1 Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

2 Serie geometrica

Dato $q \in \mathbb{R}$, la serie geometrica di ragione q

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{q}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

3 Serie di Funzioni

Data la serie di funzioni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

1. **Converge puntualmente** su I se la serie converge $\forall x \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$
2. **Converge assolutamente** su I se la serie a termini positivi $(|f_n(x)|)$ converge $\forall x \in I$

Se per qualche $x \in I$ la serie diverge o è indeterminata, bisogna restringere il dominio della funzione somma $f(x)$ all'insieme:

$$\left\{ x \in I \mid \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$$

3.1 Criterio di Weierstrass

Data una serie di funzioni, se la serie numerica a termini positivi converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$$

allora la serie di funzioni converge assolutamente e puntualmente (= totalmente) su I.

3.2 Flusso di lavoro:

1. **Criterio di Weierstrass** per la convergenza totale
2. **Controllo la convergenza puntuale** se Weierstrass ha fallito

$$\boxed{\text{Convergenza totale} \Rightarrow \text{convergenza puntuale}}$$

3.3 Corollari

3.3.1 Continuità della somma

Se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $I \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su I ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è continua su I.

3.3.2 Integrazione temine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni f_n sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalmente su $[a, b]$ ad $f(x)$

Allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

3.3.3 Derivazione termine a termine

Data una serie di funzioni dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su I se:

1. Le funzioni f_n sono derivabili e le derivate sono funzioni continue $\forall n \geq 1$
2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente su I
3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge totalmente su I

Allora $f(x)$ derivabile e:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in I$$

3.3.4 Corollario 1.34

Data una serie di funzioni definite su $[a, b]$ se:

1. Le funzioni $f_n(x)$ sono continue su $[a, b] \forall n \geq 1$
2. La serie converge totalamente su (a, b)

Allora la serie converge totalmente su $[a, b]$ e la funzione somma è continua su $[a, b]$

4 Serie di potenze

La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si chiama **serie di potenze di centro 0**

4.1 Raggio di convergenza

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\exists p \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, detto raggio di convergenza, tale che:

- se $p = 0 \Rightarrow$ la serie di potenze converge solo in 0
- se $0 < p < +\infty \Rightarrow$ la serie converge assolutamente su $(-p, p)$, non converge puntualmente su $(-\infty, p) \cup (p, +\infty)$, converge totalmente su $[-R, R] \, \forall 0 < R < p$
- se $p = +\infty \Rightarrow$ la serie di potenze converge assolutamente su $\mathbb{R}$ e converge totalmente su $[-R, R] \, \forall R > 0$

Se la serie converge puntualmente in $y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \Rightarrow$ la serie converge totalmente su $[-R, R] \, \forall 0 < R < |y|$.

4.1.1 Caso: Criteri del rapporto e della radice

Se esiste l:

$$p = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ \frac{1}{l} & l \in (0, +\infty) \\ 0 & l = +\infty \end{cases}$$

4.2 Insieme di convergenza puntuale $I = (-p, p)$

1. Sostituire x^n con gli estremi di $[x_0 - p, x_0 + p]$ e quindi "creare" due serie diverse e studiare la convergenza/divergenza
2. Se converge per entrambi allora converge su tutto l'intervallo, altrimenti devo mettere la parentesi tonda dove non converge

5 Convergenza/Divergenza

5.1 Convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente se } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge}$$

Se la serie converge assolutamente $\Rightarrow$ converge semplicemente.

5.2 Condizione necessaria di Cauchy per le serie

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{può} \text{ convergere o divergere} \\ \neq 0 \text{ o non esiste} & \Rightarrow \text{la serie } \textbf{diverge} \text{ sicuramente} \end{cases}$$

Nota: Questa condizione è **necessaria ma non sufficiente** alla convergenza della serie.

5.3 Criteri di convergenza/divergenza

Per serie a termini definitivamente positivi ($\exists n | a_n \geq 0$ con $n \in [n, +\infty)$)

- **Criterio del rapporto** (Utile con i fattoriali $n!$):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

  1. $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge assolutamente
  2. $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

- **Criterio della radice** (Utile con potenze n-esime):

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

  1. $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge assolutamente
  2. $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

- **Criterio del confronto asintotico**:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \begin{cases} \in (0, +\infty) & a_n \text{ e } b_n \text{ hanno lo stesso comportamento} \\ 0 & \text{se } b_n \text{ converge} \Rightarrow a_n \text{ converge, altrimenti non si può concludere} \\ +\infty & \text{se } b_n \text{ diverge} \Rightarrow a_n \text{ diverge, altrimenti non si può concludere} \end{cases}$$

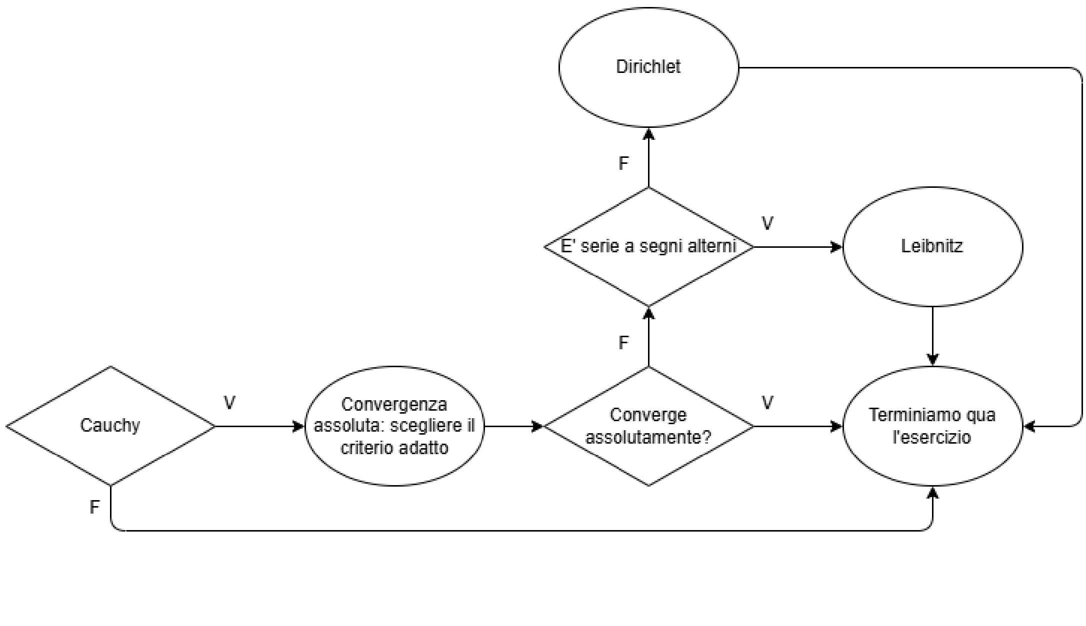
  Per scegliere b_n prendi le n di ordine maggiore in $a_n = \frac{\text{num}}{\text{den}}$ (*es.* $a_n = \frac{n+1}{n^2+3}, b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$)

- **Criterio di Dirichlet**: sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$
  1. $\exists M > 0 \mid \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq M \, \forall N \geq 1$
  2. b_n crescente/decrescente
  3. $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

- **Criterio di Leibnitz**: sia $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ una serie tale che
  1. $\exists n_0 \mid a_n \geq 0 \, \forall n \geq n_0$
  2. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
  3. $a_{n+1} \geq a_n \forall n \geq 1$ (aka decrescente)

  allora converge **semplicemente** e la somma s della serie soddisfa $|s - s_n| \leq a_{n+1} \forall n \geq 1$.

- **Stima dell'errore**: $|\text{Somma} - \text{Somma parziale}| \leq b_{N+1}$



5.4 Esercizio d'esame

Stabilire se le seguenti serie sono a termini positivi e convergono semplicemente e/o assolutamente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

   (a) **Cauchy**: $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)=\sin\left(\frac{1001}{\infty}\right)=\sin(0)=0$

   (b) **Convergenza assoluta**: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$

   i. **Criterio di confronto asintotico**: $a_n=\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right), b_n=\frac{1001}{\sqrt{n}}\to\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1001}{\sqrt{n}}}=1$ $\to a_n$ e b_n hanno lo stesso comportamento.

   ii. **Serie armonica generalizzata**: $\frac{1001}{\sqrt{n}}\to\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow$ diverge

   iii. Grazie al punto precedente possiamo dire che la serie originale non converge assolutamente (perchè è una serie a segno alternato), ora procederemo con Leibniz

   (c) **Criterio di Leibniz**:

   i. $\exists n_0\mid\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\geq0\,\forall n\geq n_0$? Si: $0<\frac{1001}{\sqrt{n}}\leq\pi\to n\geq\left(\frac{1001}{\pi}\right)^2\to n_0\simeq101518.7$

   ii. $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)=0$? L'abbiamo già fatto nel punto (a)

   iii. Decrescente?

   A. $a_n'=\cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)=\cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2n^{\frac{1}{2}}n}\right)=\cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)$

   B. $a_n'>0\begin{cases}\cos\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)>0\to-\frac{\pi}{2}\leq\frac{1001}{\sqrt{n}}\leq\frac{\pi}{2}\to n\geq406269\\ \left(-\frac{1001}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)>0\to\text{Impossibile sarà sempre negativo perchè } n\geq1\end{cases}$

   C. Quindi sapendo che la serie è decrescente con $n\geq406269$, possiamo dire che anche questo requisito è soddisfatto

   (d) **Conclusione**: visto che la serie soddisfa tutti i requisiti del criterio di Leibniz allora converge semplicemente.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}$

   (a) **Cauchy**: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}=0$

   (b) **Convergenza assoluta**: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}\right|$

   i. **Criterio di confronto asintotico:** $a_n=\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}, b_n=\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(3-(\cos n)^2\right)}{n^3+2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(3-(\cos n)^2\right)}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=3$$

   ii. **Serie armonica generalizzata**: $\frac{1}{n^2}\to\alpha=2\Rightarrow b_n$ converge

   (c) **Conclusione:** Grazie al punto precedente e al teorema del confronto possiamo affermare che la serie converge assolutamente e, di conseguenza, semplicemente.

3. *Data la serie di potenze* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}x^n$ *determinare il raggio di convergenza* ρ *e l'insieme di convergenza puntuale* I.

   (a) **Cauchy**: $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}=0$

   (b) **Convergenza assoluta**: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}\right|$

Le forme indeterminate del tipo $f(n)^{g(n)}=\{0^0,\infty^0,1^\infty\}$ si risolvono $f(n)^{g(n)}=e^{g(n)\ln(f(n))}$

   i. **Criterio della radice**:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{2^n}{n^2}\right|\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^n}{n^2}\right)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(2^n)-\ln\left(n^2\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}n\ln(2)-2\ln(n)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(2^n)-\ln\left(n^2\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}n\ln(2)-2\ln(n)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(2^n)-\ln\left(n^2\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln(2)-\frac{2\ln(n)}{n}}=e^{\ln(2)}=2$$

ii. **Determiniamo** ρ: $\rho = \frac{1}{2}$ per definizione

iii. **Determinare** I:

A. si "creano" due serie diverse usando l'intervallo $[x_0 - p, x_0 + p]$ e sostituendo x con entrambi gli estremi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^{-n}}{n^2} (x_0 - p)^n$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^{-n}}{n^2} (x_0 + p)^n$$

B. **Studiamo la convergenza di entrambe**:

$$\frac{2^n + 3^{-n}}{n^2}\left(0 - \frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2^n + 3^{-n})\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^2} = \frac{(-1)^n + \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}$$
$$\to \left|\frac{(-1)^n + \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}\right| = \frac{1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}$$
$$= \frac{1}{n^2} + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{serie armonica, converge} \\ \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2} \to \frac{\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{n^2}}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} & \text{per confronto asintoto } b_n \text{ converge perchè serie geometrica} \end{cases}$$
$$\frac{2^n + 3^{-n}}{n^2}\left(0 + \frac{1}{2}\right)^n \to \text{analogamente a quella di sopra converge}$$

C. Quindi, visto che converge per entrambi gli estremi $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

6 Polinomio di McLaurin

Per calcolare il polinomio di McLaurin di ordine k:

1. Prendi i polinomi elementari dalla tabella adattandoli a quelli che servono (considera il polinomio separando $f(x)$ con i +/-)
2. Una volta che hai i polinomi di ordine k li combini tra di loro e il risultato finale sarà $P_k(x)$

Serie di Maclaurin di alcune funzioni elementari.

$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$		$x \in (-1, 1)$
e^x	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$	$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$		$x \in \mathbb{R}$
$\log(1+x)$	$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$		$x \in (-1, 1]$
$\sin x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$		$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$		$x \in \mathbb{R}$
$\arctan x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$		$x \in [-1, 1]$
$(1+x)^\alpha$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ $\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \notin \mathbb{N}$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$		$x \in (-1, 1)$
$(1-x)^{-k}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$	$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k}$		$x \in (-1, 1)$

6.1 Esercizio da esame

- *Data la funzione $f(x) = x(e^x - 1) + \ln(1 + x^2) + \sin(2x)$, calcolarne il polinomio di McLaurin di ordine 4*
  1. Dividiamo $f(x)$ in polinomi che contengono le funzioni elementari quindi avremo:
     - $x(e^x - 1) = x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - 1\right) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3!}$
     - $\ln(1 + x^2) = \left(x^2 - \frac{(x^2)^2}{2}\right) = x^2 - \frac{x^4}{2}$
     - $\sin(2x) = 2\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!}$
  2. Costruiamo una tabella di questo tipo:

Ordine	$x(e^x - 1)$	$\ln(1 + x^2)$	$\sin(2x)$	**Somma**
1	/	/	$2x$	$2x$
2	x^2	x^2	/	$2x^2$
3	$\frac{x^3}{2}$	/	$-\frac{(2x)^3}{3!}$	$-\frac{5x^3}{6}$
4	$\frac{x^4}{3!}$	$-\frac{x^4}{2}$	/	$-\frac{x^4}{3}$

     Dove andiamo a prendere gli elementi di ciascun polinomio dell'ordine indicato nella prima colonna ed eseguiamo la somma della riga nell'ultima colonna.
  3. Poi costruiamo il polinomio $P_4(x)$ sommando l'ultima colonna: $P_4(x) = 2x + 2x^2 - \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{3}$
- *Scrivere il resto di Lagrange $R_1(x)$ di ordine 1 (con centro in 0) della funzione $g(x) = \cos(x^2) + \sin(3x)$ e determinarne una stima per $x \in (0, \frac{1}{4}]$*

7 Formula di Taylor

$f^{(n)}$ indica l'ordine di derivazione n-esimo

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile infinite volte (C^∞)

7.1 Polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n

$$T^f_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

7.2 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + R_n f(x)$$
$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \quad \text{con } c_n \in \{x_0, x\}$$

Se $x = b$ e x_0 è vicino a b, $T^f_{x_0,n}(b)$ approssima $f(b)$ e $\left|f(b) - T^f_{x_0,n}(b)\right| = |R_n f(b)|$

7.3 Formula di Taylor con resti di Peano

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + (x - x_0)^n + \varepsilon(x - x_0) \text{ con } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$