14 Compléments sur les fonctions

I – Convexité

1 – Dérivées successives

Exemple 14.1 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.
La fonction f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$.
La fonction f' est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x - 6$.
La fonction f'' est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'''(x) = f^{(3)}(x) = 6$.

Définition 14.2 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **deux fois dérivable** si f et f' sont dérivables.
  Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Plus généralement, on dit que f est n **fois dérivable** ($n \geqslant 1$) si pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $f^{(p)}$ est dérivable. On note alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

ATTENTION ! La notation $f^{(n)}$ n'a rien à voir avec la notion de puissance !

Exemple 14.3 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Dériver successivement f.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \qquad \text{etc.}$$

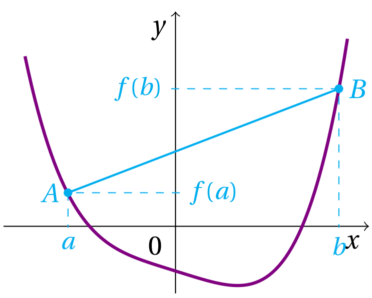
Je peux alors montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \times n}{(1-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

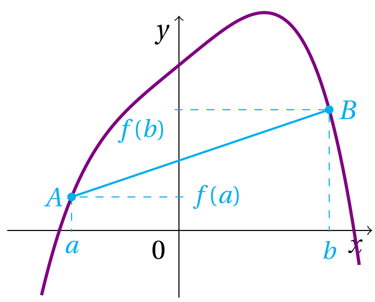
2 – Définition graphique

Définition 14.4 – Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est dite **convexe** sur I si sa courbe est située **en dessous de chacune de ses cordes**.
- La fonction f est dite **concave** sur I si sa courbe est située **au-dessus de chacune de ses cordes**.



f est une fonction convexe



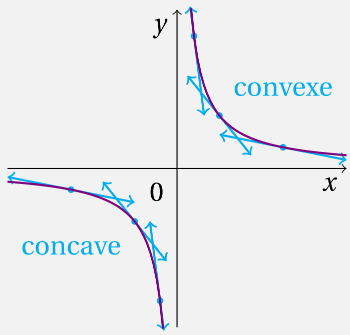
f est une fonction concave

Théorème 14.5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors

- f est **convexe** sur I si et seulement si sa courbe est située entièrement **au-dessus de chacune de ses tangentes**.
- f est **concave** sur I si et seulement si sa courbe est située entièrement **en dessous de chacune de ses tangentes**.

Exemple 14.6 – La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$.



3 – Dérivation et convexité

Théorème 14.7

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors

- f est **convexe** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $\quad f''(x) \geqslant 0$.
- f est **concave** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $\quad f''(x) \leqslant 0$.

Exemple 14.8 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$. Étudier la convexité de f.

La dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
La dérivée seconde de f est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$.
La convexité de f se déduit du signe de sa dérivée seconde f''.
Comme $20x^2 \geqslant 0$, alors le signe de $f''(x)$ est celui $x - 3$. J'obtiens alors le tableau suivant :

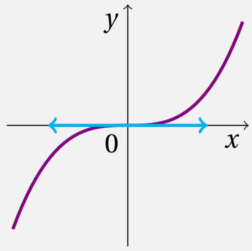
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		concave		concave		convexe	

En conclusion, f est concave sur $]-\infty, 3]$ et convexe sur $[3, +\infty[$.

4 – Point d'inflexion

Définition 14.9 – Soient f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Un **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un point où la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente.
C'est aussi le point où la convexité change de sens.

Exemple 14.10 – La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine du repère, de coordonnées $(0,0)$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente donc $(0,0)$ est un point d'inflexion.



Théorème 14.11

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Le point $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule **et** change de signe en x_0.

Exemple 14.12 – En utilisant l'étude de la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ menée dans l'exemple 14.8, déterminer les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Grâce au tableau déjà obtenu, je sais que la dérivée seconde s'annule lorsque $x = 0$ et $x = 3$.

- En $x = 0$, f'' s'annule mais ne change pas de signe donc le point d'abscisse 0 n'est pas un point d'inflexion : la tangente ne traverse pas la courbe en ce point.
- En $x = 3$, f'' s'annule **et** change de signe donc le point d'abscisse 3 est un point d'inflexion : la tangente traverse la courbe en ce point.

Puis comme
$$f(3) = 3^5 - 5 \times 3^4 = (3-5) \times 3^4 = -2 \times 81 = -162,$$
alors le point de coordonnées $\left(3, -162\right)$ est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Méthode 14.13 – Étudier la convexité d'une fonction deux fois dérivable
Pour étudier la convexité d'une fonction deux fois dérivable :

1. On calcule la dérivée seconde f'' de f en dérivant de nouveau f'.
2. On établit le tableau de signe de $f''(x)$.
3. On conclut grâce au théorème :
   - Lorsque $f''(x) \geqslant 0$, f est convexe.
   - Lorsque $f''(x) \leqslant 0$, f est concave.

Exemple 14.14 – Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^4 - 10x^3 - 84x^2 - 60x + 6.$$
Je commence par dériver f, puis la dérivée f', pour obtenir f''. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 4x^3 - 30x^2 - 168x - 60 \quad \text{et} \quad f''(x) = 12x^2 - 60x - 168 = 12\left(x^2 - 5x - 14\right).$$
J'étudie maintenant le signe de $f''(x)$:
Puisque $12 > 0$, le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $x^2 - 5x - 14$.
Je calcule le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 25 + 56 = 81 > 0$.
Il y a donc deux racines :
$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{81}}{2 \times 1} = \frac{5-9}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+9}{2} = 7.$$

J'en déduis alors le tableau de signe de $f''(x)$ ainsi que la convexité de f :

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

Remarque 14.15 – L'étude de la convexité permet de préciser l'allure de la courbe de la fonction f.

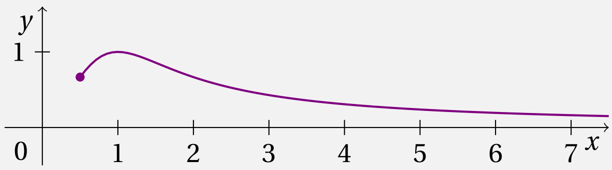
II – Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 14.16

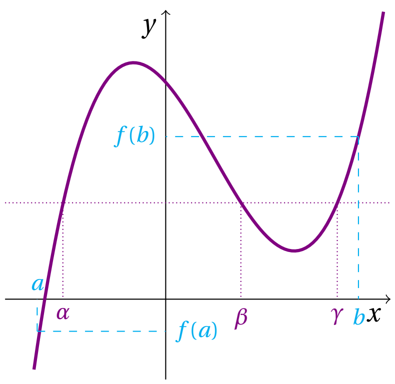
Soit f une fonction **continue** définie sur un intervalle I.
L'image de f, $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$, est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque 14.17 – Ce résultat s'applique pour un intervalle borné $I = [a, b]$, ouvert ou fermé, comme pour un intervalle infini. Dans ce cas, la notion d'image est à remplacer par la notion de limite.

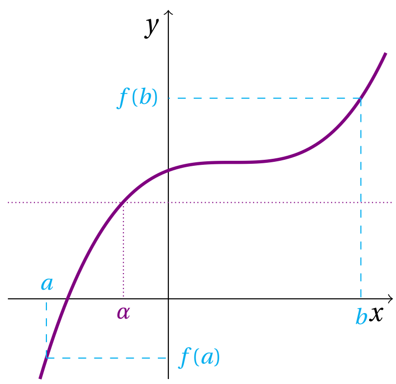
Exemple 14.18 – La fonction tracée ci-contre est continue et l'image de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ est l'intervalle $]0, 1]$.



Le théorème des valeurs intermédiaires permet de montrer l'existence d'une solution d'une équation lorsque la résolution est difficile. Il ne permet pas en revanche un calcul effectif de cette solution.
En pratique, si l'existence est démontrée, il est alors facile d'obtenir une valeur approchée numériquement, par dichotomie par exemple. La résolution algorithmique de telles équations est un vaste domaine de recherche encore de nos jours.



Lorsque f est continue, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution $\alpha \in [a, b]$.



Si de plus f est strictement monotone, alors l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a, b]$.

Théorème 14.19 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$.
Si la fonction f est continue sur $[a,b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

l'équation $f(x)=k$ admet **au moins** une solution $\alpha \in [a,b]$.

Si **de plus** f est strictement monotone, alors l'équation $f(x)=k$ admet une **unique** solution $\alpha \in [a,b]$.

Méthode 14.20 – Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires

Pour répondre à une question du type "Montrer que l'équation $f(x)=k$ admet une solution α dans l'intervalle $[a,b]$", il suffit très souvent d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Pour cela :

1. On commence par vérifier que la fonction f est bien continue sur l'intervalle $[a,b]$.
2. On calcule $f(a)$ et $f(b)$ et on vérifie que le réel k est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
3. On conclut grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

Si par ailleurs la question demande de montrer que cette solution est **unique**, il faut préciser que la fonction est strictement monotone (strictement croissante ou décroissante).

Exemple 14.21 –

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+1$.
  Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans $[-1,0]$.

  La fonction f est une fonction polynomiale donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

  $$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2+1=-1-3+1=-3<0 \quad \text{et} \quad f(0)=0^3-3\times 0^2+1=1>0.$$

  Ainsi 0 est bien compris entre $f(-1)$ et $f(0)$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1,0]$.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x+x$.
  Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution $x\in[0,1]$.

  La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

  $$f(0)=\mathrm{e}^0+0=1 \quad \text{et} \quad f(1)=\mathrm{e}^1+1=\mathrm{e}+1\approx 3.7.$$

  Ainsi 2 est bien compris entre $f(0)$ et $f(1)$. De plus pour tout réel x,

  $$f'(x)=\mathrm{e}^x+1>0.$$

  Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=2$ admet une **unique** solution sur $[0,1]$.

Théorème 14.22 – Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est continue **et** strictement monotone, alors f décrit une bijection de I sur son image $f(I)$.

Exemple 14.23 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x$.
Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $[1,5]$ sur un intervalle que l'on précisera.
La fonction f est une fonction polynomiale donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. Et pour tout réel x,

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3\left(x^2 + 1\right) > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et comme

$$f(1) = 1^3 + 3 \times 1 = 1 + 3 = 4 \quad \text{et} \quad f(5) = 5^3 + 3 \times 5 = 125 + 15 = 140,$$

alors la fonction f réalise une bijection de $[1,5]$ sur $[4,140]$.

Proposition 14.24

Soit f une fonction continue strictement monotone définie sur un intervalle I.

- La fonction réciproque f^{-1}, définie sur $f(I)$, est aussi continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.
- Sa courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est obtenue par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 14.25 – Deux exemples :

- Les fonctions carrée et racine carrée, réciproques l'une de l'autre sur $]0,+\infty[$, ont des courbes symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- La courbe de la fonction inverse sur l'intervalle $]0,+\infty[$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$: la fonction inverse décrit une bijection et est sa propre bijection réciproque.