

8 Variables aléatoires continues

I – Rappels sur la fonction de répartition

Définition 8.1 – Soit X une variable aléatoire. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F_X définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x).$$

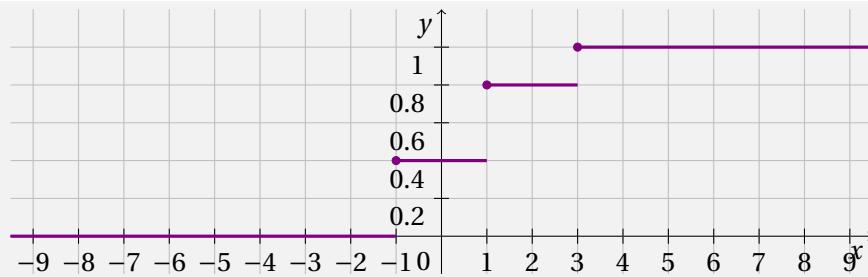
Proposition 8.2

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω . On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots$. Alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1, \\ P(X = x_1) + \dots + P(X = x_k) & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 1 & \text{si } x \geq \max_{i \in \mathbb{N}} x_i. \end{cases}$$

En particulier, F_X est constante sur $[x_k, x_{k+1}[$.

Exemple 8.3 – Un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on tire le numéro 1 on gagne 4€, si on tire un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain algébrique.



II – Généralités

1 – Notion de variable aléatoire à densité

Définition 8.4 – Soient X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition.

On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si et seulement s'il existe une fonction f vérifiant les quatre conditions suivantes :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- La fonction f est continue sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en un nombre **fini** de réels.
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Lorsque les conditions précédentes sont vérifiées, alors la fonction f est appelée **densité** de X .

Définition 8.5 – Une fonction f est une **densité de probabilité** (ou plus simplement **densité**) si et seulement si

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. f est continue par morceaux, avec un nombre fini de points de discontinuité.
3. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Exemple 8.6 – On considère la fonction f suivante

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \end{array}$$

Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

Théorème 8.7

Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X et de densité f , alors en chaque réel x où f est continue, la fonction f vérifie $f(x) = F'_X(x)$.

Théorème 8.8

Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X , alors toute fonction f à valeurs positives qui vérifie $f(x) = F'_X(x)$, sauf éventuellement en un nombre fini de points, est une densité de X .

Exemple 8.9 – Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$
On admet que X est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de X .

Remarque 8.10 – Il n'y a pas unicité de la densité pour une variable à densité donnée. En effet, si f est une densité de X , alors toute fonction g positive, égale à f sauf en un nombre fini de points, est également une densité de X .

2 – Calculs de probabilités avec des variables aléatoires à densité

Proposition 8.11

Soient X une variable aléatoire à densité, F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X .

Soient a et b deux réels avec $a < b$. On rappelle que $P(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$. Alors

- $P(X < a) = P(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t) dt,$
- $P(X = a) = 0,$
- $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F_X(a) = \int_a^{+\infty} f_X(t) dt,$
- $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt.$

Exemple 8.12 –

1. Soit X une variable aléatoire, de fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1 - \frac{8}{x^3} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

On admet que X est une variable aléatoire à densité. Calculer $P(X \geq 0)$, $P(-1 \leq X < 3)$, $P(X < 4)$.

2. Soit X une variable aléatoire à densité, de densité

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ e^{-t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Calculer $P(X \leq 2)$, $P(2 < X \leq 3)$ et $P(X \geq 1)$.

3 – Espérance d'une variable à densité

Définition 8.13 – Sous réserve de convergence de l'intégrale, l'espérance de X est le réel noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt.$$

Exemple 8.14 – Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ e^{-t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$
 X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

Proposition 8.15

Soient X une variable aléatoire à densité admettant une espérance et a et b deux réels. Si $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ admet une espérance et

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

4 – Variance d'une variable aléatoire à densité

Définition 8.16 – Une variable aléatoire X de densité f admet un **moment d'ordre 2** lorsque X^2 admet une espérance. Dans ce cas, on appelle **moment d'ordre 2** de X le réel

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt.$$

Définition 8.17 – Si une variable aléatoire X de densité f admet un moment d'ordre 2, alors on appelle **variance** de X et on note $V(X)$ le réel défini par

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt.$$

Définition 8.18 – Si X est une variable aléatoire à densité admettant une variance, on appelle **écart-type** de X , le réel positif noté σ_X défini par

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Théorème 8.19 – Formule de König-Huygens

Si X est une variable aléatoire à densité possédant une variance, alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

**Méthode 8.20 – Montrer qu'une variable à densité possède une variance et la calculer.**

- Si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.
- Si X admet une espérance, il faut regarder si $E(X^2)$ existe.
 - ▷ Si non, alors X n'admet pas de variance.
 - ▷ Si oui, alors on la calcule en utilisant la formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple 8.21 – Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$

X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Proposition 8.22

Si X est une variable aléatoire possédant une variance, alors pour tous réels a et b , $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Exemple 8.23 – On reprend la variable aléatoire X de l'exemple précédent et on note $Y = 3 - 2X$. Y admet-elle une variance? Si oui, la calculer.

III – Lois usuelles à densité

1 – Loi uniforme sur un intervalle

Dans ce paragraphe, a et b sont des nombres réels avec $a < b$.

La loi uniforme sur $[a, b]$ est la loi du tirage au hasard d'un nombre dans cet intervalle : la variable X a autant de chance de tomber n'importe où dans l'intervalle $[a, b]$.

Définition 8.24 – On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[a, b]$ lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b], \\ 0 & \text{si } t \notin [a, b]. \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Voici la représentation graphique de la densité f d'une loi uniforme sur $[a, b]$:



Remarque 8.25 – La fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(t) = \frac{1}{b-a}$ est bien une densité de probabilité sur l'intervalle $[a, b]$ puisque

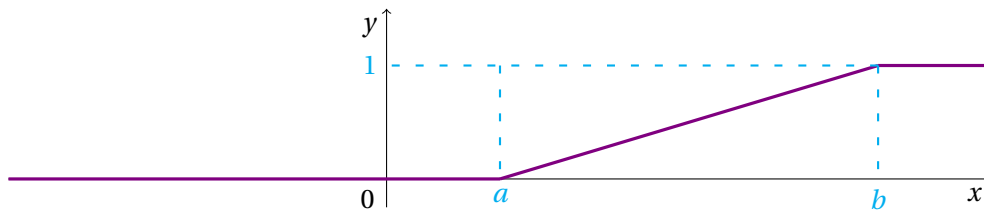
- f est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1$.

Proposition 8.26

Si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b], \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de la fonction de répartition F_X d'une loi uniforme sur $[a, b]$:



Proposition 8.27

Si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemple 8.28 – Le temps d'attente T , en minutes, auprès du standard téléphonique du service après-vente d'une entreprise suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0.5, 9.5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes?
3. Quel est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique?

2– Loi exponentielle

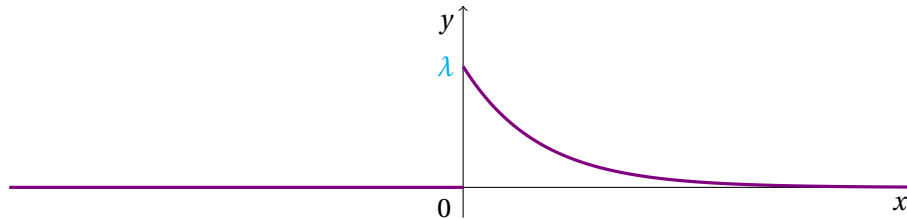
Dans ce paragraphe, λ désigne un nombre réel strictement positif.

Définition 8.29 – On dit que X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Voici la représentation graphique de la densité f d'une loi exponentielle de paramètre λ :

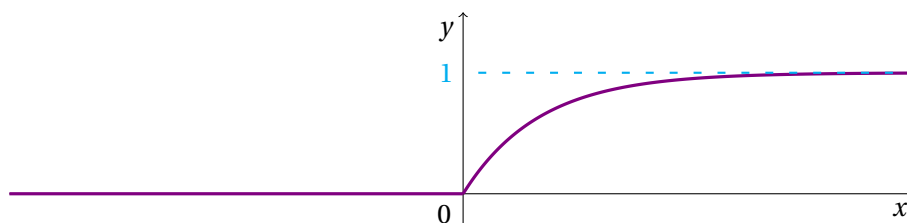


Proposition 8.30

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de la fonction de répartition F_X d'une loi exponentielle de paramètre λ :



Proposition 8.31

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Remarque 8.32 – Les lois exponentielles sont utilisées pour modéliser des *durées de vie*.

3– Loi normale

Dans ce paragraphe, m désigne un nombre réel et σ un réel strictement positif.

Définition 8.33 – On dit que X suit une **loi normale** de paramètres m et σ^2 lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Proposition 8.34

Si X suit une loi normale de paramètres m et σ^2 , alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

4 – Loi normale centrée réduite

Définition 8.35 – On dit que X suit la **loi normale centrée réduite** lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

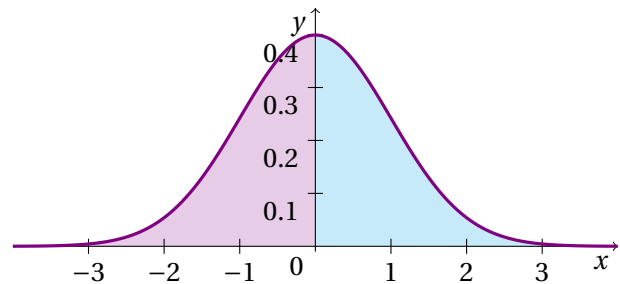
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les probabilités $P(X \leq 0)$ et $P(X \geq 0)$ sont égales.

Comme $P(X \leq 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

$$P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}.$$



Définition 8.36 – La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est la fonction notée Φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Théorème 8.37

On sait déjà que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. Plus généralement, pour tout réel x , la fonction Φ vérifie

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Remarque 8.38 – On ne sait pas expliciter Φ à l'aide des fonctions usuelles.

Proposition 8.39

Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = 0 \quad \text{et} \quad V(X) = 1.$$

Théorème 8.40

Soit X une variable aléatoire. Alors

$$X \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(m, \sigma^2) \iff \frac{X - m}{\sigma} \text{ suit la loi normale centrée réduite } \mathcal{N}(0, 1).$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{et} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$
[illegible]