15/6/23 Cognome, Nome: ...ABIL..., ...YASSINE...

1) **1.1** (2 punti) Quanti gruppi di tre amici possono formare Alice, Berto, Carla, Damiano ed Emilia?

2) **1.2** (3 punti) Se X e Y sono due variabili casuali discrete con

$$\begin{aligned}
p(X=1,Y=2)=p(X=2,Y=4)=p(X=3,Y=5) &= \frac{1}{27}\\
p(X=1,Y=4)=p(X=2,Y=2)=p(X=3,Y=2) &= \frac{1}{9}\\
p(X=1,Y=5)=p(X=2,Y=5)=p(X=3,Y=4) &= \frac{5}{27}
\end{aligned}$$

ricava $p_Y(5)$, $p_X(2)$, $p(X=2|Y=5)$ e $p(Y=5|X=2)$. Calcola $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ e $\mathbb{E}[XY]$ e commenta i risultati che ottieni.

3) **1.3** (3 punti) Determina il valore di a per il quale la funzione

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2} & -2\le x\le -1\\ \frac{a}{2} & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

è una densità di probabilità. Quindi calcola e produci il grafico funzione di distribuzione cumulativa.

4) **1.4** * (3 punti) Enuncia il Teorema di Bayes per gli eventi casuali E, E^c ed F.

5) **2.1** (2 punti) Se $H(X)=3$, $H(Y)=4$ e $H(X,Y)=5$ determina le entropie condizionate. Le variabili X e Y sono dipendenti o indipendenti? Giustifica la tua risposta.

6) **2.2** (3 punti) Produci una codifica di Huffman per un alfabeto di 6 simboli con

$$p(a)=\frac{2}{5},\quad p(b)=\frac{1}{5},\quad p(c)=p(d)=p(e)=p(f)=\frac{1}{10}$$

7) **2.3** (3 punti) Date le equazioni di parità

$$\begin{aligned}
y_1[n] &= x[n]+x[n-1]+x[n-2]\\
y_2[n] &= x[n]+x[n-1]
\end{aligned}\tag{1}$$

se $x[3]=1$ e $x[4]=1$ con quale coppia di bit è codificato il bit $x[5]=1$?

8) **2.4** * (3 punti) Definisci la decifrabilità univoca e l'istantaneità. Prova la falsità dell'affermazione che tutte le codifiche decifrabili univocamente sono istantanee per mezzo di un controesempio.

9) **3.1** (2 punti) In una città in cui i taxi sono numerati da 1 a n, osservi i taxi numero 5, 10 e 15. Calcola e confronta le verosimiglianze per $n=10$, 15 e 20. Per quale dei tre valori la verosimiglianza è massima?

10) **3.2** (3 punti) Un cassetto contiene 5 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/10$ e 1 moneta che restituisce *testa* con probabilità $1/2$. Qual è la probabilità di ottenere *testa* pescando una moneta a caso? E quale quella di ottenere croce al secondo lancio dopo aver ottenuto *testa* nel primo?

11) **3.3** (3 punti) Data la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

calcola la probabilità di passare dallo stato 1 allo stato 2 in tre passi.

12) **3.4** * (3 punti) Una moneta restituisce *testa* con probabilità p_0. Dimostra che lo stimatore di p_0 ottenuto applicando il principio di massima verosimiglianza per una moneta lanciata 10 volte è

$$\hat{p} = \frac{numero\ di\ teste}{10}$$