umanita@dima.unige.it

FORMULA DI TAYLOR

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo

La formula di Taylor ha un duplice scopo:

I) permette di approssimare f con un polinomio

II) permette di approssimare il valore di f in un pto b con il valore di f in un pto a vicino a b t.c. si conosce $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ...

La formula di Taylor è una generalizz. del Teor di Lagrange.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua, f derivabile su (a,b).
Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f(b) = \underbrace{f(a)}_{\text{approssima } f(b)} + f'(c)\underbrace{(b-a)}_{\to 0}$$

se a è vicino a b

ES: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\quad$ con $x \neq -1$.

Sia $b = \frac{1}{2}$. Vogliamo stimare $f(b) = \frac{2}{3} = 0{,}666$ attraverso

$f(a) = f(0) = 1$. $\quad$ (scegliamo $a = 0$).

Per il Teor. di Lagrange si ha

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \quad \text{con } c \in (a,b).$$

cioè $\quad 0{,}666 = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + f'(c)\,\frac{1}{2} \qquad$ con $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 \underbrace{- \frac{1}{(1+c)^2}\,\frac{1}{2}}_{= \Delta_0} = 1 + \Delta_0$$

con $|\Delta_0| \leq \frac{1}{2}$ visto che $\forall c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ si ha $\frac{1}{(1+c)^2} \leq 1$

$\Rightarrow$ abbiamo approssimato $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}666$ con 1 a meno di un errore $< 0{,}5$.

Quindi la stima non é molto buona!

Teor: FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile infinite volte.

Allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, c_n \in (a, b)$ tc.

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} + \Delta_n}$$

FORMULA DI TAYLOR

con $$\boxed{\Delta_n := \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}}$$

$R_n(x)$ si dice RESTO DI LAGRANGE DI ORDINE n

OSS: Per $n = 0$, abbiamo $f(b) = f(a) + \Delta_0$

$$= f(a) + \frac{f'(c_0)}{0!}(b-a) = f(a) + f'(c_0)(b-a)$$

con $c_0 \in (a,b)$.

<u>Es</u>: $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \neq -1$

$b = \frac{1}{2}$ $a = 0$ $(f(b) = 0,666,\ f(a) = 1)$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \Delta_n$$

$$\Delta_n = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad \text{con } c_n \in (a,b).$$

$n=0$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \Delta_0$ con $|\Delta_0| \leq \frac{1}{2}$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$$

$$\left(f''(x) = \frac{1\cdot 2\,(1+x)}{(1+x)^4} \right)$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}, \leftarrow$$

$$\Delta_n = \left| (-1)^{n+1} \frac{\cancel{(n+1)!}}{(1+c_n)^{n+2}} \frac{1}{\cancel{(n+1)!}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right| = \underbrace{\frac{1}{(1+c_n)^{n+2}}}_{\leq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \forall n \geq 0.$$

• $n=1$ $f(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \Delta_1 = \frac{1}{2} + \Delta_1$ con $|\Delta_1| \le \frac{1}{4}$

• $n=2$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{f''(0)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \Delta_2 = \frac{1}{2} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\,\frac{1}{4} + \Delta_2 =$

$= \frac{3}{4} + \Delta_2$ con $|\Delta_2| \le \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

• $n=3$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{f'''(0)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \Delta_3 =$

$= \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \Delta_3 = \frac{5}{8} + \Delta_3$ con $|\Delta_3| \le \frac{1}{16}$

La successione $\left(f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right)_n$

(che per $n=3$ è data da 1, $0{,}5$, $0{,}75$, $0{,}625$)

approssima sempre meglio $f(\frac{1}{2}) = 0{,}666$.
Il resto diminuisce ($0{,}5$, $0{,}25$, $0{,}125$, $0{,}0625$) all'aumentare di n.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{\underline{Quindi}: il valore di } f(b) \text{ viene approssimato dalla succ} \\ \left(f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!}, \dots, f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}\right)_n \\ \text{quando } a \text{ è vicino a } b.\end{array}}$$

Es: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $x \ne -1$
scegliamo $b=1$, $\left(f(1) = \frac{1}{2}\right)$ e $a=0$,

Dalla formula di Taylor con resto di Lagrange si ottiene:

$n=0 \quad \frac{1}{2} = 1$

$$\underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\underbrace{(b-a)^n}_{=1}}_{=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,1} \quad \forall n$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,1 = \underbrace{(-1)^n \frac{n!}{1}}_{=f^{(n)}(0)} \cdot \frac{1}{n!} = (-1)^n$$

$$\Delta_n = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{1}{(1+c_n)^{n+1}}$$

≤ 1

$\Rightarrow |\Delta_n| \leq 1 \quad \forall n$

- $n=0 \quad \frac{1}{2} = f(1) = 1 + \Delta_0$
- $n=1 \quad \frac{1}{2} = 1 + (-1)^1 + \Delta_1 = 0 + \Delta_1$
- $n=2 \quad \frac{1}{2} = 0 + (-1)^2 + \Delta_2 = 1 + \Delta_2$
- $n=3 \quad \frac{1}{2} = 1 + (-1)^3 + \Delta_3 = 0 + \Delta_3$

con $|\Delta_n| \leq 1$

$\Rightarrow$ la successione $\left(f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)_n$ è data da $(1, 0, 1, 0, \dots)$, e quindi non approssima $f(1) = \frac{1}{2}$

Teor: FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, f derivabile infinite volte.
Allora, dato $x_0 \in I$, $\forall x \in I$ e $\forall n \geq 0$, si ha

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x)}$$

con $\boxed{R_n(x) = f^{(n+1)}(c_{n,x})\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$ per un qualche $c_{n,x} \in (x_0, x)$

segue dal risultato precedente prendendo $b = x$, e $a = x_0$

$R_n(x)$ si dice RESTO DI LAGRANGE DI ORDINE n.

Il polinomio di grado (al più) n

$$\boxed{(T_n f)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}}$$

si dice POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE n di f CENTRATO IN x_0.

OSS: $R_n(x)$ tende a 0 per $x \to x_0$

$\Rightarrow$ il polinomio di Taylor $T_n f$ approssima f quando x è vicino a x_0.

L'errore commesso con tale approssimazione è il resto di Lagrange

in modulo è $\leq M$

$$f(x) - (T_n f)(x) = R_n(x) = f^{(n+1)}(c_{n,x})\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

con $c_{n,x} \in (x_0, x)$.

Se inoltre $\exists\, M > 0$ t.c. $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ $\forall x \in I$ e $\forall n \geq 0$, allora

$R_n f$ si può maggiorare in questo modo

$$\boxed{|R_n(x)| \leq M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

FORMULA DI TAYLOR PER FUNZIONI ELEMENTARI $(x_0 = 0)$

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + R_n(x)$

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$

- $\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + R_n(x)$

- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + R_n(x)$

- $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + R_n(x)$

Def: Il polinomio di Taylor centrato in 0 si dice anche polinomio di MC LAURIN