EXERCICES — CHAPITRE 9

Exercice 1 (⋆⋆) – Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie explicitement.

1. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\dfrac{1}{n}$,
2. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\dfrac{n^2+1}{n}$,
3. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\sqrt{n+3}$,
4. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\dfrac{3^n}{n}$.

Exercice 2 (⋆) – Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence.

1. $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$u_{n+1}=u_n-u_n^2,$$
2. $u_0=-1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{1+u_n^2},$$
3. $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$u_{n+1}=u_n+n^2+2n+1,$$
4. $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$u_{n+1}=u_n+\sqrt{1+u_n}.$$

Exercice 3 (⋆⋆) –

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=-n+4$.
   a) Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+4$.
   b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}=f(v_n)=-v_n+4$.
   a) Calculer les six premiers termes de la suite.
   b) Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 4 (⋆ ⋆ ⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=-2u_n+3n+2.$$
On pose pour tout $n\in\mathbb{N},\quad v_n=u_n-n-\dfrac{1}{3}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3.
2. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Exprimer le terme v_n en fonction de n.
4. Exprimer le terme u_n en fonction de n.

Exercice 5 (⋆) – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par
$$u_n=\frac{3n+1}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.
2. En déduire que la suite est bornée.

Exercice 6 (⋆⋆) – En factorisant le numérateur par 2^n et le dénominateur par 3^n, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par
$$u_n=\frac{2^n+1}{3^n+1}.$$

Exercice 7 (⋆⋆) – Étudier la convergence et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par
$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+1.$$

Exercice 8 (⋆⋆) – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=2u_n-1.$$

1. On pose $v_n=u_n-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Étudier la convergence des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9 (⋆⋆) – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est égal à $\sqrt{1+n}$.
3. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 (⋆⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 16$ et

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = 0.75 \times u_n.$$

1. a) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   c) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

   a) Calculer S_4.
   b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad S_n = 64\left(1 - 0.75^{n+1}\right)$.
   c) Vers quel réel tend la somme S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 11 (⋆⋆⋆) – En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3% de son volume d'eau. On remplit ce bassin avec 90m^3 d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine 2.4m^3 d'eau dans le bassin.
On note u_n le nombre de m^3 d'eau contenus dans ce bassin au bout de n semaines.
On a donc $u_0 = 90$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = 0.97 \times u_n + 2.4$.

1. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
   a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer le terme v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 80 + 10 \times 0.97^n$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter ce résultat.

Exercice 12 (⋆⋆) – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad u_n > n^2$.
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13 (⋆⋆⋆⋆) – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 6.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14 (⋆⋆⋆) – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0.7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \in \left]0, 1\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 15 (⋆⋆⋆) – Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)^3 + x$.
On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_{n+1} = g(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = 0.4$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\quad 0 < a_n < 1$.
2. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.