UniGe | MaLGa

Ancora sul campionamento

Fondamenti Elaborazione dei Segnali e Immagini (FESI)

Francesca Odone francesca.odone@unige.it

Campionamento

Risposta all'impulso $f(t) * \delta(t) = f(t)$

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

$$\neq 0 \quad \text{se} \quad \tau = t$$

Se inserisco un ritardo nell'impulso

$$f(t) * \delta(t-T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-T-\tau)d\tau = f(t-T)$$

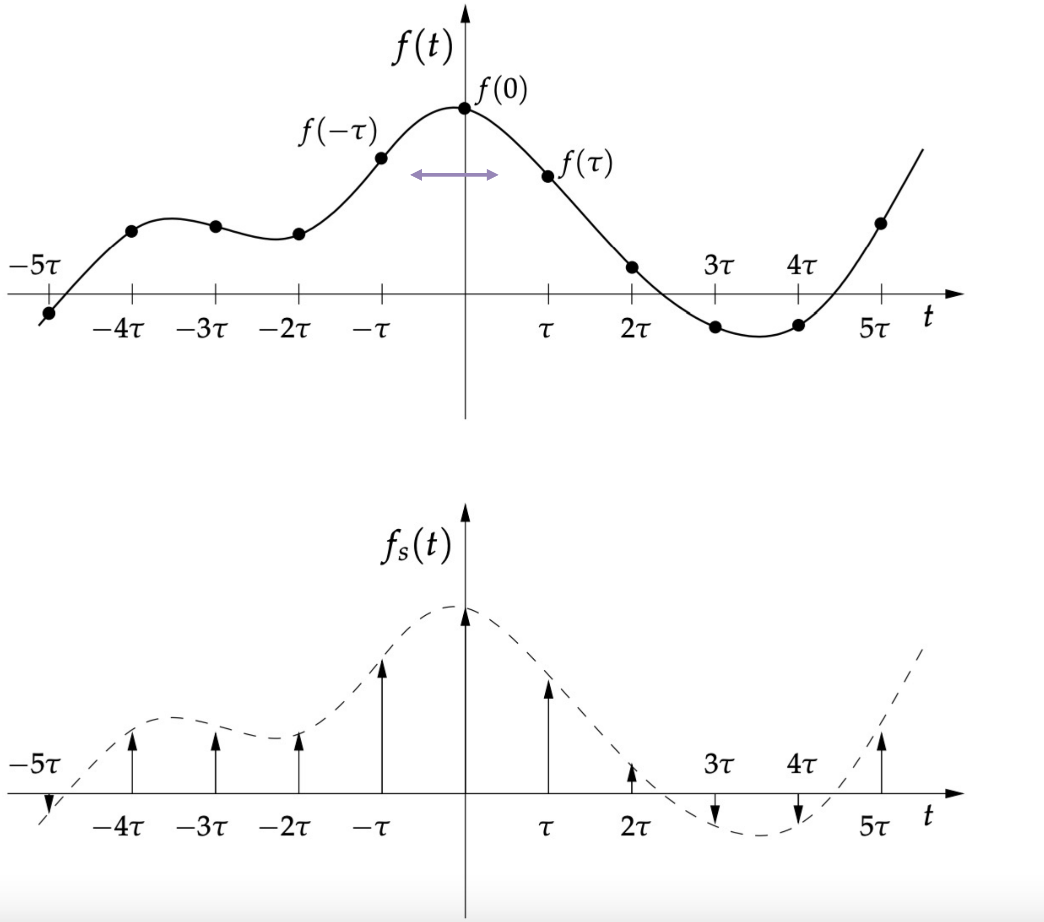
Campionamento

Treno di impulsi equispaziati

$$\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau).$$

Campionamento

$$f_s(t) = f(t)\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau)\delta(t - n\tau)$$



Campionamento:
FT della funzione campionata

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}(f_s(t)) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - \frac{n}{\tau})$$

E' una sequenza infinita e periodica di copie di F(w) con ampiezza del periodo $\frac{1}{\tau}$

NB: L'ampiezza del periodo nelle frequenze è duale all'ampiezza del periodo nel tempo

Campionamento: FT della funzione campionata

è una sequenza infinita e periodica di copie di F(w) con ampiezza $\frac{1}{\tau}$

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}(f_s(t)) = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - \frac{n}{\tau})$$

Infatti,

$$f_s(t) = f(t)\delta_\tau(t)$$

notiamo che il treno di impulsi è una funzione periodica e la sua serie di Fourier è $\frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\tau}t}$

Proprietà FT (shift nel tempo)

$$f_s(t) = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{f(t)e^{j\frac{2\pi n}{\tau}t}} \qquad \mathcal{F}\{f_s(t)\} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{F(\omega - \frac{n}{\tau})}$$

Proprietà FT (shift frequenze)

Teorema del campionamento

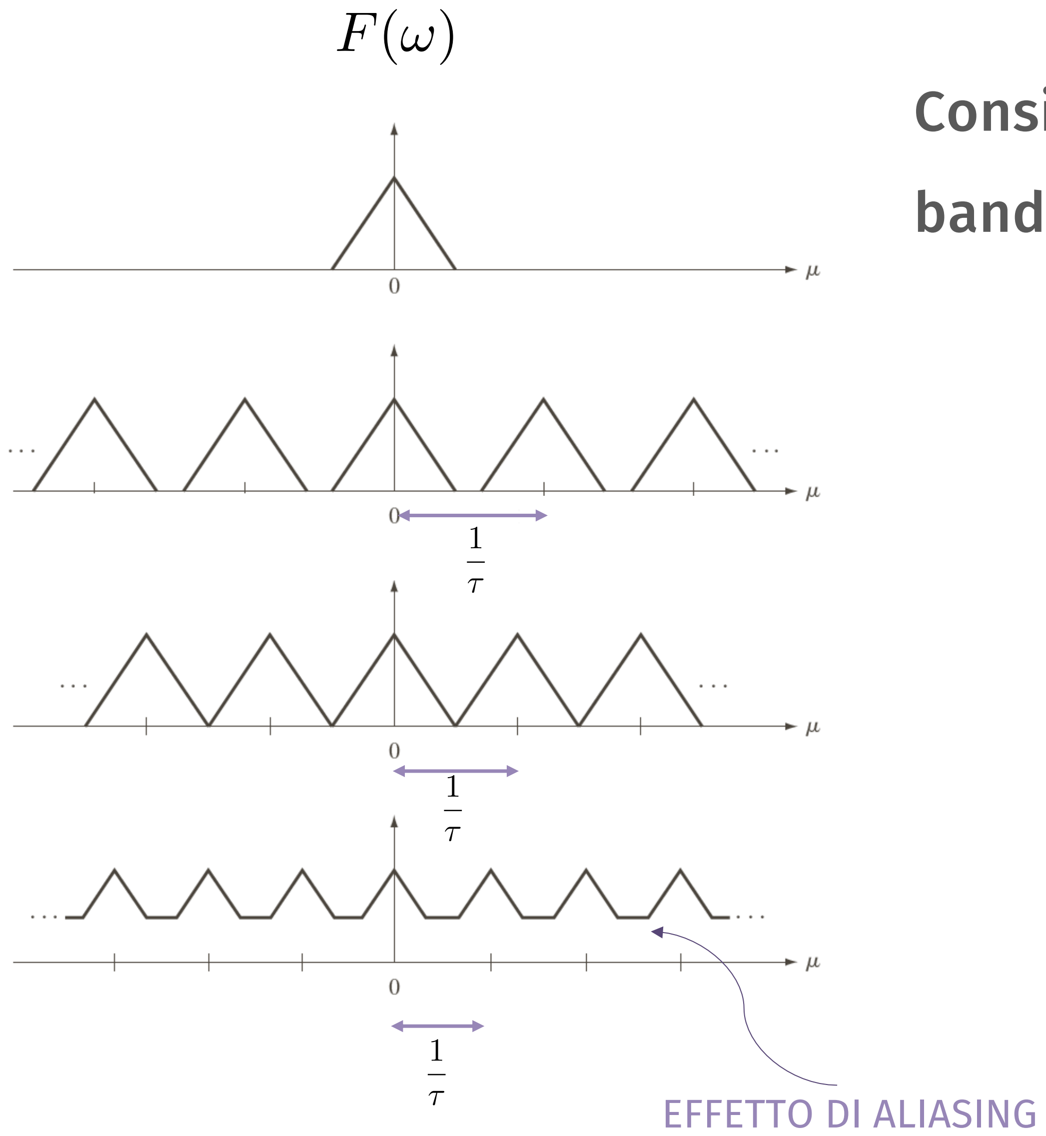
Stabiliamo le condizioni sotto cui una funzione continua possa essere ricostruita a partire da un insieme di campioni

Funzioni a banda limitata

Una funzione f(t) è a banda limitata se la sua trasformata di Fourier è nulla al di fuori dell'intervallo $[-\omega_{MAX}, \omega_{MAX}]$

$$F(\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > \omega_{MAX}$$

Teorema di campionamento



Consideriamo una funzione a banda limitata

$$\frac{1}{\tau} > 2\omega_{MAX}$$

$$\frac{1}{\tau} = 2\omega_{MAX}$$

$$\frac{1}{\tau} < 2\omega_{MAX}$$

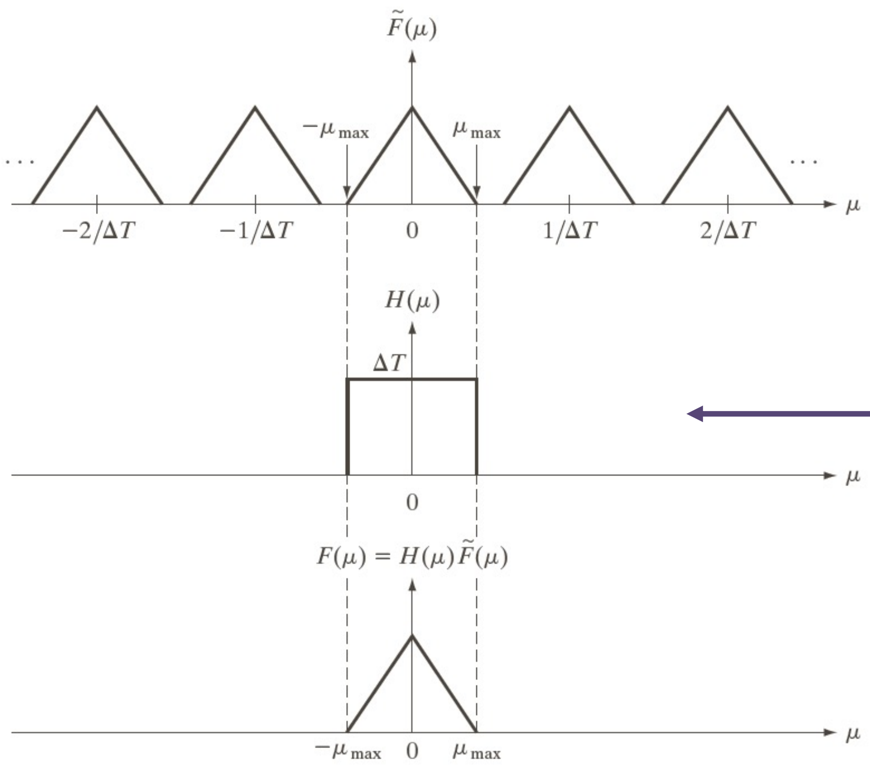
Teorema di campionamento

Consideriamo una funzione continua f(t) a banda limitata.

Una **ricostruzione perfetta** del segnale è garantita se la frequenza di campionamento è almeno il doppio della frequenza massima del segnale

$$\frac{1}{\tau} > 2\omega_{MAX}$$

Ricostruzione del segnale



FILTRO

UniGe

MaLGa