



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI GENOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

Fondamenti di Computazione Quantistica

Lorenzo Vaccarecci

Anno Accademico 2024/2025

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Fisica della computazione | 3 |
| 1.1 | Porte logiche universali | 3 |
| 1.2 | Operazioni Bit-a-Bit | 3 |
| 1.2.1 | Prodotto interno bit-per-bit | 4 |
| 1.2.2 | Somma bit-per-bit: bitwise XOR | 4 |
| 2 | Apparato matematico | 5 |
| 2.1 | Prerequisiti matematici | 5 |
| 2.1.1 | Numeri complessi | 5 |
| 2.1.2 | Spazi vettoriali in 2D | 5 |
| 2.1.3 | Prodotto scalare e componenti | 6 |
| 2.1.4 | Vettori ket e bra | 6 |
| 2.1.5 | Prodotto tensore | 7 |
| 2.1.6 | Operatori lineari | 7 |
| 2.1.7 | Autovalori e Autovettori | 8 |
| 3 | Introduzione ai fenomeni quantistici | 9 |
| 3.1 | Regole dal postulato della misura | 9 |
| 3.2 | Fase globale e relativa | 9 |
| 3.2.1 | Fase globale | 9 |
| 3.3 | Stati a molti qubit | 10 |
| 3.3.1 | Stati a due qubit separabili | 10 |
| 3.3.2 | Stati a due qubit entangled | 10 |
| 3.4 | Trasformazioni unitarie | 11 |
| 3.4.1 | Porte quantistiche | 11 |
| 3.5 | Sfera di Bloch | 12 |
| 4 | Informazione Quantistica | 14 |
| 4.1 | Parallelismo quantistico | 14 |
| 4.2 | Teorema no-cloning | 14 |
| 4.3 | Superdense coding | 15 |
| 4.4 | Teletrasporto quantistico | 16 |
| 4.5 | Algoritmi quantistici | 17 |
| 4.5.1 | Algoritmo di Deutch | 17 |
| 4.5.2 | Algoritmo di Deutch-Josza | 18 |
| 4.5.3 | Algoritmo di Bernstein-Vazirani | 19 |
| 4.5.4 | Algoritmo di Simon | 19 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Crittografia quantistica | 21 |
| 5.1 | Protocollo BB84 | 21 |
| 5.1.1 | Implementazione | 21 |
| 5.2 | Protocollo B92 | 22 |
| 5.3 | Protocollo EPR con stati entangled | 22 |
| 5.4 | Quantum Money | 23 |
| 6 | Algoritmi quantistici | 24 |
| 6.1 | Algoritmo di Grover per la ricerca in database | 24 |
| 6.1.1 | Oracolo o Black box | 24 |
| 6.1.2 | Algoritmo di Grover | 25 |
| 6.1.3 | Stati "soluzione" e "non-soluzione" | 25 |
| 6.1.4 | Operatore di Grover | 26 |
| 6.1.5 | Interpretazione geometrica | 26 |
| 6.1.6 | Effetto dell'operatore di Grover | 27 |
| 6.1.7 | Performace dell'algoritmo di Grover | 27 |
| 7 | Introduzione ai codici di correzione degli errori per computer quantistici | 29 |
| 7.1 | Correzione degli erorri nei computer classici | 29 |
| 7.2 | Caso quantistico: i problemi | 29 |
| 7.3 | Codici di correzione degli errori quantistici | 29 |
| 7.3.1 | Errori bit flip | 30 |
| 7.3.2 | Errori "piccoli" | 31 |
| 7.3.3 | Errore sulla fase | 31 |
| 7.4 | Protocollo completo | 32 |

Capitolo 1

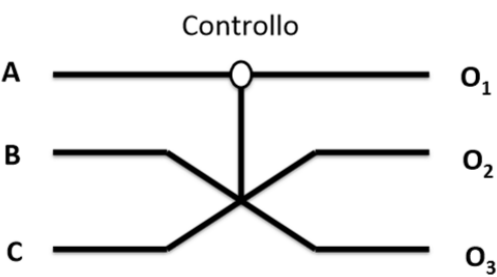
Fisica della computazione

1.1 Porte logiche universali

- $\text{NOT}(A) \equiv \bar{A}$
- $\text{AND}(A,B) \equiv A \cdot B$ oppure $A \wedge B$
- $\text{OR}(A,B) \equiv A + B$ oppure $A \vee B$
- $\text{XOR}(A,B) \equiv A \oplus B = (A + B) \bmod 2$
- $\text{NAND}(A,B) \equiv A \cdot \bar{B}$ oppure $A \bar{\vee} B$
- $\text{NOR}(A,B) \equiv A \bar{+} B$ oppure $A \bar{\wedge} B$

L'insieme di AND e NOT oppure di OR e NOT sono insiemi universali. Questo significa che, ad esempio, usando solo combinazioni di porte AND e NOT è possibile implementare una qualsiasi funzione booleana. Pur formando set universali, le porte AND, OR, NAND e NOR sono però **irreversibili**. A livello concettuale è interessante introdurre delle porte logiche che siano **reversibili**. Questo vuol dire che se combiniamo in sequenza una porta logica reversibile con la sua inversa, riotteniamo l'informazione originale. La porta di Fredkin può essere interpretata come uno *switch* controllato di bit. Il bit di controllo è A; se questo è acceso i bit B e C vengono scambiati, altrimenti vengono lasciati identici.

| Controllo | | | | | |
|-----------|---|---|------|------|------|
| A | B | C | Out1 | Out2 | Out3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |



1.2 Operazioni Bit-a-Bit

A una stringa di n bit possiamo associare un intero compreso fra 0 e $N - 1$ con $N = 2^n$. All'intero x associamo la stringa di bit $x_0x_1x_2 \dots x_n$ con $x_i = 0, 1$ e $i = 0, 1, \dots, n$ tale che $x = \sum_{i=0}^n x_i 2^{n-i}$. Possiamo codificare $N = 2^n$ interi ma questi saranno compresi fra 0 e $N - 1 = 2^n - 1$.

1.2.1 Prodotto interno bit-per-bit

$$x \cdot z \equiv (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n) \pmod{2}$$

E' anche chiamato prodotto AND bitwise perchè si ottiene prendendo le operazioni AND fra i singoli bit.

1.2.2 Somma bit-per-bit: bitwise XOR

Indichiamo con $x \oplus z$ la somma bit-per bit, modulo 2. Il risultato questa volta è una stringa il cui i -esimo bit ha il valore $x_i + z_i \pmod{2} = x_i \text{ XOR } z_i$.

Capitolo 2

Apparato matematico

2.1 Prerequisiti matematici

2.1.1 Numeri complessi

Ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ può essere scritto come $z = a + ib$, con $a \in \mathbb{R}$ **parte reale** e $b \in \mathbb{R}$ **parte immaginaria**. Se $z = a + ib$ e $w = c + id$, abbiamo

$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Per ogni $z \in \mathbb{C}$, $z \cdot z^* = a^2 + b^2$ è reale e non negativo dove z^* è il **complesso coniugato** di z (la parte complessa è negata). Inoltre, $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ è detto **modulo** di z .

$$|z|^2 = z \cdot z^*$$

Possiamo rappresentare un numero complesso $z = a + ib$ come una coppia (a, b) sul piano complesso. L'asse delle ascisse è utilizzato per la parte reale e l'asse delle ordinate per la parte immaginaria. Si ha $a = |z| \cos \theta$ e $b = |z| \sin \theta$ dove θ è la **fase**. Se $z = 0$ allora θ non è definita. Per $|z| = 1$, $z = \cos \theta + i \sin \theta$. Più in generale possiamo scrivere $z = pe^{i\theta}$ con $p = |z|$ e $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

$$i * (-i) = -1$$

2.1.2 Spazi vettoriali in 2D

- **Direzione:** rappresentata dalla retta su cui giace il vettore
- **Verso:** specifica in che direzione punta il vettore

Se abbiamo due vettori u e v possiamo definire la somma che sarà un vettore $w = u + v$ ottenuto mediante la **regola del parallelogramma**.

Dato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, per ogni vettore v , possiamo definire il vettore αv è la freccia ottenuta moltiplicando v per α in modulo e lasciando invariata la direzione se $\alpha > 0$ e invertendo il verso se $\alpha < 0$. Questa operazione è detta **moltiplicazione per scalare**. Se $\alpha = -1$, otteniamo il vettore $-v$ che ha stesso modulo, stessa direzione ma verso opposto a v .

L'insieme di tutti i vettori del piano è allora uno spazio vettoriale reale V chiuso rispetto all'operazione di combinazione lineare:

$$u = \alpha v + \beta w$$

Per ogni vettore u e $v \in V$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.1.3 Prodotto scalare e componenti

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

Che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\forall u \in V, \langle u, u \rangle$ è un numero reale non negativo, con $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$
2. $\forall u, v \in V, \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$
3. $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \langle w, \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \langle w, u \rangle + \beta \langle w, v \rangle$

Due vettori per i quali il prodotto scalare è nullo sono *ortogonali*, sono base ortogonali se sono ortogonali e a norma unitaria ($\|\langle \cdot, \cdot \rangle\|_2 = 1$).

Inoltre riscrivendo $u = u_0 v_0 + u_1 v_1$ si ha:

$$\langle u, u \rangle = \langle u_0 v_0 + u_1 v_1, u_0 v_0 + u_1 v_1 \rangle = u_0^2 + u_1^2$$

Dove $u_0 = \langle u, v_0 \rangle$ e $u_1 = \langle u, v_1 \rangle$

2.1.4 Vettori ket e bra

- **Ket:** vettore $u \rightarrow |u\rangle$
- **Bra:** vettore $u \rightarrow \langle u|$

Usando questa notazione il prodotto scalare si forma con *braket*:

$$\langle u, v \rangle = \langle u|v\rangle$$

Usando la scomposizione di v in componenti:

- $|v\rangle = u_0|v_0\rangle + u_1|v_1\rangle$
- $\langle v| = u_0^*\langle v_0| + u_1^*\langle v_1|$

Delta di Kronecker

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Usando queste notazioni possiamo scrivere il prodotto scalare come:

$$\begin{aligned} \langle v|v\rangle &= (u_0^*\langle v_0| + u_1^*\langle v_1|) \cdot (u_0|v_0\rangle + u_1|v_1\rangle) \\ &= |u_0|^2 \langle v_0|v_0\rangle + u_0^* u_1 \langle v_0|v_1\rangle + u_1^* u_0 \langle v_1|v_0\rangle + |u_1|^2 \langle v_1|v_1\rangle \\ &= |u_0|^2 \cdot 1 + u_0^* u_1 \cdot 0 + u_1^* u_0 \cdot 0 + |u_1|^2 \cdot 1 \\ &= |u_0|^2 + |u_1|^2 \\ &= ||v\rangle|^2 \end{aligned}$$

2.1.5 Prodotto tensore

Consideriamo ora due spazi vettoriali V e W con basi, rispettivamente, $A = \{|\alpha_1\rangle_V, \dots, |\alpha_n\rangle_V\}$ e $B = \{|\beta_1\rangle_W, \dots, |\beta_m\rangle_W\}$. Da questa scrittura deduciamo che V è uno spazio vettoriale di dimensione n e W di dimensione m .

Il prodotto tendore di V e W viene indicato con $V \otimes W$ ha dimensione $\dim(V \otimes W) = n m$ con la base costituita da $n m$ elementi della forma $|\alpha_i\rangle_V \otimes |\beta_j\rangle_W$.

La notazione $|\alpha_i\rangle_V \otimes |\beta_j\rangle_W$ può essere scritta come $|\alpha_i\beta_j\rangle$.

Proprietà:

1. $\forall |v\rangle, |v'\rangle \in V, |w\rangle \in W \quad (|v\rangle + |v'\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes |w\rangle + |v'\rangle \otimes |w\rangle$
2. $\forall |v\rangle \in V, |w\rangle, |w'\rangle \in W \quad |v\rangle \otimes (|w\rangle + |w'\rangle) = |v\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |w'\rangle$
3. $\forall |v\rangle \in V, |w\rangle \in W, \alpha \in \mathbb{C} \quad (\alpha|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (\alpha|w\rangle) = \alpha(|v\rangle \otimes |w\rangle)$

Se V e W ammettono prodotto scalare, allora $V \otimes W$ ammette un prodotto scalare definito come:

$$\langle u|u'\rangle = (\langle v| \otimes \langle w|) \cdot (|v'\rangle \otimes |w'\rangle) = \langle v|v'\rangle \cdot \langle w|w'\rangle \in \mathbb{C}$$

Alcune "proprietà":

1. $(\langle \alpha_1| \otimes \langle \beta_2|) \cdot (|\alpha_1\rangle \otimes |\beta_2\rangle) = \langle \alpha_1|\alpha_1\rangle \cdot \langle \beta_2|\beta_2\rangle = 1$
2. $\{|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_j\rangle\}$ è una base ortonormale $V \otimes W$
 - Se $\langle \alpha_i|\alpha_k\rangle \cdot \langle \beta_j|\beta_l\rangle = 1 \rightarrow$ normalizzati
 - Se $\langle \alpha_i|\alpha_k\rangle \cdot \langle \beta_j|\beta_l\rangle = 0 \rightarrow$ ortogonali

Esempio

$$\begin{aligned} |v\rangle &= a|\alpha_1\rangle_V + b|\alpha_2\rangle_V \in V \\ |w\rangle &= c|\beta_1\rangle_W + d|\beta_2\rangle_W \in W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v\rangle \otimes |w\rangle &= (a|\alpha_1\rangle_V + b|\alpha_2\rangle_V) \otimes (c|\beta_1\rangle_W + d|\beta_2\rangle_W) \\ &= ac(|\alpha_1\rangle_V \otimes |\beta_1\rangle_W) + ad(|\alpha_1\rangle_V \otimes |\beta_2\rangle_W) + bc(|\alpha_2\rangle_V \otimes |\beta_1\rangle_W) + bd(|\alpha_2\rangle_V \otimes |\beta_2\rangle_W) \\ \langle v| \otimes \langle w| &= (a\langle \alpha_1|_V + b\langle \alpha_2|_V) \otimes (c\langle \beta_1|_W + d\langle \beta_2|_W) \\ &= ac(\langle \alpha_1|_V \otimes \langle \beta_1|_W) + ad(\langle \alpha_1|_V \otimes \langle \beta_2|_W) + bc(\langle \alpha_2|_V \otimes \langle \beta_1|_W) + bd(\langle \alpha_2|_V \otimes \langle \beta_2|_W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\langle v| \otimes \langle w|) \cdot (|v\rangle \otimes |w\rangle) &= [(a\langle \alpha_1|_V + b\langle \alpha_2|_V) \otimes (c\langle \beta_1|_W + d\langle \beta_2|_W)] \cdot [(a|\alpha_1\rangle_V + b|\alpha_2\rangle_V) \otimes (c|\beta_1\rangle_W + d|\beta_2\rangle_W)] \\ &= \\ &= (|a|^2 + |b|^2) \cdot (|c|^2 + |d|^2) \end{aligned}$$

2.1.6 Operatori lineari

Gli operatori lineari in generale sono tali che agendo su un vettore dello spazio lineare danno un altro vettore dello stesso spazio: $O : V \rightarrow V$. Usando la notazione braket possiamo scrivere

$$O|v\rangle = |w\rangle$$

Scegliamo una base (ortonormale) dello spazio vettoriale $\{|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle\}$, l'elemento della matrice O in posizione (i, j) sarà $O_{ij} = \langle \alpha_i| \cdot (O|\alpha_j\rangle)$

Esempio

Voglio calcolare O_{12} :

$$\begin{aligned} O_{12} &= \langle \alpha_1 | \left(\sum_{ij}^n O_{ij} |\alpha_i\rangle \langle \alpha_j| \right) | \alpha_2 \rangle \\ &= \sum_{ij}^n O_{ij} \langle \alpha_1 | \alpha_i \rangle \langle \alpha_j | \alpha_2 \rangle \\ &= O_{12} \end{aligned}$$

Grazie al delta di Kronecker.

2.1.7 Autovalori e Autovettori

Diremo che se $O|v\rangle = \lambda|v\rangle$ per un vettore non nullo $|v\rangle$, diremo che v è un **autovettore** di O e λ è l'**autovalore** corrispondente.

Capitolo 3

Introduzione ai fenomeni quantistici

Un osservabile fisico può essere associato ad un operatore Hermitiano ϕ da cui possiamo ottenere i loro autovalori e autovettori. Il punto fondamentale di questa discussione è che la base, gli autovalori e il risultato dipende dall'osservabile che vogliamo misurare.

3.1 Regole dal postulato della misura

1. Se vogliamo misurare un osservabile ϕ , dobbiamo conoscere i suoi autovalori $\{\phi_i\}$ e autovettori $\{|\phi_i\rangle\}$; cioè gli stati tali che $\phi|\phi_i\rangle = \phi_i|\phi_i\rangle$. Gli autovettori saranno la base su cui decomporre lo stato del nostro sistema. Ovvero dobbiamo scrivere $|a\rangle = \sum_i a_i|\phi_i\rangle$ con $a_i = \langle\phi_i|a\rangle$.
2. La misura avrà come risultato l'autovalore ϕ_i con probabilità $|a_i|^2$.
3. Dopo la misura, il sistema si troverà nello stato $|\phi_i\rangle$ associato all'autovalore misurato.

Stati quantistici sono normalizzati:

$$\sum_{i=1}^N |a_i|^2 = 1$$

3.2 Fase globale e relativa

3.2.1 Fase globale

Consideriamo i vettori $|u\rangle$ e $e^{i\phi}|u\rangle$ che hanno lo stesso modulo ma differiscono per una fase globale ϕ . Il calcolo delle probabilità dei risultati di una qualunque misura fornisce sempre gli stessi valori.

Sia $|u\rangle = \sum_i \alpha_i |\phi_i\rangle$ dove $\{|\phi_i\rangle\}$ formano una base ortonormale dello spazio vettoriale. Lo stato con una fase globale si scriverà $e^{i\phi}|u\rangle = \sum_i e^{i\phi} \alpha_i |\phi_i\rangle$

Esempio di fase globale/relativa Fase relativa

$$\begin{array}{c} \uparrow \text{ Fase globale} \\ e^{i\phi} \frac{(|0\rangle + e^{i(\gamma-\phi)}|1\rangle)}{\sqrt{2}} \end{array}$$

3.3 Stati a molti qubit

- **Base del qubit:** $\{|0\rangle, |1\rangle\}$
- **Stato:** $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

Consideriamo:

$$\begin{aligned} \text{A: } |\psi\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ \text{B: } |\phi\rangle &= \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle \end{aligned} \tag{3.1}$$

La base B la otteniamo con:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \oplus |\phi\rangle &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \oplus (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) \\ &= \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle \end{aligned}$$

Per ricavare la base ci fermiamo al secondo passaggio, quindi avremo $B : \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

3.3.1 Stati a due qubit separabili

Usando $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ (3.1), a volte conviene scrivere lo stato come:

$$|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle = \alpha|0\rangle \oplus (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) + \beta|1\rangle \oplus (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)$$

Perchè in questo modo si possono determinare le probabilità di collasso in modo più semplice:

$$\begin{cases} \text{Se collassa } \alpha: |\alpha|^2, \phi_0 \rightarrow |0\rangle \oplus (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \begin{cases} \text{Se collassa } \gamma: |\gamma|^2, \phi_0 \rightarrow |00\rangle \\ \text{Se collassa } \delta: |\delta|^2, \phi_1 \rightarrow |01\rangle \end{cases} \\ \text{Se collassa } \beta: |\beta|^2, \phi_1 \rightarrow |1\rangle \oplus (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \begin{cases} \text{Se collassa } \gamma: |\gamma|^2, \phi_0 \rightarrow |10\rangle \\ \text{Se collassa } \delta: |\delta|^2, \phi_1 \rightarrow |11\rangle \end{cases} \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{aligned} |\varepsilon\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) = |\psi\rangle \oplus |\phi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle) = \begin{cases} \text{Se collassa } |01\rangle: \frac{1}{2}, \phi_0 \rightarrow |01\rangle \rightarrow 1, \phi_0 \rightarrow |01\rangle \\ \text{Se collassa } |10\rangle: \frac{1}{2}, \phi_1 \rightarrow |10\rangle \rightarrow 1, \phi_1 \rightarrow |10\rangle \end{cases} \end{aligned}$$

Possiamo dedurre che se A misura 0, B misura 1 e viceversa.

3.3.2 Stati a due qubit entangled

Gli elementi dello spazio vettoriale $A \oplus B$ non sono tutti ottenibili come prodotto tensoriale di due elementi di A e B .

Un esempio di stati entangled sono gli stati di Bell:

$$\begin{aligned} |\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \oplus |0\rangle_B + |1\rangle_A \oplus |1\rangle_B) \\ |\phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \oplus |0\rangle_B - |1\rangle_A \oplus |1\rangle_B) \\ |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \oplus |1\rangle_B + |1\rangle_A \oplus |0\rangle_B) \\ |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \oplus |1\rangle_B - |1\rangle_A \oplus |0\rangle_B) \end{aligned}$$

Per descrivere lo stato di un sistema a due qubit possiamo alternativamente usare la base canonica $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ o la base di Bell $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$.

$$O = \lambda_0 |\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \lambda_1 |\phi^-\rangle\langle\phi^-| + \lambda_2 |\psi^+\rangle\langle\psi^+| + \lambda_3 |\psi^-\rangle\langle\psi^-|$$

Quindi se il sistema si trova in uno stato di Bell, una misura dell'operatore O darà con certezza l'autovalore corrispondente.

3.4 Trasformazioni unitarie

Sia $|a\rangle = \alpha|x_0\rangle + \beta|x_1\rangle$, una trasformazione unitaria U è

- **Lineare:** $U|a\rangle = U(\alpha|x_0\rangle + \beta|x_1\rangle) = \alpha U|x_0\rangle + \beta U|x_1\rangle$
- **Invertibile con l'inversa uguale alla trasposta coniugata:** $U^{-1}|a\rangle = U^\dagger|a\rangle$

Quest'ultima proprietà garantisce che le trasformazioni unitarie lasciano invariati i prodotti scalari, e quindi anche la norma dei vettori su cui agiscono e le probabilità associate alle misure. Infatti, prendiamo due stati $|a\rangle$ e $|b\rangle$ con prodotto scalare $\langle b|a\rangle$. Se questi evolvono secondo un operatore unitario U avremo $|a'\rangle = U|a\rangle$ e $|b'\rangle = U|b\rangle$ ($\langle b'| = \langle b|U^\dagger$), il prodotto scalare degli stati evoluti sarà $\langle b'|a'\rangle = \langle b|U^\dagger U|a\rangle = \langle b|a\rangle$ perchè $U^\dagger U = \text{Identità}$.

3.4.1 Porte quantistiche

Trasformazioni di Pauli

Nel nostro caso scegliamo la base canonica $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e definiamo, oltre all'identità Id , le tre trasformazioni di Pauli X, Y, Z :

$$\begin{aligned} Id|0\rangle &:= |0\rangle & Id|1\rangle &:= |1\rangle \\ X|0\rangle &:= |1\rangle & X|1\rangle &:= |0\rangle \\ Y|0\rangle &:= -i|1\rangle & Y|1\rangle &:= i|0\rangle \\ Z|0\rangle &:= -|0\rangle & Z|1\rangle &:= |1\rangle \end{aligned}$$

Analizzando l'effetto degli operatori, si nota che nella base canonica, X corrisponde al NOT tra bit classici. L'operatore Z genera un cambio della fase relativa e, infine, l'operatore Y può essere visto come una combinazione dei due precedenti dato che $Y = -iXZ$.

Esempio

$$\begin{aligned} Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &= \alpha Z|0\rangle + \beta Z|1\rangle \\ &= -\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \end{aligned}$$

Trasformazioni di Hadarmard

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= |+\rangle = \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}} \\ H|1\rangle &= |-\rangle = \frac{(|0\rangle - |1\rangle)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

In forma matriciale (nella base canonica $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) l'operatore di Hadarmard si scrive come:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Controlled-NOT

Consideriamo ora, il controlled-NOT, **CNOT**, una trasformazione che agisce su 2 qubit, A e B . Nella base canonica l'azione del **CNOT** é:

$$\begin{aligned}CNOT|0\rangle_A \oplus |0\rangle_B &= |0\rangle_A \oplus |0\rangle_B \\CNOT|0\rangle_A \oplus |1\rangle_B &= |0\rangle_A \oplus |1\rangle_B \\CNOT|1\rangle_A \oplus |0\rangle_B &= |1\rangle_A \oplus |1\rangle_B \\CNOT|1\rangle_A \oplus |1\rangle_B &= |1\rangle_A \oplus |0\rangle_B\end{aligned}$$

In linea generale possiamo scrivere il **CNOT** come:

$$C_iNOT_j$$

Dove i è il qubit di controllo e j il qubit target. Se il qubit di controllo è acceso allora applica un NOT al qubit target.

L'importanza dell'operatore **CNOT** risiede nel fatto che può generare entanglement fra due qubit.

Esempio

$$|00\rangle \xrightarrow{H_1} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \oplus |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |10\rangle) \xrightarrow{C_1NOT_2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = \text{Stato di Bell}$$

Se eseguo l'operatore **CNOT** due volte ottengo lo stato iniziale:

$$CNOT^2 = Id$$

3.5 Sfera di Bloch

Come detto un generico stato quantistico a due livelli o qubit è scritto come $|v\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ con il vincolo ulteriore di normalizzazione dello stato: $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Quindi in generale possiamo scrivere $|\alpha|^2 = \cos^2(\theta) \rightarrow |\alpha| = \cos(\frac{\theta}{2})$ e $|\beta|^2 = \sin^2(\theta) \rightarrow |\beta| = \sin(\frac{\theta}{2})$. Possiamo rappresentare gli stati dei qubit in modo geometrico. Consideriamo lo stato generico

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}|1\rangle$$

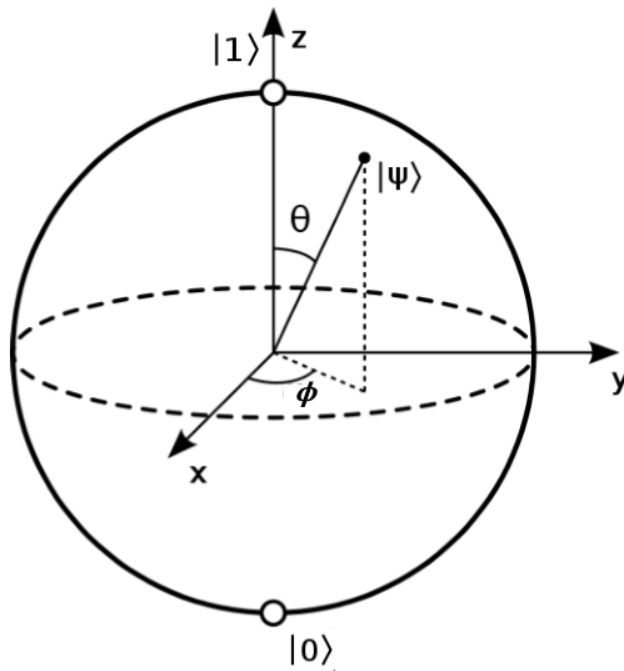
e il relativo stato bra

$$\langle\psi| = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle 0| + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi}\langle 1|$$

Calcoliamo i valori medi degli operatori di Pauli X, Y, Z con lo stato $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned}x &= \langle\psi|X|\psi\rangle = \cos\phi \sin\theta \\y &= \langle\psi|Y|\psi\rangle = \sin\phi \sin\theta \\z &= \langle\psi|Z|\psi\rangle = \cos\theta \text{ (oppure } -\cos\theta)\end{aligned}$$

Queste non sono altro che le coordinate in uno spazio tridimensionale di un punto che si muove su una sfera. Se consideriamo il vettore che congiunge l'origine degli assi con il punto di coordinate $\{x, y, z\}$, l'angolo θ è quello formato dal vettore e dall'asse z mentre l'angolo ϕ è quello formato dal vettore sul piano $y - z$



Concludiamo che ogni operatore unitario può essere visto come una rotazione sulla sfera di Bloch che unisce lo stato iniziale con lo stato finale.

L'operatore U possiamo scriverlo più generalmente come:

$$U = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) Id - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) Y$$

Esempio

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |1\rangle \\ |\psi_f\rangle &= U|\psi\rangle \\ &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) Id|1\rangle - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) Y|1\rangle \\ &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |1\rangle - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) i|0\rangle \\ &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |1\rangle + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) |0\rangle \end{aligned}$$

Capitolo 4

Informazione Quantistica

4.1 Parallelismo quantistico

Supponiamo di partire dai due qubit inizializzati nello stato $|00\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle$ e di applicare due porte di Hadarmard ai singoli qubit. Le due porte applicate contemporaneamente si denotano come $H \otimes H \equiv H^{\otimes 2}$ dove la notazione \otimes indica che la prima porta è applicata al primo qubit e la seconda al secondo qubit

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |0\rangle &\xrightarrow{H^{\otimes 2}} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle}{2} + \frac{|01\rangle}{2} + \frac{|10\rangle}{2} + \frac{|11\rangle}{2} \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \end{aligned}$$

Se applichiamo un operatore unitario U

$$\frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{U} \frac{1}{2} (U|00\rangle + U|01\rangle + U|10\rangle + U|11\rangle)$$

Ovvero agirà contemporaneamente su tutti gli stati logici. Questo ragionamento si estende in maniera semplice al caso di n qubit. In questo caso lo stato iniziale sarà $|00 \dots 0\rangle$ e applicheremo n porte di Hadarmard $H^{\otimes n}$

$$\begin{aligned} |00 \dots 0\rangle &\xrightarrow{H^{\otimes n}} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \dots \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} (|00 \dots 0\rangle + |10 \dots 0\rangle + \dots + |11 \dots 1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \end{aligned}$$

Dove $N = 2^n$ e anche in questo caso, applicando successivamente un operatore unitario U avremo

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} U|x\rangle$$

Possiamo manipolare parallelamente tutte le N stringhe logiche.

4.2 Teorema no-cloning

Supponiamo di avere un singolo qubit di informazione e che si trovi nello stato $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ (con $|a|^2 + |b|^2 = 1$). Per copiarlo, prendiamo un secondo qubit inizializzato nello stato $|0\rangle$. Avremo $|\psi 0\rangle = a|00\rangle + b|10\rangle$ e applichiamo la porta **CNOT**

$$|\psi 0\rangle = a|00\rangle + b|10\rangle \xrightarrow{C_1NOT_2} a|00\rangle + b|11\rangle$$

Se consideriamo lo stato più generale $|\psi\rangle = a|00\rangle + b|10\rangle$ per copiarlo dovremmo avere un operatore il cui risultato sia

$$|\psi\psi\rangle = a^2|00\rangle + ab|01\rangle + ab|10\rangle + b^2|11\rangle$$

Se lo stato da copiare è sconosciuto, non è possibile copiarlo.

L'operazione di copiatura sarà descritta da un'evoluzione unitaria U_{COPY} tale che

$$|\psi\rangle|s\rangle \xrightarrow{U_{COPY}} |\psi\rangle|s\rangle = |\psi\psi\rangle$$

Supponiamo di voler copiare anche uno stato $|\varphi\rangle$

$$|\varphi\rangle|s\rangle \xrightarrow{U_{COPY}} |\varphi\rangle|s\rangle = |\varphi\varphi\rangle$$

Se prendendo il prodotto scalare degli stati finali abbiamo

$$\langle\varphi s|U_{COPY}^\dagger U_{COPY}|\psi s\rangle = \langle\varphi s|\psi s\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle\langle s|s\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle$$

Esempio

$s = 0$

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\langle 0|U_{COPY}^\dagger (U_{COPY}|\psi\rangle|0\rangle) &= \langle\varphi|\langle 0|I|\psi\rangle|0\rangle \\ &= (\langle\varphi|\langle 0|)(|\psi\rangle|0\rangle) \\ &= \langle\varphi|\psi\rangle\langle 0|0\rangle \\ &= \langle\varphi|\psi\rangle \end{aligned}$$

Dalle equazioni di sopra, questo deve essere uguale a $\langle\psi\psi|\varphi\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle$

$$\langle\varphi|\psi\rangle = (\langle\varphi|\psi\rangle)^2$$

Quindi può esistere un operatore unitario di copia U_{COPY} solo se gli stati $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ sono ortogonali ($\langle\varphi|\psi\rangle = 0$) oppure identici ($\langle\varphi|\psi\rangle = 1$).

Concludiamo che se gli stati da copiare sono noti e ortogonali è possibile costruire un operatore unitario U_{COPY} che li copi. In genere, però non è possibile copiare stati quantistici qualsiasi; ovvero non esiste nessun operatore U_{COPY} capace di copiare tutti gli stati quantistici.

4.3 Superdense coding

Supponiamo che Alice voglia mandare due bit di informazione classica. Alice e Bob devono condividere uno stato entangled (di Bell)

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B)$$

Dove gli stati $|\dots\rangle_A$ e $|\dots\rangle_B$ sono rispettivamente di Alice e Bob.

| Bit di Alice | Porta logica applicata | Stato di Bob |
|--------------|------------------------|--|
| 00 | I | $\frac{(00\rangle_B + 11\rangle_B)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{C_1 NOT_2} \frac{(00\rangle_B + 10\rangle_B)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{H} 00\rangle_B$ |
| 01 | X | $\frac{(10\rangle_B + 01\rangle_B)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{C_1 NOT_2} \frac{(11\rangle_B + 01\rangle_B)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{H} 01\rangle_B$ |
| 10 | Z | $\frac{(00\rangle_B - 11\rangle_B)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{C_1 NOT_2} \frac{(00\rangle_B - 10\rangle_B)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{H} 10\rangle_B$ |
| 11 | iY | $\frac{(01\rangle_B - 10\rangle_B)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{C_1 NOT_2} \frac{(01\rangle_B - 11\rangle_B)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{H} 11\rangle_B$ |

4.4 Teletrasporto quantistico

Supponiamo che Alice (A) e Bob (B) condividano uno stato entangled $|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$. Questa notazione sta per la più precisa

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

Supponiamo che Alice abbia un qubit di informazione $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ (con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$) che vuole mandare a Bob. Per far questo, lo accoppia allo stato entangled $|\beta_{00}\rangle$

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|00\rangle + |11\rangle)]$$

Dove si intende, ad esempio, $|0\rangle|00\rangle = |0\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_B$.

Poi viene applicata una porta **CNOT** usando il primo qubit A come bit di controllo e il secondo qubit B come bit target (se vediamo i qubit come $|000\rangle$ sarebbe C_1NOT_3)

$$|\psi_0\rangle \xrightarrow{C_1NOT_2} |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|01\rangle + |10\rangle)]$$

Successivamente Alice applica una porta di Hadarmard al primo qubit

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle \xrightarrow{H_1} |\psi_2\rangle &= \frac{1}{2} [\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|01\rangle + |10\rangle)] \\ &= \frac{1}{2} [|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)] \end{aligned}$$

l'ultimo passo è quindi quello di rendere tale informazione accessibile a Bob. Per fare questo, Alice misura i suoi due qubit e dato che i qubit di Alice e Bob sono entangled, la misura di Alice induce un collasso dello stato di Bob. I possibili risultati della misura di Alice e i corrispondenti stati di Bob sono

| Misura | Stato di Bob | Probabilità di misurare 0 | Probabilità di misurare 1 |
|--------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 00 | $\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$ | $\mathcal{P}_{00}(0) = \alpha ^2$ | $\mathcal{P}_{00}(1) = \beta ^2$ |
| 01 | $\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$ | $\mathcal{P}_{01}(0) = \beta ^2$ | $\mathcal{P}_{01}(1) = \alpha ^2$ |
| 10 | $\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$ | $\mathcal{P}_{10}(0) = \alpha ^2$ | $\mathcal{P}_{10}(1) = \beta ^2$ |
| 11 | $\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$ | $\mathcal{P}_{11}(0) = \beta ^2$ | $\mathcal{P}_{11}(1) = \alpha ^2$ |

Ognuno di queste misure capita con probabilità di $\frac{1}{4}$. Affinchè Bob posseda sempre lo stato $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, Alice chiama attraverso un canale classico Bob e gli dice quale è stato il risultato della sua misura. A questo punto Bob applica un'operatore correttivo

| Misura | Operatore correttivo |
|--------|----------------------|
| 00 | I |
| 01 | X |
| 10 | Z |
| 11 | Y |

La probabilità totale di misurare 0 per Bob è

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Bob}(0) &= \frac{1}{4} (\mathcal{P}_{00}(0) + \mathcal{P}_{01}(0) + \mathcal{P}_{10}(0) + \mathcal{P}_{11}(0)) \\ &= \frac{1}{4} (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2) \\ &= \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Stessa cosa per $\mathcal{P}_{Bob}(1) = \frac{1}{2}$.

La conclusione è che sebbene Alice abbia modificato lo stato (o gli stati) di Bob, quest'ultimo non è in grado di estrarre nessuna informazione.

4.5 Algoritmi quantistici

4.5.1 Algoritmo di Deutch

Data una funzione f ad un bit, l'algoritmo di Deutch permette di capire se sia costante o no; nel caso in cui f non sia costante viene spesso chiamata **bilanciata**. Si consideri una funzione ad un bit $f(x) : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, la funzione f sarà costante se $f(0) = f(1)$ e sarà bilanciata se $f(0) \neq f(1)$.

Lo stato iniziale dell'algoritmo di Deutch è costituito da due qubit: $|\psi_0\rangle = |01\rangle$. Ad entrambi viene applicata una porta di Hadarmard per ottenere

$$|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle = \frac{1}{2} (|0\rangle + |1\rangle) (|0\rangle - |1\rangle)$$

L'operatore U_f

L'effetto di questo operatore è quello di calcolare $f(x)$, l'addizione modulo 2 di $y \oplus f(x)$ e lo possa immagazzinare nel secondo qubit ($|x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle$). L'addizione modulo 2 è equivalente ad una porta XOR.

Per capire come agisce l'operatore U_f , nell'algoritmo di Deutch, lo applichiamo ad uno stato generico $|x\rangle|-\rangle$:

$$\begin{aligned} |x\rangle|-\rangle &= |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{U_f}_{x=0} |0\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |01\rangle) \\ &\xrightarrow{U_f} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0 \oplus f(0)\rangle - |0, 1 \oplus f(0)\rangle) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |01\rangle) = |0\rangle|-\rangle & \text{se } f(0) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |00\rangle) = -|0\rangle|-\rangle & \text{se } f(0) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

In sostanza, l'applicazione dell'operatore U_f lascia invariato sia il primo qubit che il secondo ma lo stato acquista una fase $(-1)^{f(x)}$ che dipende dal valore della funzione f calcolata per x :

$$|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow (-1)^{f(x)} |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Possiamo dire che lo stato $|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ è un autovettore dell'operatore U_f con autovalore $(-1)^{f(x)}$. Tornando allo stato iniziale $|\psi_1\rangle$, applichiamo l'operatore U_f e una porta di Hadarmard sul primo qubit per ottenere

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= U_f |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ((-1)^{f(0)} |0\rangle + (-1)^{f(1)} |1\rangle) \\ &\xrightarrow{H_1} \frac{1}{2} [|0\rangle ((-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}) + |1\rangle ((-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)})] \end{aligned}$$

Se la funzione è costante avremo che $(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)} = 2$ e $(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)} = 0$ quindi $|\psi_2\rangle = |0\rangle$. Al contrario se la funzione è bilanciata avremo che $(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)} = 0$ e $(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)} = \pm 2$ quindi $|\psi_2\rangle = \pm |1\rangle$ e visto che il segno \pm può essere visto come fase globale, possiamo dire che lo stato finale è $|1\rangle$.

L'algoritmo di Deutch permette di migliorare le performance dell'algoritmo classico perchè usa il parallelismo quantistico.

4.5.2 Algoritmo di Deutsch-Josza

L'algoritmo di Deutsch-Josza segue i passaggi dell'algoritmo di Deutsch. Lo stato iniziale è

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n} |1\rangle$$

Vengono applicate $n + 1$ porte di Hadarmard ai primi $n + 1$ qubit. In questo modo otteniamo la sovrapposizione di tutte le stringhe di bit con gli interi da 0 a $N - 1 = 2^n - 1$. Lo stato diviene

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle |-\rangle$$

A questo punto a questo stato viene applicato l'operatore U_f (da Bob) che si comporta così $U_f : |x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle$ e quindi

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle |-\rangle$$

Successivamente Alice applica n porte di Hadarmard ai primi n qubit. Per capire come queste agiscono, è utile considerare il singolo qubit $|k\rangle$ con $k = \{0, 1\}$. Conosciamo il risultato dal calcolo diretto ma è utile scriverlo in maniera compatta come

$$H|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z=0}^1 (-1)^{kz} |z\rangle$$

Estendendo questo ragionamento a tutti gli n qubit, otteniamo

$$H^{\otimes n} |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} \frac{(-1)^{x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n}}{\sqrt{N}} |z_1, z_2, \dots, z_n\rangle$$

Che può essere riscritta in maniera compatta come:

$$H^{\otimes n} |x\rangle = \sum_{z=0}^{N-1} \frac{(-1)^{x \cdot z}}{\sqrt{N}} |z\rangle$$

Ora riscriviamo lo stato $|\psi\rangle$

$$|\psi_2\rangle = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N-1} \frac{(-1)^{x \cdot z + f(x)}}{N} |z\rangle |-\rangle$$

Se $z = 0$ sappiamo che $x \cdot z = 0$ e se f costante ($f(x) \rightarrow \bar{f}$) per tutti i valori di x allora il termine $(-1)^{f(x)}$ non dipende più da x

$$\sum_{x=0}^{N-1} \frac{(-1)^{\bar{f}}}{N} = (-1)^{\bar{f}} \sum_{x=0}^{N-1} \frac{1}{N} = (-1)^{\bar{f}}$$

Quindi se la funzione è costante

$$|\psi_2\rangle = |0\rangle |-\rangle$$

e una misura dei primi n qubit restituirà sempre 0.

Se la funzione è bilanciata non possiamo portare fuori il fattore $(-1)^{f(x)}$ però sappiamo che per $\frac{N}{2}$ stringhe varrà $+1$ ($f(x) = 0$) e per le altre $\frac{N}{2}$ varrà -1 ($f(x) = 1$). Quindi il coefficiente dello stato $|0\rangle$ sarà

$$\sum_{x=0}^{N-1} \frac{(-1)^{f(x)}}{N} = \left(\sum_{f(x)=0} \frac{1}{N} \right) - \left(\sum_{f(x)=1} \frac{1}{N} \right) = \frac{1}{N} \left(\frac{N}{2} - \frac{N}{2} \right) = 0$$

4.5.3 Algoritmo di Bernstein-Vazirani

Supponiamo di avere uno spazio logico a n bit e di avere una funzione che per ogni input x calcola $f_a(x) = x \cdot a = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n$ dove la stringa a n bit a è ignota. L'obiettivo è quello di determinare la stringa a .

L'azione dell'oracolo non sarà quello di aggiungere una fase $(-1)^{f(x)}$ ma una fase $(-1)^{x \cdot a}$ ($f_a(x) = x \cdot a$).

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N-1} \frac{(-1)^{x \cdot z + x \cdot a}}{N} |z\rangle |-\rangle \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N-1} \frac{(-1)^{(z \oplus a) \cdot x}}{N} |z\rangle |-\rangle \\ &= \sum_{z=0}^{N-1} \left(\sum_{x=0}^{N-1} \frac{(-1)^{(z \oplus a) \cdot x}}{N} \right) |z\rangle |-\rangle \\ &= \sum_{z=0}^{N-1} X_z |z\rangle |-\rangle \end{aligned}$$

Se $z = a$ vuol dire che le due stringhe hanno tutti gli n bit uguali ($z_i = a_i$). Per l' i -esimo bit dovremmo calcolare $z_i \text{ XOR } a_i$.

Il passo successivo è calcolare $(z+a) \cdot x$ che darà 0 visto che per i singoli bit avremo $(z_i + a_i) \cdot x_i = 0$ di conseguenza abbiamo che

$$X_{z=a} = \sum_{x=0}^{N-1} \frac{1}{N} = 1$$

e quindi tutti gli altri coefficienti devono essere annullati $X_{z \neq a} = 0$

4.5.4 Algoritmo di Simon

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$$

La funzione f ha la caratteristica che per ogni x esiste un solo y tale che $f(x) = f(y)$. Tale y non è casuale ma sappiamo che è calcolato secondo la regola $y = x \oplus a$ dove a è una stringa di n bit. L'obiettivo è quello di determinare la stringa a , ovvero, la periodicità della funzione f . L'unica possibilità che abbiamo è di dare all'oracolo una serie di stringhe fino a che non troviamo una coppia x e y tale che $f(x) = f(y)$. Una volta trovate tali stringhe, il periodo può essere calcolato come $a = x \oplus y$.

In media sono necessari $2^{\frac{n}{2}}$ tentativi e chiamate dell'oracolo. Supponiamo come nell'algoritmo di Deutsch-Josza di partire da n bit logici più n qubit addizionali $|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n}$ e di applicare N porte di Hadarmard ai primi n qubit:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle |0\rangle^{\otimes n}$$

Dato che $|0 \oplus f(x)\rangle = |f(x)\rangle$

$$|\psi_1\rangle \xrightarrow{O} |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle |f(x)\rangle$$

Dato che per ogni x esiste un $x \oplus a$ tale che $f(x) = f(x \oplus a)$, possiamo scrivere

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \sum_{x=0}^{N-1} \frac{|x\rangle + |x \oplus a\rangle}{\sqrt{2}} |f(x)\rangle$$

$f(x)$ collassa a $f(x_0)$ con probabilità $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{N}$ e il valore di questa stringa non è importante quindi possiamo scrivere lo stato come

$$|\psi_3\rangle = \frac{|x_0\rangle + |x_0 \oplus a_0\rangle}{\sqrt{2}}$$

Applichiamo n porte di Hadarmard

$$\begin{aligned} \frac{|x_0\rangle + |x_0 \oplus a\rangle}{\sqrt{2}} &\xrightarrow{H^{\otimes n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{z=0}^{N-1} (-1)^{x_0 \cdot z} |z\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{z=0}^{N-1} (-1)^{(x_0 \oplus a) \cdot z} |z\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{z=0}^{N-1} (-1)^{x_0 \cdot z} |z\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{z=0}^{N-1} (-1)^{x_0 \cdot z + a \cdot z} |z\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \left(\sum_{z=0}^{N-1} (-1)^{x_0 \cdot z} (1 + (-1)^{a \cdot z}) |z\rangle \right) \end{aligned}$$

Il prodotto interno bit-per-bit $a \cdot z = \{0, 1\}$ per le stringhe z per cui $a \cdot z = 1$, il coefficiente dello stato $|z\rangle$ è 0. Al contrario se $a \cdot z = 0$ il coefficiente è 1. La possiamo riscrivere come:

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{a \cdot z = 0} (-1)^{x_0 \cdot z} [1 + (-1)^{a \cdot z}] |z\rangle$$

Dobbiamo iterare la procedura per ottenere diversi valori z_2, z_3, \dots, z_n tali che $a \cdot z_i = 0$ per $i = 1, \dots, n$. Con questi z_i possiamo risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} a \cdot z_1 = 0 \\ a \cdot z_2 = 0 \\ \vdots \\ a \cdot z_n = 0 \end{cases}$$

Se le equazioni sono linearmente indipendenti esiste una sola stringa a che le soddisfa tutte e può essere facilmente determinata.

Capitolo 5

Crittografia quantistica

La crittografia quantistica segue uno schema a chiave privata e, in particolare, si focalizza sullo scambio delle chiavi private (si parla infatti di Quantum Key Distribution o QKD).

5.1 Protocollo BB84

Il protocollo BB84 è un protocollo sicuro per la distribuzione di chiavi crittografiche. Un eventuale hacker (Eve) non può copiare un generico qubit contenente l'informazione a causa del teorema no-cloning e non può misurare un qubit senza perturbarlo a causa del collasso della funzione d'onda.

Per il protocollo BB84 possiamo identificare due basi indicate con B_1 e B_2 :

- $B_1 : \{|0\rangle, |1\rangle\}$
- $B_2 : \{|+\rangle, |-\rangle\}$

5.1.1 Implementazione

1. La prima sequenza n rappresenta una stringa logica associata al messaggio mentre la seconda rappresenta la base in cui codificare il messaggio.

| | | | | | |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Logica | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Basi | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Messaggio | $ 0\rangle$ | $ 1\rangle$ | $ -\rangle$ | $ 0\rangle$ | $ 1\rangle$ |

2. L'output è certo dato che le stringhe delle basi di Alice e Bob coincidono.
3. Alice e Bob pubblicano apertamente le stringhe delle basi e poi guardano quali sono i bit con le basi in comune e creano la chiave a partire da quei bit.

| | | | | | |
|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Alice | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | $ 0\rangle$ | $ 1\rangle$ | $ -\rangle$ | $ 0\rangle$ | $ 1\rangle$ |
| | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| Bob | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | $ 1\rangle$ | $ 0\rangle$ | $ -\rangle$ | $ 1\rangle$ | $ 0\rangle$ |

Intervento di Eve

Visto che Eve non può copiare i qubit per il teorema no-cloning, l'unica cosa che può fare è inserirsi nella comunicazione fra Alice e Bob e sostituirsi a Bob nella misura per poi mandare a Bob dei qubit.

5.2 Protocollo B92

Invece di scegliere due basi, Alice ne sceglie solo una $B = \{|0\rangle, |+\rangle\}$. Gli stati della base B sono non-ortogonali dato che $\langle 0|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1. Come nel BB84, Alice estrae una sola stringa di n numeri random. Se Alice ha estratto 0 costruirà il qubit $|0\rangle$; se ha estratto 1 costruirà il qubit $|+\rangle$. In seguito, li invia a Bob tramite un canale quantistico.
2. Ricevuti i qubit Bob estrae una stringa di n numeri random e fa una misura. La misura viene fatta nella base $B_1 = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ se ha estratto 0 e nella base $B_2 = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ se ha estratto 1.
 - (a) Se Bob sceglie la base B_1 (estrae 0) e misura lo stato $|1\rangle$, sa immediatamente che Alice ha mandato il qubit $|+\rangle$ e quindi ha lo stato logico 1.
 - (b) Se Bob sceglie la base B_1 e misura lo stato $|0\rangle$, questo potrebbe essere associato allo stato di Alice $|0\rangle$ o $|+\rangle$. Quindi Bob non riesce a risalire al valore del qubit di Alice.
 - (c) Se Bob sceglie la base B_2 e misura lo stato $|-\rangle$, sa immediatamente che Alice ha mandato il qubit $|0\rangle$ e quindi ha lo stato logico 0.
 - (d) Se Bob sceglie la base B_2 e misura lo stato $|+\rangle$, questo potrebbe essere associato allo stato di Alice $|0\rangle$ o $|+\rangle$. Quindi Bob non riesce a risalire al valore del qubit di Alice.
3. Bob pubblica la posizione dei bit per i quali non è certo del valore del bit di Alice. Questi bit vengono scartati e i rimanenti bit costituiranno la chiave segreta dato che il loro valore non è stato pubblicato.
4. Per capire se Eve ha intercettato i qubit, Alice e Bob pubblicano metà dei bit che sanno essere perfettamente correlati. Se c'è un disaccordo, sanno che Eve ha intercettato la comunicazione e ignorano la stringa scambiata.

5.3 Protocollo EPR con stati entangled

Supponiamo che Alice e Bob condividano n qubit entangled come

$$|\phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

Alice genera un bit random classico b e, a seconda del suo valore, misura il suo qubit nella base B_1 o nella base B_2 (le stesse usate per il protocollo BB84). Supponiamo che il valore di questa misura sia a . Allo stesso modo, Bob genera un bit random classico b' .

Supponiamo che il bit random di Alice sia $b = 0$ e che Alice misuri nella base B_1 . Se misura 0 (il 50% delle volte), il sistema collasserà nello stato $|00\rangle$. Se Bob estrae il numero $b' = 0$ e misura nella base B_1 , il suo risultato sarà 0 il 100% delle volte. Allo stesso modo se Alice misura 1 il sistema collassa nello stato $|11\rangle$ e se $b' = 0$, Bob misurerà sempre 1. Ne consegue che $b = b' = 0$ i qubit di Alice e Bob sono perfettamente correlati.

Supponiamo ora che Alice estragga il numero $b = 1$ e decida di misurare nella base B_2 . Abbiamo che lo stato entangled può essere scritto come

$$\begin{aligned} |\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle + \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + |-\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{|++\rangle + |--\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Seguendo il ragionamento precedente è chiaro che se Bob estrae $b' = 1$, le misure di Alice e Bob sono perfettamente correlate. Ovvero, se il qubit di Alice collassa in $|\pm\rangle$ anche quello di Bob si troverà nello stato $|\pm\rangle$.

Supponiamo che Alice abbia $b = 0$ e $b' = 1$ e che la misura di Alice faccia collassare i qubit nello stato $|00\rangle$

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}$$

E' chiaro che una misura di Bob nella base B_2 darà metà delle volte lo stato $|+\rangle$ e il risultato $a' = 0$ e la rimanente metà lo stato $|-\rangle$ e il risultato $a' = 1$.

5.4 Quantum Money

Lo scopo è quello di sfruttare la meccanica quantistica per costruire una moneta che non possa essere contraffatta.

La moneta quantistica è costituita da n qubit M_n a cui associa un numero intero di serie $0 \leq m_n \leq 2^n - 1$. Come nel BB84 la prima stringa rappresenta l'informazione logica mentre la seconda è la stringa delle basi quantistiche B_m : si usa la base B_1 quando nella seconda stringa compare lo stato 0 e la base B_2 quando compare lo stato 1. Viene invece conservato il numero di serie m_n associato alla stringa delle basi B_m e alla stringa della moneta M_n .

Esempio:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ |0\rangle & |1\rangle & |+\rangle & |-\rangle \end{array}$$

La terza riga è la nostra moneta quantistica.

Per certificare l'autenticità della moneta, Alice invia la moneta alla banca che l'ha emessa. La banca controlla il numero di serie m_n , risale alla stringa delle basi quantistiche B_m e, usando quest'ultima, fa una misura nelle corrispondenti basi. Se la moneta è quella corretta, tutte le misure saranno deterministiche e la banca riotterà la stringa M_n .

Pensandola come tabella:

| id | stringa logica | stringa basi |
|-------|----------------|--------------|
| m_n | ***** | ***** |

Dove l'id è pubblico mentre le stringhe sono private e solo la banca può vederle.

Capitolo 6

Algoritmi quantistici

6.1 Algoritmo di Grover per la ricerca in database

6.1.1 Oracolo o Black box

Supponiamo di avere un database di $N = 2^n$ elementi con n bit. Gli interi associati saranno nell'intervallo compreso fra 0 e $N - 1$.

Tutta l'informazione sul problema che vogliamo risolvere è codificata in una funzione f che ha come input un intero x (o una stringa di n bit) e come output un singolo bit. In altre parole, $f : \{0, 1\}^{\otimes n} \rightarrow \{0, 1\}$. Per definizione, $f(x) = 1$ se x è soluzione del nostro problema e $f(x) = 0$ altrimenti.

Supponiamo che ci sia dato un numero intero m e che ci sia detto che è il prodotto di due numeri primi p e q : $m = p \cdot q$. Dobbiamo trovare quali sono p e q . In questo caso la funzione f implementata dall'oracolo non fa altro che prendere un intero x come input, dividere m per x e controllare se la divisione è esatta. Quindi l'oracolo non conosce la soluzione ma è in grado di verificare velocemente se un numero è soluzione o no del problema.

Allo stato generico $|x\rangle$ associamo un qubit aggiuntivo detto spesso qubit oracolo o **ancilla** $|q\rangle$, sarà quindi $|x\rangle|q\rangle$

$$|x\rangle|q\rangle \xrightarrow{O} |x\rangle|q \oplus f(x)\rangle$$

Se $q = 0$ e se x è soluzione, $f(x) = 1$ e $|0 \oplus 1\rangle = |1\rangle$. Al contrario se x non è soluzione, $f(x) = 0$ e $|0 \oplus 0\rangle = |0\rangle$.

$$|x\rangle|0\rangle \xrightarrow{O} \begin{cases} |x\rangle|1\rangle & \text{se } x \text{ è soluzione} \\ |x\rangle|0\rangle & \text{se } x \text{ non è soluzione} \end{cases}$$

Se $q = 1$ e se x è soluzione, $f(x) = 1$ e $|1 \oplus 1\rangle = |0\rangle$. Al contrario se x non è soluzione, $f(x) = 0$ e $|1 \oplus 0\rangle = |1\rangle$.

$$|x\rangle|0\rangle \xrightarrow{O} \begin{cases} |x\rangle|0\rangle & \text{se } x \text{ è soluzione} \\ |x\rangle|1\rangle & \text{se } x \text{ non è soluzione} \end{cases}$$

Questa osservazione ci permette di studiare in altri casi dove il qubit ancilla nello stato $|q\rangle = |-\rangle$. Lo stato totale si può scrivere come

$$|x\rangle \otimes |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle \otimes |0\rangle - |x\rangle \otimes |1\rangle) \xrightarrow{O} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle \otimes |1\rangle - |x\rangle \otimes |0\rangle) & \text{se } x \text{ è soluzione} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle \otimes |0\rangle - |x\rangle \otimes |1\rangle) & \text{se } x \text{ non è soluzione} \end{cases}$$

I due stati ottenuti differiscono solo per un segno meno che possiamo fattorizzare come una fase

$$|x\rangle \otimes |-\rangle \xrightarrow{O} (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes |-\rangle$$

Se usando $q = 0$, lo stato $|x\rangle|q\rangle$ viene modificato, usando $|q\rangle = |-\rangle$ acquista solo una fase $(-1)^{f(x)}$ mentre la struttura non viene cambiata. In quest'ultimo caso possiamo addirittura dimenticarci del qubit ancilla (visto che non viene modificato ed è uguale per tutti gli stati $|x\rangle$) e scrivere l'effetto solo sui qubit logici:

$$|x\rangle \xrightarrow{O} (-1)^{f(x)}|x\rangle$$

6.1.2 Algoritmo di Grover

L'algoritmo di Grover inizia con la costruzione dello stato quantistico sovrapposizione di tutti i possibili stati logici, può essere costruito partendo dallo stato di soli zeri $|00\dots 0\rangle$ con l'applicazione di n porte di Hadarmard:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle$$

Implementazione dell'operatore di Grover G

1. Applicare allo stato l'oracolo che cambia la fase allo stato soluzione:

$$|x\rangle \xrightarrow{O} (-1)^{f(x)}|x\rangle$$

2. Applicare n porte di Hadarmard
3. Applicare un cambio di fase a tutti gli stati tranne allo stato $|00\dots 0\rangle$:

$$|x\rangle \xrightarrow{O} (-1)^{\delta_{x_0}}|x\rangle$$

dove δ_{x_0} è il delta di Kronecker ovvero $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ e per $x \neq 0$, $|x\rangle \rightarrow -|x\rangle$

4. Applicare n porte di Hadarmard

L'algoritmo per la ricerca in un database si riduce alla sua applicazione per un numero $\sqrt{N} = 2^{\frac{n}{2}}$ (tldr: applica G per \sqrt{N} volte).

6.1.3 Stati "soluzione" e "non-soluzione"

Lo spazio logico può essere diviso in due sottospazi. Quello generato da $|x\rangle$ con x soluzione del nostro problema (S) e quelli che non sono soluzione del nostro problema (\bar{S}). Supponiamo che ci siano M stati soluzione e, di conseguenza, $N - M$ non-soluzione

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_{x \in \bar{S}} |x\rangle$$

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x \in S} |x\rangle$$

Con questa notazione lo stato iniziale $|\psi\rangle$ si scrive come

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{x \in S} |x\rangle + \sum_{x \in \bar{S}} |x\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sqrt{M}|\beta\rangle + \sqrt{N-M}|\alpha\rangle \right) \\ &= \sqrt{\frac{N-M}{N}}|\alpha\rangle + \sqrt{\frac{M}{N}}|\beta\rangle \end{aligned}$$

6.1.4 Operatore di Grover

Come detto l'oracolo cambia segno solo agli stati soluzione, quindi cambierà segno allo stato $|\beta\rangle$ lasciando $|\alpha\rangle$ invariato. Se lo facciamo agire su uno stato generico $a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle$ otteniamo

$$O(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a|\alpha\rangle - b|\beta\rangle$$

Nella notazione braket:

$$O = |\alpha\rangle\langle\alpha| - |\beta\rangle\langle\beta|$$

E in termini di matrici:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Per indicare l'operatore che cambia la fase a tutti tranne lo 0

$$U = 2|\bar{0}\rangle\langle\bar{0}| - I$$

Possiamo verificare che se $|x\rangle \neq |\bar{0}\rangle$

$$U|x\rangle = (2|\bar{0}\rangle\langle\bar{0}| - I)|x\rangle = -|x\rangle$$

e che

$$U|\bar{0}\rangle = (2|\bar{0}\rangle\langle\bar{0}| - I)|\bar{0}\rangle = |\bar{0}\rangle$$

A questo punto possiamo scrivere la parte rimanente dell'operatore di Grover come

$$H^{\otimes n} U H^{\otimes n} = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I$$

L'ultimo passaggio deriva dal fatto che $H^{\otimes n}|\bar{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle = |\psi\rangle$ e che $H^{\otimes n} I H^{\otimes n} = I$.
Ne consegue che l'operatore di Grover può essere scritto come

$$G = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I) O$$

6.1.5 Interpretazione geometrica

Lo stato $|\psi\rangle$ è normalizzato e può essere riscritto in termini di funzioni seno e coseno come

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\alpha\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\beta\rangle \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \sqrt{\frac{N-M}{N}} \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \sqrt{\frac{M}{N}} \end{aligned}$$

Abbiamo che $\langle\psi|\alpha\rangle = \cos\frac{\theta}{2}$ e $\langle\psi|\beta\rangle = \sin\frac{\theta}{2}$.

$$\begin{aligned} (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)|\alpha\rangle &= 2|\psi\rangle\langle\psi|\alpha\rangle - |\alpha\rangle \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}|\psi\rangle - |\alpha\rangle \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\beta\rangle\right) - |\alpha\rangle \\ &= \cos\theta|\alpha\rangle + \sin\theta|\beta\rangle \end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga abbiamo

$$\begin{aligned}
(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)|\beta\rangle &= 2|\psi\rangle\langle\psi|\beta\rangle - |\alpha\rangle \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2}|\psi\rangle - |\beta\rangle \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\beta\rangle\right) - |\beta\rangle \\
&= \sin\theta|\alpha\rangle - \cos\theta|\beta\rangle
\end{aligned}$$

Questo ci permette di scrivere l'operatore U in forma matriciale come

$$U = \begin{pmatrix} \langle\alpha|U|\alpha\rangle & \langle\alpha|U|\beta\rangle \\ \langle\beta|U|\alpha\rangle & \langle\beta|U|\beta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ne consegue che l'operatore di Grover nello spazio $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ e in forma matriciale si scrive come

$$G = UO = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Confermando l'osservazione che G ruota lo stato di θ .

6.1.6 Effetto dell'operatore di Grover

L'operatore di Grover nella rappresentazione è immediatamente associabile ad una rotazione nel piano definito dagli stati $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$.

Per capire meglio questo punto, supponiamo di applicarlo allo stato $|\phi\rangle = \cos\delta|\alpha\rangle + \sin\delta|\beta\rangle$

$$G|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta + \theta) \\ \sin(\delta + \theta) \end{pmatrix}$$

Se applichiamo k volte l'operatore di Grover, genereremo nello spazio $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ una rotazione di un angolo $k\theta$

$$G^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

Se lo stato iniziale è $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|\alpha\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|\beta\rangle$ e applichiamo G per k volte otteniamo

$$G^k|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2} + k\theta\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2} + k\theta\right) \end{pmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2} + k\theta\right)|\alpha\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2} + k\theta\right)|\beta\rangle$$

6.1.7 Performace dell'algoritmo di Grover

Per avere la certezza di misurare uno degli stati in $|\beta\rangle$ dobbiamo avere

$$\sin\left(\frac{\theta}{2} + k\theta\right) \approx 1$$

Che equivale a dire

$$\frac{\theta}{2} + k\theta \approx \frac{\pi}{2}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{2} + k\theta &\approx \frac{\pi}{2} \\
k\theta &\approx \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \\
k\theta &\approx \frac{1}{2}(\pi - \theta) \\
k &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\theta} - 1\right)
\end{aligned}$$

Che valore assume θ ? Sappiamo che $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{M}{N}}$ nei casi in cui ci sono poche soluzioni. Quindi $\frac{\theta}{2}$ sarà molto piccolo e per lo sviluppo della serie di Taylor avremo che:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\theta}{2} &\approx \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{M}{N}} \\ \theta &= 2\sqrt{\frac{M}{N}}\end{aligned}$$

Usando questa approssimazione possiamo scrivere

$$\begin{aligned}k &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\theta} - 1 \right) \\ k &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{\frac{M}{N}}} - 1 \right) \\ k &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{M}} - 1 \right) \\ k &\approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{M}}\end{aligned}$$

Capitolo 7

Introduzione ai codici di correzione degli errori per computer quantistici

7.1 Correzione degli errori nei computer classici

Se, ad esempio, immagazziniamo in un hardisk o mandiamo attraverso una rete una stringa di bit, è possibile che l'inevitabile rumore generi dei **bit flip** ovvero trasformi alcuni bit che inizialmente avevano valore 0 in bit con valore 1 e viceversa.

Uno dei metodi più semplici e allo stesso tempo più efficaci per ovviare a questi errori è quello di misurare tutti i bit e usare il protocollo di *voto di maggioranza*: se la maggioranza dei bit ha valore 0 assumiamo che il bit logico sia 0 e correggiamo l'errore trovato; analogamente, se la maggioranza dei bit ha valore 1 assumiamo che il bit logico sia 1.

Ad esempio il bit logico 0 può essere codificato come 000 e il bit logico 1 può essere codificato come 111

Da questo è chiaro che il numero di bit usati deve essere dispari.

7.2 Caso quantistico: i problemi

- Come nel caso classico, il bit flip corrisponde alla transizione $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ e viceversa.
- **Errori piccoli** in cui il sistema non ha una transizione completa ma transisce verso una sovrapposizione di stati; per esempio: $|0\rangle \rightarrow \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$
- La fase relativa fra gli stati può essere modificata per effetto del rumore; per esempio, $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|0\rangle + e^{i\phi}\beta|1\rangle$

7.3 Codici di correzione degli errori quantistici

Il più semplice codice di correzione degli errori quantistici sfrutta, come l'analogo classico, il voto di maggioranza.

Definiamo i qubit logici come stati composti da un numero dispari di qubit fisici:

$$\begin{aligned}|0_L\rangle &\equiv |000\rangle \\ |1_L\rangle &\equiv |111\rangle\end{aligned}$$

Lo stato quantistico generico sarà dunque scritto come $\alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$ e si può ottenere a partire dallo stato a singolo qubit con delle semplici porte **CNOT**:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |0\rangle \xrightarrow{C_1NOT_2} (\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle) \otimes |0\rangle \xrightarrow{C_1NOT_3} \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

Si noti che una misura diretta dello stato distruggerebbe la sovrapposizione e quindi parte dell'informazione. E' necessario quindi trovare degli osservabili che permettano di estrarre l'informazione desiderata senza perturbare lo stato del sistema. Un operatore di questo tipo è $Z_1 \otimes Z_2$; ovvero l'operatore che misura contemporaneamente il valore dell'operatore Z di Pauli del primo e del secondo qubit.

$$\begin{aligned} Z_i|0\rangle &= -|0\rangle \\ Z_i|1\rangle &= |1\rangle \end{aligned}$$

Quindi avremo:

$$\begin{aligned} Z_1 \otimes Z_2|00\rangle &= \begin{cases} Z_1|0\rangle = -|0\rangle \\ Z_2|0\rangle = -|0\rangle \end{cases} = |00\rangle, \lambda = 1 \\ Z_1 \otimes Z_2|01\rangle &= \begin{cases} Z_1|0\rangle = -|0\rangle \\ Z_2|1\rangle = |1\rangle \end{cases} = -|01\rangle, \lambda = -1 \\ Z_1 \otimes Z_2|10\rangle &= \begin{cases} Z_1|1\rangle = |1\rangle \\ Z_2|0\rangle = -|0\rangle \end{cases} = -|10\rangle, \lambda = -1 \\ Z_1 \otimes Z_2|11\rangle &= \begin{cases} Z_1|1\rangle = |1\rangle \\ Z_2|1\rangle = |1\rangle \end{cases} = |11\rangle, \lambda = 1 \end{aligned}$$

7.3.1 Errori bit flip

Lo stato del sistema, se va incontro ad un bit flip per il primo qubit, sarà:

$$|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle \xrightarrow{\text{errore}} \alpha|100\rangle + \beta|011\rangle = |\phi\rangle$$

Applicando l'operatore $Z_1 \otimes Z_2$ allo stato $|\phi\rangle$ abbiamo:

$$Z_1 \otimes Z_2 (\alpha|100\rangle + \beta|011\rangle) = (-\alpha|100\rangle - \beta|011\rangle) = -|\phi\rangle$$

Facendo lo stesso sullo stato senza errori $|\psi\rangle$ abbiamo:

$$Z_1 \otimes Z_2 (\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle) = (\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle) = |\psi\rangle$$

Concludiamo che entrambi gli stati sono autostati dell'operatore $Z_1 \otimes Z_2$ ma con autovalore (λ) diverso. Quindi, una misura dell'operatore $Z_1 \otimes Z_2$ non distruggerà la sovrapposizione di stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$. Però nel caso il sistema sia in $|\psi\rangle$ oppure in $|\phi\rangle$ la misura di $Z_1 \otimes Z_2$ permetterà di estrarre l'informazione desiderata. Se dalla misura otteniamo l'autovalore 1 deduciamo che non ci sono stati errori; se otteniamo -1 deduciamo che c'è stato un errore.

Per identificare anche la posizione in cui è avvenuto l'errore è necessario misurare un altro operatore complementare come $Z_1 \otimes Z_3$:

$$Z_1 \otimes Z_3 (\alpha|100\rangle + \beta|011\rangle) = (-\alpha|100\rangle - \beta|011\rangle) = -|\phi\rangle$$

Anche in questo caso otteniamo l'autovalore -1 . Una misura combinata di $Z_1 \otimes Z_2$ e $Z_1 \otimes Z_3$ darà quindi una coppia di risultati:

$$\begin{aligned} \{-1, -1\} &\rightarrow \text{Errore in posizione 1} \\ \{-1, 1\} &\rightarrow \text{Errore in posizione 2} \end{aligned}$$

Una volta identificato il qubit perturbato, potremmo intervenire applicando una porta di correzione; X_1 nel primo caso e X_2 nel secondo.

7.3.2 Errori "piccoli"

Un sistema quantistico può andare incontro a perturbazioni che non modificano completamente il valore del qubit ma generano sovrapposizioni indesiderate, ad esempio, $|0\rangle \rightarrow \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ dove, per semplicità, consideriamo γ e δ reali e, visto che la perturbazione è considerata piccola abbiamo che $|\gamma| \gg |\delta|$. Se il $|0\rangle$ va incontro alla trasformazione di sopra, dovremmo per forza avere che $|1\rangle \rightarrow \gamma|1\rangle - \delta|0\rangle$. Se questo tipo di errore avviene sul primo qubit si avrà una sovrapposizione di più stati:

$$|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle \xrightarrow{\text{errore}} \alpha\gamma|000\rangle + \alpha\delta|100\rangle + \beta\gamma|111\rangle - \beta\delta|011\rangle = |\phi\rangle$$

Usando le regole di sopra abbiamo che:

$$Z_1 \otimes Z_2 |\phi\rangle = \alpha\gamma|000\rangle - \alpha\delta|100\rangle + \beta\gamma^*|111\rangle + \beta\delta^*|011\rangle \neq |\phi\rangle$$

Ne consegue che $|\phi\rangle$ non è un autostato di $Z_1 \otimes Z_2$ e che quindi verrà perturbato dalla misura.

$$|\phi\rangle = \gamma(\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle) + \delta(\beta|011\rangle - \alpha|100\rangle) = \gamma|\psi\rangle + \delta|\phi'\rangle$$

Dalla teoria della misura sappiamo che la misura di $Z_1 \otimes Z_2$ darà 1 con probabilità γ^2 e il sistema crollerà sullo stato $|\psi\rangle$ oppure otterremo -1 con probabilità δ^2 e il sistema crollerà sullo stato $|\phi'\rangle$.

Data la condizione di errore "piccolo" $\gamma^2 \gg \delta^2$, la maggior parte delle volte otterremo 1 e il sistema dopo la misura si troverà nello stato $|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$. Se otteniamo -1 il sistema si troverà nello stato con errore $|\phi'\rangle$ segnalandoci la presenza dell'errore che può essere eliminato con l'applicazione di porte logiche correttive. E' importante evidenziare che la singola misura $Z_1 \otimes Z_2$ è sufficiente per sapere che c'è stato un errore ma non per individuarne la posizione, quindi per poter applicare le porte correttive è necessario misurare anche l'osservabile $Z_1 \otimes Z_3$.

Riassumendo, le misure degli osservabili $Z_1 \otimes Z_2$ e $Z_1 \otimes Z_3$ permettono di controllare se e dove è avvenuto un errore e correggerlo.

7.3.3 Errore sulla fase

Consideriamo gli errori in cui la fase relativa fra due stati sovrapposizione cambia di segno detto **phase flip**; questo può essere schematizzato come

$$\begin{aligned} |0\rangle &\xrightarrow{\text{phase error}} |0\rangle \\ |1\rangle &\xrightarrow{\text{phase error}} -|1\rangle \end{aligned}$$

Notiamo però che se invece di avere gli stati della base canonica $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ avessimo gli stati della base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ si avrebbe

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{phase error}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |-\rangle \\ |-\rangle &= \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{phase error}} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle \end{aligned}$$

Quindi, nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, il phase flip è equivalente ad un bit flip che scambia gli stati della base. Ne consegue che per identificare e correggere i phase flip è sufficiente implementare lo stesso schema dei bit flip nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Partiamo dallo stato $|\phi\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$, applichiamo tre porte di Hadamard ai tre qubit:

$$|\phi\rangle \xrightarrow{H^{\otimes 3}} \alpha|+++\rangle + \beta|---\rangle$$

Supponiamo che il primo qubit vada incontro ad un phase flip:

$$\alpha|+++ \rangle + \beta|--- \rangle \xrightarrow{\text{phase flip}} \alpha| - ++ \rangle + \beta| + -- \rangle$$

In questo caso, le misure di $X_1 \otimes X_2$ e $X_1 \otimes X_3$ daranno come risultati $\{-1, -1\}$ e permetteranno di individuare l'errore e di correggerlo applicando l'operatore Z_1 .

Lo schema che abbiamo usato per le operazioni con l'operatore Z di Pauli introdotte nella sezione 7.3, può essere usato anche per l'operatore X se teniamo in considerazione che $|0\rangle \equiv |-\rangle$ e $|1\rangle \equiv |+\rangle$

7.4 Protocollo completo

Il protocollo completo per la correzione degli errori fu proposto da Peter Shor nel 1995. In questo protocollo i 9 qubit sono divisi in 3 blocchi e i qubit logici $|0_L\rangle$ e $|1_L\rangle$ sono definiti con

$$\begin{aligned} |0_L\rangle &\equiv \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \\ |1_L\rangle &\equiv \frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

E' conveniente introdurre una notazione speciale per indicare i blocchi di tre qubit:

$$\begin{aligned} |\bar{0}\rangle &\equiv \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\bar{1}\rangle &\equiv \frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

In questo modo, i qubit logici si possono riscrivere come

$$\begin{aligned} |0_L\rangle &\equiv |\bar{0}\rangle|\bar{0}\rangle|\bar{0}\rangle \\ |1_L\rangle &\equiv |\bar{1}\rangle|\bar{1}\rangle|\bar{1}\rangle \end{aligned}$$

Lo stato logico generico del qubit sarà scritto come:

$$|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle = \alpha|\bar{0}\rangle|\bar{0}\rangle|\bar{0}\rangle + \beta|\bar{1}\rangle|\bar{1}\rangle|\bar{1}\rangle$$