# 1 Formula di Taylor

| $f^{(n)}$ indica l'ordine di derivazione $n$-esimo |
|---|

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo $I$ e derivabile infinite volte ($C^\infty$)

## 1.1 Polinomio di Taylor di $f$ centrato in $x_0$ di ordine $n$

$$T^f_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

## 1.2 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + R_n f(x)$$
$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ con } c_n \in \{x_0, x\}$$

Se $x = b$ e $x_0$ è vicino a $b$, $T^f_{x_0,n}(b)$ approssima $f(b)$ e $\left|f(b) - T^f_{x_0,n}(b)\right| = |R_n f(b)|$

## 1.3 Formula di Taylor con resti di Peano

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + (x - x_0)^n + \varepsilon(x - x_0) \text{ con } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

# 2 Determinare se una serie converge/diverge o è indeterminata

## 2.1 Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

## 2.2 Serie geometrica

Dato $q \in \mathbb{R}$, la serie geometrica di ragione $q$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{q}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

## 2.3 Test dell'integrale

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione:

- positiva
- decrescente

Posto $a_n = f(n)$ per ogni $n \geq 1$, allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

Inoltre, valgono le disuguaglianze:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

## 2.4 Condizione necessaria di Cauchy per le serie

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{può} \text{ convergere o divergere} \\ \neq 0 \text{ o non esiste} & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{diverge} \text{ sicuramente} \end{cases}$$

**Nota:** Questa condizione è **necessaria ma non sufficiente** alla convergenza della serie.

## 2.5 Criteri di convergenza/divergenza

*Per serie a termini definitivamente positivi* ($\exists n | a_n \geq 0$ con $n \in [n, +\infty)$)

- **Criterio del rapporto**:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

  1. $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge
  2. $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

- **Criterio della radice**:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

  1. $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge
  2. $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

- **Criterio del confronto**: supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ allora

$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$
$$\sum a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum b_n \text{ diverge}$$

- **Criterio del confronto asintotico**: $a_n = c_n b_n$ dove $b_n, c_n \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hanno lo stesso carattere}$$
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 0 \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

*Per serie a segno alterno*

- **Criterio di Leibnitz**: sia $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ una serie tale che

  1. $a_n \geq 0 \forall n \geq 1$
  2. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
  3. $a_{n+1} \geq a_n \forall n \geq 1$

  allora converge e la somma $s$ della serie soddisfa $|s - s_n| \leq a_{n+1} \forall n \geq 1$.

## 2.6 Convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente se } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge}$$

Se la serie converge assolutamente, allora converge (semplicemente).

# 3 Serie di Funzioni

Data la serie di funzioni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

1. **Converge puntualmente** su $I$ se la serie converge $\forall x \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$
2. **Converge assolutamente** su $I$ se la serie a termini positivi $(|f_n(x)|)$ converge $\forall x \in I$

*Se per qualche $x \in I$ la serie diverge o è indeterminata, bisogna restringere il dominio della funzione somma $f(x)$ all'insieme:*

$$\left\{ x \in I \mid \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$$

## 3.1 Criterio di Weierstrass

Data una serie di funzioni, se la serie numerica a termini positivi converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$$

allora la serie di funzioni converge assolutamente e puntualmente (= totalmente) su $I$.

## 3.2 Corollari

### 3.2.1 Continuità della somma

Se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $I \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su $I$ ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è continua su $I$.

### 3.2.2 Integrazione temine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni $f_n$ sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su $[a, b]$ ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

### 3.2.3 Derivazione termine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su $I$ se:

1. Le funzioni $f_n$ sono derivabili e le derivate sono funzioni continue $\forall n \geq 1$
2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente su $I$
3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge totalmente su $I$

Allora $f(x)$ derivabile e:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in I$$

### 3.2.4 Corollario 1.34

Data una serie di funzioni definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalamente su $(a, b)$

Allora la serie converge totalmente su su $[a, b]$ e la funzione somma è continua su $[a, b]$

# 4 Serie di potenze

La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si chiama **serie di potenze di centro 0**

## 4.1 Raggio di convergenza

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\exists p \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, detto raggio di convergenza, tale che:

- se $p = 0 \Rightarrow$ la serie di potenze converge solo in 0
- se $0 < p < +\infty \Rightarrow$ la serie converge assolutamente su $(-p, p)$, non converge puntualmente su $(-\infty, p) \cup (p, +\infty)$, converge totalmente su $[-R, R] \, \forall 0 < R < p$
- se $p = +\infty \Rightarrow$ la serie di potenze converge assolutamente su $\mathbb{R}$ e converge totalmente su $[-R, R] \, \forall R > 0$

Se la serie converge puntualmente in $y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \Rightarrow$ la serie converge totalmente su $[-R, R] \, \forall 0 < R < |y|$.

### 4.1.1 Caso: Criteri del rapporto e della radice

Se esiste $l$:

$$p = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ \frac{1}{l} & l \in (0, +\infty) \\ 0 & l = +\infty \end{cases}$$

## 4.2 Proprietà

- La funzione somma

$$f : I \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

  è continua su $I$
- La funzione $f$ ammette primitiva sull'intervallo $I$ data da:

$$\int f(x)dx = \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

  dove la serie integrata ha raggio di convergenza $p$
- La funzione $f$ è derivabile su $(-p, p)$ e vale

$$f'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad x \in (-p, p)$$

  dove la serie derivata ha raggio di convergenza $p$

- Data una serie di potenze con raggio di convergenza $p > 0$ la funzione somma $f(x)$ è derivabile infinite volte in $(-p, p) \forall k \in \mathbb{N} k \geq 0$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \qquad x \in (-p, p)$$

  In particolare: $f^{(n)}(0) = n! a_n \qquad n \in \mathbb{N}$

- Abbiamo due serie di potenze di centro $x_0$ e raggi di convergenza $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$, rispettivamente. Se esiste $0 < \delta < \min\{p_1, p_2\} \mid \forall x \in (-\delta, \delta)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

  allora $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}$

- Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ tale che $f$ sia derivabile infinite volte in $I$.
  Se esistono $M > 0, L > 0 \mid \left| f^{(n)(x)} \right| \leq M \cdot L^n \, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I$ allora, fissato $x_0 \in I$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

  si chiama serie di Taylor di $f$ con centro $x_0$ (se $x_0 = 0$ si chiama serie di Maclaurin). La funzione $f$ è sviluppabile in serie di Taylor con centro $x_0$ nell'intervallo $I$ se:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \qquad \forall x \in I$$