Proprietà dei Valori Attesi

Lorenzo Vaccarecci

5 Aprile 2024

1 Funzione di variabili casuali

Il valore atteso di $g(X, Y)$, nel caso discreto, può essere calcolato come

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)p(x,y)$$

Se $g(X, Y) = X + Y$

$$\mathbb{E} = \sum_x \sum_y (x+y)p(x,y) = \ldots = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

Se $g(X, Y) = XY$

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

solo se X e Y sono indipendenti.

1.1 Valore atteso di una variabile casuale binomiale

Bernoulli con $\mathbb{E}[X_i] = p$ per tutti gli i.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = np$$

2 Media e varianza campionaria

Se le X_i per $i = 1, \ldots, n$ sono variabili casuali **identicamente** e **indipendentemente** distribuite con valore atteso μ e varianza σ^2 definiamo la *media campionaria* $\langle X_n \rangle$ e la *varianza campionaria* S^2 come

$$\langle X_n \rangle = \frac{\sum_i X_i}{n}$$

$$\mathbb{E}[\langle X_n \rangle] = \frac{\sum_i \mathbb{E}[X_i]}{n} = \mu$$

3 Covarianza e varianza di somme

Se le X e Y sono indipendenti

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \sum_x \sum_y g(x)h(y)p(x,y) = \sum_x g(x)p(x) \sum_y h(y)p(y) = \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]$$

La covarianza di due variabili casuali X e Y è definita come $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Se X e Y sono indipendenti allora $Cov(X,Y) = 0$.

$$Cov(\alpha X + Y) = \ldots = \alpha Cov(X,Y)$$

3.1 Varianza

$$Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

Se indipendenti

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

3.2 Correlazione

La correlazione $\rho(X,Y)$ di due variabili casuali X e Y è definita come

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

Abbiamo che $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.
Dimostrazione:

$$Var\left(\frac{X}{\sigma} + \frac{Y}{\tau}\right) = Var\left(\frac{X}{\sigma}\right) + Var\left(\frac{Y}{\tau}\right) + 2Cov\left(\frac{X}{\sigma}, \frac{Y}{\tau}\right) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X) + \frac{1}{\tau^2}Var(Y) + 2\frac{1}{\sigma\tau}Cov(X,Y) = 2(1+\rho(X,Y)) \geq 0$$

Per dimostrare che è ≤ 1 basta usare $Var\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{Y}{\tau}\right)$ e il procedimento è lo stesso di prima.

4 In generale

$X_1, \ldots, X_T \quad \otimes_{i=1}^{T} \left\{X_1^1, \ldots, X_{N_i}^i\right\}$ (prodotto cartesiano di T insiemi di variabili casuali).

$$\sum p(i, \ldots, i_T) = 1$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} X_t\right] = \sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}\left[X_t\right] \tag{1}$$

$$Var\left(\sum_{t=1}^{T} X_t\right) = \sum_{t=1}^{T} Var(X_t) \tag{2}$$

X_t identiche $\mathbb{E}[X_t] = \mu$, $\mu_t = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} = \mu_t$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} X_t\right] = T\mu \tag{3}$$

Dalla terza equazione si può ricavare la **media campionaria** dividendo per T.