10 | Variables aléatoires réelles

I – Généralités sur les variables aléatoires

1 – Définitions et exemples

Il arrive souvent qu'à chaque résultat d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers Ω (l'ensemble des résultats possibles) dans $\mathbf{R}$. On peut par exemple considérer le gain obtenu à l'issu d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.

Définition 10.1 – Une **variable aléatoire** X est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
On appelle **support** de X, et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.

Exemple 10.2 – Tout au long de ce chapitre, on s'appuiera sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1, on gagne 4€, si on a un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et
$$X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}.$$
2. On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des deux résultats obtenus. X est une variable aléatoire et
$$X(\Omega) = [\![2; 12]\!] \qquad \textit{(on obtient au minimum 2 et au maximum 12).}$$

2 – Évènements associés à une variable aléatoire

Définition 10.3 – Soit X une variable aléatoire sur Ω et $x \in \mathbf{R}$. On note
$$[X = x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\},$$
$$[X < x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) < x\},$$
$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\},$$
$$[X > x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) > x\},$$
$$[X \geq x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \geq x\}.$$
Si x et y sont deux réels tels que $x < y$ alors on note
$$\left[x \leq X \leq y\right] = \left\{\omega \in \Omega; x \leq X(\omega) \leq y\right\}.$$
Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbf{R}$, on note
$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in I\}.$$

Exemple 10.4 – Calculer $P([X = 3])$ et $P([X \leq 2])$ dans les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. On gagne 3€ dans le cas où l'on obtient le tirage 1. Ainsi,
$$P(X=3)=P(\{1\})=\frac{1}{5}.$$
Par ailleurs, on gagne moins de 2€ dans le cas où l'on obtient n'importe quel tirage différent de 1. Autrement dit, si l'on obtient un 2, un 3, un 4 ou un 5. Ainsi,
$$P(X\leq 2)=P(\{2;3;4;5\})=\frac{4}{5}.$$

2. La somme des deux dés vaut 3 si l'on a obtenu $(1;2)$ ou $(2;1)$ avec les deux dés. Puisqu'il y a au total 36 issues possibles lorsque l'on lance les deux dés (tous les tirages $(1;1)$, $(1;2)$, …, $(1;6)$, …, $(6;1)$, $(6;2)$, …, $(6;6)$), on a :
$$P(X=3)=P(\{(1;2);(2;1)\})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$
Par ailleurs, la somme des deux dés est inférieure ou égale à 2 seulement lorsque l'on obtient $(1;1)$ avec les deux dés. Ainsi,
$$P(X\leq 2)=P(\{(1;1)\})=\frac{1}{36}.$$

Proposition 10.5

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Alors, l'ensemble
$$\big\{[X=x]\,;x\in X(\Omega)\big\}$$
forme un système complet d'évènements. En particulier, on a
$$\sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\big)=1.$$

Exemple 10.6 – On reprend les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. Un système complet d'évènements est $\big\{[X=-1]\,;[X=1]\,;[X=3]\big\}$.
2. Un système complet d'évènements est $\big\{[X=2];[X=3];[X=4];\dots;[X=12]\big\}$.

Remarque 10.7 – Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P([X=x])$ en $P(X=x)$, et de même pour les autres ensembles.

3 – Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 10.8 – Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi** de la variable aléatoire X, la donnée des $P(X=x)$ pour tout réel x.

Méthode 10.9 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

- On donne l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.
- On calcule $P(X=x)$ pour tout $x\in X(\Omega)$.

On résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec, sur la 1ère ligne, les valeurs prises par X, et sur la 2ème ligne les probabilités correspondantes.

Exemple 10.10 – On reprend les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. La loi de la variable aléatoire X est donnée par

$$P(X=-1)=\frac{2}{5},\qquad P(X=1)=\frac{2}{5},\qquad P(X=3)=\frac{1}{5}.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant.

x	-1	1	3
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. On a

$$P(X=2)=P(\{(1;1)\})=\frac{1}{36},\qquad P(X=3)=P(\{(1;2);(2;1)\})=\frac{2}{36}$$

$$P(X=4)=P(\{(1;3);(2;2);(3;1)\})=\frac{3}{36}\qquad \text{etc.}$$

De manière générale, on a

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarque 10.11 – On n'oubliera pas de vérifier **à chaque fois** que la somme des probabilités inscrites dans le tableau fait 1.

4 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition 10.12 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X et on note F_X la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$F_X(x)=P(X\leq x)\in[0;1]$$

Proposition 10.13

Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ avec $x_1<x_2<\cdots<x_n$. Alors

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<x_1,\\ P(X=x_1)+\cdots+P(X=x_k) & \text{si } x_k\leq x<x_{k+1},\\ 1 & \text{si } x_n\leq x.\end{cases}$$

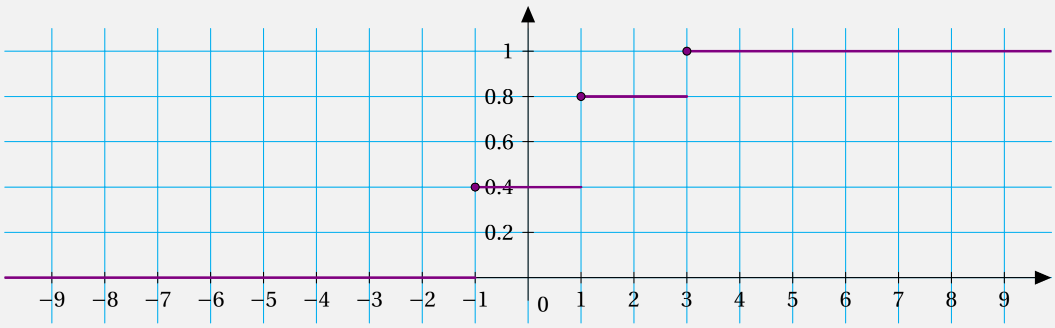
En particulier, F_X est constante sur $[x_k;x_{k+1}[$.

Exemple 10.14 – Calculer la fonction de répartition de X dans les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. On a vu que $X(\Omega)=\{-1;1;3\}$. Dès lors,
   - Si $x<-1$, alors $F_X(x)=0$.
   - Si $-1\leq x<1$, alors $F_X(x)=P(X=-1)=\frac{2}{5}$.
   - Si $1\leq x<3$, alors $F_X(x)=P(X=-1)+P(X=1)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$.
   - Si $x\geq 3$, alors $F_X(x)=1$.

Ce que l'on peut résumer par

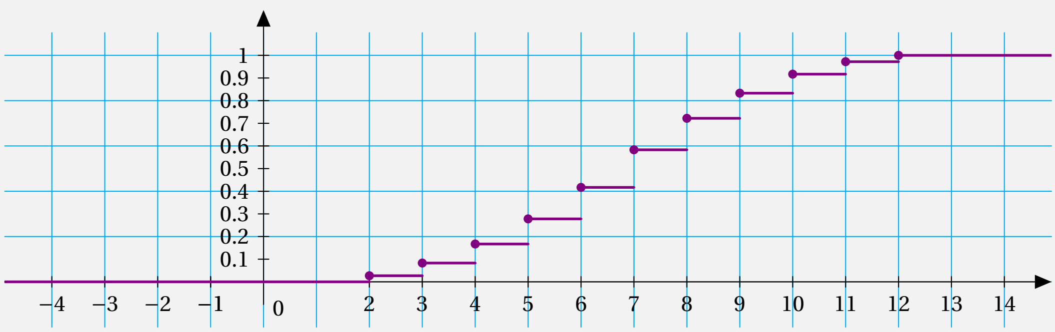
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{2}{5} & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ \frac{4}{5} & \text{si } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$



2. On a vu que $X(\Omega) = [\![2;12]\!]$. Dès lors,
   - Si $x < 2$, alors $F_X(x) = 0$.
   - Si $2 \leq x < 3$, alors $F_X(x) = P(X=2) = \frac{1}{36}$.
   - Si $3 \leq x < 4$, alors $F_X(x) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$.
   - Si $4 \leq x < 5$, alors $F_X(x) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$.
   - etc.

   Ce que l'on peut résumer par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \frac{1}{36} & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ \frac{3}{36} & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ \frac{6}{36} & \text{si } 4 \leq x < 5, \\ \text{etc.} & \\ \frac{35}{36} & \text{si } 11 \leq x < 12, \\ 1 & \text{si } x \geq 12. \end{cases}$$



Proposition 10.15

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X. Autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

II – Moments d'une variable aléatoire finie

1 – Espérance

Définition 10.16 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

On appelle espérance mathématique de X le réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p(X=x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_k \times p_k.$$

Remarque 10.17 –

- L'espérance $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs x_i affectées des fréquences p_i.
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $E(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois. Le signe de $E(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre. Si $E(X)=0$, on dit que le jeu est équitable.

Exemple 10.18 – Calculer $E(X)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 10.2.

1. $$E(X) = -1 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

2. $$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + \cdots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7.$$

Proposition 10.19

Soient X et Y deux variables aléatoires finies définies sur Ω. Soit a et $b \in \mathbf{R}$. Alors,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX+b) = aE(X) + b.$$

Exemple 10.20 – On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x+3$ et $Y = g(X) = 2X+3$. Déterminer l'espérance de Y.
$X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et le dé étant non-truqué, on est en situation d'équiprobabilité :
$\forall k \in [\![1;6]\!], \quad P(X=k) = \dfrac{1}{6}$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

On en déduit que

$$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 7 + 3 = 10.$$

Théorème 10.21 – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$. Alors, l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i).$$

Exemple 10.22 – On considère la fonction $g(x) = x^2$. Calculer $E\big(g(X)\big)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 10.2.

1. D'après le théorème de transfert, on a

$$E\big(g(X)\big) = E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{2}{5} + 1^2 \times \frac{2}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} = \frac{13}{5}.$$

2. D'après le théorème de transfert, on a

$$E\big(g(X)\big) = E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + \dots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}.$$

Remarque 10.23 – Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.

2 – Variance

Définition 10.24 – Soit X une variable aléatoire finie.

- On appelle **variance** de X le réel, noté $V(X)$, défini par

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i).$$

- On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque 10.25 – La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Théorème 10.26 – Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire finie. On a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Méthode 10.27 – Calculer la variance d'une variable aléatoire

- On calcule $E(X^2)$ grâce au théorème de transfert.
- Puis on utilise la formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple 10.28 – Calculer $V(X)$ pour les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. On a déjà calculé $E(X^2)$ dans la partie précédente. On a $E(X^2) = \dfrac{13}{5}$. Par ailleurs, $E(X) = \dfrac{3}{5}$ donc $E(X)^2 = \dfrac{9}{25}$. Dès lors, d'après la formule de König-Huygens, on a
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{13}{5} - \frac{9}{25} = \frac{65}{25} - \frac{9}{25} = \frac{56}{25}.$$

2. On a déjà calculé $E(X^2)$ dans la partie précédente. On a $E(X^2) = \dfrac{329}{6}$. Par ailleurs, $E(X) = 7$ donc $E(X)^2 = 49$. Dès lors, d'après la formule de König-Huygens, on a
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{329}{6} - \frac{294}{6} = \frac{35}{6}.$$

Proposition 10.29

Soit X une variable aléatoire finie et soient a et b deux réels. Alors
$$V(aX+b) = a^2V(X).$$
En particulier,
$$V(X+b) = V(X).$$

Remarque 10.30 – Contrairement à l'espérance, la variance **n'**est **pas** linéaire.

Exemple 10.31 – On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$. Calculer la variance de X puis celle de Y.

$X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et le dé étant non-truqué, on est en situation d'équiprobabilité :
$\forall k \in [\![1;6]\!], \quad P(X=k) = \dfrac{1}{6}$. Dès lors,
$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}.$$
De même,
$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2P(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{91}{6}.$$
Dès lors, d'après la formule de König-Huygens,
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}.$$
On a donc, d'après la Proposition 10.29,
$$V(Y) = V(2X+3) = 2^2V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}.$$

III – Lois usuelles

1 – Loi uniforme

Définition 10.32 – Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a < b$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![a;b]\!]$ lorsque $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et que

$$\forall k \in [\![a;b]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![a;b]\!]\right)$.

Exemple 10.33 – Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. On a $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;6]\!]\right)$ car $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;6]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{6}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu. On a $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$ car $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{n}$.

Proposition 10.34

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$, alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Proposition 10.35

Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a < b$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![a;b]\!]\right)$ alors $X - a + 1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;b-a+1]\!])$ et donc

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

2 – Loi de Bernoulli

Définition 10.36 – Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in]0;1[$ lorsqu'il n'y a que deux issues possibles $X(\Omega) = \{0;1\}$ et

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : une que l'on qualifie de « succès », de probabilité p, et l'autre que l'on qualifie « d'échec », de probabilité $1-p$. On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un « succès », la variable aléatoire prend la valeur $X = 1$, et sinon $X = 0$.

Exemple 10.37 – On lance une pièce équilibré et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est « Pile » et 0 sinon. Alors, $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Proposition 10.38

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

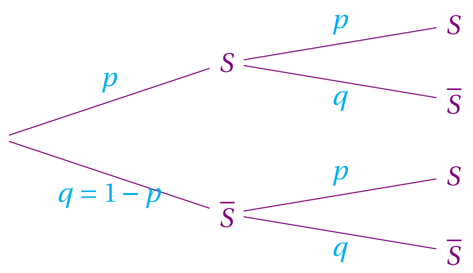
3 – Loi binomiale

Définition 10.39 – L'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p de manière indépendante est appelée un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves de ce schéma de Bernoulli suit une **loi binomiale** de paramètres n et p. On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 10.40 – On lance 10 fois de suite une pièce équilibrée et on note X le nombre de « Pile » obtenus. On a alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10, \frac{1}{2})$.

Dans le cas où $n = 2$ ou 3, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.

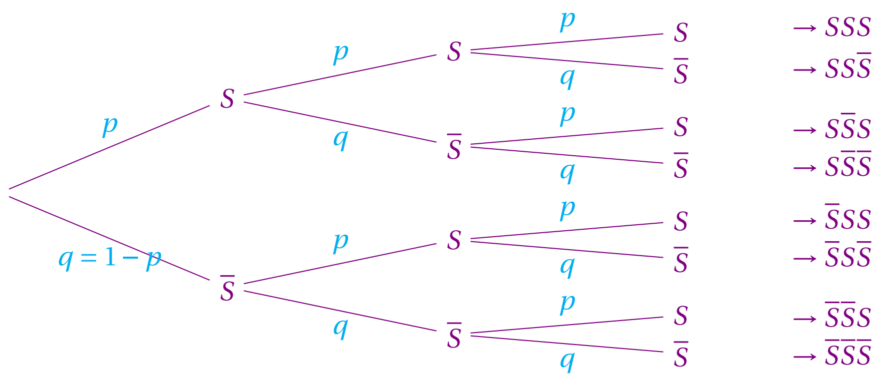
1. Cas $n = 2$
   On répète deux épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de façon indépendante.



   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(2;p)$ de paramètres $n = 2$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2
$P(X=k)$	q^2	$2 \times p \times q$	p^2

2. Cas $n = 3$
   On répète trois épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de façon indépendante.
   L'expérience comporte $2^3 = 8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres
   $$\left\{SSS, SS\overline{S}, S\overline{S}S, \overline{S}SS, S\overline{S}\,\overline{S}, \overline{S}S\overline{S}, \overline{S}\,\overline{S}S, \overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\right\}.$$
   Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès, on dresse un arbre et on compte le nombre d'issues contenant k succès.



La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3;p)$ de paramètres $n=3$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X=k)$	q^3	$3\times p\times q^2$	$3\times p^2\times q$	p^3

Définition 10.41 – Soit n un entier naturel non-nul et k un entier tel que $0\leq k\leq n$.
Si on représente par un arbre une série de n épreuves de Bernoulli, le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves répétées.

Remarque 10.42 –

- Un seul chemin permet d'obtenir 0 succès ou n succès consécutifs, donc $\binom{n}{0}=1$ et $\binom{n}{n}=1$.
- Il y a n chemins différents qui permettent d'obtenir un seul succès. Ainsi, $\binom{n}{1}=n$.

Proposition 10.43

Pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots\big(n-(k+1)\big)}{k!}.$$

Proposition 10.44

Pour tout $n\in\mathbf{N}$ et pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, on a

- relation de symétrie des coefficients :
$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}.$$
- formule du triangle de Pascal :
$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

Remarque 10.45 – La formule du triangle de Pascal permet de déterminer les coefficients binomiaux de proche en proche.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Exemple 10.46 – Calculer les coefficients binomiaux suivants.

- $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4\times 3}{2\times 1} = 6$
- $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5\times 4}{2\times 1} = 10$
- $\binom{11}{1} = 11$
- $\binom{3}{0} = 1$

Proposition 10.47

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p. Alors, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ où } q = 1-p.$$

Proposition 10.48

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0;1[$. Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Exemple 10.49 – Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients choisissent l'option « Livraison Express ». On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons. On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

1. Déterminer la loi de X en justifiant soigneusement.
   X compte le nombre de réalisations de l'évènement succès « le bon de commande comprend la mention « Livraison Express » » de probabilité $0,4$ lors de la répétition de 30 expériences identiques et indépendantes. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,4$.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et interpréter le résultat.
   Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(30;0,4)$, on a d'après le cours que

   $$E(x) = 30 \times 0,4 = 12.$$

   Cela signifie que, sur un grand nombre de prélèvements de 30 bons, on trouve en moyenne 12 bons de commande avec la mention « Livraison Express ».

4 – Formule du binôme de Newton

Théorème 10.50 – Formule du binôme de Newton

Soient a et b dans $\mathbf{R}$ et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 10.51 – $(2+x)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 \times x + 3 \times 2 \times x^2 + x^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3.$