INTERRO DE COURS 16

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{2x} - e^{-3x}\,\mathrm{d}x$

Solution :

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^1 e^{2x} - e^{-3x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^{-3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^{-3} - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_1^3 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution : Je commence par chercher une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.
f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u(x) = 1 + x^2$. On a $u'(x) = 2x$, et donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{1+x^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$. Et

$$\begin{aligned} I_2 = \int_1^3 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2}\ln(10) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(5) \end{aligned}$$

Exercice 2 – Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 (2x-3)e^x \,\mathrm{d}x$

Solution : Je pose

$$\begin{array}{rlcrl} u'(x) = & e^x & \qquad & u(x) = & e^x \\ v(x) = & 2x-3 & & v'(x) = & 2 \end{array}$$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 (2x-3)e^x \,\mathrm{d}x = \Big[(2x-3)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 2e^x \,\mathrm{d}x \\ &= -e^1 + 3 - \big[2e^x\big]_0^1 = -e+3-(2e-2) = -e+3-2e+2 = -3e+5 \end{aligned}$$

2. $I_4 = \displaystyle\int_1^2 2t\ln(t)\,\mathrm{d}t$

Solution : Je pose

$$\begin{array}{rlcrl} u'(t) = & 2t & \qquad & u(t) = & t^2 \\ v(t) = & \ln(t) & & v(t) = & \dfrac{1}{t} \end{array}$$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^2 2t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t^2\ln(t)\Big]_1^2 - \int_1^2 t^2 \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= 4\ln(2) - \int_1^2 t\,\mathrm{d}t = 4\ln(2) - \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = 4\ln(2) - \left(2-\frac{1}{2}\right) = 4\ln(2) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$