Exercices — Chapitre 9

Exercice 1 – On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $X=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre à préciser.
2. Montrer que $Y=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre à préciser.
3. Montrer que $Z=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre à préciser.

Exercice 2 – On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$.

1. Calculer $2A^3-3A^2+A$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A.
3. Déterminer lesquelles sont effectivement valeurs propres et trouver des vecteurs propres associés.

Exercice 3 – On donne $B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1. Calculer $B^2-2B+2I$ puis en déduire que la matrice B n'a aucune valeur propre.
2. En déduire également que B est inversible et donner son inverse en fonction de B et I.

Exercice 4 – On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}2&4\\1&-1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier l'égalité $M^2-M-6I=0$ et en déduire les valeurs propres possibles de M.
2. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de M et donner un vecteur propre pour chacune d'elle.
3. On pose $P=\begin{pmatrix}1&4\\-1&1\end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible.
4. On pose $D=\begin{pmatrix}-2&0\\0&3\end{pmatrix}$. Vérifier l'égalité $MP=PD$.
   Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 – On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'on a $A(A-I)(A-2I)=O_3$ et en déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de A et donner un vecteur propre pour chacune d'elle.
3. En déduire une matrice P inversible telle que $AP=PD$ où D est une matrice diagonale que l'on précisera.

Exercice 6 – On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme X^3-3X^2+4 est annulateur de A et en déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Vérifier que $V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée, $V_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée et $V_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée.
3. On note P la matrice dont la première colonne est V_1, la deuxième est V_2 et la dernière est V_3. Calculer $P^3-3P^2+5P-3I_3$. En déduire que P est inversible et donner une expression de P^{-1} en fonction de I_3, P et P^2.
4. Vérifier l'égalité $AP=PD$ où $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.
5. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 7 – On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Vérifier que le polynôme $P = (X-1)(X+1)(X-3)$ est annulateur de A.
4. Montrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser.
5. En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}$, une expression explicite de A^n.
6. En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}$, une expression explicite de u_n, v_n et w_n.

Exercice 8 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 et $8A - 15I$ puis déterminer un polynôme annulateur de A. En déduire les valeurs propres possibles de A.
   (b) Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de A et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
2. (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner son inverse.
   (b) Soit $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $AP = PD$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$, puis donner l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier n.
4. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$$

   (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = A^n X_0$, puis donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 9 – Soit la suite (u_n) définie par ses trois premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_2 = -2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = 6u_n - 11u_{n+1} + 6u_{n+2}.$$

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $MX_n = X_{n+1}$. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.
2. (a) Calculer $(M-I)(M-2I)(M-3I)$ puis en déduire les valeurs propres possibles de M.
   (b) Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de M et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
3. (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer PQ.
   En déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $MP = PD$.
   (c) La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $M^n = PD^nP^{-1}$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, les coefficients de la première ligne de M^n. Donner alors l'expression de u_n en fonction de n.