1 Formula di Taylor

$f^{(n)}$ indica l'ordine di derivazione n-esimo

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile infinite volte (C^∞)

1.1 Polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n

$$T^f_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

1.2 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + R_n f(x)$$

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ con } c_n \in \{x_0, x\}$$

Se $x = b$ e x_0 è vicino a b, $T^f_{x_0,n}(b)$ approssima $f(b)$ e $\left|f(b) - T^f_{x_0,n}(b)\right| = |R_n f(b)|$

1.3 Formula di Taylor con resti di Peano

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + (x-x_0)^n + \varepsilon(x-x_0) \text{ con } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$$

2 Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

3 Serie geometrica

Dato $q \in \mathbb{R}$, la serie geometrica di ragione q

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{q}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

4 Convergenza/Divergenza

4.1 Convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente se } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge}$$

Se la serie converge assolutamente $\Rightarrow$ converge semplicemente.

4.2 Condizione necessaria di Cauchy per le serie

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{può} \text{ convergere o divergere} \\ \neq 0 \text{ o non esiste} & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{diverge} \text{ sicuramente} \end{cases}$$

Nota: Questa condizione è **necessaria ma non sufficiente** alla convergenza della serie.

4.3 Criteri di convergenza/divergenza

Per serie a termini definitivamente positivi ($\exists n | a_n \geq 0$ con $n \in [n, +\infty)$)

- **Criterio del rapporto** (Utile con i fattoriali $n!$):

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

  1. $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge assolutamente
  2. $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

- **Criterio della radice** (Utile con potenze n-esime):

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

  1. $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge assolutamente
  2. $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

- **Criterio del confronto asintotico**:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \begin{cases} \in (0, +\infty) & a_n \text{ e } b_n \text{ hanno lo stesso comportamento} \\ 0 & \text{se } b_n \text{ converge} \Rightarrow a_n \text{ converge, altrimenti non si può concludere} \\ +\infty & \text{se } b_n \text{ diverge} \Rightarrow a_n \text{ diverge, altrimenti non si può concludere} \end{cases}$$

  Per scegliere b_n prendi le n di ordine maggiore in $a_n = \frac{\text{num}}{\text{den}}$ (*es.* $a_n = \frac{n+1}{n^2+3}, b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$)

Per serie a segno alterno

- **Criterio di Leibnitz**: sia $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ una serie tale che

  1. $\exists n_0 \mid a_n \geq 0 \, \forall n \geq n_0$
  2. $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
  3. $a_{n+1} \geq a_n \forall n \geq 1$ (aka decrescente)

  allora converge **semplicemente** e la somma s della serie soddisfa $|s - s_n| \leq a_{n+1} \forall n \geq 1$.

- **Stima dell'errore**: $|\text{Somma} - \text{Somma parziale}| \leq b_{N+1}$

4.4 Esercizio d'esame

Stabilire se le seguenti serie sono a termini positivi e convergono semplicemente e/o assolutamente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

   (a) **Cauchy**: $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\frac{1001}{\infty}\right) = \sin(0) = 0$

   (b) **Convergenza assoluta**: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

      i. **Criterio di confronto asintotico**: $a_n = \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right), b_n = \frac{1001}{\sqrt{n}} \to \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1001}{\sqrt{n}}} = 1$ $\to a_n$ e b_n hanno lo stesso comportamento.

      ii. **Serie armonica generalizzata**: $\frac{1001}{\sqrt{n}} \to \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ diverge

      iii. Grazie al punto precedente possiamo dire che la serie originale non converge assolutamente (perchè è una serie a segno alternato), ora procederemo con Leibnitz

   (c) **Criterio di Leibnitz**:

      i. $\exists n_0 \mid \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) \geq 0\,\forall n \geq n_0$? Si: $0 < \frac{1001}{\sqrt{n}} \leq \pi \to n \geq \left(\frac{1001}{\pi}\right)^2 \to n_0 \simeq 101518.7$

      ii. $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) = 0$? L'abbiamo già fatto nel punto (a)

      iii. Decrescente?

         A. $a'_n = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}\right) = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2n^{\frac{1}{2}}n}\right) = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)$

         B. $a'_n > 0 \begin{cases}\cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) > 0 \to -\frac{\pi}{2} \leq \frac{1001}{\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{2} \to n \geq 406269 \\ \left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right) > 0 \to \text{Impossibile sarà sempre negativo perchè } n \geq 1\end{cases}$

         C. Quindi sapendo che la serie è decrescente con $n \geq 406269$, possiamo dire che anche questo requisito è soddisfatto

   (d) **Conclusione**: visto che la serie soddisfa tutti i requisiti del criterio di Leibnitz allora converge semplicemente.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}$

3. *Data la serie di potenze* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}x^n$ *determinare il raggio di convergenza* ρ *e l'insieme di convergenza puntuale* I*.*

5 Polinomio di McLaurin

Per calcolare il polinomio di McLaurin di ordine k:

1. Prendi i polinomi elementari dalla tabella adattandoli a quelli che servono (considera il polinomio separando $f(x)$ con i +/-)

2. Una volta che hai i polinomi di ordine k li combini tra di loro e il risultato finale sarà $P_k(x)$

Serie di Maclaurin di alcune funzioni elementari.

$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1+x+x^2+x^3+\dots$	$x \in (-1,1)$
e^x	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$	$= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\log(1+x)$	$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\dots$	$x \in (-1,1]$
$\sin x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\arctan x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$= x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\dots$	$x \in [-1,1]$
$(1+x)^\alpha$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ $\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \notin \mathbb{N}$	$= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots$	$x \in (-1,1)$
$(1-x)^{-k}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$	$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k}$	$x \in (-1,1)$

5.1 Esercizio da esame

6 Serie di Funzioni

Data la serie di funzioni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

1. **Converge puntualmente** su I se la serie converge $\forall x \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$
2. **Converge assolutamente** su I se la serie a termini positivi $(|f_n(x)|)$ converge $\forall x \in I$

Se per qualche $x \in I$ la serie diverge o è indeterminata, bisogna restringere il dominio della funzione somma $f(x)$ all'insieme:

$$\left\{ x \in I \mid \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$$

6.1 Criterio di Weierstrass

Data una serie di funzioni, se la serie numerica a termini positivi converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$$

allora la serie di funzioni converge assolutamente e puntualmente (= totalmente) su I.

6.2 Corollari

6.2.1 Continuità della somma

Se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $I \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su I ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è continua su I.

6.2.2 Integrazione temine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni f_n sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su $[a, b]$ ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

6.2.3 Derivazione termine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su I se:

1. Le funzioni f_n sono derivabili e le derivate sono funzioni continue $\forall n \geq 1$
2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente su I
3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge totalmente su I

Allora $f(x)$ derivabile e:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in I$$

6.2.4 Corollario 1.34

Data una serie di funzioni definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalamente su (a, b)

Allora la serie converge totalmente su su $[a, b]$ e la funzione somma è continua su $[a, b]$

7 Serie di potenze

La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si chiama **serie di potenze di centro 0**

7.1 Raggio di convergenza

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\exists p \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, detto raggio di convergenza, tale che:

- se $p = 0 \Rightarrow$ la serie di potenze converge solo in 0
- se $0 < p < +\infty \Rightarrow$ la serie converge assolutamente su $(-p, p)$, non converge puntualmente su $(-\infty, p) \cup (p, +\infty)$, converge totalmente su $[-R, R]\, \forall 0 < R < p$
- se $p = +\infty \Rightarrow$ la serie di potenze converge assolutamente su $\mathbb{R}$ e converge totalmente su $[-R, R]\, \forall R > 0$

Se la serie converge puntualmente in $y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \Rightarrow$ la serie converge totalmente su $[-R, R]\, \forall 0 < R < |y|$.

7.1.1 Caso: Criteri del rapporto e della radice

Se esiste l:

$$p = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ \frac{1}{l} & l \in (0, +\infty) \\ 0 & l = +\infty \end{cases}$$

7.2 Insieme di convergenza puntuale $I = (-p, p)$

1. Sostituire x^n con gli estremi di $[x_0 - p, x_0 + p]$ e quindi "creare" due serie diverse e studiare la convergenza/divergenza
2. Se converge per entrambi allora converge su tutto l'intervallo, altrimenti devo mettere la parentesi tonda dove non converge

7.3 Proprietà

- La funzione somma

  $$f : I \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

  è continua su I
- La funzione f ammette primitiva sull'intervallo I data da:

  $$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

  dove la serie integrata ha raggio di convergenza p
- La funzione f è derivabile su $(-p, p)$ e vale

  $$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad x \in (-p, p)$$

  dove la serie derivata ha raggio di convergenza p
- Data una serie di potenze con raggio di convergenza $p > 0$ la funzione somma $f(x)$ è derivabile infinite volte in $(-p, p) \forall k \in \mathbb{N} k \geq 0$:

  $$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \qquad x \in (-p, p)$$

  In particolare: $f^{(n)}(0) = n! a_n \qquad n \in \mathbb{N}$

- Abbiamo due serie di potenze di centro x_0 e raggi di convergenza $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$, rispettivamente. Se esiste $0 < \delta < \min\{p_1, p_2\} \mid \forall x \in (-\delta, \delta)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

allora $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}$

- Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ tale che f sia derivabile infinite volte in I. Se esistono $M > 0, L > 0 \mid \left| f^{(n)(x)} \right| \leq M \cdot L^n \, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I$ allora, fissato $x_0 \in I$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

si chiama serie di Taylor di f con centro x_0 (se $x_0 = 0$ si chiama serie di Maclaurin). La funzione f è sviluppabile in serie di Taylor con centro x_0 nell'intervallo I se:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \forall x \in I$$