

ECRICOME 2017

Exercice 1 –

Partie I – Calcul matriciel

1. Calculons le produit PQ .

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_3.$$

Par conséquent, on a $P \times \left(\frac{1}{6}Q\right) = I_3$, ce qui suffit à prouver que la matrice P est inversible et que son inverse vaut $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$.

2. Notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le vecteur X_1 est non-nul et $MX_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = 5X_1$.

Ainsi X_1 est vecteur propre de la matrice M , associé à la valeur propre 5.

Notons $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le vecteur X_2 est non-nul et $MX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2$.

Ainsi X_2 est vecteur propre de la matrice M , associé à la valeur propre 1.

Notons $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Le vecteur X_3 est non-nul et $MX_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2X_3$.

Ainsi X_3 est vecteur propre de la matrice M , associé à la valeur propre 2.

3. La matrice M est une matrice de taille 3×3 et elle possède trois valeurs propres distinctes. On en déduit qu'elle est diagonalisable. En outre, on remarque que la matrice P contient la juxtaposition des trois vecteurs propres X_1 , X_2 et X_3 .

Ainsi, en posant D la matrice diagonale composée des valeurs propres de M : $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

on a que

$$M = PDP^{-1} = PD\left(\frac{1}{6}Q\right) = \frac{1}{6}PDQ.$$

4. Notons \mathcal{P}_n la proposition : " $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{6}PD^0Q = \frac{1}{6}PI_3Q = \frac{1}{6}PQ = I_3,$$

donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que \mathcal{P}_n est vraie et montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie aussi. Par hypothèse de récurrence, $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$ et d'après la question 3, on sait $M = \frac{1}{6}PDQ$. Par conséquent,

$$M^{n+1} = M^n M = \left(\frac{1}{6}PD^nQ\right)\left(\frac{1}{6}PDQ\right) = \frac{1}{6}PD^n\left(Q \times \frac{1}{6}P\right)DQ.$$

Comme $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$, on a $Q \times \frac{1}{6}P = I_3$ et donc

$$M^{n+1} = \frac{1}{6}PD^nI_3DQ = \frac{1}{6}PD^nDQ = \frac{1}{6}PD^{n+1}Q.$$

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie et ainsi la proposition est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que \mathcal{P}_0 est vraie, alors, par principe de récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout n dans \mathbb{N} , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{6}PD^nQ.$$

5. La première colonne de la matrice M^n est obtenue en effectuant le produit de la matrice M^n par la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, on sait que $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$, et comme la matrice D est diagonale, alors pour tout n dans \mathbb{N} ,

$$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

En effectuant successivement les produits de matrices de droite à gauche dans le calcul suivant, on obtient successivement

$$\begin{aligned} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{6}PD^nQ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n \\ 9 \\ -2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n + 9 - 2^{n+2} \\ 2 \times 5^n - 2^{n+1} \\ 3 \times 5^n - 9 + 3 \times 2^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n + 9 - 2 \times 2^{n+1} \\ 2 \times 5^n - 2^{n+1} \\ 3 \times 5^n - 9 + 3 \times 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En conclusion, la première colonne de la matrice M^n est bien

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

Partie II –   tude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

1. L'athlète commence son entraînement par la natation donc

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_0 = 0.$$

D'après les règles de l'entraînement indiquées dans l'énoncé, puisque l'athlète a pratiqué la natation le jour 0, il pratiquera au jour 1 :

- la natation avec une probabilité 1/5,
- le cyclisme avec une probabilité 1/5,
- la course à pied avec une probabilité 3/5.

Autrement dit,

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad b_1 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad c_1 = \frac{3}{5}.$$

2. Soit un entier naturel n dans \mathbb{N} fixé. Les   v  nements A_n , B_n et C_n forment un système complet d'  v  nements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{5} + b_n \times \frac{2}{5} + c_n \times 0 = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n. \end{aligned}$$

De la même manière, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales, on obtient

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n$$

et

$$c_{n+1} = P(C_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n.$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n.$$

3. On a

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n \\ \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \\ \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que pour obtenir $A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, il suffit de poser

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}M.$$

On remarque alors que la matrice A s'exprime comme un multiple de la matrice M de la Partie I. Pour résumer, en posant $A = \frac{1}{5}M$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

4. Pour simplifier, nous noterons Y_n la matrice colonne $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. L'expression à démontrer devient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors que la question précédente se réécrit $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = \frac{1}{5} M Y_n$.

On procède alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Notons \mathcal{P}_n la proposition : " $Y_n = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$Y_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{5^0} M^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times I_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que \mathcal{P}_n est vraie et montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie aussi. Par

hypothèse de récurrence, $Y_n = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'après la question 3, on sait $Y_{n+1} = \frac{1}{5} M Y_n$.

Par conséquent,

$$Y_{n+1} = M Y_n = \frac{1}{5} M \times \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n+1}} M^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie et ainsi la proposition est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que \mathcal{P}_0 est vraie, alors, par principe de récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout n dans \mathbb{N} , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Soit n dans \mathbb{N} . D'après la question 5 de la Partie I, on sait que

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

Alors, en combinant avec la question précédente,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix},$$

et par identification des coefficients, il vient

$$a_n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5^n} \times (5^n - 2^{n+2} + 9) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

$$b_n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5^n} \times (2(5^n - 2^n)) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right),$$

$$c_n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5^n} \times (3(5^n + 2^{n+1}) - 9) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n, \quad b_n = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

6. On cherche les limites de ces trois suites. Or il s'agit de sommes de suites géométriques dont on connaît les limites.

Comme $\frac{2}{5} \in]-1, 1[$ et $\frac{1}{5} \in]-1, 1[$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Par conséquent, par somme de limites, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{6}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 –

Partie I – Tirages dans une urne

1. (a) En considérant comme succès l'évènement "piocher une boule noire", la variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition successive de 400 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \frac{1}{4}$, puisque une seule boule parmi les quatre boules de l'urne est noire. En particulier, on a $X(\Omega) = \llbracket 0, 400 \rrbracket$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}.$$

- (b) Puisque X suit une loi binomiale, on a

$$E(X) = np = 400 \times \frac{1}{4} = 100 \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = 100 \times \frac{3}{4} = 75.$$

2. (a) Y compte cette fois le nombre de tirages nécessaires avant d'obtenir un premier succès, lors de la répétition successive d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc Y suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{4}$. En particulier, on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in Y(\Omega)$,

$$P(Y = k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

- (b) Puisque Y suit une loi géométrique, on a

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \times 16 = 12.$$

3. (a) La variable aléatoire Z ne semble pas suivre une loi usuelle. En revanche, il s'agit d'une variable aléatoire discrète finie. En effet, il est clair que l'on a $Z(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Ainsi, pour déterminer la loi de Z , il suffit de calculer $P(Z = 1)$, $P(Z = 2)$, $P(Z = 3)$ et $P(Z = 4)$, en utilisant la formule des probabilités composées.

On obtient alors

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= \frac{1}{4}, & P(Z = 2) &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, \\ P(Z = 3) &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, & P(Z = 4) &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Alors, après calculs, on remarque que Z suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.

- (b) Puisque Z suit une loi uniforme, on a

$$E(Z) = \frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{4^2-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

Partie II – Tirages dans une urne choisie au hasard

- La variable aléatoire T compte le nombre de boules noires obtenues après deux tirages. On peut avoir pioch   zéro, une ou deux boules noires. Donc $T(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$.
- Notons P l'  v  nement "obtenir Pile", F l'  v  nement "obtenir Face", et, pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, N_k l'  v  nement "obtenir une boule noire au k -ième tirage" et B_k l'  v  nement "obtenir une boule blanche au k -ième tirage".

Alors, d'après la formule des probabilités totales, comme les   v  nements P et F forment un système complet d'  v  nements,

$$\begin{aligned} P(T = 0) &= P(F) \times P_F(B_1 \cap B_2) + P(P) \times P_P(B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{9}{32} = \frac{13}{32}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} P(T = 2) &= P(F) \times P_F(N_1 \cap N_2) + P(P) \times P_P(N_1 \cap N_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}. \end{aligned}$$

Et donc

$$P(T = 1) = 1 - P(T = 0) - P(T = 2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}.$$

3. Comme il s'agit d'une variable aléatoire discrète finie, on a

$$E(T) = 0 \times P(T = 0) + 1 \times P(T = 1) + 2 \times P(T = 2) = 0 \times \frac{13}{32} + 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Si la variable aléatoire T suivait une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, comme $T(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$, nécessairement on aurait $n = 2$. Alors l'espérance serait $E = np = 2p$, ce qui force $p = \frac{3}{8}$.

Ainsi la seule loi binomiale possible serait $\mathcal{B}\left(2, \frac{3}{8}\right)$.

Or dans ce cas, on devrait avoir $P(T = 2) = p^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$, ce qui n'est pas le cas puisque

$P(T = 2) = \frac{5}{32}$. On en déduit donc que T ne suit pas une loi binomiale.

4. Calculons $P_{T=1}(P)$ et $P_{T=1}(F)$, puis comparons les. On a

$$P_{T=1}(P) = \frac{P(P \cap \{T=1\})}{P(T=1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right)}{\frac{7}{16}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}.$$

Et donc

$$P_{T=1}(F) = 1 - P_{T=1}(P) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

Il est donc plus probable d'avoir obtenu Face que Pile si une seule boule noire est pioch  e.

5.

```
T = 0
if grand(1,1,"uin",1,2) == 1 then
    for k = 1 : 2
        if grand(1,1,"uin",1,4) < 2 then
            T = T+1
        end
    end
else
    for k = 1 : 2
        if grand(1,1,"uin",1,4) < 3 then
            T = T+1
        end
    end
end
disp(T,"Une simulation de T donne :")
```

Exercice 3 –

Partie I –   tude d'une fonction

- Notons D_f l'ensemble de définition de la fonction f . On sait que la fonction \ln est définie sur \mathbb{R}_+^* , donc $D_f \subset \mathbb{R}_+^*$. L'autre condition est que x^3 ne doit pas s'annuler sur D_f donc $0 \notin D_f$. Ainsi on obtient que l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- Soit $x > 0$. On a directement que $x^3 > 0$ donc on a les équivalences suivantes

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{4\ln(x)}{x^3} \geq 0 \iff \ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1.$$

- On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} 4\ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0^+$ donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
On en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .

Par ailleurs, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\ln(x)}{x^3} = 0$, i.e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$.

- La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = 4\ln(x)$ et $v(x) = x^3$.
Comme $u'(x) = \frac{4}{x}$ et $v'(x) = 3x^2$, on en déduit que

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{4}{x} \times x^3 - 4\ln(x) \times 3x^2}{x^6} = \frac{4(1 - 3\ln(x))}{x^4}.$$

Ainsi $f'(x)$ est du signe de $1 - 3\ln(x)$, car 4 et x^4 sont toujours positifs. Or

$$1 - 3\ln(x) \geq 0 \iff 3\ln(x) \leq 1 \iff \ln(x) \leq \frac{1}{3} \iff x \leq e^{\frac{1}{3}},$$

et

$$f\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{4\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3} = \frac{4 \times \frac{1}{3}}{e} = \frac{4}{3e}.$$

De toutes ces informations, on déduit le tableau de variation de f .

x	0	$e^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{4}{3e}$	0

Ainsi f admet le maximum $\frac{4}{3e}$ comme unique extremum, atteint lorsque $x = e^{\frac{1}{3}}$.

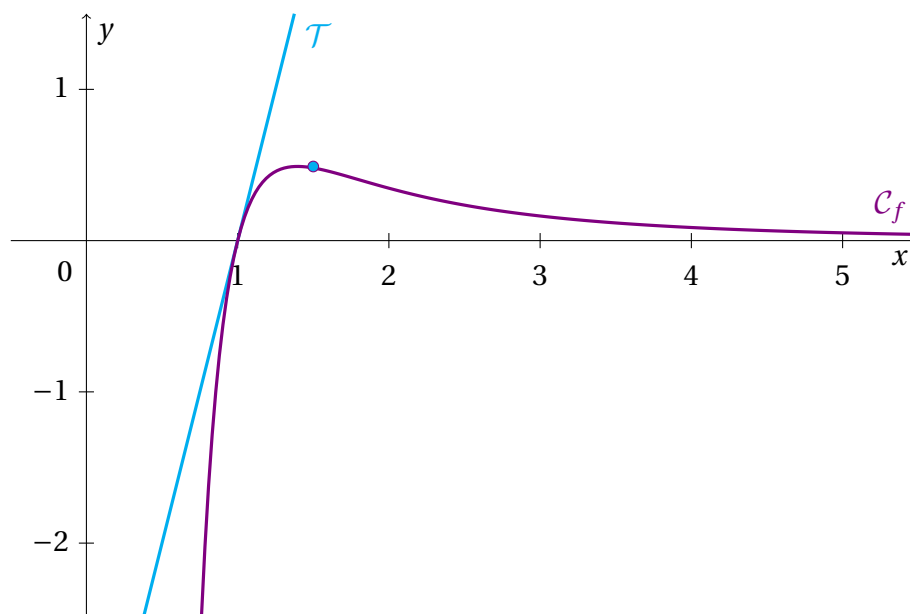
5. La tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$. Or

$$f(1) = \frac{4\ln(1)}{1^3} = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{4(1 - 3\ln(1))}{1^4} = 4,$$

donc une équation de \mathcal{T} est $y = 4(x - 1)$, *i.e.*

$$y = 4x - 4.$$

6. Voici l'allure de la courbe \mathcal{C}_f et de sa tangente \mathcal{T} .



Partie II –   tude d'une variable aléatoire à densité

1. Soit $A \geq 1$. On pose

$$\begin{cases} u'(x) &= \frac{4}{x^3} \\ v(x) &= \ln(x) \end{cases} \quad \text{et on a} \quad \begin{cases} u(x) &= -\frac{2}{x^2} \\ v'(x) &= \frac{1}{x} \end{cases}$$

Alors, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3} dx &= \int_1^A u'(x) v(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_1^A - \int_1^A u(x) v'(x) dx \\ &= \left[-\frac{2\ln(x)}{x^2} \right]_1^A - \int_1^A -\frac{2}{x^2} \times \frac{1}{x} dx = -\frac{2\ln(A)}{A^2} + 0 + \int_1^A \frac{2}{x^3} dx \\ &= -\frac{2\ln(A)}{A^2} + \left[-\frac{1}{x^2} \right]_1^A = -\frac{2\ln(A)}{A^2} - \frac{1}{A^2} + 1.\end{aligned}$$

On a bien montré que $\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3} dx = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}$.

2. La fonction h est nulle donc positive sur $] -\infty, 1[$ et, d'après la question 2 de la Partie I, pour $x \geq 1$ on a $h(x) = f(x) \geq 0$. Donc h est positive sur \mathbb{R} .

La fonction h est nulle donc continue sur $] -\infty, 1[$. De plus h est continue sur $[1, +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi h est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un seul point, d'abscisse 1.

La fonction h est nulle sur $] -\infty, 1[$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^1 h(x) dx$ converge et vaut 0.

D'après la question 1, pour tout $A \geq 1$, on a

$$\int_1^A h(x) dx = \int_1^A f(x) dx = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3} dx = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}.$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^2} = 0$ et par croissances comparées, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(A)}{A^2} = 0$ donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2} \right) = 1.$$

Ce qui prouve que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \int_{-\infty}^1 h(x) dx + \int_1^{+\infty} h(x) dx$ converge et vaut $0 + 1 = 1$.

En conclusion, la fonction h est bien une densité de probabilité.

3. (a) Par définition de la fonction de répartition de X , on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt.$$

- Si $x < 1$ alors $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.
- Sinon $x \geq 1$, et en utilisant la question 1, on a

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x f(t) dt = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi la fonction de répartition F de X est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- (b) Le programme suivant répond à la question posée.

```

1 function calcul=F(x)
2   if x < 1 then
3     calcul = 0
4   else
5     calcul = 1 - 1/(x^2) - 2*log(x)/(x^2)
6   end
7 endfunction
8
9 for i=1:300, a(i)=-2+7*i/300; b(i)=F(a(i));
10 end
11 plot(a,b)

```

(c) Exécuter les lignes 9 à 11 du programme permet de tracer la courbe représentative de la fonction F sur l'intervalle $[-2, 5]$.

4. Soit $A \geq 1$. On a

$$\int_1^A xh(x) dx = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^2} dx.$$

On pose

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{4}{x^2} \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \quad \text{et on a} \quad \begin{cases} u(x) = -\frac{4}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Alors, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^2} dx &= \int_1^A u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_1^A - \int_1^A u(x)v'(x) dx \\ &= \left[-\frac{4\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A -\frac{4}{x} \times \frac{1}{x} dx = -\frac{4\ln(A)}{A} + 0 + \int_1^A \frac{4}{x^2} dx \\ &= -\frac{4\ln(A)}{A} + \left[-\frac{4}{x}\right]_1^A = -\frac{4\ln(A)}{A} - \frac{4}{A} + 4. \end{aligned}$$

On a bien montré que $\int_1^A xh(x) dx = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A}$.

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{4}{A} = 0$ et que, par croissances comparées, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{4\ln(A)}{A} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A} = 4.$$

De plus, h est nulle sur $]-\infty, 1[$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^1 xh(x) dx$ converge et vaut 0.

Par conséquent, X admet une espérance et $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx = 0 + 4 = 4$.

5. Soit $A \geq 1$. On a

$$\int_1^A x^2 h(x) dx = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x} dx = 4 \int_1^A \frac{1}{x} \times \ln(x) dx = \left[2(\ln(x))^2\right]_1^A = 2(\ln(A))^2.$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} 2(\ln(A))^2 = +\infty$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x) dx$ diverge. Donc X n'admet pas de variance.

6. Soit $A \geq 1$. Par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{P([X > A] \cap [X > 2A])}{P(X > A)} = \frac{P(X > 2A)}{P(X > A)} = \frac{1 - F(2A)}{1 - F(A)}.$$

En utilisant le résultat obtenu à la question 3a, comme $A \geq 1$, il vient que

$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{(2A)^2} - \frac{2\ln(2A)}{(2A)^2}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}\right)} = \frac{\frac{1}{4A^2} + \frac{2\ln(2A)}{4A^2}}{\frac{1}{A^2} + \frac{2\ln(A)}{A^2}} = \frac{\frac{1+2\ln(2A)}{4A^2}}{\frac{4+8\ln(A)}{4A^2}} = \frac{1+2\ln(2A)}{4+8\ln(A)}.$$

Par propriété du logarithme, $\ln(2A) = \ln(2) + \ln(A)$. Alors, en factorisant par $\ln(A)$,

$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{1+2\ln(2)+2\ln(A)}{4+8\ln(A)} = \frac{\ln(A) \left(\frac{1}{\ln(A)} + \frac{2\ln(2)}{\ln(A)} + 2 \right)}{\ln(A) \left(\frac{4}{\ln(A)} + 8 \right)} = \frac{\frac{1}{\ln(A)} + \frac{2\ln(2)}{\ln(A)} + 2}{\frac{4}{\ln(A)} + 8}.$$

Alors, comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(A) = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln(A)} + \frac{2\ln(2)}{\ln(A)} + 2}{\frac{4}{\ln(A)} + 8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

En conclusion,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{1}{4}.$$