NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 25

Exercice 1 – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \frac{1}{4}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$P\big(|M_n - 100| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{75}{n\varepsilon^2}.$$

Solution : Je rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour toute variable aléatoire X admettant une variance et tout $\varepsilon > 0$,

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

J'applique alors cette inégalité à la variable aléatoire $X = M_n$.
Par linéarité de l'espérance,

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k).$$

Or comme il s'agit de lois binomiales, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E(X_k) = n \times p = 400 \times \frac{1}{4} = 100$. Donc

$$E(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 100 = \frac{1}{n} \times n \times 100 = 100.$$

Par ailleurs, comme les variables aléatoires X_k sont indépendantes,

$$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k).$$

Or comme il s'agit de lois binomiales, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $V(X_k) = n \times p \times (1-p) = 100 \times \frac{3}{4} = 75$. Donc

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 75 = \frac{1}{n^2} \times n \times 75 = \frac{75}{n}.$$

Ainsi en réinjectant ces valeurs dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, j'obtiens bien que

$$P\big(|M_n - 100| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{75}{n\varepsilon^2}.$$