Exercices — Chapitre 4

Exercice 1 – Le nombre de pannes journalières d'une machine est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par

x	0	1	2	3	4	5	6 et +
$P(X=x)$	0,30	0,20	0,15	0,15	0,10	0,05	0,05

1. Quelle est la fonction de répartition de X ? En donner une représentation graphique.
2. Quelle est la probabilité que la machine ait plus de 3 pannes ?
3. Trouver x_0 tel que $P(X \geq x_0) = 0,5$.
4. Trouver x_1 tel que $P(X \leq x_1) = 0,8$.
5. Calculer $E(X)$ en donnant à « 6 et + » la valeur moyenne 7,5.

Exercice 2 – Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On prend au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors du tirage.

1. Déterminer le support de X.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 3 – Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage une boule blanche supplémentaire. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage final où apparaît une boule noire, si un tel tirage existe, et à 0 si à chaque tirage une boule blanche est obtenue.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1.$$

Exercice 4 –

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie par
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définit bien une loi de probabilité.
   (b) Soit X une variable aléatoire de support $\mathbf{N}^*$, dont la loi est donnée par
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad P(X=n) = u_n.$$
   X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie par
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définit bien une loi de probabilité.
   (b) Soit Y une variable aléatoire de support $\mathbf{N}^*$, dont la loi est donnée par
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad P(Y=n) = v_n.$$
   Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 5 – Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que
$$\forall k \in \mathbf{N}^*, P(X=k) = a3^{-k}.$$

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?

Exercice 6 –

1. Pour jouer à ce jeu, on mise 0,5€. On lance deux dés non-truqués. Si on obtient deux nombres 1, on reçoit 2€. Si on obtient deux nombres identiques autres que 1, on reçoit 1€ et sinon on ne reçoit rien. X est le gain algébrique.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Justifier que X admet une espérance et calculer $E(X)$.
2. On lance une pièce de monnaie non-truquée jusqu'à obtenir pour la première fois « PILE ». X est égal au nombre de lancers effectués.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Justifier que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Exercice 7 – À chaque balade à cheval qu'il effectue, la probabilité que le cavalier soit désarçonné est égale à p.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait fait k chutes au terme de n balades ?
2. Sachant que 3 chutes entraînent obligatoirement une blessure grave, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas blessé après ces n balades ?

Exercice 8 – On considère une pièce dont la probabilité d'avoir pile est de 0,3.

1. On lance la pièce 10 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piles?
2. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile. Combien en moyenne effectuera-t-on de lancer?

Exercice 9 – Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}^*, P(X > k) = (1-p)^k$. En déduire alors que

$$\forall (k,l) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*, P_{(X>l)}(X > k+l) = P(X > k).$$

On dit que la variable aléatoire est sans mémoire.

Exercice 10 – Sur le marché du travail de l'agglomération dunkerquoise, le nombre moyen de changements d'emploi d'un ouvrier dans une période de 5 ans est deux. Sachant que le nombre de changements d'emploi en 5 ans suit une loi de Poisson, calculer la probabilité des événements suivants

1. Probabilité qu'un travailleur ne fasse aucun changement pendant 5 ans.
2. Probabilité qu'un travailleur fasse au moins un changement.
3. Probabilité qu'il fasse plus d'un changement, mais moins de 5.

Exercice 11 – Extrait de ESC 2014
Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. 5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur. On suppose que chacune d'elles souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des 4 autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.
On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1, X_2 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et X_3 celle égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 3.

1. (a) Reconnaître la loi de X_1. Décrire l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1. Donner $P(X_1 = k)$ pour chaque k appartenant à $X_1(\Omega)$.
   (b) Donner $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
   (c) Expliquer pourquoi X_2 et X_2 suivent la même loi que X_1.
2. (a) Justifier que $X_1 + X_2 + X_3 = 5$.
   (b) En déduire la probabilité $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$.
   (c) Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est $\dfrac{1}{81}$.
3. On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur. D'après 2c, on a $P(Z = 1) = \dfrac{1}{81}$. Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z.
4. Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.
   (a) Justifier que $P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0)$.
   (b) En déduire $P(Y_1 = 0)$ puis $E(Y_1)$. On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 et qu'elles ont donc la même espérance.
   (c) Exprimer Z en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3. Calculer $E(Z)$ et vérifier que

$$E(Z) = \frac{211}{81}.$$

Exercice 12 – Extrait de ECRICOME 2013

Une entreprise fabrique des appareils électriques en grande quantité.

Partie I - Probabilités conditionnelles

On admet que 5% des appareils présentent un défaut. On contrôle les appareils d'un lot. Ce contrôle refuse 90% des appareils avec défaut et accepte 80% des appareils sans défaut. On prélève au hasard dans le lot.

On considère les évènements suivants

- D : « l'appareil a un défaut »,
- A : « l'appareil est accepté à l'issue du contrôle ».

1. Donner la valeur des probabilités et probabilités conditionnelles suivantes
$$P(D), \qquad P(\overline{D}), \qquad P_D(\overline{A}), \qquad P_D(A) \quad \text{et} \quad P_{\overline{D}}(A).$$
2. Calculer à 0,01 près les probabilités suivantes
$$P(A\cap D) \quad \text{et} \quad P(A\cap \overline{D}).$$
3. Déduire de ce qui précède la probabilité $P(A)$ à 0,001 près.
4. Calculer à 0,001 près la probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle.

Partie II - Loi binomiale

On prélève au hasard 10 appareils électriques d'une livraison pour vérification. La livraison étant suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise des appareils. On rappelle que 5% des appareils présentent un défaut. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils **sans défaut** de ce prélèvement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Préciser $X(\Omega)$ et pour tout $k\in X(\Omega)$, donner la valeur de $P(X=k)$.
2. Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, tous les appareils soient sans défaut.
3. Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un appareil ait un défaut.

Exercice 13 – Extrait de ESC 2012

Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de 20 questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que

- l'élève A ne connaît que 60% de son cours, c'est-à-dire que, pour chaque question, la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\dfrac{60}{100}$;
- Lorsqu'il ne connait pas une réponse à une question, il répond au hasard ;
- les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les évènements

- R : « l'élève A connaît la réponse à la première question ».
- J : « l'élève A répond juste à la première question ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(J)=\dfrac{11}{15}$.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève aux vingt questions.
2. Reconnaître la loi de X. On donnera les valeurs prises par X et, pour chacune de ces valeurs k, la valeur de $P(X=k)$.
3. Donner $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance de X.
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse.
   Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.
   (a) Justifier l'égalité $N=3X-40$.
   (b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

   L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.
5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
   (c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B, quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note ?