

Appello del 9/1/23 Cognome, Nome:,

1.1 (2 punti) Quanti gruppi di tre amici possono formare i sei amici Alberto, Beatrice, Carlo, Daniela, Eugenio e Francesca?

1.2 (3 punti) Sia X una variabile casuale con $p(X=0) = 1/3$, $p(X=1) = 1/3$, $p(X=2) = 1/6$ e $p(X=3) = 1/6$. Calcola $E[X]$ e $Var(X)$.

1.3 (2 punti) Se X e Y sono due variabili casuali discrete con

$p(X=1, Y=4) = \frac{1}{5}$, $p(X=3, Y=3) = \frac{1}{4}$, $p(X=3, Y=4) = \frac{1}{20}$ e $p(X=1, Y=3) = \frac{1}{2}$
calcola $E[X/Y]$, $E[X]$ ed $E[Y]$.

1.4 (4 punti) Calcola e disegna il grafico della cdf F della variabile casuale discreta X con

$$p(X=0) = 0.1 \quad \text{e} \quad P(X=1) = 0.9$$

Quanto valgono $F(0)$, $F(0.1)$, $F(0.9)$ ed $F(1)$?

2.1 (3 punti) Quanto vale l'entropia di Shannon in una lotteria con 64 numeri equiprobabili? Se la zia che estrae i numeri è disonesta e preferisce alcuni numeri rispetto ad altri, l'entropia di Shannon aumenta o diminuisce? Giustifica la risposta.

2.2 (3 punti) Se $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ con $p(1) = 1/2$ e $p(2) = p(3) = p(4) = 1/6$, può esistere una codifica istantanea per la quale $L_1 = 1$ e $L_2 = L_3 = L_4 = 2$? Giustifica la risposta e, quindi, calcola una codifica di Huffman per \mathcal{X} .

2.3 (4 punti) Determina i sotto-intervalli ottenuti dalla codifica aritmetica delle stringhe 010 e 101 se le probabilità di 0 e 1 sono le stesse dell'esercizio 1.4 e commenta i risultati ottenuti.

3.1 (3 punti) Un cassetto contiene 3 monete che, se lanciate, restituiscono *testa* con probabilità $1/4$ e 1 moneta che, se lanciata, restituisce *testa* con probabilità $1/2$. Con quale probabilità il lancio di una moneta pescata a caso è *croce*?

3.2 (2 punti) Sapendo che nella tua città ognuno degli N taxi è identificato da un numero n con $n = 1, \dots, N$, usa il principio di massima verosimiglianza per stimare N se una mattina hai visto i taxi 110, 20 e 318. Giustifica la tua risposta.

3.3 (4 punti) Data la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

qual è la probabilità di passare dallo stato 1 allo stato 2 in un passo e in due passi?