EXERCICES — CHAPITRE 14

Exercice 1 (★★) – Étudier la convexité des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
3. $h(x) = \left(x^2 - 9x + 22\right)e^x$ sur $\mathbb{R}$
4. $i(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 2 (★★) – Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$.
   b) Donner le tableau de variation de la fonction f.
3. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 3 (★★) – On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in \,]0,+\infty[, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) - x.$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \,]0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.
3. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$. On la note α.
4. Justifier que $\alpha \in [1, e]$.

Exercice 4 (★★) – **[Extrait de ECRICOME 2024 / Ex2]**
Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $]0,4[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4}{1+e^x} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \,]0,4[, \quad g(y) = \ln\left(\frac{4}{y} - 1\right).$$

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,4[$.
2. a) Pour tout $y \in \,]0,4[$, calculer $f\big(g(y)\big)$.
   b) Que représente la fonction g pour la fonction f ?
3. Déterminer les réels x tels que $0.05 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

Exercice 5 (★★★) – **[BSB 2013 / Ex2]**
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 2x + 3$, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$.
On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe $\mathcal{C}$?
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$. Dresser le tableau de variation de f. On fera figurer les limites aux bornes. On déterminera aussi l'expression de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et on en donnera une valeur approchée. *On donne* $\ln(2) \approx 0.7$.
3. Établir que f est concave sur $]0,+\infty[$.
4. a) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
   b) Justifier sans calcul que $\mathcal{T}$ est située au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0,+\infty[$.
5. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $]0,+\infty[$ avec $\alpha < \beta$.
   b) Justifier que $\beta \in \,]1,2[$.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$. *On donne* $\alpha \approx 0.06$ *et* $\beta \approx 1.79$.

Exercice 6 (★★★) – **[Extrait de BSB 2016 / Ex2]**
On considère la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par

$$\forall x \in \,]-2,+\infty[, \quad f(x) = \ln(x+2) - x.$$

On nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 par valeurs supérieures. Comment interpréter graphiquement le résultat ?
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+2)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Calculer la dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f sur $]-2,+\infty[$ en y faisant figurer les limites calculées en **1**.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-1,+\infty[$.
   b) On donne $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(3) \approx 1.10$. Justifier que $\alpha \in \,]1,2[$.
   c) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution β entre -2 et -1.
4. Calculer la dérivée seconde de f. Montrer que f est concave sur $]-2,+\infty[$.
5. On donne $\alpha \approx 1.15$ et $\beta = -1.8$. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 7 ($\star\star\star$) – [BSB 2017 / Ex2]
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln(x)$
et la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = xe^x - 1$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0,+\infty[$. En déduire le tableau de variation de g. On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.

   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$. Vérifier que $\alpha \in [0,1]$.

   d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif,
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$
   En déduire le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

   c) Justifier que le réel α vérifie $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

3. a) Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$,
   $$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}.$$

   b) Étudier la convexité de f sur $]0,+\infty[$.

4. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2cm. *On donne $\alpha \approx 0.57$ et $f(\alpha) \approx 2.33$.*