

Appello dell'8/2/23 Cognome, Nome: ALBASINI, ...DARIO...

1.1 (2 punti) Quanti gruppi di quattro amici possono formare Alberto, Beatrice, Carlo, Daniela, Eugenio e Francesca?

1.2 (3 punti) Sia X una variabile casuale con $p(X=0) = 1/3$, $p(X=1) = 1/3$, $p(X=2) = 1/6$ e $p(X=3) = 1/6$? Calcola $\mathbb{E}[X^2]$ e $Pr(X < 1/4)$.

1.3 (2 punti) Se X e Y sono due variabili casuali discrete con

$$p(X=1, Y=4) = \frac{1}{20}, \quad p(X=3, Y=3) = \frac{1}{5}, \quad p(X=3, Y=4) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad p(X=1, Y=3) = \frac{1}{2}$$

calcola $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[X]$ ed $\mathbb{E}[Y]$.

1.4 (4 punti) Calcola e disegna il grafico della *cdf* F della variabile casuale discreta X con

$$p(X=0) = 0.2 \quad \text{e} \quad P(X=1) = 0.8$$

Quanto valgono $F(0)$, $F(0.3)$ ed $F(1)$?

2.1 (3 punti) Sia $H(X) = 3$. Se $H(X|Y) = 3$ che cosa puoi dire delle variabili casuali X e Y ? E se invece $H(X|Y) = 0$?

2.2 (3 punti) Se $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ con $p(1) = 1/2$ e $p(2) = p(3) = p(4) = 1/6$, può esistere una codifica istantanea per la quale $L_1 = 1$ e $L_2 = L_3 = L_4 = 2$? Giustifica la risposta e, quindi, calcola una codifica di Huffman per \mathcal{X} .

2.3 (4 punti) Determina i sotto-intervalli ottenuti dalla codifica aritmetica delle stringhe 000 e 011 se le probabilità di 0 e 1 sono le stesse dell'esercizio 1.4 e commenta i risultati ottenuti.

3.1 (3 punti) Un cassetto contiene 3 monete che, se lanciate, restituiscono *testa* con probabilità $1/4$ e 2 monete che, se lanciate, restituiscono *testa* con probabilità $1/2$. Con quale probabilità il lancio di una moneta pescata a caso è *testa*?

3.2 (2 punti) Sapendo che nella tua città ognuno degli N taxi è identificato da un numero n con $n = 1, \dots, N$, usa il principio di massima verosimiglianza per stimare N se una mattina hai visto i taxi 1100, 1090 e 1110. Giustifica la tua risposta.

3.3 (4 punti) Data la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

qual è la probabilità di passare dallo stato 2 allo stato 1 in un passo e in due passi?