

Codifiche in presenza di rumore

Lorenzo Vaccarecci

10 Maggio 2024

1 Ripasso: Distanza di Hamming

Per due sequenze di bit $u = u_1u_2 \dots u_N$ e $v = v_1v_2 \dots v_N$ di lunghezza N la distanza di Hamming $d_H(u, v)$ è definita come il numero di posizioni nelle quali i bit delle due sequenze sono diversi.

Proprietà:

- *Simmetria*: $d_H(u, v) = d_H(v, u)$
- *Non negatività*: $d_H(u, v) \geq 0$, $d_H(u, v) = 0$ se $u = v$
- *Disuguaglianza triangolare*: $d_H(u, w) + d_H(w, v) \geq d_H(u, v)$

2 Codifica convoluzionale

Data una sequenza di input x di lunghezza N , facciamo scorrere una finestra di lunghezza K su x avanzando di una posizione alla volta, indichiamo con P la dimensione di un blocco. Indichiamo con $x[n]$ l' n -esimo bit della sequenza x con $n = 1, 2, \dots, N$.

$$y_i[n] = \left(\sum_{j=0}^{K-1} w_i[j]x[n-j] \right) \% 2$$

dove w_i sono le finestre di lunghezza K a partire dalla prima cifra ("fuori dalle parentesi") di x con $i = 1, 2, \dots, P$. Se x non è perfettamente divisibile per w_1 bisogna prendere i rimanenti bit dal fondo di x .

Esempio:

$x = 1101, P = 3 = K, N = 4$

A x aggiungiamo degli zeri ($K - 1$) per comodità ottenendo $x = (0)(0)1101$, ora calcoliamo la sequenza di output y . $w_1 = [111], w_2 = [110], w_3 = [101]$.

$$y_1[1] = \left(\sum_{j=0}^2 w_1[j]x[1-j] \right) \% 2 = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0) \% 2 = 1$$

$$y_2[1] = \left(\sum_{j=0}^2 w_2[j]x[1-j] \right) \% 2 = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0) \% 2 = 1$$

$$y_3[1] = \left(\sum_{j=0}^2 w_3[j]x[1-j] \right) \% 2 = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0) \% 2 = 1$$

Quindi $y[1] = 111$, ripetiamo per ogni $n = 1, 2, 3, 4$ ottenendo il risultato: $y = 111 \quad 001 \quad 011 \quad 010$

2.1 Costruire FSM

Dopo aver calcolato y dobbiamo costruire la FSM per decodificare y partendo dalla prima cifra (comprese quelle "tra parentesi") e poi fare le casistiche.

