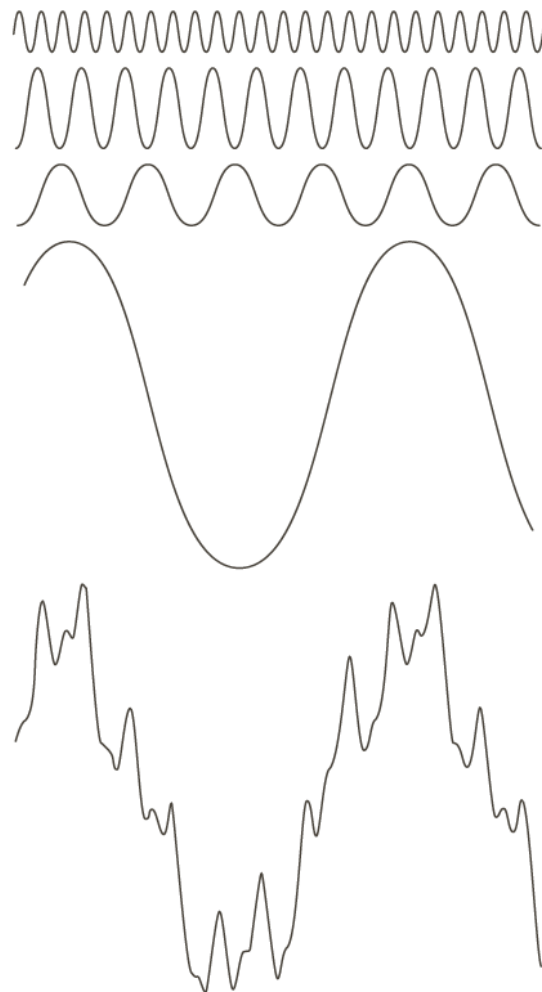


Rappresentazioni dei segnali nel dominio delle frequenze

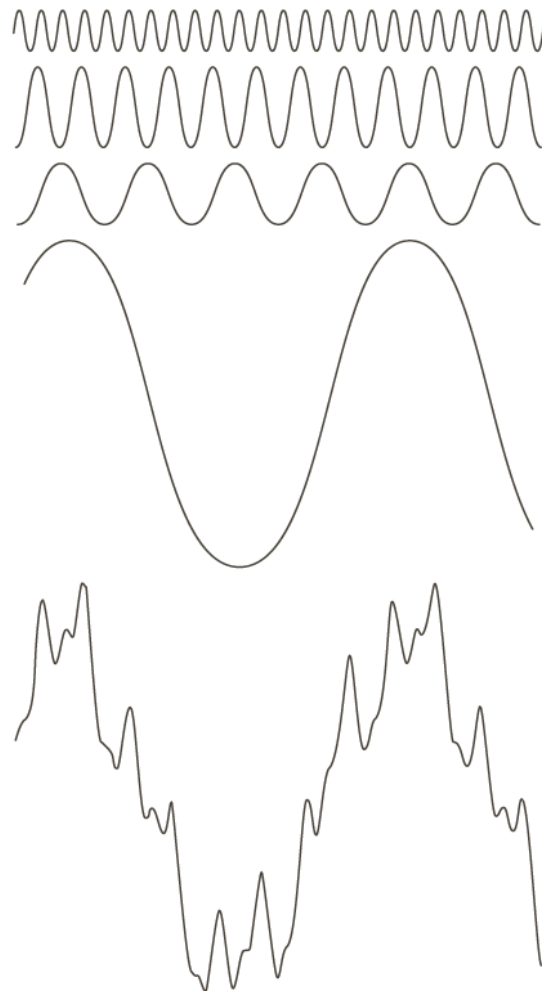
Fondamenti Elaborazione dei Segnali e Immagini
(FESI)

Funzioni continue e periodiche possono essere rappresentate come somme pesate di seni e coseni



Jean baptiste joseph fourier

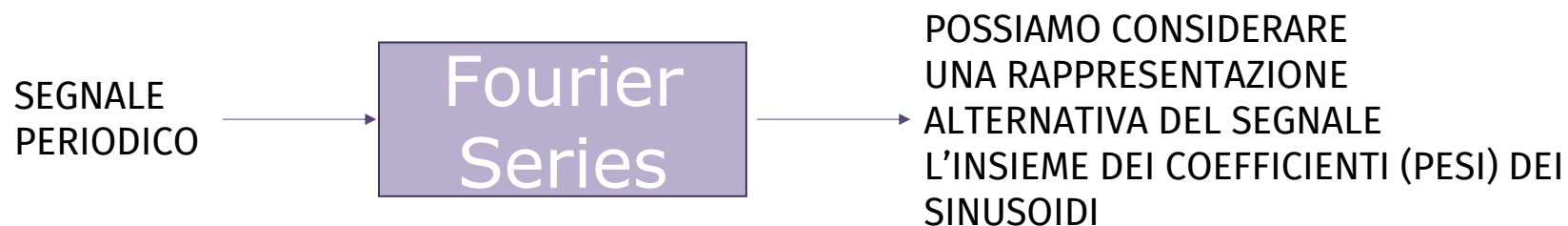
Per fare ciò ci serve la **Serie di Fourier**, grazie alla quale possiamo ottenere una rappresentazione alternativa del segnale periodico e uno strumento utile per approssimarlo (con applicazione a compressione e riduzione del rumore)





Serie di Fourier

Una funzione continua e periodica può essere descritta attraverso una serie di sinusoidi (base di funzioni)



Serie di Fourier

Consideriamo una funzione $f(t)$ continua e periodica di periodo T

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}tk\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}tk\right) \right)$$

Coefficienti



Serie di Fourier

Riscriviamo applicando la formula di Eulero $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi}{T} t k}$$

Coefficienti (complessi) di Fourier



$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} k t} dt$$

Trasformata di Fourier Discreta

Consideriamo $f(t)$ campionata con N campioni equidistanti

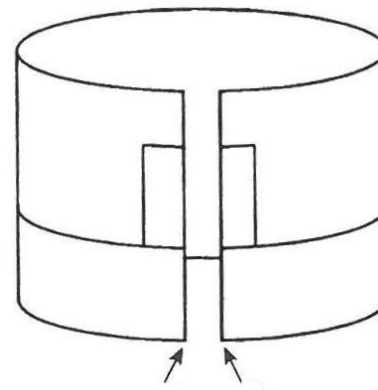
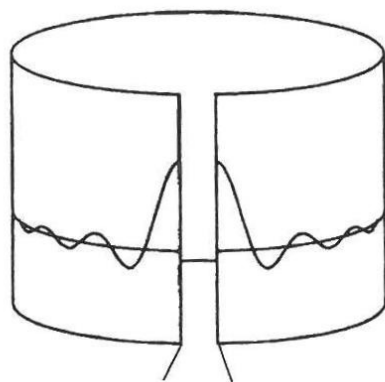
Chiamiamo $f[n]$ l'array che contiene i valori campionati

Possiamo considerare $f[n]$ una funzione di discrete a finita con N campioni

Questa è la tipica funzione che avremo a disposizione quando affrontiamo problemi di elaborazione digitale dei segnali

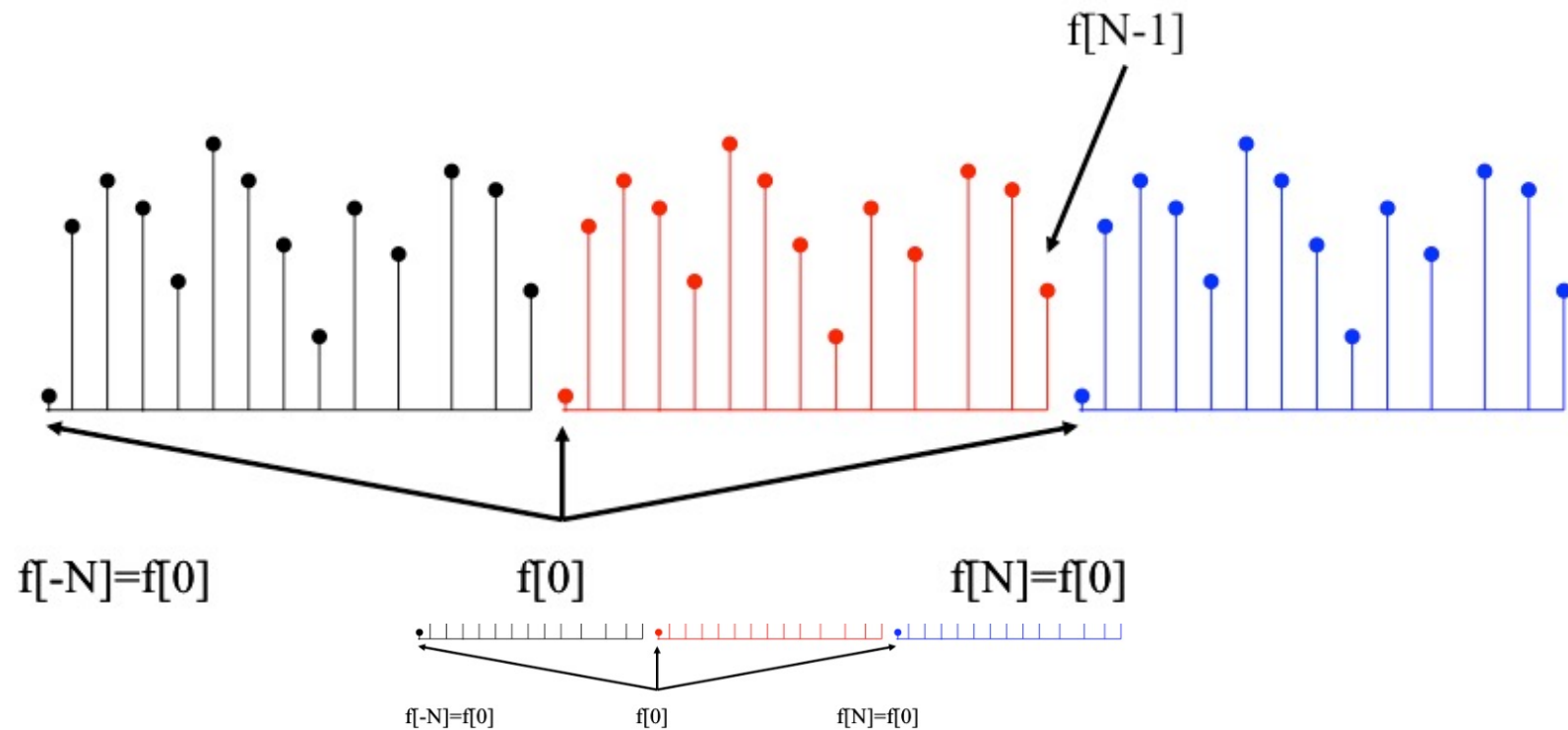
Rendiamola periodica nell'intervallo $[0, T]$

Cosa significa rendere periodica una funzione



Cosa significa rendere periodica una funzione

Let f a signal sampled by N points. In the following let consider N



Ripartiamo dalla serie di Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi}{T} t k}$$

Se la funzione è periodica e discreta:


$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j \frac{2\pi}{N} k n}$$

La sommatoria è finite perche' nel caso di funzione discreta non mi occorrono infiniti sinusoidi per ricostruire tutti i dettagli

Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

Data una funzione discreta e finita $f[n]$ con N campioni, la sua DFT è

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

coefficienti 

Inversa della Trasformata di Fourier Discreta

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Importante: restituisce esattamente i valori originali!

Algoritmi per calcolare la DFT

Nonostante la definizione di DFT appena fornita sia calcolabile (complessità nell'ordine N^2) esistono algoritmi più efficienti che solitamente vengono preferiti

Menzioniamo la Fast Fourier Transform (FFT) implementata da tutte le librerie di signal processing moderne

Qualche riferimento per approfondire https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform

UniGe

