Formulario A.A 2023/2024

7 gennaio 2025

1 Esercizio 1

- **Anagrammi**: $A = \frac{\text{totale lettere!}}{\text{lettere uguali!}\cdot\text{altre lettere uguali!}}$
- **Combinazione senza duplicati**: $C = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k)$
- **Combinazione con duplicati**: $C = n!$
- **Gruppi di amici**: $G = \frac{\text{totale!}}{\text{cardinalità gruppo!}\cdot(\text{totale-cardinalità gruppo})}$

2 Esercizio 2

- **Valore atteso**: $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot p_i$
- **Valore atteso con la variabile che fa parte di una congiunta**: $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_y \sum_x = g(X = x) \cdot p(x, y)$
- **Probabilità condizionata**: $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)}$
- **Trovare probabilità (marginali) di una variabile che fa parte di una congiunta**: $P(X) = \sum_y P(X, y)$
- **Varianza**: $Var(X) = \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[X^2]$

3 Esercizio 3

3.1 Funzione densità di probabilità (pdf)

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \in [y, z] \cup [w, k] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a = \int_y^z a\,dx + \int_w^k a\,dx = 1$$

3.2 Funzione di distribuzione cumulativa (cdf)

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < y \\ \int_y^x a\,dx & \text{se } x \in [y, z] \\ \int_w^x a\,dx & \text{se } x \in [w, k] \\ 1 & \text{se } x > k \end{cases}$$

4 Esercizio 4

Domanda teorica

5 Esercizio 5

- Bit di guadagno se equiprobabili: $\log_2(\#\text{possibilità}) - \log_2(\#\text{tentativi})$
- Bit di guadagno se non equiprobabili: $\log_2(\frac{1}{\frac{1}{\#\text{possibilità}}}) - \log_2(\frac{1}{\frac{\#\text{tentativi}}{\#\text{possibilità}}})$
- Entropia condizionata: $H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$, $H(Y|X) = H(X,Y) - H(X)$. Se X e Y sono indipendenti, $H(X|Y) = H(X)$ altrimenti 0.
- Entropia congiunta: $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) = H(X) + H(Y|X)$

6 Esercizio 6

- Trovare codifica convoluzionale per $x[k]$ date le equazioni di parità $y_i[n]$: sostituisci n con k e risolvi le operazioni eseguendo poi il modulo 2.
- Entropia già spiegata nell'es 5

7 Esercizio 7

- Determinare se è codifica di Huffman/istantanea: $\sum_{x \in \text{alfabeto}} 2^{-L_C(x)} \leq 1$
- Lunghezza attesa: $H(X) = \sum_{i=1}^{|\text{alfabeto}|} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$
- Determinare se è ottimale:
  1. Calcolo lunghezza attesa
  2. $L(C, \text{alfabeto}) = \sum_{i=1}^{|\text{alfabeto}|} p_i \cdot L_C(x_i)$
  3. Se $L(C, \text{alfabeto}) = H(X)$ allora è ottimale, $\leq H(X)$ c'è spreco, $> H(X)$ c'è inefficienza.

8 Esercizio 8

- Codifica aritmetica
- Codifica di Huffman a blocchi:
  1. Determinare tutti i possibili blocchi
  2. Calcolarne la probabilità moltiplicando le probabilità dei singoli simboli tra di loro
  3. Applicare Huffman

9 Esercizio 9/10

- Cassetto di monete:
  1. Determino probabilità di ottenere le monete $P(M_k)$
  2. Determino probabilità di ottenere testa/croce con le monete $P(x|M_k)$
  3. Calcolare probabilità di ottenere testa/croce pescando a caso: $P(x) = \sum_k P(M_k) \cdot P(x|M_k)$
  4. Calcolare probabilità di ottenere testa/croce usando la stessa moneta:
     (a) Probabilità condizionata per una moneta: $P(xx|M_k) = P(M_k)P(x|M_k)P(x|M_k)$
     (b) Probabilità congiunta $P(xx) = P(M_k)P(xx|M_k) + P(M_z)P(xx|M_z)$
     (c) Probabilità condizionata per moneta pescata a caso: $P(x|x) = \frac{P(xx)}{P(x)}$
- Verosomiglianza di una sequenza: $L(x|\theta) = \Pi_i p_i$
- Verosomiglianza distribuita uniformemente: $L(x|S) = \begin{cases} \frac{1}{S^n} & \text{se } S \geq x_{max} \\ 0 & \text{se } S < x_{max} \end{cases}$, nel caso dei taxi x_{max} è il numero massimo delle licenze di conseguenza metteremo che $S = x_{max}$ se non vengono fornite le ipotesi altrimenti S saranno le ipotesi e n è il numero di taxi osservati.

10 Esercizio 11

- Conferma che sia matrice di transizione: la somma delle righe deve essere 1
- Conferma che sia regolare: esiste un passo t tale che $P^t_{rc} > 0$
- Distribuzione stazionaria:
  1. $\pi = \pi \cdot P$ con π_i somma degli elementi della colonna
  2. Condizione: $\sum_i \pi_i = 1$
  3. Isolo una delle π_i e risolvo il sistema
  4. $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix}$
- Distribuzione limite: $\lim_{t\to\infty} P^t = \lambda_j$ esiste se P^t converge alla matrice con tutte le righe uguali a λ_j, non può esistere se la matrice non è regolare. Se la matrice è irriducibile e aperiodica, la distribuzione limite esiste e coincide con la distribuzione stazionaria.