# CONCOURS BLANC 4 — ESCP

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
***Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.***
*Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.*

*Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage!*

**Exercice 1 –** On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer $J^2$ puis vérifier que $J^3 = 2J$.
   b) En déduire les valeurs propres possibles de $J$.
   c) Vérifier que les colonnes de la matrice $P$ sont des vecteurs propres de $J$.
   d) On pose $D_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
   Montrer que $JP = PD_1$ et en déduire que $J$ est diagonalisable.
   e) En déduire que $J^2P = PD_1^2$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) Vérifier que $K = J^2 - I$.
   b) Montrer qu'il existe des réels $a$, $b$, $c$ tels que $A = aI + bJ + cK$.
   c) En déduire que $A = J^2 + 2J$ puis établir l'existence d'une matrice diagonale $D_2$ que l'on explicitera, telle que $AP = PD_2$.
3. a) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle calcule et affiche la matrice $A^n$ pour une valeur de l'entier naturel $n$ donnée.

```
import numpy as np
def puissanceA(n):
    A=np.array(......)
    B=np.eye(3)
    for k in range(n):
        B=......
    return B
```

b) Pour $n=2$, la fonction précédente renvoie $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 8 & 12 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Pour $n=3$, la fonction précédente renvoie $A^3 = \begin{pmatrix} 28 & 40 & 28 \\ 40 & 56 & 40 \\ 28 & 40 & 28 \end{pmatrix}$.

Pour $n=5$, donner, sans calculer $A^5$, un argument permettant de préciser laquelle des deux matrices $B_1$ ou $B_2$ suivantes est renvoyée par ce script :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 656 & 928 & 656 \\ 928 & 1312 & 928 \\ 656 & 928 & 656 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 656 & 928 & 656 \\ 928 & 1324 & 928 \\ 656 & 928 & 656 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2 –** On désigne par $\lambda$ un réel strictement positif et par $p$ un réel de $]0,1[$.

1. On considère une variable aléatoire $Z$ suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
   a) Donner sans calcul la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
   b) Donner sans calcul les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$.
   c) En déduire la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
2. On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \begin{cases} \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$
   a) Utiliser les questions précédentes pour montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et donner sa valeur.
   b) En déduire que $f$ est une densité de probabilité.
   c) On désigne par $X$ une variable aléatoire de densité $f$.
   Montrer que $X$ possède une espérance et donner sa valeur.
3. On note $F$ la fonction de répartition de $X$.
   a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que
   $$\forall x \geqslant 0, \quad \int_0^x t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}\big(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x}\big).$$
   b) En déduire l'expression explicite de $F(x)$ pour tout réel $x$.

**Exercice 3 –** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et en déduire que $f$ est continue en 0.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et en déduire que $f$ est dérivable en 0 et donner le nombre dérivé de $f$ en 0, noté $f'(0)$.

2. a) Déterminer, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}_+^*$, l'expression de $f'(x)$ en fonction de $x$, où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis donner les variations de $f$ sur $\mathbb{R}_+$.

   c) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de $f$.

   d) Vérifier que, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}_+^*$, $\quad f''(x) = \dfrac{1}{x^3} e^{-1/x}$.
   La fonction $f$ est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}_+$ ?

3. a) Calculer $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{e^{-u} - 1}{u}$.

   b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (x-1)\big) = 0$.

   c) On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite asymptote à $(C)$ au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de $(C)$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel $n$.

4. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $\quad u_n > 0$.

   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

   d) Compléter les commandes suivantes pour qu'elles affichent le rang $n$ à partir duquel $u_n \leqslant 10^{-3}$.

```
import numpy as np
n=0
u=1
while u>0.001:
    u=....
    n=....
print(n)
```

5. a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln u_{n+1}$.

   b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ est divergente.

**Exercice 4 –**

*On rappelle que la probabilité d'un événement $B$ est notée $P(B)$.*

On dispose d'une urne $U_0$ contenant deux boules noires et deux boules blanches,
et d'urnes $U_1$, $U_2$, $U_3$, … contenant chacune deux boules blanches.
On effectue des tirages selon le protocole suivant :

- On pioche au hasard deux boules dans l'urne $U_0$, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne $U_1$.
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne $U_1$, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne $U_2$.
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne $U_2$, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne $U_3$, et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $X_n$ le nombre de boules noires contenues dans l'urne $U_n$ après y avoir introduit les boules piochées dans l'urne $U_{n-1}$ et avant de procéder au tirage suivant.
On pose $X_0 = 2$.

1. a) Montrer que la loi de la variable aléatoire $X_1$ est donnée par

$$P\big(X_1 = 1\big) = \frac{2}{3}, \qquad P\big(X_1 = 2\big) = P\big(X_1 = 0\big) = \frac{1}{6}.$$

   b) Calculer l'espérance de $X_1$.

2. Pour tout entier naturel $k$, on note $A_k$ l'événement : "on pioche deux boules noires dans l'urne $U_k$". Exprimer, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'événement $\big(X_n = 2\big)$ à l'aide de certains des événements $A_k$ et en déduire que $P\big(X_n = 2\big) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

3. a) Pour tout entier naturel $n$ non nul, montrer que

$$P\big(X_{n+1} = 1\big) = \frac{1}{2}P\big(X_n = 1\big) + \frac{2}{3}P\big(X_n = 2\big).$$

   b) Montrer ensuite par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$P\big(X_n = 1\big) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

   c) Donner la valeur de $P\big(X_n = 0\big)$ en fonction de $n$.

4. Calculer, pour tout entier naturel $n$, l'espérance de $X_n$.
   Déterminer la limite de cette espérance lorsque $n$ tend vers $+\infty$.