

1/6/23 Cognome, Nome: Marinoni Tommaso

1.1 (2 punti) Quanti sono gli anagrammi (contando anche le parole senza senso) di TERRIER?

1.2 (3 punti) Se  $p(X=1, Y=2) = 2/5$ ,  $p(X=1, Y=3) = 1/5$  e  $p(X=1) = 3/5$  quanto valgono di  $P(Y=2|X=1)$  e  $P(Y=3|X=1)$ ? Se  $P(Y=2) = P(Y=3) = 1/2$  le variabili  $X$  e  $Y$  sono dipendenti o indipendenti? (giustifica la tua risposta)

1.3 (3 punti) Determina il valore di  $a$  per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una densità di probabilità. Quindi, calcola e produci il grafico della cdf della variabile casuale continua  $X$  sottostante.

1.4 \* (3 punti) Enuncia gli assiomi della Teoria della Probabilità.

2.1 (2 punti) Se nella ricerca di un sottomarino in una tabella di 256 caselle fallisci 128 volte, quanti bit di informazione hai guadagnato?

2.2 (3 punti) Produci una codifica di Huffman per un alfabeto di 6 simboli con

$$p(a) = \frac{7}{20}, \quad p(b) = p(c) = \frac{5}{20}, \quad p(d) = p(e) = p(f) = \frac{1}{20}$$

2.3 (3 punti) Se  $p(0) = 1/5$  e  $p(1) = 4/5$ , determina gli intervalli nella codifica aritmetica delle sequenze di bit 111 e 001. Commenta i risultati che ottieni.

2.4 \* (3 punti) Se la mutua informazione è definita come  $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$  che cosa puoi dire su  $X$  e  $Y$  se  $I(X; Y) = H(Y)$ , o se  $I(X; Y) = 0$ ?

3.1 (2 punti) In una piccola città in cui i taxi sono numerati da 1 a  $n$ , osservi i taxi numero 8, 10 e 12. Calcola e confronta le verosimiglianze per  $n = 10$  e 20. Commenta i risultati che ottieni.

3.2 (3 punti) Un cassetto contiene 5 monete che restituiscono *testa* con probabilità  $1/4$  e 1 moneta che restituisce *testa* con probabilità  $1/2$ . Qual è la probabilità di ottenere *testa* pescando una moneta a caso? E quale quella di ottenere croce al secondo lancio dopo aver ottenuto *testa* nel primo?

3.3 (3 punti) Data la matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

calcola la probabilità di passare dallo stato 1 allo stato 2 in due passi.

3.4 \* (3 punti) Dimostra che la distribuzione limite di una matrice di transizione regolare simmetrica  $2 \times 2$  è sempre  $\lambda = (1/2 \ 1/2)^T$ . Dovresti riuscirci senza fare moltiplicazioni di matrici.

Il sottomarino è sotto alta entropia da questa informazione