

ESCP 2022

Exercice 1 –

1. a) Je calcule A^2 puis A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+6+1 & 2-4+2 & 1+6+1 \\ 3-6+3 & 6+4+6 & 3-6+3 \\ 1+6+1 & 2-4+2 & 1+6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = A^2 \times A = 8 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 8 \times \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 & 1+1 \\ 6 & -4 & 6 \\ 1+1 & 2+2 & 1+1 \end{pmatrix} = 16 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré que $A^3 = \alpha A$ pour $\alpha = 16$.

- b) Je suppose par l'absurde que la matrice A est inversible. Alors en multipliant l'équation précédente à droite par A^{-1} , j'obtiens que

$$A^3 \times A^{-1} = \alpha A \times A^{-1} \iff A^2 = \alpha I_3.$$

Mais A^2 n'est pas une matrice diagonale donc cette égalité n'est pas vérifiée. J'obtiens ainsi une contradiction et mon hypothèse de départ, à savoir que A est inversible, est erronée. Donc A n'est pas inversible.

2. a) Je décompose ma puissance pour utiliser l'expression de A^3 :

$$A^5 = A^3 \times A^2 = \alpha A \times A^2 = \alpha A^3 = \alpha \times \alpha A = \alpha^2 A.$$

Ainsi j'ai bien montré que $A^5 = \alpha^2 A$.

- b) Je raisonne par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

  nonc   : Je note \mathcal{P}_p la propriété : $A^{2p-1} = \alpha^{p-1} A$.

Initialisation : Pour $p = 1$,

$$A^{2 \times 1 - 1} = A^1 = A \quad \text{et} \quad \alpha^{1-1} A = A.$$

Ainsi \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit $p \geq 1$. Je suppose que \mathcal{P}_p est vraie et je montre que \mathcal{P}_{p+1} l'est aussi. Alors

$$A^{2(p+1)-1} = A^{2p+1} = A^{2p-1} \times A^2 = \alpha^{p-1} A \times A^2 = \alpha^{p-1} A^3 = \alpha^{p-1} \times \alpha A^3 = \alpha^p A.$$

Donc $A^{2(p+1)-1} = \alpha^{(p+1)-1} A$. Finalement \mathcal{P}_{p+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $p = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \geq 1$, i.e.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2p-1} = \alpha^{p-1} A.$$

c) Grâce au résultat de la question précédente, pour tout entier naturel p non nul,

$$A^{2p} = A^{2p-1} \times A = \alpha^{p-1} A \times A = \alpha^{p-1} A^2.$$

3. a) D'après la question 1.a), je connais un polynôme annulateur de la matrice A puisque $A^3 = 16A$, i.e. $A^3 - 16A = 0_3$, matrice nulle d'ordre 3. Ainsi le polynôme $X^3 - 16X$ est un polynôme annulateur de A et les valeurs propres possibles pour A sont parmi ses racines. Or

$$\begin{aligned} X^3 - 16X = 0 &\iff X(X^2 - 16) = 0 &\iff X(X - 4)(X + 4) = 0 \\ &\iff X = 0 \text{ ou } X - 4 = 0 \text{ ou } X + 4 = 0 &\iff X = 0 \text{ ou } X = 4 \text{ ou } X = -4. \end{aligned}$$

Les trois valeurs propres possibles pour A sont donc -4 , 0 et 4 .

- b) Je cherche à résoudre l'équation matricielle $AX = -4X$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} AX = -4X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z = -4x \\ 3x - 2y + 3z = -4y \\ x + 2y + z = -4z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x & & - 4z = 0 \\ 2x & & - 2z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases} &\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} x & & - z = 0 \\ x & & - z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases} &\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ 2y = -6z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ y = -3z \end{cases} &\begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array} \end{aligned}$$

En posant $z = 1$, j'obtiens que la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution de l'équation

$$AX = -4X.$$

Comme cette matrice colonne est non nulle, alors -4 est bien une valeur propre de A et

$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

c) Je cherche à résoudre l'équation matricielle $AX = 0$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 AX = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x \qquad \qquad + 4z = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\
 &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x \qquad \qquad + z = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\
 &\iff \begin{cases} x = -z \\ 2y = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

En posant $z = 1$, j'obtiens que la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une solution de l'équation $AX = 0$.

Comme cette matrice colonne est non nulle, alors 0 est bien une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé. Il s'agit du vecteur donné par l'énoncé, j'ai bien vérifié qu'il s'agit d'un vecteur propre.

d) Je calcule le produit entre A et la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+1 \\ 3-2+3 \\ 1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi 4 est aussi une valeur propre de A , puisque la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nulle. Il

s'agit d'ailleurs d'un vecteur propre associé à la valeur propre 4.

e) Je calcule les produits AP et PD :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 8 \times \begin{pmatrix} 1-6+1 & 1-1 & 1+2+1 \\ 3+6+3 & 3-3 & 3-2+3 \\ 1-6+1 & 1-1 & 1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Je remarque que $AP = PD$.

f) Je calcule le produit PQ :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+3 & -2+2 & 1-4+3 \\ -3+3 & 6+2 & -3+3 \\ 1-4+3 & -2+2 & 1+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_3.$$

Je remarque que $PQ = 8I_3$, donc $P \times \left(\frac{1}{8}Q\right) = I_3$ ce qui signifie que P est inversible et que son inverse est donné par $P^{-1} = \frac{1}{8}Q$.

g) La matrice D est diagonale (par construction) et la matrice P est inversible d'après la question précédente. Alors l'égalité $AP = PD$ me permet d'écrire que

$$AP \times P^{-1} = PD \times P^{-1}, \quad \text{i.e.} \quad A = PDP^{-1}.$$

J'ai bien montré que la matrice A est diagonalisable.

Pour calculer la puissance n -ième, je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

  nonc   : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $A^n = PDP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $A = PDP^{-1}$ d'après ce que je viens d'écrire. Ainsi \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PDP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^n IDP^{-1} = PD^n DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = PDP^{-1}.$$

Puis comme D est une matrice diagonale, je sais que

$$D^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

Finalement je calcule le produit PD^nP^{-1} :

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 4^n \\ -3 \times (-4)^n & 0 & 4^n \\ (-4)^n & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} A^n = PDP^{-1} &= \frac{1}{8} \times PD^n \times Q = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 4^n \\ -3 \times (-4)^n & 0 & 4^n \\ (-4)^n & 0 & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (-4)^n + 3 \times 4^n & -2 \times (-4)^n + 2 \times 4^n & (-4)^n + 3 \times 4^n \\ -3 \times (-4)^n + 3 \times 4^n & 6 \times (-4)^n + 2 \times 4^n & -3 \times (-4)^n + 3 \times 4^n \\ (-4)^n + 3 \times 4^n & -2 \times (-4)^n + 2 \times 4^n & (-4)^n + 3 \times 4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 2 –

1. Soit a un réel tel que $0 < a \leq 1$. La fonction f est définie en quatre morceaux :

- sur $] -\infty, 0[$, elle est continue car constante,
- sur $[0, a]$, elle est continue car polynomiale,
- sur $]a, 2a]$, elle est continue car polynomiale,
- sur $]2a, +\infty[$, elle est continue car constante.

Il me reste étudier les éventuelles discontinuités en 0 , a et $2a$. Pour cela, je compare les limites à gauche et à droite :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = \frac{0}{a^2} = 0$$

Les limites sont égales donc la fonction f est continue en 0 .

$$\lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = f(a) = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{2a-t}{a^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

Les limites sont égales donc la fonction f est continue en a .

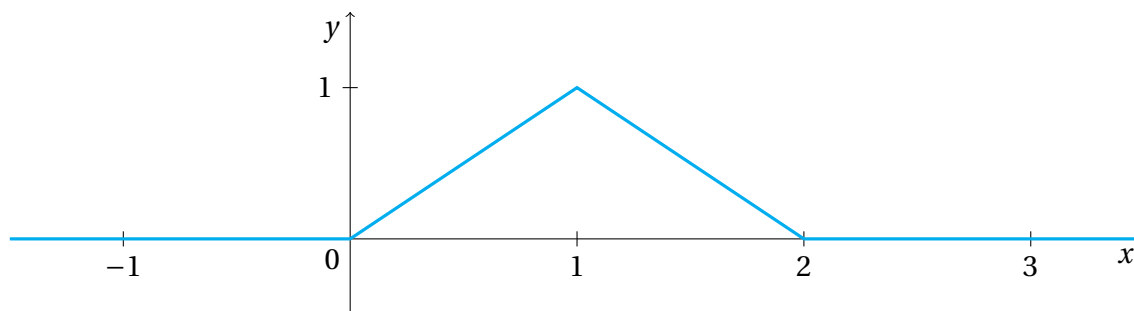
$$\lim_{t \rightarrow 2a^-} f(t) = f(2a) = \frac{0}{a^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 2a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2a^+} 0 = 0$$

Les limites sont égales donc la fonction f est continue en $2a$.

2. Pour le cas $a = 1$, la fonction est donnée par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 2-t & \text{si } 1 < t \leq 2, \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}$$

Il s'agit d'une ligne brisée dont les coins se situent en les points $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(2, 0)$.
Voici le graphe :



3. a) Je cherche à calculer les intégrales de f sur les intervalles $[0, a]$ et $]a, 2a]$.

- Sur $[0, a]$, l'expression de f est donnée par $f(t) = \frac{t}{a^2}$. Une primitive de f est donnée par $F(t) = \frac{t^2}{2a^2}$. Alors l'intégrale vaut

$$\int_0^a f(t) dt = \int_0^a \frac{t}{a^2} dt = \left[\frac{t^2}{2a^2} \right]_0^a = \frac{a^2}{2a^2} - \frac{0^2}{2a^2} = \frac{1}{2}.$$

- Sur $[a, 2a[$, l'expression de f est donnée par $f(t) = \frac{2a-t}{a^2}$. Une primitive de f est donnée par $F(t) = \frac{2at - \frac{1}{2}t^2}{a^2} = \frac{4at - t^2}{2a^2}$. Alors l'intégrale vaut

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} f(t) dt &= \int_a^{2a} \frac{2a-t}{a^2} dt = \left[\frac{4at - t^2}{2a^2} \right]_a^{2a} \\ &= \frac{4a \times 2a - (2a)^2}{2a^2} - \frac{4a \times a - a^2}{2a^2} = \frac{4a^2 - 3a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) D'après la question 1., la fonction f est continue sur \mathbb{R} . Elle est aussi positive sur \mathbb{R} puisque selon les cas :

- pour $t \in]-\infty, 0[$, $f(t) = 0 \geq 0$,
- pour $t \in [0, a]$, $f(t) = \frac{t}{a^2} \geq 0$, car $t \geq 0$ et a^2 est un carré,
- pour $t \in]a, 2a]$, $f(t) = \frac{2a-t}{a^2} \geq 0$, car $t \leq 2a$ et a^2 est un carré,
- pour $t \in]2a, +\infty[$, $f(t) = 0 \geq 0$,

Il ne reste plus qu'étudier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$: aux extrémités, la fonction est nulle donc les intégrales $\int_{-\infty}^0 f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt$ et $\int_{2a}^{+\infty} f(t) dt = \int_{2a}^{+\infty} 0 dt$ convergent et valent 0. Alors par la relation de Chasles, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt + \int_a^{2a} f(t) dt + \int_{2a}^{+\infty} f(t) dt = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

D'après les trois points précédents, j'en déduis que la fonction f décrit bien une fonction de densité sur \mathbb{R} .

4. a) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge. Or aux extrémités, la fonction est toujours nulle donc les intégrales $\int_{-\infty}^0 tf(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt$ et $\int_{2a}^{+\infty} tf(t) dt = \int_{2a}^{+\infty} 0 dt$ convergent et valent 0. Alors par la relation de Chasles, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge, c'est-à-dire que la variable aléatoire X admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_{-\infty}^0 tf(t) dt + \int_0^a tf(t) dt + \int_a^{2a} tf(t) dt + \int_{2a}^{+\infty} tf(t) dt \\ &= 0 + \int_0^a tf(t) dt + \int_a^{2a} tf(t) dt + 0 = \int_0^a tf(t) dt + \int_a^{2a} tf(t) dt. \end{aligned}$$

- Sur $[0, a]$, l'expression de f donne que $tf(t) = \frac{t^2}{a^2}$. Une primitive est donnée par $F(t) = \frac{t^3}{3a^2}$. Alors l'intégrale vaut

$$\int_0^a tf(t) dt = \int_0^a \frac{t^2}{a^2} dt = \left[\frac{t^3}{3a^2} \right]_0^a = \frac{a^3}{3a^2} - \frac{0^3}{3a^2} = \frac{a}{3}.$$

- Sur $[a, 2a[$, l'expression de f donne que $tf(t) = \frac{2at - t^2}{a^2}$. Une primitive est donnée par $F(t) = \frac{2a\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3}{a^2} = \frac{3at^2 - t^3}{3a^2}$. Alors l'intégrale vaut

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} tf(t) dt &= \int_a^{2a} \frac{2at - t^2}{a^2} dt = \left[\frac{3at^2 - t^3}{3a^2} \right]_a^{2a} \\ &= \frac{3a \times (2a)^2 - (2a)^3}{3a^2} - \frac{3a \times a^2 - a^3}{3a^2} = \frac{4a^3 - 2a^3}{3a^2} = \frac{2a}{3}. \end{aligned}$$

Et finalement l'espérance de X vaut

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_0^a tf(t) dt + \int_a^{2a} tf(t) dt = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = \frac{3a}{3} = a.$$

- b) De la même manière, la variable aléatoire X^2 admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge. Or $\int_{-\infty}^0 t^2 f(t) dt = \int_{2a}^{+\infty} t^2 f(t) dt = 0$ donc par la relation de Chasles, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge, c'est-à-dire que la variable aléatoire X^2 admet une espérance et

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^a t^2 f(t) dt + \int_a^{2a} t^2 f(t) dt.$$

- Sur $[0, a]$, l'expression de f donne que $t^2 f(t) = \frac{t^3}{a^2}$. Une primitive est donnée par $F(t) = \frac{t^4}{4a^2}$. Alors l'intégrale vaut

$$\int_0^a t^2 f(t) dt = \int_0^a \frac{t^3}{a^2} dt = \left[\frac{t^4}{4a^2} \right]_0^a = \frac{a^4}{4a^2} - \frac{0^4}{4a^2} = \frac{a^2}{4}.$$

- Sur $[a, 2a[$, l'expression de f donne que $t^2 f(t) = \frac{2at^2 - t^3}{a^2}$. Une primitive est donnée par $F(t) = \frac{2a\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4}{a^2} = \frac{8at^3 - 3t^4}{12a^2}$. Alors l'intégrale vaut

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} t^2 f(t) dt &= \int_a^{2a} \frac{2at^2 - t^3}{a^2} dt = \left[\frac{8at^3 - 3t^4}{12a^2} \right]_a^{2a} \\ &= \frac{8a \times (2a)^3 - 3 \times (2a)^4}{12a^2} - \frac{8a \times a^3 - 3a^4}{12a^2} = \frac{16a^4 - 5a^4}{12a^2} = \frac{11a^2}{12}. \end{aligned}$$

Et finalement l'espérance de X^2 vaut

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^a t^2 f(t) dt + \int_a^{2a} t^2 f(t) dt = \frac{a^2}{4} + \frac{11a^2}{12} = \frac{3a^2}{12} + \frac{11a^2}{12} = \frac{7a^2}{6}.$$

- c) Comme la variable aléatoire X^2 admet une espérance, alors la variable aléatoire X admet une variance et celle-ci est donnée par la formule de K  nig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7a^2}{6} - a^2 = \frac{7a^2}{6} - \frac{6a^2}{6} = \frac{a^2}{6}.$$

5. a) Je calcule d'abord l'espérance de \bar{X}_n . Comme pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(X_k) = E(X) = a$, alors par linéarité

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{1}{n} \times n \times a = a.$$

Je calcule désormais la variance $V(\bar{X}_n)$. Comme les variables X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors

$$V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X) = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{6n}.$$

- b) Puisque $E(\bar{X}_n) = a$, alors la biais de \bar{X}_n est donné par

$$b(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n) - a = a - a = 0.$$

Ainsi j'ai bien montré que \bar{X}_n est un estimateur sans biais de a . Puis comme l'estimateur T_n est sans biais, alors le risque quadratique de \bar{X}_n est donné par la variance :

$$r(\bar{X}_n) = V(\bar{X}_n) = \frac{a^2}{6n}.$$

6. a) Comme l'estimateur \bar{X}_n admet une variance, je peux appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} \quad \text{i.e.} \quad P\left(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{a^2}{6n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{6n\varepsilon^2}.$$

Les valeurs de l'espérance et de la variance ont été calculées à la question précédente et la dernière inégalité provient du fait que comme $0 < a \leq 1$, alors $a^2 \leq 1$.

- b) En passant à l'  v  nement contraire, alors j'obtiens que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(|\bar{X}_n - a| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{6n\varepsilon^2}.$$

Alors en retirant la valeur absolue,

$$|\bar{X}_n - a| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq a - \bar{X}_n \leq \varepsilon \iff \bar{X}_n - \varepsilon \leq a \leq \bar{X}_n + \varepsilon,$$

et j'ai bien montré que

$$P\left(\bar{X}_n - \varepsilon \leq a \leq \bar{X}_n + \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{6n\varepsilon^2}.$$

- c) En appliquant le résultat pr  c  dent à $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{600}}$ et $n = 1000$, j'obtiens alors que

$$P\left(\bar{X}_{1000} - \frac{1}{\sqrt{600}} \leq a \leq \bar{X}_{1000} + \frac{1}{\sqrt{600}}\right) \geq 1 - \frac{1}{6 \times 1000 \times \frac{1}{600}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Ainsi l'intervalle $\left[\bar{X}_{1000} - \frac{1}{\sqrt{600}}, \bar{X}_{1000} + \frac{1}{\sqrt{600}}\right]$ est un intervalle de confiance de a au niveau de confiance 90%.

Exercice 3 – Avant de démarrer, je fixe les notations pour les   v  nements suivants :

- R : "la boule tirée est rouge",
- U : "la boule tirée porte le numéro 1",
- V : "la boule tirée est verte",
- D : "la boule tirée porte le numéro 2".

1. a) Je cherche $P(R \cap U)$. D'après l'énoncé, 20% des boules sont rouges et portent le numéro 1. Ainsi $P(R \cap U) = 0.2$.
- b) Je cherche $P(D)$. D'après l'énoncé, $P(D) = P(\overline{R \cap U})$. En effet, les boules qui ne sont pas parmi les 20% qui sont rouges et portent le numéro 1 portent toutes le numéro 2. Ainsi $P(D) = 1 - 0.2 = 0.8$.
- c) Je cherche $P(R)$. D'après l'énoncé, les   v  nements U et D forment un système complet d'  v  nements. Alors d'après la formule des probabilités totales,

$$P(R) = P(R \cap U) + P(R \cap D) = 0.2 + P(D) \times P_D(R) = 0.2 + 0.8 \times 0.1 = 0.2 + 0.08 = 0.28.$$

En effet $P_D(R)$ est la probabilité pour une boule portant le numéro 2 d'être verte, qui est de 10% d'après l'énoncé.

2. a) La variable aléatoire G peut prendre trois valeurs selon le résultat du tirage. Le support de G est donné par $\{-1, 1, 2\}$ et les probabilités associées sont

$$P(G = -1) = P(V) = P(\overline{R}) = 1 - 0.28 = 1 - 0.28,$$

$$P(G = 1) = P(R \cap U) = 0.2 \quad \text{et} \quad P(G = 2) = P(R \cap D) = 0.08.$$

Je récapitule la loi de la variable aléatoire discrète finie G sous la forme d'un tableau :

x	-1	1	2
$P(G = x)$	0.72	0.2	0.08

- b) Pour calculer l'espérance de G , j'utilise la définition $E(G) = \sum_{i=1}^3 xP(G = x)$:

$$E(G) = -1 \times 0.72 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.08 = -0.72 + 0.2 + 0.16 = -0.36.$$

Pour calculer la variance de G , j'utilise la formule de K  nig-Huygens : $V(G) = E(G^2) - E(G)^2$.

Je calcule l'espérance de G^2 grâce au théorème de transfert :

$$E(G^2) = (-1)^2 \times 0.72 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.08 = 0.72 + 0.2 + 0.32 = 1.24.$$

Alors la variance de G vaut

$$V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 1.24 - (-0.36)^2 = 1.24 - 0.1296 = 1.1104.$$

3. a) Il s'agit de n répétitions identiques et indépendantes d'un même tirage.
 - La variable aléatoire R_n compte le nombre de succès R : "la boule tirée est rouge", de probabilité $p_R = 0.28$. Donc R_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p_R = 0.28$.
 - La variable aléatoire V_n compte le nombre de succès V : "la boule tirée est verte", de probabilité $p_V = 0.72$. Donc V_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p_V = 0.72$.
 - La variable aléatoire U_n compte le nombre de succès U : "la boule tirée porte le numéro 1", de probabilité $p_U = 0.2$. Donc U_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p_U = 0.2$.

- La variable aléatoire D_n compte le nombre de succès D : "la boule tirée porte le numéro 2", de probabilité $p_D = 0.8$. Donc D_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p_D = 0.8$.

Comme ces quatre lois suivent des lois binomiales, alors leurs espérances sont données par

$$E(R_n) = np_R = 0.28n, \quad E(V_n) = np_V = 0.72n,$$

$$E(U_n) = np_U = 0.2n \quad \text{et} \quad E(D_n) = np_D = 0.8n.$$

- b) Les variables R_n et V_n comptent respectivement le nombre de boules rouges et de boules vertes parmi les n tirages. Comme il n'y a pas d'autres couleurs possibles, alors

$$R_n + V_n = n.$$

Puisque $V_n = n - R_n$, les variables aléatoires R_n et V_n ne sont pas indépendantes et leur covariance est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Cov}(R_n, V_n) &= \text{Cov}(R_n, n - R_n) = \text{Cov}(R_n, n) - \text{Cov}(R_n, R_n) = 0 - V(R_n) \\ &= np_R(1 - p_R) = np_R p_V = n \times 0.28 \times 0.72 = 0.2016n. \end{aligned}$$

- c) De la même manière, puisque chaque boule porte le numéro 1 ou le numéro 2, alors les variables U_n et D_n vérifient que

$$U_n + D_n = n.$$

Puisque $D_n = n - U_n$, les variables aléatoires U_n et D_n ne sont pas indépendantes et leur covariance est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U_n, D_n) &= \text{Cov}(U_n, n - U_n) = \text{Cov}(U_n, n) - \text{Cov}(U_n, U_n) = 0 - V(U_n) \\ &= np_U(1 - p_U) = np_U p_D = n \times 0.2 \times 0.8 = 0.16n. \end{aligned}$$

4. a) Il me suffit de compter le nombre de boules apportant chacun des gains parmi les n boules tirées :

- Les boules rapportant un euro sont celles portant le numéro 1 : il y en a U_n .
- Les boules rapportant deux euros sont celles portant le numéro 2 qui ne sont pas vertes : il y en a $D_n - V_n$.
- Les boules faisant perdre un euro sont les boules vertes : il y en a V_n .

Ainsi à l'issue des n tirages, la variable aléatoire G_n est donnée par

$$G_n = 1 \times U_n + 2 \times (D_n - V_n) - 1 \times V_n = U_n + 2D_n - 2V_n - V_n = U_n + 2D_n - 3V_n.$$

- b) Par linéarité de l'espérance,

$$E(G_n) = E(U_n) + 2E(D_n) - 3E(V_n) = 0.2n + 2 \times 0.8n - 3 \times 0.72n = (0.2 + 1.6 - 2.16)n = -0.36n.$$

Exercice 4 –

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

  nonc   : Je note \mathcal{P}_n la propriété : " a_n et b_n sont bien définis et positifs".

Initialisation : Pour $n = 0$, $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ sont bien définis et positifs. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi. Alors

- $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ est bien défini et positif puisque par hypothèse de récurrence, $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ donc $a_n + b_n \geq 0$,
- $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$ est aussi bien défini puisque $a_{n+1} \geq 0$ et $b_n \geq 0$. Et comme racine carrée, $b_{n+1} \geq 0$.

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , les réels a_n et b_n sont bien définis et positifs.

2. Voici le script complété.

```
n=input("entrez une valeur pour n")
a=1
b=2
for k=1:n
    a=(a+b)/2
    b=sqrt(a*b)
end
disp(a,"a=")
disp(b,"b=")
```

3. En utilisant les formules de récurrences,

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{\frac{3}{2} \times 2} = \sqrt{3}.$$

4. a) Grâce aux expressions de a_{n+1} et b_{n+1} et en utilisant l'expression conjuguée, alors

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1}b_n} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}} \times (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}) \\ &= \sqrt{a_{n+1}} \times (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}) \times \frac{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \\ &= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \times (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}) \times (\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}) \\ &= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \times (b_n - a_{n+1}) = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \times \left(b_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \times \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \times (b_n - a_n) \end{aligned}$$

- b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

  nonc   : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $a_n < b_n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.
Alors

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \times (b_n - a_n)$$

et tous les facteurs impliqués sont positifs, comme racines carrées et par hypothèse de récurrence, car $a_n < b_n \iff b_n - a_n > 0$. Ainsi $b_{n+1} - a_{n+1} > 0$, i.e. $a_{n+1} < b_{n+1}$.

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n < b_n.$$

- c) Pour obtenir les variations de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, je calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} > 0,$$

puisque d'après la question précédente, $a_n < b_n$, i.e. $b_n - a_n > 0$. J'ai ainsi montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - a_n > 0$ i.e. $a_{n+1} > a_n$. Donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- d) Par définition de b_{n+1} ,

$$b_{n+1}^2 = a_{n+1}b_n \iff b_n = \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}.$$

Alors comme à la question précédente, je calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} = \frac{b_{n+1}a_{n+1} - b_{n+1}^2}{a_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}(a_{n+1} - b_{n+1}) < 0,$$

puisque d'après la question précédente, $a_{n+1} < b_{n+1}$, i.e. $a_{n+1} - b_{n+1} < 0$. J'ai ainsi montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} - b_n < 0$ i.e. $a_{n+1} < a_n$. Donc la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

5. a) Par positiv  t   de la racine carrée, comme les a_n et les b_n ne sont pas nuls, je sais que $\sqrt{b_n} > 0$. Alors $\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}} > \sqrt{a_{n+1}}$ et $\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} < 1$. Puis en injectant cette équation dans l'expression de la question 4.a), j'obtiens directement que

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \times (b_n - a_n) < \frac{1}{2} \times (b_n - a_n).$$

Pour l'encadrement, je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

  nonc   : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $b_0 - a_0 = 2 - 1 = 1$ et $0 < 1 \leq \frac{1}{2^0} = 1$. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.
Alors $b_{n+1} - a_{n+1}$ est strictement positif d'après la question 4.b) et

$$0 < b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2} \times (b_n - a_n) < \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

- b) Je sais que pour tout entier naturel n , $a_n < b_n$ et que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Donc en particulier $b_n < b_0$ et ainsi

$$a_n < b_n < b_0.$$

De la même manière, en utilisant cette fois la stricte croissance de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $a_n > a_0$ et ainsi

$$a_0 < a_n < b_n.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier naturel n ,

$$a_n < b_0 \quad \text{et} \quad a_0 < b_n.$$

- c) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée par b_0 d'après la question précédente. Par théorème de la limite monotone, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ_a . De même, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par a_0 d'après la question précédente. Par théorème de la limite monotone, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ_b . Pour montrer que ces deux limites sont égales, j'étudie la suite $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par convergence des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cette suite converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = \ell_b - \ell_a.$$

Or je connais un encadrement de cette suite par la question 5.a) et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, alors par le théorème des gendarmes, j'en déduis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0.$$

Alors par unicité de la limite,

$$\ell_b - \ell_a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell_a = \ell_b,$$

ce qui signifie que les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ .

- d) Par stricte croissance de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors pour tout entier naturel n , $a_n \leq \ell$. De même, par stricte décroissance de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors pour tout entier naturel n , $\ell \leq b_n$. Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier naturel n ,

$$a_n \leq \ell \leq b_n.$$

6. Je procède par élimination :

- $\frac{\sqrt{3}}{\pi} < 1 = a_0$ ne peut pas être la limite ℓ .
- $\frac{3}{\pi} < 1 = a_0$ ne peut pas être la limite ℓ .
- $3 > 2 = b_0$ ne peut pas être la limite ℓ .

Ainsi la limite commune aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\ell = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

7. a) Voici le script complété.

```
n=0
a=1
b=2
while b-a>10^-3
    a=(a+b)/2
    b=sqrt(a*b)
    n=n+1
end
disp(n)
```

b) Ce script affiche le premier entier n tel que

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-3} \iff 2^n > 10^3 = 1000.$$

Il s'agit de $n = 10$ puisque

$$2^{10} = 1024 > 1000 \quad \text{et} \quad 2^9 = 512 < 1000.$$

8. a) Si le script renvoie 5, alors $b_5 - a_5 \leq 10^{-3}$ (et $b_4 - a_4 > 10^{-3}$ mais c'est ici inutile). En particulier, puisque $a_5 \leq \ell \leq b_5$, alors a_5 et b_5 sont deux valeurs approchées de ℓ à moins de 10^{-3} près : l'une par valeur inférieure, a_5 , l'autre par valeur supérieure, b_5 .

b) D'après la question 5.a), je sais que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$. En particulier, pour $n = 10$,

$$0 < b_{10} - a_{10} \leq \frac{1}{2^{10}} < 10^{-3}.$$

Du fait que le script de la question 7.b) me renvoie 10, je peux déduire que le script de la question 7.a) me renverra forcément un entier plus petit ou égal à 10. En effet, pour $n = 10$, le critère d'arrêt est vérifié. Cependant, même si pour $n = 9$, $\frac{1}{2^9} > 10^{-3}$, je peux quand même avoir que $0 < b_n - a_n \leq 10^{-3}$. Les deux valeurs renvoyées par les scripts ne se contredisent pas puisqu'elles vérifient bien que $5 \leq 10$.