

# Variabile Aleatoria

Lorenzo Vaccarecci

14 Marzo 2024

## 1 Variabili Casuali

Una variabile casuale è una funzione a valori reali definita sullo spazio campionario.

$$X : S \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$$

### 1.1 Esempio

$X$  somma del lancio di due dadi.

## 2 Funzione di probabilità di massa

Nel caso di una variabile  $X$  a valori discreti  $x_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ , la funzione di probabilità di massa  $p(\cdot)$  definita sulla retta reale, o *pmf* o anche solo *funzione di probabilità*, contiene tutta l'informazione necessaria per descrivere completamente  $X$ . Si ha che  $p(x_i) = P(X = x_i) \geq 0$  con  $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$ .

La notazione corretta sarebbe  $p(\{x_i\})$

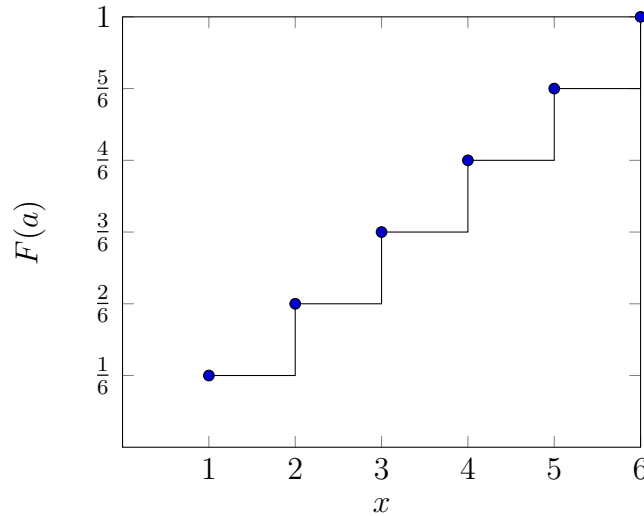
### 2.1 Esempio continuato

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6, x_6 = 7, x_7 = 8, x_8 = 9, x_9 = 10, x_{10} = 11, x_{11} = 12$$
$$p_1 = \frac{1}{36}, p_2 = \frac{2}{36}, p_3 = \frac{3}{36}, p_4 = \frac{4}{36}, p_5 = \frac{5}{36}, p_6 = \frac{6}{36}, p_7 = \frac{5}{36}, p_8 = \frac{4}{36}, p_9 = \frac{3}{36}, p_{10} = \frac{2}{36}, p_{11} = \frac{1}{36}$$

## 3 Funzione di probabilità cumulata

Ordiniamo i valori  $x_i$  in modo tale che  $x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n$  e introduciamo la funzione di probabilità cumulata  $F(a)$ , o *cdf*, definita come

$$F(a) = \sum_{x_i \leq a} p(x_i)$$



L' $i$ -esimo gradino è localizzato nel punto  $x_i$  e il salto corrispondente vale  $P(x_i)$ . La somma di tutti i gradini, ovviamente, è sempre 1.

### 3.1 Valore atteso (o Speranza, Espettazione)

Il valore atteso  $\mu$  di una variabile casuale  $X$  è indicato con  $\mathbb{E}[X]$  ed è la media pesata dei valori  $x_i$  che può assumere  $X$ . Ogni  $x_i$  è pesato con la sua probabilità  $p(x_i)$  e quindi si ha

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Il valore atteso di una variabile casuale non è casuale!

## 4 Varianza

Una seconda quantità che cattura proprietà importanti di una variabile casuale  $X$  è la varianza  $Var(X)$  definita come  $Var(X) = E[(X - \mu)^2]$ .

In parole povere è la dispersione dei valori intorno al valore medio.

### 4.1 Deviazione standard

Una quantità molto usata è la radice quadrata della varianza, nota come deviazione standard, o

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

## 5 Funzione di variabile aleatoria discreta

$$g : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{E}[g(x)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) p_i$$

### 5.1 Esempio

$$g(x) = 5X + 3 \rightarrow$$

$$\mathbb{E}[g(x)] = \sum_{i=1}^n (5x_i + 3)p_i = \sum_{i=1}^n 5x_i p_i + \sum_{i=1}^n 3p_i = 5 \sum_{i=1}^n x_i p_i + 3 \sum_{i=1}^n p_i = 5\mathbb{E}[X] + 3$$