Foglio 3

20 maggio 2024

3.1 Quanti consigli di amministrazione di 7 membri (di cui un presidente) è possibile formare disponendo di 10 candidati, dei quali però solo 3 possono assumere la presidenza?
Soluzione:
Scelta del presidente $\binom{3}{1} = 3$. Scelta dei restanti membri $\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!}$. Quindi, per la regola della composizione, abbiamo $3 \cdot \frac{9!}{6!3!}$ combinazioni.

3.2 Un'urna contiene 2 palline verdi, 3 rosse e 5 bianche; estraiamo casualmente 3 palline senza reinserimento. Guadagniamo 1 euro per ogni pallina verde, nulla per ogni pallina bianca e perdiamo 1 euro per ogni pallina rossa. Calcola la funzione di probabilità di massa e il valore atteso della vincita X.
Soluzione:
La vincita di X euro è una variabile casuale i cui possibili valori sono $0, \pm 1, \pm 2, -3$. I risultati possibili dell'esperimento sono le combinazioni di 3 palline scelte tra 10. Nell'assunzione di equiprobabilità, la probabilità con la quale X assume un possibile valore si riduce al calcolo dei casi favorevoli corrispondenti. Limitandoci ai casi in cui $X \leq 0$, osserviamo che $X = 0$ si ottiene con 3 palline bianche o 1 di ognicolore, $X = -1$ con 1 rossa e 2 bianche o 2 rosse e 1verde, $X = -2$ con 2 rosse e 1 biancae $X = -3$ con 3 rosse. Avremo pertanto

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{40}{120},\ P(X=-1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{5} + \binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120}$$

$$P(X=-2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{15}{120},\ P(X=-3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}.$$

La probabilità di non vincere è $(40+36+15+1)/120 = 92/120 = 0.7\bar{6}$. Similmente, la probabliità di vincere risulta essere pari a $28/120 = 0.2\bar{3}$ o $1 - 0.7\bar{3}$. Il valore atteso è pari a

$$E[X] = \sum_{X \in \Omega} XP(X) \approx -0.3,$$

con Ω tutti i risultati possibili. Se il numero di palline rosse nell'urna è uguale al numero di palline verdi, la probabilità di vincita è uguale a quella di perdita e quindi il valore atteso di X è zero.

3.3 Data la v.a. Continua X con pdf $f(x) = C(x^3 + 3x)$ definita nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$, si chiede di:
- Determinare il valore di C.
- Determinare la probabilitá $P\{\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\}$
- Calcolare $E[2X^4]$.
Soluzione:
- $\int_0^2 f(x)dx = 1 \Rightarrow C = 1/10$.
- $\int_{1/2}^{3/2} f(x)dx = 17/40$.
- $\int_0^2 f(x)2x^4 dx = 64/5$

3.4 Dalle statistiche di accesso al pronto soccorso del Desert Samaritan Hospital di Mesa, Arizona, emerge che a partire dalle 18.00 il tempo che trascorre fino all'arrivo del primo paziente ha di-

stribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 6.9$, con il tempo misurato in ore (quindi per esempio $18.30 \to 1/2$, $19.00 \to 1$). Si calcoli:
1. La probabilita‘ che, a partire dalle 18.00, il primo paziente arrivi tra le 18.15 e le 18.30
2. La probabilita‘ che, a partire dalle 18.00, il primo paziente arrivi prima delle 19.00
3. Supposto che il primo paziente non arrivi entro le 18.15, si calcoli la probabilita‘ che arrivi prima delle 18.45.
Soluzione:

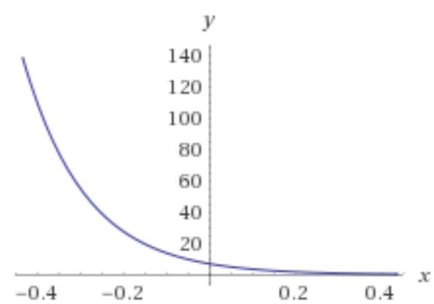

Figura 1: Distribuzione esponenziale.

Indicato con X l'istante in cui arriva il primo paziente si ha che la pdf che la caratterizza sará $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 6.9e^{-6.9x}$ se $x > 0$ e $f_X(x) = 0$ altrimenti. Le probabilitá richieste possono essere calcolate usando la funziona di densitá di probabilitá come segue.

- La probabilitá che il primo paziente arrivi tra le 18.15 e le 18.30 si calcola cosí:

$$P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f_X(x)dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 6.9e^{-6.9x}dx = -e^{-6.9x}\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = 0.146$$

  In altri termini il paziente giungerá al pronto soccorso tra le 18.15 e le 18.30 nel $14,6\%$ dei casi.

- Invece la probabilitá che il primo paziente arrivi prima delle 19.00 é:

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int_{0}^{1} f_X(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 6.9e^{-6.9x}dx = -e^{-6.9x}\Big|_{0}^{1} = 0.999.$$

  In altri termini é molto probabile che il primo paziente arrivi al pronto soccorso prima delle 19.00.

- Si vuole calcolare la probabilitá $P(X \leq \frac{3}{4}|X > \frac{1}{4})$. Considerando le proprietá degli eventi complementari si puó scrivere:

$$P\left(X \leq \frac{3}{4}\middle|X > \frac{1}{4}\right) = 1 - P\left(X > \frac{3}{4}\middle|X > \frac{1}{4}\right) =$$

  Scrivendo $\frac{3}{4}$ come somma di termini otteniamo che:

$$= 1 - P\left(X > \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\middle|X > \frac{1}{4}\right)$$

  Usando la proprietá della mancanza di memoria delle variabili casuali esponenziali si ottiene:

$$= 1 - P\left(X > \frac{1}{2}\right) =$$

Per calcolare questa probabilitá si procede come al punto 2:

$$= P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f_X(x)dx =$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} 6.9e^{-6.9x}dx = 1 - e^{-6.9/2} = 0.968$$

(Poteva essere ottenuto in maniera diretta usando la regola delle probabilitá condizionate)

3.5 Un cassetto contiene due dadi a sei facce onesti e sette dadi a sei facce con P(1) = P(2) = P (3) = 1/9 e P (4) = P (5) = P (6) = 2/9. Pescando un dado a caso dal cassetto e lanciandolo, qual è la probabilità di ottenere 1 o 2? Supponiamo di aver ottenuto 1 o 2. Qual è la probabilità di aver pescato un dado onesto?
Soluzione:
Chiamiamo evento A l'estrazione del dado onesto ed evento B l'estrazione del dado disonesto. Abbiamo:

$$P(i) = P(i|A)P(A) + P(i|B)P(B) = \frac{1}{6}\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\frac{7}{9} = \frac{10}{81},\ i = 1, 2.$$

Quindi

$$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) = 2P(1) = \frac{20}{81}.$$

$$P(A|2) = P(2|A)P(A)/P(2) = \frac{1/6 \times 2/9}{10/81} = \frac{3}{10}.$$