INTERRO DE COURS 11

Exercice 1 – On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{x-1},$$

et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner le domaine de définition de f.

> **Solution :** f est une fraction rationnelle donc $D_f = \mathbf{R} \setminus \{V.I.\}$.
> Par ailleurs, on a $x-1=0 \iff x=1$ donc il n'y a qu'une seule valeur interdite : $x=1$.
> Ainsi $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

2. Calculer les limites de f en $-\infty$, 1^-, 1^+ et $+\infty$.

> **Solution :** On a
> $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty.$$
> $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$$
> $$\lim_{x\to1^-} x^3 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to1^-} x-1 = 0^- \quad \text{donc par quotient,} \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty.$$
> $$\lim_{x\to1^+} x^3 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to1^+} x-1 = 0^+ \quad \text{donc par quotient,} \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty.$$

3. Montrer que pour tout $x \neq 1$, on a

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}.$$

> **Solution :** Posons $u(x) = x^3$ et $v(x) = x-1$. On a $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1$, donc
> $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

4. En déduire le tableau de variation complet de f. On prendra notamment soin d'y faire figurer les limites calculées à la question 2.

> **Solution :** On a $2x-3=0 \iff x = \frac{3}{2}$. On en déduit le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x^2		$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Calculer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe au point d'abscisse 0.

Solution : L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en le point d'abscisse a est donnée par la formule
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$
Ici, $a = 0$. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc l'équation de la tangente en 0 est $y = 0$.

6. Sur un même graphique, tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la tangente $\mathcal{T}$.

Solution :