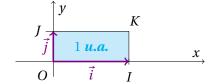
# 11 Intégrales et primitives

# I - Intégrale et aire

# 1 - Unité d'aire

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthogonal du plan. L'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle unitaire OIKJ avec I(1;0), J(0;1) et K(1;1).

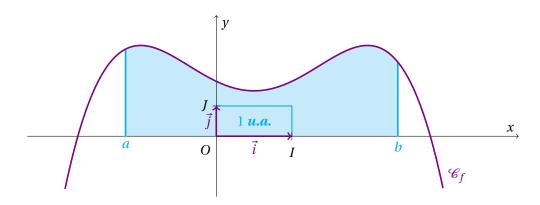


# 2 - Intégrale d'une fonction continue et positive

**Définition 11.1** – Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle [a;b] et  $\mathscr{C}_f$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}_f$  compris entre la courbe  $\mathscr{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=a et x=b.

Ce nombre est noté  $\int_a^b f(x) dx$ .



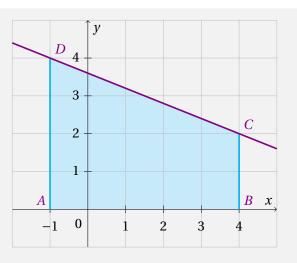
#### Remarque 11.2 -

- $\int_a^b f(x) dx$  se lit "intégrale de a à b de f(x) dx".
- Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$ .
- La variable x est dite "muette", elle n'intervient pas dans le résultat. C'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$ .
- $\int_a^a f(x) dx = 0$ , car le domaine  $\mathcal{D}_f$  est alors réduit à un segment.

**Exemple 11.3** – Calculer 
$$\int_{-1}^{4} (-0.4x + 3.6) dx$$
.

La fonction affine f définie pour tout réel x par f(x) = -0.4x + 3.6 est continue et positive sur l'intervalle [-1;4]. L'intégrale  $\int_{-1}^{4} (-0.4x + 3.6) \, dx$  est égale à l'aire du trapèze ABCD.

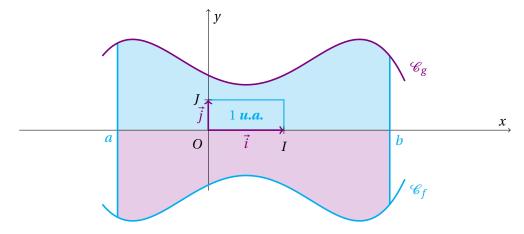
$$\int_{-1}^{4} (-0.4x + 3.6) dx = \frac{(AD + BC) \times AB}{2}$$
$$= \frac{(4+2) \times 5}{2}$$
$$= 15.$$



# 3 - Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle [a;b] alors, la fonction g définie sur l'intervalle [a;b] par g=-f est une fonction continue et positive sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine  $\mathcal{D}_f$  compris entre la courbe  $\mathscr{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=a et x=b est égale à l'aire du domaine  $\mathcal{D}_g$  compris entre la courbe  $\mathscr{C}_g$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=a et x=b.



**Définition 11.4** – Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle [a;b] et  $\mathscr{C}_f$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire  $\mathcal{A}$ , exprimée en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}_f$  compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=a et x=b:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d} x = -\mathscr{A}.$$

# 4 - Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b]. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle [a;b], associe l'intégrale de f entre a et  $x:F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ .

#### Théorème 11.5

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle [*a*; *b*].

La fonction F définie sur [a;b] par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur [a;b] et a pour dérivée f.

**Exemple 11.6** – Soit f la fonction définie sur l'in-

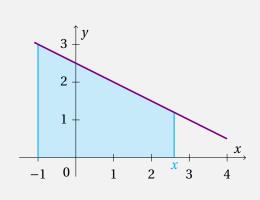
tervalle [-1;4] par 
$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$
.

tervalle [-1;4] par  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ . Si x est un réel de l'intervalle [-1;4], la fonction F définie par  $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t) dt$  est égale à l'aire du trapèze colorié. On a donc

$$F(x) = \frac{\left(3 + (-0,5x + 2,5)\right) \times (x+1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}.$$

La fonction F est dérivable sur [-1;4] et

$$F'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x).$$



# II - Primitives

# 1 - Définition

**Définition 11.7** – Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive de la fonction** f **sur** I si F est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

# **Exemple 11.8 –**

- $F: x \mapsto x^3 + 3x^2 1$  est une primitive sur **R** de  $f: x \mapsto 3x^2 + 6x$ . En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = 3x^3 + 6x = f(x)$ .
- $G: x \mapsto 2\sqrt{x}$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $g: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ . En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $G'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$ .
- Les fonctions  $F: x \mapsto x^2$ ,  $G: x \mapsto x^2 + 1$ , mais aussi  $H = x \mapsto x^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  sont des primitives sur  $\mathbb{R}$ de la fonction  $f: x \mapsto 2x$ . En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x = f(x).

## Remarque 11.9 -

- Comme *F* est dérivable sur *I*, la fonction *F* est en particulier continue sur *I*.
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle **d'une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.

#### Théorème 11.10

- Toute fonction continue sur un intervalle *I* admet au moins une primitive sur *I*.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est la forme F + c où c est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné. Si  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une unique primitive  $F_0$  de f sur I telle que  $F_0(x_0) = y_0$ .

**Exemple 11.11** – La fonction F définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = x^2 - 1$  est une primitive de  $f: x \mapsto 2x$  vérifiant F(1) = 0.

En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , F'(x) = 2x = f(x) et  $F(1) = 1^2 - 1 = 0$ .

# 2 - Primitives des fonctions usuelles

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants.

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors F + G est une primitive de f + g sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et  $\lambda$  un réel, alors  $\lambda F$  est une primitive de  $\lambda f$  sur I.

f est définie sur $I$ par	une primitive F est donnée par	validité
$f(x) = a \qquad (a \in \mathbf{R})$	F(x) = ax	sur R
$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbf{N})$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur <b>R</b>
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$\operatorname{sur}] - \infty; 0[\operatorname{ou}\operatorname{sur}]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad (n > 2 \text{ entier})$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur] – $\infty$ ; 0[ ou sur] 0; + $\infty$ [
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur ]0; +∞[

#### Exemple 11.12 - Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. 
$$f(x) = 3x^2$$
  
 $F(x) = 3 \times \frac{1}{3}x^3 + C = x^3 + C$ 

2. 
$$f(x) = x + \frac{3}{2}$$
  
 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + C$ 

3. 
$$f(x) = (2x+1)(x-3)$$

Tout d'abord, développons  $f(x) = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$ . Ainsi une primitive est donnée par  $F(x) = 2 \times \frac{1}{3}x^3 - 5 \times \frac{1}{2}x^2 - 3x + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + C$ .

4. 
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
  
 $F(x) = -\frac{1}{x} + C$ 

7. 
$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$
  
 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2\sqrt{x} + C$ 

5. 
$$f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$$
  
 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C$ 

8. 
$$f(x) = \frac{6x^2 - 8x + 2}{5}$$
$$F(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{5} + C$$

6. 
$$f(x) = \frac{1}{x^5}$$
$$F(x) = -\frac{1}{4x^4} + C$$

9. 
$$f(x) = -\frac{6}{x^4}$$
  
 $F(x) = -\frac{6}{3x^3} = -\frac{2}{x^3} + C$ 

# 3 – Primitive des fonctions composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Conditions	$\mathbf{fonction}f$	une primitive F est donnée par
$n \in \mathbb{N}, \ n > 0$	$f = u' \times u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur $I$	$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur $I$ et $n > 1$	$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur $I$	$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$

## Exemple 11.13 – Calculer des primitives des fonctions suivantes.

1.  $f(x) = (2x+1)^2$ 

f semble être de la forme  $u'u^2$  avec u(x) = 2x + 1. On a u'(x) = 2 donc

$$u'(x)u(x)^2 = 2(2x+1)^2 = 2f(x)$$
.

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{1}{6}(2x+1)^3.$$

2.  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ 

f semble être de la forme  $\frac{u'}{u^2}$  avec u(x) = x + 1. On a u'(x) = 1 donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x+1}.$$

3.  $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$ 

f semble être de la forme  $\frac{u'}{u^2}$  avec u(x) = 1 - 3x. On a u'(x) = -3 donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} = -3f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{-3} \times \left( -\frac{1}{u(x)} \right) = \frac{1}{-3} \times \left( -\frac{1}{1 - 3x} \right) = \frac{1}{3(1 - 3x)}.$$

4.  $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$ 

f semble être de la forme  $u'u^3$  avec  $u(x) = x^2 - x + 1$ . On a u'(x) = 2x - 1 donc

$$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)(x^2-x+1)^3 = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2 - x + 1)^4}{4}.$$

5. 
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

f semble être de la forme  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$  avec u(x) = x + 2. On a u'(x) = 1 donc

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x+2}$$
.

# III - Intégrale d'une fonction continue

# 1 - Définition

**Définition 11.14** – Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I. L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à F(b) - F(a).

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = F(b) - F(a).$$

## Remarque 11.15 -

• La différence F(b) - F(a) se note  $\left[ F(x) \right]_a^b$ . Ainsi

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \left[ F(x) \right]_{a}^{b} = F(b) - F(a).$$

• Le résultat ne dépend pas de la primitive *F* choisie.

# Exemple 11.16 -

• 
$$\int_{1}^{3} 3t^{2} + 2t - 1 dt = \left[t^{3} + t^{2} - t\right]_{1}^{3} = \left(3^{3} + 3^{2} - 3\right) - \left(1^{3} + 1^{2} - 1\right) = 33 - 1 = 32.$$

• 
$$\int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

## **Proposition 11.17**

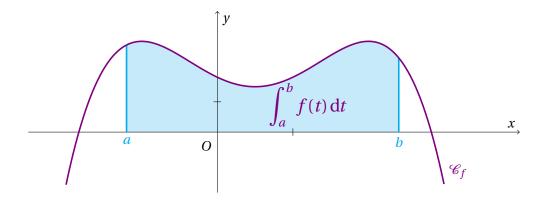
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I. Soit F une primitive de f sur I. On a alors

$$\int_{a}^{a} f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{a}^{b} f(t) dt = -\int_{b}^{a} f(t) dt.$$

# 2 - Premières propriétés

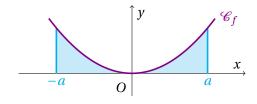
## **Proposition 11.18**

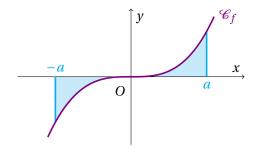
Soient a et b deux réels tels que  $a \le b$ . Soit f une fonction continue et positive sur [a;b]. Soit  $\mathscr{C}_f$  la courbe représentative de f. Alors  $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$  est l'aire de la surface comprise entre  $\mathscr{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b.



#### **Proposition 11.19**

- Si f est continue et paire sur [-a; a], alors  $\int_{-a}^{a} f(t) dt = 2 \int_{0}^{a} f(t) dt$ .
- Si f est continue et impaire sur [-a; a], alors  $\int_{-a}^{a} f(t) dt = 0$ .





# Exemple 11.20 -

- $\int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{t^2 + 1} \, \mathrm{d}t = 0.$
- $\int_{-1}^{1} t^2 + |t| dt = 2 \int_{0}^{1} t^2 + |t| dt = 2 \int_{0}^{1} t^2 + t dt = 2 \left[ \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 \right]_{0}^{1} = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3}.$

### **Proposition 11.21 - Relation de Chasles**

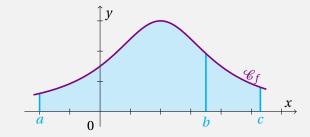
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I. Alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

## Exemple 11.22 - Interprétation graphique

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur [a;b].

L'aire du domaine compris entre la courbe  $\mathscr{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=a et x=c est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe  $\mathscr{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=a et x=b et du domaine compris entre la courbe  $\mathscr{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=b et x=c.



#### Proposition 11.23 - Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a;b]. Alors, pour tout réel  $\lambda$ , on a

$$\int_a^b \left( f(x) + g(x) \right) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{ et } \quad \int_a^b \lambda f(x) \, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

# **Exemple 11.24** – Soit a un réel et f la fonction définie sur [-1;1] par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \le x \le 0\\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Vérifier que  $\int_{-1}^{1} f(x) dx = 1$ . Par la relation de Chasles, on a

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = \int_{-1}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{1} f(x) dx.$$

Puis, par linéarité,

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = \int_{-1}^{0} \frac{1-a}{2} dx + \int_{0}^{1} \frac{1+a}{2} dx = \frac{1-a}{2} \int_{-1}^{0} 1 dx + \frac{1+a}{2} \int_{0}^{1} 1 dx$$
$$= \frac{1-a}{2} \left[ x \right]_{-1}^{0} + \frac{1+a}{2} \left[ x \right]_{0}^{1} = \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1.$$

# Complément d'intégration

# I - Primitive des fonctions logarithme & exponentielle

Les fonctions logarithme et exponentielle étant connues, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les lignes suivantes.

f est définie sur $I$ par	une primitive F est donnée par
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln( x )$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln( u )$

**Remarque 14.1** – On pourra retenir en particulier que la primitive d'une fonction de la forme  $f(x) = e^{ax}$ (avec  $a \neq 0$ ) est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax}.$$

Exemple 14.2 - Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. 
$$f(x) = e^{2x}$$
  
 $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ 

2. 
$$f(x) = \frac{2}{x}$$
$$F(x) = 2\ln|x|$$

2. 
$$f(x) = \frac{2}{x}$$
  
 $F(x) = 2\ln|x|$ 
3.  $f(x) = e^{3x} - e^{-x}$   
 $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + e^{-x}$ 

4. 
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

f semble être de la forme  $\frac{u'}{u}$  avec  $u(x) = x^2 + 1$ . On a u'(x) = 2x donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|u(x)| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

5. 
$$f(x) = xe^{x^2}$$

f semble être de la forme  $u'e^u$  avec  $u(x) = x^2$ . On a u'(x) = 2x donc

$$u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

# II - Formule d'intégration par parties

## **Proposition 14.3**

Soient u et v deux fonctions dérivables et soient a et b deux réels. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[ u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

#### Remarque 14.4 -

• On peut résumer la formule d'intégration par parties de la manière suivante :

$$\int u'v = [uv] - \int uv'.$$

• La formule d'intégration par parties permet de calculer des intégrales lorsque l'on ne sait pas trouver de primitive de la fonction à intégrer. Il faut alors choisir les fonctions u et v adéquates.

Pour des intégrales impliquant la fonction exponentielle, on choisira souvent la fonction exponentielle pour la fonction à intégrer (i.e., u').

Inversement, pour des intégrales impliquant la fonction logarithme, on choisira la fonction logarithme pour la fonction à **dériver** (i.e., v).

Exemple 14.5 - Calculer les intégrales suivantes.

1. 
$$I_1 = \int_0^1 te^t dt$$
Posons

$$u'(t) = e^t$$
  $u(t) = e^t$   
 $v(t) = t$   $v'(t) = 1$ 

Alors d'après la formule d'intégration par parties,

$$I_{1} = \int_{0}^{1} u'(t)v(t) dt = \left[u(t)v(t)\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} u(t)v'(t) dt$$
$$= \left[te^{t}\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 1 \times e^{t} dt = e - \left[e^{t}\right]_{0}^{1} = e - (e - 1) = 1.$$

2. 
$$I_2 = \int_1^2 x \ln(x) \, \mathrm{d}x$$
Posons

$$u'(x) = x$$
  $u(x) = \frac{x^2}{2}$   
 $v(x) = \ln(x)$   $v'(x) = \frac{1}{x}$ 

Alors par intégration par parties,

$$I_2 = \int_1^2 u'(x)v(x) dt = \left[ u(x)v(x) \right]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x) dx$$
$$= \left[ \frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx = 2\ln(2) - \int_1^2 \frac{x}{2} dx$$
$$= 2\ln(2) - \left[ \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2\ln(2) - \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}.$$

3. 
$$I_3 = \int_1^e \ln(x) dx$$

$$u'(x) = 1$$
  $u(x) = x$   
 $v(x) = \ln(x)$   $v'(x) = \frac{1}{x}$ 

Alors par intégration par parties,

$$I_{3} = \int_{1}^{e} u'(x) v(x) dt = \left[ u(x) v(x) \right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e} u(x) v'(x) dx$$
$$= \left[ x \ln(x) \right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e} x \times \frac{1}{x} dx = e - \int_{1}^{e} 1 dx$$
$$= e - \left[ x \right]_{1}^{e} = e - (e - 1) = 1.$$

# III – Intégrales et inégalités

On suppose dans cette partie que  $a \le b$ .

## Proposition 14.6 - Positivité de l'intégrale

- Si f est continue et positive sur [a;b], alors  $\int_a^b f(t) dt \ge 0$ .
- Si f est continue et positive sur [a;b] et que  $\int_a^b f(t) dt = 0$ , alors f est la fonction nulle sur [a;b].

**Remarque 14.7** – En particulier, si f est continue, positive et non-identiquement nulle sur [a;b], alors  $\int_a^b f(t) dt > 0$ .

#### Proposition 14.8 - Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur [a;b] telles que  $\forall t \in [a;b], f(t) \leq g(t)$ . Alors

$$\int_{a}^{b} f(t) dt \le \int_{a}^{b} g(t) dt.$$

**Exemple 14.9** – On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer  $u_1$ .

On a

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Il nous faut donc trouver une primitive de la fonction  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Cette fonction semble être

de la forme  $\frac{u'}{u^2}$  avec  $u(x) = 1 + x^2$ . On a u'(x) = 2x donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{\left(1 + x^2\right)^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\frac{1}{2} \times \left( -\frac{1}{u(x)} \right) = -\frac{1}{2\left(1 + x^2\right)}.$$

**Alors** 

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \left[ -\frac{1}{2(1+x^2)} \right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{2(1+1^2)} + \frac{1}{2(1+0^2)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2. Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$0 \le \frac{x^n}{\left(1 + x^2\right)^2} \le x^n.$$

Il est clair que l'on a  $0 \le \frac{x^n}{(1+x^2)^2}$ . Par ailleurs, on a

$$1 + x^2 \ge 1$$

Donc

$$(1+x^2)^2 \ge 1^2 = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} \le \frac{1}{1} = 1.$$

Donc

$$\frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2} \le x^n \times 1 = x^n.$$

Ainsi, on a bien le résultat demandé.

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 0 \, \mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x^n}{\left(1 + x^2\right)^2} \, \mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x.$$

Or 
$$\int_0^1 0 dx = 0$$
 et

$$\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi on a bien

$$0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}.$$

4. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

On a  $\lim_{n\to +\infty} 0 = 0$  et  $\lim_{n\to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ . Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite  $(u_n)$  converge et  $\lim_{n\to +\infty} u_n = 0$ .