

EXERCICES — CHAPITRE 11

Exercice 1 – Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$

2. $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

3. $f(x) = \frac{1}{x^3}$

4. $f(x) = (7x + 1)^8$

5. $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^4}$

6. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}}$

Exercice 2 – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur \mathbf{R} .

1. $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$

2. $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$

3. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 1$

Exercice 3 – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$.

1. $f(x) = 3x + \frac{3}{x^2}$

2. $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$

Exercice 4 – Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 - 5x - 1$ et $F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

2. f est définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 3x^2 - 5x + \frac{1}{2}$ et $F(1) = 0$.

3. f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{1}{x^2} + 1$ et $F(1) = 2$.

4. f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 + \frac{2}{x^2}$ et $F(1) = -\frac{1}{4}$.

5. f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 1 - \frac{1}{x^2}$ et $F(1) = 1$.

Exercice 5 – Soient F et G les fonctions définies sur $] - 1, +\infty[$ par $F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ et $G(x) = x - 2 + \frac{1}{x + 1}$. Montrer que F et G sont deux primitives sur $] - 1, +\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

Exercice 6 – Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(2x^2 + x - 1)^2}$.

Montrer que la fonction G définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $G(x) = \frac{2x^2}{2x^2 + x - 1}$ est une primitive de la fonction f .

Exercice 7 – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f .

1. f est définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{3}{(2x - 1)^3}$.

2. f est définie sur \mathbf{R} par $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 3)^3$.

3. f est définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2}$.

4. f est définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{4}{(1 - 2x)^2}$.

Exercice 8 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $A = \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 1) dx,$

2. $B = \int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1 \right) dx.$

Exercice 9 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_{-2}^3 (x^3 + x - 2) dx,$

3. $I_3 = \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5 + 3}} dt.$

2. $I_2 = \int_3^{11} \sqrt{2x + 3} dx,$

Exercice 10 – Montrer que la fonction F définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_2^3 \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2} dx.$$

Exercice 11 – Montrer que la fonction F définie sur \mathbf{R} par $F(x) = (x^3 + 1)^4$ est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = 12x^2(x^3 + 1)^3.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^1 12x^2(x^3 + 1)^3 \, dx.$$