8 Réduction des matrices carrées

Dans ce chapitre, toutes les matrices sont **carrées** et $n \in \mathbb{N}^*$ désigne un entier non nul.

I – Matrice diagonalisable

1 – Définition

Définition 8.1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que la matrice A est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **inversible** et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **diagonale** telle que

$$A = PDP^{-1}.$$

Remarque 8.2 –

- On sait que $A = PDP^{-1} \iff P^{-1}AP = D$.

- *Diagonaliser* une matrice A revient à déterminer les deux matrices D et P, respectivement diagonale et inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 8.3 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que la matrice A est diagonalisable, en utilisant les matrices P et D.

Proposition 8.4

Soient A une matrice carrée, D une matrice diagonale et P une matrice inversible.

Si $AP = PD$, alors la matrice A est diagonalisable.

Exemple 8.5 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est diagonalisable à l'aide des matrices P et D.

Remarque 8.6 – En effet, comme P est supposée inversible, il suffit de multiplier à droite par P^{-1} pour retrouver la formule de la définition. Ainsi on remarque qu'il n'est pas toujours nécessaire de calculer P^{-1} pour montrer qu'une matrice est diagonalisable.

2 – Application au calcul de puissance

Proposition 8.7

Soit A une matrice. On suppose qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Démonstration.

□

Remarque 8.8 – Si le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire pour montrer qu'une matrice A est diagonalisable, il est cependant **indispensable** pour obtenir une expression explicite des puissances de A, ce qui est souvent ce que l'on cherche à obtenir.

II – Valeurs propres et vecteurs propres

1 – Définition

Définition 8.9 – Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel.

- On dit que λ est une **valeur propre** de la matrice A si et seulement si

$$\text{il existe } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \textbf{ non nul} \text{ tel que } AX = \lambda X.$$

- La matrice colonne X est alors appelée **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

Exemple 8.10 – On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M et préciser les valeurs propres associées.

Proposition 8.11

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Il n'y a que deux possibilités pour l'ensemble des solutions de l'équation $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- Cet ensemble contient uniquement la matrice colonne nulle, auquel cas λ **n'est pas** valeur propre de A.
- Cet ensemble contient aussi d'autres matrices non nulles, auquel cas λ est valeur de propre de A et n'importe quelle matrice **non nulle** de cet ensemble est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Corollaire 8.12

Un réel λ est une valeur propre d'une matrice A si et seulement si l'équation matricielle $AX = \lambda X$ admet une solution X non nulle.

Exemple 8.13 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. Les réels 2 et 3 sont-ils valeurs propres de A ? Si oui, déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre.

2 – Polynôme annulateur de A

Définition 8.14 – Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polynôme. On définit le **polynôme matriciel** $P(A)$ comme étant la matrice carrée

$$P(A) = a_d A^d + a_{d-1}A^{d-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

On dit que le polynôme $P(x)$ est un **polynôme annulateur** de la matrice A lorsque le polynôme matriciel $P(A)$ est égal à la matrice nulle 0_n.

Exemple 8.15 – Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Si $P(x) = x^2 + 2x$, alors $P(A) =$
2. Si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, alors $P(A) =$
3. Si $P(x) = -3$, alors $P(A) =$

Remarque 8.16 – On note la présence de la matrice identité comme évaluation du terme constant.

Exemple 8.17 – On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de M.

Proposition 8.18

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice.

Le polynôme $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de A.

Démonstration.

□

Exemple 8.19 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Donner un polynôme annulateur de A.

Théorème 8.20

Soient A une matrice carrée et $P(x)$ un polynôme annulateur de A.

Toute valeur propre λ de A est racine du polynôme $P(x)$.

ATTENTION ! Ce résultat indique **seulement** que les valeurs propres de A sont **nécessairement** des racines du polynôme $P(x)$. Mais il peut aussi y avoir des racines du polynôme $P(x)$ qui **ne sont pas** des valeurs propres de A.

Exemple 8.21 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 - x$ est un polynôme annulateur de A.

2. En déduire les valeurs propres possibles de A.

3. Déterminer lesquelles sont bien des valeurs propres de A.

Remarque 8.22 – Comme déjà vu dans le Chapitre 5, avoir une égalité matricielle impliquant des puissances permet de trouver l'inverse d'une matrice. C'est évidemment le cas lorsque l'on connaît un polynôme annulateur. Cette fois encore, l'objectif est de se ramener à une expression de la forme $A \times (\cdots) = I_n$. Alors le facteur entre parenthèses est l'inverse de la matrice A.

Exemple 8.23 – Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, dont $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur, est inversible et donner son inverse.

Méthode 8.24 – Diagonaliser une matrice
En pratique, les matrices P et D nécessaires à la diagonalisation d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ s'obtiennent grâce aux éléments propres :

- La matrice P contient la juxtaposition des n vecteurs propres de la matrice A.
- La matrice D contient les n valeurs propres de la matrice A sur sa diagonale.

Dans le cas général, il y a plusieurs conditions à vérifier.
Dans le cadre du programme, on se contente de vérifier que pour ces matrices P et D, la matrice A est diagonalisable.

Exemple 8.25 – On reprend l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On introduit alors, selon les éléments propres de la matrice A, les deux matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

2. Vérifier que $AP = PD$. Conclure.