Probabilità Condizionata

Lorenzo Vaccarecci

7 Marzo 2024

In generale quando, dati due eventi E e F, siamo interessati a calcolare la probabilità di E quando sappiamo che si è realizzato F. La probabilità di E condizionata a F, indicata come $P(E|F)$, è definita come

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

Osservazione 1 Lo spazio campionario si è ridotto da S a F e misura $P(F)$

Osservazione 2 Quando non c'è intersezione, la probabilità è nulla

Osservazione 3 $P(E|F) = \frac{P((A \cup A^C)F)}{P(F)} = \frac{P(AF)}{P(F)} + \frac{P(A^C F)}{P(F)} = P(A|F) + P(A^C|F)$

La probabilità condizionata soddisfa gli assiomi delle probabilità con F come spazio campionario.

1 Regola della moltiplicazione

Base:

$$P(ABC) = P(AB|C)P(C) = P(A|BC)P(B|C)P(C)$$

Generale:

$$P(E_1 E_2 \dots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2) \dots P(E_n|E_1 E_2 \dots E_{n-1})$$

2 Teorema di Bayes

Per ogni coppia di eventi E e F, applicando la definizione di probabilità condizionata, possiamo riscrivere $P(F|E)$ in termini di $P(E|F)$ (o viceversa). Ovvero

$$P(E|F) = \frac{P(E|F)P(E)}{P(F)}$$

Formula della probabilità assouluta

$$P(E) = P(EF) + P(EF^C) = P(F)P(E|F) + P(F^C)P(E|F^C)$$

Quindi il teorema di Bayes diventa:

$$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(F)P(E|F) + P(F^C)P(E|F^C}$$

3 Eventi indipendenti

$$P(EF) = P(E) \cdot P(F) \to P(E|F) = \frac{P(E)P(F)}{P(F)} = P(E)$$