DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 – [Adapté de BSB 2017 / Ex1]

1. Je calcule les produits matriciels $P \times Q$ et $Q \times P$:

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$Q \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

2. Je calcule le produit $Q \times A$ puis multiplie le résultat par P :

$$Q \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$QA \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

J'ai bien montré que $QAP = L$.

3. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $QA^nP = L^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$QA^0P = QIP = QP = I \quad \text{et} \quad L^0 = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $QA^nP = L^n$. Alors

$$L^{n+1} = L^n \times L = QA^nP \times QAP = QA^nIAP = QA^{n+1}P.$$

Donc $QA^{n+1}P = L^{n+1}$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire,
alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad QA^nP = L^n.$$

b) Je détermine J puis calcule ses puissances successives :

$$J = L - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

c) Pour tout $n \geqslant 3$, d'après la question précédente, $J^n = J^3 \times J^{n-3} = 0_3 \times J^{n-3} = 0_3$.
Par ailleurs, les matrices I et J commutent donc je peux appliquer la formule du binôme de Newton à la matrice $L = I + J$:

$$L^n = (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k.$$

Comme tous les termes de cette somme sont nuls dès lors que $k \geqslant 3$, j'obtiens alors

$$L^n = \binom{n}{0} I^n J^0 + \binom{n}{1} I^{n-1} J^1 + \binom{n}{2} I^{n-2} J^2 = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

d) D'après les résultats obtenus aux questions précédentes, pour $n \geqslant 2$,

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, cette formule me donne les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 & 2\times 0\times(-1) \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 & 2\times 1\times 0 \\ 0 & 1 & 2\times 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L,$$

donc cette formule reste valable pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

e) Je sais que $QA^nP = L^n$ donc $PL^nQ = PQA^nPQ = IA^nI = A^n$. Ainsi $A^n = PL^nQ$ et

$$PL^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix}$$

$$A^n = PL^n \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 = 1.$$

b) Pour $n \geqslant 1$, je calcule le produit AX_n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2 + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

J'ai bien montré que pour tout $n \geqslant 1$, $X_{n+1} = AX_n$.

c) **Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = A^{n-1}X_1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $A^0X_1 = IX_1 = X_1$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $X_n = A^{n-1}X_1$. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^{n-1}X_1 = A^nX_1.$$

Donc $X_{n+1} = A^{n+1-1}X_1$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = A^{n-1} X_1.$$

d) Je sais que $\begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = X_n = A^{n-1} X_1$.

Il me suffit donc d'opérer ce produit pour déduire les formules de v_n et w_n :

$$A^{n-1} X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n-2)+4(n-1) \\ 2(n-1)+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) \\ 2n \end{pmatrix}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = 2n(n-1) \quad \text{et} \quad w_n = 2n.$$

Exercice 2 – [BSB 2018 / Ex2]

1. a) Je calcule la dérivée de g puis étudie son signe. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + 1 > 0$.
   Ainsi la fonction g est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.

   b) J'évalue g en 0 : $g(0) = e^0 - 1 + 0 = 1 - 1 = 0$. Puisque g est croissante sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$, et pour tout réel $x \leqslant 0$, $g(x) \leqslant g(0) = 0$.
   J'obtiens ainsi le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. a) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. Alors

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{e^x} = 0 \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

   b) Je calcule l'écart entre la courbe et l'asymptote puis calcule la limite de cet écart :

$$f(x) - y = x + 1 - \frac{x}{e^x} - (x+1) = -\frac{x}{e^x}.$$

   Or j'ai déjà montré à la question précédente que $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{e^x} = 0$.
   Donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   c) Je réécris l'expression de la fonction $f(x)$ de sorte à lever l'indétermination :

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x} = x + 1 - xe^{-x} = 1 - x\big(e^{-x} - 1\big).$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} - 1 = +\infty \end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x \to -\infty} -x\big(e^{-x} - 1\big) = +\infty.$$

   Finalement, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. a) La fonction f est donnée sous la forme $f(x) = x+1-\dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$ puis

$$f'(x) = 1 - \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{\left(e^x\right)^2} = 1 - \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x - 1 + x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}.$$

J'ai bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$.

b) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Or le signe de $g(x)$ a été déterminé à la question **1.**. J'obtiens donc le tableau de variation suivant pour f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. La fonction f' est donnée sous la forme $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = e^x - 1 + x$ et $v(x) = e^x$. Alors $u'(x) = e^x + 1$ et $v'(x) = e^x$ puis

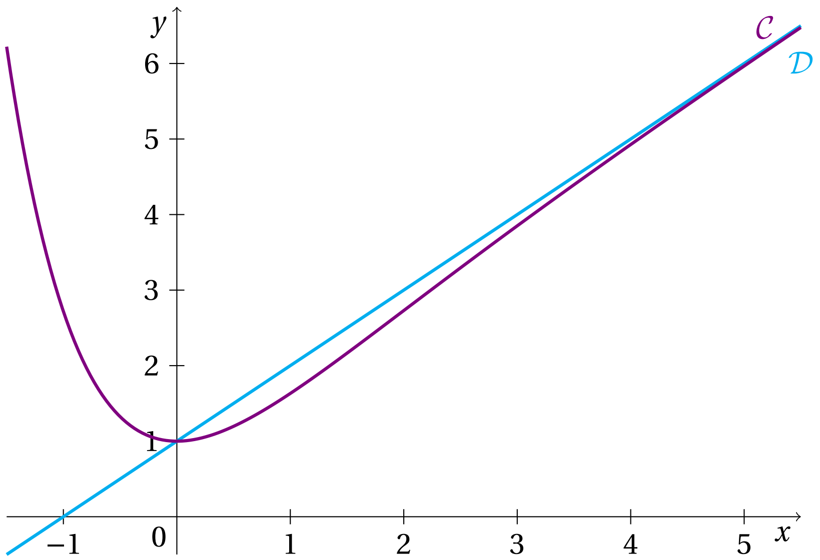
$$f''(x) = \frac{\left(e^x+1\right) \times e^x - \left(e^x - 1 + x\right) \times e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x + 1 - e^x + 1 - x}{e^x} = \frac{2-x}{e^x}.$$

J'ai bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \dfrac{2-x}{e^x}$. Pour étudier la convexité de f, j'ai besoin de connaître le signe de $f''(x)$. Or $e^x > 0$ et $2 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$. D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Ainsi la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left]-\infty, 2\right]$ puis concave sur l'intervalle $\left[2, +\infty\right[$.

5. Voici les représentations graphiques de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$:



Exercice 3 – [ESCP 2013 / Ex3]

1. a) Je note pour $k \in \{1, 2\}$, U_k l'événement "le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_k$".
Alors d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= P\big(U_1 \cap [X_1 = 1]\big) + P\big(U_2 \cap [X_1 = 1]\big) \\ &= P(U_1) \times P_{U_1}(X_1 = 1) + P(U_2) \times P_{U_2}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3+1}{10} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Comme les seules valeurs possibles pour la variable aléatoire X_1 sont 0 et 1,
alors X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{2}{5}$.

b) Comme X_1 suit une loi de Bernoulli,

$$E(X_1) = p = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad V(X_1) = p(1-p) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$$

2. a) Comme par définition $Z = X_1 + X_2$, alors $[X_2 = 0] \cap [Z = 0] = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]$.
Puis d'après la formule des probabilités composées,

$$P\big([X_2 = 0] \cap [Z = 0]\big) = P\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) = P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}.$$

b) Les événements $[X_2 = 1] \cap [Z = 0]$ et $[X_2 = 0] \cap [Z = 2]$ sont impossibles donc

$$P\big([X_2 = 1] \cap [Z = 0]\big) = P\big([X_2 = 0] \cap [Z = 2]\big) = 0.$$

Par ailleurs, de la même manière que dans la question précédente,

$$\begin{aligned} P\big([X_2 = 0] \cap [Z = 1]\big) &= P\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big) = P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}, \\ P\big([X_2 = 1] \cap [Z = 1]\big) &= P\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) = P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}, \\ P\big([X_2 = 1] \cap [Z = 2]\big) &= P\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) = P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}. \end{aligned}$$

Je résume tout cela dans le tableau ci-dessous :

	$Z = 0$	$Z = 1$	$Z = 2$
$X_2 = 0$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	0
$X_2 = 1$	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$

3. a) Je détermine la loi de X_2 en additionnant les probabilités de chaque ligne dans le tableau précédent. J'obtiens

x	0	1
$P(X_2 = x)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{25}$

La variable aléatoire X_2 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{9}{25}$. Ainsi

$$E(X_2) = p = \frac{9}{25} \quad \text{et} \quad V(X_2) = p(1-p) = \frac{9}{25} \times \frac{16}{25} = \frac{144}{625}.$$

b) Je sais que $P(X_1=1)=\dfrac{2}{5}$, $P(X_2=1)=\dfrac{9}{25}$ et $P(X_1=1,X_2=1)=\dfrac{6}{25}$.
J'en déduis alors que $P(X_1=1)\times P(X_2=1)\neq P(X_1=1,X_2=1)$.
Donc les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

c) Je détermine la loi de Z en additionnant les probabilités de chaque colonne dans le tableau de la loi du couple (X_2,Z). J'obtiens

z	0	1	2
$P(Z=z)$	$\dfrac{12}{25}$	$\dfrac{7}{25}$	$\dfrac{6}{25}$

d) Je calcule l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z :

$$E(Z)=0\times\frac{12}{25}+1\times\frac{7}{25}+2\times\frac{6}{25}=\frac{7+12}{25}=\frac{19}{25}.$$

Par ailleurs, en utilisant le théorème de transfert, je sais que

$$E\left(Z^2\right)=0^2\times\frac{12}{25}+1^2\times\frac{7}{25}+2^2\times\frac{6}{25}=\frac{7+24}{25}=\frac{31}{25}.$$

Alors par la formule de König-Huygens, j'obtiens que

$$V(Z)=E\left(Z^2\right)-E(Z)^2=\frac{31}{25}-\left(\frac{19}{25}\right)^2=\frac{31\times25-19^2}{25^2}=\frac{775-361}{625}=\frac{414}{625}.$$

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[X_1=0]}(U_1)=\frac{P\left(U_1\cap[X_1=0]\right)}{P(X_1=0)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}.$$

La probabilité que la boule verte tirée au premier tirage provienne de l'urne $\mathcal{U}_1$ est $\dfrac{1}{3}$.

5. a) Grâce au tableau de la loi conjointe, je sais que

$$E(X_2Z)=1\times1\times\frac{3}{25}+1\times2\times\frac{6}{25}=\frac{3+12}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}.$$

b) D'après la formule de König-Huygens, je sais que

$$\mathrm{Cov}(X_2,Z)=E(X_2Z)-E(X_2)E(Z)=\frac{3}{5}-\frac{9}{25}\times\frac{19}{25}=\frac{375-171}{625}=\frac{204}{625}.$$

c) Comme $Z=X_1+X_2$, alors $X_1=Z-X_2$. Ainsi par linéarité à gauche de la covariance,

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\mathrm{Cov}(Z-X_2,X_2)=\mathrm{Cov}(Z,X_2)-V(X_2)=\frac{204}{625}-\frac{144}{625}=\frac{60}{625}=\frac{12}{125}.$$

d) Comme $Z=X_1+X_2$, alors

$$V(Z)=V(X_1)+V(X_2)+2\,\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\frac{6}{25}+\frac{144}{625}+2\times\frac{12}{125}=\frac{150+144+120}{625}=\frac{414}{625}.$$