UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI GENOVA

Università degli Studi di Genova

# Fondamenti dell'Elaborazione di Segnali e Immagini

*Lorenzo Vaccarecci*

Anno Accademico 2024/2025

# Indice


**1 Introduzione** **3**
1.1 Segnali 1D e 2D . . . . . . 3
1.1.1 Segnali 1D . . . . . . 3
1.1.2 Segnali 2D . . . . . . 3
1.2 Segnali a tempo continuo o discreto . . . . . . 4
1.2.1 Segnali a tempo continuo . . . . . . 4
1.2.2 Segnali a tempo discreto . . . . . . 4
1.3 Segnali a valori continui o discreti . . . . . . 5
1.3.1 Segnali a valori continui . . . . . . 5
1.3.2 Segnali a valori discreti . . . . . . 5
1.4 Analogico e digitale . . . . . . 5
1.5 Campionamento . . . . . . 6
1.5.1 Frequenza ideale di campionamento . . . . . . 6
1.6 Quantizzazione . . . . . . 7
1.7 Riepilogo digitalizzazione . . . . . . 7
1.8 Ripasso: trasformazioni di segnali (1D) . . . . . . 8
1.8.1 Traslazione . . . . . . 8
1.8.2 Scalatura . . . . . . 8
1.8.3 Segnali "notevoli" . . . . . . 8
1.8.4 Treno di impulsi equispaziati . . . . . . 8

**2 La trasformata di Fourier** **9**
2.1 Introduzione . . . . . . 9
2.2 Matematicamente . . . . . . 9
2.2.1 Trasformata di Fourier Discreta . . . . . . 10
2.3 Conclusione . . . . . . 10
2.4 Approfondimento . . . . . . 10
2.4.1 Proprietà . . . . . . 10
2.4.2 FT di segnali a valori reali . . . . . . 11
2.4.3 Coppie "famose" . . . . . . 11

**3 Filtraggio delle frequenze (segnali 1D)** **12**
3.1 Introduzione . . . . . . 12
3.2 Filtrare nel dominio delle frequenze . . . . . . 12
3.2.1 Schema . . . . . . 12
3.2.2 Filtro ideale . . . . . . 12
3.2.3 Filtro Gaussiano . . . . . . 13
3.2.4 Filtro Butterworth . . . . . . 14
3.3 Rumore . . . . . . 14
3.4 Filtraggio nel tempo . . . . . . 14

3.4.1 Convoluzione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
3.4.2 Teorema di convoluzione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
3.4.3 Applicazioni tipiche . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
3.4.4 Convoluzione discreta . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
3.4.5 Filtri di enhancement e differenze finite . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

# Capitolo 1

# Introduzione

## 1.1 Segnali 1D e 2D

### 1.1.1 Segnali 1D

Un segnale 1D descrive una grandezza fisica che varia nel tempo, e può essere visto come una funzione di una variabile indipendente:

$$g = f(t)$$

dove $g$ è il valore della grandezza fisica (variabile **dipendente**), $f$ è la funzione (continua o discreta) e $t$ è la variabile indipendente.
Esempi di segnali 1D sono:

- Segnali audio: come ad esempio la musica o il parlato.
- Segnali ECG
- Segnali EEG
- Sensori inerziali
- ...

### 1.1.2 Segnali 2D

Un segnale 2D descrive una grandezza fisica che varia nello spazio, e può essere visto come una funzione di due variabili indipendenti.
Esempi di segnali 2D sono:

- Immagini: utilizzeremo questo termine per indicare una foto a colori o a scala di grigi (ci concentreremo su queste).
- Immagini biomediche: come ad esempio le radiografie, le ecografie oppure quelle di una risonanza.
- Immagini termiche
- Immagini satellitari
- Immagini microscopiche
- ...

Ciò che hanno in comunque tutte queste immagini è che hanno una matrice di pixel che rappresenta qualcosa, nel nostro caso ogni pixel rappresenta l'intensità luminosa nella posizione $(r, c)$ della matrice.

## 1.2 Segnali a tempo continuo o discreto

$$g = f(t)$$

### 1.2.1 Segnali a tempo continuo

Nei segnali a tempo continuo $t$ assume valori reali

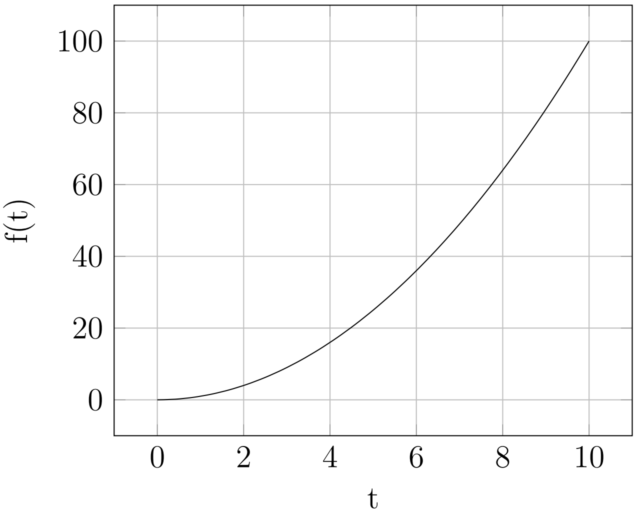



Figura 1.1: Posso conoscere il valore del segnale in ogni istante di tempo

### 1.2.2 Segnali a tempo discreto

Nei segnali a tempo discreto $t$ assume valori in un sottoinsieme discreto dei numeri reali, come risultato di un'operazione chiamata **campionamento**.

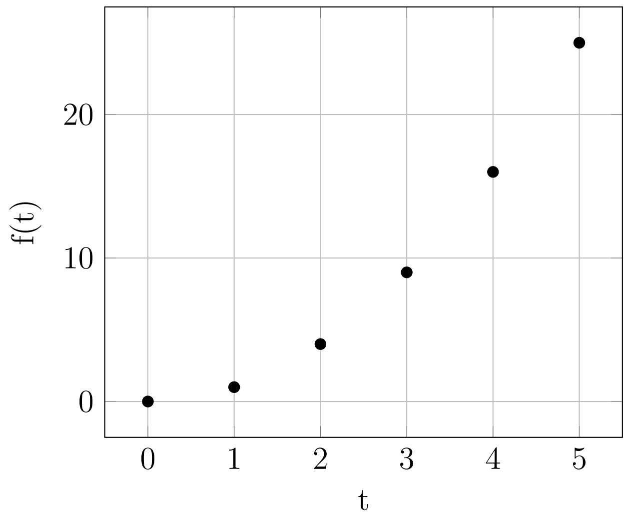



Figura 1.2: Posso conoscere il valore del segnale in certi istanti di tempo

## 1.3 Segnali a valori continui o discreti

### 1.3.1 Segnali a valori continui

Nei segnali a valori continui $g$ assume valori reali.

### 1.3.2 Segnali a valori discreti

Nei segnali a valori discreti $g$ assume valori in un sottoinsieme discreto dei numeri reali, come risultato di un'operazione chiamata **quantizzazione**.

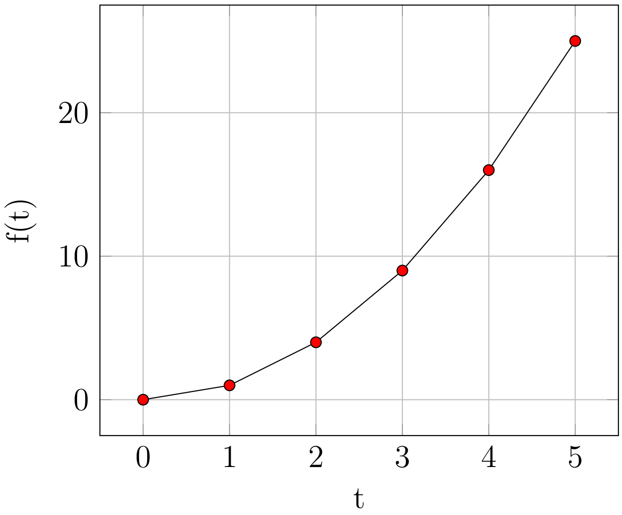



Figura 1.3: In rosso i valori **discreti** di g

## 1.4 Analogico e digitale

- **Segnali analogici**: sono continui sia nel tempo che nei valori.
- **Segnali digitali**: sono discreti sia nel tempo che nei valori.

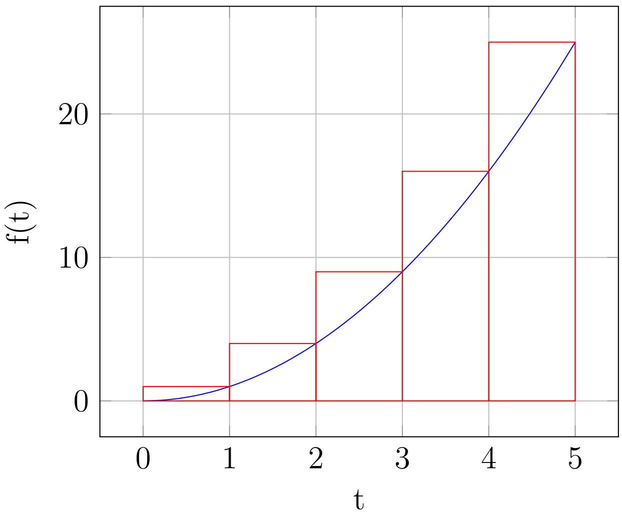



Figura 1.4: Segnale analogico in blu e segnale digitale in rosso

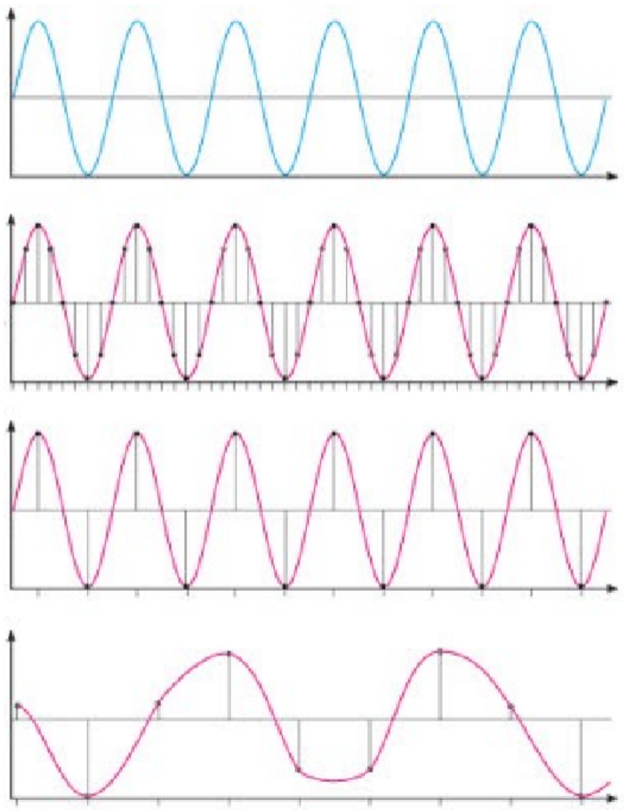
## 1.5 Campionamento

$$v_s = \frac{1}{\tau}$$

Dove $v_s$ è la frequenza di campionamento e $\tau$ è l'ampiezza dell'intervallo di campionamento. Ovviamente se $\tau$ si avvicina a 0 allora il grafico risultante $f(n\tau)$ sarà più preciso (e vicino a quello continuo) ma userà più risorse per memorizzare i dati.

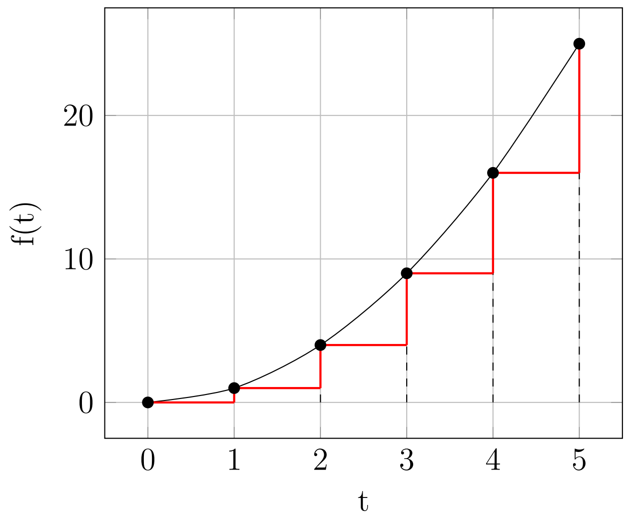
### 1.5.1 Frequenza ideale di campionamento

Bisogna stare attenti a non campionare a frequenze troppo basse, altrimenti si incorre nel fenomeno chiamato **punto di rottura** ossia il grafico risultante apparirà diverso da quello originale.



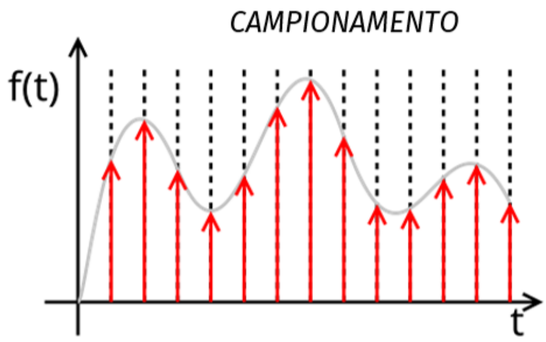
Come possiamo vedere dalla figura l'ultimo grafico risulta essere diverso da quello azzurro (originale), questo perché la frequenza di campionamento non è sufficientemente alta in questo caso si è verificato un punto di rottura.

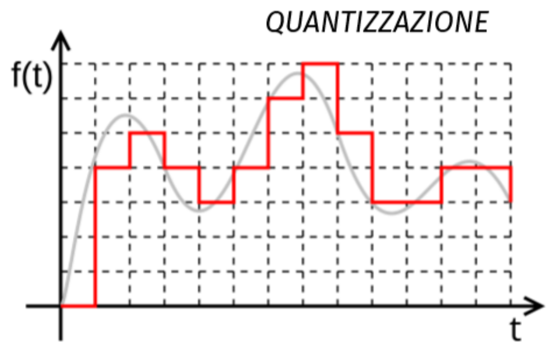
## 1.6 Quantizzazione

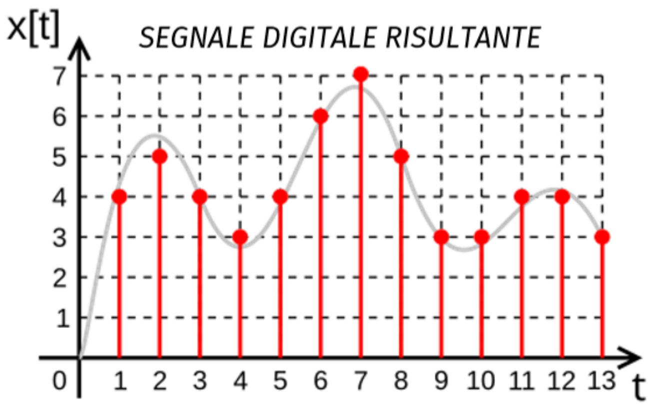



Partendo da una funzione $f(n\tau)$ quantizziamo i valori associando ad ogni valore $x$ il valore numerico $xk$ che è più vicino ad $x$.

## 1.7 Riepilogo digitalizzazione



## 1.8 Ripasso: trasformazioni di segnali (1D)

### 1.8.1 Traslazione

$$f(t - t_0)$$

### 1.8.2 Scalatura

$$f(\alpha t)$$

- $\alpha > 1$ : compressione
- $0 < \alpha < 1$ : rilassamento

### 1.8.3 Segnali "notevoli"

- **Segnale rettangolare**:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- **Segnale gradino**:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- **Segnale impulsivo (o delta di Dirac)**:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

### 1.8.4 Treno di impulsi equispaziati

$$\delta_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau)$$

#### Campionamento

Moltiplichiamo il segnale $f(t)$ per il treno di impulsi equispaziati e otteniamo:

$$f_s(t) = f(t) \cdot \delta_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau)\delta(t - n\tau)$$

# Capitolo 2

# La trasformata di Fourier

## 2.1 Introduzione

Le funzioni continue e periodiche possono essere rappresentate come somme (pesate) di seni e coseni e grazie alla serie di Fourier possiamo ottenere una rappresentazione alternativa del segnale periodico e uno strumento utile per approssimarlo (con compressione e riduzione del rumore).
**Perchè Fourier?** Per capire meglio il segnale.

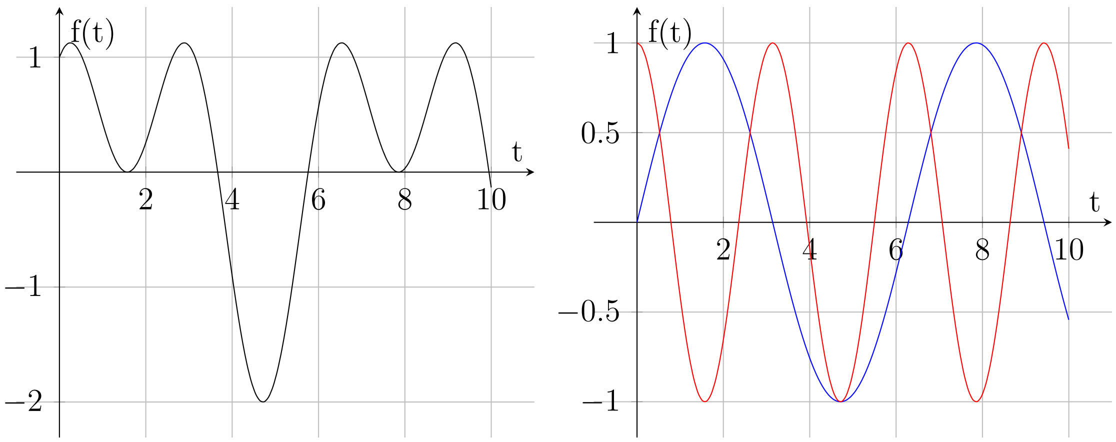



Figura 2.1: A sinistra il segnale originale, a destra la sua rappresentazione come somma di una sinusoide e una cosinusoide

Una funzione continua e periodica può essere descritta attraverso una serie di sinusoidi e possiamo considerare una rappresentazione alternativa del segnale l'insieme dei coefficienti (pesi) dei sinusoidi.

**Immagine qui**

## 2.2 Matematicamente

Consideriamo una funzione $f(t)$ continua e periodica di periodo $\tau$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{\tau}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{\tau}\right) \right)$$

Dove $a$ e $b$ sono i coefficienti.
Riscriviamo applicando la formula di Eulero $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ dove $j = \sqrt{-1}$ immaginario:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\frac{2\pi kt}{\tau}}$$

$$c_k = \frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t)e^{-j\frac{2\pi kt}{\tau}}dt$$

### 2.2.1 Trasformata di Fourier Discreta

**N.B.**: $f(t)$ funzione continua, $f[n]$ funzione discreta.

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k]e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Dove $F[x] \equiv c_k$. La sommatoria è finita perchè nel caso di funzione discreta non mi occorrono infiniti sinusoidi per ricostruire tutti i dettagli.
Data una funzione discreta e finita $f[n]$ con $N$ campioni, la sua **DFT** è

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

## 2.3 Conclusione

Nonostante la definizione di DFT appena fornita sia calcolabile ($O(n^2)$), esistono algoritmi per calcolare la DFT in modo efficiente ($O(n\log_2 n)$), menzoniamo la Fast Fourier Transform (FFT).

## 2.4 Approfondimento

Trasformata di Fourier di una funzione $f(t)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\omega t}dt$$

E l'inversa:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j2\pi\omega t}d\omega$$

### 2.4.1 Proprietà

#### Linearità

Se $h(t) = af(t) + bg(t)$ con $a, b \in \mathbb{C}$ allora:

$$H(\omega) = aF(\omega) + bG(\omega)$$

#### Traslazione nel tempo

Se $h(t) = f(t - t_0)$ allora:

$$H(\omega) = e^{-i2\pi t_0\omega}F(\omega)$$

**Modulazione - Shift in frequenza**

Se $h(t) = e^{i2\pi\omega_0 t} f(t)$ allora:

$$H(\omega) = F(\omega - \omega_0)$$

### 2.4.2 FT di segnali a valori reali

La FT di un segnale a valori reali ha una simmetria speciale:

- La parte reale è simmetica pari ($f(x) = f(-x)$, rispetto all'asse $y$)
- La parte immaginaria è simmetrica dispari ($f(x) = -f(-x)$, rispetto all'origine)

### 2.4.3 Coppie "famose"

**Rettangolo**

Nell'intervallo $W$:

$$F(\omega) = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} Ae^{-2\pi j\omega t} dt = \ldots = AW \frac{\sin(\pi\omega W)}{\pi\omega W}$$

Funzione SINC.

**Impulso**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2\pi j\omega t} dt = 1$$

Perchè $\delta(t) \neq 0$ se e solo se $t = 0$.

**Impulso centrato in $t_0$**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-2\pi j\omega t} dt = \cos(-2\pi j\omega t_0) - j \sin(-2\pi j\omega t_0) = e^{-2\pi j\omega t_0}$$

# Capitolo 3

# Filtraggio delle frequenze (segnali 1D)

## 3.1 Introduzione

Un filtro è una funzione che lascia passare alcune componenti del segnale e ne elimina altre. Nel dominio delle frequenze possiamo parlare di:

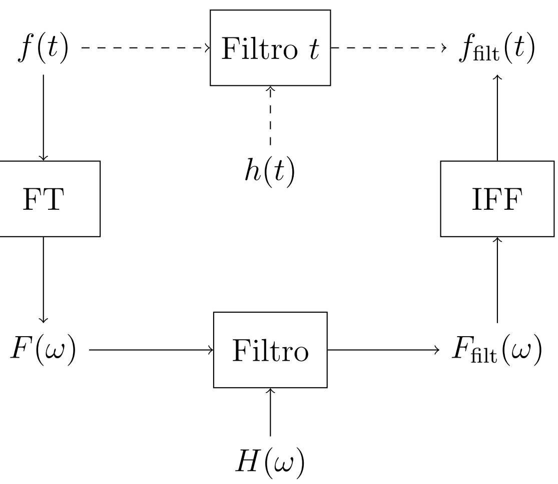
- **Filtri passa basso**: lasciano passare le basse frequenze eliminando le alte.
- **Filtri passa alto**: lasciano passare le alte frequenze eliminando le basse.
- **Filtri passa banda**: lasciano passare le frequenze comprese traa due valori.

## 3.2 Filtrare nel dominio delle frequenze

Filtrare un segnale corrisponde a moltiplicare un filtro $H$ con la Trasformata di Fourier del segnale $f$

$$F_{\text{filt}}(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

### 3.2.1 Schema



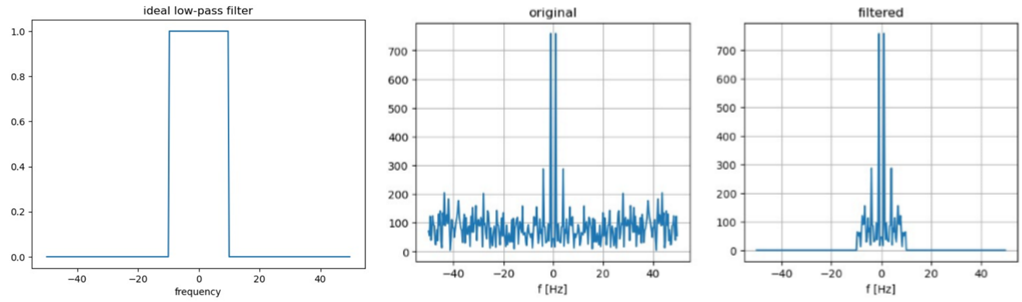

### 3.2.2 Filtro ideale

Un sistema che annulla "perfettamente" le armoniche in determinati intervalli di frequenza si chiama filtro ideale.

**Esempio filtro passa basso**

$$H(\omega) = \begin{cases} A & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\omega_c$ rappresenta a quale frequenza io voglio tagliare.




Il primo grafico è $H(\omega)$, il secondo è $F(\omega)$ e il terzo è $F_{\text{filt}}(\omega)$.

### 3.2.3 Filtro Gaussiano

Nel tempo:

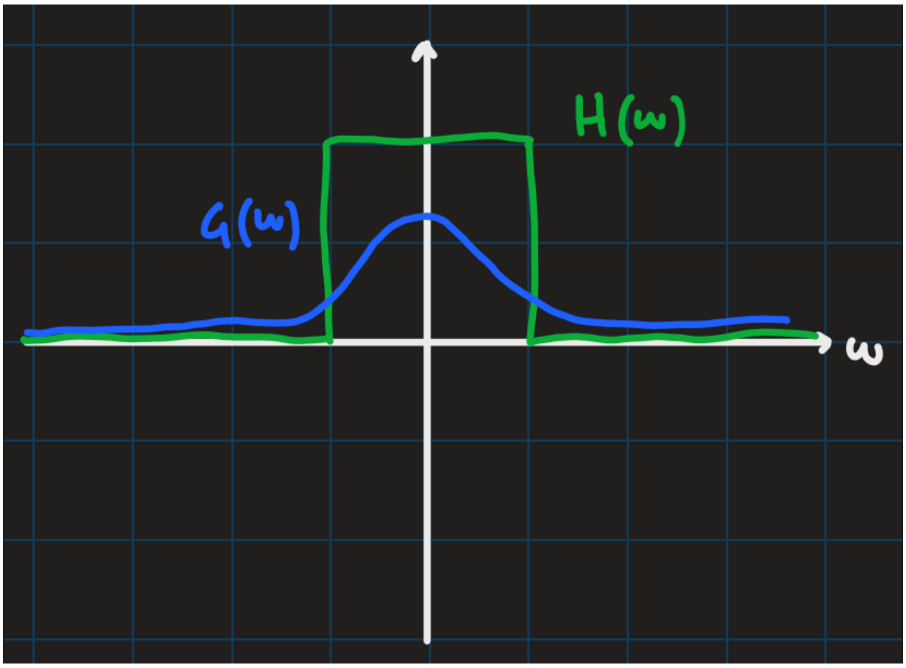
$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Nelle frequenze:

$$G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma_f^2}}$$

$$\sigma_f = \frac{1}{2\pi\sigma}$$

Non produce un taglio "netto" delle frequenze indesiderate, più $\sigma$ è grande più il taglia.
**Ricordo:** $\sum_t g(t) = 1$

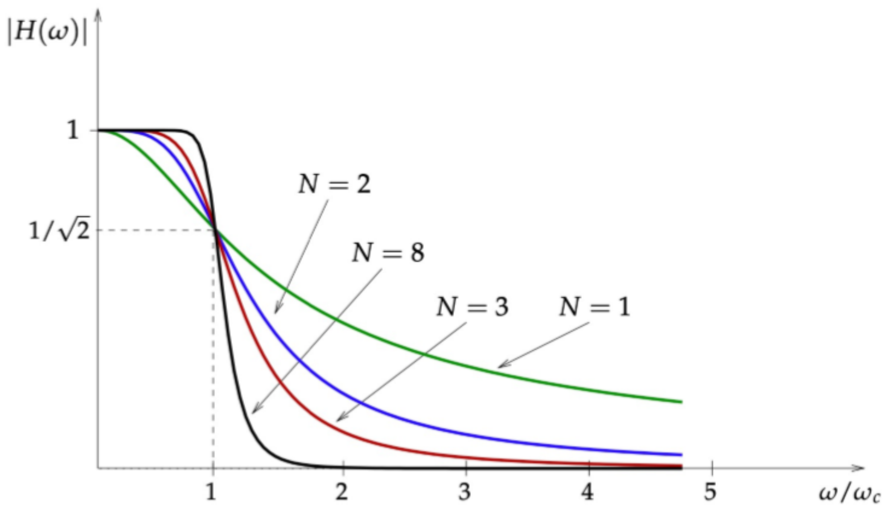


### 3.2.4 Filtro Butterworth

E' un filtro "liscio" ma con un cut-off più deciso

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|B_N(i\frac{\omega}{\omega_c})|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

Più l'ordine $N$ è alto, più il cut-off $\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$ è deciso.




## 3.3 Rumore

La riduzione del rumore avviene tramite filtraggio, di solito passa-alto.

## 3.4 Filtraggio nel tempo

### 3.4.1 Convoluzione

Consideriamo due funzioni continue $f(t)$ e $g(t)$, la loro convoluzione è definita come:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Dove la funzione $f$ è il filtro e $t$ è il tempo desiderato.
La convoluzione è commutativa: $f * g = g * f$.

### 3.4.2 Teorema di convoluzione

$$f(t) * h(t) \iff F(\omega)H(\omega)$$
$$f(t)h(t) \iff F(\omega) * H(\omega)$$

In altre parole:

IFT

$$f(t) * h(t) = f_{\text{filt}}(t) \qquad F(\omega)H(\omega) = F_{\text{filt}}(t)$$

FT
FT

### 3.4.3 Applicazioni tipiche

- **Ridurre il rumore** (filtri passa basso, nel tempo li chiamiamo filtri di smoothing)
- **Mettere in evidenza punti di cambiamento "rapido" del segnale** (filtri passa alto, nel tempo li chiamiamo filtri di enhancement)

### 3.4.4 Convoluzione discreta

Con $N$ punti nell'intervallo $[0, T] \to g[n]$, consideriamo un filtro $f[n]$

$$(f * g)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]g[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} f[n-k]g[k]$$

Una pratica comune nel filtraggio digitale è quella di realizzare filtri di ampiezza finita $W$ (quello che ci interessa studiare) da utilizzare come maschere nell'operazione di filtraggio.

### 3.4.5 Filtri di enhancement e differenze finite

In matematica discreta le differenze finite sono definite come

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Solitamente $h = 1$.