

NOM :

**INTERRO DE COURS – SEMAINE 26**

**Exercice 1** – On considère une urne contenant quatre boules rouges et cinq boules noires. On prélève successivement et avec remise dix boules dans cette urne et on note  $X$  le nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de  $X$ . On précisera notamment  $X(\Omega)$  ainsi que la formule donnant  $P(X = k)$  en fonction de  $k$  pour tout  $k \in X(\Omega)$ .

**Solution :** Il s'agit de  $n = 10$  répétitions de l'épreuve de Bernoulli de succès "obtenir une boule rouge", de probabilité  $p = \frac{4}{9}$ . Ces répétitions sont identiques et indépendantes. La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de succès, donc  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = \frac{4}{9}$ .

Son support est donné par  $X(\Omega) = \llbracket 0, 10 \rrbracket$  et pour tout  $k \in X(\Omega)$ ,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k} = \binom{10}{k} \times \left(\frac{4}{9}\right)^k \times \left(\frac{5}{9}\right)^{10-k}.$$

2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :** Comme  $X$  suit une loi binomiale, alors

$$E(X) = np = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9} \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p) = \frac{40}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{200}{81}.$$

3. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges. On donnera le résultat sous la forme  $2^a \times 3^b \times 5^c$ , pour  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers (*non nécessairement positifs*).

**Solution :** J'utilise la formule obtenue à la question 1. en remplaçant  $k$  par 2 :

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{5}{9}\right)^8 = 45 \times \frac{4^2 \times 5^8}{9^{2+8}} = 2^{2 \times 2} \times 3^{2-2 \times 10} \times 5^{1+8} = 2^4 \times 3^{-18} \times 5^9.$$