

EXERCICES — CHAPITRE 10

Probabilités

Exercice 1 – Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$. Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p .

On pose pour tout n de \mathbf{N}^* , $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Justifier que pour tout n de \mathbf{N}^* , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Exercice 2 – On considère une suite de lancers indépendants d'une même pièce équilibrée. Pour tout n de \mathbf{N}^* , on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si l'évènement "on obtient *Pile*" est réalisé au n -ième lancer et à 0 sinon. Pour tout n de \mathbf{N}^* , on pose $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Que représente \overline{X}_n ?
2. Justifier que, pour tout réel strictement positif ε , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

3. Le résultat précédent est-il conforme à l'intuition?

Exercice 3 (extrait de BSB 2018) – Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

1. Montrer que les intégrales

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt, \quad J = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt \quad \text{et} \quad K = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$$

$$\text{sont convergentes et vérifier que } I = \frac{1}{a}, \quad J = \frac{1}{2a^2}, \quad \text{et} \quad K = \frac{1}{3a^3}.$$

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

2. Montrer, en utilisant un des calculs de la question 1, que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère X une variable aléatoire de densité f .

3. Montrer, en utilisant certains calculs de la question 1, que X admet une espérance et une variance et vérifier que

$$E(X) = \frac{3a}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{3a^2}{4}.$$

4. On note F la fonction de répartition de X .

- (a) Calculer $F(x)$ pour $x < a$.
- (b) Justifier que lorsque $x \geq a$,

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3.$$

- (c) Vérifier que

$$P(2a \leq X \leq 4a) = \frac{7}{64} \quad \text{et} \quad P(X \geq 2a) = \frac{1}{8}.$$

Calculer $P_{[X \geq 2a]}(X \leq 4a)$.

5. On considère maintenant n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n suivant la même loi que X . On pose

$$M_n = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- (a) Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
- (b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$P(|M_n - a| > \varepsilon) \leq \frac{a^2}{3n\varepsilon^2}.$$

Exercice 4 (extrait de ESCP 2017) – Soit a un réel vérifiant $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ et f la fonction définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité et on suppose que le paramètre a est inconnu.

2. Calculer $E(X)$ et montrer que $V(X) = \frac{4-3a^2}{12}$.

- Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .
- Pour n un entier de \mathbf{N}^* , on considère n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n indépendantes et suivant toutes la même loi que X . Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

- On pose $Y_n = 2\bar{X}_n$. Montrer que $E(Y_n) = a$.
- Montrer que $V(Y_n) = \frac{4-3a^2}{3n}$.
- Soit ε un réel strictement positif. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à Y_n , établir l'inégalité

$$P(|Y_n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{4}{3n\varepsilon^2}.$$

Estimation

Exercice 5 – Soit R un réel strictement positif. On considère la fonction f suivante

$$f: \begin{matrix} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{2t}{R^2} & \text{si } 0 \leq t \leq R \\ 0 & \text{si } t > R \end{cases} \end{matrix}.$$

- Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Soit T une variable aléatoire de densité f .

- Déterminer la fonction de répartition F_T de T .
- Justifier que T admet une espérance et une variance et les déterminer.
- Soit $n \geq 2$ un entier et (T_1, \dots, T_n) un échantillon de T . On définit la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i.$$

- Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
 - En déduire que $Z_n = \frac{3}{2}Y_n$ est un estimateur sans biais de θ .
 - Déterminer le risque quadratique de Z_n .
- On suppose qu'en simulant T , on a obtenu les valeurs suivantes :
3.61, 1.47, 3.81, 3.65, 1.42, 3.93, 3.88, 1.88, 3.18, 2.22, 1.24, 2.95, 2.11, 1.73, 2.95

En déduire une estimation de R .

Exercice 6 – Soit θ un réel strictement positif. On considère la fonction f suivante

$$f: \begin{matrix} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < \theta \\ e^{-(t-\theta)} & \text{si } t \geq \theta \end{cases} \end{matrix}.$$

- Vérifier que f est une densité de probabilité.
- Soit T une variable aléatoire de densité f .
- Déterminer la fonction de répartition F_T de T .
 - On introduit la variable aléatoire W définie par $W = T - \theta$.
 - Expliciter la fonction de répartition F_W de W puis reconnaître la loi de W .
 - En déduire l'espérance et la variance de W puis l'espérance et la variance de T .
 - Soit $n \geq 2$ un entier et (T_1, \dots, T_n) un échantillon de T . On définit la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i.$$
 - Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
 - En déduire que $Z_n = Y_n - 1$ est un estimateur sans biais de θ .
 - Déterminer le risque quadratique de Z_n .
 - On suppose qu'en simulant T , on a obtenu les valeurs suivantes :

5.66, 5.1, 5.07, 5.60, 5.88, 6.52, 10.07, 6.38, 7.52, 5.58, 5.34, 5.31, 5.59, 7.91, 6.13

En déduire une estimation de θ .

Exercice 7 – Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de la loi de X . On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $\alpha \in]0, 1[$.

- Calculer l'espérance et la variance de \bar{X}_n .
- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|\bar{X}_n - p| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

- En appliquant l'inégalité précédente à un ε bien choisi, en déduire que

$$P\left(p \in \left[\bar{X}_n - \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{n}}\right]\right) \geq 1 - \alpha.$$

- Établir le tableau de variation sur $[0, 1]$ de la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$. En déduire que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.
- En déduire un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $1 - \alpha$.