DEVOIR SURVEILLÉ 3

Exercice 1 – BSB 2019 / Ex1

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$,

   $$A^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

   Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

   $$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 0 & 2(3^n - 2^n) + 3^n \\ 0 & 3 \times 3^n & 3 \times n3^{n-1} + 3^n \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2 \times 3^n - 2^{n+1} + 3^n \\ 0 & 3^{n+1} & n3^n + 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1) \times 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. (a) L'instruction manquante est `a=2*a+3∧(i-1)`. Pour calculer le terme a_i, il faut sommer le double du terme précédent $2a^{i-1}$ avec la puissance de 3 correspondant à cet indice, *i.e.* 3^{i-1}. D'où `a=2*a+3∧(i-1)`.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, je calcule le produit AX_n :

   $$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3^n \\ 3b_n + 3^n \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

   (c) Voici le programme complété.

```
1.  n=input(''n?'')
2.  A=[2 0 1;0 3 1;0 0 3]
3.  X=[2;0;1]
4.  for i=1:n
5.      X=A*X
6.  end
7.  disp(X(1))
```

(d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

(e) D'après les questions précédentes,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 3^n - 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré qu'en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$

3. (a) Je calcule le produit $P \times Q$.

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je remarque que le produit $P \times Q$ est égal à la matrice identité I_3.

(b) Je calcule le produit $P \times M$ avant de multiplier le résultat par Q :

$$PM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4+1 & 0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$PMQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 1 \\ 1-1 & 3 & 1 \\ 3-3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi j'ai bien montré que $PMQ = A$.

(c) Avant de raisonner par récurrence, il me faut montrer que $M = QAP$. Il s'agit d'une conséquence directe de la question précédente :
Comme $PMQ = A$, alors $Q \times PMQ \times P = QAP$ *i.e.* $M = QAP$ puisque $QP = PQ = I_3$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad M^n = QA^nP$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad QA^0P = QI_3P = QP = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = QA^nP \times QAP = QA^n \times AP = QA^{n+1}P.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QA^nP.$$

(d) D'après les questions précédentes,

$$M^n = QA^nP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n - 3^n - 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & 2^n - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n - 2 \times 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & 2^n - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2^n + 2^n - 2 \times 3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^n + 2^n - 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$

4. (a) D'après la question **2.e)**, je sais que $b_k = k \times 3^{k-1}$ et que $b_{k+1} = (k+1) \times 3^k = k \times 3^k + 3^k$. Alors

$$b_{k+1} - b_k - 3^k = k \times 3^k + 3^k - k \times 3^{k-1} - 3^k = k \times \left(3^k - 3^{k-1}\right) = k \times \left(3 \times 3^{k-1} - 3^{k-1}\right)$$
$$= k \times 3^{k-1} \times (3-1) = b_k \times 2 = 2b_k.$$

D'où $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

(b) Je reconnais la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = 1 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1-3} = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right).$$

(c) Je reconnais une somme télescopique. Ici, seuls les deux termes extrêmes vont rester. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=0}^{n} b_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n+1} b_k - \sum_{k=0}^{n} b_k = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1}.$$

En effet, tous les termes sont présents dans les deux sommes sauf b_{n+1} qui n'est que dans la première et b_0 que dans la seconde. Et comme $b_0 = 0$, j'obtiens bien le résultat souhaité.

(d) En assemblant les résultats des questions précédentes, j'obtiens l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(b_{k+1} - b_k - 3^k\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) - \sum_{k=0}^{n} 3^k\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(b_{n+1} - \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)\right) = \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{1 - 3^{n+1}}{4} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}.$$

Exercice 2 – BSB 2015 / Ex2

1. (a) Pour la limite en $+\infty$, j'utilise les résultats de croissances comparées : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
Puis
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \quad 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
Pour la limite en 0, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0} x = \ 0^+ \end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty.$$
Puis
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0} x+1 = \quad 1 \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to0} f(x) = -\infty.$$

(b) Je commence par calculer l'écart entre $f(x)$ et $y = x+1$, avant de montrer que cet écart tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
$$f(x) - y = x+1+\frac{\ln(x)}{x} - \big(x+1\big) = \frac{\ln(x)}{x}$$
Or j'ai déjà calculé la limite de cet écart à la question précédente :
par croissances comparées,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$
Donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(c) J'étudie désormais le signe de $f(x)-y$, pour connaître la position relatives des courbes.
Je sais que $f(x)-y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et puisque $x \in \left]0,+\infty\right[$, le signe de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ dépend uniquement du signe de $\ln(x)$. Or je sais que $\ln(x) \leqslant 0$ sur $\left]0,1\right]$ et que $\ln(x) \geqslant 0$ sur $\left[1,+\infty\right[$. Ainsi
- $f(x) - y \leqslant 0$ sur $\left]0,1\right]$, *i.e.* $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{D}$ sur $\left]0,1\right]$,
- $f(x) - y \geqslant 0$ sur $\left[1,+\infty\right[$, *i.e.* $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $\left[1,+\infty\right[$.

2. (a) La fonction g est donnée sous la forme d'une somme, donc je dérive terme à terme :
$$g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}.$$
Comme $x > 0$, le dénominateur est positif. Alors le signe de $g(x)$ est donné par celui de $2x^2-1$. Pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$,
$$2x^2-1 \geqslant 0 \iff 2x^2 \geqslant 1 \iff x^2 \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(car } x \text{ positif).}$$
J'en déduis alors le tableau de signe de $g'(x)$ et le tableau de variation de g.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

(b) Je remplace x par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dans l'expression de $g(x)$ et j'obtiens

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2).$$

Or je sais que $\ln(2) > 0$ puisque $2 > 1$, donc $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$. Et comme $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ correspond au minimum de la fonction g sur $\left]0,+\infty\right[$ (d'après le tableau de variation obtenu à la question précédente), alors j'en déduis que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$.

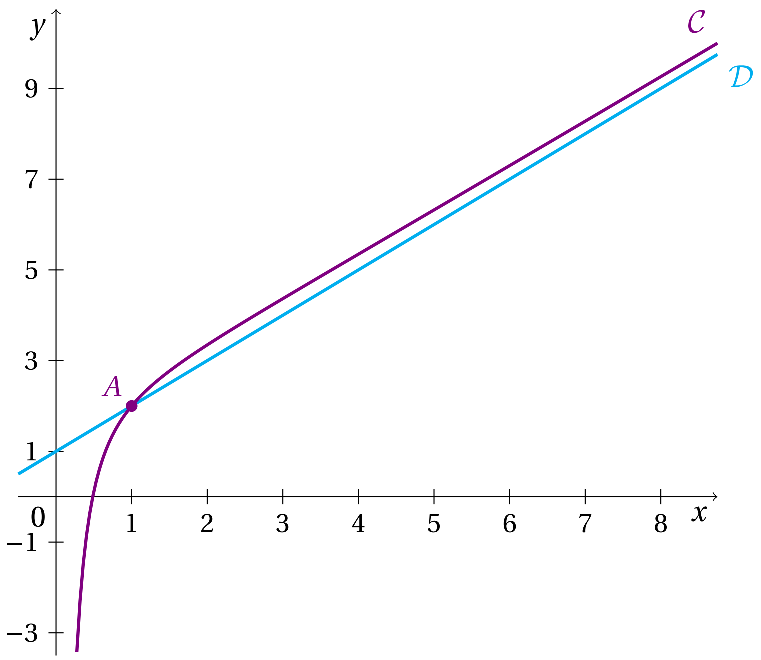
(c) La fonction f est donnée sous la forme d'une somme, donc je peux dériver terme à terme.
Plus précisément, f est de la forme $f(x) = x + 1 + \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$.
Puisque $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

(d) J'ai montré à la question **2.b)** que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$. Puisque $x^2 > 0$ également, j'en déduis que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$. J'obtiens donc le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. La courbe a une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ est asymptote en $+\infty$. Le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{D}$ a pour abscisse 1. Je suis donc capable de tracer l'allure de la courbe.



4. (a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant n+1$".

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0 = 1$ et $0+1=1$ donc $u_0 \geqslant 0+1$.
Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant n+1 \geqslant 1$.
Et j'ai montré à la question **1.c)** que pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant x+1$. Ainsi

$$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n + 1 \geqslant n+1+1 = n+2.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n=0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant n+1.$$

(b) Pour établir le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, j'étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n + 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} - u_n = 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

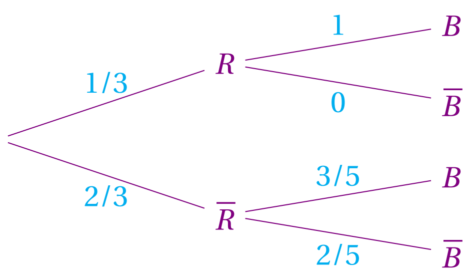
Or d'après la question précédente, $u_n \geqslant n+1$ pour tout n. En particulier, $u_n \geqslant 1$ pour tout n et donc $\ln(u_n) \geqslant 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geqslant 1 \geqslant 0$. Et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Par ailleurs, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n+1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$, alors par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 3 – BSB 2015 / Ex3

Partie I

La situation peut être illustrée à l'aide de l'arbre de probabilités suivant :



1. Les évènements R et $\overline{R}$ forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(B\cap R) + P(B \cap \overline{R}) = P(R)\times P_R(B) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(B) = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{2}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

2. Il s'agit de calculer la probabilité $P_B(\overline{R})$. D'après la formule de Bayes,

$$P_B(\overline{R}) = \frac{P(B\cap\overline{R})}{P(B)} = \frac{P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{11}{15}} = \frac{6}{11}.$$

La probabilité que Coralie se soit levée à l'heure sachant qu'elle prend le bus est égale à $\dfrac{6}{11}$.

3. (a) La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de $n = 180$ répétitions, identiques et indépendantes, de l'épreuve de Bernoulli de succès "Coralie prend le bus", de probabilité $p = \dfrac{11}{15}$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 180$ et $p = \dfrac{11}{15}$. Par conséquent, le support est donné par $X(\Omega) = [\![0,180]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,180]\!], \quad P(X=k) = \binom{180}{k}\left(\frac{11}{15}\right)^k\left(\frac{4}{15}\right)^{180-k}.$$

(b) Comme X suit une loi binomiale,

$$E(X) = np = 180\times\frac{11}{15} = 132 \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = 132\times\frac{4}{15} = \frac{176}{5}.$$

(c) Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de jours dans l'année où Coralie va au lycée à pied. Il est clair que $Z = 180 - X$ puisqu'il y a X jours où Coralie prend le bus sur un total de 180 jours. Puis par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(180-X) = 180 - E(X) = 180 - 132 = 48.$$

En conclusion, Coralie peut espérer aller au lycée à pied 48 jours dans l'année.

Partie II

1. En utilisant le tableau définissant la loi de N, j'obtiens

$$E(N) = 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{8} + 3\times\frac{3}{8} = \frac{15}{8}.$$

2. D'après le tableau de la loi de N, le support de N est donné par $N(\Omega) = [\![1,3]\!]$. Il y a donc au plus 3 jours de grève et Coralie peut arriver en retard 0, 1, 2 ou 3 matins. Donc $Y(\Omega) = [\![0,3]\!]$.

3. (a) En utilisant les données de l'énoncé, $P_{[N=1]}(Y=0)$ est la probabilité que Coralie ne soit pas en retard le premier jour de grève donc $P_{[N=1]}(Y=0) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.
$P_{[N=1]}(Y=1)$ est la probabilité que Coralie soit en retard le premier jour de grève donc $P_{[N=1]}(Y=1) = \dfrac{1}{3}$.

(b) Par la formule des probabilités composées,

$$P\big([N=1]\cap[Y=0]\big) = P(N=1)\times P_{[N=1]}(Y=0) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

et

$$P\big([N=1]\cap[Y=1]\big) = P(N=1)\times P_{[N=1]}(Y=1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Enfin, il est impossible que Coralie ait plus de retard qu'il n'y a de jours de grève. Donc puisque Y est le nombre de retards pendant la période de grève, j'en déduis que

$$P\big([N=1]\cap[Y=2]\big) = 0 \quad \text{et} \quad P\big([N=1]\cap[Y=3]\big) = 0.$$

4. (a) Les évènements $[N=1]$, $[N=2]$ et $[N=3]$ forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P\big([Y=0]\cap[N=1]\big)+P\big([Y=0]\cap[N=2]\big)+P\big([Y=0]\cap[N=2]\big)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Je raisonne de même pour le calcul des probabilités $P(Y=1)$, $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$ et j'obtiens ainsi la loi de Y, que je résume dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(Y=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{1}{72}$

Enfin par définition de l'espérance,

$$E(Y)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{7}{18}+2\times\frac{7}{72}+3\times\frac{1}{72}=\frac{45}{72}=\frac{5}{8}.$$

(b) La probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève est $P(Y=0)=\frac{1}{2}$.

(c) D'après la question **3.b)**, $P\big([N=1]\cap[Y=0]\big)=\frac{1}{3}$ alors que $P(N=1)=\frac{1}{2}$ et $P(Y=0)=\frac{1}{2}$. Donc $P\big([N=1]\cap[Y=0]\big)\neq P(N=1)\times P(Y=0)$, ce qui prouve que les variables aléatoires Y et N ne sont pas indépendantes.

(d) En utilisant la définition, j'obtiens que

$$E(YN)=\frac{1}{6}+\frac{2}{18}+\frac{3}{6}+\frac{4}{72}+\frac{6}{12}+\frac{9}{72}=\frac{35}{24}.$$

Alors d'après la formule de König-Huygens,

$$\mathrm{Cov}(Y,N)=E(YN)-E(Y)E(N).$$

Et d'après les questions **1.** et **4.a)**, $E(N)=\frac{15}{8}$ et $E(Y)=\frac{5}{8}$. Donc

$$\mathrm{Cov}(Y,N)=\frac{35}{24}-\frac{5}{8}\times\frac{15}{8}=\frac{35}{24}-\frac{75}{64}=\frac{35\times 8}{192}-\frac{75\times 3}{192}=\frac{280-225}{192}=\frac{55}{192}.$$

Exercice 4 – ECRICOME 2012 / Ex3

1. (a) Le nombre total de tirages est $\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$, c'est le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 4. Le nombre de tirages favorables est de 2 : ou bien je tire les deux boules blanches, ou bien les deux boules noires.
Ainsi la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

(b) La variable aléatoire N compte le nombre de succès lors de n répétitions, identiques et indépendantes, de l'épreuve de Bernoulli de succès "tirer deux boules de même couleur", de probabilité $p=\frac{1}{3}$. Donc N suit une loi binomiale de paramètres n et $p=\frac{1}{3}$.
Par conséquent, le support est donné par $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad P(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

(c) Comme N suit une loi binomiale, alors

$$E(N) = np = \frac{n}{3} \quad \text{et} \quad V(N) = np(1-p) = \frac{n}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}.$$

(d) Il s'agit de la probabilité d'obtenir au moins un succès *i.e.*

$$P(N \geqslant 1) = 1 - P(N=0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

2. (a) L'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules, l'évènement $[X=1]$ est donc impossible et $P(X=1)=0$. L'évènement $[X=2]$ se réalise si deux boules sont retirées à chacun des deux tirages. En particulier, deux boules de même couleur ont été tirées au premier tirage. Dans ce cas, il ne reste que les deux boules de l'autre couleur dans l'urne et l'urne sera vide à l'issue du deuxième tirage. Ainsi, d'après la question **1.**,

$$P(X=2) = P(A) = \frac{1}{3}.$$

Grâce à ce que ce raisonnement, je sais que l'évènement $[X=3]$ se réalise si deux boules de même couleur sont tirées au deuxième tirage, après que deux boules de couleurs différentes ont été tirées au premier tirage. Ainsi, en notant A_i l'évènement "deux boules de même couleur sont tirées au i-ème tirage",

$$P(X=3) = P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

(b) L'évènement $[X=n]$ se réalise si et seulement si les deux boules de même couleur sont tirées au $(n-1)$-ème tirage et pas lors des $n-2$ tirages précédents (sinon l'urne serait vidée avant le n-ème tirage). Avec les notations de la question précédente, J'obtiens que

$$\begin{aligned} P(X=n) &= P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-2}} \cap A_{n-1}\right) \\ &= P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \times \cdots \times P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-2}}}(A_{n-1}) \\ &= (1-a) \times (1-a) \times \cdots \times (1-a) \times a = (1-a)^{n-2} a. \end{aligned}$$

(c) J'ai montré à la question précédente qu'une fois le premier succès réalisé, l'urne était vidée au tirage suivant. Ainsi $Z = X-1$ représente le rang du premier succès lors des répétitions identiques et indépendantes de l'expérience décrite précédemment. Donc $Z = X-1$ suit une loi géométrique de paramètre $a = \frac{1}{3}$.

(d) Comme Z suit une loi géométrique de paramètre a, alors

$$E(Z) = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-a}{a^2}.$$

Et comme $X = Z+1$, alors j'en déduis que

$$E(X) = E(Z+1) = E(Z)+1 = \frac{1}{a}+1 = \frac{1+a}{a} \quad \text{et} \quad V(X) = V(Z+1) = V(Z) = \frac{1-a}{a^2}.$$

3. Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 2$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n = \dfrac{\lambda}{r-s}(r^{n-2} - s^{n-2})$.

Initialisation : Pour $n=2$,

$$u_2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{r-s}(r^{2-2}-s^{2-2}) = \frac{\lambda}{r-s}(1-1) = 0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \lambda r^{n-2} + s u_n = \lambda r^{n-2} + s\frac{\lambda}{r-s}(r^{n-2}-s^{n-2}) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\lambda r^{n-2}(r-s) + s\lambda(r^{n-2}-s^{n-2})}{r-s} = \frac{\lambda(r^{n-1} - r^{n-2}s + sr^{n-2} - s^{n-1})}{r-s} \\ &= \frac{\lambda}{r-s}(r^{n-1}-s^{n-1}). \end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n=0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{\lambda}{r-s}(r^{n-2}-s^{n-2}).$$

4. (a) Le nombre total de tirages est $\binom{6}{2} = \frac{6\times 5}{2\times 1} = 15$, c'est le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 6. Le nombre de tirages favorables est de 3 : ou bien on tire les deux boules blanches, ou bien les deux boules noires, ou bien les deux boules vertes.
Ainsi la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

(b) L'urne $\mathcal{U}$ contient 6 boules, l'évènement $[Y=2]$ est donc impossible et $P(Y=2)=0$.
L'évènement $[Y=3]$ se réalise si deux boules sont retirées à chacun des trois tirages. Ainsi, en notant B_i l'évènement "deux boules de même couleur sont tirées au i-ème tirage dans l'urne $\mathcal{V}$",

$$P(Y=3) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = b \times a = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

En effet, une fois que deux boules d'une même couleur ont été retirées de l'urne $\mathcal{V}$, celle-ci se retrouve dans la configuration de l'urne $\mathcal{U}$ (à la couleur près).

(c) D'après la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'évènements $\{B, \overline{B}\}$,

$$\begin{aligned} P(Y=n+1) &= P\big(B \cap [Y=n+1]\big) + P\big(\overline{B} \cap [Y=n+1]\big) \\ &= P(B) \times P_B(Y=n+1) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(Y=n+1) \\ &= bP(X=n) + (1-b)P(Y=n). \end{aligned}$$

En effet, la probabilité $P_B(Y=n+1)$ correspond à une urne dont on vient de retirer deux boules de la même couleur, donc assimilable à l'urne $\mathcal{U}$, que l'on doit vider en n tirages restants. D'où $P_B(Y=n+1) = P(X=n)$.
De même, la probabilité $P_{\overline{B}}(Y=n+1)$ correspond à une urne $\mathcal{V}$ dans son état initial que l'on doit vider en n tirages restants. D'où $P_{\overline{B}}(Y=n+1) = P(Y=n)$.

(d) D'après la question **4.b)**, $\quad P(Y=2)=0$. $\quad$ Et comme $P(X=n) = (1-a)^{n-2}a$, alors

$$P(Y=n+1) = ab(1-a)^{n-2} + (1-b)P(Y=n).$$

Puis, en posant $u_n = P(Y = n)$, $\lambda = ab$, $r = (1-a)$ et $s = (1-b)$ et en utilisant le résultat de la question **3.**, j'obtiens que $\forall n \geqslant 2$,

$$P(Y = n) = \frac{ab}{(1-a)-(1-b)}\left((1-a)^{n-2} - (1-b)^{n-2}\right) = \frac{ab}{b-a}\left((1-a)^{n-2} - (1-b)^{n-2}\right).$$

(e) Les séries géométriques $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ convergent lorsque $|q| < 1$ et leur somme vaut $\dfrac{1}{1-q}$. Ici $0 < 1-a < 1$ et $0 < 1-b < 1$, donc en opérant le changement de variable $k = n-2$, j'en déduis que les séries

$$\sum_{n\geqslant 2} (1-a)^{n-2} = \sum_{k\geqslant 0} (1-a)^k \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 2} (1-b)^{n-2} = \sum_{k\geqslant 0} (1-b)^k$$

convergent. Alors la série

$$\sum_{n\geqslant 2} P(Y = n) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{ab}{b-a}\left((1-a)^{n-2} - (1-b)^{n-2}\right)$$

converge aussi et sa somme vaut

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} P(Y = n) &= \frac{ab}{b-a}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(1-a)^k - \sum_{k=0}^{+\infty}(1-b)^k\right)\\ &= \frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{1-(1-a)} - \frac{1}{1-(1-b)}\right)\\ &= \frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{ab}{b-a} \times \frac{b-a}{ab} = 1.\end{aligned}$$