1 Formula di Taylor

$f^{(n)}$ indica l'ordine di derivazione n-esimo

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile infinite volte

1.1 Polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n

$$T^f_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

1.2 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) &= T^f_{x_0,n}(x) + R_n f(x) \\ R_n f(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ con } c_n \in \{x_0, x\} \end{aligned}$$

Se $x = b$ e x_0 è vicino a b, $T^f_{x_0,n}(b)$ approssima $f(b)$ e $\left|f(b) - T^f_{x_0,n}(b)\right| = |R_n f(b)|$

1.3 Formula di Taylor con resti di Peano

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + (x - x_0)^n + \varepsilon(x - x_0) \text{ con } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

2 Determinare se una serie converge/diverge o è indeterminata

2.1 Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

2.2 Serie geometrica

Dato $q \in \mathbb{R}$, la serie geometrica di ragione q

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{q}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

2.3 Test dell'integrale

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione:

- positiva
- decrescente

Posto $a_n = f(n)$ per ogni $n \geq 1$, allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge } \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

Inoltre, valgono le disuguaglianze:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

2.4 Condizione necessaria di Cauchy per le serie

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{può} \text{ convergere o divergere} \\ \neq 0 \text{ o non esiste} & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{diverge} \text{ sicuramente} \end{cases}$$

Nota: Questa condizione è **necessaria ma non sufficiente** alla convergenza della serie.

2.5 Criteri di convergenza/divergenza

Per serie a termini definitivamente positivi ($\exists n | a_n \geq 0$ con $n \in [n, +\infty)$)

- **Criterio del rapporto**:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

  1. $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge
  2. $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

- **Criterio della radice**:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

  1. $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge
  2. $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

- **Criterio del confronto**: supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ allora

$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$
$$\sum a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum b_n \text{ diverge}$$

- **Criterio del confronto asintotico**: $a_n = c_n b_n$ dove $b_n, c_n \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hanno lo stesso carattere}$$
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 0 \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Per serie a segno alterno

- **Criterio di Leibnitz**: sia $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ una serie tale che

  1. $a_n \geq 0 \forall n \geq 1$
  2. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
  3. $a_{n+1} \geq a_n \forall n \geq 1$

  allora converge e la somma s della serie soddisfa $|s - s_n| \leq a_{n+1} \forall n \geq 1$.

2.6 Convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente se } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge}$$

Se la serie converge assolutamente, allora converge (semplicemente).