6 Statistiques

I– Rappels de statistique univariée

1 – Vocabulaire

La **population** est l'ensemble des individus/objets sur lesquels portent l'étude statistique. *(Par exemple, les candidats au concours de la filière ECT, les habitants de la France, etc.)* Les éléments d'une population sont appelés **individus**. On appelle **taille de l'échantillon**, le nombre de ses éléments, noté N par la suite.

Le **caractère** (ou **variable**) d'une série statistique est une propriété étudiée sur chaque individu.

1. Lorsque le caractère ne prend que des valeurs numériques *(taille en cm, un temps en secondes, une note sur 20, etc.)*, il est **quantitatif**.
2. Sinon, on dit qu'il est **qualitatif** *(couleur des yeux, sport pratiqué, ville de naissance, etc.)* : les variables ne sont pas des nombres.

Faire des **statistiques**, c'est recueillir, organiser, synthétiser, représenter et exploiter des données, numériques ou non, dans un but de comparaison, de prévision, de constat...

Les plus gros "consommateurs" de statistiques sont les **assureurs** (risques d'accidents, de maladie, etc.), les **médecins** (épidémiologie), les **démographes** (populations et leur dynamique), les **économistes** (emploi, conjoncture économique), les **météorologues**, etc.

Définition 6.1 – On considère une série statistique à caractère quantitatif, dont les p valeurs sont données par :
$x_1, x_2, \dots, x_p$, d'effectifs associés $n_1, n_2, \dots, n_p$, avec $n_1 + n_2 + ... + n_p = N$.

- À chaque valeur (ou classe) est associée une **fréquence** f_i : c'est la proportion d'individus associés à cette valeur.
- $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ est un nombre compris entre 0 et 1, que l'on peut écrire sous forme de pourcentage.
- L'ensemble des fréquences de toutes les valeurs du caractère s'appelle la **distribution des fréquences** de la série statistique.

Exemple 6.2 – Voici les notes obtenues à un contrôle dans une classe de 30 élèves : (**Série A :**)

2 – 3 – 3 – 4 – 5 – 6 – 6 – 7 – 7 – 7 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 9 – 9 – 9 – 9 – 9 – 9 – 10 – 10 – 11 – 11 – 11 – 13 – 13 – 15 – 16

On peut représenter cette série par un tableau d'effectifs et le compléter par la distribution des fréquences.

Notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Eff.	0	1	2	1	1	2	3	5	6	2	3	0	2	0	1	1	0	0	0
Fréq. en %	0	3	7	3	3	7	10	17	20	7	10	0	7	0	3	3	0	0	0

Remarque 6.3 – On peut vérifier que la somme des fréquences est égale à 1 (ou à 100 si on les exprime en pourcentages).

On peut aussi faire un regroupement par classe, ce qui rend l'étude moins précise, mais qui permet d'avoir une vision plus globale.

Exemple 6.4 – Toujours pour la **série A**, si on regroupe les données par classes d'amplitude 5 points, on obtient le tableau suivant.

Notes	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[	Total
Effectif	4	17	7	2	30
Fréquence	0,13	0,57	0,23	0,07	1

2 – Caractéristiques de position

Moyenne

Définition 6.5 – Soit une série statistique à caractère quantitatif, dont les p valeurs sont données par $x_1, x_2, \dots, x_p$, d'effectifs associés $n_1, n_2, \dots, n_p$, avec $n_1 + n_2 + \dots + n_p = N$.
La **moyenne pondérée** de cette série est le nombre noté $\bar{x}$ qui vaut

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i.$$

Remarque 6.6 – Lorsque la série est regroupée en classes, on calcule la moyenne en prenant pour valeurs x_i le **centre de chaque classe**. Ce centre est obtenu en faisant la moyenne des deux extrémités de la classe.

Exemple 6.7 –

- Dans la **série A**, la moyenne du contrôle est égale à

$$\overline{m} = \frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + \cdots + 16 \times 1}{30} = \frac{254}{30} \approx 8,47.$$

- Si on regroupe par classe d'amplitude de 5 points, une estimation de la moyenne est

$$\overline{m} = \frac{2,5 \times 4 + 7.5 \times 17 + \cdots + 17,5 \times 2}{30} = \frac{260}{30} \approx 8,67.$$

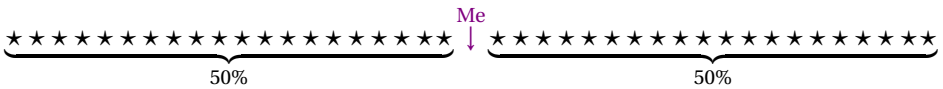
Remarque 6.8 – On peut aussi calculer une moyenne à partir de la distribution de fréquences.

$$\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_p x_p = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i.$$

Médiane

Définition 6.9 – Soit une série statistique ordonnée dont les n valeurs sont $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n$. La **médiane** est le nombre Me qui permet de diviser cette série en deux sous-groupes de même effectif.

- Si n est **impair**, Me est la valeur de cette série qui est située au milieu, à savoir la valeur dont le rang est $\dfrac{n+1}{2}$ *i.e.*, $x_{\frac{n+1}{2}}$.
- Si n est **pair**, Me est le centre de l'intervalle médian, qui est l'intervalle formé par les deux nombres situés "au milieu" de la série ie $x_{\frac{n}{2}}$ et $x_{\frac{n}{2}+1}$.

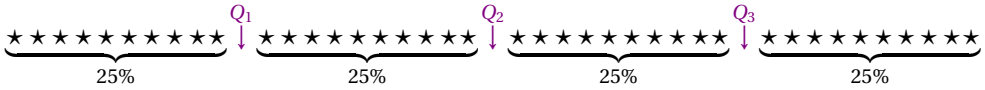


Exemple 6.10 –

- La médiane de la série "2 – 5 – 6 – 8 – 9 – 9 – 10" est 8.
- La médiane de la série "2 – 5 – 6 – 8 – 9 – 9" est 7.
- La médiane de la série "2 – 5 – 6 – 6 – 9 – 10" est 6.

Quartiles

Définition 6.11 – Soit une série statistique, on appelle **quartiles** de la série un triplet de réels $(Q_1; Q_2; Q_3)$ qui sépare la série en quatre groupes de même effectif.



Remarque 6.12 – Par définition, si X est une série statistique, $Q_2 = \text{Me}(X)$.

Exemple 6.13 – Pour la **série A**, la calculatrice nous donne $Q_1 = 7$, $\text{Me} = 8,5$ et $Q_3 = 10$.

3 – Caractéristiques de dispersion

L'inconvénient majeur des caractéristiques de position est qu'ils ne rendent pas compte de la répartition des données.

Exemple 6.14 – Considérons deux élèves A et B ayant obtenu les notes suivantes.

- Élève A : 0 ; 20 ; 5 ; 15 ; 17 ; 3.
- Élève B : 10 ; 8 ; 12 ; 10 ; 13 ; 7.

Ces deux élèves ont tous deux une moyenne et une médiane de 10, mais l'élève B a été beaucoup plus "régulier" que l'élève A.

Les grandeurs définies dans cette section visent à mesurer la dispersion des données d'une série statistique.

Étendue, variance, écart-type

Définition 6.15 – On appelle **étendue** d'une série discrète X le réel défini par $E(X) = \max(X) - \min(X)$.

Il s'agit de la première mesure de la dispersion d'une série statistique. Son principal mérite a longtemps été d'exister et de fournir une information sur la dispersion très simple à obtenir.

Exemple 6.16 – L'étendue de la **série A** est de $E(A) = 16 - 2 = 14$.

Définition 6.17 – Soit une série statistique à caractère quantitatif, dont les p valeurs sont données par $x_1, x_2, \ldots, x_p$, d'effectifs associés $n_1, n_2, \ldots, n_p$, avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = N$.

- On appelle **variance** de cette série le nombre noté $V(X)$ qui vaut

$$V(X) = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p - \overline{x})^2}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2.$$

- On appelle **écart-type** de cette série statistique le nombre noté σ_X défini par $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Remarque 6.18 –

- Pour la variance d'une série statistique regroupée en classes, à l'instar de la moyenne, on remplace les x_i par les centres c_i des classes $[x_i; x_{i+1}[$.
- La variance et l'écart-type mesurent la dispersion des valeurs prises par X autour de sa moyenne. Plus précisément, plus la variance/l'écart-type est grand(e), plus les valeurs sont dispersées.

Écart inter-quartile

Définition 6.19 – On appelle **intervalle inter-quartile** l'intervalle $[Q_1; Q_3]$. L'amplitude de cet intervalle est appelée **écart inter-quartile**.

Exemple 6.20 –

- Dans la **série A**, l'intervalle inter-quartile est l'intervalle $[7; 10]$ dont l'écart vaut $10 - 7 = 3$.
- Cet intervalle comprend la moitié des notes de la série située au centre de celle-ci.

II – Statistiques bivariées

Les statistiques à une variable s'intéressaient pour une population donnée, à **un** caractère donnée : les notes à un devoir surveillé d'une classe, les salaires dans une entreprise, etc. Lorsque l'on s'intéresse à l'étude simultanée de **deux** caractères d'une même population, on fait ce que l'on appelle des **statistiques à deux variables**, en étudiant des **séries statistiques doubles**.

1 – Analyse de caractères qualitatifs

Définitions et exemples

Définition 6.21 – On appelle **série statistique à deux variables** la donnée de deux caractères X et Y définis sur une même population.

Une série statistique à deux variables est souvent présentée à l'aide d'un tableau d'effectifs à deux entrées. Un tableau d'effectifs à deux entrées présente l'un des caractères en ligne et l'autre caractère en colonne. À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, on indique le nombre d'individus possédant simultanément ces deux valeurs de caractères.

Exemple 6.22 – On considère le nombre d'admis dans 5 écoles de commerce en fonction de la filière d'origine.

École / Filière	ESC Rennes	ESC Troyes	EM Normandie	EM Lyon	HEC Paris	**Total**
Scientifique	1633	401	414	2919	145	5512
Économique	1663	373	407	2375	46	4864
Technologique	832	602	613	482	3	2532
Littéraire	336	105	122	651	14	1228
Total	4464	1481	1556	6427	208	14136

Fréquences marginales

Les effectifs figurant dans la ligne et la colonne "Total" sont appelés **effectifs marginaux**. Les effectifs marginaux correspondent à l'étude d'un seul des deux caractères. Dans l'exemple précédent, la colonne "Total" donne la répartition des élèves par filière et la ligne "Total" donne la répartition des élèves par école.

Définition 6.23 – Un **tableau des fréquences à deux entrées** se présente comme un tableau d'effectifs à deux entrées dans lequel les effectifs sont remplacés par des fréquences.

Exemple 6.24 – Pour obtenir le tableau des fréquences à partir du tableau précédent, il suffit de diviser chaque nombre du tableau par 14136. On obtient (arrondi au millième) le tableau suivant.

École / Filière	ESC Rennes	ESC Troyes	EM Normandie	EM Lyon	HEC Paris	**Total**
Scientifique	0.116	0.028	0.029	0.206	0.010	0.389
Économique	0.118	0.026	0.029	0.168	0.003	0.344
Technologique	0.059	0.042	0.043	0.034	0.001	0.179
Littéraire	0.025	0.007	0.008	0.046	0.001	0.088
Total	0.315	0.105	0.110	0.455	0.015	1

Les fréquences figurant dans la ligne et la colonne "Total" sont appelées fréquences marginales.

Fréquences conditionnelles

Définition 6.25 – Si l'on fixe la valeur d'un des deux caractères, on obtient une série statistique à une variable appelée **série conditionnelle**. Le tableau d'effectifs de cette série correspond à une *ligne* ou à une *colonne* du tableau à double entrée.

Exemple 6.26 – On cherche à étudier la répartition par filière des élèves de l'EM Lyon. Les effectifs de cette série dont donnés par la colonne "EM Lyon" du tableau d'effectifs à double entrée.

Filière	Scientifique	Économique	Technologique	Littéraire	**Total**
EM Lyon	2919	2375	482	651	6427

Pour obtenir le tableau des *fréquences* de cette série à une variable, il faut diviser chaque effectif par l'effectif total de l'ensemble des élèves admis à l'EM Lyon, soit 6427. On obtient

Filière	Scientifique	Économique	Technologique	Littéraire	**Total**
EM Lyon	0.454	0.369	0.075	0.101	1

Ce tableau indique que 7,5% des élèves admis à l'EM Lyon sont issus de la filière ECT. On parle de la *fréquence conditionnelle* ou de la *fréquence des élèves de la filière ECT sachant qu'ils sont admis à l'EM Lyon.*

Proposition 6.27

La fréquence de A sachant B, notée $f_B(A)$, est égale à

$$f_B(A) = \frac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } B}.$$

Exemple 6.28 – Dans l'exemple précédent, la fréquence des élèves d'ECT parmi les élèves admis à HEC Paris est égale à

$$f = \frac{3}{208} \approx 0,014.$$

(Ici A : "élèves issus de la filière ECT" et B : "élèves admis à HEC Paris".)
Autrement dit, 1,4% des élèves admis à HEC Paris sont issus de la filière ECT.

2 – Analyse de caractères quantitatifs

Étant données deux grandeurs statistiques quantitatives X et Y, il est naturel de chercher s'il existe une relation entre X et Y, *i.e.*, si l'une des deux grandeurs influence l'autre et de quelle manière.

Définitions et exemples

Tout au long de cette partie, nous illustrerons les différentes notions sur les deux exemples ci-dessus.

Exemple 6.29 –

1. Le tableau ci-dessous donne, pour chaque ville, le nombre moyen d'heures d'ensoleillement dans l'année, ainsi que la température moyenne.

Ville	Ajaccio	Lyon	Marseille	Brest	Lille	Paris	Metz
Ensoleillement	2790	2072	2763	1729	1574	1833	1685
Température	14,7	11,4	14,2	10,8	9,7	11,2	9,7

   - Caractère 1 : nombre d'heures d'ensoleillement dans la ville,
   - Caractère 2 : température moyenne dans la ville.

2. Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de rugby de 2001 à 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Nbre adh.	70	90	115	140	170	220

   - Caractère 1 : l'année,
   - Caractère 2 : le nombre d'adhérents.

Définition 6.30 – Soit une série statistique à deux variables X et Y, dont les valeurs sont des couples $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$.

- On appelle **moyenne empirique** de X, noté $\overline{X}$, le nombre défini par

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

- On appelle **moyenne empirique** de Y, noté $\overline{Y}$, le nombre défini par

$$\overline{Y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Exemple 6.31 – On reprend l'exemple1 ci-dessus. Si X désigne le nombre d'heures d'ensoleillement et Y la température, alors

$$\overline{X} = \frac{2790+2072+2763+1729+1574+1833+1685}{7} \approx 2064,$$
$$\overline{Y} = \frac{14,7+11,4+14,2+10,8+9,7+11,2+9,7}{7} \approx 11,7.$$

Définition 6.32 – On appelle **point moyen** le point de coordonnées $\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$.

Exemple 6.33 –

1. Le point moyen de l'exemple 1 a pour coordonnées $(2064; 11,7)$.
2. Le point moyen de l'exemple 2 a pour coordonnées $(2003,5; 134,2)$.

Définition 6.34 – Soit une série statistique à deux variables X et Y, dont les valeurs sont des couples $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$.

- On appelle **variance empirique** de X, notée $V(X)$, le nombre défini par

$$V(X) = \frac{(x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+\cdots+(x_n-\overline{X})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2.$$

- On appelle **variance empirique** de Y, notée $V(Y)$, le nombre défini par

$$V(Y) = \frac{(y_1-\overline{Y})^2+(y_2-\overline{Y})^2+\cdots+(y_n-\overline{Y})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2.$$

On peut alors définir les **écarts-types empiriques** de X et Y, notés σ_X et σ_Y, par

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} \quad \text{et} \quad \sigma_Y = \sqrt{V(Y)}.$$

Exemple 6.35 – On reprend l'exemple 1 ci-dessus. Si X désigne le nombre d'heures d'ensoleillement et Y la température, alors

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{(2790-2064)^2+(2072-2064)^2+\cdots+(1685-2064)^2}{7}} \approx 472{,}8,$$
$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{(14{,}7-11{,}7)^2+(11{,}4-11{,}7)^2+\cdots+(9{,}7-11{,}7)^2}{7}} \approx 1{,}9.$$

Définition 6.36 – Soit une série statistique à deux variables X et Y, dont les valeurs sont des couples $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$. On appelle **covariance empirique** de (X, Y), notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$, le nombre défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \overline{X}\,\overline{Y}.$$

Exemple 6.37 – On reprend l'exemple 1 ci-dessus. Si X désigne le nombre d'heures d'ensoleillement et Y la température, alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{7}\times(2790\times 14{,}7+2072\times 11{,}4+\cdots+1685\times 9{,}7)-2064\times 11{,}7 \approx 806.$$

Définition 6.38 – Soit une série statistique à deux variables X et Y, dont les valeurs sont des couples $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$. On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de (X, Y), noté $\rho(X, Y)$, le nombre défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Exemple 6.39 – On reprend l'exemple 1 ci-dessus. Si X désigne le nombre d'heures d'ensoleillement et Y la température, alors

$$\rho(X,Y) = \frac{806}{472{,}8\times 1{,}9} \approx 0{,}91.$$

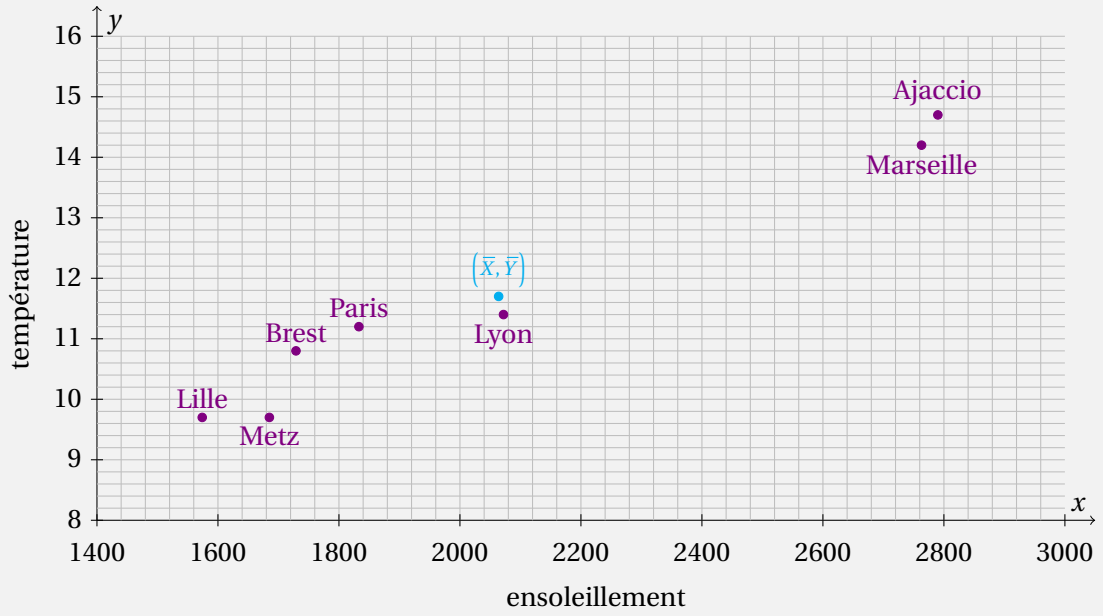
Représentation graphique

Une première étape peut être de réaliser un graphique qui traduit les deux séries statistiques ci-dessus.

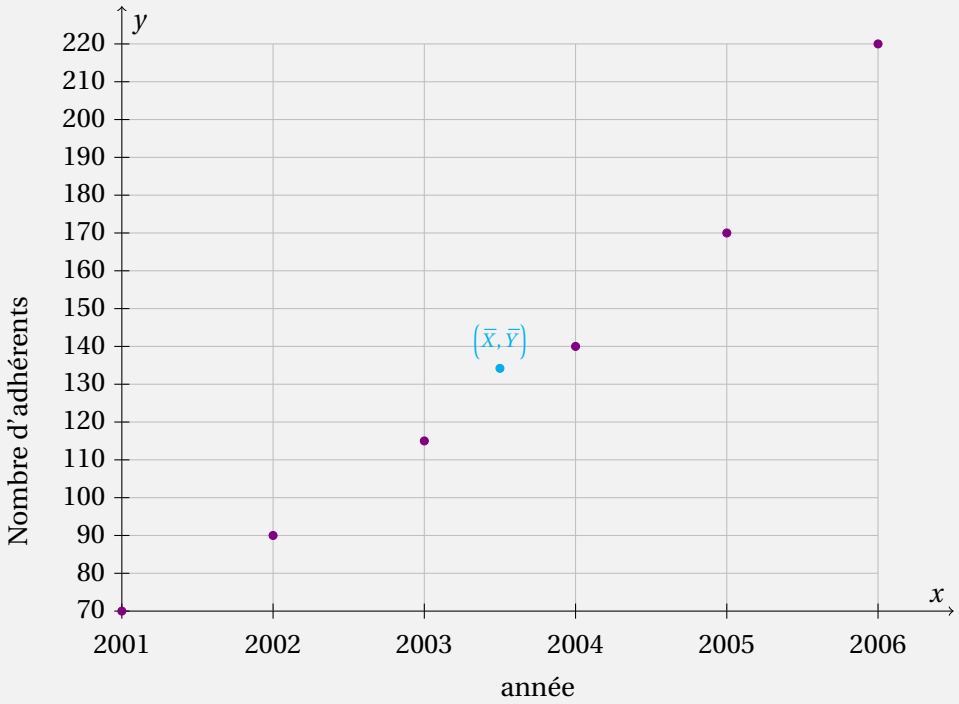
Définition 6.40 – Soient X et Y deux variables statistiques numériques observées sur n individus. Dans un repère orthogonal, l'ensemble des n points de coordonnées (x_i, y_i) forme le **nuage de points** associé à cette série statistique.

Exemple 6.41 – Selon les exemples précédents,

1. si on place l'ensoleillement en abscisses et la température en ordonnées.



2. si on place l'année en abscisses et le nombre d'adhérents en ordonnées.



Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Lorsque les points du nuage paraissent presque alignés, on peut avoir l'idée de chercher quelle droite approcherait le mieux les points de ce nuage. Une telle droite permettrait notamment de faire des prévisions. Il existe de nombreuses manières d'obtenir un ajustement affine satisfaisant. L'une d'entre elles,

présentée ici, est la méthode des moindres carrés.

L'idée est de chercher une droite qui minimise la somme des carrés des distances des points du nuage à cette droite. Ceci revient à chercher les réels a et b minimisant la quantité $\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$.

Théorème 6.42 – Droite de régression linéaire de Y en X@

Il existe une unique droite d'équation $y = ax + b$, rendant minimale $\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$.

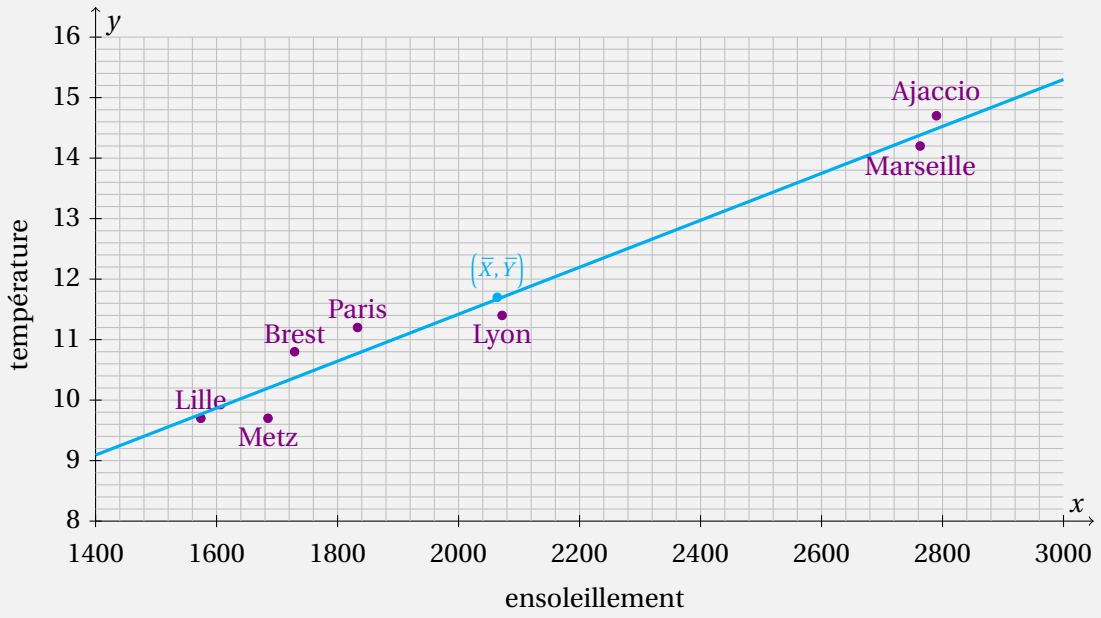
Il s'agit de la droite d'équation

$$y = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}(x - \overline{X}) + \overline{Y}.$$

Cette droite est appelée **droite de régression linéaire de Y en X**.

Exemple 6.43 – On reprend l'exemple 1 ci-dessus. Si X désigne le nombre d'heures d'ensoleillement et Y la température, alors on trouve pour l'équation de la droite de régression linéaire de Y en X :

$$y = 0,00388x + 3,66.$$



Remarque 6.44 –

- Plus $|\rho(X,Y)|$ est proche de 1, plus les points du nuage sont proches de l'alignement. $|\rho(X,Y)|$ ne valant 1 que lorsqu'ils sont alignés.
- Si $\rho(X,Y) > 0$, alors la droite est de pente positive : X et Y varient dans le même sens (lorsque l'une croît, l'autre croît, lorsque l'une décroît, l'autre décroît aussi).
- Si $\rho(X,Y) < 0$, alors la droite est de pente négative : X et Y varient dans des sens opposés (lorsque l'une croît, l'autre décroît).

Proposition 6.45

La droite de régression linéaire passe par le point moyen.

Exemple 6.46 – Calculer la droite de régression linéaire pour l'exemple 2.