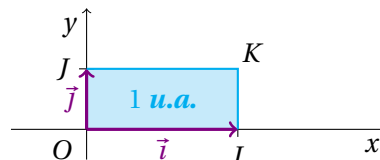


# 11 | Intégrales et primitives

## I – Intégrale et aire

### 1 – Unité d'aire

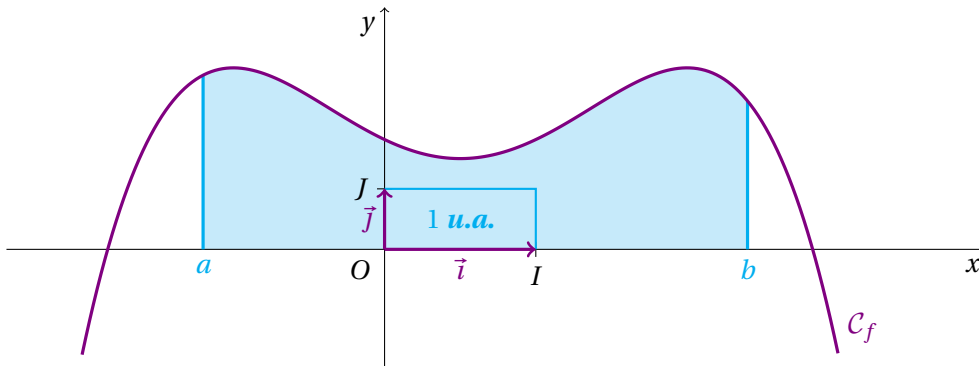
Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthogonal du plan.  
L'unité d'aire, notée  $u.a.$ , est l'aire du rectangle unitaire  $OIKJ$  avec  $I(1,0)$ ,  $J(0,1)$  et  $K(1,1)$ .



### 2 – Intégrale d'une fonction continue et positive

**Définition 11.1** – Soient  $f$  une fonction définie, **continue** et **positive** sur un intervalle  $[a, b]$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
L'intégrale de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}_f$  compris entre la courbe  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .

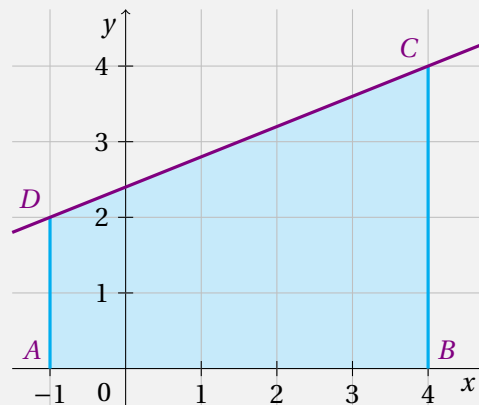
Ce nombre est noté  $\int_a^b f(x) dx$ .



**Remarque 11.2** –

- $\int_a^b f(x) dx$  se lit "intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f(x) dx$ ".
- Les réels  $a$  et  $b$  sont appelés les **bornes** de l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$ .
- La variable  $x$  est dite "*muette*". Elle n'intervient pas dans le résultat, c'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres  $a$  et  $b$  :  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$ .
- $\int_a^a f(x) dx = 0$  car le domaine  $\mathcal{D}_f$  est alors réduit à un segment.

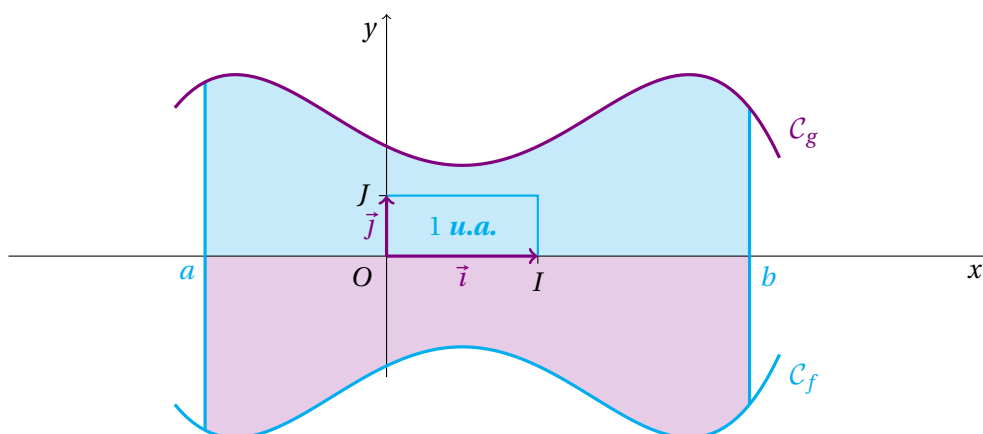
**Exemple 11.3** – Calculer  $\int_{-1}^4 \frac{2x+12}{5} dx$ .



### 3 – Intégrale d'une fonction continue et négative

Si  $f$  est une fonction continue et **négative** sur un intervalle  $[a, b]$ , alors la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[a, b]$  par  $g(x) = -f(x)$  est une fonction continue et **positive** sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine  $\mathcal{D}_f$  compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  est égale à l'aire du domaine  $\mathcal{D}_g$  compris entre la courbe  $\mathcal{C}_g$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .



**Définition 11.4** – Soient  $f$  une fonction définie, continue et négative sur un intervalle  $[a, b]$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

L'intégrale de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  est égale à l'opposé de l'aire  $\mathcal{A}$ , exprimée en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}_f$  compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  :

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}.$$

### 4 – Lien entre intégrale et dérivée

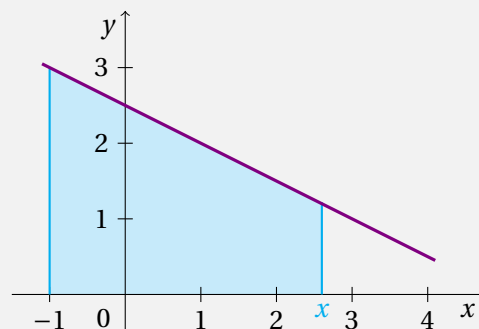
Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ . On peut définir une nouvelle fonction  $F$  qui, à tout réel  $x$  de l'intervalle  $[a, b]$ , associe l'intégrale de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $x$  :  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

#### Théorème 11.5

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ .

La fonction  $F$  définie sur  $[a, b]$  par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur  $[a, b]$  et sa dérivée est  $f$ .

**Exemple 11.6** – Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[-1, 4]$  par  $f(x) = \frac{5-x}{2}$ .



## II – Primitives

### 1 – Définition

**Définition 11.7** – Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On dit qu'une fonction  $F$  est une **primitive** de la fonction  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

**Exemple 11.8** – Vérifier les assertions suivantes.

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$ .
- $G : x \mapsto 2\sqrt{x}$  est une primitive sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
- Les fonctions  $F : x \mapsto x^2$ ,  $G : x \mapsto x^2 + 1$ , mais aussi  $H : x \mapsto x^2 + c$ , pour tout  $c \in \mathbb{R}$  sont des primitives sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f : x \mapsto 2x$ .

**Remarque 11.9** –

- Comme  $F$  est dérivable sur  $I$ , la fonction  $F$  est en particulier continue sur  $I$ .
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée  $f$ .  
C'est pourquoi on parle d'**une** primitive de la fonction  $f$  et non de **la** primitive de la fonction  $f$ .

#### Théorème 11.10

- Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet au moins une primitive sur  $I$ .
- Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors toute autre primitive de  $f$  sur  $I$  est de la forme  $F + C$ , où  $C \in \mathbb{R}$  est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de  $f$  sur  $I$  qui prend une valeur donnée en un point donné :  
Pour  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une unique primitive  $F_0$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $F_0(x_0) = y_0$ .

**Exemple 11.11** – Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = x^2 - 1$  est la primitive de la fonction  $f : x \mapsto 2x$  qui vérifie  $F(1) = 0$ .

## 2– Primitives des fonctions usuelles

Étant donnée la définition d'une primitive, certains résultats connus pour les fonctions dérivées se prolongent aux fonctions primitives.

### Proposition 11.12

- Si  $F$  et  $G$  sont des primitives des fonctions  $f$  et  $g$  sur un intervalle  $I$ , alors  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ .
- Si  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  et  $\lambda$  un réel, alors  $\lambda F$  est une primitive de  $\lambda f$  sur  $I$ .

### Proposition 11.13 – Primitives des fonctions usuelles

Le tableau suivant récapitule les primitives des fonctions usuelles.

$f$ est définie sur $I$ par	une primitive $F$ est donnée par	validité
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \geq 2 \text{ entier})$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $\mathbb{R}_+^*$

**Exemple 11.14** – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1.  $f(x) = 3x^2$

2.  $f(x) = x + \frac{3}{2}$

3.  $f(x) = (2x+1)(x-3)$

4.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

8.  $f(x) = \frac{6x^2 - 8x + 2}{5}$

5.  $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$

9.  $f(x) = -\frac{6}{x^4}$

6.  $f(x) = \frac{1}{x^5}$

10.  $f(x) = x^2 + 3x - 2$

7.  $f(x) = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

11.  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3x^2 - \frac{1}{x^2}$

### 3 – Primitives des fonctions composées usuelles

#### Proposition 11.15 – Primitives des fonctions composées

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Le tableau suivant récapitule les primitives des fonctions composées.

Conditions	fonction $f$	une primitive $F$ est donnée par
$n \in \mathbb{N}^*$	$f = u' \times u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u$ ne s'annule pas sur $I$	$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$
$u$ ne s'annule pas sur $I$ et $n > 1$	$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$u$ strictement positive sur $I$	$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$



#### Méthode 11.16 – Calculer une primitive d'une fonction composée

Pour calculer une primitive d'une fonction composée  $f$ , il faut s'appuyer sur le tableau précédent.

On procède de la manière suivante :

1. On repère la forme de la fonction : un produit  $u' \times u^n$ , un quotient  $\frac{u'}{u^n}$ , etc.
2. On **identifie** la fonction  $u$  et on **calcule** sa dérivée  $u'$ .
3. On compare la forme repérée avec la fonction de départ. Il y a alors deux possibilités :
  - La forme repérée correspond **exactement** à la fonction de départ, auquel cas une primitive est directement donnée par la formule du tableau.
  - La forme repérée est de la forme  $k \times f(x)$ , auquel cas une primitive est donnée par la formule du tableau, **multipliée par**  $\frac{1}{k}$ .

**Exemple 11.17** – Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1.  $f(x) = (2x+1)^2$

2.  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

$$3. f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$$

$$4. f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

**Méthode 11.18 – Déterminer la primitive vérifiant une condition donnée**

Pour déterminer la primitive  $F$  d'une fonction  $f$  vérifiant une condition donnée :

1. On commence par déterminer la forme générale de toutes les primitives de la fonction  $f$  :  
▷ Les primitives de  $f$  sont toutes de la forme  $F + C$ .
2. On utilise ensuite la condition que doit vérifier la primitive demandée pour déterminer la valeur de la constante  $C$ .

**Exemple 11.19** – Calculer la primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$  qui vérifie la condition  $F(1) = 0$ .

## III – Intégrale d'une fonction continue

### 1 – Définition

**Définition 11.20** – Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est le nombre réel égal à  $F(b) - F(a)$  :

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

**Remarque 11.21** –

- La différence  $F(b) - F(a)$  se note  $\left[ F(x) \right]_a^b$ . Ainsi

$$\int_a^b f(x) \, dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Puisqu'il s'agit de la différence entre deux termes, le résultat ne dépend pas de la primitive  $F$  choisie.

**Exemple 11.22** – Calculer chacune des intégrales suivantes.

1.  $\int_1^3 3t^2 + 2t - 1 \, dt$

2.  $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$

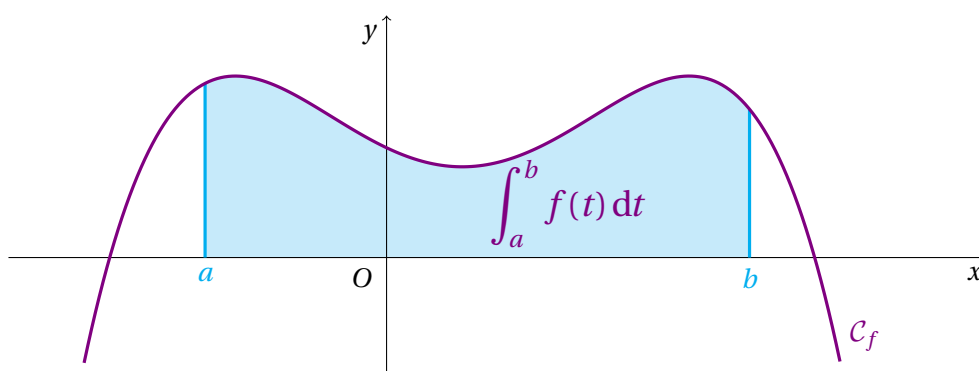
**Proposition 11.23**

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ . Alors

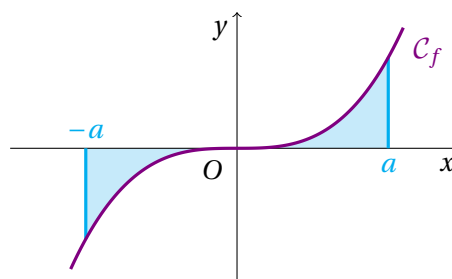
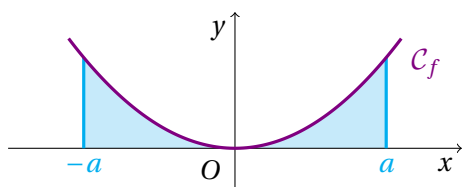
$$\int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt.$$

**2 – Premières propriétés****Proposition 11.24**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ ,  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a, b]$  et  $C_f$  la courbe représentative de  $f$ . Alors  $\int_a^b f(t) dt$  est l'aire de la surface comprise entre  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation  $x = a$  et  $x = b$ .

**Proposition 11.25**

- Si la fonction  $f$  est continue et paire sur  $[-a, a]$ , alors  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \times \int_0^a f(t) dt$ .
- Si la fonction  $f$  est continue et impaire sur  $[-a, a]$ , alors  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ .

**Exemple 11.26 –**

- $\int_{-1}^1 t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt$
- $\int_{-1}^1 t^2 + |t| dt$



**Proposition 11.27 – Relation de Chasles**

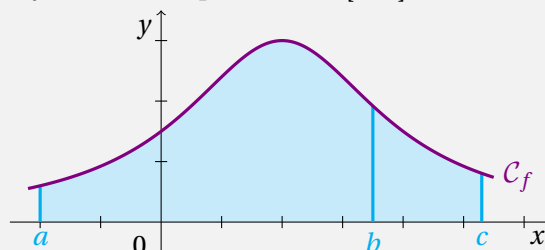
Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a, b$  et  $c$  trois réels de  $I$ . Alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

**Exemple 11.28 – Interprétation graphique**

L'aire du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = c$  est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  et du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = b$  et  $x = c$ .

( $f$  continue et positive sur  $[a, c]$  et  $a \leq b \leq c$ ).

**Méthode 11.29 – Calculer l'intégrale d'une fonction  $f$  définie "par morceaux"**

Pour calculer l'intégrale d'une fonction  $f$  dont l'expression est définie en plusieurs morceaux, on utilise la relation de Chasles. On décompose ainsi l'intégrale de  $f$  sur chaque intervalle sur lequel on connaît l'expression de  $f$ .

**Exemple 11.30** – Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-2, 3]$  par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Calculer  $\int_{-2}^3 f(x) dx$ .