Foglio 1

11 aprile 2024

1.1 Sia Y una variabile casuale discreta che rappresenta il numero di prodotti difettosi in un lotto di sei. Se la probabilità che uno sia difettoso è 0.1, trova la funzione di probabilità di massa Y.
Soluzione:
Questa circostanza viene descritta da una distribuzione binomiale. La funzione di probabilità di massa è:

$$P(Y = k) = \binom{6}{k}(0.1)^k(0.9)^{6-k}$$

Sostituendo i valori, otteniamo:

$$P(Y = 0) = \binom{6}{0}(0.1)^0(0.9)^6 = 0.531441$$
$$P(Y = 1) = \binom{6}{1}(0.1)^1(0.9)^5 = 0.354294$$
$$P(Y = 2) = \binom{6}{2}(0.1)^2(0.9)^4 = 0.098415$$
$$P(Y = 3) = \binom{6}{3}(0.1)^3(0.9)^3 = 0.01458$$
$$P(Y = 4) = \binom{6}{4}(0.1)^4(0.9)^2 = 0.001215$$
$$P(Y = 5) = \binom{6}{5}(0.1)^5(0.9)^1 = 0.000054$$
$$P(Y = 6) = \binom{6}{6}(0.1)^6(0.9)^0 = 0.000001$$

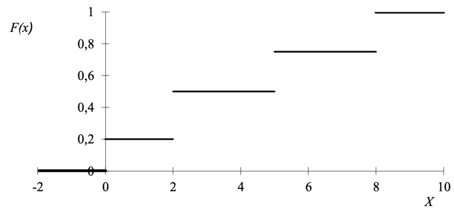
1.2 In un'analisi di laboratorio, un esperimento ha il 30% di probabilità di dare una risposta positiva. Quante prove occorre fare per avere una probabilità del 90% di avere almeno una risposta positiva?
Soluzione:
Chiamiamo $P(N)$ la probablità di ottenere almeno un risultato positivo in N prove. La calcoliamo considerando la probabilità di effettuare N prove con esito negativo. Quindi, chiamando $\bar{p} = 1 - p = 0.7$, abbiamo

$$P(N = 1) = 1 - \bar{p} = 0.3$$
$$P(N = 2) = 1 - \bar{p}^2 = 1 - 0.49 = 0.51$$
$$P(N = 3) = 1 - \bar{p}^3 = 1 - 0.343 = 0.657$$
$$...$$
$$P(N = 7) = 1 - \bar{p}^7 \approx 1 - 0.082 = 0.918$$

1.3 Considerata una v.c. discreta X con funzione di distribuzione cumulata

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad x < 0 \\ 0.2 \quad 0 \leq x < 2 \\ 0.5 \quad 2 \leq x < 5 \\ 0.75 \quad 5 \leq x < 8 \\ 1 \quad x \geq 8 \end{cases}$$

disegnarne il grafico e determinare la probabilità che la v.c. assuma un valore compreso nell'intervallo $(0, 5]$.
Soluzione:



$$F(5) - F(0) = 0.75 - 0.2 = 0.55$$

1.4 Considerata un'urna contenente 20 palline di cui 4 bianche, 6 rosse e 10 gialle, si consideri un esperimento che consiste nell'estrazione di due palline con ripetizione. Indicata con X la v.c. "numero di palline bianche estratte", se ne determini la distribuzione di probabilità, il valore atteso, la varianza e la deviazione standard.
Soluzione:

$$P(0) = 0.8 \times 0.8 = 0.64, \quad P(1) = 2 \times 0.8 \times 0.2 = 0.32, \quad P(2) = 0.2 \times 0.2 = 0.04.$$
$$E[X] = 0.4, \quad E[X^2] = 0.48, \quad Var(X) = 0.32, \quad SD \approx 0.57.$$

1.5 Al tiro a segno, tra coloro che sparano: il 15% hanno probabilitá $p_1 = 0.75$ di colpire il bersaglio (tipo 1); il 45% hanno probabilitá $p_2 = 0.5$ di colpire il bersaglio (tipo 2); il 40% hanno probabilitá $p_3 = 0.1$ di colpire il bersaglio (tipo 3). Si calcoli:
a) Si calcoli la probabilitá che un cliente colpisca il bersaglio in un singolo tiro.
b) Un cliente spara 7 volte: le prime 6 manca il bersaglio ed alla settima volta lo colpisce. Qaul é la probabilitá che il cliente sia di tipo 1? Di tipo 2? Di tipo 3?
c) Ipotizziamo che ogni tiro costi 1 euro e che ogni centro dia in premio 3 euro. Qual è il valore medio vinto da un partecipante con un singolo tiro?
Soluzione:
a) Definiamo il seguente evento:

$$\mathcal{C} = \{\text{Il cliente fa centro in una prova}\} \tag{1}$$

Indicando con T_1, T_2 e T_3 il tipo del cliente, in base al teorema della probabilitá totale possiamo scrivere:

$$P(\mathcal{C}) = P(\mathcal{C}|T_1)P(T_1) + P(\mathcal{C}|T_2)P(T_2) + P(\mathcal{C}|T_3)P(T_3) \tag{2}$$
$$= p_1 \cdot 0.15 + p_2 \cdot 0.45 + p_3 \cdot 0.4 = 0.3775 \tag{3}$$

dove si é notato che il fatto he il 10% delle persone é di tipo 1 significa che $P(T_1) = 0.15$ (e similmente per $P(T_2)$ e $P(T_3)$)) e, ovviamente, $P(\mathcal{C}|T_i) = p_i, i = 1, 2, 3$.
b) Definiamo il seguente evento:

$$\Omega = \{\text{Il cliente fa centro al settimo tiro}\} \tag{4}$$

$$= \{\text{6 insuccessi nelle prime prove ed 1 successo alla settima prova}\} \tag{5}$$

Applicando il teorema della probabilitá totale possiamo scrivere:

$$P(\Omega) = P(\Omega|T_1)P(T_1) + P(\Omega|T_2)P(T_2) + P(\Omega|T_3)P(T_3) \tag{6}$$

$$= (1 - p_1)^6 p_1 \cdot 0.1 + (1 - p_2)^6 p_2 \cdot 0.4 + (1 - p_3)^6 p_3 \cdot 0.5 \simeq 0.024785 \tag{7}$$

A questo punto, applicando il teorema di Bayes, possiamo concludere:

$$P(T_1|\Omega) = \frac{P(\Omega|T_1)P(T_1)}{P(\Omega)} \simeq 0.001 \tag{8}$$

$$P(T_2|\Omega) = \frac{P(\Omega|T_2)P(T_2)}{P(\Omega)} \simeq 0.14 \tag{9}$$

$$P(T_3|\Omega) = \frac{P(\Omega|T_3)P(T_3)}{P(\Omega)} \simeq 0.859 \tag{10}$$

A questo punto, possiamo cocnludere che, dato che un cliente che spara 7 volte le prime 6 manca il bersaglio ed alla settima volta lo colpisce, é piú probabile che sia di tipo 3.
c) Chiamiamo G la variabile aleatoria che esprime il guadagno *netto* del partecipante al gioco, questa ha come possibili realizzazioni $3-1=2$ euro e $0-1=-1$ euro. Vogliamo quindi calcolare $E[G]$ dove G ha la seguente distribuzione di probabilità:

$$G = \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } P(\mathcal{C}) \\ +2 & \text{con probabilità } P(\mathcal{C}^c), \end{cases}$$

con $\mathcal{C}$ l'evento {il cliente fa centro in una prova}. Abbiamo già calcolato $P(\mathcal{C})$ con il il teorema della probabilità assoluta e abbiamo ottenuto $P(\mathcal{C}) = 0.3775$. Di conseguenza, $P(\mathcal{C}^c) = 1 - P(\mathcal{C}) = 0.6225$.

A questo punto possiamo calcolare il valore medio $E[G] = -1 \cdot P(\mathcal{C}) + 2 \cdot P(\mathcal{C}^c) = -1 \cdot 0.6225 + 2 \cdot 0.3775 = 0.1325$. Il gioco è in media conveniente per il giocatore.

1.6 Un cassetto contiene due dadi a sei facce onesti e sette dadi a sei facce con $P(1) = P(2) = P(3) = 1/9$ e $P(4) = P(5) = P(6) = 2/9$. Pescando un dado a caso dal cassetto e lanciandolo, qual è la probabilità di ottenere 1 o 2? Supponiamo di aver ottenuto 1 o 2. Qual è la probabilità di aver pescato un dado onesto?
Soluzione:
Chiamiamo evento A l'estrazione del dado onesto ed evento B l'estrazione del dado disonesto. Abbiamo:

$$P(i) = P(i|A)P(A) + P(i|B)P(B) = \frac{1}{6}\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\frac{7}{9} = \frac{10}{81},\ i = 1, 2.$$

Quindi

$$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) = 2P(1) = \frac{20}{81}.$$

$$P(A|2) = P(2|A)P(A)/P(2) = \frac{1/6 \times 2/9}{0.12} = \frac{3}{10}.$$

1.7 Determina il valore di a per il quale la funzione

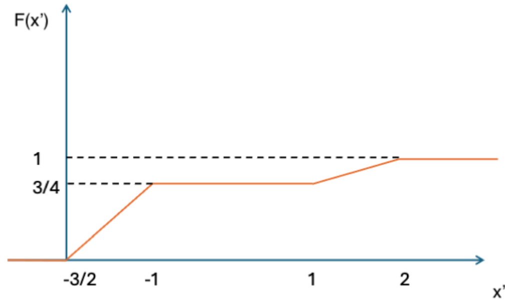
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & -3/2 \le x \le -1 \\ \frac{a}{2} & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una densità di probabilità. Quindi calcola e produci il grafico della cdf della variabile casuale continua X.
Soluzione:

$$\int_{-3/2}^{-1} \frac{3}{2} dx + \int_{1}^{2} \frac{a}{2} dx = \frac{3+2a}{4} = 1 \Rightarrow a = 1/2.$$

Dalla definizione di cumulata $F(x') = \int_{-\infty}^{x'} f(x)dx$ otteniamo

$$F(x') = \begin{cases} 0 & x' < -3/2 \\ \frac{6x'+9}{4} & -3/2 \le x' \le -1 \\ \frac{3}{4} & -1 < x' < 1 \\ \frac{3}{4} + \frac{x'-1}{4} & 1 \le x' \le 2 \\ 1 & x' > 2 \end{cases}$$



1.8 Data la densità $f(x) = Ce^{-x}$ per $0 \leq x \leq 1$, calcolare C e la cdf di X.
Soluzione:

$$C = \frac{e}{e-1} \approx 1.58, \quad F(a) = \frac{e}{e-1}\left(1 - e^{-a}\right), \, 0 \leq a \leq 1.$$

1.9 Data la variabile aleatoria X con distribuzione $f(x) = C(1 + 2x^2)$ per $x \in [0, 1]$, determinare il valore della costante C, calcolare $E[X]$ e calcolare $P\{0 < X < 1/2\}$.
Soluzione:
$C = 3/5$, $E[X] = 3/5$, $P(0 < X < 0.5) = 7/20$.