UniGe | MaLGa

Filtraggio nel tempo (segnali 1D)

Fondamenti Elaborazione dei Segnali e Immagini (FESI)

Francesca Odone francesca.odone@unige.it

Introduzione

1. Prima di tutto introduciamo il concetto di convoluzione
2. Poi estendiamo la trattazione matematica del problema del campionamento

3. Dopo di che siamo pronti a parlare di filtraggio nel tempo (smoothing e enhancement)

Convoluzione

Consideriamo due funzioni continue f(t) e g(t)

La convoluzione tra le due funzioni viene definita come

$$(f * g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

To convolve a kernel with an input signal:
flip the signal, move to the desired time,
and accumulate every interaction with the kernel

https://betterexplained.com/articles/intuitive-convolution/

Convoluzione

Consideriamo due funzioni continue f(t) e g(t)

La convoluzione tra le due funzioni viene definita come

$$(f * g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau$$

Proprietà importante: la convoluzione è <u>commutativa</u> f*g=g*f

https://betterexplained.com/articles/intuitive-convolution/

Teorema di convoluzione

$$f(t) * h(t) \iff H(\omega)F(\omega)$$

$$f(t)h(t) \iff H(\omega) * F(\omega)$$

Teorema di convoluzione

$$\mathcal{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\right] e^{-j2\pi\omega t}dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi\omega t}dt\right] d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)H(\omega)e^{-j2\pi\omega\tau}d\tau =$$

$$H(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi\omega t}d\tau =$$

$$H(\omega)F(\omega)$$

Proprietà della FT

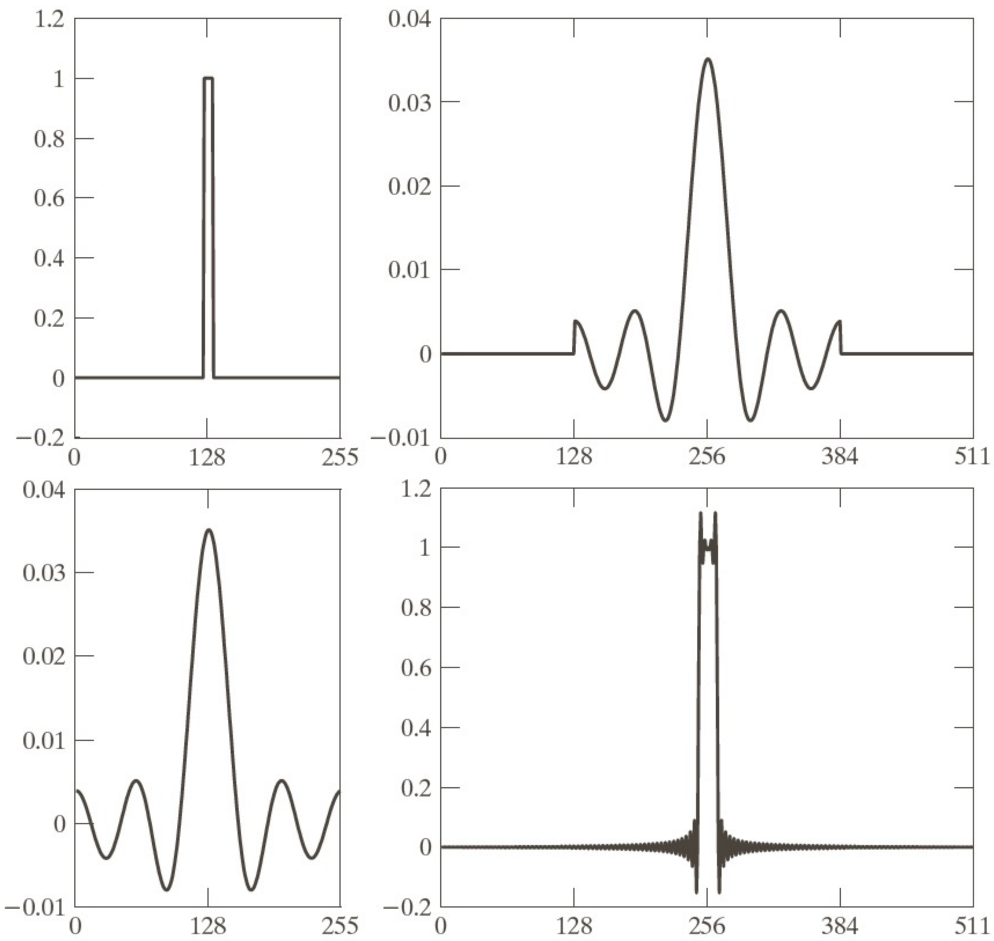
$$\mathcal{F}\{h(t-\tau)\} = H(\omega)e^{-j2\pi\omega t}$$

Filtri e teorema di convoluzione

$$f(t) * h(t) \iff H(\omega)F(\omega)$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto filtrando nelle frequenze (moltiplicazione) oppure convolvendo un segnale con un opportuno filtro nel tempo

I limiti dei filtri ideali



a c
b d

FIGURE 4.34
(a) Original filter specified in the (centered) frequency domain. (b) Spatial representation obtained by computing the IDFT of (a). (c) Result of padding (b) to twice its length (note the discontinuities). (d) Corresponding filter in the frequency domain obtained by computing the DFT of (c). Note the ringing caused by the discontinuities in (c). (The curves appear continuous because the points were joined to simplify visual analysis.)

Applicazioni tipiche

- Ridurre il rumore (filtri passa basso, nel tempo li chiamiamo filtri di smoothing)
- Mettere in evidenza punti di cambiamento ”rapido” del segnale (filtri passa alto, nel tempo li chiamiamo filtri di enhancement)

Convoluzione discreta

Consideriamo f(t) funzione di periodo T discreta (o discretizzata) con N punti nell'intervallo [0,T] -> f[n]

Consideriamo un filtro h[n]

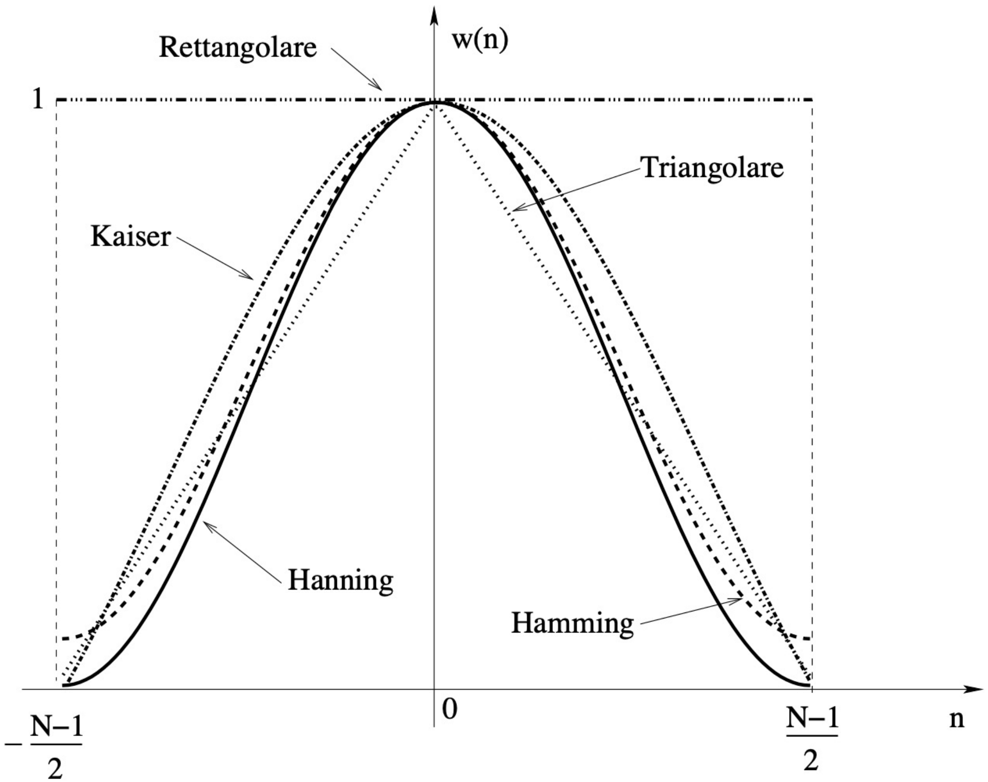
La convoluzione discreta viene definita come

$$g[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]f[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} h[n-k]f[k]$$

Filtri rappresentati mediante finestre

Una pratica comune nel filtraggio digitale è quella di realizzare filtri di ampiezza finita W da utilizzare come maschere nell'operazione di filtraggio

Qui di seguito alcuni esempi di filtri di smoothing



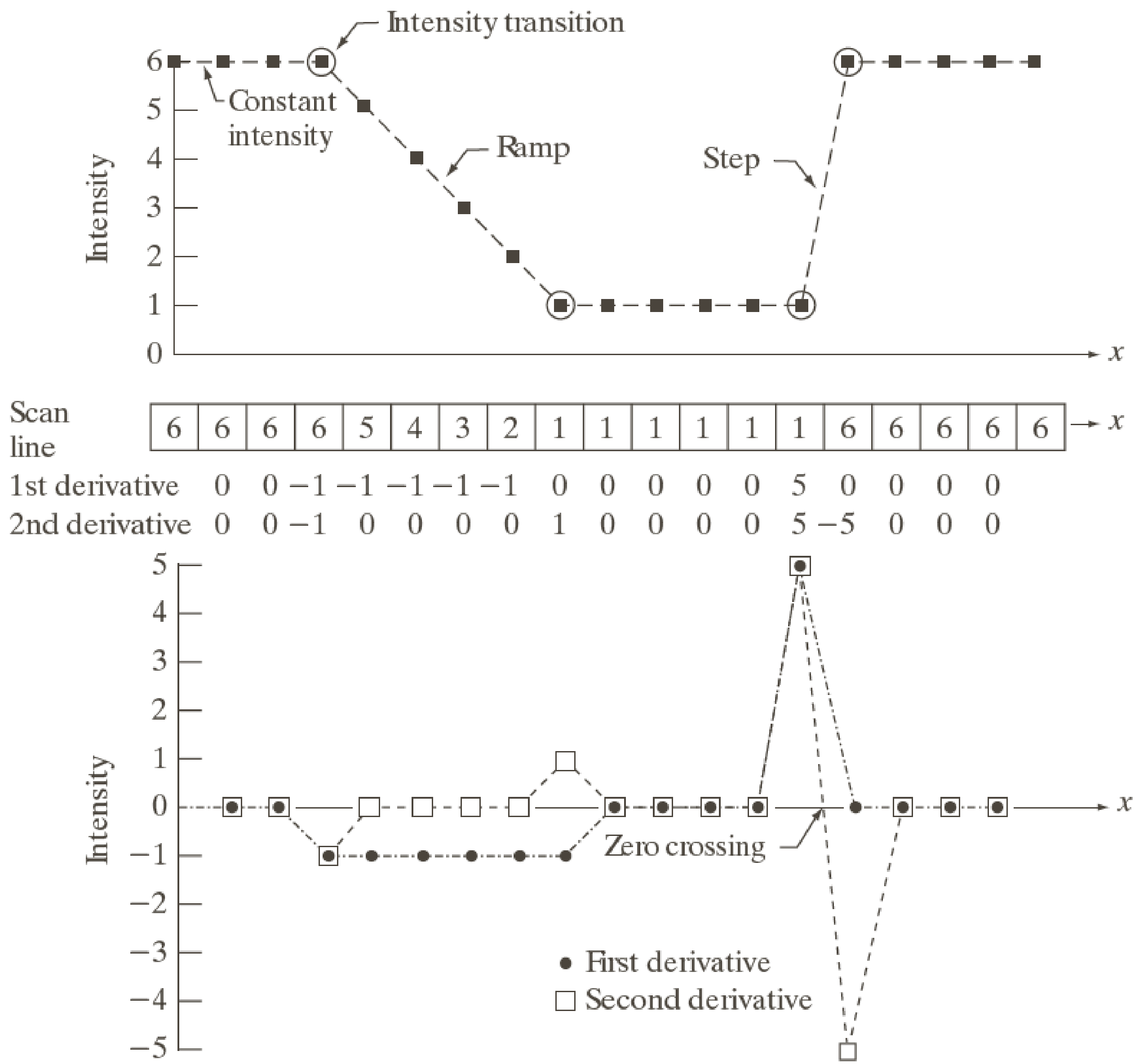
Filtri di enhancement e differenze finite

In matematica discreta le differenze finite sono definite come

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nell'analisi dei segnali discreti diventano uno strumento indispensabile per rilevare punti di cambiamento del segnale

Differenze finite: esempio



Differenze finite: comportamento del segnale

- **Derivate "a parole"**
  - La derivata prima:
    - 0 in zone costanti del segnale
    - Diversa da zero in corrispondenza di variazioni
  - La derivata seconda:
    - 0 in zone costanti del segnale
    - 0 in zone a crescita o decrescita costante
    - Diverse da 0 in punti di variazione della pendenza

Differenze finite e convoluzione

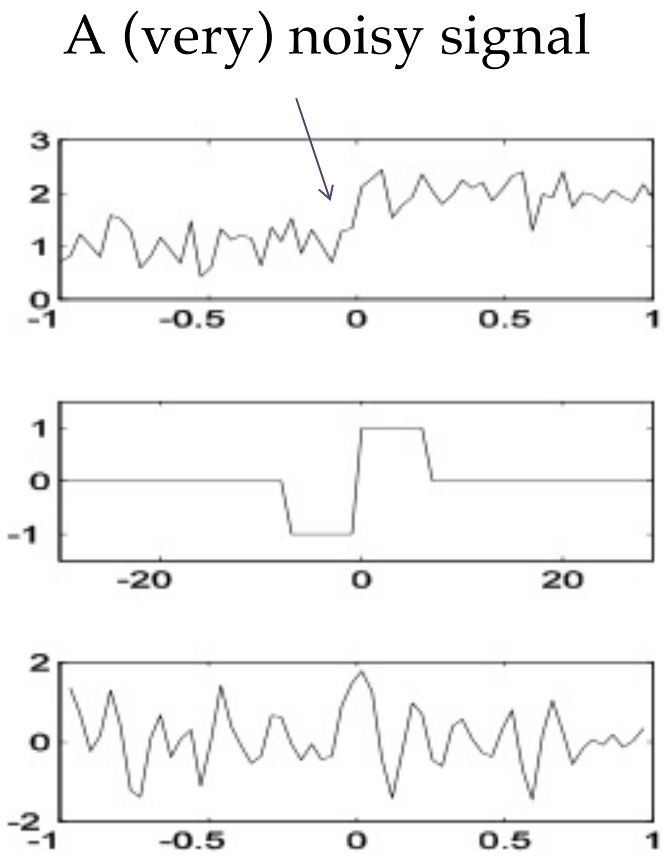
Le differenze finite possono essere implementate attraverso l'operazione di convoluzione discreta con filtri opportuni

[-1, 1] (forward difference)

[-0.5, 0, 0.5] (central difference)

Differenze finite e rumore

– In presenza di rumore i filtri passa alto mettono in evidenza sia il rumore che le caratteristiche del segnale



Differenze finite e rumore

- **Schema generale:**
  - Filtrare il segnale con un filtro passa basso per attenuare il rumore
  - Successivamente filtrare il segnale con un filtro passa alto per mettere in evidenza i punti di cambiamento

- **Esistono filtri che sono in grado di svolgere entrambi i compiti, per esempio la derivata della Gaussiana (che e’ una convoluzione tra Gaussiana e filtro passa alto)**

Operatori di rango (non lineari)

- Altri tipi di filtro utili che non vengono realizzati tramite convoluzione ma sono basati su un passo intermedio di ordinamento del segnale o di una porzione di esso
- Esempi di filtri di questo tipo sono il filtro minimo, il filtro massimo o il filtro mediano
- Il filtro mediano, in particolare, è utile a curare rumore impulsivo che si riscontra quando il segnale presenta valori errati e scorrelati dagli elementi vicini

UniGe

MaLGa