# Exercices — Chapitre 3

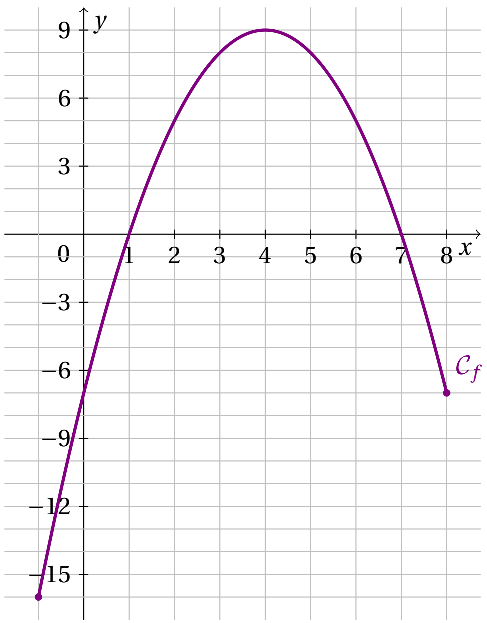
**Exercice 1 (⋆) –** Déterminer, dans chacun des cas,

1. l'image de $-2$, 0 et 3 par la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$,
2. l'image de $-3$, 0 et 1 par la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x) = \dfrac{4x+1}{2x-3}$,
3. l'image de $-1$, 0 et 3 par la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x-5)(3x+1)$.

**Exercice 2 (⋆⋆) –** Déterminer, dans chacun des cas et s'ils existent,

1. les antécédents de 2, $-1$ et 0 par la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x$,
2. les antécédents de 2, $-1$ et 0 par la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 1$,
3. les antécédents de 2 et 0 par la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^2 + 1$,
4. les antécédents de 2, $-1$ et 0 par la fonction $i$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ par $i(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$,
5. les antécédents de 5 et 1 par la fonction $j$ définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^2 + 5x + 5$.

**Exercice 3 (⋆) –** Sur la figure ci-dessous, on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction $f$. Déterminer graphiquement (aucune justification n'est demandée),




1. l'image de 3 par $f$,
2. $f(8)$ et $f(0)$,
3. l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 5,
4. les éventuels antécédents de $-7$ par $f$,
5. les solutions de l'équation $f(x) = 0$,
6. le tableau de signe de $f(x)$,
7. le tableau de variation de $f$,
8. le maximum de $f$ et pour quelle valeur il est atteint,
9. les solutions de l'inéquation $f(x) > 5$.

**Exercice 4 (⋆) –** Étudier la parité de la fonction $f$ dans chacun des cas suivants.

1. $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x$
2. $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$
3. $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$
4. $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$
5. $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ par $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$
6. $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$
7. $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

**Exercice 5 (⋆⋆) –** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Étudier la parité de $f$.
2. On admet que $f$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.
   En déduire, grâce à la question précédente, le sens de variation de $f$ sur $]-\infty, 0]$.
   Dresser alors le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout réel $x$, $\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

**Exercice 6 (⋆) –** Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction $f$, dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 3 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | $-1$ |

**Exercice 7 (⋆⋆) –** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, dont le tableau de variation est donné ci-dessous. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-1$ | $\nearrow$ | 3 | $\searrow$ | |

1. $f$ est croissante sur $[-1, 3]$
2. $f$ est décroissante sur $[2, +\infty[$
3. $f(2) \leqslant f(3)$
4. $f(1) \geqslant f(2)$
5. $\forall x \in [0, 2], \quad f(x) \leqslant 1$
6. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant 3$
7. $\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) < 0$
8. $\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = 4$

**Exercice 8 (⋆⋆) –** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Pour chacune des implications suivantes, dire si celle-ci est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. Si $f$ est croissante sur $[0,2]$, alors $f$ est croissante sur $[0,1]$.
2. Si $f(0) < f(1)$, alors $f$ est croissante sur $[0,1]$.
3. Si $f$ a un maximum en 1 sur $[0,1]$, alors $f$ est croissante sur $[0,1]$.
4. Si $f$ n'est pas croissante sur $[0,1]$, alors $f$ est décroissante sur $[0,1]$.

**Exercice 9 (⋆⋆) –** Soit $f$ la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{3+2x^3}$.
Montrer que
$$\forall x \in [-1,1], \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

**Exercice 10 (⋆⋆) –** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$.
Montrer que la fonction $f$ est majorée par 2. En déduire que $f$ est bornée.

**Exercice 11 (⋆⋆) –**

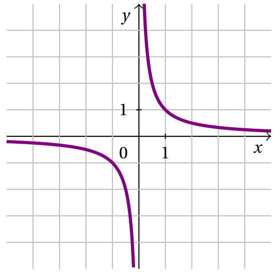
1. Donner le domaine de définition ainsi que l'expression des fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$ pour les fonctions $f$ et $g$ définies ci-dessous.
   a) $f(x) = 2x^2 - x$ et $g(x) = 3x+2$,
   b) $f(x) = 1 - x^3$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$,
   c) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ et $g(x) = x^2 + 2$.
2. Donner le domaine de définition des fonctions $h$ suivantes et les mettre sous la forme d'une composée $f \circ g$, où les fonctions $f$ et $g$ sont à définir.
   a) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$,
   b) $h(x) = \sqrt{x^2+1}$.

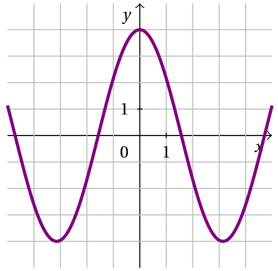
**Exercice 12 (⋆ ⋆ ⋆) –** Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

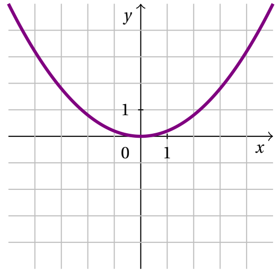
1. $a(x) = x^4 - 5x^2 + 2x + 1$
2. $b(x) = x + \sqrt{x}$
3. $c(x) = \dfrac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$
4. $d(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$
5. $e(x) = \dfrac{x+6}{x^2+5x+1}$
6. $f(x) = \sqrt{3x-2}$
7. $g(x) = \dfrac{8x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 6}$
8. $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 18}$
9. $j(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$
10. $k(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{2x^2 - 3x - 9}$
11. $l(x) = \dfrac{x^2+5x-7}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$
12. $m(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

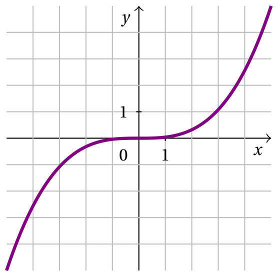
**Exercice 13 (⋆⋆) –** Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 4$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

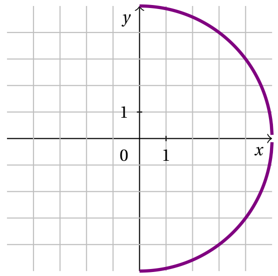
**Exercice 14 (⋆) –** Conjecturer, d'après les graphes, si les fonctions suivantes sont bijectives. On précisera bien les ensembles de départ et d'arrivée.

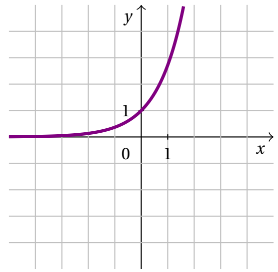
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 


**Exercice 15 (⋆⋆) –** Soit $f$ la fonction $f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[ & \to & [0,+\infty[ \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$. $f$ est-elle bijective ?