



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI  
DI GENOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

# Fondamenti dell'Elaborazione di Segnali e Immagini

*Lorenzo Vaccarecci*

Anno Accademico 2024/2025

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Segnali 1D e 2D . . . . .	3
1.1.1	Segnali 1D . . . . .	3
1.1.2	Segnali 2D . . . . .	3
1.2	Segnali a tempo continuo o discreto . . . . .	4
1.2.1	Segnali a tempo continuo . . . . .	4
1.2.2	Segnali a tempo discreto . . . . .	4
1.3	Segnali a valori continui o discreti . . . . .	5
1.3.1	Segnali a valori continui . . . . .	5
1.3.2	Segnali a valori discreti . . . . .	5
1.4	Analogico e digitale . . . . .	5
1.5	Campionamento . . . . .	6
1.5.1	Frequenza ideale di campionamento . . . . .	6
1.6	Quantizzazione . . . . .	7
1.7	Riepilogo digitalizzazione . . . . .	7
1.8	Ripasso: trasformazioni di segnali (1D) . . . . .	8
1.8.1	Traslazione . . . . .	8
1.8.2	Scalatura . . . . .	8
1.8.3	Segnali "notevoli" . . . . .	8
1.8.4	Treno di impulsi equispaziati . . . . .	8
<b>2</b>	<b>La trasformata di Fourier</b>	<b>9</b>
2.1	Introduzione . . . . .	9
2.2	Matematicamente . . . . .	9
2.2.1	Trasformata di Fourier Discreta . . . . .	10
2.3	Conclusione . . . . .	10
2.4	Approfondimento . . . . .	10
2.4.1	Proprietà . . . . .	10
2.4.2	FT di segnali a valori reali . . . . .	11
2.4.3	Coppie "famose" . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Filtraggio delle frequenze (segnali 1D)</b>	<b>12</b>
3.1	Introduzione . . . . .	12
3.2	Filtrare nel dominio delle frequenze . . . . .	12
3.2.1	Schema . . . . .	12
3.2.2	Filtro ideale . . . . .	12
3.2.3	Filtro Gaussiano . . . . .	13
3.2.4	Filtro Butterworth . . . . .	14
3.3	Rumore . . . . .	14
3.4	Filtraggio nel tempo . . . . .	14

3.4.1	Convoluzione . . . . .	14
3.4.2	Teorema di convoluzione . . . . .	14
3.4.3	Applicazioni tipiche . . . . .	15
3.4.4	Convoluzione discreta . . . . .	15
3.4.5	Filtri di enhancement e differenze finite . . . . .	15
3.4.6	Attenuazione del rumore . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Applicazione: Sound processing</b>	<b>16</b>
4.1	Come nasce un segnale audio . . . . .	16
4.2	Frequenza del suono . . . . .	16
4.3	Campionamento . . . . .	16
4.3.1	Teorema del campionamento . . . . .	16
4.4	Intensità del suono . . . . .	17
4.5	Short Time Fourier Transform (STFT) . . . . .	17
4.6	Spettrogramma . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Immagini digitali</b>	<b>18</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Segnali 1D e 2D

#### 1.1.1 Segnali 1D

Un segnale 1D descrive una grandezza fisica che varia nel tempo, e può essere visto come una funzione di una variabile indipendente:

$$g = f(t)$$

dove  $g$  è il valore della grandezza fisica (variabile **dipendente**),  $f$  è la funzione (continua o discreta) e  $t$  è la variabile indipendente.

Esempi di segnali 1D sono:

- Segnali audio: come ad esempio la musica o il parlato.
- Segnali ECG
- Segnali EEG
- Sensori inerziali
- ...

#### 1.1.2 Segnali 2D

Un segnale 2D descrive una grandezza fisica che varia nello spazio, e può essere visto come una funzione di due variabili indipendenti.

Esempi di segnali 2D sono:

- Immagini: utilizzeremo questo termine per indicare una foto a colori o a scala di grigi (ci concentreremo su queste).
- Immagini biomediche: come ad esempio le radiografie, le ecografie oppure quelle di una risonanza.
- Immagini termiche
- Immagini satellitari
- Immagini microscopiche
- ...

Ciò che hanno in comune tutte queste immagini è che hanno una matrice di pixel che rappresenta qualcosa, nel nostro caso ogni pixel rappresenta l'intensità luminosa nella posizione  $(r, c)$  della matrice.

## 1.2 Segnali a tempo continuo o discreto

$$g = f(t)$$

### 1.2.1 Segnali a tempo continuo

Nei segnali a tempo continuo  $t$  assume valori reali

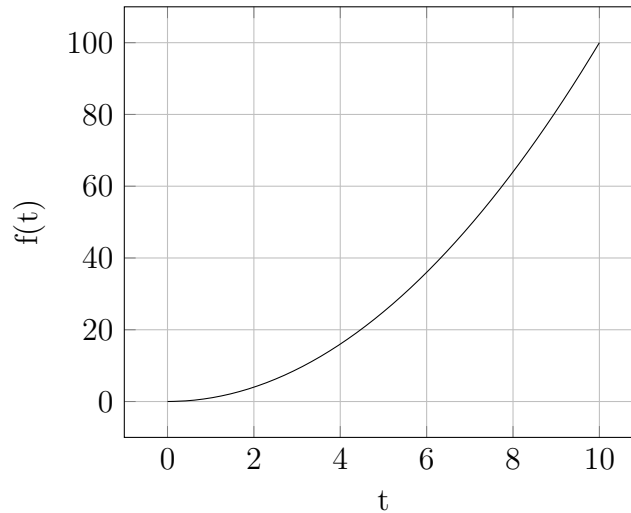


Figura 1.1: Posso conoscere il valore del segnale in ogni istante di tempo

### 1.2.2 Segnali a tempo discreto

Nei segnali a tempo discreto  $t$  assume valori in un sottoinsieme discreto dei numeri reali, come risultato di un'operazione chiamata **campionamento**.

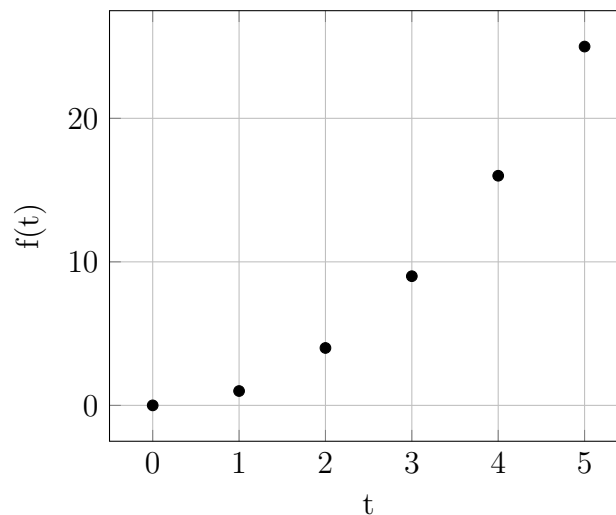


Figura 1.2: Posso conoscere il valore del segnale in certi istanti di tempo

## 1.3 Segnali a valori continui o discreti

### 1.3.1 Segnali a valori continui

Nei segnali a valori continui  $g$  assume valori reali.

### 1.3.2 Segnali a valori discreti

Nei segnali a valori discreti  $g$  assume valori in un sottoinsieme discreto dei numeri reali, come risultato di un'operazione chiamata **quantizzazione**.

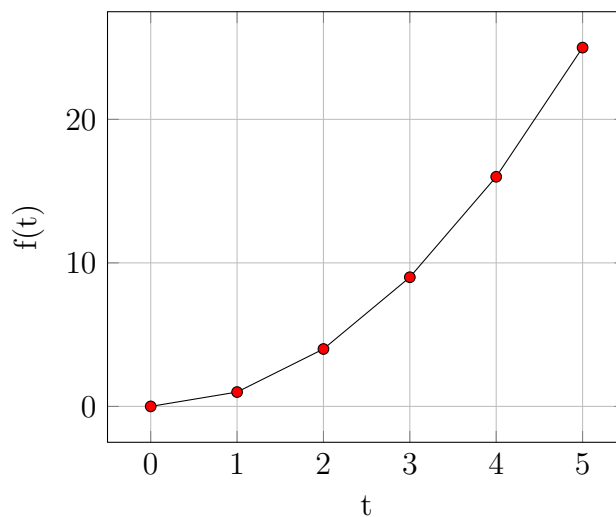


Figura 1.3: In rosso i valori **discreti** di  $g$

## 1.4 Analogico e digitale

- **Segnali analogici:** sono continui sia nel tempo che nei valori.
- **Segnali digitali:** sono discreti sia nel tempo che nei valori.

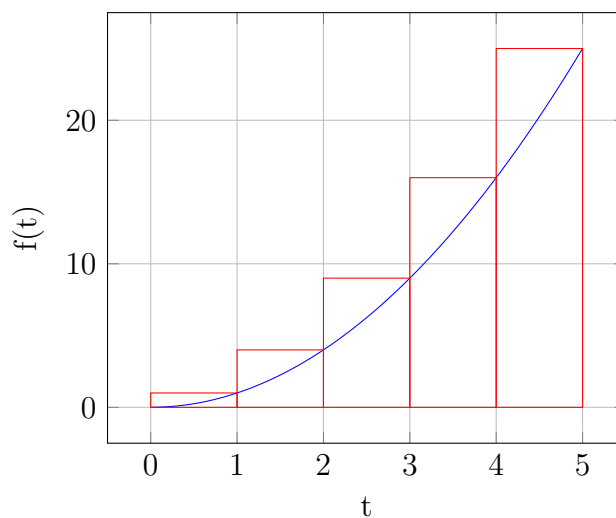


Figura 1.4: Segnale analogico in blu e segnale digitale in rosso

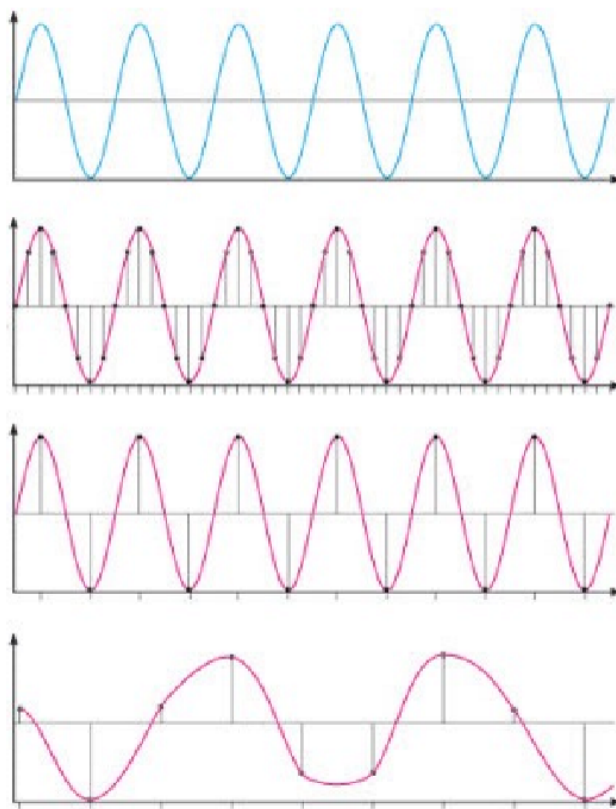
## 1.5 Campionamento

$$v_s = \frac{1}{\tau}$$

Dove  $v_s$  è la frequenza di campionamento e  $\tau$  è l'ampiezza dell'intervallo di campionamento. Ovviamente se  $\tau$  si avvicina a 0 allora il grafico risultante  $f(n\tau)$  sarà più preciso (e vicino a quello continuo) ma userà più risorse per memorizzare i dati.

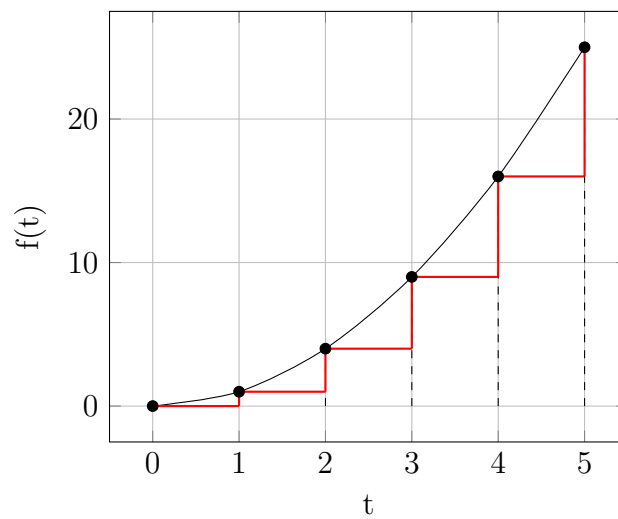
### 1.5.1 Frequenza ideale di campionamento

Bisogna stare attenti a non campionare a frequenze troppo basse, altrimenti si incorre nel fenomeno chiamato **punto di rottura** ossia il grafico risultante apparirà diverso da quello originale.



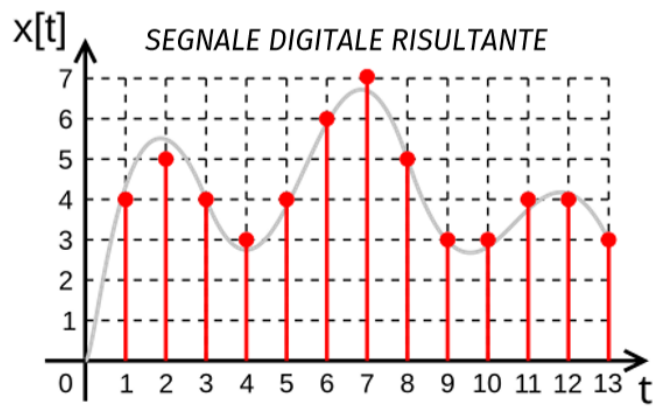
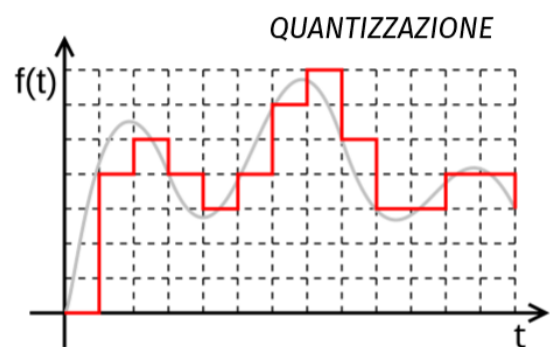
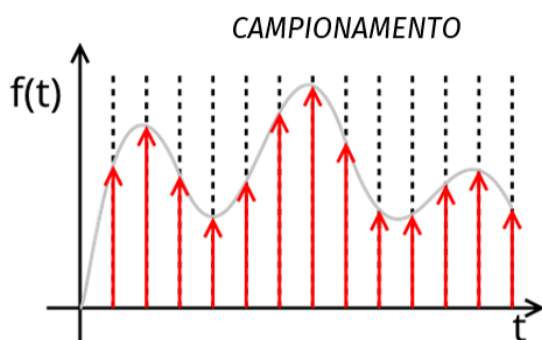
Come possiamo vedere dalla figura l'ultimo grafico risulta essere diverso da quello azzurro (originale), questo perché la frequenza di campionamento non è sufficientemente alta in questo caso si è verificato un punto di rottura.

## 1.6 Quantizzazione



Partendo da una funzione  $f(n\tau)$  quantizziamo i valori associando ad ogni valore  $x$  il valore numerico  $xk$  che è più vicino ad  $x$ .

## 1.7 Riepilogo digitalizzazione





## 1.8 Ripasso: trasformazioni di segnali (1D)

### 1.8.1 Traslazione

$$f(t - t_0)$$

### 1.8.2 Scalatura

$$f(\alpha t)$$

- $\alpha > 1$  : compressione
- $0 < \alpha < 1$  : rilassamento

### 1.8.3 Segnali "notevoli"

- Segnale rettangolare:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Segnale gradino:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Segnale impulsivo (o delta di Dirac):

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

### 1.8.4 Treno di impulsi equispaziati

$$\delta_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau)$$

#### Campionamento

Moltiplichiamo il segnale  $f(t)$  per il treno di impulsi equispaziati e otteniamo:

$$f_s(t) = f(t) \cdot \delta_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) \delta(t - n\tau)$$

# Capitolo 2

## La trasformata di Fourier

### 2.1 Introduzione

Le funzioni continue e periodiche possono essere rappresentate come somme (pesate) di seni e coseni e grazie alla serie di Fourier possiamo ottenere una rappresentazione alternativa del segnale periodico e uno strumento utile per approssimarlo (con compressione e riduzione del rumore).

**Perchè Fourier?** Per capire meglio il segnale.

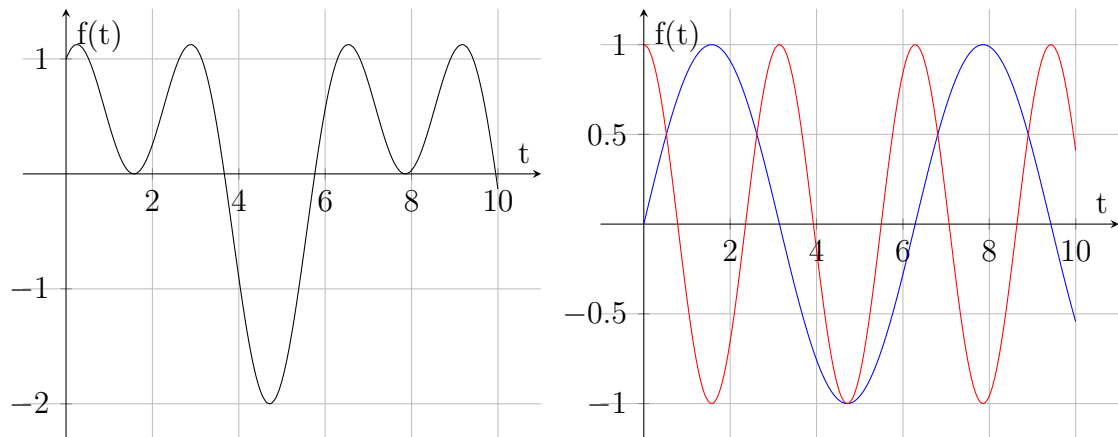


Figura 2.1: A sinistra il segnale originale, a destra la sua rappresentazione come somma di una sinusoide e una cosinusoide

Una funzione continua e periodica può essere descritta attraverso una serie di sinusoidi e possiamo considerare una rappresentazione alternativa del segnale l'insieme dei coefficienti (pesi) dei sinusoidi.

**Immagine qui**

### 2.2 Matematicamente

Consideriamo una funzione  $f(t)$  continua e periodica di periodo  $\tau$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{2\pi kt}{\tau} \right) + b_k \sin \left( \frac{2\pi kt}{\tau} \right) \right)$$

Dove  $a$  e  $b$  sono i coefficienti.

Riscriviamo applicando la formula di Eulero  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$  dove  $j = \sqrt{-1}$  immaginario:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j \frac{2\pi k t}{\tau}}$$

$$c_k = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) e^{-j \frac{2\pi k t}{\tau}} dt$$

### 2.2.1 Trasformata di Fourier Discreta

**N.B.:**  $f(t)$  funzione continua,  $f[n]$  funzione discreta.

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j \frac{2\pi k n}{N}}$$

Dove  $F[x] \equiv c_k$ . La sommatoria è finita perchè nel caso di funzione discreta non mi occorrono infiniti sinusoidi per ricostruire tutti i dettagli.

Data una funzione discreta e finita  $f[n]$  con  $N$  campioni, la sua **DFT** è

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}$$

## 2.3 Conclusione

Nonostante la definizione di DFT appena fornita sia calcolabile ( $O(n^2)$ ), esistono algoritmi per calcolare la DFT in modo efficiente ( $O(n \log_2 n)$ ), menzioniamo la Fast Fourier Transform (FFT).

## 2.4 Approfondimento

Trasformata di Fourier di una funzione  $f(t)$ :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\omega t} dt$$

E l'inversa:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

### 2.4.1 Proprietà

#### Linearità

Se  $h(t) = af(t) + bg(t)$  con  $a, b \in \mathbb{C}$  allora:

$$H(\omega) = aF(\omega) + bG(\omega)$$

#### Traslazione nel tempo

Se  $h(t) = f(t - t_0)$  allora:

$$H(\omega) = e^{-i2\pi t_0 \omega} F(\omega)$$

## Modulazione - Shift in frequenza

Se  $h(t) = e^{i2\pi\omega_0 t} f(t)$  allora:

$$H(\omega) = F(\omega - \omega_0)$$

### 2.4.2 FT di segnali a valori reali

La FT di un segnale a valori reali ha una simmetria speciale:

- La parte reale è simmetrica pari ( $f(x) = f(-x)$ , rispetto all'asse  $y$ )
- La parte immaginaria è simmetrica dispari ( $f(x) = -f(-x)$ , rispetto all'origine)

### 2.4.3 Coppie "famose"

#### Rettangolo

Nell'intervallo  $W$ :

$$F(\omega) = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} A e^{-2\pi j \omega t} dt = \dots = AW \frac{\sin(\pi \omega W)}{\pi \omega W}$$

Funzione SINC.

#### Impulso

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2\pi j \omega t} dt = 1$$

Perchè  $\delta(t) \neq 0$  se e solo se  $t = 0$ .

#### Impulso centrato in $t_0$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-2\pi j \omega t} dt = \cos(-2\pi j \omega t_0) - j \sin(-2\pi j \omega t_0) = e^{-2\pi j \omega t_0}$$

# Capitolo 3

## Filtraggio delle frequenze (segnali 1D)

### 3.1 Introduzione

Un filtro è una funzione che lascia passare alcune componenti del segnale e ne elimina altre. Nel dominio delle frequenze possiamo parlare di:

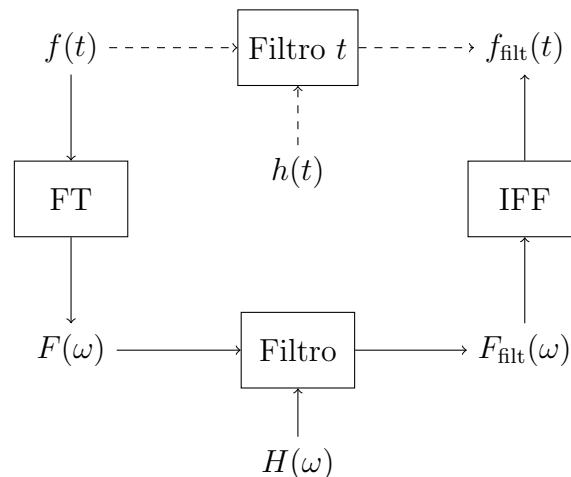
- **Filtri passa basso:** lasciano passare le basse frequenze eliminando le alte.
- **Filtri passa alto:** lasciano passare le alte frequenze eliminando le basse.
- **Filtri passa banda:** lasciano passare le frequenze comprese tra due valori.

### 3.2 Filtrare nel dominio delle frequenze

Filtrare un segnale corrisponde a moltiplicare un filtro  $H$  con la Trasformata di Fourier del segnale  $f$

$$F_{\text{filt}}(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

#### 3.2.1 Schema



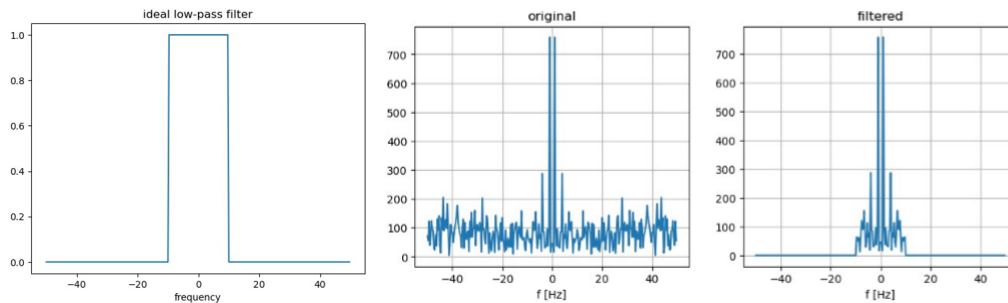
#### 3.2.2 Filtro ideale

Un sistema che annulla "perfettamente" le armoniche in determinati intervalli di frequenza si chiama filtro ideale.

## Esempio filtro passa basso

$$H(\omega) = \begin{cases} A & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\omega_c$  rappresenta a quale frequenza io voglio tagliare.



Il primo grafico è  $H(\omega)$ , il secondo è  $F(\omega)$  e il terzo è  $F_{\text{filt}}(\omega)$ .

### 3.2.3 Filtro Gaussiano

Nel tempo:

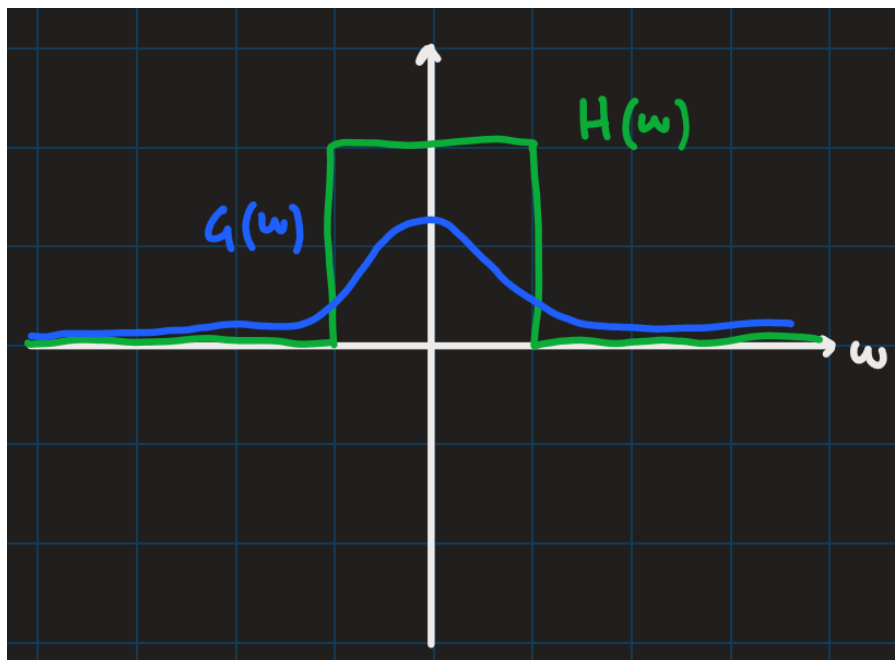
$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Nelle frequenze:

$$G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma_f^2}}$$
$$\sigma_f = \frac{1}{2\pi\sigma}$$

Non produce un taglio "netto" delle frequenze indesiderate, più  $\sigma$  è grande più il taglia.

**Ricordo:**  $\sum_t g(t) = 1$

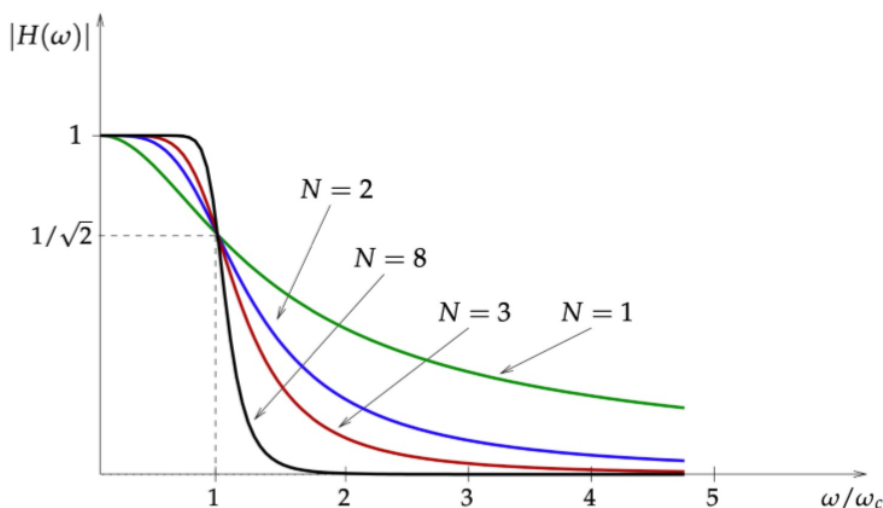


### 3.2.4 Filtro Butterworth

E' un filtro "liscio" ma con un cut-off più deciso

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|B_N(i\frac{\omega}{\omega_c})|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

Più l'ordine  $N$  è alto, più il cut-off  $\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$  è deciso.



## 3.3 Rumore

La riduzione del rumore avviene tramite filtraggio, di solito passa-alto.

## 3.4 Filtraggio nel tempo

### 3.4.1 Convoluzione

Consideriamo due funzioni continue  $f(t)$  e  $g(t)$ , la loro convoluzione è definita come:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Dove la funzione  $f$  è il filtro e  $t$  è il tempo desiderato.

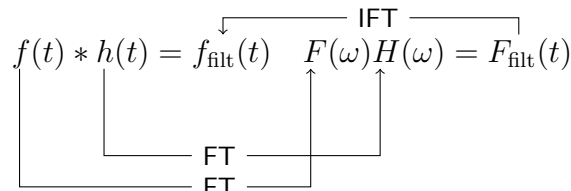
La convoluzione è commutativa:  $f * g = g * f$ .

### 3.4.2 Teorema di convoluzione

$$f(t) * h(t) \iff F(\omega)H(\omega)$$

$$f(t)h(t) \iff F(\omega) * H(\omega)$$

In altre parole:



### 3.4.3 Applicazioni tipiche

- **Ridurre il rumore** (filtri passa basso, nel tempo li chiamiamo filtri di smoothing)
- **Mettere in evidenza punti di cambiamento "rapido" del segnale** (filtri passa alto, nel tempo li chiamiamo filtri di enhancement)

### 3.4.4 Convoluzione discreta

Con  $N$  punti nell'intervallo  $[0, T] \rightarrow g[n]$ , consideriamo un filtro  $f[n]$

$$(f * g)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]g[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} f[n-k]g[k]$$

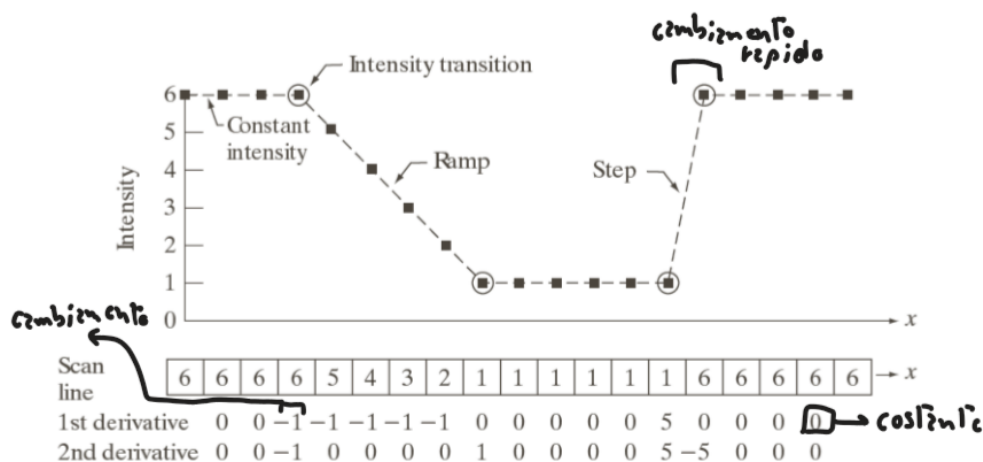
Una pratica comune nel filtraggio digitale è quella di realizzare filtri di ampiezza finita  $W$  (quello che ci interessa studiare) da utilizzare come maschere nell'operazione di filtraggio.

### 3.4.5 Filtri di enhancement e differenze finite

In matematica discreta le differenze finite sono definite come

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Solitamente  $h = 1$ .



### 3.4.6 Attenuazione del rumore

Si può attenuare il rumore in un segnale usando un filtro passa basso e successivamente filtrare il segnale con un filtro passa alto per mettere in evidenza i punti di cambiamento. Esistono filtri che sono in grado di svolgere entrambi i compiti, per esempio la derivata della Gaussiana (che è una convoluzione tra Gaussiana e filtro passa alto). Il filtro mediano, in particolare, è utile a curare rumore impulsivo che si riscontra quando il segnale presenta valori errati e scorrelati dagli elementi vicini.



# Capitolo 4

## Applicazione: Sound processing

### 4.1 Come nasce un segnale audio

- Il trasduttore elettroacustico (es. microfono) è in grado di tradurre le vibrazioni del suono in un segnale elettrico
- Il convertitore Analogico-Digitale (ADC) lo trasforma in un segnale digitale applicando campionamento e quantizzazione
- Per l'ascolto è necessario seguire il procedimento opposto
- Alcuni segnali nascono direttamente da un dispositivo elettronico e quindi non necessitano il trasduttore iniziale

### 4.2 Frequenza del suono

L'unità di misura è l'Hertz (Hz) ed è il numero di vibrazioni al secondo.

L'altezza del suono dipende in gran parte dalle frequenze:

- frequenze alte  $\rightarrow$  suono acuto
- frequenze basse  $\rightarrow$  suono grave

Per essere percepite come suono, le vibrazioni devono cadere all'interno di un intervallo compreso tra 20Hz e 20KHz, sopra i 20KHz sono ultrasuoni, sotto i 20Hz infrasuoni.

La gamma di suoni coperta dalla musica è molto più limitata (do grave 65 Hz, do acuto  $\sim$ 8KHz)

### 4.3 Campionamento

#### 4.3.1 Teorema del campionamento

Per ricostruire il segnale analogico occorre una frequenza di campionamento almeno doppia rispetto alla frequenza massima:

$$\frac{1}{T} > 2\omega_{\max}$$

E per ottenere una ricostruzione "ragionevole" del segnale audio occorre una frequenza di campionamento almeno doppia rispetto alla frequenza massima udibile  $\omega_{\max} \geq 20\text{KHz}$

## 4.4 Intensità del suono

L'intensità del suono è legata all'ampiezza della vibrazione e si misura in decibel (DB), ha un range di "accettabilità" compreso tra:

- Soglia di udibilità
- Soglia del dolore (130 DB)

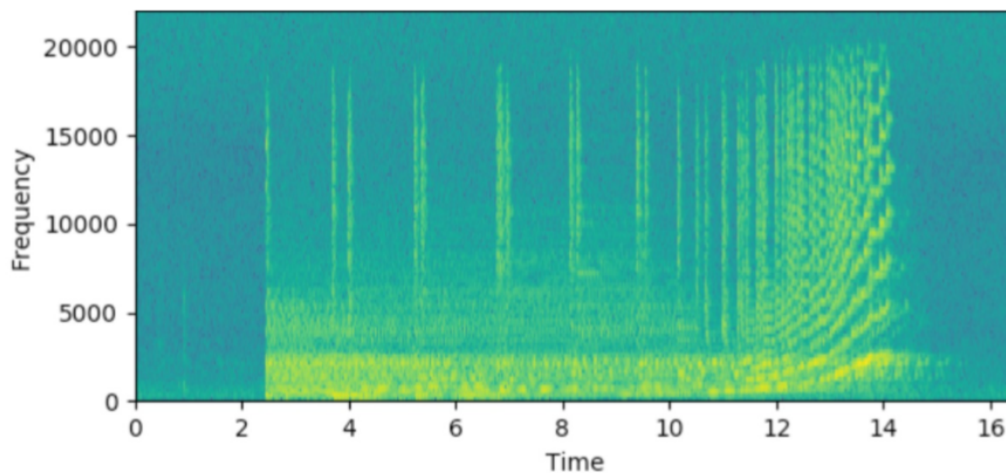
## 4.5 Short Time Fourier Transform (STFT)

Un limite della trasformata di Fourier è che descrive il contenuto "globale" del segnale in termini di frequenza, ma non ci permette di localizzare un fenomeno all'interno del segnale (in altre parole: perdo l'ordine nel tempo in cui vengono eseguite le cose).

- Invece di considerare l'intero segnale, consideriamo porzioni del segnale
- I risultati ottenuti dipendono dalla dimensione della finestra
- Dipendono anche dalla forma (tagli bruschi introducono artefatti)
- La STFT può essere invertita

## 4.6 Spettrogramma

E' una rappresentazione bidimensionale del modulo della STFT



## Capitolo 5

### Immagini digitali