

# 1 Serie Notevoli

Tipo di Serie	Forma	Comportamento
Armonica Generalizzata	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$	$\begin{cases} \text{Converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$
Geometrica	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (o $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ )	$\begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se }  q  < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{Indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$

## 2 Serie di Funzioni

Data la serie di funzioni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

1. **Converge puntualmente** su  $I$  se la serie converge  $\forall x \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
2. **Converge assolutamente** su  $I$  se la serie a termini positivi  $(|f_n(x)|)$  converge  $\forall x \in I$

Se per qualche  $x \in I$  la serie diverge o è indeterminata, bisogna restringere il dominio della funzione somma  $f(x)$  all'insieme:

$$\left\{ x \in I \mid \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$$

### 2.1 Criterio di Weierstrass

Data una serie di funzioni, se la serie numerica a termini positivi converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$$

allora la serie di funzioni converge assolutamente e puntualmente (= totalmente) su  $I$ .

### 2.2 Strategia di Studio della Convergenza

1. **Convergenza Puntuale:** Determinare l'insieme  $I_p$  per cui  $\forall x \in I_p$ , la serie numerica  $\sum f_n(x)$  converge. (Spesso con Criteri per serie numeriche).
2. **Convergenza Assoluta:** Su  $I_p$ , studiare  $\sum |f_n(x)|$ .
3. **Convergenza Uniforme/Totale:**
  - Tentare il **Criterio di Weierstrass**: se  $\sum \sup_{x \in I} |f_n(x)|$  converge, allora la serie converge totalmente su  $I$ .
  - Se Weierstrass non funziona su  $I_p$  (es. perché  $\sup |f_n(x)|$  diverge, ma la serie converge comunque), cercare intervalli  $J \subset I_p$  dove  $\sup |f_n(x)|$  è finito e applicare Weierstrass.
  - (Meno comune per gli esami, ma utile: altri criteri come quello di Abel-Dirichlet per convergenza uniforme.)

Convergenza totale $\Rightarrow$ convergenza puntuale
---

### 2.3 Corollari

#### 2.3.1 Continuità della somma

Se:

1. Le funzioni  $f_n(x)$  sono continue su  $I \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su  $I$  ad  $f(x)$

Allora  $f(x)$  è continua su  $I$ .

### 2.3.2 Integrazione termine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni  $f_n(x)$  sono definite su  $[a, b]$  se:

1. Le funzioni  $f_n$  sono continue su  $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su  $[a, b]$  ad  $f(x)$

Allora  $f(x)$  è integrabile in  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

### 2.3.3 Derivazione termine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni  $f_n(x)$  sono definite su  $I$  se:

1. Le funzioni  $f_n$  sono derivabili e le derivate sono funzioni continue  $\forall n \geq 1$
2. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge puntualmente su  $I$
3. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  converge totalmente su  $I$

Allora  $f(x)$  derivabile e:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in I$$

### 2.3.4 Corollario 1.34

Data una serie di funzioni definite su  $[a, b]$  se:

1. Le funzioni  $f_n(x)$  sono continue su  $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su  $(a, b)$

Allora la serie converge totalmente su  $[a, b]$  e la funzione somma è continua su  $[a, b]$

## 3 Serie di potenze

La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si chiama **serie di potenze di centro 0**

### 3.1 Raggio di Convergenza $R$

Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie di potenze di centro 0. Esiste un unico  $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ , detto Raggio di Convergenza, tale che:

- Se  $R = 0$ : la serie converge **solo in**  $x = 0$ .
- Se  $0 < R < +\infty$ :
  - Converge **assolutamente** su  $(-R, R)$ .
  - Converge **totalmente** su  $[-K, K]$  per ogni  $0 < K < R$ .
  - Non converge per  $|x| > R$ .
- Se  $R = +\infty$ : la serie converge **assolutamente** su  $\mathbb{R}$  e **totalmente** su  $[-K, K]$  per ogni  $K > 0$ .

**Nota:** La convergenza agli estremi  $x = \pm R$  deve essere studiata separatamente (convergenza puntuale).

#### 3.1.1 Calcolo di $R$ (Criteri del Rapporto/Radice)

Sia  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  o  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Allora il raggio di convergenza  $R$  è dato da:

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ \frac{1}{l} & \text{se } l \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

### 3.2 Insieme di Convergenza Puntuale $I_c$

L'insieme di convergenza puntuale si ottiene studiando la convergenza della serie negli estremi dell'intervallo  $(-R, R)$ .

1. Sostituire  $x = R$  nella serie e studiare la convergenza della serie numerica  $\sum a_n R^n$ .
2. Sostituire  $x = -R$  nella serie e studiare la convergenza della serie numerica  $\sum a_n (-R)^n$ .
3. L'insieme  $I_c$  sarà  $(-R, R)$ ,  $[-R, R)$ ,  $(-R, R]$  o  $[-R, R]$  a seconda della convergenza agli estremi.

### 3.3 Proprietà della Funzione Somma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Sia  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $R > 0$ .

- **Continuità:** La funzione somma  $f(x)$  è continua sull'intervallo aperto  $(-R, R)$ .
- **Derivabilità Termine a Termine:**  $f(x)$  è derivabile infinite volte su  $(-R, R)$ , e la sua derivata  $k$ -esima si ottiene derivando la serie termine a termine:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad \forall x \in (-R, R)$$

Il raggio di convergenza delle serie derivate è ancora  $R$ .

- **Integrazione Termine a Termine:**  $f(x)$  è integrabile su ogni intervallo compatto contenuto in  $(-R, R)$ , e la sua primitiva si ottiene integrando la serie termine a termine:

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Il raggio di convergenza della serie integrata è ancora  $R$ .

- **Coefficienti di Maclaurin:** I coefficienti  $a_n$  della serie di potenze sono legati alle derivate della funzione somma  $f(x)$  nel centro ( $x = 0$ ) dalla relazione fondamentale:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{o equivalentemente} \quad f^{(n)}(0) = n! a_n$$

Questo significa che la serie di potenze è lo sviluppo di Maclaurin della sua funzione somma.

- **Unicità dello Sviluppo:** Se due serie di potenze di centro 0 convergono alla stessa funzione su un intervallo  $(-\delta, \delta)$  con  $\delta > 0$ , allora i loro coefficienti devono essere identici:  $a_n = b_n$  per ogni  $n$ .

## 4 Convergenza e Divergenza delle Serie Numeriche

### 4.1 Convergenza Assoluta e Semplice

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente se } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge.}$$

**Teorema:** Se una serie converge assolutamente  $\implies$  converge semplicemente.

### 4.2 Condizione Necessaria di Cauchy per le Serie

Data una serie qualsiasi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{la serie può convergere o divergere (caso dubbio)} \\ \neq 0 \text{ o non esiste} & \Rightarrow \text{la serie **diverge** sicuramente} \end{cases}$$

**Nota:** Questa condizione è **necessaria ma non sufficiente** alla convergenza della serie.

### 4.3 Criteri di Convergenza/Divergenza per Serie a Termini Definitivamente Positivi

(Ovvero  $\exists n_0$  tale che  $a_n \geq 0$  per ogni  $n \geq n_0$ )

- **Criterio del Rapporto** (Utile con fattoriali  $n!$  o potenze con  $n$  all'esponente): Sia  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .
  1. Se  $l < 1 \Rightarrow$  la serie converge.
  2. Se  $l > 1 \Rightarrow$  la serie diverge.
  3. Se  $l = 1 \Rightarrow$  il criterio non fornisce informazioni (la serie può convergere o divergere).
- **Criterio della Radice** (Utile con potenze  $n$ -esime come  $(f(n))^n$ ): Sia  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ .
  1. Se  $l < 1 \Rightarrow$  la serie converge.
  2. Se  $l > 1 \Rightarrow$  la serie diverge.
  3. Se  $l = 1 \Rightarrow$  il criterio non fornisce informazioni.
- **Criterio del Confronto**: Supponiamo che  $0 \leq a_n \leq b_n$  definitivamente.
  - Se  $\sum b_n$  converge  $\Rightarrow \sum a_n$  converge.
  - Se  $\sum a_n$  diverge  $\Rightarrow \sum b_n$  diverge.
- **Criterio del Confronto Asintotico**: Siano  $a_n, b_n > 0$  definitivamente. Sia  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ .

$$\begin{cases} L \in (0, +\infty) & \Rightarrow \sum a_n \text{ e } \sum b_n \text{ hanno lo stesso comportamento (convergenza/divergenza)} \\ L = 0 & \Rightarrow \text{Se } \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge (se } \sum b_n \text{ diverge, nulla si può dire)} \\ L = +\infty & \Rightarrow \text{Se } \sum b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge (se } \sum b_n \text{ converge, nulla si può dire)} \end{cases}$$

*Suggerimento per scegliere  $b_n$* : Prendi i termini di grado maggiore in numeratore e denominatore di  $a_n$ . (Es.  $a_n = \frac{n+1}{n^2+3} \Rightarrow b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ )

- **Test dell'Integrale**: Sia  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione positiva e decrescente. Posto  $a_n = f(n)$  per ogni  $n \geq 1$ , allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

Inoltre, valgono le disuguaglianze per la somma  $S$  della serie e l'integrale improprio  $I$ :

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq S \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

### 4.4 Criteri di Convergenza per Serie a Termini di Segno Alterno

- **Criterio di Leibniz** (per serie del tipo  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  o  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ): Se la successione  $a_n$  soddisfa le seguenti condizioni:

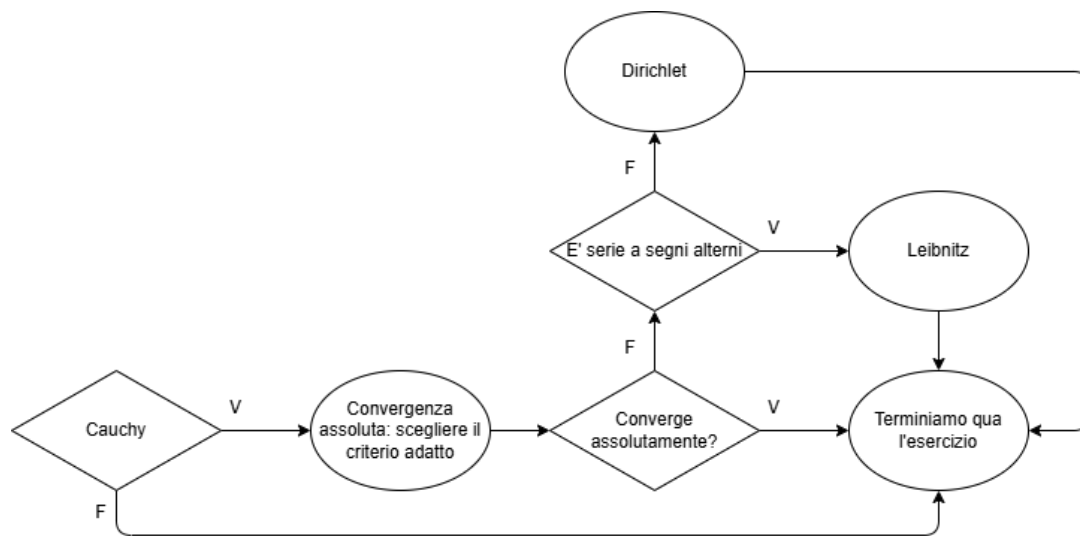
1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
2.  $a_n$  è decrescente definitivamente ( $a_{n+1} \leq a_n$  per  $n \geq n_0$ )

allora la serie converge **semplicemente**.

- **Stima dell'Errore per Serie di Leibniz**: Se una serie converge per il criterio di Leibniz a una somma  $S$ , e  $S_N$  è la somma parziale fino all' $N$ -esimo termine, allora l'errore commesso è limitato dal primo termine tralasciato:  $|S - S_N| \leq a_{N+1}$ .
- **Criterio di Dirichlet (per serie numeriche)**: Consideriamo una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ . Se valgono le seguenti condizioni:

1. Le somme parziali di  $\sum a_n$  sono limitate:  $\exists M > 0 \mid \left| \sum_{k=1}^N a_k \right| \leq M \quad \forall N \geq 1$ .
2. La successione  $b_n$  è monotona (crescente o decrescente) definitivamente.
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ .

Allora la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  converge. (Questo criterio è più generale di Leibniz, che è un caso particolare di Dirichlet con  $a_n = (-1)^n$  o  $(-1)^{n+1}$ ).



## 4.5 Esercizio d'esame

Stabilire se le seguenti serie sono a termini positivi e convergono semplicemente e/o assolutamente.

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

(a) **Cauchy:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\frac{1001}{\infty}\right) = \sin(0) = 0$

(b) **Convergenza assoluta:**  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

i. **Criterio di confronto asintotico:**  $a_n = \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$ ,  $b_n = \frac{1001}{\sqrt{n}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1001}{\sqrt{n}}} = 1$   
 $\rightarrow a_n$  e  $b_n$  hanno lo stesso comportamento.

ii. **Serie armonica generalizzata:**  $\frac{1001}{\sqrt{n}} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$  diverge

iii. Grazie al punto precedente possiamo dire che la serie originale non converge assolutamente (perchè è una serie a segno alternato), ora procederemo con Leibnitz

(c) **Criterio di Leibnitz:**

i.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) = 0$ ? L'abbiamo già fatto nel punto (a)

ii. Decrescente?

A.  $a'_n = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(-\frac{1001}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n}\right) = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right) = \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)$

B.  $a'_n > 0 \begin{cases} \cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right) > 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{1001}{\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow n \geq 406269 \\ \left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right) > 0 \rightarrow \text{Impossibile sarà sempre negativo perchè } n \geq 1 \end{cases}$

C. Quindi sapendo che la serie è decrescente con  $n \geq 406269$ , possiamo dire che anche questo requisito è soddisfatto

(d) **Conclusione:** visto che la serie soddisfa tutti i requisiti del criterio di Leibnitz allora converge semplicemente.

2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}$

(a) **Cauchy:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1} = 0$

(b) **Convergenza assoluta:**  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1} \right|$

i. **Criterio di confronto asintotico:**  $a_n = \frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}$ ,  $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3-(\cos n)^2)}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = 3$$

ii. **Serie armonica generalizzata:**  $\frac{1}{n^2} \rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow b_n$  converge

(c) **Conclusione:** Grazie al punto precedente e al teorema del confronto possiamo affermare che la serie converge assolutamente e, di conseguenza, semplicemente.

3. Data la serie di potenze  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} x^n$  determinare il raggio di convergenza  $\rho$  e l'insieme di convergenza puntuale  $I$ .

(a) **Cauchy:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} = 0$

(b) **Convergenza assoluta:**  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} \right|$

i. **Criterio della radice:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left| \frac{2^n}{n^2} \right| \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln\left(\frac{2^n}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} (\ln(2^n) - \ln(n^2))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} (n \ln(2) - 2 \ln(n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(2) - \frac{2 \ln(n)}{n}} = e^{\ln(2)} = 2 \end{aligned}$$

ii. **Determiniamo  $\rho$ :**  $\rho = \frac{1}{2}$  per definizione

iii. **Determinare  $I_c$ :**

A. si "creano" due serie diverse usando l'intervallo  $[x_0 - p, x_0 + p]$  e sostituendo  $x$  con entrambi gli estremi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} (x_0 - p)^n \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} (x_0 + p)^n \end{aligned}$$

B. **Studiamo la convergenza di entrambe:**

$$\begin{aligned} \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} \left(0 - \frac{1}{2}\right)^n &= \frac{(2^n+3^{-n}) \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^2} = \frac{(-1)^n + \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} \\ \rightarrow \left| \frac{(-1)^n + \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} \right| &= \frac{1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{serie armonica, converge} \\ \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} \rightarrow \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} & \text{per confronto asintoto } b_n \text{ converge perchè serie geometrica} \end{cases} \\ \frac{2^n+3^{-n}}{n^2} \left(0 + \frac{1}{2}\right)^n &\rightarrow \text{analogamente a quella di sopra converge} \end{aligned}$$

C. Quindi, visto che converge per entrambi gli estremi  $I_c = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

## 5 Polinomio di McLaurin

Consideriamo:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \\ f^{(k)}(0) &= c_k \cdot k! \\ P_k(x) &= f(0) + \sum_{n=1}^k c_n x^n \end{aligned}$$

Funzione $f(x)$	Serie di Maclaurin
$e^x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
$\frac{1}{1-x}$ (Serie Geometrica)	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$
$(1+x)^\alpha$ (Serie Binomiale)	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$ dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$
$(1-x)^{-k}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k+1)}{2!} x^2 + \dots$ (Questo è un caso speciale della serie binomiale con $\alpha = -k$ )

## 5.1 Esercizio da esame

- Data la funzione  $f(x) = x(e^x - 1) + \ln(1+x^2) + \sin(2x)$ , calcolarne il polinomio di McLaurin di ordine 4

1. Dividiamo  $f(x)$  in polinomi che contengono le funzioni elementari quindi avremo:

$$\begin{aligned}
 - x(e^x - 1) &= x \left( 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - 1 \right) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3!} + o(x^4) \\
 - \ln(1+x^2) &= \left( x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\
 - \sin(2x) &= 2 \left( x - \frac{(2x)^3}{3!} \right) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^4)
 \end{aligned}$$

2. Costruiamo una tabella di questo tipo:

Ordine	$x(e^x - 1)$	$\ln(1+x^2)$	$\sin(2x)$	Somma
1	/	/	$2x$	$2x$
2	$x^2$	$x^2$	/	$2x^2$
3	$\frac{x^3}{2}$	/	$-\frac{(2x)^3}{3!}$	$-\frac{5x^3}{6}$
4	$\frac{x^4}{3!}$	$-\frac{x^4}{2}$	/	$-\frac{x^4}{3}$

Dove andiamo a prendere gli elementi di ciascun polinomio dell'ordine indicato nella prima colonna ed eseguiamo la somma della riga nell'ultima colonna.

3. Poi costruiamo il polinomio  $P_4(x)$  sommando l'ultima colonna:  $P_4(x) = 2x + 2x^2 - \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{3}$

- Scrivere il resto di Lagrange  $R_1(x)$  di ordine 1 (con centro in 0) della funzione  $g(x) = \cos(x^2) + \sin(3x)$  e determinarne una stima per  $x \in (0, \frac{1}{4}]$

1.

## 6 Formula di Taylor

$f^{(n)}$  indica l'ordine di derivazione  $n$ -esimo

Data una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definita su un intervallo  $I$  e derivabile infinite volte ( $C^\infty$ )

### 6.1 Polinomio di Taylor di $f$ centrato in $x_0$ di ordine $n$

$$T_{x_0,n}^f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

## 6.2 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = T_{x_0,n}^f(x) + R_n f(x)$$
$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ con } c_n \in \{x_0, x\}$$

Se  $x = b$  e  $x_0$  è vicino a  $b$ ,  $T_{x_0,n}^f(b)$  approssima  $f(b)$  e  $|f(b) - T_{x_0,n}^f(b)| = |R_n f(b)|$

### 6.2.1 Determinare una stima del resto di Lagrange

$$|f^{(k+1)}(c)| \leq M$$

Dove  $M$  è il maggiorante quindi prendiamo tutte le "sotto-funzioni" di  $f^{(k+1)}(x)$  e combiniamo tutti i maggioranti tra di loro. Per calcolare la stima quindi:

$$|R_k(x)| \leq \frac{M}{(k+1)!} x^{k+1}$$

Esempio:

$$|f''(x)| = |e^{-2x} \cdot 13 \sin(3x + \phi)|$$

I valori maggioranti di questi sono 1 e 13 (perchè la funzione seno oscilla tra  $-1$  e  $1$  ma stiamo usando il modulo). Quindi:

$$M = 1 \cdot 13 = 13$$

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2!} x^2$$

## 6.3 Formula di Taylor con resti di Peano

$$f(x) = T_{x_0,n}^f(x) + (x-x_0)^n + \varepsilon(x-x_0) \text{ con } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$$

## 6.4 Unicità del Polinomio di Taylor

$$f(x) = (a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n) + \varepsilon(x-x_0)(x-x_0)^n$$

Dove  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$  allora:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

**Polinomi di Taylor di centro  $x_0 = 0$  di alcune funzioni elementari.**

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + R_n(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R_n(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_n(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x) \quad \alpha \notin \mathbb{N}$$

$$(1-x)^{-k} = \sum_{j=0}^n \binom{j+k-1}{k-1} x^j + R_n(x) \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 1$$



## 7 Fourier

### 7.1 Coefficienti

Data una funzione  $f$  periodica di periodo  $T$ , i coefficienti di Fourier sono dati da:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} kx} \quad k \in \mathbb{Z}$$

E usando l'identità di Eulero:

$$\hat{f}_k = \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx \right) - i \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx \right)$$

#### 7.1.1 Coefficienti reali

- $a_k = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx$
- $b_k = i(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx$

**Proprietà:**

- Se  $f(x)$  è pari  $\Rightarrow b_k$  nulli
- Se  $f(x)$  è dispari  $\Rightarrow a_k$  nulli tranne  $a_0 = 0$

### 7.2 Serie di Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right]$$

### 7.3 Criterio di Dirichelet

Permette di dire a cosa converge

- **Punti di continuità:** se  $x_0$  è un punto in cui  $f(x)$  è continua, la serie di Fourier converge al valore della funzione in quel punto:

$$S(x_0) = f(x_0)$$

- **Punti di discontinuità:** se  $x_0$  è un punto di discontinuità, la serie di Fourier  $S(x_0)$  converge al valore medio tra il limite destro e il limite sinistro della funzione in quel punto:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

- **Punti agli estremi dell'intervallo:** per i punti agli estremi dell'intervallo di integrazione, la serie di Fourier converge a:

$$S(\pm L) = \frac{f(L^-) + f(L^+)}{2}$$

### 7.4 Esercizio d'esame

Sia  $f$  la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto  $\mathbb{R}$  la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2\pi + x & x \in [-\pi, 0) \\ 2\pi - x & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

- Disegna il grafico di  $f$
- Calcolare il coefficiente di Fourier  $\hat{f}_0$

1. Sappiamo che  $\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (2\pi + x) dx + \int_0^{\pi} (2\pi - x) dx \right] = \frac{3\pi}{2}$

- Calcolare il coefficiente di Fourier  $\hat{f}_k$  per  $k \neq 0$

1. Se  $f(x)$  è pari, i coefficienti  $b_k$  sono nulli e i coefficienti  $a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{\pi} kx\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$

2. Poichè  $\hat{f}_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$  nel nostro caso sarà  $\hat{f}_k = \frac{a_k}{2}$

3. Calcoliamo  $a_k$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (2\pi - x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi k^2} [1 - (-1)^k]$$

4. Quindi dobbiamo calcolare per  $k$  pari e  $\neq 0$  e dispari:

$$\hat{f}_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ pari e } \neq 0 \end{cases}$$

• Calcolare il valore della serie di Fourier di  $f$  sull'intervallo  $[-\pi, \pi)$

1. Sappiamo che  $T = 2\pi$

2. Calcoliamo  $a_0$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (2\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^\pi 2\pi dx - \int_0^\pi x dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( 2\pi [x]_0^\pi - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^\pi \right) = \frac{2}{\pi} \left( 2\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{3\pi^2}{2} = 3\pi \end{aligned}$$

3. Sostituiamo  $a_0, a_k$  e  $b_k$  con quelli calcolati in precedenza

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{2}{\pi k^2} [1 - (-1)^k] \cos(kx) \right]$$

## 8 Funzioni a due variabili

### 8.1 Derivata parziale

Deriviamo la funzione fissando una variabile e l'altra la trattiamo come costante:

$$f(x, y) = x^2 y + 3xy^2$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6x$$

#### 8.1.1 Di ordine superiore

Equivalgono alle derivate di ordine superiore al primo, nel caso di derivata parziale mista prima deriviamo per la prima variabile e poi deriviamo il risultato fissando la seconda variabile

$$f(x, y) = x^2 y + 3xy^2$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy + 3y^2) = 2y$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy + 3y^2) = 2x$$

### 8.2 Gradiente

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

### 8.3 Derivata direzionale

Dato  $u$  di modulo 1  $\left( \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1 \right)$

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u_x \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot u_y \right)$$

#### 8.3.1 Normalizzazione vettore $v$

$$u = \frac{v}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

## 8.4 Equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{aligned}z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\z &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0\end{aligned}$$

## 8.5 Punti critici di $f$

Un punto  $(x_0, y_0)$  nel dominio di  $f$  è un punto critico se:

- $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$  (Punti **stazionari**)

1. Calcola  $\nabla f(x, y)$
2. Trova i punti in cui il gradiente è nullo:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. Le coppie di  $(x, y)$  che risolvono il sistema ma non appartengono al dominio non sono punti critici.

- oppure, una o entrambe le derivate parziali  $f_x(x_0, y_0)$  e  $f_y(x_0, y_0)$  non esistono

### 8.5.1 Classificazione

1. Calcolo le derivate parziali seconde:

- $f_{xx}(x, y)$
- $f_{yy}(x, y)$
- $f_{xy}(x, y)$

2. Costruisco la matrice Hessiana (*non necessario*):

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

3. Calcolo il determinante:  $D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$
4. Per ogni punto critico  $(x_0, y_0)$  calcolo  $D(x_0, y_0)$ :

$D(x_0, y_0) > 0$	$D(x_0, y_0) < 0$	$D(x_0, y_0) = 0$
Minimo locale ( $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ) Massimo locale ( $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ )	Punto di sella	Test inconcludente

## 8.6 Massimi e minimi vincolati (Metodo di Lagrange)

Dato un vincolo  $g(x, y) = 0$ , cerchiamo i massimi e minimi locali della funzione  $f(x, y)$  vincolati a  $C = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$ . **Metodo:** si introducono i moltiplicatori di Lagrange e si risolve il sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

**Dove:**

- $\nabla f(x, y) = (f_x, f_y)$  è il gradiente della funzione obiettivo
- $\nabla g(x, y) = (g_x, g_y)$  è il gradiente del vincolo
- $\lambda$  è il moltiplicatore di Lagrange

**Interpretazione geometrica:** in un punto vincolato di massimo o minimo, i gradienti di  $f$  e  $g$  sono paralleli  
 $\Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$

**Procedura:**

1. Calcola  $\nabla f$  e  $\nabla g$
2. Imposta il sistema:  $\nabla f = \lambda \nabla g, g(x, y) = 0$
3. Risolvi il sistema per trovare i punti  $(x, y)$  candidati
4. Verifica quali sono massimi, minimi (per ogni punto calcola  $f(x_0, y_0)$  e guarda qual è il massimo e il minimo)

**Con più vincoli:**  $g_1(x, y) = 0, g_2(x, y) = 0 \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \quad g_1(x, y) = 0, \quad g_2(x, y) = 0$

## 8.7 Esercizio da esame

Sia  $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - 8x - 4xy + 4y^2 + 12 \ln x$

1. Determinare il dominio di  $f$  e dire dove  $f$  è differenziabile

(a)  $\text{Dom} f: (0, +\infty)$

(b)  $f_x(x, y) = 3x - 8 - 4y + \frac{12}{x}$  e  $f_y(x, y) = -4x + 8y$ . Il dominio di queste derivate parziali è  $(0, +\infty)$

(c) Concludiamo dicendo che è differenziabile su tutto il dominio

2. Calcolare il gradiente nel punto  $(1, 0)$ , la derivata direzionale  $\frac{\partial f(1, 0)}{\partial v}$  per  $v = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$  e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  in  $(1, 0, f(1, 0))$

(a)  $\nabla f(1, 0) = (7, -4)$

(b)  $\|v\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$

(c)  $D_v f(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot v = (7, -4) \cdot (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = -\frac{28}{5} - \frac{12}{5} = -8$

(d)

$$z = f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) + z_0$$

$$z = f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) + f(1, 0)$$

$$z = 7(x - 1) - 4y - \frac{13}{2}$$

$$z = 7x - 7 - 4y - \frac{13}{2}$$

$$z = 7x - 4y - \frac{27}{2}$$

3. Stabilire quali sono i punti critici di  $f$  sul suo dominio e classificarli

(a)

$$\begin{cases} 3x - 8 - 4y + \frac{12}{x} = 0 \rightarrow x - 8 + \frac{12}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ -4x + 8y = 0 \rightarrow 8y = 4x \rightarrow y = \frac{x}{2} \end{cases}$$

I punti critici sono  $(6, 3)$  e  $(2, 1)$

(b) Calcolo  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$  e  $f_{xy}$

- $f_{xx}(x, y) = 3 - \frac{12}{x^2}$
- $f_{yy}(x, y) = 8$
- $f_{xy}(x, y) = -4$

(c) Calcolo  $D(x, y) = (3 - \frac{12}{x^2}) \cdot 8 - 16 = 24 - \frac{96}{x^2} - 16 = 8 - \frac{96}{x^2}$

(d) •  $(2, 1) \rightarrow D(2, 1) = 8 - \frac{96}{4} = -16 \Rightarrow$  Punto di sella  
•  $(6, 3) \rightarrow D(6, 3) = 8 - \frac{96}{36} = \frac{16}{3}, f_{xx}(6, 3) = 3 - \frac{12}{36} = \frac{8}{3} \Rightarrow$  Minimo locale

## 9 Extra

### 9.1 Metodo dell'angolo aggiunto

Utile per riscrivere funzioni del tipo (a scelta)

$$A \sin(x) + B \cos(x) = \begin{cases} R \sin(x + \phi) \\ R \cos(x - \phi) \end{cases}$$

#### 9.1.1 Caso $R \sin(x + \phi)$

1. Sappiamo che  $R \sin(x + \phi) = R(\sin(x) \cos(\phi)) + R(\cos(x) \sin(\phi))$

2.  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$

3.

$$\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) = \begin{cases} \phi & A > 0, B > 0 \\ \phi + \pi & A < 0, B > 0 \\ \phi + \pi & A < 0, B < 0 \\ \phi & A > 0, B < 0 \end{cases}$$

### 9.1.2 Caso $R \cos(x - \phi)$

1. Sappiamo che  $R \cos(x - \phi) = R(\cos(x) \cos(\phi)) + R(\sin(x) \sin(\phi))$
2.  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$
- 3.

$$\phi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right) = \begin{cases} \phi & A > 0, B > 0 \\ \phi + \pi & A < 0, B > 0 \\ \phi + \pi & A < 0, B < 0 \\ \phi & A > 0, B < 0 \end{cases}$$

### 9.1.3 Esempio

$$\begin{aligned} & -5 \sin(3x) - 12 \cos(3x) \\ A &= -5, B = -12 \\ R &= \sqrt{25 + 144} = 13 \\ \phi &= \arctan\left(\frac{-12}{-5}\right) \simeq 1.17 + \pi \\ & -5 \sin(3x) - 12 \cos(3x) \rightarrow 13 \sin(3x + \phi) \end{aligned}$$

## 9.2 Determinare crescita/decrescita velocemente

Se  $h(n) = f(g(n))$

$g(n)$	$f(x)$	$h(n)$
decrescente	crescente	decrescente
decrescente	decrescente	crescente
crescente	crescente	crescente
crescente	decrescente	decrescente

## 9.3 Formule utili

Le forme indeterminate del tipo  $f(n)^{g(n)} = \{0^0, \infty^0, 1^\infty\}$  si risolvono:  $f(n)^{g(n)} = e^{g(n) \ln(f(n))}$

## 9.4 Equivalenze Asintotiche Notevoli (per $x \rightarrow 0$ e $n \rightarrow +\infty$ rispettivamente):

Funzione	Equivalenza asintotica	Dominio
$\sin x$	$x$	$x \rightarrow 0$
$\tan x$	$x$	$x \rightarrow 0$
$\arcsin x$	$x$	$x \rightarrow 0$
$\arctan x$	$x$	$x \rightarrow 0$
$\ln(1+x)$	$x$	$x \rightarrow 0$
$e^x - 1$	$x$	$x \rightarrow 0$
$(1+x)^\alpha - 1$	$\alpha x$	$x \rightarrow 0, \alpha \neq 0$
$\sqrt{1+x} - 1$	$\frac{x}{2}$	$x \rightarrow 0$
$\cos x - 1$	$-\frac{x^2}{2}$	$x \rightarrow 0$
$1 - \cos x$	$\frac{x^2}{2}$	$x \rightarrow 0$
$\cosh x - 1$	$\frac{x^2}{2}$	$x \rightarrow 0$
$\sinh x$	$x$	$x \rightarrow 0$
$\tanh x$	$x$	$x \rightarrow 0$

Funzione	Equivalenza asintotica
$\sin\left(\frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{n}$
$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{n}$
$e^{1/n} - 1$	$\frac{1}{n}$
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$	$\frac{e}{2n}$
$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$
$\ln(n+1) - \ln n$	$\frac{1}{n}$

### Formule di Stirling:

- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  per  $n \rightarrow +\infty$
- $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$  per  $n \rightarrow +\infty$
- $\{(n!)^2\} \sim \frac{2\pi n}{e^{2n}} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} = \frac{2\pi n}{e^{2n}} (n!)^2$