CONCOURS BLANC 1

Exercice 1 –

1. $2x-4=0 \iff 2x=4 \iff x=\dfrac{4}{2}=2$
   Donc $\mathcal{S}=\{2\}$.
2. $4(x-1)+3(2x-1)=0 \iff 4x-4+6x-3=0 \iff 10x=7 \iff x=\dfrac{7}{10}$
   Donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{7}{10}\right\}$.
3. $x^2+2x+3=x(x-1) \iff x^2+2x+3=x^2-x \iff 3x+3=0 \iff 3x=-3 \iff x=-1$
   Donc $\mathcal{S}=\{-1\}$.
4. Je calcule le discriminant $\Delta=49-40=9>0$. Il y a donc deux racines
   $$x_1=\frac{7-3}{2}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{7+3}{2}=5.$$
   Et $\mathcal{S}=\{2,5\}$.
5. $2x(x+1)=-1 \iff 2x^2+2x=-1 \iff 2x^2+2x+1=0$
   Je calcule le discriminant $\Delta=4-8=-4<0$. Il n'y a donc pas de racine. Et $\mathcal{S}=\emptyset$.
6. $x(x+1)-(4x-1)(x+3)=x^2-2x+1 \iff x^2+x-\left(4x^2+12x-x-3\right)=x^2-2x+1$
   $\iff x^2+x-4x^2-12x+x+3-x^2+2x-1=0 \iff -4x^2-8x+2=0$
   Je calcule le discriminant $\Delta=64+32=96>0$. Il y a donc deux racines,
   et en remarquant que $\sqrt{96}=\sqrt{16\times 6}=\sqrt{16}\times\sqrt{6}=4\sqrt{6}$,
   $$x_1=\frac{8-\sqrt{96}}{-8}=\frac{8-4\sqrt{6}}{-8}=\frac{\sqrt{6}}{2}-1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{8+\sqrt{96}}{-8}=\frac{8+4\sqrt{6}}{-8}=-\frac{\sqrt{6}}{2}-1.$$
   Et $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\sqrt{6}}{2}-1,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}-1\right\}$.
7. $-2x+3>0 \iff -2x>-3 \iff x<\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$
   Donc $\mathcal{S}=\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$.
8. Je calcule le discriminant $\Delta=25-24=1>0$. Il y a donc deux racines
   $$x_1=\frac{-5-1}{-2}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-5+1}{-2}=2.$$
   J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x^2+5x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Donc $\mathcal{S}=]2,3[$.

9. $2x(x-2) \leqslant x^2-4 \iff 2x^2-4x \leqslant x^2-4 \iff x^2-4x+4 \leqslant 0$
Je calcule le discriminant $\Delta = 16-16=0$. Il y a donc une unique racine

$$x_0 = \frac{4}{2} = 2.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-2x+4		$+$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

10. $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x-1} = 0 \iff \dfrac{x-1}{(x-1)(x+3)} - \dfrac{2(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 0$
$\iff \dfrac{x-1-2x-6}{(x-1)(x+3)} = 0 \iff \dfrac{-x-7}{(x-1)(x+3)} = 0$
Je commence par chercher les valeurs interdites :

$$(x-1)(x+3)=0 \iff x-1=0 \text{ ou } x+3=0 \iff x=1 \text{ ou } x=-3.$$

Par ailleurs, $-x-7=0 \iff x=-7$. Or -7 n'est pas valeur interdite. Donc $\mathcal{S} = \{-7\}$.

11. $\dfrac{x}{2x-4} + \dfrac{3}{-2x+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{2x(-2x+1)}{(2x-4)(-2x+1)} + \dfrac{6(2x-4)}{(2x-4)(-2x+1)} - \dfrac{(2x-4)(-2x+1)}{(2x-4)(-2x+1)} \leqslant 0$
$\iff \dfrac{-4x^2+2x+12x-24+4x^2-2x-8x+4}{(2x-4)(-2x+1)} \leqslant 0 \iff \dfrac{4x-20}{(2x-4)(-2x+1)} \leqslant 0$
Or $4x-20 \geqslant 0 \iff x \geqslant \dfrac{20}{4} = 5$, $2x-4 \geqslant 0 \iff x \geqslant \dfrac{4}{2} = 2$ et $-2x+1 \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{1}{2}$.
J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		5		$+\infty$
$4x-20$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\dfrac{4x-20}{(2x-4)(-2x+1)}$		$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

Donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{2}, 2\right[\cup [5,+\infty[$.

12. Tout d'abord, $(-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$ donc -1 est une racine du polynôme.
J'effectue alors la division euclidienne de $x^3 - 7x - 6$ par $x - (-1) = x + 1$:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & x^3 & & & - & 7x & -\ 6 & x+1 \\
\cline{8-8}
- & (x^3 & + & x^2) & & & & x^2 - x - 6 \\
\cline{2-7}
 & & & -x^2 & - & 7x & -\ 6 & \\
 & & - & (-x^2 & - & x) & & \\
\cline{3-7}
 & & & & & -6x & -\ 6 & \\
 & & & & - & (-6x & -\ 6) & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Je calcule désormais le discriminant de $x^2 - x - 6$: $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Finalement, j'obtiens donc $\mathcal{S} = \{-2, -1, 3\}$.

13. Tout d'abord, $-2^3 + 2^2 + 22 \times 2 - 40 = -8 + 4 + 44 - 40 = 0$ donc 2 est une racine du polynôme.
J'effectue alors la division euclidienne de $-x^3 + x^2 + 22x - 40$ par $x - 2$:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & -x^3 & + & x^2 & + & 22x & -\ 40 & x-2 \\
\cline{8-8}
- & (-x^3 & + & 2x^2) & & & & -x^2 - x + 20 \\
\cline{2-7}
 & & & -x^2 & + & 22x & -\ 40 & \\
 & & - & (-x^2 & + & 2x) & & \\
\cline{3-7}
 & & & & & 20x & -\ 40 & \\
 & & & & - & (20x & -\ 40) & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Je calcule désormais le discriminant de $-x^2 - x + 20$: $\Delta = 1 + 80 = 81 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{1-9}{-2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+9}{-2} = -5.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-5		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2-x+20$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$-x^3+x^2+22x-40$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement, j'obtiens donc $\mathcal{S} =]-\infty, -5[\cup]2, 4[$.

Exercice 2 –

1. a) Comme $P(-1) = -3 - 7 + 7 + 3 = 0$, le polynôme $P(x)$ se factorise par $x - (-1) = x + 1$.
Donc il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $3 - 1 = 2$ tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$.

Je détermine ce polynôme $Q(x)$ en effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 3x^3 & - & 7x^2 & - & 7x & + & 3 & & x+1 \\
- & \big(3x^3 & + & 3x^2\big) & & & & & & 3x^2-10x+3 \\
\hline
 & & & -10x^2 & - & 7x & + & 3 & & \\
 & & - & \big(-10x^2 & - & 10x\big) & & & & \\
\hline
 & & & & & 3x & + & 3 & & \\
 & & & & - & \big(3x & + & 3\big) & & \\
\hline
 & & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Finalement, $Q(x) = 3x^2 - 10x + 3$ et $P(x) = (x+1)(3x^2 - 10x + 3)$.

b) Il me reste à traiter le polynôme de degré 2. Le discriminant vaut $\Delta = 100 - 36 = 64 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3.$$

Donc l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$ admet trois solutions : $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{3}, 3\right\}$.

2. a) Afin de déterminer l'ensemble de définition, je cherche les valeurs interdites : ce sont les solutions de l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 144 - 144 = 0$. Il y a donc une unique racine

$$x_0 = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) J'établis désormais le tableau de signe de la fraction rationnelle $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x^2-10x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2-12x+12$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Et donc l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ admet pour solutions : $\mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty[$.

Exercice 3 –

1. Les fonctions f et g sont des fonctions polynomiales donc $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$. Par ailleurs,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty.$$

2. Je calcule $f(2)$ et $g(2)$ pour prouver que ces deux valeurs sont égales à 17 :

$$f(2) = 8 + 24 - 10 - 5 = 17 \quad \text{et} \quad g(2) = 8 + 4 + 5 = 17.$$

Donc le point de coordonnées $(2, 17)$ est bien un point des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3. D'après la question précédente, $f(2)-g(2)=17-17=0$. Donc 2 est racine du polynôme $f(x)-g(x)$. Donc il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $3-1=2$ tel que $f(x)-g(x)=(x-2)Q(x)$.
4. Je détermine ce polynôme $Q(x)$ par division euclidienne : $f(x)-g(x)=x^3+4x^2-7x-10$ et

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^3 & + & 4x^2 & - & 7x & - & 10 & x-2 \\ \cline{9-9}
- & \big(x^3 & - & 2x^2\big) & & & & & x^2+6x+5 \\ \cline{2-8}
 & & & 6x^2 & - & 7x & - & 10 & \\
 & & - & \big(6x^2 & - & 12x\big) & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & & 5x & - & 10 & \\
 & & & & - & \big(5x & - & 10\big) & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Finalement, $Q(x)=x^2+6x+5$ et $f(x)-g(x)=(x-2)(x^2+6x+5)$.
Je cherche désormais le signe de $Q(x)$. Le discriminant vaut $\Delta=36-20=16>0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1=\frac{-6-4}{2}=-5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-6+4}{2}=-1.$$

J'établis donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+6x+5		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,
- $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x)\leqslant g(x)$, *i.e.* sur $]-\infty,-5]\cup[-1,2]$,
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x)\geqslant g(x)$, *i.e.* sur $[-5,-1]\cup[2,+\infty[$.

Exercice 4 –

1. a) Par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	2

Le tableau de signe de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$		-2		3		4		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

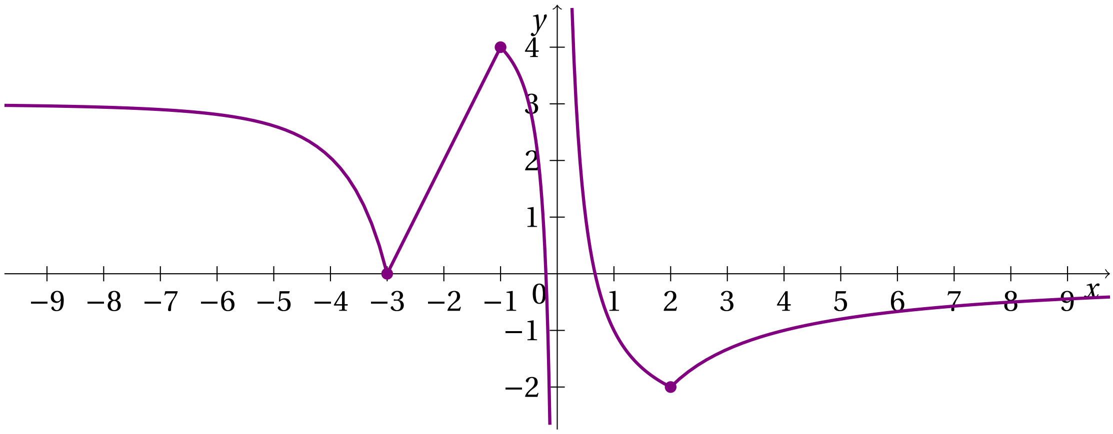
b) (i) FAUX L'équation $f(x)=0$ admet deux solutions $x\approx 3$ et $x\approx 7$.

(ii) FAUX La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$ à la fois en $-\infty$ et en $+\infty$ et deux asymptotes verticales d'équations $x=-2$ et en $x=4$.

(iii) VRAI La fonction f est croissante sur $[-2,2]$ et $f(2)\approx -1$.

(iv) FAUX La fonction f est strictement croissante sur $]-2,4[$ et sur $]4,+\infty[$, mais f n'est même pas définie en 4.

2. a) La courbe suivante correspond au tableau de variation de la fonction g :



b) (i) FAUX L'équation $g(x)=0$ admet une solution en $x=-3$ et une autre solution dans l'intervalle $]-1,0[$.

(ii) VRAI Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$, il y a bien une asymptote verticale d'équation $x=0$.

(iii) VRAI La fonction g est croissante sur $[2,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

(iv) FAUX La fonction g est décroissante sur $]-\infty,-3]$, la notation $[3,0]$ ne décrivant même pas un intervalle.

Exercice 5 –

1. Je calcule u_1 et u_2. À la fin du premier mois, je dois ajouter 1% à la somme à rembourser, *i.e.* $100000\times 0.01=1000$, et retirer les 2000 de mon premier remboursement mensuel. Ainsi

$$u_1=100000+1000-2000=99000.$$

De la même manière, à la fin du deuxième mois, je dois ajouter 1% à la somme à rembourser, *i.e.* $99000\times 0.01=990$, et retirer les 2000 de mon deuxième remboursement mensuel. Ainsi

$$u_2=99000+990-2000=97990.$$

2. La somme qu'il reste à rembourser à la fin du n-ième mois d'emprunt est donnée par u_n. Le taux mensuel étant de 1%, ce montant augmente de 1%. Autrement dit, il est multiplié par 1.01. Après remboursement de 2000 euros, le montant u_{n+1} restant à rembourser est donc donné par

$$u_{n+1}=1.01u_n-2000.$$

3. Pour montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, j'exprime v_{n+1} en fonction de v_n. Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-200000=1.01u_n-2000-200000=1.01(v_n+200000)-2000-200000\\ &=1.01v_n+202000-2000-200000=1.01v_n \end{aligned}$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1.01. Son premier terme est donné par

$$v_0=u_0-200000=100000-200000=-100000.$$

4. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique de premier terme $v_0 = -100000$ et de raison $q = 1.01$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n = -100000 \times \left(1.01\right)^n.$$

Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + 200000 = 200000 - 100000 \times \left(1.01\right)^n.$$

5. Il me suffit de remplacer n par 69 dans la formule explicite trouvée à la question précédente :

$$u_{69} = 200000 - 100000 \times \left(1.01\right)^{69} \approx 200000 - 100000 \times 1.99 = 1000.$$

6. Grâce à la question précédente, après 69 mois, il ne reste plus qu'environ 1000 euros à rembourser. Ainsi il faudra donc 70 mois à cette personne pour rembourser son crédit, avec un dernier remboursement d'un montant d'environ 1000 euros.

Exercice 6 –

1. Grâce aux valeurs données par l'énoncé, je sais que

$$P(S) = 0.3, \qquad P\left(\overline{S}\right) = 1 - 0.3 = 0.7, \qquad P_S(E) = 1 - 0.223 = 0.777,$$

$$P_S\left(\overline{E}\right) = 0.223, \qquad P_{\overline{S}}(E) = 0.827 \quad \text{et} \quad P_{\overline{S}}\left(\overline{E}\right) = 1 - 0.827 = 0.173.$$

2. D'après la formule des probabilités composées,

$$P\left(S \cap \overline{E}\right) = P(S) \times P_S(\overline{E}) = 0.3 \times 0.223 = 0.0669.$$

Autrement dit, la probabilité que la personne interrogée ait plus de 50 ans et qu'elle travaille à temps partiel est de 0.0669, *i.e.* 6.69%.

3. Je cherche ici $P\left(\overline{E}\right)$. D'après la formule des probabilités totales, comme S et $\overline{S}$ forment un système complet d'évènements, alors

$$\begin{aligned} P\left(\overline{E}\right) &= P\left(S \cap \overline{E}\right) + P\left(\overline{S} \cap \overline{E}\right) = P(S) \times P_S\left(\overline{E}\right) + P\left(\overline{S}\right) \times P_{\overline{S}}\left(\overline{E}\right) \\ &= 0.3 \times 0.223 + 0.7 \times 0.173 = 0.0669 + 0.1211 = 0.188. \end{aligned}$$

4. Je cherche ici $P_{\overline{E}}(S)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{\overline{E}}(S) = \frac{P\left(S \cap \overline{E}\right)}{P\left(\overline{E}\right)} = \frac{0.0669}{0.188} = \frac{669}{1880}.$$

Exercice 7 – Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n > 0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $2 > 0$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que $u_n > 0$. Alors

$$u_{n+1} = 2u_n + 4 > 2 \times 0 + 4 = 4 > 0.$$

Donc $u_{n+1} > 0$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_0$ est vraie, alors par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

Exercice 8 –

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2\big(2^n - 1\big)$.

   Initialisation : Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} 2^k = 2^1 = 2$ et $2 \times \big(2^1 - 1\big) = 2 \times 1 = 2$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

   Par hypothèse de récurrence, je sais que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2\big(2^n - 1\big)$. Alors

   $$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} = 2\big(2^n - 1\big) + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 2 = 2\big(2^{n+1} - 1\big).$$

   Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = 2\big(2^{n+1} - 1\big)$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_1$ est vraie, alors par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2\big(2^n - 1\big).$$

2. Je sais que pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

   $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

   Alors pour $q = 2$, j'obtiens

   $$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

   Il me reste alors à retirer le terme correspondant à $k = 0$, puis à mettre 2 en facteur :

   $$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) - 2^0 = \big(2^{n+1} - 1\big) - 1 = 2^{n+1} - 2 = 2\big(2^n - 1\big).$$

Exercice 9 –

1. Il me suffit de remplacer x par -2 :

   $$\lim_{x \to -2} 2x^3 - x^2 + 5x + 6 = 2 \times (-8) - 4 + 5 \times (-2) + 6 = -16 - 4 - 10 + 6 = -24$$

2. Il me suffit de remplacer x par -1 :

   $$\lim_{x \to -1} \frac{x - 2}{2x - 3} = \frac{-1 - 2}{-2 - 3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

3. Je décompose numérateur et dénominateur :

   $$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x \to 2^-} 2x - 1 = 3 \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^-} -2x + 4 = 0^+ \end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{2x - 1}{-2x + 4} = +\infty.$$

4. Je décompose numérateur et dénominateur :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} 3x-1=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x(x+1)=0^+\end{array}\right\}\text{Par quotient,}\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{3x-1}{x(x+1)}=-\infty.$$

5. Je décompose chacun des termes :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} 2=2\\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3}{2x^2}=0\end{array}\right\}\text{Par somme,}\quad \lim_{x\to +\infty} 2-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}=2.$$

6. Je ne regarde que le terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to +\infty} -x^3+5x^2+4x-7=\lim_{x\to +\infty} -x^3=-\infty$$

7. Je ne regarde que le quotient des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2-2x+1}{-4x^3+2x-5}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{-4x^3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3}{-4x}=0^-$$

8. Je décompose chacun des facteurs :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to -\infty} -2x^2+1=\lim\limits_{x\to -\infty} -2x^2=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{x+5}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty} 2= \quad 2\end{array}\right\}\text{Par produit,}\quad \lim_{x\to -\infty}\left(-2x^2+1\right)\times\frac{2x+1}{x+5}=-\infty.$$

9. Je raisonne par composition :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3}{x}=0^+\quad\text{donc}\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{3}{x}+16=16\quad\text{et donc}\quad \lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{3}{x}+16}=\sqrt{16}=4.$$

10. Je raisonne par composition :

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{-3}{-x+2}=+\infty\quad\text{donc}\quad \lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{-3}{-x+2}}=+\infty\quad\text{donc}\quad \lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{-3}{-x+2}}-2=+\infty$$

$$\text{et donc}\quad \lim_{x\to 2^+}\left(\sqrt{\frac{-3}{-x+2}}-2\right)^3=+\infty.$$

Exercice 10 –

1. a) La fonction f est une fraction rationnelle, elle est donc définie partout en dehors de ses valeurs interdites. Celles-ci correspondent à une annulation du dénominateur,

$$\textit{i.e.}\quad 2x-4=0\quad\Longleftrightarrow\quad 2x=4\quad\Longleftrightarrow\quad x=2.$$

   Donc la fonction f est définie sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

   b) Je ne regarde que le quotient des termes de plus haut degré en les bornes infinies :

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x-4}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty.$$

Je décompose numérateur et dénominateur en la valeur interdite :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to2^-} x^2-2x+1 = 1\\ \lim\limits_{x\to2^-} 2x-4=0^-\end{array}\right\}\text{ Par quotient, }\quad \lim_{x\to2^-}\frac{x^2-2x+1}{2x-4}=-\infty.$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to2^+} x^2-2x+1 = 1\\ \lim\limits_{x\to2^+} 2x-4=0^+\end{array}\right\}\text{ Par quotient, }\quad \lim_{x\to2^+}\frac{x^2-2x+1}{2x-4}=+\infty.$$

Graphiquement, cela donne une asymptote verticale d'équation $x=2$ (et possiblement deux asymptotes obliques en $-\infty$ et $+\infty$ mais il reste encore du travail pour le prouver).

c) Je remarque que

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x-4}=\frac{x(x-2)+1}{2x-4}=x\times\frac{x-2}{2(x-2)}+\frac{1}{2x-4}=x\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-4}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x-4},$$

ce qui m'amène à poser $\quad a=\dfrac{1}{2},\qquad b=0\quad$ et $\quad c=1$.

Comme $f(x)-\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2x-4}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x-4}=0$, j'en déduis que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=\dfrac{x}{2}$ est bien asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=x^2-2x+1$ et $v(x)=2x-4$.
Comme $u'(x)=2x-2$ et $v'(x)=2$, alors

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{(2x-2)(2x-4)-2(x^2-2x+1)}{(2x-4)^2}\\&=\frac{4x^2-8x-4x+8-2x^2+4x-2}{(2x-4)^2}=\frac{2x^2-8x+6}{(2x-4)^2}.\end{aligned}$$

b) Pour étudier les variations de f, il faut commencer par étudier le signe de $f'(x)$.
Pour cela, je calcule le discriminant du numérateur : $\quad \Delta=64-48=16>0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1=\frac{8-4}{4}=1\quad\text{ et }\quad x_2=\frac{8+4}{4}=3.$$

Par ailleurs, puisque $2x-4=0 \iff x=2$, je peux déduire le tableau de signe de $f'(x)$ et par la même occasion, le tableau de variation de f.
Aussi, $\quad f(1)=\dfrac{1^2-2\times1+1}{2\times1-4}=\dfrac{0}{-2}=0\quad$ et $\quad f(3)=\dfrac{3^2-2\times3+1}{2\times3-4}=\dfrac{4}{2}=2.$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$2x^2-8x+6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-4)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

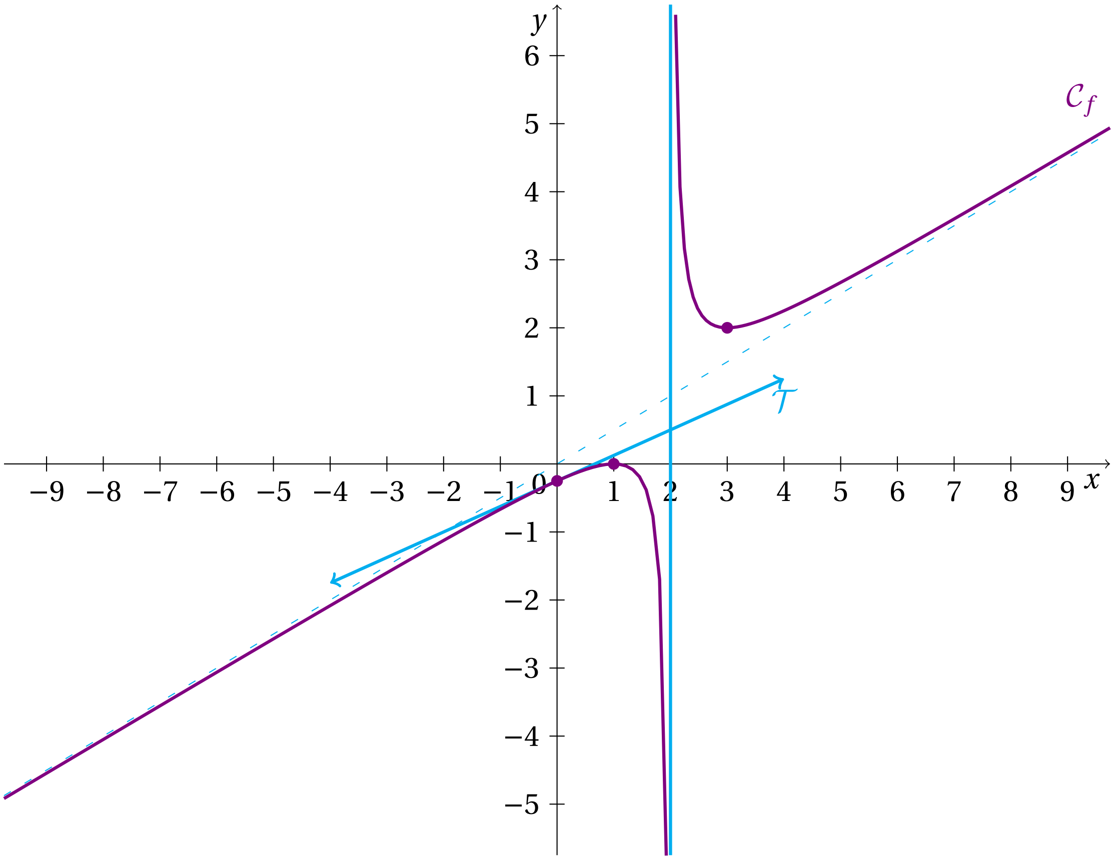
c) Une équation de la tangente est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Ici $a = 0$ et

$$f(0) = \frac{0^2 - 2\times 0 + 1}{2\times 0 - 4} = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{2\times 0^2 - 8\times 0 + 6}{(2\times 0 - 4)^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Donc une équation de la tangente en 0 est donnée par

$$y = \frac{3}{8}(x-0) - \frac{1}{4}, \qquad \textit{i.e.} \quad y = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}.$$

3. Je peux désormais tracer l'allure de la courbe en me servant des asymptotes, de la tangente et du tableau de variation :



Exercice 11 –

Partie A

1. La fonction f est une fonction polynomiale, je dérive donc terme à terme et j'obtiens

$$f'(x) = 2x - 1.$$

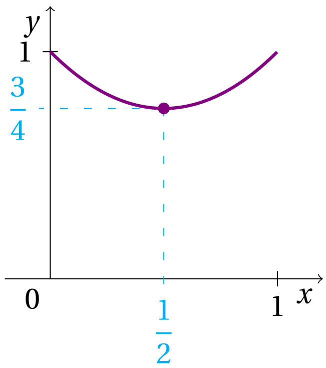
Or $2x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{1}{2}$.

J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f.

Aussi, $f(0) = 0^2 + 1 - 0 = 1$, $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ et $f(1) = 1$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1

2. D'après le tableau de variation, la fonction admet un minimum local pour $x = \frac{1}{2}$ de valeur $\frac{3}{4}$.
   Elle n'admet pas de maximum local.
3. D'après le tableau de variation, pour tout $x \in [0,1]$,
$$\frac{3}{4} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$
   En particulier, pour tout $x \in [0,1]$, $\quad f(x) \in [0,1]$.
4. La fonction f est une fonction polynomiale de degré 2, sa courbe suit donc une portion de parabole :



Partie B

1. J'évalue la fonction en le terme précédent de la suite. Ainsi
$$u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{7}{9} \quad \text{et} \quad u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81} + 1 - \frac{7}{9} = \frac{67}{81}.$$
2. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad u_n \in [0,1]$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad u_0 = \frac{1}{3} \quad$ et $\quad \frac{1}{3} \in [0,1]$. $\quad$ Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, je sais que $\quad u_n \in [0,1]$.
   D'après la Partie A, je sais que pour tout $x \in [0,1]$, $\quad f(x) \in [0,1]$. $\quad$ Alors
$$f(u_n) \in [0,1], \qquad \textit{i.e.} \quad u_{n+1} \in [0,1].$$
   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
   Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_0$ est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, *i.e.*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1].$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. J'étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 - u_n - u_n = u_n^2 + 1 - 2u_n = (u_n - 1)^2 \geqslant 0.$$
   Ainsi $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante par la question précédente et majorée par 1 par la question d'avant, donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Je note ℓ sa limite. Puisque $u_{n+1} = u_n^2 + 1 - u_n$, alors en passant à la limite, j'obtiens que

$$\ell = \ell^2 + 1 - \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\ell - 1)^2 = 0.$$

Donc $\ell = 1$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercice 12 –

1. Grâce aux valeurs données par l'énoncé,

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0.2.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'évènements, alors

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= 0.7 \times P(A_n) + 0.2 \times P(\overline{A_n}) = 0.7 \times P(A_n) + 0.2 \times \big(1 - P(A_n)\big) \\ &= 0.7P(A_n) + 0.2 - 0.2P(A_n) = 0.5P(A_n) + 0.2 \end{aligned}$$

Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, j'ai bien montré que $p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.

3. a) Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique, j'exprime u_{n+1} en fonction de u_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.4 = 0.5p_n + 0.2 - 0.4 = 0.5(u_n + 0.4) + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n + 0.2 + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n.$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.5. Son premier terme est donné par

$$u_1 = p_1 - 0.4 = 0.2 - 0.4 = -0.2.$$

b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = 0.5$ et de premier terme $u_1 = -0.2$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = u_n + 0.4 = 0.4 - 0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique, de premier terme $u_1 = -0.2 < 0$ et de raison $q = 0.5 \in \left]0,1\right[$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de termes négatifs.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + 0.4$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ partage la même variation que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, elle est donc elle aussi croissante.

5. Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, la limite de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est 0. Alors comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + 0.4$, j'en déduis que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + 0.4 = 0 + 0.4 = 0.4.$$

Exercice 13 –

1. Il me suffit d'initialiser le terme u_0 dans une variable `u` puis d'utiliser une boucle `for` pour calculer les neuf termes suivants :

```
u=10
print(u)
for i in range(9):
    u=u/2+1/u
    print(u)
```

2. Cette fois, je dois utiliser une boucle `while` pour que celle-ci s'arrête dès lors que $e - u_n < 0.001$.

```
from numpy import e
n=0
u=0
while e-u>0.001:
    n+=1
    u=(1+1/n)**n
print(n)
```

3. Cette fois encore, je dois utiliser une boucle `while`.

```
n=0
u=32000
while u<40000:
    n+=1
    u*=1.01
print(n)
```