DEVOIR SURVEILLÉ 1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 3 pages et est constitué de 5 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – On définit les quatre matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On considère également la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}.$$

1. Calculer les produits $P \times Q$ et $Q \times P$.
2. **Calcul de A^n.** On pose $B = QAP$.
   a) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. *(Les calculs intermédiaires doivent être indiqués sur la copie.)*
   b) **En déduire** que $A = PBQ$.
   c) Donner les quatre coefficients de la matrice B^n.
   d) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $A^n = PB^nQ$.
   e) En déduire les quatre coefficients de la matrice A^n.
3. **Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.**
   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 1$.
   b) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   c) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. On note L la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   d) Montrer que $L = \dfrac{3L+1}{L+3}$, résoudre cette équation puis déterminer L.
4. **Calcul de u_n et de sa limite.** Pour tout entier n, on considère les deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases}$$

   On admet que pour tout entier $n \geqslant 0$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

a) Prouver par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\quad u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

b) On pose pour tout $n \geqslant 0$, $\quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Donner l'expression de U_{n+1} en fonction de A et U_n puis donner (sans démonstration) l'expression de U_n en fonction de A, n et U_0.

c) Donner l'expression de u_n en fonction de n puis retrouver ainsi la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 2 – On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. **Étude du signe de $g(x)$.**

   a) Calculer $g'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   b) Vérifier que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution p que l'on précisera et construire le tableau de variation de g.

   c) Calculer $g(p)$ puis donner le signe de $g(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. **Étude asymptotique de f.**

   a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$.

   b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique de $\mathcal{C}_f$ quand $x \to +\infty$ et préciser la position de cette asymptote par rapport à $\mathcal{C}_f$.

3. **Représentation graphique de f.**

   a) Démontrer que

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

   b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en indiquant dans celui-ci les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

   c) Tracer sur un même dessin le graphe de $\mathcal{C}_f$ ainsi que celui de son asymptote $\mathcal{D}$.

4. **Étude d'une équation.** Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel non nul, on considère l'équation

   $$(E_n): \quad f(x) = 2n.$$

   a) Prouver que l'équation (E_n) admet une unique solution (*que l'on ne cherche pas à calculer*). On note x_n cette solution.

   b) Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n)$, $f(1)$ et $f(n)$.
   En déduire l'encadrement

   $$\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant x_n \leqslant n.$$

   c) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad 1 - \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$.

   d) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.

   e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Exercice 3 – Soient A, K et I les trois matrices carrées d'ordre 3 définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer K^2 et K^3.
   b) Déterminer K^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.
2. a) Exprimer A en fonction de I et K.
   b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, A^n en fonction des matrices I, K, K^2 et de n.
   c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression explicite de la matrice A^n en fonction de n.
   d) Vérifier que le résultat trouvé est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice 4 – On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée.
On lance le dé et on observe son résultat :

- Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois.
- Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILE apparus au cours de cette expérience.

1. a) Justifier que X suit une loi uniforme que l'on précisera en détail.
   b) Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Montrer que $P(Y=2) = P\big([Y=2]\cap[X=6]\big) = \dfrac{1}{24}$.
3. a) Montrer que pour $k \in \{1,2,3,4,5\}$, $\quad P_{[X=k]}(Y=0) = \dfrac{1}{2}$.
   b) Que vaut $P_{[X=6]}(Y=0)$? En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que $P(Y=0) = \dfrac{11}{24}$.
   c) Donner finalement la loi de la variable Y et calculer son espérance.
4. a) Recopier et compléter le tableau suivant afin qu'il fournisse la loi du couple (X,Y).
   (Aucune justification supplémentaire n'est demandée.)

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$
$Y=0$						
$Y=1$						
$Y=2$						

   b) Calculer alors la covariance de X et de Y.

Exercice 5 (**BONUS**) **–** Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer les produits matriciels $A(A-I)$ et $B(B-I)$.
   b) **En déduire** que $A^2 = A$ et que $B^2 = B$.
   c) Calculer AB ainsi que BA.
2. On note dans toute la suite $W = A + 2B$.
   a) En utilisant les relations obtenues à la question précédente, montrer que $W^2 = A + 4B$.
   b) Plus généralement, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$W^n = A + 2^n B.$$