

CONCOURS BLANC 4 — ESCP

Exercice 1 –

1. a) Je calcule J^2 puis J^3 :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2J.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$J^3 = 2J.$$

- b) Je sais que $J^3 = 2J$ donc $J^3 - 2J = 0_3$, matrice nulle d'ordre 3. Ainsi le polynôme $X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice J . Les valeurs propres possibles pour J sont donc parmi les racines de ce polynôme. Or

$$X^3 - 2X = 0 \iff X(X^2 - 2) = 0 \iff X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}) = 0.$$

Il s'agit d'une équation produit nul, donc l'un des facteurs au moins doit être nul, *i.e.*

$$\begin{aligned} X = 0 \quad \text{ou} \quad X - \sqrt{2} = 0 \quad \text{ou} \quad X + \sqrt{2} = 0 \\ \iff X = 0 \quad \text{ou} \quad X = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad X = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres possibles pour J sont donc $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

- c) Je calcule les produits entre J et les colonnes de P :

$$J \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul, solution de $JX = -\sqrt{2}X$,

alors il s'agit d'un vecteur propre de J , associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

De même

$$J \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul, solution de $JX = 0X$,

alors il s'agit d'un vecteur propre de J , associé à la valeur propre 0.

Et

$$J \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul, solution de $JX = \sqrt{2}X$,

alors il s'agit d'un vecteur propre de J , associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

Finalement les trois colonnes de P sont bien des vecteurs propres de J .

d) Je calcule JP et PD_1 :

$$JP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1+1 & -1+1 & 1+1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et

$$PD_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $JP = PD_1$.

Pour montrer que J est diagonalisable, comme la matrice D est diagonale, il ne reste plus qu'à montrer que la matrice P est inversible.

Je raisonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \sqrt{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & \sqrt{2} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

La matrice obtenue est triangulaire supérieure, avec tous ses pivots non nuls donc elle est inversible. Alors j'en déduis que la matrice P est inversible.

Dès lors, en multipliant à droite par P^{-1} l'équation $JP = PD_1$, j'obtiens que $J = PD_1P^{-1}$, donc que J est diagonalisable.

e) D'après la question précédente, je sais que $J = PD_1P^{-1}$ et $JP = PD_1$. Alors

$$J^2P = J \times JP = PD_1P^{-1} \times PD_1 = PD_1ID_1 = PD_1D_1 = PD_1^2.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$J^2P = PD_1^2.$$

2. a) Je calcule $J^2 - I$ pour retrouver K . J'ai déjà calculé J^2 précédemment. Ainsi

$$J^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K.$$

J'ai bien montré que

$$K = J^2 - I.$$

b) Je calcule $aI + bJ + cK$ pour a, b et c trois réels et je cherche à retrouver A :

$$aI + bJ + cK = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Pour retrouver $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, il me suffit de choisir $a = c = 1$ et $b = 2$.

Pour ces valeurs, alors j'obtiens bien que

$$A = aI + bJ + cK, \quad \text{i.e.} \quad A = I + 2J + K.$$

- c) J'ai montré aux deux questions précédentes que $A = I + 2J + K$ et que $K = J^2 - I$.
Alors en combinant ces deux équations, j'obtiens

$$A = I + 2J + J^2 - I = 2J + J^2.$$

En outre, je sais déjà que $JP = PD_1$ et que $J^2P = PD_1^2$. Alors

$$AP = (2J + J^2)P = 2JP + J^2P = 2PD_1 + PD_1^2 = P(2D_1 + D_1^2).$$

Comme la matrice D_1 est diagonale, alors la matrice D_1^2 est aussi diagonale et finalement la matrice $D_2 = 2D_1 + D_1^2$ est encore diagonale. En particulier,

$$D_2 = 2D_1 + D_1^2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-\sqrt{2})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{2})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai montré que

$$AP = PD_2 \quad \text{pour } D_2 = \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. a) Voici le script complété.

```
1. import numpy as np
2. def puissanceA(n):
3.     A=np.array([[1,2,1],[2,2,2],[1,2,1]])
4.     B=np.eye(3)
5.     for k in range(n):
6.         B=np.dot(A,B)
7.     return B
```

- b) Je remarque que seul le coefficient central diffère entre les deux propositions.
Comme $A^5 = A^3 \times A^2$, je sais que le coefficient central de A^5 vaut $40 \times 8 + 56 \times 12 + 40 \times 8$.
Sans calcul, je sais que le chiffre des unités de ce nombre est 2 car 40×8 est un multiple de 10 et que $6 \times 2 = 12$. Alors j'en déduis que la bonne valeur pour A^5 est la matrice B_1 .

Exercice 2 –

1. a) Comme la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle de paramètre λ , je sais que sa densité est donnée par la fonction

$$f_Z(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi j'en déduis que $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x) dx = 1$.

- b) Comme la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle de paramètre λ , je sais que

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- c) Je remarque tout d'abord que $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x) dx = E(Z)$ puis aussi que

$$\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x) dx = E(Z^2).$$

D'après la formule de König-Huygens, je sais que $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$. Donc $E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$.

En regroupant tous ces résultats, j'ai montré que

$$\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

2. a) Par définition, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si la limite

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx$ existe et est finie. Or pour tout $A \geq 0$, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^A f(x) dx = \int_0^A \left(\lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x} \right) dx = (1-p) \times \int_0^A \lambda e^{-\lambda x} dx + \lambda p \times \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

D'après les questions précédentes, les deux intégrales $\int_0^A \lambda e^{-\lambda x} dx$ et $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$ convergent, i.e. admettent une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.

Alors par linéarité, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= (1-p) \times \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \lambda p \times \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= (1-p) \times 1 + \lambda p \times \frac{1}{\lambda} = 1 - p + p = 1. \end{aligned}$$

J'ai ainsi montré que

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

- b) La fonction f est définie en deux morceaux.

- Si $x < 0$, $f(x) = 0 \geq 0$ et si $x \geq 0$, $f(x) = \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x} \geq 0$ car toutes les valeurs impliquées sont positives : les exponentielles, λ , p et $1-p$. Donc la fonction f est positive sur \mathbb{R} .
- Sur l'intervalle $] -\infty, 0[$, $f(x) = 0$ donc la fonction f est continue car constante. Sur $[0, +\infty[$, $f(x) = \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x}$ donc la fonction f est continue comme somme de fonctions continues. Finalement, la fonction f admet au plus un point de discontinuité en $x = 0$.

- Enfin il reste à montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

Je sais que $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx$ converge et vaut 0 car la fonction sous l'intégrale est nulle. Aussi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1 d'après la question précédente.

Alors par la relation de Chasles, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 + 1 = 1.$$

Des trois points précédents, je conclus que f est une densité de probabilité.

- c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge. Or sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx &= \int_{-\infty}^0 x \times 0 dx + \int_0^{+\infty} x \times (\lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x}) dx \\ &= (1-p) \times \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx + \lambda p \times \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Et comme les deux intégrales impliquées convergent (leurs valeurs ont été déterminées plus tôt dans l'exercice), j'en déduis que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge, donc que la variable aléatoire X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = (1-p) \times \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx + \lambda p \times \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \\ &= (1-p) \times \frac{1}{\lambda} + \lambda p \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1-p}{\lambda} + \frac{2p}{\lambda} = \frac{1+p}{\lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi l'espérance de X vaut $E(X) = \frac{1+p}{\lambda}$.

3. a) Soit $x \geq 0$. Je cherche à calculer $\int_0^x t e^{-\lambda t} dt$. Je pose donc

$$u'(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad v(t) = t$$

et alors

$$u(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad v'(t) = 1.$$

Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^x t e^{-\lambda t} dt &= \left[-\frac{t}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x - \int_0^x 1 \times \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) dt = -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{0}{\lambda} e^{-\lambda \times 0} + \int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} dt \\ &= -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t} \right]_0^x = -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda \times 0} \\ &= -\left(\frac{\lambda x}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1+\lambda x}{\lambda^2} e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda^2} (1 - (1+\lambda x)e^{-\lambda x}). \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que $\forall x \geq 0$,

$$\int_0^x t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} (1 - (1+\lambda x)e^{-\lambda x}).$$

b) La fonction de répartition F de X est donnée par $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Je raisonne par disjonction de cas :

- Si $x < 0$, alors $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.
- Si $x \geq 0$, alors $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x f(t) dt$. Or

$$\begin{aligned}
 \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x \left(\lambda(1-p)e^{-\lambda t} + \lambda^2 p t e^{-\lambda t} \right) dt \\
 &= \lambda(1-p) \times \int_0^x e^{-\lambda t} dt + \lambda^2 p \times \int_0^x t e^{-\lambda t} dt \\
 &= \lambda(1-p) \times \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x + \lambda^2 p \times \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x} \right) \\
 &= \lambda(1-p) \times \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \times 0} \right) + p \times \left(1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x} \right) \\
 &= (1-p) \times \left(1 - e^{-\lambda x} \right) + p - (p + \lambda p x) e^{-\lambda x} \\
 &= (1-p) - (1-p) e^{-\lambda x} + p - (p + \lambda p x) e^{-\lambda x} \\
 &= 1 - (1 + \lambda p x) e^{-\lambda x}.
 \end{aligned}$$

Finalement j'ai montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 + \lambda p x) e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 3 –

1. a) En regardant facteur par facteur :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0^+.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{x}} = 0^+.$$

Comme la limite à droite de f en 0 est égale à $f(0)$, alors la fonction f est continue à droite en 0.

- b) Tout d'abord $\frac{f(x)}{x} = e^{-\frac{1}{x}}$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0^+$ d'après la question précédente.

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0^+.$$

Je remarque aussi que comme $f(0) = 0$, alors $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et x . Et comme sa limite lorsque x tend vers 0^+ vaut 0, en particulier la limite est finie, donc la fonction f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = 0.$$

2. a) La fonction f est de la forme $f = u \times v$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Alors $u'(x) = 1$ et pour v' , je remarque que v est de la forme $v = e^w$ avec $w(x) = -\frac{1}{x}$. Puisque $w'(x) = \frac{1}{x^2}$, alors $v'(x) = w'(x) \times e^{w(x)} = \frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}}$. Ainsi

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}} + x \times \frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Et j'ai montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

- b) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x} \geq 0$ et $1 + \frac{1}{x} \geq 1 > 0$.

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, j'en déduis que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) > 0.$$

J'en conclus alors directement que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

- c) Je cherche la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0^- \\ \lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1 \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Je peux ainsi dresser le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
f	0	$+\infty$

d) Je cherche cette fois la dérivée seconde de f , i.e. la dérivée de f' .

La fonction f' est de la forme $f' = u \times v$, avec $u(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $v(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

Puisque $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$, alors

$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -\frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3} \times e^{-\frac{1}{x}}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} \times e^{-\frac{1}{x}}.$$

Comme pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x^3} > 0$ et $e^{-\frac{1}{x}} > 0$, j'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) > 0$.

Donc f est convexe sur \mathbb{R}_+ .

3. a) Je reconnais la limite du taux d'accroissement $\frac{e^{-u} - e^{-0}}{u - 0}$. Lorsque u tend vers 0^+ , ce taux d'accroissement tend vers le nombre dérivé à droite de la fonction $h(u) = e^{-u}$ en 0. Comme sa dérivée est $h'(u) = -e^{-u}$, alors

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} = -e^{-0} = -1.$$

- b) Tout d'abord, $f(x) - (x - 1) = xe^{-\frac{1}{x}} - (x - 1) = xe^{-\frac{1}{x}} - x + 1$. Comme je veux utiliser le résultat de la question précédente, je pose $u = \frac{1}{x}$ afin d'obtenir e^{-u} .

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$. Et

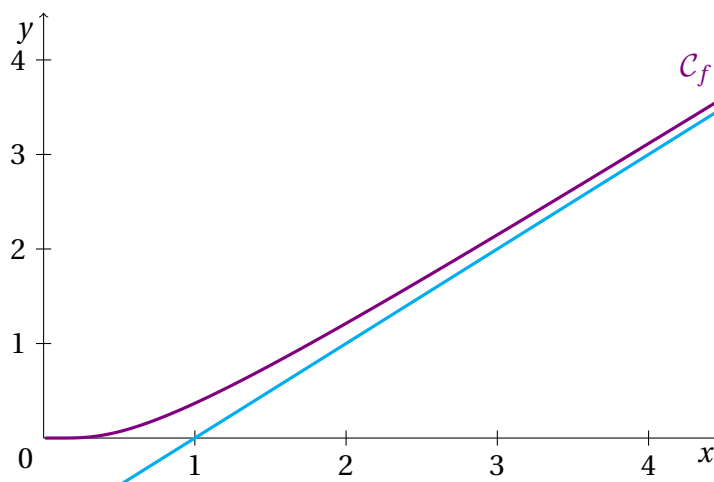
$$\frac{e^{-u} - 1}{u} = \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = xe^{-\frac{1}{x}} - x = f(x) - (x - 1) - 1.$$

Ainsi je peux conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

- c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$, la courbe représentative de la fonction f se rapprochera infiniment près de la droite d'équation $y = x - 1$: cette droite est asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) au voisinage de $+\infty$.

Voici l'allure de la courbe (\mathcal{C}) :



4. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $u_n > 0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad 1 > 0.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.
Alors

$$u_{n+1} = f(u_n) > f(0) = 0, \quad \text{car } u_n > 0 \text{ et que } f \text{ est strictement croissante.}$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

- b) Pour trouver le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, j'étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n \times e^{-\frac{1}{u_n}} - u_n = u_n \left(e^{-\frac{1}{u_n}} - 1 \right).$$

Je sais que le premier facteur u_n est positif.

Et puisque $u_n > 0$, alors $-\frac{1}{u_n} < 0$ et $e^{-\frac{1}{u_n}} < e^0 = 1$. Donc le second facteur $\left(e^{-\frac{1}{u_n}} - 1 \right)$ est lui négatif. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(u_n) - u_n \leq 0 \iff u_{n+1} - u_n \leq 0 \iff u_{n+1} \leq u_n.$$

Et j'ai bien montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc monotone et minorée par 0 puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors par le théorème de la limite monotone, j'en déduis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, vers une limite $\ell \geq 0$.

En passant à la limite dans la formule $u_{n+1} = f(u_n)$, j'obtiens que $\ell = f(\ell)$, i.e.

$$f(\ell) - \ell = 0 \iff \ell \left(e^{-\frac{1}{\ell}} - 1 \right) = 0.$$

Il s'agit d'une équation produit nul, donc l'un des deux facteurs doit être nul.

Or $e^{-\frac{1}{\ell}} - 1 = 0 \iff e^{-\frac{1}{\ell}} = 1 = e^0 \iff -\frac{1}{\ell} = 0$, ce qui est impossible.

Donc nécessairement $\ell = 0$.

J'ai ainsi montré que la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par $\ell = 0$.

d) Voici le script complété.

```

1. import numpy as np
2. n=0
3. u=1
4. while u>0.001:
5.     u=u*np.exp(-1/u)
6.     n=n+1
7. print(n)

```

5. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1})$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^0 \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad -\ln(u_1) = -\ln\left(1 \times e^{-\frac{1}{1}}\right) = -\ln(e^{-1}) = -(-1) = 1.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{n+1}} = -\ln(u_{n+1}) + \frac{1}{u_{n+1}}$$

et

$$\begin{aligned} -\ln(u_{n+2}) &= -\ln\left(u_{n+1} \times e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}\right) = -\ln(u_{n+1}) - \ln\left(e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}\right) \\ &= -\ln(u_{n+1}) - \left(-\frac{1}{u_{n+1}}\right) = -\ln(u_{n+1}) + \frac{1}{u_{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+2}).$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1}).$$

b) La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$. Pour connaître sa nature, il faut regarder la limite de la suite des sommes partielles. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1}).$$

Alors puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0^+$ et que $\lim_{X \rightarrow 0^+} -\ln(X) = +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(u_{n+1}) = +\infty.$$

J'ai donc montré que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 –

1. a) Je commence par calculer $P(X_1 = 2)$. L'événement $[X_1 = 2]$ correspond à une situation où il y a deux boules noires dans l'urne U_1 . Cela implique forcément que deux boules noires ont été tirées dans l'urne U_0 .

Comme il y a deux boules noires parmi quatre boules au premier tirage, puis une boule noire parmi trois boules au second, la probabilité de cet événement est donnée par

$$P(X_1 = 2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Pour l'événement $[X_1 = 0]$, il s'agit de la situation où il n'y a aucune boule noire dans l'urne U_1 . Cela implique donc que deux boules blanches ont été tirées dans l'urne U_0 . Comme il y a deux boules blanches parmi quatre boules au premier tirage, puis une boule blanche parmi trois boules au second, la probabilité de cet événement est

$$P(X_1 = 0) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Comme 0, 1 et 2 sont les trois seules valeurs possibles pour la variable aléatoire X_1 , j'en déduis par complémentarité que

$$P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 2) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}.$$

- b) Je connais la loi de la variable aléatoire X_1 donc je peux calculer l'espérance de X_1 :

$$E(X_1) = 0 \times P(X_1 = 0) + 1 \times P(X_1 = 1) + 2 \times P(X_1 = 2) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Alors l'espérance de X_1 vaut $E(X_1) = \frac{4}{3}$.

2. L'événement $[X_n = 2]$ correspond à une situation où il y a deux boules noires dans l'urne U_n . Cela implique forcément que deux boules noires ont été tirées dans chacune des précédentes urnes U_0, U_1, \dots, U_{n-1} . Alors

$$[X_n = 2] = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}.$$

À chaque étape du protocole, il s'agit de tirer deux boules noires dans une urne composée de deux boules blanches et deux boules noires, donc similaire à l'urne U_0 .

Il s'agit alors de n répétitions identiques et indépendantes du premier tirage, dont la probabilité de succès est $P(X_1 = 2) = \frac{1}{6}$ d'après la question précédente. J'en déduis alors que

$$P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

3. a) D'après la formule des probabilités totales, comme $\{[X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{i=0}^2 P([X_n = i] \cap [X_{n+1} = 1]) = \sum_{i=0}^2 P(X_n = i) \times P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = 1).$$

Or $P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1) = 0$ car il s'agit de piocher une boule noire dans une urne n'en contenant pas.

Et $P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ car il s'agit de piocher l'unique boule noire ou bien au premier tirage (une chance sur quatre) ou bien au second, après un premier échec (une chance sur trois).

Enfin $P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=1) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ car il s'agit de piocher une des deux boules noires au premier tirage (deux chances sur quatre) puis une boule blanche (deux chances sur trois) ou inversement.

Finalement

$$P(X_{n+1}=1) = P(X_n=0) \times 0 + P(X_n=1) \times \frac{1}{2} + P(X_n=2) \times \frac{2}{3}.$$

Et j'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2}P(X_n=1) + \frac{2}{3}P(X_n=2).$$

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $P(X_n=1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n=1$,

$$P(X_1=1) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^1 = 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi. Alors d'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{2}P(X_n=1) + \frac{2}{3}P(X_n=2) = \frac{1}{2} \times \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n=1$, alors par principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 1$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_n=1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

c) Comme $\{[X_n=0], [X_n=1], [X_n=2]\}$ forme un système complet d'événements, alors par complémentarité

$$\begin{aligned} P(X_n=0) &= 1 - P(X_n=1) - P(X_n=2) = 1 - \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) - \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai montré que

$$P(X_n=0) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Je connais la loi de la variable aléatoire X_n donc je peux calculer l'espérance de X_n :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 0 \times P(X_n = 0) + 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) \\ &= 0 \times \left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right) + 1 \times \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) + 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi l'espérance de X_n vaut $E(X_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Comme il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]0, 1[$, elle converge vers 0.

J'en déduis donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = 0,$$

ce qui signifie qu'en répétant infiniment ce protocole, le nombre de boules noires présentes dans l'urne deviendra nul.