Foglio 2

20 maggio 2024

2.1 Si consideri la v.a. discreta X con pmf del tipo $p(X) = Cx,$ con $x \in \{0, ..., 8\}$. Si chiede di:

- Calcolare il valore di C e disegnare la pmf.
- Determinare le probabilitá $p(2) = P(X = 2)$ e $p(8) = P(X = 8)$
- Calcolare $E[X]$, $E[X + 1]$ e $E[X^2]$

Soluzione:

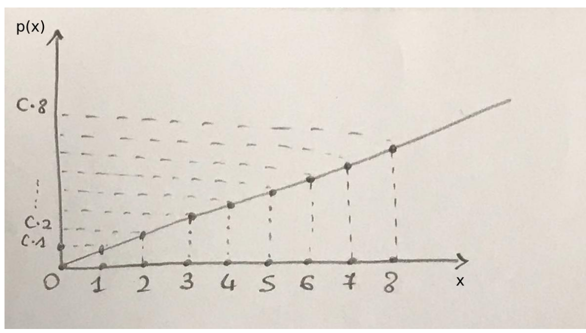

Figura 1: Rappresentazione grafica della pmf di X

- Poiché, per una pmf, deve essere sempre verificato il vincolo per cui $\sum_i P(x_i) = 1$ allora in questo caso per trovare il valore di C per cui p é una pmf vailda bisogna imporre $\sum_0^8 Cx = 1$ allora: $C \sum_0^8 x = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\sum_0^8 Cx} \Leftrightarrow C = \frac{1}{0+1+2+3+...+8} = \frac{1}{36}$
- $p(2) = P(X = 2) = C \cdot 2 = \frac{1}{18}, \quad p(8) = P(X = 8) = C \cdot 8 = \frac{2}{9}$
- Per calcolare $E[X]$ basta partire dalla definizione di valore atteso:

$$E[X] = \sum_{x \in \{0,...,8\}} xp(x)$$

Quindi in questo caso:

$$E[X] = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + ... + 8 \cdot p(8) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} + ... + 8 \cdot \frac{8}{36} = \frac{204}{36} = 5.66$$

Per calcolare $E[X + 1]$ si considera la properietá di linearitá del valore atteso e quindi si puó scrivere:

$$E[X + 1] = E[X] + 1 = 5.66 + 1 = 6.66$$

Per quanto riguarda, infine, il calcolo si $E[X^2]$, si parte di nuovo dalla definizione di valore atteso:

$$E[X^2] = \sum_{x \in \{0,...,8\}} x^2 p(x) = 0^2 \cdot p(0) + 1^2 \cdot p(1) + 2^2 \cdot p(2) + ... + 8^2 \cdot p(8) = 36$$

2.2 Si consideri la v. a. continua X con *pdf* del tipo

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2, & x \in [-3,3] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si chiede di:

- Calcolare il valore di C
- Determinare le probabilitá $P\{2 \leq X \leq 5\}$
- Calcolare $E[X]$, $E[X+1]$ e $E[X^2]$

Soluzione:

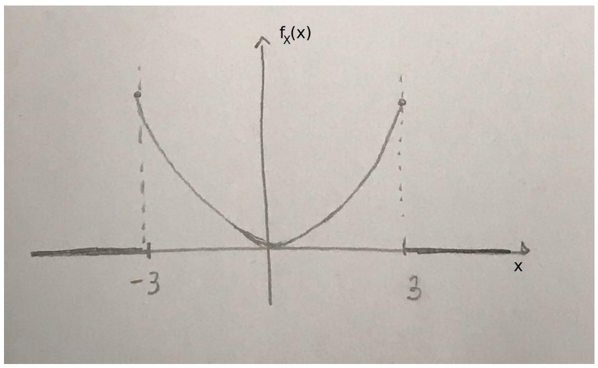

Figura 2: Disegno della densità di probablitià.

- Imponendo la condizione di normalizzazione, si trova:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Cx^2 dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-3}^{3} Cx^2 dx = 1 \Leftrightarrow \left.\frac{Cx^3}{3}\right|_{-3}^{3} = 1 \Leftrightarrow C\frac{27}{3} + C\frac{27}{3} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{18}$$

- Per calcolare la probabilitá $P\{2 \leq X \leq 5\}$ si deve risolvere l'integrale:

$$P\{2 \leq X \leq 5\} = \int_2^5 f(x)dx$$

Ma poiché la $f(x)$ presenta valori diversi da 0 solo nell'intervallo $[-3,3]$, possiamo scomporre l'integrale in due parti: uno da valutare nell'intervallo $[2,3]$ che avrá un valore diverso da 0 da calcolare e uno da valutare nell'intervallo $[3,5]$ che invece dará come risultato 0.

$$P\{2 \leq X \leq 5\} = \int_2^5 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx + 0$$

Quindi sostituendo la $f(x)$ nell'integrale otteniamo che:

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 Cx^2 dx = \left. C\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = C\frac{3^3}{3} - C\frac{2^3}{3}$$

Sostituendo la C con il valore trovato al punto precedente e svolgendo i calcoli si ottiene che $P\{2 \leq X \leq 5\} = \frac{19}{54}$

- Analogamente al caso discreto

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xCx^2 dx = \int_{-3}^{3} xCx^2 dx = \left.\frac{Cx^4}{4}\right|_{-3}^{3} = 0$$

(Si noti che gli estremi dell'integrale sono diventati -3 e 3 perché al di fuori dell'intervallo $[-3, 3]$ la $f_X(x) = 0$).
Anche in questo caso sfruttiamo la proprietá di linearitá del valore atteso

$$E[X+1] = E[X] + 1 = 0 + 1 = 1$$

Infine

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 C x^2 dx = \int_{-3}^{3} x^2 C x^2 dx = \frac{Cx^5}{5}\bigg|_{-3}^{3} = \frac{27}{5}$$

(Di nuovo si noti che gli estremi dell'integrale sono diventati -3 e 3 perché al di fuori dell'intervallo $[-3, 3]$ la $f_X(x) = 0$).

2.3 Sia X una variabile casuale distribuita uniformemente sull'intervallo $[0, 2]$. Calcolare $E[2^X]$ e $Var[2^X]$.

Soluzione:
- $E[2^X] = .5 \int_0^2 2^x = .5 \frac{2^x}{\log 2}|_0^2 = \frac{3}{\log 4}$.
- $E[(2^X)^2] = .5 \int_0^2 2^{2x} dx = \frac{15}{4 \log 2}$. Dunque $E[X^2] - E[X]^2 = ...$

2.4 Lancia un dado onesto a sei facce due volte. Sia E l'evento "la somma dei due risultati è 7", F_1 "il primo risultato è 4" e F_2 "il secondo risultato è 3". Dimostra che gli eventi E e F_1 e gli eventi E e F_2 sono indipendenti, ma non gli eventi E e F_1F_2.
Soluzione:
Considerando il numero di risultati favorevoli e il numero totale di combinazioni possibili, otteniamo $P(E) = 1/6$, $P(F_1) = 1/6$, $P(F_2) = 1/6$ e $P(EF_1) = P(EF_2) = 1/36$. Invece $P(E|F_1F_2) = 1 \neq P(E)$.

2.5 Se X e Y sono due variabili casuali discrete con $P(X = 1, Y = 3) = 1/4, P(X = 2, Y = 3) = 1/2, P(X = 3, Y = 4) = 1/20$ e $P(X = 1, Y = 4) = 1/5$ calcola:

a) le probabilità marginali;
b) le media di X e Y;
c) $E[XY^2]$;
d) la covarianza $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Soluzione:

a) Poiché per v.a. discrete si ha che:

$$p_X(x) = P\{X = x\} = \sum_{y|p(x,y)>0} p(x, y)$$

nel nostro caso si ha che $X \in \{1, 2, 3\}$ e che $Y \in \{3, 4\}$ possiamo scrivere:

$$p_X(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}, \quad p_X(X = 2) = \frac{1}{2}, \quad p_X(X = 3) = \frac{1}{20}$$

$$p_Y(Y = 3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \quad p_Y(Y = 4) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$$

b) le media di X e Y;

$$E(X) = \sum_{x|p(x)>0} xp(x) = 1 \times \frac{9}{20} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{20} = \frac{32}{20}$$

$$E(Y) = 3 \times \frac{3}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

c) $E[XY^2]$;

$$E(XY^2) = \sum_{x,y} g(x,y)p(x,y) = \sum_{x,y} xy^2 p(x,y) =$$

$= 1 \times 3^2 \times 1/4 + 2 \times 3^2 \times 1/2 + 3 \times 4^2 \times 1/20 + 1 \times 4^2 \times 1/5 = 9/4 + 9 + 12/5 + 16/5 = 16.85$

d) la covarianza $\text{Cov}(X,Y)$.
Per il calcolo della covarianza, poiché $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, prima di tutto calcoliamo $E(XY)$

$$E(XY) = 1 \times 3 \times \frac{1}{4} + 2 \times 3 \times \frac{1}{2} + 3 \times 4 \times \frac{1}{20} + 1 \times 4 \times \frac{1}{5} = 3/4 + 3 + 3/5 + 4/5 = 5.15$$

quindi sostituendo nel calcolo della covarianza otteniamo che:
$Cov(X,Y) = 5,15 - 32/20 \times 13/4 = -0.05$

2.6 Se X e Y sono due variabili casuali discrete con $P(X = 2, Y = 3) = 1/3, P(X = 3, Y = 3) = 1/4, P(X = 3, Y = 4) = 1/4$ e $P(X = 2, Y = 1) = 1/6$ calcola:

a) le probabilità marginali;

b) le media di X e Y;

c) $E[XY]$;

d) la covarianza $\text{Cov}(X,Y)$.

e) le variabili X e Y sono indipendenti?

f) calcolare $P(X \leq 3, Y \leq 3)$

Soluzione:

a) le probabilità marginali;
Poiché per v.a. discrete si ha che:

$$p_X(x) = P\{X = x\} = \sum_{y|p(x,y)>0} p(x,y)$$

nel nostro caso si ha che $X \in \{2,3\}$ e che $Y \in \{1,3,4\}$ possiamo scrivere:

$$p_X(X = 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad p_X(X = 3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$p_Y(Y = 1) = \frac{1}{6}, \quad p_Y(Y = 3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}, \quad p_Y(Y = 4) = \frac{1}{4}$$

b) le media di X e Y;

$$E(X) = \sum_{x|p(x)>0} xp(x) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{7}{12} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{35}{12}$$

c) $E[XY]$;

$$E(XY) = \sum_{x,y} g(x,y)p(x,y) = 2 \times 3 \times \frac{1}{3} + 3 \times 3 \times \frac{1}{4} + 3 \times 4 \times \frac{1}{4} + 1 \times 2 \times \frac{1}{6} = \frac{91}{12}$$

d) la covarianza $\text{Cov}(X,Y)$.
$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{91}{12} - \frac{5}{2} \times \frac{35}{12} = \frac{182-175}{24} = \frac{7}{24}$

e) le variabili X e Y sono indipendenti?
Le due variabili sono dipendenti dato cha la loro covarianza è non nulla. Inoltre, due variabili casuali sono indipendenti se per ogni coppia di insiemi A e B vale: $P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}$.
Nel nostro caso subito si vede che:
$P(X = 2, Y = 3) = 1/3 \neq \frac{1}{2} \times \frac{7}{12}$.

f) calcolare $P(X \leq 3, Y \leq 3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

2.7 Sia X una variabile aleatoria casuale continua con densitá di probabilitá (pdf) uniforme nell'intervallo $[0, 1]$ e si consideri la variabile aleatoria Y ottenuta come funzione di X secondo la seguente legge:

$$Y = g(X) = X^2 + 1$$

Si determini la funzione di densitá di probabilitá (pdf) di Y.

Soluzione:

Per risolvere questo esercizio seguiamo il metodo *PASSAGGIO PER LA CDF DI Y* descritto nell'ultima pagina.

– PASSO 1: Si definiscano, qualora implicite nel testo, le $f_X(x)$ e $F_X(x)$.
Per completare questo passo ci basta notare che X ha una pdf uniforme nell'intervallo $[0, 1]$. Questo vuol dire che:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

Integrando la $f_X(x)$ possiamo trovare la $F_X(x)$ che risulterá, quindi, definita come segue:

$$F_X(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

– PASSO 2: Si definisca il dominio della variabile aleatoria Y.
Considerato che $Y = g(X) = X^2 + 1$, questo vuol dire che $g(0) \leq y \leq g(1)$, cioé $1 \leq y \leq 2$. Di conseguenza le funzioni pdf e cdf di Y saranno definite per $y \in [1, 2]$

– PASSO 3: Si determini la cdf per l'intervallo di definizione della Y, riconducendosi alla cdf nota di X.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X^2 + 1 \leq y\} = P\{X^2 \leq y - 1\} =$$
$$= P\{-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}\} =$$

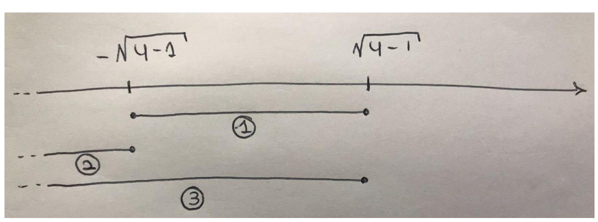

Figura 3:

Si nota dalla figura 3 che calcolare $P\{-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}\}$ equivale a calcolare la probabilitá che X abbia un valore all'interno dell'intervallo 1. Questo a sua volta equivale a calcolare la probabilitá che X sia all'interno dell'intervallo 3 ($X \leq \sqrt{y-1}$) ma non all'interno dell'intervallo 2 ($X \leq -\sqrt{y-1}$). Questo ci permette di scrivere:

$$P\{-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}\} = P\{[X \leq \sqrt{y-1}]\} - P\{[X \leq -\sqrt{y-1}]\} =$$
$$= F_X\{\sqrt{y-1}\} - F_X\{-\sqrt{y-1}\} = F_X\{\sqrt{y-1}\}$$

(Si noti che l'ultima uguaglianza é possibile poiché $F_X\{-\sqrt{y-1}\} = 0$. Infatti $-\sqrt{y-1}$ é sicuramente minore di 0 e la $F_X(x)$ in questo caso ha valori diversi da 0 solo per $x \in [0, 1]$)

– PASSO 4: Si determini la pdf di Y a partire dalla cdf, nell'intervallo di definizione della Y.

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}F_X\{-\sqrt{y-1}\}}{\mathrm{d}y} = f_x(\sqrt{y-1})(y-1)^{-\frac{1}{2}}$$

Quindi considerando il dominio della Y calcolato al punto precedente possiamo scrivere che:

$$f_Y(y) = \begin{cases} (y-1)^{-\frac{1}{2}}, & y \in [1,2] \\ 0, & \mathit{altrimenti} \end{cases}$$