25 | Variables aléatoires réelles

I – Généralités sur les variables aléatoires

1 – Définitions et exemples

Il arrive souvent qu'à chaque résultat d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers Ω (l'ensemble des résultats possibles) dans $\mathbf{R}$. On peut par exemple considérer le gain obtenu à l'issu d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.

Définition 25.1 – Une **variable aléatoire** X est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
On appelle **support** de X, et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.

Exemple 25.2 – Tout au long de ce chapitre, on s'appuiera sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1, on gagne 4€, si on a un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et
$$X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}.$$
2. On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des deux résultats obtenus. X est une variable aléatoire et
$$X(\Omega) = [\![2; 12]\!] \qquad \textit{(on obtient au minimum 2 et au maximum 12).}$$

2 – Évènements associés à une variable aléatoire

Définition 25.3 – Soit X une variable aléatoire sur Ω et $x \in \mathbf{R}$. On note
$$\begin{aligned}
[X = x] &= \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\},\\
[X < x] &= \{\omega \in \Omega; X(\omega) < x\},\\
[X \leq x] &= \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\},\\
[X > x] &= \{\omega \in \Omega; X(\omega) > x\},\\
[X \geq x] &= \{\omega \in \Omega; X(\omega) \geq x\}.
\end{aligned}$$
Si x et y sont deux réels tels que $x < y$ alors on note
$$\left[x \leq X \leq y\right] = \left\{\omega \in \Omega; x \leq X(\omega) \leq y\right\}.$$
Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbf{R}$, on note
$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in I\}.$$

Exemple 25.4 – Calculer $P([X = 3])$ et $P([X \leq 2])$ dans les deux exemples de l'exemple 25.2.

1. On gagne 3€ dans le cas où l'on obtient le tirage 1. Ainsi,
$$P(X=3)=P(\{1\})=\frac{1}{5}.$$
Par ailleurs, on gagne moins de 2€ dans le cas où l'on obtient n'importe quel tirage différent de 1. Autrement dit, si l'on obtient un 2, un 3, un 4 ou un 5. Ainsi,
$$P(X\leq 2)=P(\{2;3;4;5\})=\frac{4}{5}.$$

2. La somme des deux dés vaut 3 si l'on a obtenu $(1;2)$ ou $(2;1)$ avec les deux dés. Puisqu'il y a au total 36 issues possibles lorsque l'on lance les deux dés (tous les tirages $(1;1)$, $(1;2)$, ..., $(1;6)$, ..., $(6;1)$, $(6;2)$, ..., $(6;6)$), on a :
$$P(X=3)=P(\{(1;2);(2;1)\})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$
Par ailleurs, la somme des deux dés est inférieure ou égale à 2 seulement lorsque l'on obtient $(1;1)$ avec les deux dés. Ainsi,
$$P(X\leq 2)=P(\{(1;1)\})=\frac{1}{36}.$$

Proposition 25.5

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Alors, l'ensemble
$$\big\{[X=x]\,;x\in X(\Omega)\big\}$$
forme un système complet d'évènements. En particulier, on a
$$\sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\big)=1.$$

Exemple 25.6 – On reprend les deux exemples de l'exemple 25.2.

1. Un système complet d'évènements est $\big\{[X=-1]\,;[X=1]\,;[X=3]\big\}$.
2. Un système complet d'évènements est $\big\{[X=2];[X=3];[X=4];\dots;[X=12]\big\}$.

Remarque 25.7 – Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P([X=x])$ en $P(X=x)$, et de même pour les autres ensembles.

3 – Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 25.8 – Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi** de la variable aléatoire X, la donnée des $P(X=x)$ pour tout réel x.

Méthode 25.9 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

- On donne l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.
- On calcule $P(X=x)$ pour tout $x\in X(\Omega)$.

On résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec, sur la 1ère ligne, les valeurs prises par X, et sur la 2ème ligne les probabilités correspondantes.

Exemple 25.10 – On reprend les deux exemples de l'exemple 25.2.

1. La loi de la variable aléatoire X est donnée par

$$P(X=-1)=\frac{2}{5},\qquad P(X=1)=\frac{2}{5},\qquad P(X=3)=\frac{1}{5}.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant.

x	-1	1	3
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. On a

$$P(X=2)=P(\{(1;1)\}=\frac{1}{36},\qquad P(X=3)=P(\{(1;2);(2;1)\})=\frac{2}{36}$$

$$P(X=4)=P(\{(1;3);(2;2);(3;1)\})=\frac{3}{36}\qquad \text{etc.}$$

De manière générale, on a

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarque 25.11 – On n'oubliera pas de vérifier **à chaque fois** que la somme des probabilités inscrites dans le tableau fait 1.

4 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition 25.12 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X et on note F_X la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$F_X(x)=P(X\leq x)\in[0;1]$$

Proposition 25.13

Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ avec $x_1<x_2<\dots<x_n$. Alors

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<x_1,\\ P(X=x_1)+\dots+P(X=x_k) & \text{si } x_k\leq x<x_{k+1},\\ 1 & \text{si } x_n\leq x.\end{cases}$$

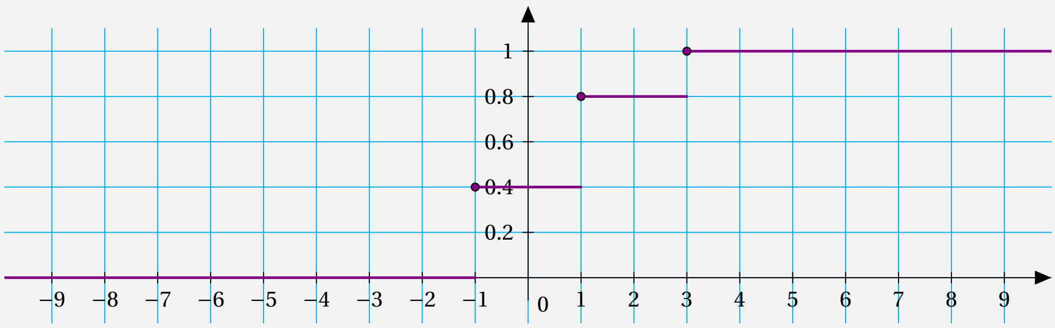
En particulier, F_X est constante sur $\left[x_k;x_{k+1}\right[$.

Exemple 25.14 – Calculer la fonction de répartition de X dans les deux exemples de l'exemple 25.2.

1. On a vu que $X(\Omega)=\{-1;1;3\}$. Dès lors,
   - Si $x<-1$, alors $F_X(x)=0$.
   - Si $-1\leq x<1$, alors $F_X(x)=P(X=-1)=\frac{2}{5}$.
   - Si $1\leq x<3$, alors $F_X(x)=P(X=-1)+P(X=1)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$.
   - Si $x\geq 3$, alors $F_X(x)=1$.

Ce que l'on peut résumer par

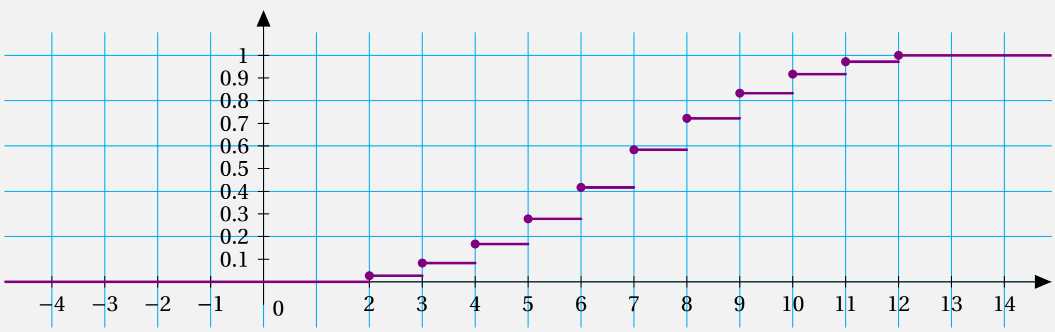
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \dfrac{2}{5} & \text{si } -1 \le x < 1, \\ \dfrac{4}{5} & \text{si } 1 \le x < 3, \\ 1 & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$$



2. On a vu que $X(\Omega) = [\![2;12]\!]$. Dès lors,
   - Si $x < 2$, alors $F_X(x) = 0$.
   - Si $2 \le x < 3$, alors $F_X(x) = P(X=2) = \dfrac{1}{36}$.
   - Si $3 \le x < 4$, alors $F_X(x) = P(X=2) + P(X=3) = \dfrac{1}{36} + \dfrac{2}{36} = \dfrac{3}{36}$.
   - Si $4 \le x < 5$, alors $F_X(x) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \dfrac{1}{36} + \dfrac{2}{36} + \dfrac{3}{36} = \dfrac{6}{36}$.
   - etc.

   Ce que l'on peut résumer par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{1}{36} & \text{si } 2 \le x < 3, \\ \dfrac{3}{36} & \text{si } 3 \le x < 4, \\ \dfrac{6}{36} & \text{si } 4 \le x < 5, \\ \text{etc.} & \\ \dfrac{35}{36} & \text{si } 11 \le x < 12, \\ 1 & \text{si } x \ge 12. \end{cases}$$



Proposition 25.15

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X. Autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

II – Moments d'une variable aléatoire finie

1 – Espérance

Définition 25.16 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

On appelle espérance mathématique de X le réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p(X = x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_k \times p_k.$$

Remarque 25.17 –

- L'espérance $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs x_i affectées des fréquences p_i.
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $E(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois. Le signe de $E(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre. Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est équitable.

Exemple 25.18 – Calculer $E(X)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 25.2.

1. $$E(X) = -1 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

2. $$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + \cdots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7.$$

Proposition 25.19

Soient X et Y deux variables aléatoires finies définies sur Ω. Soit a et $b \in \mathbf{R}$. Alors,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX+b) = aE(X) + b.$$

Exemple 25.20 – On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x+3$ et $Y = g(X) = 2X+3$. Déterminer l'espérance de Y.
$X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et le dé étant non-truqué, on est en situation d'équiprobabilité :
$\forall k \in [\![1;6]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{6}$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

On en déduit que

$$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 7 + 3 = 10.$$

Théorème 25.21 – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i).$$

Exemple 25.22 – On considère la fonction $g(x) = x^2$. Calculer $E\big(g(X)\big)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 25.2.

1. D'après le théorème de transfert, on a

$$E\big(g(X)\big) = E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{2}{5} + 1^2 \times \frac{2}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} = \frac{13}{5}.$$

2. D'après le théorème de transfert, on a

$$E\big(g(X)\big) = E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}.$$

Remarque 25.23 – Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.

2 – Variance

Définition 25.24 – Soit X une variable aléatoire finie.

- On appelle **variance** de X le réel, noté $V(X)$, défini par

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i).$$

- On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque 25.25 – La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Théorème 25.26 – Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire finie. On a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Méthode 25.27 – Calculer la variance d'une variable aléatoire

- On calcule $E(X^2)$ grâce au théorème de transfert.
- Puis on utilise la formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple 25.28 – Calculer $V(X)$ pour les deux exemples de l'exemple 25.2.

1. On a déjà calculé $E(X^2)$ dans la partie précédente. On a $E(X^2) = \frac{13}{5}$. Par ailleurs, $E(X) = \frac{3}{5}$ donc $E(X)^2 = \frac{9}{25}$. Dès lors, d'après la formule de König-Huygens, on a
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{13}{5} - \frac{9}{25} = \frac{65}{25} - \frac{9}{25} = \frac{56}{25}.$$
2. On a déjà calculé $E(X^2)$ dans la partie précédente. On a $E(X^2) = \frac{329}{6}$. Par ailleurs, $E(X) = 7$ donc $E(X)^2 = 49$. Dès lors, d'après la formule de König-Huygens, on a
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{329}{6} - \frac{294}{6} = \frac{35}{6}.$$

Proposition 25.29

Soit X une variable aléatoire finie et soient a et b deux réels. Alors
$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$
En particulier,
$$V(X + b) = V(X).$$

Remarque 25.30 – Contrairement à l'espérance, la variance **n'**est **pas** linéaire.

Exemple 25.31 – On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X + 3$. Calculer la variance de X puis celle de Y.
$X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et le dé étant non-truqué, on est en situation d'équiprobabilité :
$\forall k \in [\![1;6]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{6}$. Dès lors,
$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}.$$
De même,
$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X = k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{91}{6}.$$
Dès lors, d'après la formule de König-Huygens,
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}.$$
On a donc, d'après la Proposition 25.29,
$$V(Y) = V(2X + 3) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}.$$