UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI GENOVA

Università degli Studi di Genova

Calculus 2

Lorenzo Vaccarecci

Anno Accademico 2024/2025

Indice

Capitolo 1

Formula di Taylor

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
derivabile infinite volte su I

Polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n:

$$T^f_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

$T^f_{x_0,n}(x)$ è un polinomio nella variabile x di grado $\leq n$.
La formula di Taylor ha un duplice scopo:

- Permette di approssimare f con un polinomio
- Permette di approssimare il valore di f in un punto $b \in I$ con il valore di f in x che sta vicino a b e $f'(a), f''(a), \ldots$

1.1 Formula di Taylor con resto di Lagrange

Dato $x_0 \in I, \forall x \in I$ si ha:

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + R_n f(x)$$

dove:

$$R_n f(x) = f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}$$

1.1.1 Esercizi

Esercizio 1

Calcolare un'approssimazione di $\sqrt{e}$ usando la formula di Taylor di ordine 5 per $f(x) = e^x$ e stimare l'errore.

$$f(x) = e^x \quad \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Usiamo la formula di Taylor per stimare $f\left(\frac{1}{2}\right)$ prendendo $x = \frac{1}{2}, n = 5, x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\right) &= T^f_{0,5}\left(\frac{1}{2}\right) + R_5 f\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= f(0) + f'(0)\frac{1}{2} + f''(0)\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} + f'''(0)\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{3!} + f^{(4)}(0)\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{4!} + f^{(5)}(0)\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{1}{5!} + R_5 f\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{24} + \left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{1}{120} + e^c\left(\frac{1}{2}\right)^6\frac{1}{6!} \\
&= \frac{6331}{3840} + e^c\left(\frac{1}{2}\right)^6\frac{1}{6!} \\
&\approx 1.6486 + e^c\left(\frac{1}{2}\right)^6\frac{1}{6!}
\end{aligned}$$

Quindi $T^f_{0,5}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.6486$ fornisce un'approssimazione di $\sqrt{e}$.
Per stimare l'errore, calcoliamo il massimo di $|R_5 f(x)|$ sapendo che $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$:

$$\left|R_5 f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|e^c \left(\frac{1}{2}\right)^6 \frac{1}{6!}\right| \leq e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \frac{1}{6!}$$

Ma $e < 3 \rightarrow \left|R_5 f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6 \frac{1}{6!} \xrightarrow{\sqrt{3}<2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{6!} \approx 0.00000434$

Esercizio 2

Calcolare un'approssimazione di $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ *a meno di* $2 \cdot 10^{-3}$

$$\begin{aligned}&\ln(1+x) = f(x) \text{ è definita e derivabile infinite volte su } I = (-1, +\infty)\\ &\ln\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

Determinare $n \geq 1$ tale che $\left|f\left(\frac{1}{3}\right) - T^f_{x_0,n}\left(\frac{1}{3}\right)\right| < 2 \cdot 10^{-3}$, prendiamo $x_0 = 0$:

$$T^f_{0,n}(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

Sappiamo che:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x}\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}\\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4}\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&T^f_{0,n}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\\
&f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = (-1)^{n+1}(n-1)!\frac{x^n}{n!} = (-1)^{n+1}(n-1)!\frac{x^n}{n(n-1)!} = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\\
&\Rightarrow T^f_{0,n}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}
\end{aligned}$$

$$T^f_{0,n}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^4\frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{1}{n}$$

Per trovare l'ordine n tale che soddisfi la richiesta, calcoliamo il massimo di $|R_n f(x)|$:

$$\begin{aligned}
\left|R_n f\left(\frac{1}{3}\right)\right| &= \left|f^{(n+1)}(c)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\right|\\
&= \left|(-1)^{n+2}\frac{1}{(1+c)^{n+1}}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}\right|\\
&= \frac{1}{(1+c)^{n+1}}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1} \doteq \Delta_n
\end{aligned}$$

Calcoliamo $n \geq 1 | \Delta_n \leq 2 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{500}$

$$\begin{aligned}
n = 1 \quad & \Delta_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \\
n = 2 \quad & \Delta_2 = \frac{1}{81} \\
n = 3 \quad & \Delta_3 = \frac{1}{324} \\
n = 4 \quad & \Delta_4 = \frac{1}{1215} \leq \frac{1}{500}
\end{aligned}$$

Quindi ora possiamo calcolare $T^f_{0,4}\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$T^f_{0,4}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^4 \frac{1}{4}$$

1.2 Formula di Taylor con resto di Peano

Dato $x_0 \in I, \forall x \in I$ e $\forall n \geq 1$ si ha

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

con $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$

1.2.1 Esercizi

Esercizio 1

Sia $f(x) = e^{3x}x^2$ calcola il polinomio di Taylor di f centrato in 0 di ordine 4. Poi determina $f^{VII}(0)$ e stima $R_1 f(x)$ per $x \in \left[0, \frac{1}{8}\right]$.
Abbiamo due possibilità:

1. $T^f_{0,4}(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{IV}(0)\frac{x^4}{4!}$
2. Usiamo la formula di Taylor con resto di Peano per $g(x) = e^x$:

$$g^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \geq 1 \rightarrow g^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \geq 1$$

Usando la seconda possibilità:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \\
e^{3x} &= g(3x) = \underbrace{1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4}_{\text{polinomio di grado 4}} + \underbrace{81x^4\varepsilon(3x)}_{x^4(81\varepsilon(3x))} \\
&= 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + x^4\varepsilon'(x)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{3x}x^2 \\
&= x^2 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^4 + \underbrace{\frac{9}{2}x^5 + \frac{27}{8}x^6 + x^6\varepsilon'(x)}_{x^4\left(\frac{9}{2}x + \frac{27}{8}x^2 + x^2\varepsilon'(x)\right)}
\end{aligned}$$

Quindi il polinomio di Taylor di f centrato in 0 di ordine 4 è:

$$T^f_{0,4}(x) = x^2 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^4$$