1 Matrices

I – Généralités

Définition 1.1 – Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ tout tableau de nombres de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix},$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$. Ce sont les **coefficients** de la matrice A.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.2 – Voici des exemples de matrices :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$,
- $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$,
- $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Remarque 1.3 – Le premier indice n (i pour les coefficients) concerne les lignes et le second indice p (j pour les coefficients) concerne les colonnes.

Proposition 1.4 – Égalité matricielle

Deux matrices sont **égales** si et seulement si elles ont le même nombre de lignes et de colonnes **et** les mêmes coefficients.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,q} \end{pmatrix}$. Alors

$$A = B \iff \begin{cases} n = m, \\ p = q, \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad a_{i,j} = b_{i,j}. \end{cases}$$

Exemple 1.5 – On donne

$$E = \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & -2y-4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer x et y pour que les deux matrices E et F soient égales.

Les deux matrices ont le même nombre de lignes et de colonnes. Il me reste à vérifier que tous les coefficients sont égaux. Deux parmi eux sont évidents : $5 = 5$ et $3 = 3$. Enfin,

$$E = F \iff \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & -2y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{r} 2x+3 = -1 \\ -2y-4 = \ 5 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \\ y = \dfrac{5+4}{-2} = -\dfrac{9}{2} \end{array} \right.$$

Donc les matrices E et F sont égales pour $x = -2$ et $y = -\dfrac{9}{2}$.

Définition 1.6 –

- Une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes est une **matrice carrée**. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
- Une matrice qui ne possède qu'une seule ligne est une **matrice ligne**.
- Une matrice qui ne possède qu'une seule colonne est une **matrice colonne**.
  Dans certaines applications, on utilise le terme "vecteur" pour parler d'une matrice colonne.

Exemple 1.7 –

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 3.
- La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.
- La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Définition 1.8 –

- On appelle **matrice nulle** à n lignes et p colonnes et on note $0_{n,p}$ la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls. Si $n = p$, on écrit simplement 0_n au lieu de $0_{n,n}$.
- On appelle **matrice identité** de taille n et on note I_n la matrice **carrée** dont les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres sont égaux à 0. Autrement dit,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.9 – Exprimer les matrices suivantes

- $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $0_{5,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $I_{3,2}$ n'existe pas.

II – Opérations sur les matrices

1 – Multiplication d'une matrice par un réel

Définition 1.10 – Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ, on définit

$$\lambda A = \lambda \times \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, pour multiplier une matrice par un réel λ, on multiplie tous ses coefficients par λ.

Exemple 1.11 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Calculer $4A$.

$$4A = 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 & 4 \times (-1) \\ 4 \times \frac{1}{2} & 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.12 – Pour toute matrice A, la matrice $(-1)A$ est notée $-A$ et s'appelle la **matrice opposée** de la matrice A.

Remarque 1.13 – L'opposée $-A$ d'une matrice A s'obtient donc en remplaçant chaque coefficient de A par son opposé.

Exemple 1.14 – Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{-1}{2} & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $-A$.

$$-A = \begin{pmatrix} -(-1) & -(-2) \\ -\frac{-1}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

2 – Somme de deux matrices

Définition 1.15 – Soient deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ **de même taille**. On définit

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la somme des matrices A et B est la matrice **de même taille** que A et B dont chaque coefficient est la somme des coefficients correspondants de A et B.

ATTENTION ! L'addition de deux matrices n'est possible **que si elles ont le même nombre de lignes et de colonnes**.

Exemple 1.16 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -1+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}-1 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.17 – On définit de même la soustraction de deux matrices A et B en utilisant l'opposé :

$$A - B = A + (-B).$$

Proposition 1.18

Soient A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ et μ des réels. Alors

- par commutativité de l'addition, $A + B = B + A$,
- par associativité de l'addition, $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- par associativité de la multiplication par un réel, $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
- par distributivité de la multiplication par un réel, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Exemple 1.19 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
Soit X une matrice carrée de taille 2 telle que $2X + 3A = B$. Déterminer la matrice X.

Je pose $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et je cherche à trouver a, b, c et d.

$$2X + 3A = B \iff \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2a+3 & 2b-3 \\ 2c-3 & 2d+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Or deux matrices de même taille sont égales lorsque tous leurs coefficients sont égaux. J'obtiens donc quatre nouvelles équations réelles :

$$\begin{cases} 2a+3 = 1 \\ 2b-3 = -3 \\ 2c-3 = 1 \\ 2d+3 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = -2 \\ 2b = 0 \\ 2c = 4 \\ 2d = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = 1 \end{cases}$$

Et donc $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est la solution de l'équation matricielle $2X + 3A = B$.

Exemple 1.20 – Soient x, y et z dans $\mathbb{R}$. Calculer la matrice $x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Déterminer alors l'ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant $x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Je commence par calculer la matrice

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x\\3x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4y\\5y\\6y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7z\\8z\\9z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+4y+7z\\2x+5y+8z\\3x+6y+9z\end{pmatrix}.$$

Alors pour résoudre l'équation matricielle, je résous simultanément les trois équations réelles :

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}x+4y+7z\\2x+5y+8z\\3x+6y+9z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&4y&+&7z&=&0\\2x&+&5y&+&8z&=&0\\3x&+&6y&+&9z&=&0\end{array}\right.$$

Il s'agit d'un système linéaire que je résous en utilisant des opérations élémentaires.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&4y&+&7z&=&0\\2x&+&5y&+&8z&=&0\\3x&+&6y&+&9z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&4y&+&7z&=&0\\&&-3y&-&6z&=&0\\3x&+&6y&+&9z&=&0\end{array}\right.\quad L_2\leftarrow L_2-2L_1$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&4y&+&7z&=&0\\&&-3y&-&6z&=&0\\&&-6y&-&12z&=&0\end{array}\right.\quad L_3\leftarrow L_3-3L_1$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&4y&+&7z&=&0\\&&-3y&-&6z&=&0\\&&&&0&=&0\end{array}\right.\quad L_3\leftarrow L_3-2L_2$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&4y&+&7z&=&0\\&&-3y&-&6z&=&0\\&&&&0&=&0\end{array}\right.\quad L_3\leftarrow L_3-2L_2$$

Comme la troisième ligne s'annule par opérations élémentaires avec les deux premières, je conclus qu'il y a une infinité de solutions. Je fixe alors $z\in\mathbb{R}$. La deuxième équation me donne $y=\dfrac{6z}{-3}=-2z$ et la première équation devient $x-8z+7z=0\iff x=z$. Ainsi

$$\mathcal{S}=\big\{(z,-2z,z)\mid z\in\mathbb{R}\big\}.$$

Par exemple, pour $z=1$, j'obtiens la solution $(1,-2,1)$.

3 – Multiplication de deux matrices

Définition 1.21 – Soient $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice quelconque et $B\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B, la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ notée $A\times B$ ou AB, définie par

$$AB=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\cdots&a_{1,p}\\a_{2,1}&a_{2,2}&\cdots&a_{2,p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n,1}&a_{n,2}&\cdots&a_{n,p}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1,1}b_1+a_{1,2}b_2+\cdots+a_{1,p}b_p\\a_{2,1}b_1+a_{2,2}b_2+\cdots+a_{2,p}b_p\\\vdots\\a_{n,1}b_1+a_{n,2}b_2+\cdots+a_{n,p}b_p\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la matrice AB est une matrice colonne de taille n dont le i-ième coefficient $\big(i\in[\![1,n]\!]\big)$ est donné par

$$\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_k.$$

Exemple 1.22 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculer AX.

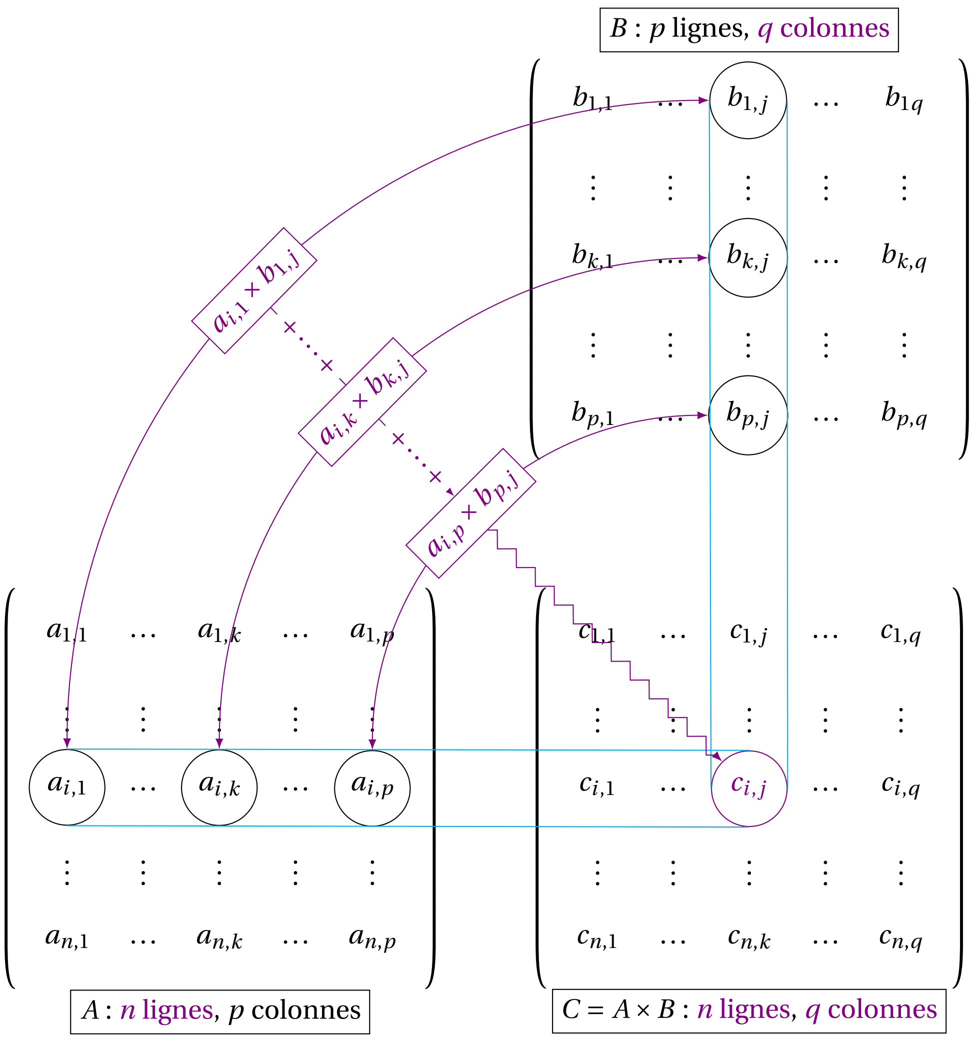
$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+2 \\ 2-3-8 \\ -1-2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Définition 1.23 – Soient $A =\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B =\in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B, la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ notée $A \times B$ ou AB définie par

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix} \quad \text{où } c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$

ATTENTION ! Pour pouvoir effectuer le produit AB, le nombre de colonnes de A doit être **égal** au nombre de colonnes de B. Sinon le produit n'est pas défini.

Illustration du produit matriciel :



Exemple 1.24 – Calculer les produits matriciels suivants après avoir donner l'ensemble de matrices auquel ils appartiennent.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 44 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 44 \\ -6 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 12 & 20 \\ 6 & 18 & 30 \end{pmatrix}$

$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$H = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \\ 9 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $H = \begin{pmatrix} 2x-3y+7z \\ 4x+y-6z \\ 9x+5z \end{pmatrix}$

ATTENTION !

- En général, le produit AB (s'il existe) n'est pas égal au produit BA (s'il existe aussi) : la multiplication matricielle **n'est pas** commutative.
- Un produit de deux matrices peut être égal à la matrice nulle sans qu'aucune de ces deux matrices ne soit égale à la matrice nulle.

Proposition 1.25

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $E \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Alors

- par associativité de la multiplication de matrices, $(A \times C) \times E = A \times (C \times E)$,
- par distributivité de la multiplication de matrices, $(A+B)C = AC + BC$ et $A(C+D) = AC + AD$.

Et pour toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$M \times I_n = I_n \times M = M \quad \text{et} \quad I_n \times X = X.$$

La matrice identité est l'**élément neutre** de la multiplication matricielle *(comme le* 1 *l'est pour les réels).*

Remarque 1.26 – On peut retenir que les règles de calcul sont les mêmes qu'avec les réels **à l'exception que** la commutativité n'est en général pas vraie pour les matrices.

4 – Transposée d'une matrice

Définition 1.27 – Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle transposée de A et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$.

Autrement dit, la matrice ${}^tA$ est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A : le coefficient $a_{i,j}$ se retrouve en position (j,i) et vice-versa.

Exemple 1.28 – Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$, la transposée de A est donnée par ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.29

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et λ un réel. Alors

$${}^t({}^tA) = A, \qquad {}^t(\lambda A) = \lambda \times {}^tA, \qquad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad \text{et} \quad {}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA.$$

5 – Lien avec les systèmes d'équations linéaires

Proposition 1.30

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Alors on a l'équivalence

$$AX = B \iff (S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

Autrement dit, le p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est solution du système à n équations et p inconnues (S) si et seulement si la matrice colonne X est solution de l'équation matricielle $AX = B$.

Remarque 1.31 – Les matrices permettent donc une écriture beaucoup plus succincte d'un système d'équations linéaires. Par ailleurs, il sera donné dans un autre chapitre des outils matriciels permettant la résolution de tels systèmes.

Définition 1.32 – Étant donné le système linéaire à n équations et p inconnues suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.,$$

la matrice des coefficients $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ s'appelle la **matrice associée** au système (S).

Exemple 1.33 – Réécrire les systèmes suivants sous forme d'une équation matricielle.

- $\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & -4 \end{array} \right.$

  Le système se réécrit sous la forme $AX = B$ avec

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & y & - & 2z & + & t & = & 3 \\ & & & & 4z & - & t & = & 2 \\ & & & & & & 2t & = & -4 \end{array} \right.$

  Le système se réécrit sous la forme $AX = B$ avec

  $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

III – Puissance d'une matrice carrée

1 – Définition et premiers exemples

Définition 1.34 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On pose $A^0 = I_n$ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

ATTENTION ! Le calcul de A^n **ne** consiste **pas** à élever les coefficients de A à la puissance n.

Remarque 1.35 – Comme pour les réels où $\forall a \in \mathbb{R},\ a^0 = 1$, toute matrice élevée à la puissance 0 vaut l'élément neutre, à savoir I_n pour les matrices.

Exemple 1.36 – Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+2\times3 & 1\times2+2\times4 \\ 3\times1+4\times3 & 3\times2+4\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.37

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tous entiers r et s dans $\mathbb{N}$,

$$A^r A^s = A^{r+s} \quad \text{et} \quad \left(A^r\right)^s = A^{rs}.$$

ATTENTION ! Puisque la multiplication matricielle **n'est pas commutative**, les autres règles usuelles sur les puissances dans $\mathbb{R}$ ne sont pas vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par exemple, en général, $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

Exemple 1.38 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2. Conclure. Les matrices AB et BA sont-elles égales ?

Comme $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $(AB)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aussi, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. D'où je déduis que $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

Par l'absurde, si je suppose que $AB = BA$, alors

$$(AB)^2 = (AB) \times (AB) = ABAB = A \times (BA) \times B = A \times (AB) \times B = AABB = (AA) \times (BB) = A^2B^2.$$

C'est absurde puisque je viens de montrer que cette égalité est fausse.
Ainsi je conclus que mon hypothèse de départ est erronée, donc que $AB \neq BA$.

Exemple 1.39 – Calculer la puissance n-ième de chacune des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je commence par calculer A^2 et A^3 puis conjecture une formule pour A^n.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il me semble donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Ce résultat est facilement démontrable par récurrence, c'est l'objet du prochain paragraphe.

J'adopte la même démarche pour calculer B^n.

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$. Donc $B^3 = B^2 B = 0_2 \times B = 0_2$, et pour tout $n \geqslant 2$,

$$B^n = B^2 B^{n-2} = 0_2 B^{n-2} = 0_2.$$

2 – Cas d'une matrice diagonale

Proposition 1.40

Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout k dans $\mathbb{N}$, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence, dans le cas d'une matrice de taille $n = 3$.

Énoncé : On note $\mathcal{P}_k$ la propriété : $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $k = 0$,

$$D^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} d_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \geqslant 0$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k \end{pmatrix}.$$

Alors

$$D^{k+1} = D^k \times D = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $k = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k \end{pmatrix}.$$

□

Exemple 1.41 – Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la puissance n-ième de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Comme la matrice A est diagonale, il me suffit d'élever à la puissance n chaque coefficient diagonal. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.42

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe P et Q deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale telles que $\quad A = PDQ \quad$ et $\quad PQ = QP = I_n$.

Alors, pour tout entier k de $\mathbb{N}$, on a

$$A^k = PD^kQ = P \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix} Q.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k.

Énoncé : On note $\mathcal{P}_k$ la propriété : $\quad A^k = PD^kQ$.

Initialisation : Pour $k = 0$, $\quad A^0 = I_n \quad$ et $\quad PD^0Q = PI_nQ = PQ = I_n$. $\quad$ Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \geqslant 0$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $A^k = PD^kQ$. Alors, comme $A = PDQ$,

$$A^{k+1} = A^k \times A = PD^kQ \times PDQ = PD^k(QP)DQ = PD^kI_nDQ = PD^kDQ = PD^{k+1}Q.$$

Finalement $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $k = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PD^kQ.$$

□

3 – Formule du binôme de Newton

Définition 1.43 – Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Proposition 1.44 – Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A **et** B **commutent** (*i.e.* $AB = BA$).
Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

Remarque 1.45 – La formule du binôme de Newton sert à calculer les puissances d'une matrice **à condition que** l'on puisse écrire celle-ci comme la somme de deux matrices qui commutent et dont on sait expliciter les puissances. Le cas le plus fréquent est celui pour lequel la matrice considérée est la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice dont les puissances sont nulles à partir d'un certain rang, **qui commutent**.

Exemple 1.46 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $A = D + J$.

   Je calcule $D+J$. $D+J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$. J'ai bien montré que $A = D + J$.

2. Calculer J^2. En déduire J^n pour tout $n \geqslant 2$.

   Je calcule J^2. $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

   Dès lors, pour tout $n \geqslant 2$, $J^n = J^2 \times J^{n-2} = 0_2 \times J^{n-2} = 0_2$.

3. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Comme la matrice D est diagonale, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$A^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J.$$

   Comme les matrices D et J commutent, je peux appliquer la formule du binôme de Newton. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$A^n = (D+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} J^k = \binom{n}{0} D^n J^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} J^1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} J^k}_{=0_2 \text{ car } J^k = 0_2 \text{ pour } k \geqslant 2} = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J.$$

5. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{1} = n$, donc

   $$A^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$