## EXERCICES — CHAPITRE 11

**Exercice 1** ( $\star$ ) – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f.

1. 
$$f(x) = x^2 - 3x + 7$$

4. 
$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$$

7. 
$$f(x) = 3x + \frac{3}{x^2}$$

$$2. \ \ f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

5. 
$$f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$$

1. 
$$f(x) = x^2 - 3x + 7$$
  
2.  $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$   
4.  $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$   
5.  $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$   
7.  $f(x) = 3x + \frac{3}{x^2}$   
8.  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$ 

3. 
$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

3. 
$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$
 6.  $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 1$  9.  $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ 

$$9. \ f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$

Exercice 2 ( $\star\star$ ) – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f.

1. 
$$f(x) = (7x+1)^8 \text{ sur } \mathbb{R}$$

2. 
$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4} \operatorname{sur} \mathbb{R}$$

2. 
$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4} \operatorname{sur} \mathbb{R}$$
  
3.  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \operatorname{sur} ] -1, +\infty[$ 

4. 
$$f(x) = (x+1)(x^2+2x-3)^3 \operatorname{sur} \mathbb{R}$$

5. 
$$f(x) = \frac{3}{(2x-1)^3} \text{ sur } \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right]$$

6. 
$$f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2} \text{ sur } ]1, +\infty[$$

7. 
$$f(x) = \frac{4}{(1-2x)^2} \text{ sur } \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

**Exercice 3**  $(\star\star)$  – Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. 
$$f(x) = x^2 - 5x - 1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2. 
$$f(x) = 3x^2 - 5x + \frac{1}{2} \operatorname{sur} \mathbb{R} \operatorname{et} F(1) = 0$$

3. 
$$f(x) = x - \frac{1}{x^2} + 1 \text{ sur } ]0, +\infty[\text{ et } F(1) = 2]$$

4. 
$$f(x) = x^3 + \frac{2}{x^2} \text{ sur } ]0, +\infty[\text{ et } F(1) = -\frac{1}{4}]$$

5. 
$$f(x) = 2x^3 - 1 - \frac{1}{x^2} \text{ sur } ]0, +\infty[ \text{ et } F(1) = 1]$$

**Exercice 4**  $(\star\star)$  – Soient F et G les fonctions définies sur  $I=]-1,+\infty[$  par

$$F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$
 et  $G(x) = x - 2 + \frac{1}{x + 1}$ .

Montrer que F et G sont deux primitives sur I d'une même fonction f que l'on précisera.

Exercice 5 (\*\*) – Soit f la fonction définie sur  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$  par  $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{\left(2x^2 + x - 1\right)^2}$ .

Montrer que la fonction G définie sur  $\left| \frac{1}{2}, +\infty \right|$  par  $G(x) = \frac{2x^2}{2x^2 + x - 1}$  est une primitive de la fonction f.

Exercice 6 ( $\star\star\star$ ) – Calculer les intégrales suivantes.

1. 
$$I_1 = \int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 1) dx$$

2. 
$$I_2 = \int_2^6 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1 \right) dx$$

3. 
$$I_3 = \int_{-2}^{3} (x^3 + x - 2) dx$$

4. 
$$I_4 = \int_0^1 (2x+3)^3 dx$$

$$5. \ I_5 = \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5 + 3}} \, \mathrm{d}t$$

6. 
$$I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(2+x^2)^2} \, \mathrm{d}x$$

**Exercice 7**  $(\star \star \star)$  – Soient a un réel et f la fonction définie sur [-1,1] par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Vérifier que  $\int_{-1}^{1} f(x) dx = 1$ .

Exercice 8 (\*\*) – Montrer que la fonction F définie sur ]1, + $\infty$ [ par  $F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ est une primitive de la fonction f définie par  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2}$ . En déduire la valeur de

$$\int_{2}^{3} \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2} \, \mathrm{d}x.$$

**Exercice 9**  $(\star\star)$  – Montrer que la fonction F définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = (x^3 + 1)^4$  est une primitive de la fonction f définie par  $f(x) = 12x^2(x^3 + 1)^3$ . En déduire la valeur de

$$\int_0^1 12x^2(x^3+1)^3 dx.$$