INTERRO DE COURS 12

Exercice 1 – Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = n^2,$

Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n+1 \geqslant 0.$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

2. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \dfrac{3}{n+1},$

Solution : Tous les termes de la suite sont strictement positifs. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{n+1+1}}{\frac{3}{n+1}} = \frac{3}{n+2} \times \frac{n+1}{3} = \frac{n+1}{n+2} \leqslant 1.$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + (u_n - 4)^2,$

Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = u_n + (u_n - 4)^2 - u_n = (u_n - 4)^2 \geqslant 0.$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

4. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{1+n}.$

Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = u_n + \sqrt{1+n} - u_n = \sqrt{1+n} \geqslant 0.$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2 – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2+1}$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 4.

Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$u_n - 4 = \frac{4n^2+1}{n^2+1} - 4 = \frac{4n^2+1}{n^2+1} - \frac{4(n^2+1)}{n^2+1} = \frac{4n^2+1-4n^2-4}{n^2+1} = \frac{-3}{n^2+1} \leqslant 0.$$

Donc $u_n \geqslant 4$ et (u_n) est majorée par 4.

2. En déduire qu'elle est bornée.

Solution : Comme pour tout entier n, on a $u_n \geqslant 0$, alors (u_n) est minorée par 0.
Ainsi (u_n) est bien bornée.