Obligatorisk innlevering 1

IN1150 – Logiske metoder

Høsten 2017

Olav Sulen

Oppgave 1 - Mengdelære (10 poeng)

a) Ut fra opplysningene under, angi hvilke mengder A og B er.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{2, 6\}$

$A \setminus B = \{3, 4\}$

Svar: $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$

b) Hvor mange elementer er det i $A \times B$? List opp minst 3 av disse elementene.

Svar: Det er 16 elementer. tre eksempler er $\langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 5\rangle$

c) $\overline{A \cup B} = \{7, 8, 9\}$

Hvilken mengde er da den universelle mengden U?

Svar: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

d) $M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$|M| = 3$

$\big\{\{2\}, \{4\}, \{1, 2\}\big\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

($\mathcal{P}(M)$ er potensmengden til M, se definisjon 8.3.)

Angi hvilken mengde M er.

Svar: $M = \{1, 2, 4\}$

e) Hva er kardinaliteten til $\mathcal{P}(M)$?

Svar: $|\mathcal{P}(M)| = 8$

f) La $C = \{1, 2\}$.

Finn en mengde D slik at C både er et element i D og en delmengde av D.

Svar: $D = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

Oppgave 2 - Utsagnslogikk (8 poeng)

a) La $F = (P \wedge Q)$.

Gi 3 forskjellige utsagnslogiske formler som er logiske konsekvenser av F, men som ikke er ekvivalente med F.

Svar: $P, Q og P \vee Q$

b) Er $\{(P \wedge Q), \neg(P \vee Q)\}$ en uavhengig mengde formler? Begrunn svaret.

(Se definisjon 4.8 for definisjonen av en uavhengig mengde formler.)

Svar: La oss si at F er $\{(P \wedge Q)$ og G er $\neg(P \vee Q)\}$. Vi ser at hverken P eller $\neg P$ er en logisk konsekvens av G. Vi ser også at hverken G eller $\neg G$ er en logisk konsekvens av F. Altså er det en uavhengig mengde formler.

c) Er det sant at $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)$? Begrunn svaret.

Svar: Nei. her holder det å se at for tilfellet P $= 0$ og Q $= 1$, er $(P \to Q)$ sann, men$(\neg P \to \neg Q)$ er usann.

d) Bevis at $((P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q))$ er en tautologi med et motsigelsesbevis. (Du skal altså begynne med å anta at påstanden er usann, og vise at det leder til en motsigelse.)

Svar: Antar at utrykket er usant. For at det skal være tilfellet er $((P \wedge Q)$ og $(\neg P \vee \neg Q))$ nødt til å være usanne. Eneste måten at $(\neg P \vee \neg Q))$ er usann er at Både P og Q er sanne, men da er $((P \wedge Q)$ sann. Altså er det en tautologi.

Oppgave 3 - Relasjoner og funksjoner (8 poeng)

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) La R være en refleksiv relasjon på A. Hva er det minste antallet elementer R kan inneholde?

Svar: 4

b) $S = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$. Hva er den transitive tillukningen av S?

Svar: $S \cup \langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle$

c) Angi en binær relasjon på A som er symmetrisk og irrefleksiv, og som også er en funksjon fra A til A.

(Merk at det står **ir**refleksiv, se definisjon 6.7.)

Svar: $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle$

d) Er funksjonen din i c) injektiv, surjektiv eller bijektiv? Begrunn svaret.

Svar: Den er bijektiv, da den er både surjektiv og injektiv. Hver verdi går til en ny verdi og bildemengden er hele verdiområdet.

Oppgave 4 - Rekursive funksjoner (6 poeng)

a) Definer en rekursiv funksjon f på bitstrenger som bytter ut alle 1-ere i en bitstreng med 0-er, og alle 0-er med 1-ere.

Eksempler:

$f(101) = 010$
$f(0100111) = 1011000$

Svar:

$f(0) = 1$ og $f(1) = 0$. $f(b0) = f(b)1$ og $f(b1) = f(b)0$

b) Definer en rekursiv funksjon g fra bitstrenger til heltall som gir differansen mellom antall 1-ere og antall 0-er i en bitstreng b. Hvis b inneholder m 1-ere og n 0-er, så skal $g(b) = m - n$.

Eksempler:

$g(1011) = 2$
$g(00000) = -5$

Svar:

$f(0) = -1$ og $f(1) = 1$. $f(b0) = f(b) - 1$ og $f(b1) = f(b) + 1$

Oppgave 5 - Strukturell induksjon (8 poeng)

La B være språket over alfabetet $\{(,)\}$ som er indukivt definert slik:

- $\Lambda \in B$
- Hvis $s \in B$, så $(s) \in B$.
- Hvis $s \in B$ og $t \in B$, så $st \in B$.

Her er noen av elementene i B: Λ, $()$, $()()$, $(())$, $(()())$, $(())()$ og $()()()$.

Bevis ved strukturell induksjon at for alle strenger $x \in B$, er det slik at antall tegn i x er et partall.

Svar:

Ser ut i fra vis $s \in B$, så $(s) \in B$ at for hver '(' så er det nødt til å være en ')'. Fra Hvis $s \in B$ og $t \in B$, så $st \in B$ har vi bare en struktur for hvordan parantesene kan settes i rekkefølge, men har fortsatt at for hver '(' så har vi en ')'. Altså vi har n antall '(', så har vi totalt 2n antall tegn, altså partall antall tegn.