Tipo di Serie	Forma	Comportamento
Armonica Generalizzata	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$	$\begin{cases} \text{Converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$
Geometrica	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (o $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$)	$\begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } \|q\| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{Indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$
Serie di Funzioni	$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$	
Serie di Potenze	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n+1)}$	
Serie a segni alterni	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$	
Serie a segni positivi	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	

1 Serie di potenze

1.1 Raggio di Convergenza R

Sia $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ o $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora il raggio di convergenza R è dato da:

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ \frac{1}{l} & \text{se } l \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

1.2 Insieme di Convergenza Puntuale I_c

L'insieme di convergenza puntuale si ottiene studiando la convergenza della serie negli estremi dell'intervallo $(-R, R)$.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\pm R)^n$
2. L'insieme I_c sarà $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$ o $[-R, R]$ a seconda della convergenza agli estremi.

2 Convergenza e Divergenza delle Serie Numeriche

2.1 Convergenza Assoluta e Semplice

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente se } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge.}$$

Teorema: Se una serie converge assolutamente $\implies$ converge semplicemente.

2.2 Condizione Necessaria di Cauchy per le Serie

Data una serie qualsiasi:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{può} \text{ convergere o divergere (caso dubbio)} \\ \neq 0 \text{ o non esiste} & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{diverge} \text{ sicuramente} \end{cases}$$

Nota: Questa condizione è **necessaria ma non sufficiente** alla convergenza della serie.

2.3 Criteri di Convergenza/Divergenza per Serie a Termini Definitivamente Positivi

(*Ovvero* $\exists n_0$ *tale che* $a_n \geq 0$ *per ogni* $n \geq n_0$)

- **Criterio del Rapporto** (Utile con fattoriali $n!$ o potenze con n all'esponente): Sia $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
  1. Se $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge.
  2. Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge.
  3. Se $l = 1 \Rightarrow$ il criterio non fornisce informazioni (la serie può convergere o divergere).
- **Criterio della Radice** (Utile con potenze n-esime come $(f(n))^n$): Sia $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.
  1. Se $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge.
  2. Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge.
  3. Se $l = 1 \Rightarrow$ il criterio non fornisce informazioni.
- **Criterio del Confronto**: Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente.
  – Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
  – Se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.
- **Criterio del Confronto Asintotico**: Siano $a_n, b_n > 0$ definitivamente. Sia $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

$$\begin{cases} L \in (0, +\infty) & \Rightarrow \sum a_n \text{ e } \sum b_n \text{ hanno lo stesso comportamento (convergenza/divergenza)} \\ L = 0 & \Rightarrow \text{Se } \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge (se } \sum b_n \text{ diverge, nulla si può dire)} \\ L = +\infty & \Rightarrow \text{Se } \sum b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge (se } \sum b_n \text{ converge, nulla si può dire)} \end{cases}$$

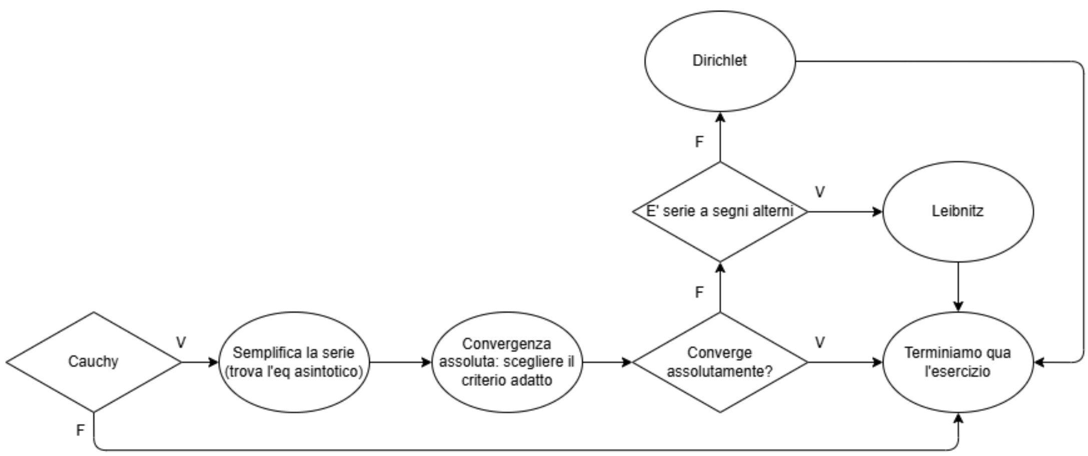
Suggerimento per scegliere b_n: Prendi i termini di grado maggiore in numeratore e denominatore di a_n. (Es. $a_n = \frac{n+1}{n^2+3} \Rightarrow b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$)

2.4 Criteri di Convergenza per Serie a Termini di Segno Alterno

- **Criterio di Leibniz** (per serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$): Se la successione a_n soddisfa le seguenti condizioni:
  1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
  2. a_n è decrescente definitivamente ($a_{n+1} \leq a_n$ per $n \geq n_0$)

  allora la serie converge **semplicemente**.
- **Stima dell'Errore per Serie di Leibniz**: Se una serie converge per il criterio di Leibniz a una somma S, e S_N è la somma parziale fino all'N-esimo termine, allora l'errore commesso è limitato dal primo termine tralasciato: $|S - S_N| \leq a_{N+1}$.
- **Criterio di Dirichlet (per serie numeriche)**: Consideriamo una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Se valgono le seguenti condizioni:
  1. Le somme parziali di $\sum a_n$ sono limitate: $\exists M > 0 \mid \left|\sum_{k=1}^{N} a_k\right| \leq M \quad \forall N \geq 1$.
  2. La successione b_n è monotona (crescente o decrescente) definitivamente.
  3. $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

  Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. *(Questo criterio è più generale di Leibniz, che è un caso particolare di Dirichlet con $a_n = (-1)^n$ o $(-1)^{n+1}$).*



2.5 Esercizio d'esame

Dire se le seguenti serie convergono semplicemente e/o assolutamente

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n}-1}{\binom{2n}{3n}}$

  1. $\displaystyle\binom{2n}{3n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{27}{4}\right)^n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi n}}\left(\frac{27}{4}\right)^n \sim \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi n}}\left(\frac{27}{4}\right)^n$
  2. Cauchy: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n}-1}{\binom{2n}{3n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi n}}\left(\frac{27}{4}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n\sqrt{\pi}-2\sqrt{\pi n}}{\sqrt{3}\left(\frac{27}{4}\right)^n} = 0$ verificato
  3. Equivalente asintotico: $\displaystyle\frac{4n\sqrt{\pi}-2\sqrt{\pi n}}{\sqrt{3}\left(\frac{27}{4}\right)^n} \sim \frac{n}{\left(\frac{27}{4}\right)^n}$
  4. Criterio della radice: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\left(\frac{27}{4}\right)^n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\frac{27}{4}}\right) = \frac{1}{\frac{27}{4}} = \frac{4}{27} < 1 \Rightarrow$ converge assolutamente

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n}{n^2-2n+1}$

  1. Cauchy: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{n^2-2n+1} = \frac{+\infty}{+\infty_2} = 0$ verificato
  2. Equivalente asintotico: $\displaystyle\frac{3n}{n^2-2n+1} \sim \frac{n}{n^2} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow$ non converge assolutamente (serie armonica generalizzata $\alpha \le 1$)
  3. Leibniz:
     (a) Cauchy verificato prima
     (b) Decrescente?

$$\begin{aligned}
\frac{3n}{(n-1)^2} &\geq \frac{3(n+1)}{((n+1)-1)^2}\\
\frac{n}{(n-1)^2} &\geq \frac{(n+1)}{((n+1)-1)^2}\\
n &\geq \frac{(n+1)(n-1)^2}{((n+1)-1)^2}\\
n((n+1)-1)^2 &\geq (n+1)(n-1)^2\\
n^2+n-1 &\geq 0\\
n_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \to \text{decrescente da qua in poi}
\end{aligned}$$

     (c) Soddisfa entrambi i requisiti quindi converge semplicemente

- *Determinare l'insieme di convergenza puntuale I della serie di potenze* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5^n}x^n$

  1. Cauchy: $\displaystyle\frac{n}{5^n} = 0$
  2. Criterio della radice: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{5^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{5} = \frac{1}{5}$
  3. $\displaystyle R = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$
  4. $\displaystyle\sum\frac{n}{5^n}(-5)^n = \sum -n \qquad \lim_{n\to+\infty}|-n| = +\infty$
  5. $\displaystyle\sum\frac{n}{5^n}5^n = \sum n \qquad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$
  6. $I = (-5, 5)$

3 Polinomio di McLaurin

Consideriamo:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$f^{(k)}(0) = c_k \cdot k!$$

$$P_k(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{k} c_k x^k$$

Funzione $f(x)$	**Serie di Maclaurin**
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
$\frac{1}{1-x}$ (Serie Geometrica)	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$
$(1+x)^\alpha$ (Serie Binomiale)	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$ dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$
$(1-x)^{-k}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k+1)}{2!} x^2 + \dots$ (Questo è un caso speciale della serie binomiale con $\alpha = -k$)

3.1 Trovare $f^{(n)}(0)$ con n molto grande

1. Scomponi $f(0)$ in funzioni le cui serie di McLaurin sono note e riscrivile come sommatorie (praticamente copia e incolla dalla tabella adattando l'argomento)
2. Prendi il coefficiente di ordine n di ogni sommatoria e poi sommali per ottenere il coefficiente totale
3. Sapendo la formula del coefficiente c_k dobbiamo isolare $f^{(k)}(0)$ moltiplicando entrambi i lati per $k!$

Esempio: calcolare $f^{(15)}(0)$ di $f(x) = e^{2x} - \frac{x^2}{1+x}$

1. $e^{2x} \to \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2x)^n}{n!}\right) \xrightarrow{n=15} \frac{(2x)^{15}}{15!}$
2. $\frac{x^2}{1+x} \to \sum_{n=0}^{\infty} \left((-x)^n \cdot x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot x^n \cdot x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot x^{n+2}\right) \xrightarrow{n=13} -x^{15}$
3. $a_{15} = \frac{2^{15}}{15!} x^{15} + x^{15} = x^{15} \left(\frac{2^{15}}{15!} + 1\right) \xrightarrow{\text{togliamo le x}} \frac{2^{15}}{15!} + 1$
4. $f^{(15)}(0) = 15! \cdot a_{15} = 2^{15} \cdot 15!$

3.2 Resto di Lagrange

Per trovare il resto di Lagrange di ordine k con centro x_0 (solitamente è 0) di una funzione $g(x)$:

$$R_k(x) = \frac{g''(x)}{(k+1)!} x^{(k+1)}$$

Per fare una stima in un intervallo $x \in I$:

1. $|g''(x)| \leq M$
2. M è la sommatoria di tutti gli elementi di $g''(x)$ a modulo, è possibile usare la disuguaglianza triangolare: $|x - y| \leq |x| + |y|$

3. Troviamo gli equivalenti asintotici di M

4. Sostituiamo x con il valore di I più grande che possiamo usare

5. La stima è $|R_k(x)| \leq \dfrac{M}{(k+1)!} x^{(k+1)}$

3.3 Esercizio da esame

- *Data la funzione $f(x) = x(e^x - 1) + \ln(1+x^2) + \sin(2x)$, calcolarne il polinomio di McLaurin di ordine 4*

  1. Dividiamo $f(x)$ in polinomi che contengono le funzioni elementari quindi avremo:
     - $x(e^x - 1) = x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - 1\right) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3!} + o\left(x^4\right)$
     - $\ln(1+x^2) = \left(x^2 - \frac{(x^2)^2}{2}\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)$
     - $\sin(2x) = 2\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o\left(x^4\right)$
  2. Costruiamo una tabella di questo tipo:

Ordine	$x(e^x-1)$	$\ln(1+x^2)$	$\sin(2x)$	**Somma**
1	/	/	$2x$	$2x$
2	x^2	x^2	/	$2x^2$
3	$\frac{x^3}{2}$	/	$-\frac{(2x)^3}{3!}$	$-\frac{5x^3}{6}$
4	$\frac{x^4}{3!}$	$-\frac{x^4}{2}$	/	$-\frac{x^4}{3}$

  Dove andiamo a prendere gli elementi di ciascun polinomio dell'ordine indicato nella prima colonna ed eseguiamo la somma della riga nell'ultima colonna.

  3. Poi costruiamo il polinomio $P_4(x)$ sommando l'ultima colonna: $P_4(x) = 2x + 2x^2 - \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{3}$

- *Scrivere il resto di Lagrange $R_1(x)$ di ordine 1 (con centro in 0) della funzione $g(x) = \cos(x^2) + \sin(3x)$ e determinarne una stima per $x \in (0, \frac{1}{4}]$*

  1. $g''(x) = \frac{d}{dx}(g'(x)) = -4x^2\cos(x^2) - 2\sin(x^2) - 9\sin(3x)$
  2. $R_1(x) = \frac{g''(x)}{2!}x^2$
  3. $$|g''(x)| \leq M$$
     $$\left|-4x^2\cos(x^2) - 2\sin(x^2) - 9\sin(3x)\right| \leq \left|4x^2\cos(x^2)\right| + \left|2\sin(x^2)\right| + |9\sin(3x)|$$
  4. Troviamo gli equivalenti asintotici per i singoli elementi di M
     $$\sin(x^2) \sim x^2$$
     $$\sin(3x) \sim 3x$$
     $$\cos(x^2) \sim 1 \rightarrow \text{Usiamo 1 perchè vogliamo fare una stima grossolana}$$
  5. Riscriviamo M:
     $$\left|4x^2\cos(x^2)\right| + \left|2\sin(x^2)\right| + |9\sin(3x)| = 4x^2 + 2x^2 + 27x = 6x^2 + 27x$$
  6. Sostituiamo $x = \frac{1}{4}$ perchè è la x più grande che possiamo usare:
     $$\frac{3}{8} + \frac{27}{4} = \frac{57}{8}$$
  7. Quindi:
     $$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2!}x^2 \rightarrow \frac{57}{8}\frac{1}{2}x^2 = \frac{57}{16}x^2 \simeq 3.56x^2$$

3.4 Esercizio da esame

Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 8 attorno ad $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \ln(\cos(x^2))$. Quanto vale $f^{(8)}(0)$?

1. $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + O(x^{10})$

2. $\cos(x^2) = 1 - \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^8}{4!} + O(x^{12})$

3. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + O(x^9)$

4. $\ln(1+cos(x^2)-1) = -\frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!}\right)^2 + \ldots = -\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^8}{8} + O(x^12) \to P_8(x)$

5. $c_8 = x^8\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{12}x^8$

6. $f^{(8)}(0) = -\frac{1}{12} \cdot 8! = -3360$

4 Formula di Taylor

$f^{(n)}$ indica l'ordine di derivazione n-esimo

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile infinite volte (C^∞)

4.1 Polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n

$$T^f_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

4.2 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + R_n f(x)$$
$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ con } c_n \in \{x_0, x\}$$

Se $x = b$ e x_0 è vicino a b, $T^f_{x_0,n}(b)$ approssima $f(b)$ e $\left|f(b) - T^f_{x_0,n}(b)\right| = |R_n f(b)|$

4.2.1 Determinare una stima del resto di Lagrange

Se dobbiamo calcolarlo con $x \in (0, a]$ al posto della x negli argomenti delle sotto-funzioni ci mettiamo a e calcoliamo M in base a quello.

$$\left|f^{(k+1)}(c)\right| \leq M$$

Dove M è il maggiorante quindi prendiamo tutte le "sotto-funzioni" di $f^{(k+1)}(x)$ e combiniamo tutti i maggioranti tra di loro oppure calcoliamo $f^{(k+1)}(a)$. Per calcolare la stima quindi:

$$|R_k(x)| \leq \frac{M}{(k+1)!}x^{k+1}$$

Esempio:

$$|f''(x)| = \left|e^{-2x} \cdot 13\sin(3x+\phi)\right|$$

I valori maggioranti di questi sono 1 e 13 (perchè la funzione seno oscilla tra -1 e 1 ma stiamo usando il modulo). Quindi:

$$M = 1 \cdot 13 = 13$$

Oppure calcoliamo $|f''(a)|$ per trovare M.

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2!}x^2$$

4.3 Formula di Taylor con resti di Peano

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + (x-x_0)^n + \varepsilon(x-x_0) \text{ con } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$$

4.4 Unicità del Polinomio di Taylor

$$f(x) = (a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n) + \varepsilon(x-x_0)(x-x_0)^n$$

Dove $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$ allora:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

5 Fourier

5.1 Coefficienti

Data una funzione f periodica di periodo T, i coefficienti di Fourier sono dati da:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}kx} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

E usando l'identità di Eulero:

$$\hat{f}_k = \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx\right) - i\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx\right)$$

5.1.1 Coefficienti reali

- $a_k = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$
- $b_k = i(\hat{f}_k + \hat{f}_{-k}) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$

Proprietà:

- Se $f(x)$ è pari $\Rightarrow b_k$ nulli
- Se $f(x)$ è dispari $\Rightarrow a_k$ nulli tranne $a_0 = 0$

5.2 Serie di Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right]$$

5.3 Criterio di Dirichlet

Permette di dire a cosa converge e/o a dire il **valore della serie** di Fourier.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se continua} \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{se discontinua in } x \end{cases}$$

5.3.1 Utilizzo

1. Se la funzione è definita a tratti cerchiamo i punti di giunzione e controlliamo se sono continui o no (usando la tecnica del limite sinistro e destro), se la funzione è periodica anche gli estremi devono essere considerati come punti di giunzione
2. Riscrivi $\tilde{f}(x)$ impostando la condizione (se periodica di periodo T) come $x = x_0 + Tk$ o $x \neq x_0 + Tk$ dove x_0 è il punto di discontinuità

Una serie di Fourier converge **uniformemente** se f è continua su tutto $\mathbb{R}$ (o su T). Per vedere se una serie converge uninformemente basta usare una di queste strategie:

- Funzione continua e derivabile a tratti $\Rightarrow$ converge
- Usare il criterio di Weierstrass
- E' funzione Lipschitziana ($|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$)

5.4 Esercizio d'esame

Sia f la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2\pi + x & x \in [-\pi, 0) \\ 2\pi - x & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

- *Disegna il grafico di f*
- *Calcolare il coefficiente di Fourier $\hat{f}_0$*
  1. Sappiamo che $\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(2\pi + x)dx + \int_{0}^{\pi}(2\pi - x)dx\right] = \frac{3\pi}{2}$

- *Calcolare il coefficiente di Fourier $\hat{f}_k$ per $k \neq 0$*
  1. Se $f(x)$ è pari, i coefficienti b_k sono nulli e i coefficienti $a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(\frac{2\pi}{2\pi}kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$
  2. Poichè $\hat{f}_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ nel nostro caso sarà $\hat{f}_k = \frac{a_k}{2}$
  3. Calcoliamo a_k
  $$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2\pi - x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi k^2}[1-(-1)^k]$$
  4. Quindi dobbiamo calcolare per k pari e $\neq 0$ e dispari:
  $$\hat{f}_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ pari e } \neq 0 \end{cases}$$
- *Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[-\pi, \pi)$*
  1. Sappiamo che $T = 2\pi$
  2. Calcoliamo a_0:
  $$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 2\pi dx - \int_0^{\pi} x dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(2\pi\,[x]_0^{\pi} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(2\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{3\pi^2}{2} = 3\pi \end{aligned}$$
  3. Sostituiamo a_0, a_k e b_k con quelli calcolati in precedenza
  $$f(x) \sim \frac{3\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{2}{\pi k^2}[1-(-1)^k]\cos(kx)\right]$$

5.5 Esercizio d'esame

Consideriamo la funzione di periodo 4 ottenuta prolungando per periodicità: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-2, 0) \\ 2x & x \in [0, 2) \end{cases}$

- *Disegnare il grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[-10, 10]$*
- *Calcolare i coefficienti a_k e b_k per ogni $k \geq 0$*
  1. $a_0 = b_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\,dx + \int_0^2 2x\,dx\right) = \frac{1}{2}(0+4) = 2$
  2. $a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\,dx + \int_0^2 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx\right) = \frac{4}{(\pi k)^2}((-1)^k - 1)$
  3. $$\begin{aligned} \int 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx &\xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}kx;dt=\frac{\pi}{2}k\,dx} \int \frac{2t}{\frac{\pi}{2}k}\cos(t)\left(\frac{2}{\pi k}\right)dt = \frac{2}{\pi k}\cdot\frac{4}{\pi k}\int t\cos(t)\,dt = \frac{8}{(\pi k)^2}\int t\cos(t)\,dt \\ &\xrightarrow{f'=\cos(t);g=t} \frac{8}{(\pi k)^2}\left(t\sin(t) - \int \sin(t)\,dt\right) = \frac{8}{(\pi k)^2}(t\sin(t) + cos(t)) \\ &\xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}kx} \frac{8}{(\pi k)^2}\left(\frac{\pi}{2}kx\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right) + cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\right) = \frac{4x}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right) + \frac{8}{(\pi k)^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right) \end{aligned}$$
  4. $b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx = (-1)^{k+1}\left(\frac{2}{\pi k}\right)$
- *Calcolare la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza puntuale*
  1. $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{4}{(\pi k)^2}((-1)^k - 1)\right)\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right) + \left((-1)^{k+1}\left(\frac{2}{\pi k}\right)\sin\left(\frac{2}{\pi k}\right)\right)\right]$
  2. Dirichlet:
     (a) $x = 0 \rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{n\to 0^+} f(x) = 0 \end{cases}$ continua in $x = 0$
     (b) $x = 2 \rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to 2^-} f(x) = 4 \\ \lim_{n\to 2^+} f(x) = 0 \end{cases}$ discontinua in $x = 2, \tilde{f}(2) = \frac{4+0}{2} = 2 \leftarrow$ converge a 2 per $x = 2$
     (c) $\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 2+4k \\ 2 & \text{se } x = 2+4k \end{cases}$

6 Funzioni a due variabili

6.1 Proprietà degli insiemi

- Un insieme è **chiuso** se c'è $\leq, \geq, =$
- Un insieme è **limitato** se è limitato "orizzontalmente" $(i \leq x \leq j)$ e "verticalmente" $(k \leq y \leq z)$

6.2 Derivata parziale

Deriviamo la funzione fissando una variabile e l'altra la trattiamo come costante:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + 3xy^2 \\ f_x(x, y) &= \frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 2xy + 3y^2 \\ f_y(x, y) &= \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = x^2 + 6x \end{aligned}$$

6.2.1 Di ordine superiore

Equivalgono alle derivate di ordine superiore al primo, nel caso di derivata parziale mista prima deriviamo per la prima variabile e poi deriviamo il risultato fissando la seconda variabile

$$\begin{aligned} &f(x, y) = x^2y + 3xy^2 \\ &f_{xx}(x, y) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta x}(2xy + 3y^2) = 2y \\ &f_{xy}(x, y) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta y}(2xy + 3y^2) = 2x \end{aligned}$$

6.3 Gradiente

$$\bigtriangledown f(x_0, y_0) = \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0, y_0), \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0, y_0)\right)$$

6.4 Derivata direzionale

Dato u di modulo 1 $\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1\right)$

$$D_u f(x_0, y_0) = \bigtriangledown f(x_0, y_0) \cdot u = \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0, y_0) \cdot u_x\right) + \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0, y_0) \cdot u_y\right)$$

6.4.1 Normalizzazione vettore v

$$u = \frac{v}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

6.5 Equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ z &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0 \end{aligned}$$

6.6 Punti critici di f

Un punto (x_0, y_0) nel dominio di f è un punto critico se:

- $\bigtriangledown f(x_0, y_0) = (0, 0)$ (Punti **stazionari**)
  1. Calcola $\bigtriangledown f(x, y)$
  2. Trova i punti in cui il gradiente è nullo:
  $$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$
  3. Le coppie di (x, y) che risolvono il sistema ma non appartengono al dominio non sono punti critici.
- oppure, una o entrambe le derivate parziali $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ non esistono

6.6.1 Classificazione

1. Calcolo le derivate parziali seconde:
   - $f_{xx}(x,y)$
   - $f_{yy}(x,y)$
   - $f_{xy}(x,y)$
2. Costruisco la matrice Hessiana:
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$
3. Calcolo il determinante: $D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$
4. Per ogni punto critico (x_0, y_0) calcolo $D(x_0, y_0)$:

$D(x_0,y_0) > 0$	$D(x_0,y_0) < 0$	$D(x_0,y_0) = 0$
Minimo locale ($f_{xx}(x_0,y_0) > 0$) Massimo locale ($f_{xx}(x_0,y_0) < 0$)	Punto di sella	Test inconcludente

6.7 Massimi e minimi vincolati (Metodo di Lagrange)

Dato un vincolo $g(x,y) = 0$, cerchiamo i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y)$ vincolati a $C = \{(x,y) \in A \mid g(x,y) = 0\}$. Quindi nella frontiera.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} = \begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Interpretazione geometrica: in un punto vincolato di massimo o minimo, i gradienti di f e g sono paralleli $\Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$
Procedura:

1. Una volta scritto il sistema risolvere usando questo meccanismo:
   - Trova quelle variabili per cui a destra dell'uguale viene 0 e fai un sistema per variabile che soddisfa questo requisito
   - Se per un caso viene impossibile il sistema sappiamo per certo che quella variabile deve essere $\neq 0$ altrimenti bisogna controllare anche il sistema $\neq 0$
   - Una volta trovati tutti i punti critici basta calcolare per la funzione di partenza e confrontare con i possibili punti critici calcolati con la matrice Hessiana

Con più vincoli: $g_1(x,y) = 0$, $g_2(x,y) = 0$ $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ $g_1(x,y) = 0, \quad g_2(x,y) = 0$

6.8 Esercizio da esame

Sia $f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - 8x - 4xy + 4y^2 + 12 \ln x$

1. *Determinare il dominio di f e dire dove f è differenziabile*
   (a) Dom$f$: $(0, +\infty)$
   (b) $f_x(x,y) = 3x - 8 - 4y + \frac{12}{x}$ e $f_y(x,y) = -4x + 8y$. Il dominio di queste derivate parziali è $(0, +\infty)$
   (c) Concludiamo dicendo che è differenziabile su tutto il dominio
2. *Calcolare il gradiente nel punto $(1,0)$, la derivata direzionale $\frac{\vartheta f(1,0)}{\vartheta v}$ per $v = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 0, f(1,0))$*
   (a) $\bigtriangledown f(1,0) = (7, -4)$
   (b) $||v|| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$
   (c) $D_v f(1,0) = \bigtriangledown f(1,0) \cdot v = (7,-4) \cdot (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = -\frac{28}{5} - \frac{12}{5} = -8$

(d)

$$
\begin{aligned}
z &= f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) + z_0 \\
z &= f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) + f(1,0) \\
z &= 7(x-1) - 4y - \frac{13}{2} \\
z &= 7x - 7 - 4y - \frac{13}{2} \\
z &= 7x - 4y - \frac{27}{2}
\end{aligned}
$$

3. *Stabilire quali sono i punti critici di f sul suo dominio e classificarli*

   (a)

$$
\begin{cases}
3x - 8 - 4y + \frac{12}{x} = 0 \to x - 8 + \frac{12}{x} = 0 \to x^2 - 8x + 12 = 0 \to x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8\pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\
-4x + 8y = 0 \to 8y = 4x \to y = \frac{x}{2}
\end{cases}
$$

   I punti critici sono $(6,3)$ e $(2,1)$

   (b) Calcolo f_{xx}, f_{yy} e f_{xy}
   - $f_{xx}(x,y) = 3 - \frac{12}{x^2}$
   - $f_{yy}(x,y) = 8$
   - $f_{xy}(x,y) = -4$

   (c) Calcolo $D(x,y) = \left(3 - \frac{12}{x^2}\right) \cdot 8 - 16 = 24 - \frac{96}{x^2} - 16 = 8 - \frac{96}{x^2}$

   (d)
   - $(2,1) \to D(2,1) = 8 - \frac{96}{4} = -16 \Rightarrow$ Punto di sella
   - $(6,3) \to D(6,3) = 8 - \frac{96}{36} = \frac{16}{3}$, $f_{xx}(6,3) = 3 - \frac{12}{36} = \frac{8}{3} \Rightarrow$ Minimo locale

6.9 Esercizio da esame

Sia $f(x,y) = xe^{-y^2-x}$

- *Stabilire se f è differenziabile sul suo dominio e calcolarne la derivata direzionale lungo $v = (1,2)$ nel punto $P_0 = (3,-1)$*

  1. f è differenziabile sul suo dominio perchè è una composizione di funzioni elementari
  2. $f_x(x,y) = e^{-y^2-x}(1-x)$
  3. $f_y(x,y) = -2yxe^{-y^2-x}$
  4. $\bigtriangledown f(3,-1) = (-2e^{-4}, 6e^{-4})$
  5. $||v|| = \sqrt{5} \neq 1 \to u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
  6. $D_uF(3,-1) = \bigtriangledown f(3,-1) \cdot u = (-2e^{-4}, 6e^{-4}) \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2e^{-4}}{\sqrt{5}} + \frac{12e^{-4}}{\sqrt{5}} = \frac{10e^{-4}}{\sqrt{5}}$

- *Dopo aver disegnato l'insieme $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ e stabilito se è chiuso e limitato, determinare, se esistono, i punti di massimo/minimo di f su $\mathcal{C}$*

  1. Insieme chiuso e limitato
  2. $x^2 + y^2 < 4$

     (a) $\begin{cases} e^{-y^2-x}(1-x) = 0 \to 1 - x = 0 \to x = 1 \\ -2yxe^{-y^2-x} = 0 \to -2xy = 0 \to -2y = 0 \to y = 0 \end{cases}$

     Punto critico $P_0(1,0)$ massimo locale per matrice Hessiana.

     (b) $x^2 + y^2 = 4$

       i. $\bigtriangledown g(x,y) = (2x, 2y)$

       ii. $\begin{cases} e^{-y^2-x}(1-x) = \lambda 2x \\ -2yxe^{-y^2-x} = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

       iii. Facciamo le casistiche per $x = 0, \lambda = 0$ e $y = 0$, risolvendo i sistemi abbiamo che solo per $y = 0$ abbiamo due punti critici: $P_1(2,0)$ e $P_2(-2,0)$

       iv. Calcolando questi punti nella funzione f abbiamo che P_2 è minimo assoluto e P_0 è minimo locale e assoluto.

7 Extra

7.1 Determinare crescenza/decrescenza velocemente

Se $h(n) = f(g(n))$

$g(n)$	$f(x)$	$h(n)$
decrescente	crescente	descrescente
descrescente	decrescente	crescente
crescente	crescente	crescente
crescente	decrescente	decrescente

7.2 Formule utili

$f(n)^{g(n)} = \{0^0, \infty^0, 1^\infty\} \to f(n)^{g(n)} = e^{g(n)\ln(f(n))}$
$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ per $n \to +\infty$
$\binom{\alpha n}{\beta n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta(\alpha-\beta)}}\left(\frac{\alpha^\alpha}{\beta^\beta(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}}\right)^n$
$\{(n!)^2\} \sim \frac{2\pi n}{e^{2n}}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} = \frac{2\pi n}{e^{2n}}(n!)^2$

7.3 Equivalenze Asintotiche Notevoli (per $x \to 0$ e $n \to +\infty$ rispettivamente):

Funzione	**Equivalenza asintotica**	**Dominio**
$\sin x$	x	$x \to 0$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2}$	$x \to 0$
$\tan x$	x	$x \to 0$
$\arcsin x$	x	$x \to 0$
$\arctan x$	x	$x \to 0$
$\ln(1+x)$	x	$x \to 0$
$e^x - 1$	x	$x \to 0$
$(1+x)^\alpha - 1$	αx	$x \to 0, \alpha \neq 0$
$\sqrt{1+x} - 1$	$\frac{x}{2}$	$x \to 0$
$\cos x - 1$	$-\frac{x^2}{2}$	$x \to 0$
$1 - \cos x$	$\frac{x^2}{2}$	$x \to 0$
$\cosh x - 1$	$\frac{x^2}{2}$	$x \to 0$
$\sinh x$	x	$x \to 0$
$\tanh x$	x	$x \to 0$

Funzione	**Equivalenza asintotica**
$\sin\left(\frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{n}$
$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{n}$
$e^{1/n} - 1$	$\frac{1}{n}$
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$	$\frac{e}{2n}$
$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$
$\ln(n+1) - \ln n$	$\frac{1}{n}$

7.4 Equivalenze trigonometriche

- $\cos(k\pi) = (-1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$

7.5 Insiemi vincolati noti

Condizione	**Grafico**
$x^2 + y^2 \leq k$	Cerchio di raggio $\sqrt{k}$
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq k$	Cerchio di raggio $\sqrt{k}$ centrato in (x_0, y_0)
$-a \leq x \leq a \wedge -a \leq y \leq a$	Quadrato
$x_0 \pm a \leq x \leq x_0 \pm a \wedge y_0 \pm a \leq y \leq y_0 \pm a$	Quadrato centrato in (x_0, y_0)
$x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1 \leq y \leq y_2$	Rettangolo
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq k$	Ellisse
$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \frac{x}{L} + \frac{y}{H} \leq 1$	Triangolo
$R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2$	Anello