

30/5/23 Cognome, Nome:,

1.1 (2 punti) Quanti sono le possibili combinazioni di 3 cifre di un lucchetto con e senza ripetizioni?

✓ 1.2 (3 punti) Se X e Y sono due variabili casuali discrete con

$$\begin{aligned} p(X=1, Y=2) &= p(X=2, Y=3) = p(X=3, Y=4) = \frac{1}{27} \\ p(X=1, Y=3) &= p(X=2, Y=2) = p(X=3, Y=2) = \frac{1}{9} \\ p(X=1, Y=4) &= p(X=2, Y=4) = p(X=3, Y=3) = \frac{5}{27} \end{aligned}$$

calcola $p_Y(4)$, $p_X(1)$, $p(X=1|Y=4)$ e $p(Y=4|X=1)$. Le due variabili casuali sono indipendenti? Motiva la tua risposta.

✓ 1.3 (3 punti) Determina il valore di a per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{3} & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{a}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una densità di probabilità. Quindi calcola e produci il grafico della *cdf* della variabile casuale continua X sottostante.

1.4 * (3 punti) Dimostra che per a e b costanti reali, $E[aX+b] = aE[X] + b$ e $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$.

2.1 (3 punti) Se $H(X) = 3$ e $H(X, Y) = 5$ che cosa si può dire di $H(Y)$ e $H(Y|X)$ in generale? E se X e Y fossero indipendenti?

2.2 (2 punti) Dato un alfabeto di 6 simboli, può esistere una codifica univocamente decifrabile tale per cui le lunghezze sono 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

2.3 (3 punti) Date le equazioni di parità

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x[n] + x[n-1] + x[n-2] \\ y_2[n] &= x[n] + x[n-1] \\ y_3[n] &= x[n] + x[n-2] \end{aligned}$$

se $x[3] = 0$ e $x[4] = 1$ con quale tripletta di bit è codificato il bit $x[5] = 1$?

✓ 2.4 * (3 punti) Spiega a parole per quale motivo la codifica di Huffman per simbolo non può essere utilizzata per la compressione di un file binario e come si potrebbe ovviare a questo inconveniente.

3.1 (2 punti) Se p è la probabilità di ottenere *testa* nel lancio di una moneta, calcola la verosimiglianza di $p = 1/3$ e $p = 2/3$ per una moneta che, lanciata 4 volte, produce 1 volta *testa* e 3 *croce*.

✓ 3.2 (3 punti) Un cassetto contiene 3 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/8$ e 2 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/2$. Qual è la probabilità di ottenere *testa* pescando una moneta a caso? E quale quella di ottenere *testa* al secondo lancio dopo aver ottenuto *testa* nel primo?

3.3 (3 punti) Nel caso in cui esistano, determina la distribuzione limite e quella stazionaria per la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

3.4 * (3 punti) Scrivi le condizioni per cui una matrice di transizione è irriducibile e quelle per cui è regolare. Produci un esempio di matrice irriducibile ma non regolare.