

1 Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

2 Serie geometrica

Dato $q \in \mathbb{R}$, la serie geometrica di ragione q

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{q}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

3 Serie di Funzioni

Data la serie di funzioni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

1. **Converge puntualmente** su I se la serie converge $\forall x \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
2. **Converge assolutamente** su I se la serie a termini positivi ($|f_n(x)|$) converge $\forall x \in I$

Se per qualche $x \in I$ la serie diverge o è indeterminata, bisogna restringere il dominio della funzione somma $f(x)$ all'insieme:

$$\left\{ x \in I \mid \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$$

3.1 Criterio di Weierstrass

Data una serie di funzioni, se la serie numerica a termini positivi converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$$

allora la serie di funzioni converge assolutamente e puntualmente (= totalmente) su I .

3.2 Flusso di lavoro:

1. **Criterio di Weierstrass** per la convergenza totale
2. **Controllo la convergenza puntuale** se Weierstrass ha fallito

Convergenza totale \Rightarrow convergenza puntuale

3.3 Corollari

3.3.1 Continuità della somma

Se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $I \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su I ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è continua su I .

3.3.2 Integrazione termine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni f_n sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su $[a, b]$ ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

3.3.3 Derivazione termine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su I se:

1. Le funzioni f_n sono derivabili e le derivate sono funzioni continue $\forall n \geq 1$
2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente su I
3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge totalmente su I

Allora $f(x)$ derivabile e:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in I$$

3.3.4 Corollario 1.34

Data una serie di funzioni definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su (a, b)

Allora la serie converge totalmente su $[a, b]$ e la funzione somma è continua su $[a, b]$

4 Serie di potenze

La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si chiama **serie di potenze di centro 0**

4.1 Raggio di convergenza

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \exists p \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, detto raggio di convergenza, tale che:

- se $p = 0 \Rightarrow$ la serie di potenze converge solo in 0
- se $0 < p < +\infty \Rightarrow$ la serie converge assolutamente su $(-p, p)$, non converge puntualmente su $(-\infty, p) \cup (p, +\infty)$, converge totalmente su $[-R, R] \forall 0 < R < p$
- se $p = +\infty \Rightarrow$ la serie di potenze converge assolutamente su \mathbb{R} e converge totalmente su $[-R, R] \forall R > 0$

Se la serie converge puntualmente in $y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \Rightarrow$ la serie converge totalmente su $[-R, R] \forall 0 < R < |y|$.

4.1.1 Caso: Criteri del rapporto e della radice

Se esiste l :

$$p = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ \frac{1}{l} & l \in (0, +\infty) \\ 0 & l = +\infty \end{cases}$$

4.2 Insieme di convergenza puntuale $I = (-p, p)$

1. Sostituire x^n con gli estremi di $[x_0 - p, x_0 + p]$ e quindi "creare" due serie diverse e studiare la convergenza/divergenza
2. Se converge per entrambi allora converge su tutto l'intervallo, altrimenti devo mettere la parentesi tonda dove non converge

5 Convergenza/Divergenza

5.1 Convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente se } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge}$$

Se la serie converge assolutamente \Rightarrow converge semplicemente.

5.2 Condizione necessaria di Cauchy per le serie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{la serie **può** convergere o divergere} \\ \neq 0 \text{ o non esiste} & \Rightarrow \text{la serie **diverge** sicuramente} \end{cases}$$

Nota: Questa condizione è **necessaria ma non sufficiente** alla convergenza della serie.

5.3 Criteri di convergenza/divergenza

Per serie a termini definitivamente positivi ($\exists n | a_n \geq 0$ con $n \in [n, +\infty)$)

- **Criterio del rapporto** (Utile con i fattoriali $n!$):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

1. $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge assolutamente
2. $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

- **Criterio della radice** (Utile con potenze n -esime):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

1. $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge assolutamente
2. $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

- **Criterio del confronto asintotico:**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \begin{cases} \in (0, +\infty) & a_n \text{ e } b_n \text{ hanno lo stesso comportamento} \\ 0 & \text{se } b_n \text{ converge} \Rightarrow a_n \text{ converge, altrimenti non si può concludere} \\ +\infty & \text{se } b_n \text{ diverge} \Rightarrow a_n \text{ diverge, altrimenti non si può concludere} \end{cases}$$

Per scegliere b_n prendi le n di ordine maggiore in $a_n = \frac{\text{num}}{\text{den}}$ (es. $a_n = \frac{n+1}{n^2+3}$, $b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$)

- **Criterio di Dirichlet:** sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

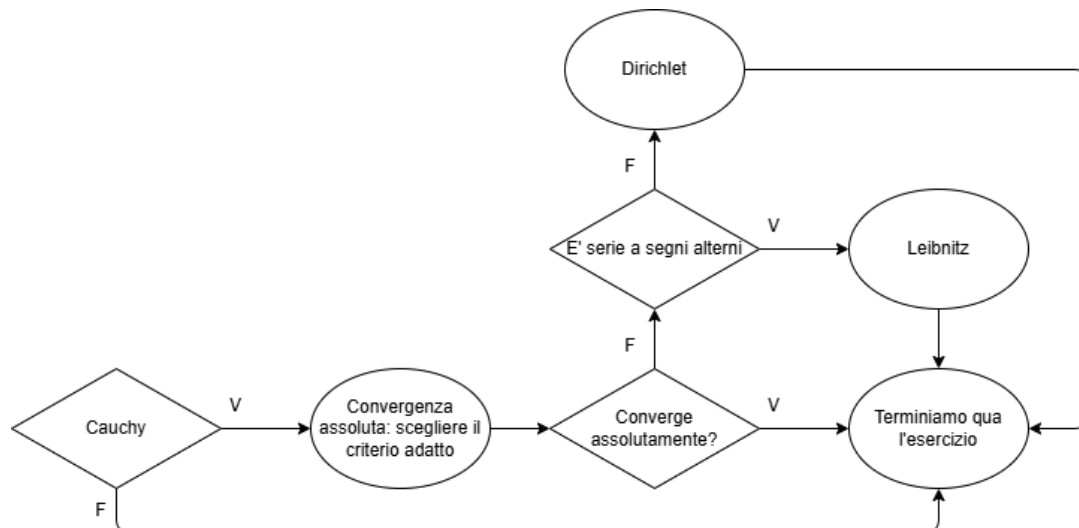
1. $\exists M > 0 \mid \left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq M \forall N \geq 1$
2. b_n crescente/decrescente
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

- **Criterio di Leibnitz:** sia $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ una serie tale che

1. $\exists n_0 \mid a_n \geq 0 \forall n \geq n_0$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
3. $a_{n+1} \geq a_n \forall n \geq 1$ (aka decrescente)

allora converge **semplicemente** e la somma s della serie soddisfa $|s - s_n| \leq a_{n+1} \forall n \geq 1$.

- **Stima dell'errore:** $|\text{Somma} - \text{Somma parziale}| \leq b_{N+1}$



5.4 Esercizio d'esame

Stabilire se le seguenti serie sono a termini positivi e convergono semplicemente e/o assolutamente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

(a) **Cauchy:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\frac{1001}{\infty}\right) = \sin(0) = 0$

(b) **Convergenza assoluta:** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

i. **Criterio di confronto asintotico:** $a_n = \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$, $b_n = \frac{1001}{\sqrt{n}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1001}{\sqrt{n}}} = 1$
 $\rightarrow a_n$ e b_n hanno lo stesso comportamento.

ii. **Serie armonica generalizzata:** $\frac{1001}{\sqrt{n}} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ diverge

iii. Grazie al punto precedente possiamo dire che la serie originale non converge assolutamente (perchè è una serie a segno alternato), ora procederemo con Leibnitz

(c) **Criterio di Leibnitz:**

i. $\exists n_0 \mid \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) \geq 0 \forall n \geq n_0$? Si: $0 < \frac{1001}{\sqrt{n}} \leq \pi \rightarrow n \geq \left(\frac{1001}{\pi}\right)^2 \rightarrow n_0 \simeq 101518.7$

ii. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) = 0$? L'abbiamo già fatto nel punto (a)

iii. Decrescente?

A. $a'_n = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(-\frac{1001}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n}\right) = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right) = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)$

B. $a'_n > 0 \begin{cases} \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) > 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{1001}{\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow n \geq 406269 \\ \left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right) > 0 \rightarrow \text{Impossibile sarà sempre negativo perchè } n \geq 1 \end{cases}$

C. Quindi sapendo che la serie è decrescente con $n \geq 406269$, possiamo dire che anche questo requisito è soddisfatto

(d) **Conclusione:** visto che la serie soddisfa tutti i requisiti del criterio di Leibnitz allora converge semplicemente.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}$

(a) **Cauchy:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1} = 0$

(b) **Convergenza assoluta:** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1} \right|$

i. **Criterio di confronto asintotico:** $a_n = \frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3-(\cos n)^2)}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = 3$$

ii. **Serie armonica generalizzata:** $\frac{1}{n^2} \rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow b_n$ converge

(c) **Conclusione:** Grazie al punto precedente e al teorema del confronto possiamo affermare che la serie converge assolutamente e, di conseguenza, semplicemente.

3. Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} x^n$ determinare il raggio di convergenza ρ e l'insieme di convergenza puntuale I .

(a) **Cauchy:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} = 0$

(b) **Convergenza assoluta:** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} \right|$

Le forme indeterminate del tipo $f(n)^{g(n)} = \{0^0, \infty^0, 1^\infty\}$ si risolvono $f(n)^{g(n)} = e^{g(n) \ln(f(n))}$

i. **Criterio della radice:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{2^n}{n^2} \right| \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln\left(\frac{2^n}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln(2^n) - \ln(n^2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} n \ln(2) - 2 \ln(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(2) - \frac{2 \ln(n)}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(2) - \frac{2 \ln(n)}{n}} = e^{\ln(2)} = 2 \end{aligned}$$

ii. **Determiniamo** ρ : $\rho = \frac{1}{2}$ per definizione

iii. **Determinare** I :

A. si "creano" due serie diverse usando l'intervallo $[x_0 - p, x_0 + p]$ e sostituendo x con entrambi gli estremi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^{-n}}{n^2} (x_0 - p)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^{-n}}{n^2} (x_0 + p)^n$$

B. **Studiamo la convergenza di entrambe:**

$$\frac{2^n + 3^{-n}}{n^2} \left(0 - \frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2^n + 3^{-n}) \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^2} = \frac{(-1)^n + \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}$$

$$\rightarrow \left| \frac{(-1)^n + \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} \right| = \frac{1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{serie armonica, converge} \\ \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} \rightarrow \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} & \text{per confronto asintoto } b_n \text{ converge perchè serie geometrica} \end{cases}$$

$$\frac{2^n + 3^{-n}}{n^2} \left(0 + \frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \text{analogamente a quella di sopra converge}$$

C. Quindi, visto che converge per entrambi gli estremi $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

6 Polinomio di McLaurin

Per calcolare il polinomio di McLaurin di ordine k :

1. Prendi i polinomi elementari dalla tabella adattandoli a quelli che servono (considera il polinomio separando $f(x)$ con i +/-)
2. Una volta che hai i polinomi di ordine k li combini tra di loro e il risultato finale sarà $P_k(x)$

Serie di Maclaurin di alcune funzioni elementari.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad x \in (-1, 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \quad x \in (-1, 1]$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \quad x \in [-1, 1]$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \quad \begin{matrix} \alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha \notin \mathbb{N} \end{matrix} \quad x \in (-1, 1)$$

$$(1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} \quad x \in (-1, 1)$$

6.1 Esercizio da esame

- Data la funzione $f(x) = x(e^x - 1) + \ln(1 + x^2) + \sin(2x)$, calcolarne il polinomio di McLaurin di ordine 4

1. Dividiamo $f(x)$ in polinomi che contengono le funzioni elementari quindi avremo:

$$\begin{aligned} - x(e^x - 1) &= x \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - 1 \right) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3!} \\ - \ln(1 + x^2) &= \left(x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right) = x^2 - \frac{x^4}{2} \\ - \sin(2x) &= 2 \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} \end{aligned}$$

2. Costruiamo una tabella di questo tipo:

Ordine	$x(e^x - 1)$	$\ln(1 + x^2)$	$\sin(2x)$	Somma
1	/	/	$2x$	$2x$
2	x^2	x^2	/	$2x^2$
3	$\frac{x^3}{2}$	/	$-\frac{(2x)^3}{3!}$	$-\frac{5x^3}{6}$
4	$\frac{x^4}{3!}$	$-\frac{x^4}{2}$	/	$-\frac{x^4}{3}$

Dove andiamo a prendere gli elementi di ciascun polinomio dell'ordine indicato nella prima colonna ed eseguiamo la somma della riga nell'ultima colonna.

3. Poi costruiamo il polinomio $P_4(x)$ sommando l'ultima colonna: $P_4(x) = 2x + 2x^2 - \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{3}$

- Scrivere il resto di Lagrange $R_1(x)$ di ordine 1 (con centro in 0) della funzione $g(x) = \cos(x^2) + \sin(3x)$ e determinarne una stima per $x \in (0, \frac{1}{4}]$

1.

7 Formula di Taylor

$f^{(n)}$ indica l'ordine di derivazione n -esimo

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile infinite volte (C^∞)

7.1 Polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n

$$T_{x_0,n}^f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

7.2 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{x_0,n}^f(x) + R_n f(x) \\ R_n f(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ con } c_n \in \{x_0, x\} \end{aligned}$$

Se $x = b$ e x_0 è vicino a b , $T_{x_0,n}^f(b)$ approssima $f(b)$ e $|f(b) - T_{x_0,n}^f(b)| = |R_n f(b)|$

7.3 Formula di Taylor con resti di Peano

$$f(x) = T_{x_0,n}^f(x) + (x - x_0)^n + \varepsilon(x - x_0) \text{ con } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

Polinomi di Taylor di centro $x_0 = 0$ di alcune funzioni elementari.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + R_n(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R_n(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_n(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x) \quad \alpha \notin \mathbb{N}$$

$$(1-x)^{-k} = \sum_{j=0}^n \binom{j+k-1}{k-1} x^j + R_n(x) \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 1$$

8 Fourier

8.1 Coefficienti

Data una funzione f periodica di periodo T , i coefficienti di Fourier sono dati da:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} kx} dx \quad k \in \mathbb{Z}$$

E usando l'identità di Eulero:

$$\hat{f}_k = \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx \right) - i \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx \right)$$

8.1.1 Coefficienti reali

- $a_k = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx$
- $b_k = i(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx$

Proprietà:

- Se $f(x)$ è pari $\Rightarrow b_k$ nulli
- Se $f(x)$ è dispari $\Rightarrow a_k$ nulli tranne $a_0 = 0$

8.2 Calcolare il valore della serie di Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right]$$

8.3 Esercizio d'esame

Sia f la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto \mathbb{R} la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2\pi + x & x \in [-\pi, 0) \\ 2\pi - x & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

- Disegna il grafico di f
- Calcolare il coefficiente di Fourier \hat{f}_0

1. Sappiamo che $\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (2\pi + x) dx + \int_0^{\pi} (2\pi - x) dx \right] = \frac{3\pi}{2}$

- Calcolare il coefficiente di Fourier \hat{f}_k per $k \neq 0$

1. Se $f(x)$ è pari, i coefficienti b_k sono nulli e i coefficienti $a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{\pi} kx\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$
2. Poichè $\hat{f}_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ nel nostro caso sarà $\hat{f}_k = \frac{a_k}{2}$
3. Calcoliamo a_k

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (2\pi - x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi k^2} [1 - (-1)^k]$$

4. Quindi dobbiamo calcolare per k pari e $\neq 0$ e dispari:

$$\hat{f}_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ pari e } \neq 0 \end{cases}$$

- Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[-\pi, \pi)$

1. Sappiamo che $T = 2\pi$
2. Calcoliamo a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (2\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 2\pi dx - \int_0^{\pi} x dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(2\pi [x]_0^{\pi} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(2\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{3\pi^2}{2} = 3\pi \end{aligned}$$

3. Sostituiamo a_0, a_k e b_k con quelli calcolati in precedenza

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\pi k^2} [1 - (-1)^k] \cos(kx) \right]$$

9 Funzioni a due variabili

9.1 Derivata parziale

Deriviamo la funzione fissando una variabile e l'altra la trattiamo come costante:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2y + 3xy^2 \\f_x(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2 \\f_y(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6x\end{aligned}$$

9.1.1 Di ordine superiore

Equivalgono alle derivate di ordine superiore al primo, nel caso di derivata parziale mista prima deriviamo per la prima variabile e poi deriviamo il risultato fissando la seconda variabile

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2y + 3xy^2 \\f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy + 3y^2) = 2y \\f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy + 3y^2) = 2x\end{aligned}$$

9.2 Gradiente

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

9.3 Derivata direzionale

Dato u di modulo 1 ($\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1$)

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u_x \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot u_y \right)$$

9.3.1 Normalizzazione vettore v

$$u = \frac{v}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

9.4 Equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned}z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\z &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0\end{aligned}$$

9.5 Punti critici di f

Un punto (x_0, y_0) nel dominio di f è un punto critico se:

- $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ (Punti **stazionari**)

1. Calcola $\nabla f(x, y)$

2. Trova i punti in cui il gradiente è nullo:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. Le coppie di (x, y) che risolvono il sistema ma non appartengono al dominio non sono punti critici.

- oppure, una o entrambe le derivate parziali $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ non esistono

9.5.1 Classificazione

1. Calcolo le derivate parziali seconde:

- $f_{xx}(x, y)$
- $f_{yy}(x, y)$
- $f_{xy}(x, y)$

2. Costruisco la matrice Hessiana (*non necessario*):

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

3. Calcolo il determinante: $D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$

4. Per ogni punto critico (x_0, y_0) calcolo $D(x_0, y_0)$:

$D(x_0, y_0) > 0$	$D(x_0, y_0) < 0$	$D(x_0, y_0) = 0$
Minimo locale ($f_{xx}(x_0, y_0) > 0$) Massimo locale ($f_{xx}(x_0, y_0) < 0$)	Punto di sella	Test inconcludente

9.6 Esercizio da esame

Sia $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - 8x - 4xy + 4y^2 + 12 \ln x$

1. Determinare il dominio di f e dire dove f è differenziabile

- Dom f : $(0, +\infty)$
- $f_x(x, y) = 3x - 8 - 4y + \frac{12}{x}$ e $f_y(x, y) = -4x + 8y$. Il dominio di queste derivate parziali è $(0, +\infty)$
- Concludiamo dicendo che è differenziabile su tutto il dominio

2. Calcolare il gradiente nel punto $(1, 0)$, la derivata direzionale $\frac{\partial f(1, 0)}{\partial v}$ per $v = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 0, f(1, 0))$

- $\nabla f(1, 0) = (7, -4)$
- $\|v\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$
- $D_v f(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot v = (7, -4) \cdot (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = -\frac{28}{5} - \frac{12}{5} = -8$
-

$$\begin{aligned} z &= f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) + z_0 \\ z &= f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) + f(1, 0) \\ z &= 7(x - 1) - 4y - \frac{13}{2} \\ z &= 7x - 7 - 4y - \frac{13}{2} \\ z &= 7x - 4y - \frac{27}{2} \end{aligned}$$

3. Stabilire quali sono i punti critici di f sul suo dominio e classificarli

(a)

$$\begin{cases} 3x - 8 - 4y + \frac{12}{x} = 0 \rightarrow x - 8 + \frac{12}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ -4x + 8y = 0 \rightarrow 8y = 4x \rightarrow y = \frac{x}{2} \end{cases}$$

I punti critici sono $(6, 3)$ e $(2, 1)$

(b) Calcolo f_{xx} , f_{yy} e f_{xy}

- $f_{xx}(x, y) = 3 - \frac{12}{x^2}$
- $f_{yy}(x, y) = 8$
- $f_{xy}(x, y) = -4$

(c) Calcolo $D(x, y) = (3 - \frac{12}{x^2}) \cdot 8 - 16 = 24 - \frac{96}{x^2} - 16 = 8 - \frac{96}{x^2}$

- $(2, 1) \rightarrow D(2, 1) = 8 - \frac{96}{4} = -16 \Rightarrow$ Punto di sella
- $(6, 3) \rightarrow D(6, 3) = 8 - \frac{96}{36} = \frac{16}{3}, f_{xx}(6, 3) = 3 - \frac{12}{36} = \frac{8}{3} \Rightarrow$ Minimo locale