Entropia Congiunta e Condizionata

Lorenzo Vaccarecci

19 Aprile 2024

1 Definizioni

$p(xi, y_j) = p_X(x_i)p(y_j|x_i)$

1.1 Entropia Congiunta

Per l'entropia congiunta $H(X, Y)$ abbiamo

$$H(X,Y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i, y_j)}$$

1.2 Entropia Condizionata

$$H(X|Y = y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i|y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i|y_j)}$$

$$H(X|Y) = \sum_{j=1}^{M} p_Y(y_j) H(X|Y = y_j)$$

1.2.1 Osservazione

$$H(X,Y) = H(X|Y) + H(Y)$$

$$H(X|Y) < H(X)$$

$$H(Y|X) < H(Y)$$

Sono $\leq \iff$ indipendenti

1.3 Uguaglianza fondamentale

Per ogni coppia di variabili casuali discrete X e Y si ha

$$H(X,Y) = H(X|Y) + H(Y) = H(Y|X) + H(X)$$

Dimostrazione negli appunti.

1.4 Disuguaglianza fondamentale

La realizzazione di Y non può aumentare l'entropia di X. Se X e Y sono variabili casuali, allora

$$H(X|Y) \leq H(X)$$

Dimostrazione negli appunti.

1.5 Osservazione

Combinando le due relazioni otteniramo che se le variabili X e Y sono indipendenti

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y)$$

ovvero l'entropia congiunta è uguale alla somma delle entropie