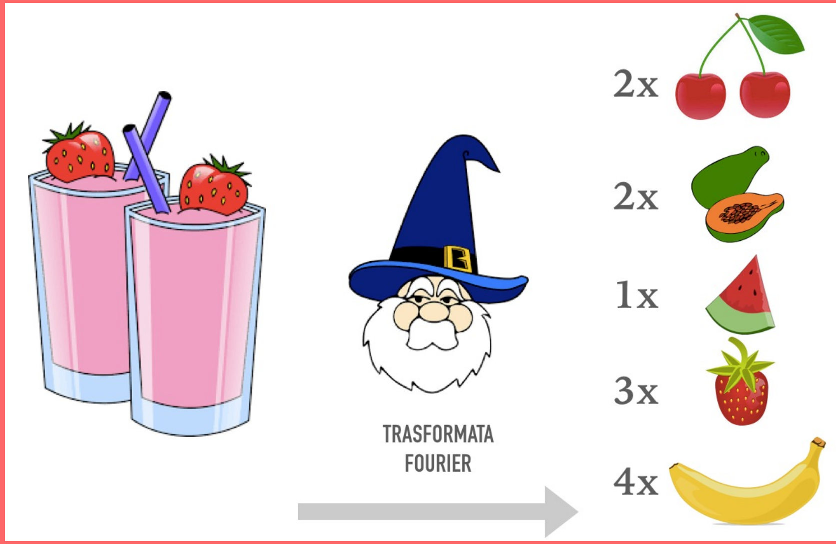
UniGe | MaLGa



Rappresentazioni dei segnali nel dominio delle frequenze (più nel dettaglio)

Fondamenti Elaborazione dei Segnali e Immagini (FESI)

Francesca Odone francesca.odone@unige.it

Introduzione

- Cerchiamo rappresentazioni dei segnali che ci permettano di **mettere in evidenza proprietà diverse** dei segnali stessi
- A questo scopo introduciamo la Trasformata di Fourier, grazie alla quale **possiamo lavorare su due domini diversi ma collegati** e **passare da uno all'altro** (tramite la trasformata e la sua inversa)

- Quali segnali si prestano a questa rappresentazione?

Fourier

Una **funzione continua e periodica** può essere descritta attraverso una serie di sinusoidi (**Serie di Fourier**)

Una **funzione discreta e finita**, dopo opportuna periodicizzazione, può essere rappresentata dalla **Discrete Fourier Transform** (DFT)

SEGNALE
PERIODICO

Fourier

POSSIAMO CONSIDERARE
UNA RAPPRESENTAZIONE
ALTERNATIVA DEL SEGNALE
L'INSIEME DEI COEFFICIENTI (PESI) DEI
SINUSOIDI
A RAPPRESENTARE IL SEGNALE

Fourier Transform

Le **funzioni non periodiche**, sotto alcune ipotesi, possono essere rappresentate in modo analogo (**Trasformata di Fourier**)

Fourier

Notiamo che i processi di rappresentazione nel dominio delle frequenze sono invertibili

$$
\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[rr, bend left, "\textit{trasformata}"] & & F(\omega) \arrow[ll, bend left, "\textit{Trasformata inversa}"]
\end{tikzcd}
$$

Tempo (secondi)

Frequenza (cicli / secondo o Hz)

(notate il cambio di variabile indipendente)

Questo ci permette di lavorare in un dominio alternativo (dominio delle frequenze o “dominio di Fourier”)

Trasformata di Fourier

Consideriamo una funzione continua f(t)

In molti casi pratici f(t) è a valori reali, ma F è *solitamente* complessa

Trasformata di Fourier di f(t):

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\omega t} dt = F(\omega)$$

Inversa:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

Alcune proprietà important della FT

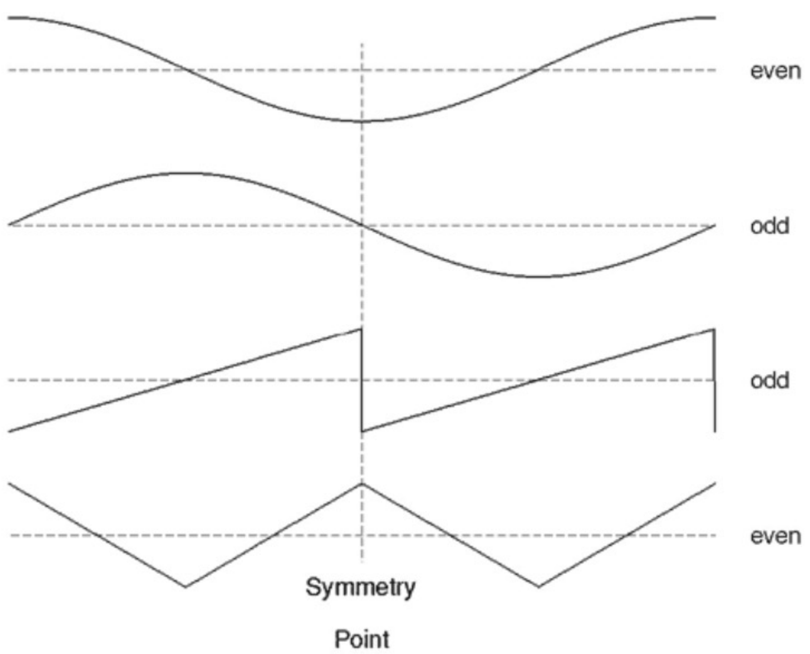
- Linearity
  For any complex numbers a and b, if $h(t) = af(t) + bg(t)$, then
  $$\hat{h}(\nu) = a\hat{f}(\nu) + b\hat{g}(\nu)$$
- Traslation - Time-shift
  For any real number t_0, if $h(t) = f(t - t_0)$
  $$\hat{h}(\nu) = e^{-i2\pi t_0 \nu}\hat{f}(\nu)$$
- Modulation - Frequency - shift
  For any real number ν_0, if $h(t) = e^{-i2\pi\nu_0 t}f(t)$
  $$\hat{h}(\nu) = \hat{f}(\nu - \nu_0)$$

Possono essere derivate dalla definizione di FT

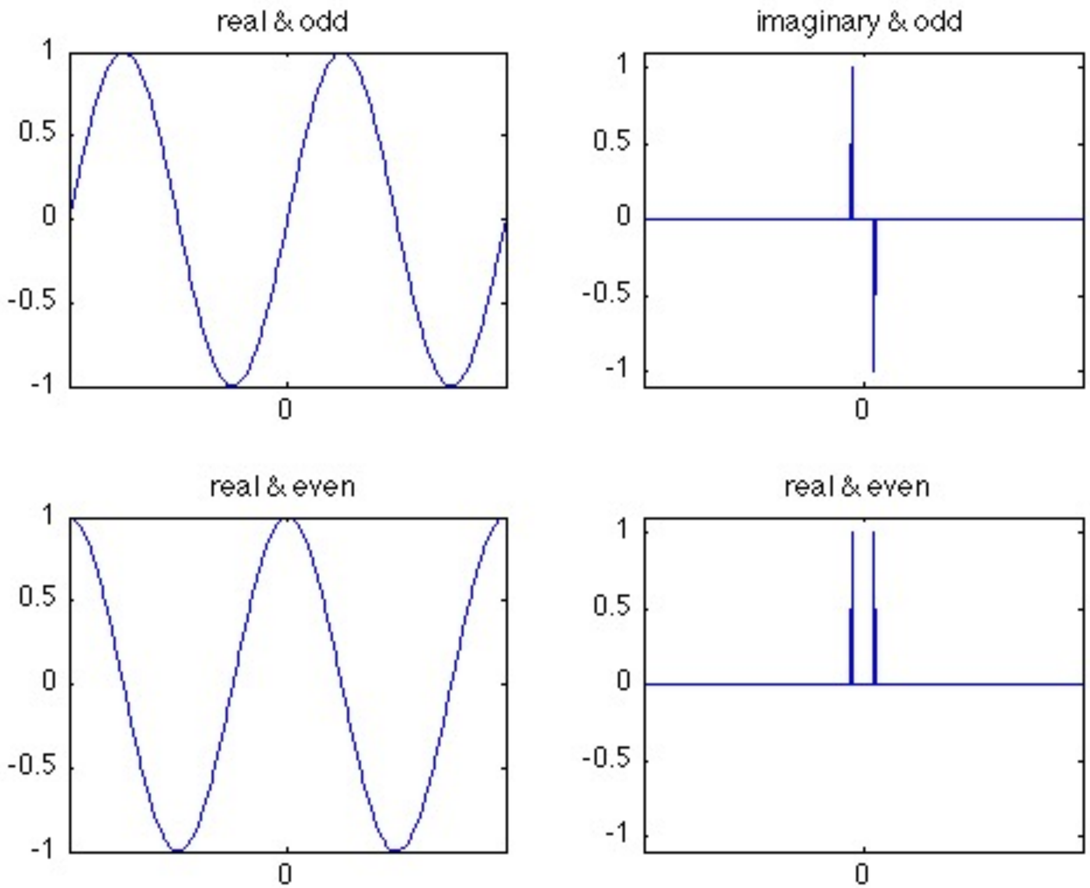
FT di segnali a valori reali

La FT di un segnale a valori reali ha una simmetria speciale:
– La parte reale è simmetrica pari
– La parte immaginaria è simmetrica dispari

Nota: la maggior parte dei segnali provenienti dal "mondo" sono reali



Segnali reali pari e dispari



Coppie "famose"

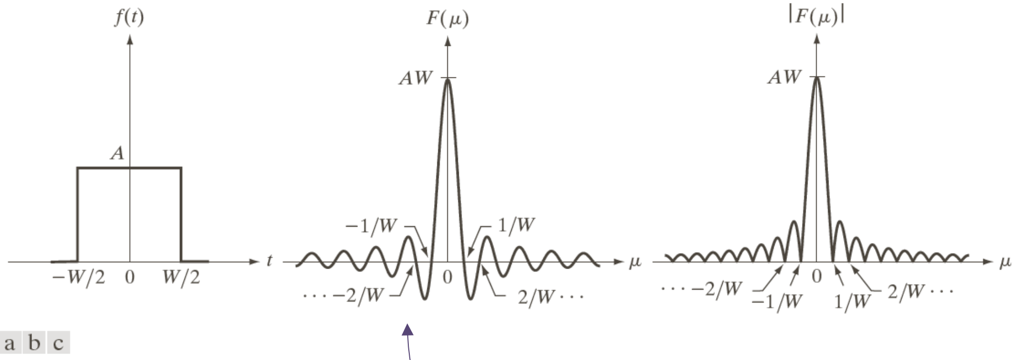


FIGURE 4.4 (a) A simple function; (b) its Fourier transform; and (c) the spectrum. All functions extend to infinity in both directions.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi j\omega t}dt = \int_{-W/2}^{W/2} Ae^{-2\pi j\omega t}dt =$$

$$\frac{-A}{j2\pi\omega}[e^{-\pi j\omega W} - e^{\pi j\omega W}] =$$

$$AW\frac{sin(\pi\omega W)}{\pi\omega W}$$

Funzione SINC

Derivazione analitica

Coppie “famose”

FT di un impulso

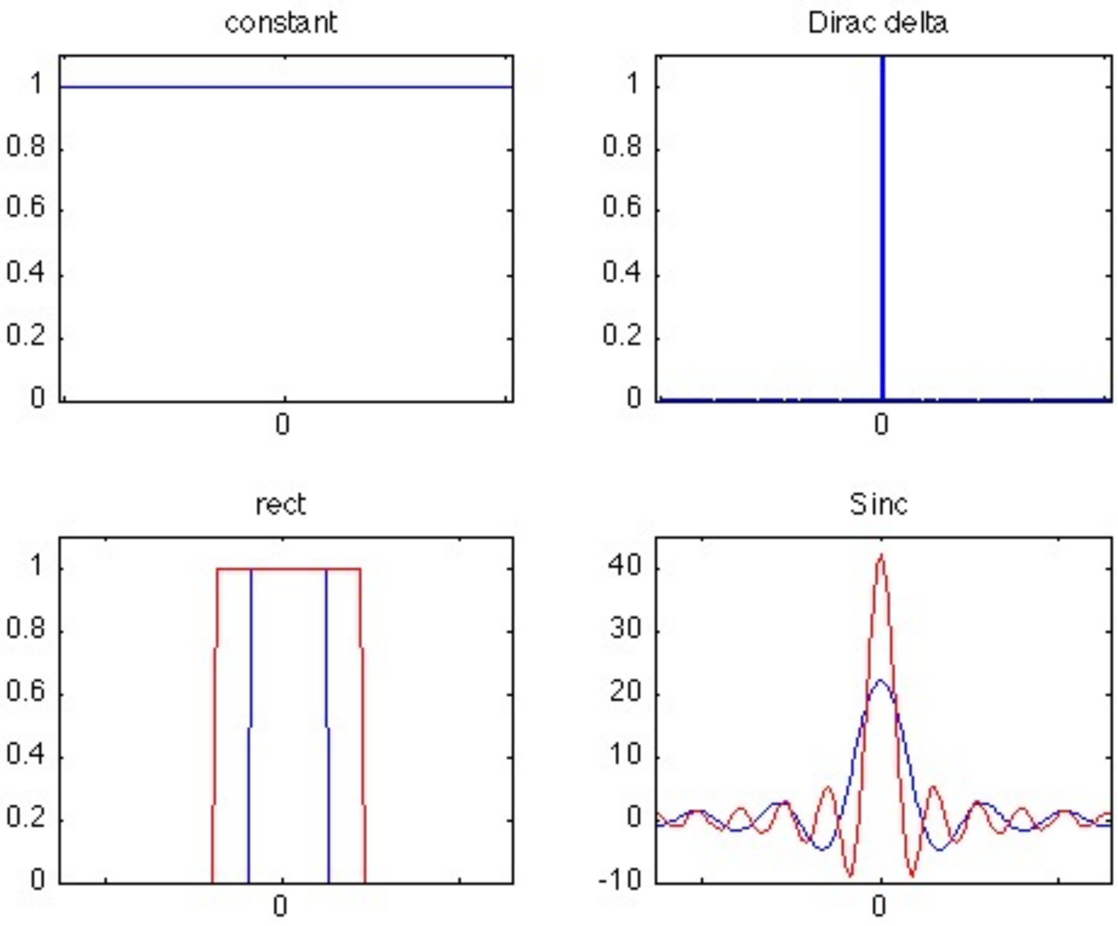
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-2\pi j\omega t} dt = e^{-2\pi j\omega 0} = 1$$

FT di un impulso centrato in t_0

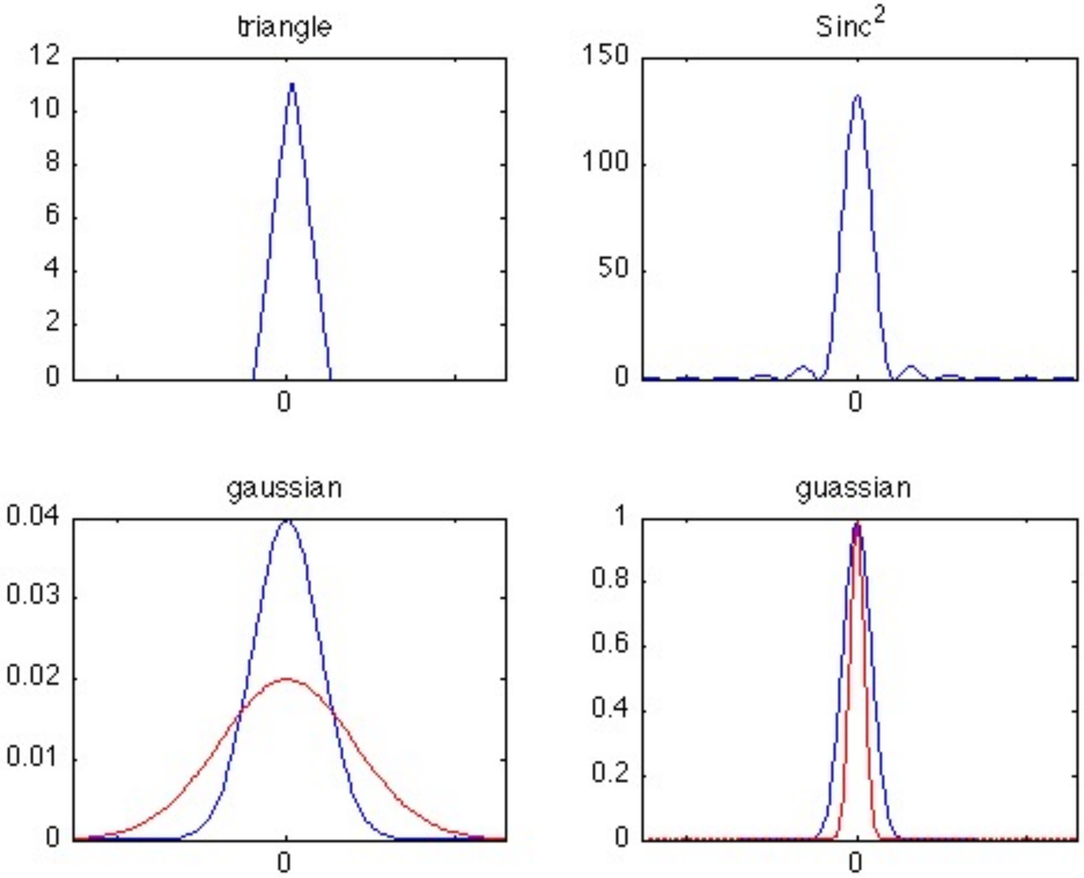
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-2\pi j\omega t} dt = e^{-2\pi j\omega t_0} = cos(-2\pi j\omega t_0) - j sin(-2\pi j\omega t_0)$$

Derivazione analitica

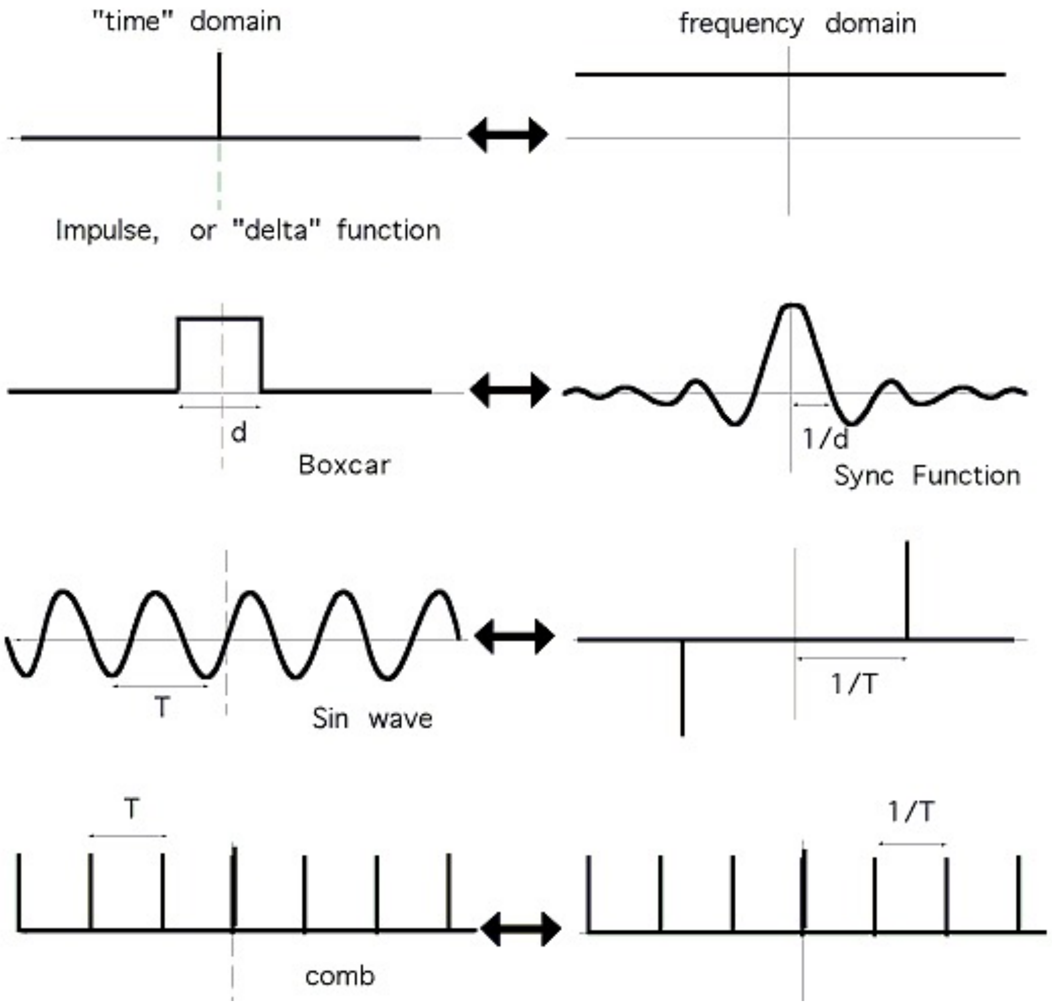
Coppie “famose”



Coppie famose



Ampiezze nel tempo e nelle frequenze



DFT e shifting: osservazioni operative

Una proprietà importante: la DFT di un segnale shiftato di p è

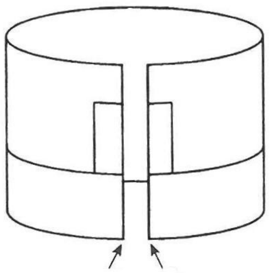
$$F_p[k] = e^{-i\frac{2\pi}{N}pk}F[k]$$

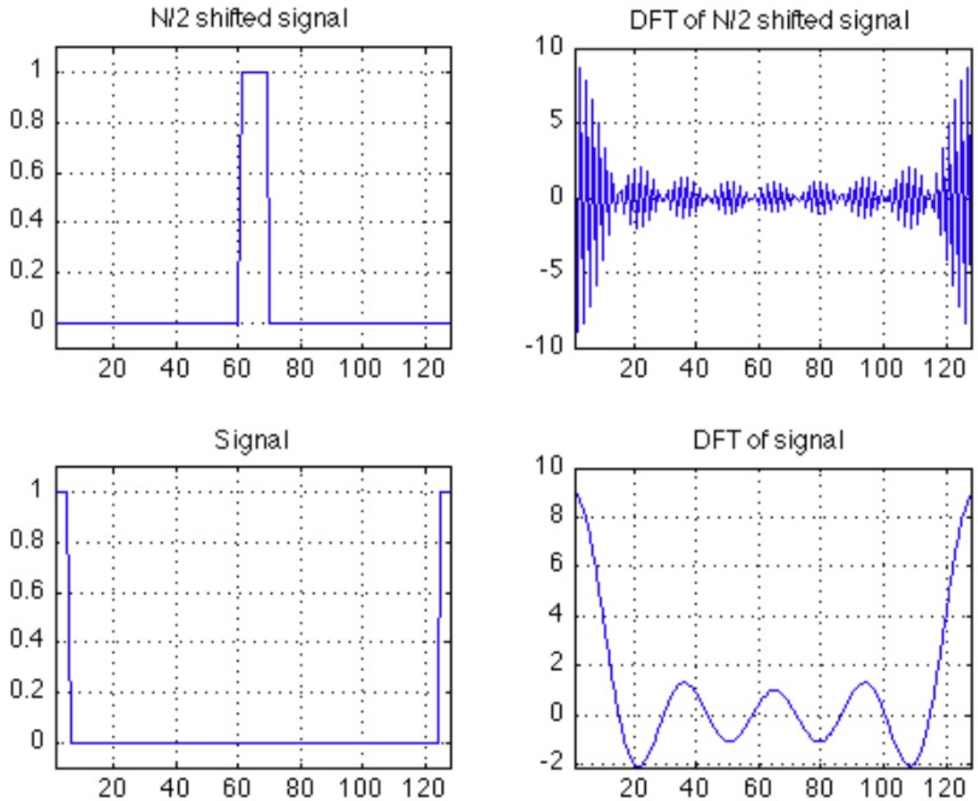
Se p=N/2 (N pari) abbiamo

$$F_{N/2}[k] = (-1)^k F[k]$$

DFT e shifting: esempio

Example of a DFT of a signal and a $N/2(N = 128)$ shifted signal





Convoluzione

Consideriamo due funzioni continue f(t) e h(t)

La convoluzione tra le due funzioni viene definita come

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Teorema di convoluzione

$$\mathcal{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi\omega t} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j2\pi\omega t} dt \right] d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) H(\omega) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau =$$

$$H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j2\pi\omega t} d\tau =$$

$$H(\omega) F(\omega)$$

Proprietà della FT

$$\mathcal{F}\{h(t-\tau)\} = H(\omega) e^{-j2\pi\omega t}$$

Teorema di convoluzione

$$f(t) * h(t) \iff H(\omega)F(\omega)$$

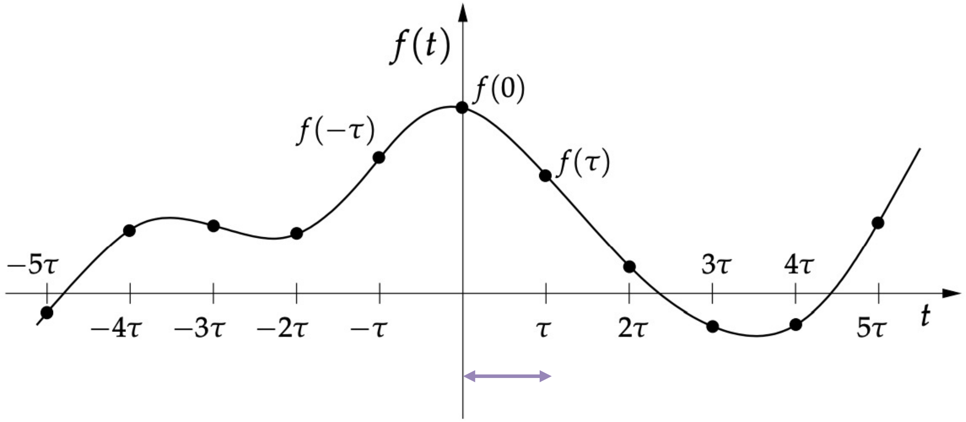
$$f(t)h(t) \iff H(\omega) * F(\omega)$$

Campionamento

Proprietà della delta

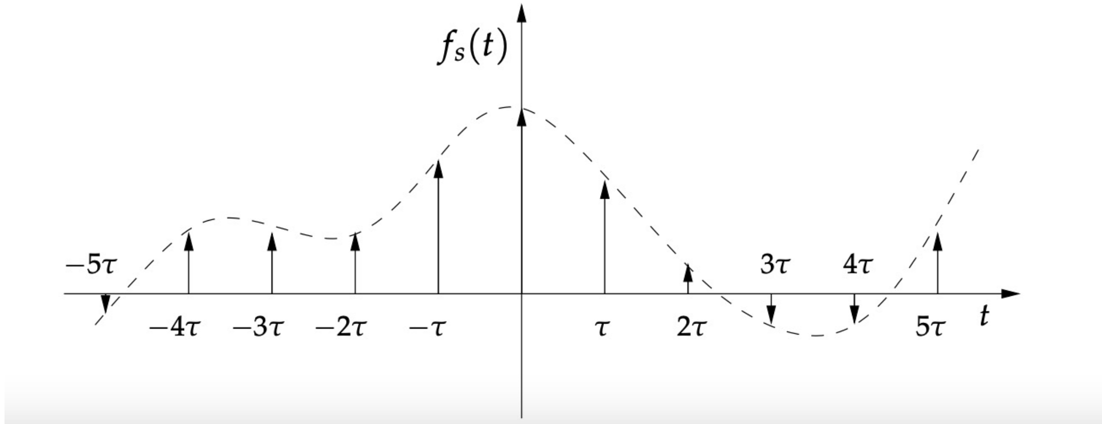
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau)$$



Treno di impulsi equispaziati

$$\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau).$$



Campionamento

$$f_s(t) = f(t)\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau)\delta(t - n\tau)$$

Campionamento: FT della funzione campionata

è una sequenza infinita e periodica di copie di F(w) con ampiezza $\frac{1}{\tau}$

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}(f_s(t)) = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - \frac{n}{\tau})$$

Infatti,

$$f_s(t) = f(t)\delta_\tau(t)$$

notiamo che il treno di impulsi è una funzione periodica e la sua serie di Fourier è $\frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\tau}t}$

$$f_s(t) = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{f(t)e^{j\frac{2\pi n}{\tau}t}} \qquad \mathcal{F}\{f_s(t)\} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{F(\omega - \frac{n}{\tau})}$$

Teorema di convoluzione

Campionamento:
FT della funzione campionata

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}(f_s(t)) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - \frac{n}{\tau})$$

E' una sequenza infinita e periodica di copie di F(w) con ampiezza del periodo $\frac{1}{\tau}$

NB: L'ampiezza del periodo nelle frequenze è duale all'ampiezza del periodo nel tempo

Teorema del campionamento

Stabiliamo le condizioni sotto cui una funzione continua possa essere ricostruita a partire da un insieme di campioni

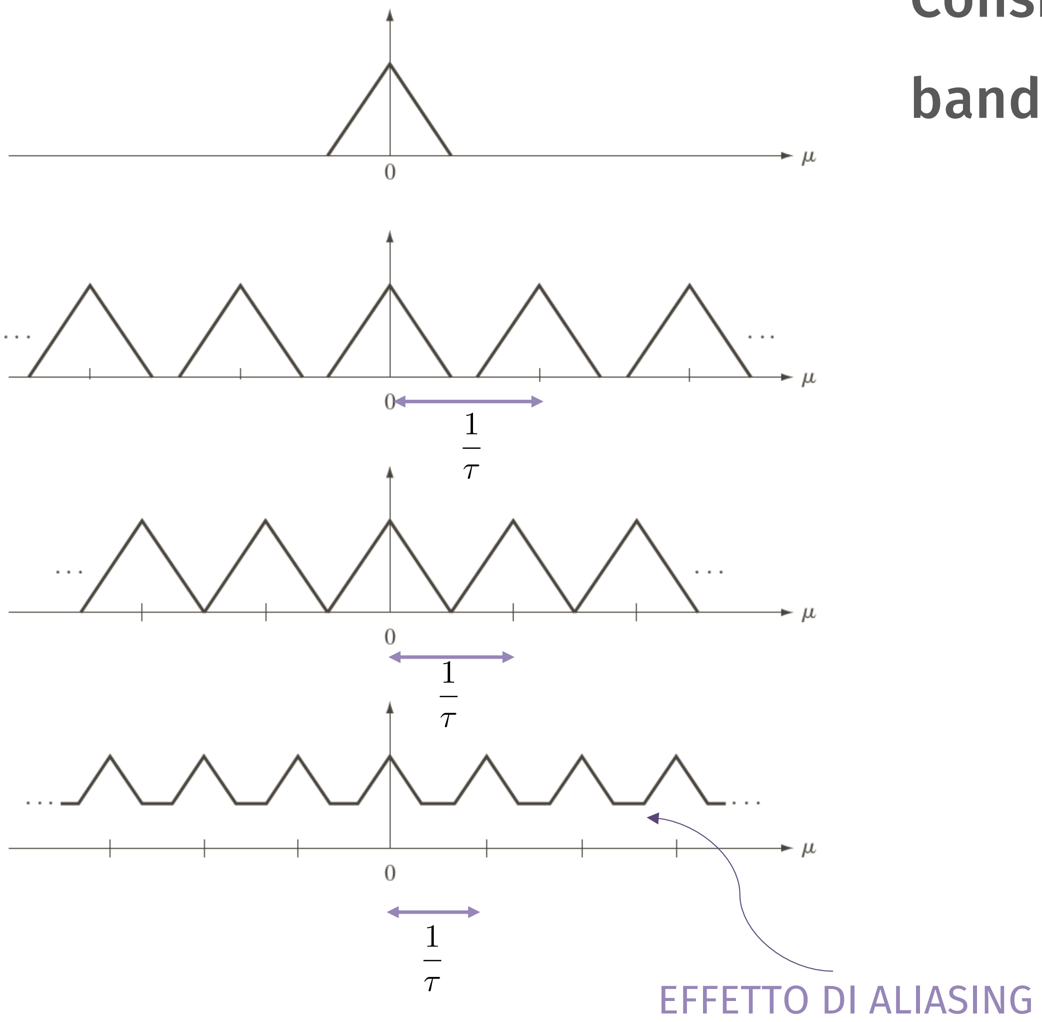
Funzioni a banda limitata

Una funzione f(t) è a banda limitata se la sua trasformata di Fourier è nulla al di fuori dell'intervallo $[-\omega_{MAX}, \omega_{MAX}]$

$$F(\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > \omega_{MAX}$$

Teorema di campionamento

$F(\omega)$



Consideriamo una funzione a banda limitata

$$\frac{1}{\tau} > 2\omega_{MAX}$$

$$\frac{1}{\tau} = 2\omega_{MAX}$$

$$\frac{1}{\tau} < 2\omega_{MAX}$$

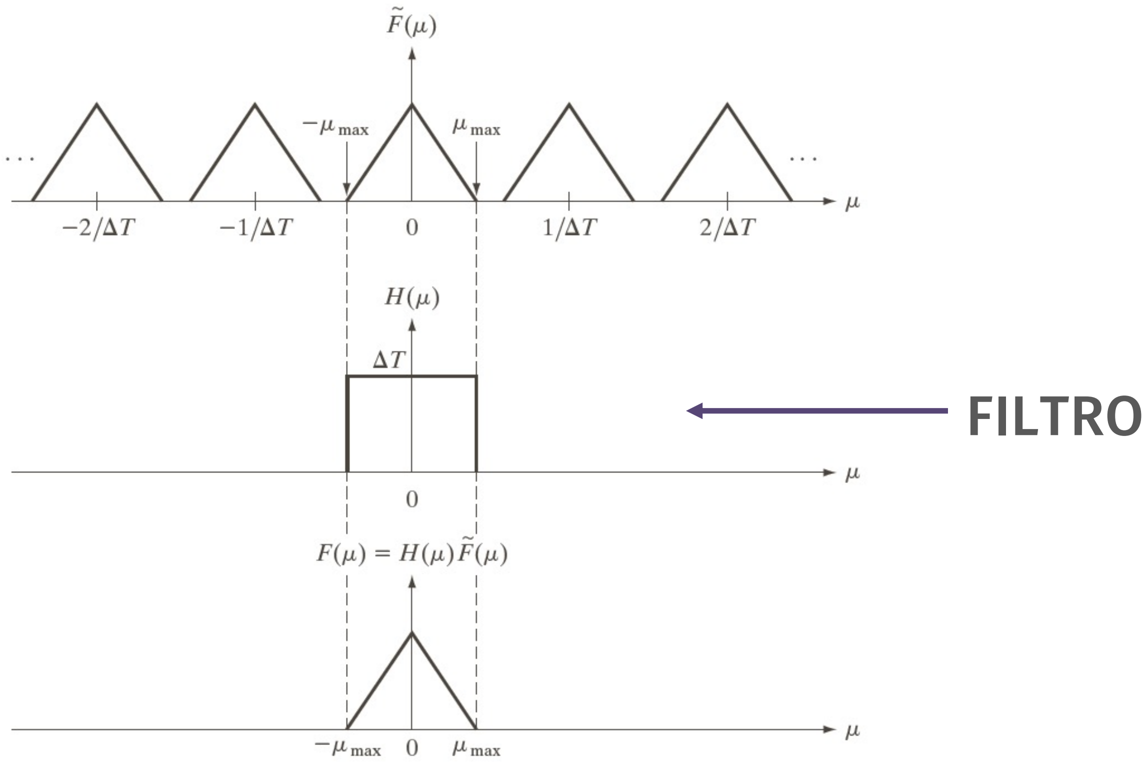
Teorema di campionamento

Consideriamo una funzione continua f(t) a banda limitata.

Una **ricostruzione perfetta** del segnale è garantita se la frequenza di campionamento è almeno il doppio della frequenza massima del segnale

$$\frac{1}{\tau} > 2\omega_{MAX}$$

Ricostruzione del segnale



UniGe

MaLGa