Populációdinamika

Tóth Balázs

Természettudományi kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Magyarország
2020 május 8

1 Elméleti bevezetés

A populációdinamikát egy általános keretrendszernek tekinthetjük. Bár alapvetően növényekről, ragadozókról és a táplálékról beszélünk, alakilag hasonló egyenletekbe behelyettesíthetjük vegyületek koncentrációit, katalizátorok hatékonyságát, vagy a gazdaság modellezésekor termelőket és fogyasztókat. A dinamika nagyon hasonló mintázatokat produkál. A szimulációs probléma során differenciálegyenlet megoldással modellezünk populációdinamikai jelenségeket, ahol a populáció n létszámának időbeli változását vizsgáljuk. Első közelítésben feltehetjük, hogy a populáció gyarapodása arányos magával a populáció létszámával, így bevezethetünk egy a szaporodási rátát, ami megmondja, hogy Δt idő alatt mennyivel változik a populáció nagysága:

$$n(t + \Delta t) = n(t) + an(t)$$

Abban az esetben ha Δt elég kicsinek választjuk akkor a következő differenciálegyenlet formára alakítható az előbbi összefüggés:

$$\tfrac{dn}{dt} = an$$

A folytonos egyenlet akkor jó közelítés, ha a populáció mérete nagy és a szaporodási ráta elfolytonosítása nem okoz gondot. Az egyenlet megoldása a jól ismert exponenciális növekedés:

$$n = e^{at}$$

Ezt az összefüggést közelebb hozhatjuk a valósághoz akkor ha bevezetünk egy d halálozási rátát is:

$$\tfrac{dn}{dt} = an - dn$$

Ennek a megoldásához bevezetjük az $r = a - d$ és így a következő alakot kapjuk:

$$n = e^{rt}$$

Amennyiben figyelembe vesszük azt is, hogy az erőforrások, például az élelem vagy nyersanyag, korlátosak, akkor a ennek a szaporodásra-pusztulásra vett hatását szorzó tényezővel modellezhetjük:

$$\tfrac{dn}{dt} = rnF(n)$$

Ha feltesszük, hogy a rendelkezésre álló erőforrások nem teszik lehetővé, hogy a populáció létszáma egy adott kapacitást túllépjen, akkor a következő alakra jutunk:

$$F(n) = 1 - \tfrac{n}{k}$$

Mindezek mellett a differenciálegyenlet a következő képen módosul:

$$\tfrac{dn}{dt} = rn - (1 - \tfrac{n}{k})$$

Ezek után ha egy kicsit átskálázzuk az $x = \frac{n}{k}$, akkor az egyenletet már logisztikus egyenletnek nevezhetjük és a következő alakot ölti:

$$\frac{dn}{dt} = rx(1-x)$$

Ennek a megoldása a paraméterektől függően az úgy nevezett növekvő vagy csökkenő szigmoid jellegű görbe:

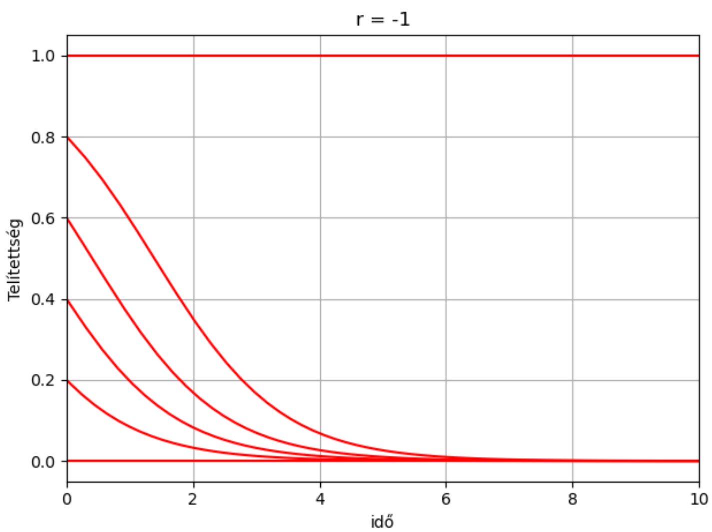
$$x(t) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x_0})e^{-rt}}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a vizsgált egyenlet egy nemlineáris differenciálegyenlet így analitikusan nem mindig oldható meg.

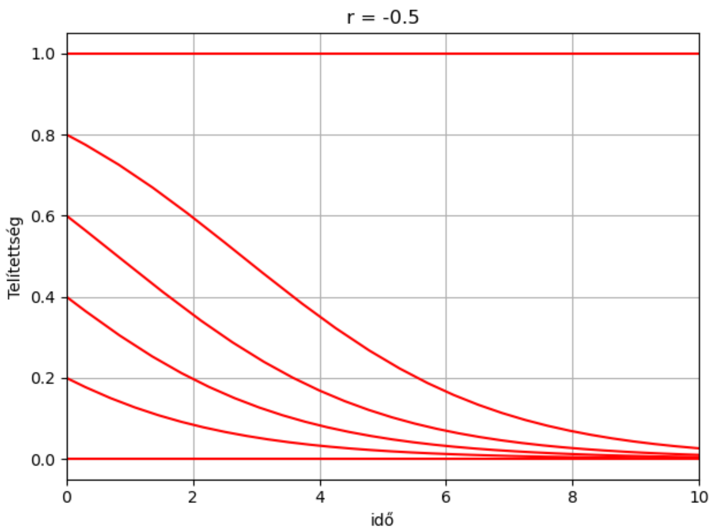
2 Eredmények ismertetése

2.1 Első feladat

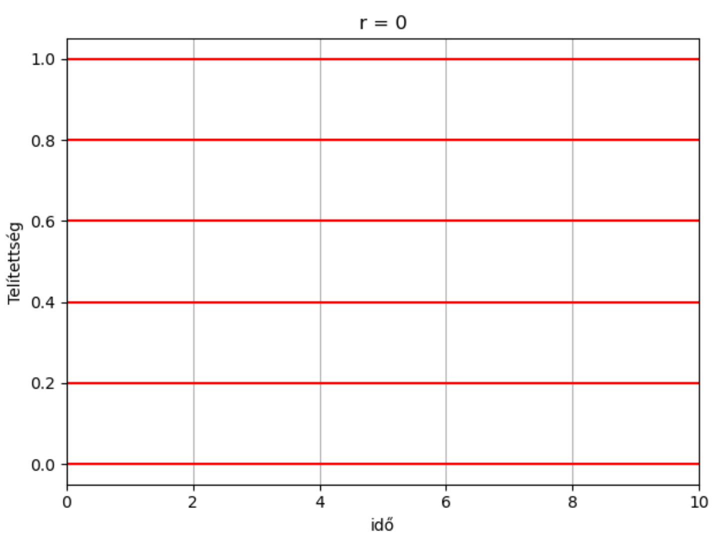
Az első feladatban az volt a dolgunk, hogy a fixpontok közelében és azoktól távol vizsgáljuk meg a logisztikus függvény viselkedését és hasonlítsuk össze a analitikusan kapott értékekkel. A feladat során az Euler módszerrel nem sikerült a várt eredményre jutnom, azonban a Runge-Kutta eljárás nagyon szépen visszaadta a leírásban szereplő ábrákat, azaz összhangban voltak az analitikus megoldással.



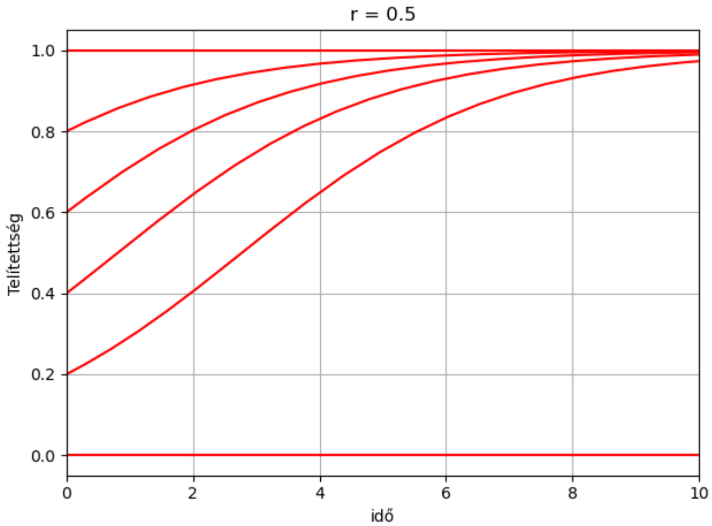
Ábra. 1: Logisztikus egyenlet vizsgálata



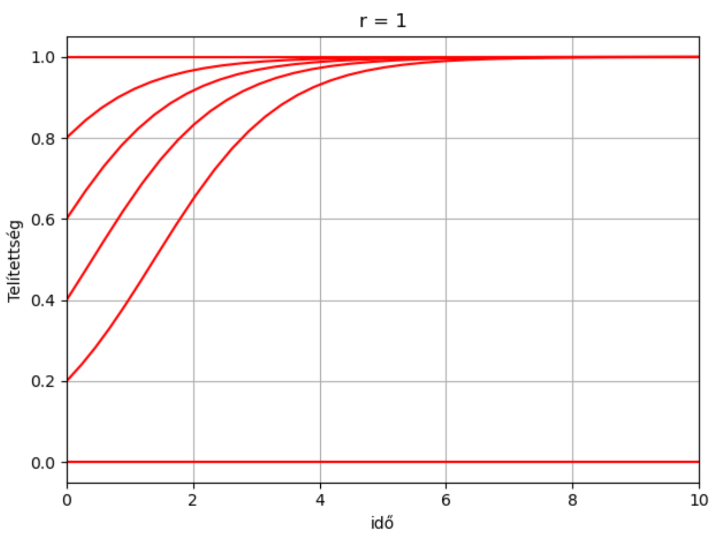
Ábra. 2: Logisztikus egyenlet vizsgálata



Ábra. 3: Logisztikus egyenlet vizsgálata



Ábra. 4: Logisztikus egyenlet vizsgálata



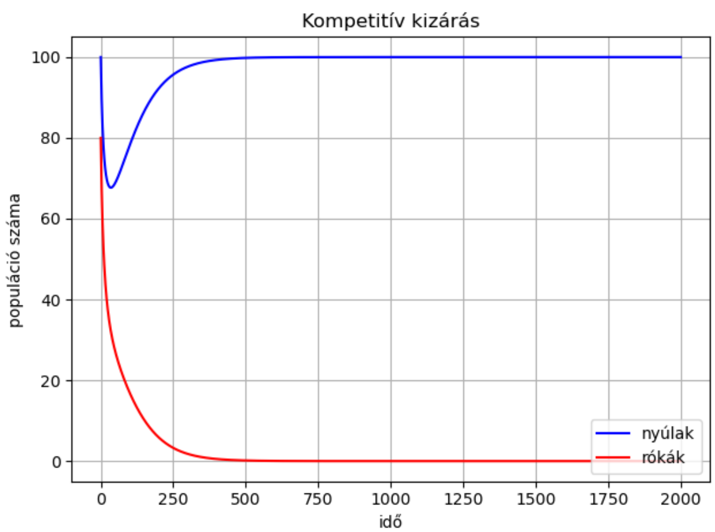
Ábra. 5: Logisztikus egyenlet vizsgálata

2.2 Második feladat

Ebben a feladatban el kellett készítenünk az erőforrásért versenyző csatolt logisztikus modellt. A feladat célja, hogy megmutassuk, hogy a fajok egymáshoz viszonyított szaporodási rátája fogja meghatározni, hogy melyik faj szorítja ki a másikat.
A szimuláció második felében pedig azt mutatjuk be, hogy hogyan fogyasztja egyik faj a másik erőforrásait. Ebben az esetben a populációk differenciálegyenlete a következő módon írható fel:

$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 n_1 (1 - \frac{n_1 + \alpha n_1}{k_1})$$

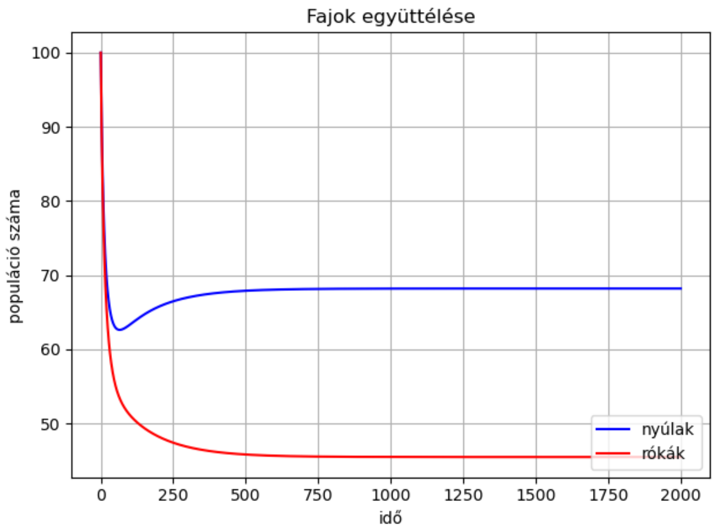
$$\frac{dn_2}{dt} = r_2 n_2 (1 - \frac{n_2 + \beta n_2}{k_2})$$



Ábra. 6: Kompetetív kizárás $r_1 = r_2 = 1, \alpha = \beta = 1, k_1 = 100, k_2 = 80$

Az első ábrán a kompetitív kizárás eredményét figyelhetjük meg, ahol $r_1 = r_2, \alpha = \beta$ azonban különböző k értékekről indult a két populáció. Jól látszik, hogy a vártnak megfelelően a nagyobb létszámról induló faj kiszorította a másikat.

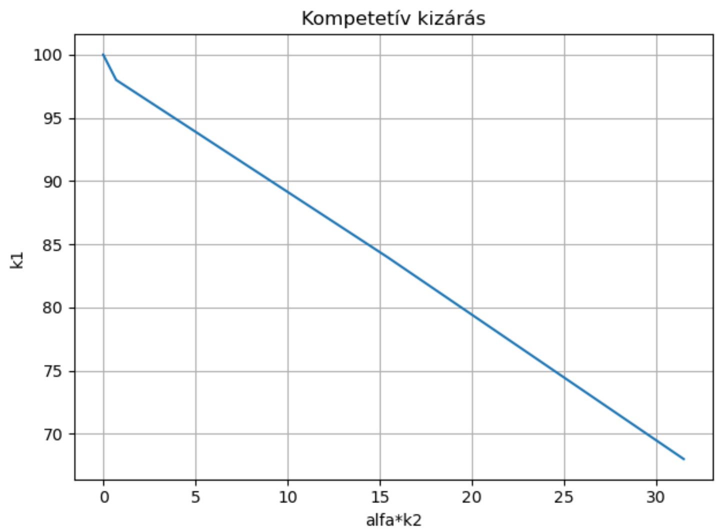
Ezt követően azt az esetet vizsgáltam, amikor teljesül az az összefüggés, hogy $\alpha k_2 < k_1$ és $\beta k_1 < k_2$. Ez az összefüggés két faj együttélését mutatja be. Az ábrámon jól látszik, hogy ebben az esetben a két faj populációjának a száma rövid időn belül beáll egy stabil értékre.



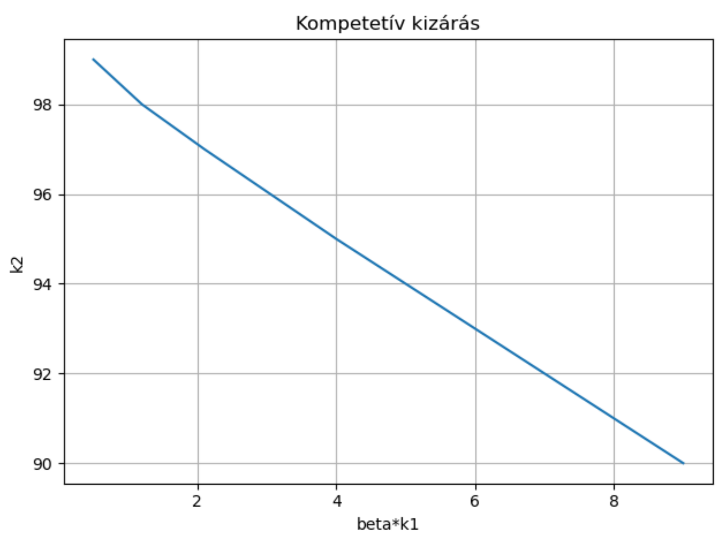
Ábra. 7: Fajok együttélése $r_1 = r_2 = 1, \alpha = 0.7, \beta = 0,8, k_1 = k_2 = 100$

Ezek után követően a leírásban szereplő $\alpha k_2 - k_1$ síkon ábrázoltam az eredményeimet úgy, hogy közben a kezdeti k_2 100 ról folyamatosan csökkentettem.

Majd változtattam az eljáráson úgy, hogy mindkét kezdeti populációt 100-on hagytam végig azonban a β értéket folyamatosan csökkentettem.



Ábra. 8: Fajok együttélésének vizsgálata $r_1 = r_2 = 1, \alpha = 0.7, \beta = 0,8, k_1 = k_2 = 100$



Ábra. 9: Fajok együttélésének vizsgálata $r_1 = r_2 = 1, \alpha = \beta = 1, k_1 = k_2 = 100$

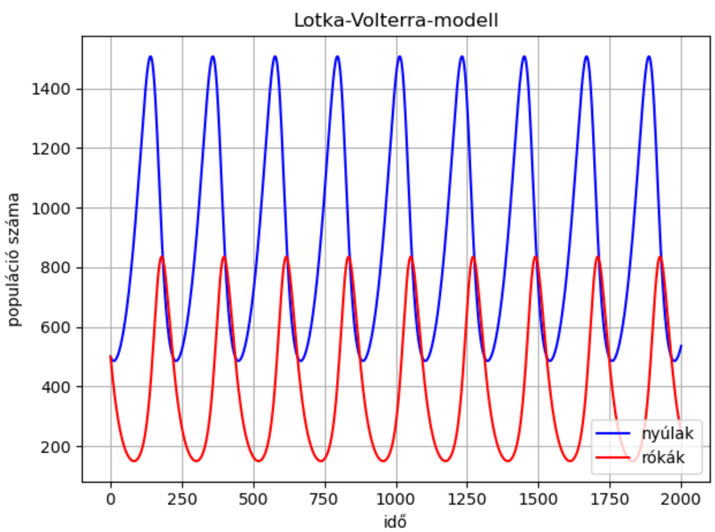
2.3 Harmadik feladat

Ebben a részben a Lotka-Volterra-modell megvalósítása volt a feladatunk nyulak és rókák populációjának az esetén. Ehhez a következő differenciálegyenleteket használtam:

$$\frac{dn_R}{dt} = an_R - bn_F n_R$$

$$\frac{dn_F}{dt} = cn_R n_F - dn_F$$

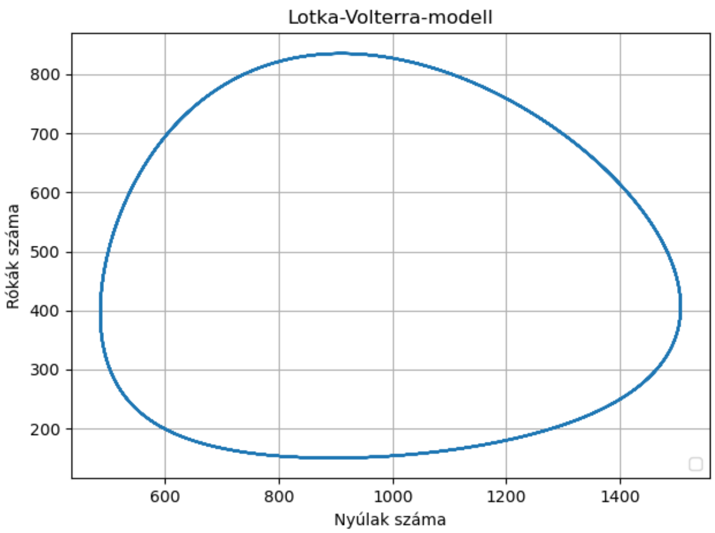
Az egyenletrendszerben n_R a nyulak míg n_F a rókák szaporodási rátája, d a rókák pusztulási rátája, bn_F a nyulaké és cn_R a rókák szaporodási rátája.



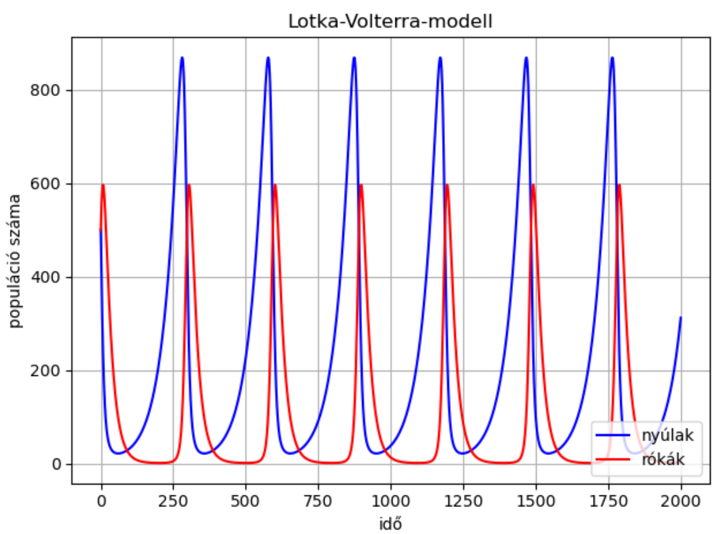
Ábra. 10: Lotka-Volterra-modell $a = 0.4, b = c = 0.001, d = 0.9$

2.4 Negyedik feladat

A következő feladat célja az volt, hogy egészítsük ki a megvalósított Lotka-Volterra-modellt úgy, hogy a telítődés hatását és a kapacitást is figyelembe vesszük.

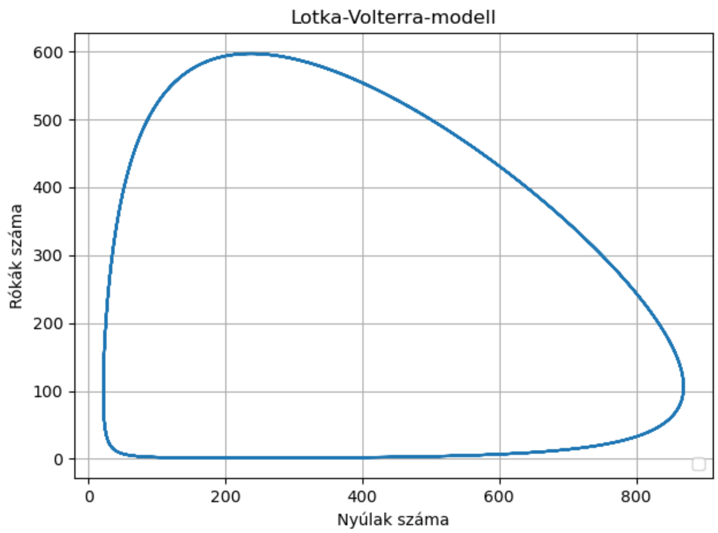


Ábra. 11: Lotka-Volterra-modell $a = 0.4, b = c = 0.001, d = 0.9$

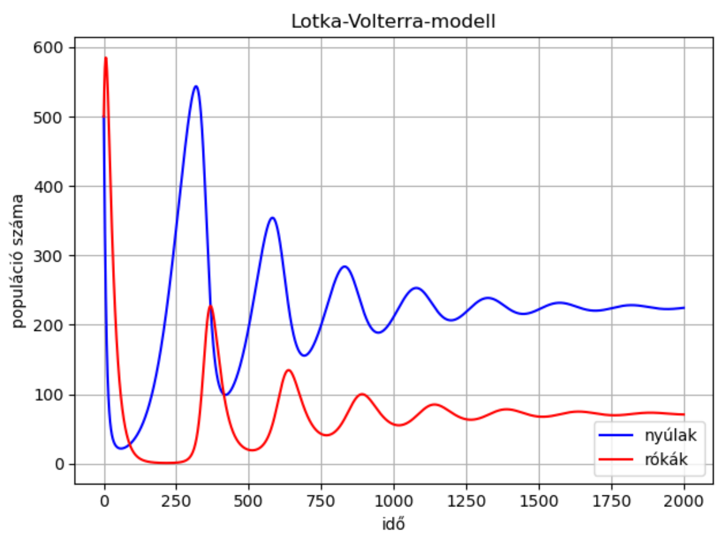


Ábra. 12: Lotka-Volterra-modell $a = 0.4, b = c = 0.004, d = 0.9$

Sajnálatos módon a szimulációmat nem tudtam felfejleszteni úgy, hogy a telítődést

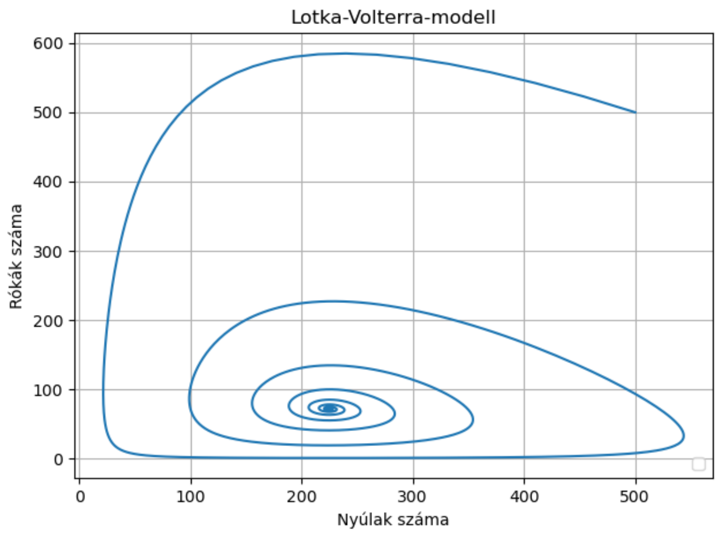


Ábra. 13: Lotka-Volterra-modell $a = 0.4, b = c = 0.004, d = 0.9$



Ábra. 14: Lotka-Volterra-modell $a = 0.4, b = c = 0.004, d = 0.9, K = 800$

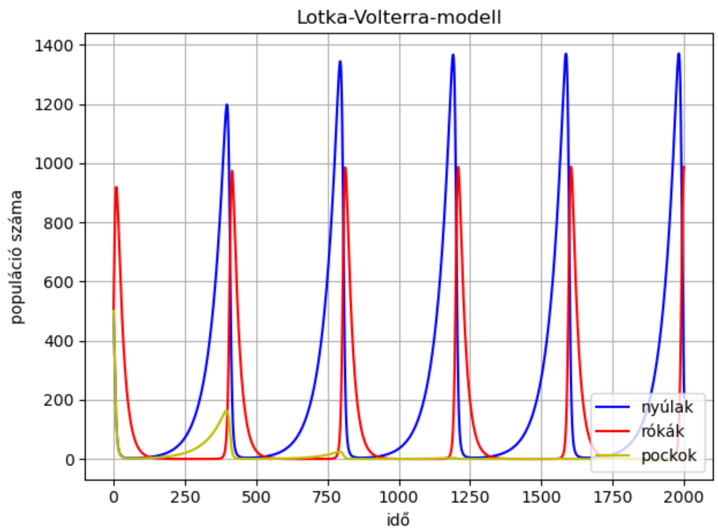
is bevezessem. Valamilyen oknál fogva a ragadozók száma folyamatosan egy egynél kisebb számhoz tart. Azonban a kapacitást tudtam implementálni és ebből a fejlettebb modellből megfigyelhető, hogy a szimuláció eredményeképp egy beáramlás a stabil fixpontba.



Ábra. 15: Lotka-Volterra-modell $a = 0.4, b = c = 0.004, d = 0.9, K = 800$

2.5 Ötödik feladat

Ebben a feladatban a fent tárgyalt Lotka-volterra-modell kiegészítése volt a feladatunk úgy, hogy egy harmadik fajt is beleveszünk a szimulációba. Én azt az esetet vizsgáltam, amikor több zsákmányállat van jelen és behoztam a képbe a pockokat, akik csak annyiban tértek el a nyulaktól, hogy lassabban szaporodtak. A szimuláció eredményeként azt figyelhetjük meg, hogy a nyulak kiszorítják a velük kezdetben megegyező nagyságú populációval rendelkező pockokat.



Ábra. 16: Lotka-Volterra-modell $e = a = 0.4, b = c = f = 0.004, d = 0.9$

3 Konklúzió

A laborgyakorlat során a populáció dinamika keretein belül megvizsgálhattam a logisztikus egyenletet és a várakozásnak megfelelően a kezdeti értékek állításával elő állat a növekvő valamint a csökkenő szigmoid jellegű görbe.
A feladatok nagyobb fókusza a Lotka-Volterra-modell megismerése és annak vizsgálata volt. A jegyzőkönyvemben bemutattam és ábrákkal szemléltettem a fajok együttélését, egymás kiszorítását. A feladatok második fele a modell továbbfejlesztésére irányult, ahol bevezettük a kapacitást és így megvizsgálhattunk a fixpontot és annak stabilitását. Végezetül megalkottam az egyszerű modelljét annak is mikor két zsákmányállat és egy ragadozó osztozik az élőhelyen és ez esetben is láthattunk, hogy a dominánsabb zsákmányállat kiszorította a másikat.