna controllare anche il sistema $\neq 0$
- Una volta trovati tutti i punti critici basta calcolare per la funzione di partenza e confrontare con i possibili punti critici calcolati con la matrice Hessiana

Con più vincoli: $g_1(x, y) = 0, g_2(x, y) = 0 \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \quad g_1(x, y) = 0, \quad g_2(x, y) = 0$

6.8 Esercizio da esame

Sia $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - 8x - 4xy + 4y^2 + 12 \ln x$

1. Determinare il dominio di f e dire dove f è differenziabile

- Dom f : $(0, +\infty)$
- $f_x(x, y) = 3x - 8 - 4y + \frac{12}{x}$ e $f_y(x, y) = -4x + 8y$. Il dominio di queste derivate parziali è $(0, +\infty)$
- Concludiamo dicendo che è differenziabile su tutto il dominio

2. Calcolare il gradiente nel punto $(1, 0)$, la derivata direzionale $\frac{\partial f(1, 0)}{\partial v}$ per $v = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 0, f(1, 0))$

- $\nabla f(1, 0) = (7, -4)$
- $\|v\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$
- $D_v f(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot v = (7, -4) \cdot (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = -\frac{28}{5} - \frac{12}{5} = -8$
-

$$\begin{aligned} z &= f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) + z_0 \\ z &= f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) + f(1, 0) \\ z &= 7(x - 1) - 4y - \frac{13}{2} \\ z &= 7x - 7 - 4y - \frac{13}{2} \\ z &= 7x - 4y - \frac{27}{2} \end{aligned}$$

3. Stabilire quali sono i punti critici di f sul suo dominio e classificarli

(a)

$$\begin{cases} 3x - 8 - 4y + \frac{12}{x} = 0 \rightarrow x - 8 + \frac{12}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ -4x + 8y = 0 \rightarrow 8y = 4x \rightarrow y = \frac{x}{2} \end{cases}$$

I punti critici sono $(6, 3)$ e $(2, 1)$

(b) Calcolo f_{xx} , f_{yy} e f_{xy}

- $f_{xx}(x, y) = 3 - \frac{12}{x^2}$
- $f_{yy}(x, y) = 8$
- $f_{xy}(x, y) = -4$

(c) Calcolo $D(x, y) = (3 - \frac{12}{x^2}) \cdot 8 - 16 = 24 - \frac{96}{x^2} - 16 = 8 - \frac{96}{x^2}$

- (d)
- $(2, 1) \rightarrow D(2, 1) = 8 - \frac{96}{4} = -16 \Rightarrow$ Punto di sella
 - $(6, 3) \rightarrow D(6, 3) = 8 - \frac{96}{36} = \frac{16}{3}, f_{xx}(6, 3) = 3 - \frac{12}{36} = \frac{8}{3} \Rightarrow$ Minimo locale

6.9 Esercizio da esame

Sia $f(x, y) = xe^{-y^2-x}$

- Stabilire se f è differenziabile sul suo dominio e calcolarne la derivata direzionale lungo $v = (1, 2)$ nel punto $P_0 = (3, -1)$

1. f è differenziabile sul suo dominio perchè è una composizione di funzioni elementari

2. $f_x(x, y) = e^{-y^2-x}(1-x)$

3. $f_y(x, y) = -2yxe^{-y^2-x}$

4. $\nabla f(3, -1) = (-2e^{-4}, 6e^{-4})$

5. $\|v\| = \sqrt{5} \neq 1 \rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

6. $D_u F(3, -1) = \nabla f(3, -1) \cdot u = (-2e^{-4}, 6e^{-4}) \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2e^{-4}}{\sqrt{5}} + \frac{12e^{-4}}{\sqrt{5}} = \frac{10e^{-4}}{\sqrt{5}}$

- Dopo aver disegnato l'insieme $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ e stabilito se è chiuso e limitato, determinare, se esistono, i punti di massimo/minimo di f su \mathcal{C}

1. Insieme chiuso e limitato

2. $x^2 + y^2 < 4$

(a)
$$\begin{cases} e^{-y^2-x}(1-x) = 0 \rightarrow 1-x = 0 \rightarrow x = 1 \\ -2yxe^{-y^2-x} = 0 \rightarrow -2xy = 0 \rightarrow -2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Punto critico $P_0(1, 0)$ massimo locale per matrice Hessiana.

(b) $x^2 + y^2 = 4$

i. $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$

ii.
$$\begin{cases} e^{-y^2-x}(1-x) = \lambda 2x \\ -2yxe^{-y^2-x} = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

iii. Facciamo le casistiche per $x = 0, \lambda = 0$ e $y = 0$, risolvendo i sistemi abbiamo che solo per $y = 0$ abbiamo due punti critici: $P_1(2, 0)$ e $P_2(-2, 0)$

iv. Calcolando questi punti nella funzione f abbiamo che P_2 è minimo assoluto e P_0 è minimo locale e assoluto.

7 Extra

7.1 Determinare crescita/decrecita velocemente

Se $h(n) = f(g(n))$

$g(n)$	$f(x)$	$h(n)$
decrecente	crescente	decrecente
decrecente	decrecente	crescente
crescente	crescente	crescente
crescente	decrecente	decrecente

7.2 Formule utili

$f(n)^{g(n)} = \{0^0, \infty^0, 1^\infty\} \rightarrow f(n)^{g(n)} = e^{g(n) \ln(f(n))}$
$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ per $n \rightarrow +\infty$
$\binom{\alpha n}{\beta n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta(\alpha-\beta)}} \left(\frac{\alpha^\alpha}{\beta^\beta (\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}}\right)^n$
$\{(n!)^2\} \sim \frac{2\pi n}{e^{2n}} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} = \frac{2\pi n}{e^{2n}} (n!)^2$

7.3 Equivalenze Asintotiche Notevoli (per $x \rightarrow 0$ e $n \rightarrow +\infty$ rispettivamente):

Funzione	Equivalenza asintotica	Dominio
$\sin x$	x	$x \rightarrow 0$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2}$	$x \rightarrow 0$
$\tan x$	x	$x \rightarrow 0$
$\arcsin x$	x	$x \rightarrow 0$
$\arctan x$	x	$x \rightarrow 0$
$\ln(1+x)$	x	$x \rightarrow 0$
$e^x - 1$	x	$x \rightarrow 0$
$(1+x)^\alpha - 1$	αx	$x \rightarrow 0, \alpha \neq 0$
$\sqrt{1+x} - 1$	$\frac{x}{2}$	$x \rightarrow 0$
$\cos x - 1$	$-\frac{x^2}{2}$	$x \rightarrow 0$
$1 - \cos x$	$\frac{x^2}{2}$	$x \rightarrow 0$
$\cosh x - 1$	$\frac{x^2}{2}$	$x \rightarrow 0$
$\sinh x$	x	$x \rightarrow 0$
$\tanh x$	x	$x \rightarrow 0$

Funzione	Equivalenza asintotica
$\sin\left(\frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{n}$
$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{n}$
$e^{1/n} - 1$	$\frac{1}{n}$
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$	$\frac{e}{2n}$
$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$
$\ln(n+1) - \ln n$	$\frac{1}{n}$

7.4 Equivalenze trigonometriche

- $\cos(k\pi) = (-1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

7.5 Insiemi vincolati noti

Condizione	Grafico
$x^2 + y^2 \leq k$	Cerchio di raggio \sqrt{k}
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq k$	Cerchio di raggio \sqrt{k} centrato in (x_0, y_0)
$-a \leq x \leq a \wedge -a \leq y \leq a$	Quadrato
$x_0 \pm a \leq x \leq x_0 \pm a \wedge y_0 \pm a \leq y \leq y_0 \pm a$	Quadrato centrato in (x_0, y_0)
$x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1 \leq y \leq y_2$	Rettangolo
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq k$	Ellisse
$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \frac{x}{L} + \frac{y}{H} \leq 1$	Triangolo
$R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2$	Anello