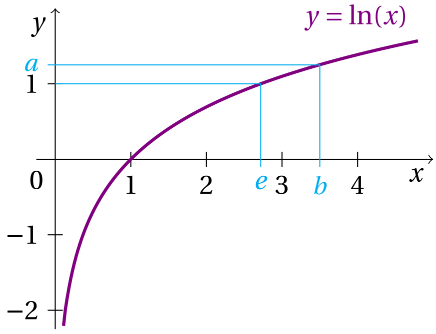
13 Fonction exponentielle

I – Définition et premières propriétés

Il est possible de généraliser la démarche qui a permis d'introduire dans le chapitre précédent le nombre e : il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre réel a quelconque.
Il existe un unique nombre réel b tel que $\ln(b) = a$. Et

- pour $a = 1$, $b = e$,
- pour $a = 2$, $b = e^2$,
- pour $a = -1$, $b = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$,
- et pour $a = n$, où $n \in \mathbb{Z}$, $b = e^n$.



Définition 13.1 – Le nombre b tel que $\ln(b) = a$ est appelé **exponentielle de** a et noté e^a.
On définit ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée exp, définie sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $]0, +\infty[$.
Pour des raisons évidentes, on note le plus souvent $\exp(x) = e^x$.

Remarque 13.2 – La fonction exponentielle est la **bijection réciproque** de la fonction logarithme népérien :

$$]0,+\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \quad \text{et en sens inverse} \quad]0,+\infty[\xleftarrow{\exp} \mathbb{R}.$$

Proposition 13.3

Puisque les deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre :

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout réel strictement positif $y \in \mathbb{R}_+^*$, $y = e^x \iff x = \ln(y)$.
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(e^x\right) = x$.
- Pour tout réel strictement positif $y \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(y)} = y$.

Remarque 13.4 – Toujours en raison de la réciprocité et parce que $\ln(1) = 0$, alors $e^0 = 1$.

Exemple 13.5 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- $e^x = 1$
- $\ln(x) = 2$
- $e^{2t-1} = 1$
- $\ln(3x) = \dfrac{1}{2}$

Proposition 13.6 – Propriété fondamentale de l'exponentielle

Pour tous nombres réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,
$$e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Corollaire 13.7

De cette propriété algébrique fondamentale découle plusieurs conséquences.

- Pour tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$, $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- Pour tous nombres réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, $\quad e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

Démonstration.

□

Exemple 13.8 – Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\dfrac{e^{2x}}{e^x}$
2. $\dfrac{\left(e^x\right)^2}{e^x}$
3. $\dfrac{e^x}{e^{-x}}$
4. $\left(e^{2x}\right)^3 \times \left(e^{-x}\right)^2$
5. $e^0 \times e^{-x} \times \left(e^x\right)^2$
6. $\dfrac{e^x}{e^y} \times e^{y-x}$

II – Étude de la fonction exponentielle

1 – Ensemble de définition

Proposition 13.9

La fonction exponentielle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et a ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, *i.e.* dans $]0, +\infty[$.

2 – Dérivée et variations

Proposition 13.10

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration.

□

Proposition 13.11

La fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

□

Proposition 13.12

Pour tous réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$e^a = e^b \iff a = b \quad \text{et} \quad e^a > e^b \iff a > b.$$

Exemple 13.13 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$

2. $e^{x^2+x-1} = 1$

3. $e^{2x} \leqslant e^x$

4. $e^{2x}e^{x^2} < 1$

3 – Limites

Proposition 13.14

La fonction exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

La fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$, *i.e.*

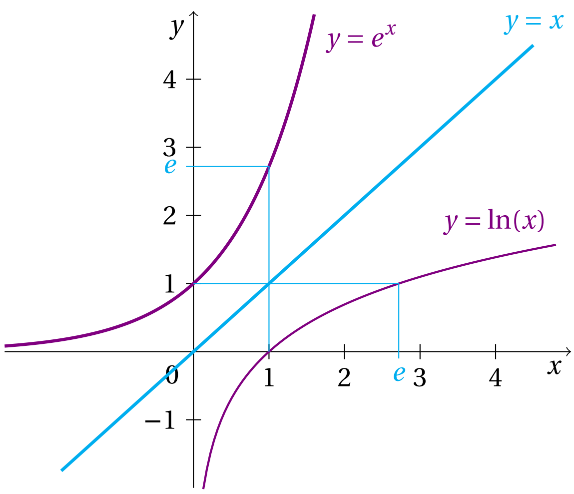
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

L'axe des abscisses est **asymptote horizontale** à la courbe d'équation $y = e^x$ en $-\infty$.

Exemple 13.15 – Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$, $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

4 – Courbe représentative

- La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.
- Connaître l'allure des courbes des fonctions logarithme et exponentielle permet de retrouver graphiquement toutes les informations importantes à propos de ces deux fonctions.



5 – Croissances comparées

Proposition 13.16

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

En particulier lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Remarque 13.17 – Ces limites sont normalement des **formes indéterminées**. Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de *croissances comparées*.
On retient que l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances.

Exemple 13.18 – Calculer $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x - x$.

III – Étude d'une fonction de la forme $\exp(u)$

Proposition 13.19

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction composée $f = e^u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

On note parfois pour simplifier $\left(e^u\right)' = u'e^u$.

Exemple 13.20 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^3-4x^2+2x-3}$. Calculer $f'(x)$.

Exemple 13.21 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x^3-15x^2+36x-25}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction f.

IV – Primitive de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle étant désormais connue, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les deux lignes suivantes :

f est définie sur I par	**une primitive F est donnée par**
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f = u'e^u$	$F = e^u$

Remarque 13.22 – On peut remarquer en particulier qu'une primitive d'une fonction de la forme $f(x) = e^{ax}$ (avec $a \neq 0$) est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax}.$$

Exemple 13.23 – Calculer les primitives des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = e^{3x} - e^{-x}$
3. $f(x) = xe^{x^2}$

1.

2.

3.