DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 – [ESCP 2011 / Ex1]

1. a) Je calcule K^2 puis K^3 :

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^3 = K^2 \times K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

b) Comme $K^3 = 0_3$, alors pour tout entier $n \geqslant 3$, $\quad K^n = K^3 \times K^{n-3} = 0_3 \times K^{n-3} = 0_3$.

2. a) Je calcule $I + K$ dans le but de retrouver A :

$$I + K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

J'ai ainsi montré que $A = I + K$.

b) Les matrices I et K commutent puisque la matrice identité commute avec n'importe quelle matrice. Je peux donc appliquer la formule du binôme de Newton à $A = I + K$:

$$A^n = (I+K)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} K^k.$$

Or dans cette somme, tous les termes correspondants à un entier $k \geqslant 3$ sont nuls, d'après la question **1.b)**. Donc pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$A^n = \binom{n}{0} K^0 I^n + \binom{n}{1} K^1 I^{n-1} + \binom{n}{2} K^2 I^{n-2} = I + nK + \frac{n(n-1)}{2} K^2.$$

c) En explicitant les matrices de l'expression précédente, j'obtiens que pour tout $n \geqslant 2$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n + 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Je vérifie pour $n = 0$ et $n = 1$ la véracité de la formule précédente, déjà valable pour $n \geqslant 2$:

- Pour $n = 0$, la formule précédente donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \times 0 & 0 \times (2 \times 0 + 1) \\ 0 & 1 & 2 \times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0.$$

- Pour $n = 1$, la formule précédente donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 & 1\times(2\times 1+1) \\ 0 & 1 & 2\times 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi la formule trouvée pour $n \geqslant 2$ à la question **2.b)** est aussi valable pour $n = 0$ et $n = 1$. La formule est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. La matrice A est une matrice triangulaire, avec tous ses coefficients diagonaux non nuls. Donc la matrice A est inversible.

4. a) Je calcule J^2 :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $J^3 = 0_3$ et pour tout entier $k \geqslant 3, \quad J^k = J^3 \times J^{k-3} = 0_3$.

b) Je calcule $I + 2J + 3J^2$ dans le but de retrouver A :

$$I + 2J + 3J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

J'ai ainsi montré que $A = I + 2J + 3J^2$.

c) Je développe le produit matriciel :

$$\left(I + 2J + 3J^2\right)\left(I - 2J + J^2\right) = I - 2J + J^2 + 2J - 4J^2 + 2J^3 + 3J^2 - 6J^3 + 3J^4 = I - 4J^3 + 3J^4.$$

Et comme pour tout entier $k \geqslant 3, \quad J^k = 0_3,$ alors j'obtiens finalement que

$$\left(I + 2J + 3J^2\right)\left(I - 2J + J^2\right) = I.$$

d) J'ai montré à la question précédente que $A \times \left(I - 2J + J^2\right) = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = I - 2J + J^2$, *i.e.*

$$A^{-1} = I - 2J + J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. a) Pour calculer les matrices A^2 et A^3, j'utilise l'expression obtenue à la question **2.c)** :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 2 & 2\times(2\times 2+1) \\ 0 & 1 & 2\times 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 3 & 3\times(2\times 3+1) \\ 0 & 1 & 2\times 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule l'expression $A^3 - 3A^2 + 3A$:

$$A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-3+3 & 6-12+6 & 21-3+9 \\ 0 & 1-3+3 & 6-12+6 \\ 0 & 0 & 1-3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

c) Grâce à la question précédente, je sais que $A^3 - 3A^2 + 3A = I$. Ainsi

$$A \times \left(A^2 - 3A + 3I\right) = A^3 - 3A^2 + 3A = I$$

donc A est inversible et $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$.

d) Je calcule $A^2 - 3A + 3I$ dans le but de retrouver l'expression de A^{-1} obtenue précédemment :

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 3I &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4-6 & 10-9 \\ 0 & 1 & 4-6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}. \end{aligned}$$

Je retrouve bien un résultat identique à celui obtenu à la question **4.d)**.

Exercice 2 – [ECRICOME 2012 / Ex3]

1. a) Il s'agit de tirer deux boules parmi quatre : le nombre total de tirages est $\binom{4}{2} = \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$.
Le nombre de tirages favorables est deux : ou bien je tire les deux boules noires, ou bien les deux boules blanches.
Ainsi la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

b) La variable aléatoire N compte le nombre de succès lors de n répétitions, identiques et indépendantes, de l'épreuve de Bernoulli de succès "tirer deux boules de même couleur", de probabilité $p = \dfrac{1}{3}$. Donc N suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{3}$.
Par conséquent, le support est donné par $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

c) Comme N suit une loi binomiale, alors

$$E(N) = np = \frac{n}{3} \quad \text{et} \quad V(N) = np(1-p) = \frac{n}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}.$$

d) Il s'agit de la probabilité d'obtenir au moins un succès, *i.e.*

$$P\big(N \geqslant 1\big) = 1 - P(N = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

2. a) L'urne $\mathcal{U}$ contient quatre boules, l'événement $[X = 1]$ est donc impossible et $P(X = 1) = 0$.
L'événement $[X = 2]$ se réalise si deux boules sont retirées à chacun des deux tirages. En particulier, deux boules de même couleur ont été tirées au premier tirage. Dans ce cas, il ne reste que les deux boules de l'autre couleur dans l'urne et l'urne sera vide à l'issue du deuxième tirage. Ainsi d'après la question **1.**,

$$P(X = 2) = P(A) = a = \frac{1}{3}.$$

Grâce à ce raisonnement, je sais que l'événement $[X = 3]$ se réalise si deux boules de même couleur sont tirées au deuxième tirage, après que deux boules de couleurs différentes ont été tirées au premier tirage. Ainsi en notant A_i l'événement "deux boules de même couleur sont tirées au i-ème tirage",

$$P(X=3) = P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) = (1-a) \times a = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

b) Par un raisonnement encore similaire, l'événement $[X = n]$ se réalise si et seulement si deux boules de même couleur sont tirées pour la première fois au $(n-1)$-ème tirage (sinon l'urne serait vidée avant le n-ème tirage).
Avec les notations de la question précédente, j'obtiens alors

$$\begin{aligned} P(X=n) &= P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-2}} \cap A_{n-1}\right) \\ &= P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \times \cdots \times P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-2}}}(A_{n-1}) \\ &= (1-a) \times (1-a) \times \cdots \times (1-a) \times a = (1-a)^{n-2} \times a. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad P(X = n) = a(1-a)^{n-2}$

c) J'ai montré à la question précédente qu'une fois le premier succès réalisé, l'urne était vidée au tirage suivant. Ainsi $Z = X - 1$ représente le rang du premier succès lors des répétitions identiques et indépendantes de l'expérience décrite précédemment.
Donc $Z = X - 1$ suit une loi géométrique de paramètre $a = \dfrac{1}{3}$.

d) Comme Z suit une loi géométrique de paramètre $a = \dfrac{1}{3}$, alors

$$E(Z) = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-a}{a^2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = 6.$$

Et puisque $X = Z + 1$, alors j'en déduis que

$$E(X) = E(Z+1) = E(Z) + 1 = 3 + 1 = 4 \quad \text{et} \quad V(X) = V(Z+1) = V(Z) = 6.$$

3. Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 2$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad u_n = \dfrac{\lambda}{r-s}\left(r^{n-2} - s^{n-2}\right)$.

Initialisation : Pour $n = 2$,

$$u_2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{r-s}\left(r^{2-2} - s^{2-2}\right) = \frac{\lambda}{r-s} \times \left(1-1\right) = 0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \lambda r^{n-2} + s u_n = \lambda r^{n-2} + s\frac{\lambda}{r-s}\left(r^{n-2} - s^{n-2}\right) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\lambda r^{n-2}(r-s) + s\lambda\left(r^{n-2} - s^{n-2}\right)}{r-s} = \frac{\lambda\left(r^{n-1} - sr^{n-2} + sr^{n-2} - s^{n-1}\right)}{r-s} \\ &= \frac{\lambda}{r-s}\left(r^{n-1} - s^{n-1}\right) = \frac{\lambda}{r-s}\left(r^{(n+1)-2} - s^{(n+1)-2}\right). \end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{\lambda}{r-s}\big(r^{n-2} - s^{n-2}\big).$$

4. a) Il s'agit de tirer deux boules parmi six : le nombre total de tirages est $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$.
Le nombre de tirages favorables est trois : ou bien on tire les deux boules noires, ou bien les deux boules blanches, ou bien les deux boules vertes.
Ainsi la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est $b = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

b) L'urne $\mathcal{U}$ contient six boules, l'événement $[Y = 2]$ est donc impossible et $P(Y = 2) = 0$. L'événement $[Y = 3]$ se réalise si deux boules sont retirées à chacun des trois tirages. Ainsi en notant B_i l'événement "deux boules de même couleur sont tirées dans l'urne $\mathcal{V}$ au i-ème tirage",

$$P(Y = 3) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = b \times a = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

En effet, une fois que deux boules d'une même couleur ont été retirées de l'urne $\mathcal{V}$, celle-ci se retrouve alors dans la configuration de l'urne $\mathcal{U}$ (à la couleur près).

c) D'après la formule des probabilités totales, comme $\{B, \overline{B}\}$ forme un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(Y = n+1) &= P\big(B \cap [Y = n+1]\big) + P\big(\overline{B} \cap [Y = n+1]\big) \\ &= P(B) \times P_B(Y = n+1) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(Y = n+1). \end{aligned}$$

Si B est réalisé, on vient de retirer deux boules de la même couleur, donc l'urne $\mathcal{V}$ se trouve dans une configuration similaire à l'urne $\mathcal{U}$ et il reste n tirages pour la vider. Ainsi $P_B(Y = n+1) = P(X = n)$. De même, si B n'est pas réalisé, l'urne $\mathcal{V}$ se trouve dans son état initial et il reste n tirages pour la vider. Ainsi $P_{\overline{B}}(Y = n+1) = P(Y = n)$.
Finalement, en remplaçant dans la formule précédente, j'ai bien montré que

$$P(Y = n+1) = bP(X = n) + (1-b)P(Y = n).$$

d) J'ai montré à la question **2.b)** que $P(X = n) = (1-a)^{n-2}a$. Alors en remplaçant j'obtiens

$$P(Y = n+1) = ba(1-a)^{n-2} + (1-b)P(Y = n).$$

Puis en posant pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = P(Y = n)$, $\lambda = ab$, $r = (1-a)$ et $s = (1-b)$, j'obtiens que $\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = \lambda r^{n-2} + s u_n, \quad$ avec $u_2 = P(Y = 2) = 0$.
Enfin en utilisant le résultat obtenu à la question **3.**, alors $\quad \forall n \geqslant 2$,

$$P(Y = n) = \frac{ab}{(1-a)-(1-b)}\big((1-a)^{n-2} - (1-b)^{n-2}\big) = \frac{ab}{b-a}\big((1-a)^{n-2} - (1-b)^{n-2}\big).$$

e) Les séries géométriques $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ convergent pour $|q| < 1$ et alors leur somme vaut $\frac{1}{1-q}$.
Ici $0 < 1-a < 1$ et $0 < 1-b < 1$, donc en opérant le changement de variable $k = n-2$, j'en déduis que les séries

$$\sum_{n \geqslant 2} (1-a)^{n-2} = \sum_{k \geqslant 0} (1-a)^k \quad \text{et} \quad \sum_{n \geqslant 2} (1-b)^{n-2} = \sum_{k \geqslant 0} (1-b)^k$$

convergent. Alors la série $\sum_{n\geqslant 2} P(Y=n) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{ab}{b-a}\left((1-a)^{n-2}-(1-b)^{n-2}\right)$ converge aussi et sa somme vaut

$$\sum_{n=2}^{+\infty} P(Y=n) = \frac{ab}{b-a}\times\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(1-a)^k - \sum_{k=0}^{+\infty}(1-b)^k\right) = \frac{ab}{b-a}\times\left(\frac{1}{1-(1-a)}-\frac{1}{1-(1-b)}\right)$$
$$= \frac{ab}{b-a}\times\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{ab}{b-a}\times\frac{b-a}{ab} = 1.$$

Exercice 3 – [ECRICOME 2018 / Ex2]

Partie I.

1. La dérivée de g est donnée pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$ par
$$g'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2-4}{x}.$$
Or pour $x>0$, $\quad 2x^2-4 \geqslant 0 \iff 2x^2 \geqslant 4 \iff x^2 \geqslant 2 \iff x \geqslant \sqrt{2}.$
J'en déduis le tableau de signe de $g'(x)$ ainsi que le tableau de variation de g, avec
$$g\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4\ln\left(\sqrt{2}\right) = 2-4\times\frac{1}{2}\times\ln(2) = 2-2\ln(2) = 2\big(1-\ln(2)\big).$$

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$2x^2-4$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$2\big(1-\ln(2)\big)$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction g admet bien un minimum en $\sqrt{2}$, égal à $2\big(1-\ln(2)\big)$.
2. Comme $\ln(2)\approx 0.7$, alors $\quad 2\big(1-\ln(2)\big) \approx 2\times(1-0.7) = 2\times 0.3 = 0.6 > 0.$
Le minimum de g est donc strictement positif et donc pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $\quad g(x)>0$.
3. Je calcule les limites en 0^+ :
$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to 0^+} 1+\ln(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} x = \quad 0\end{array}\right\}\text{ Par quotient, } \lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln(x)}{x} = -\infty.$$
Puis
$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{4} = \quad 0\end{array}\right\}\text{ Par somme, } \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{4}+\frac{1+\ln(x)}{x} = -\infty.$$

Ainsi
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$
et la courbe $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

4. Je calcule les limites en $+\infty$:
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \text{Par croissances comparées, } \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0^+.$$
Puis
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln(x)}{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty\end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x} = +\infty.$$
Ainsi
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

5. Je calcule l'écart entre la courbe et l'asymptote :
$$f(x) - y = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x} - \frac{x}{4} = \frac{1+\ln(x)}{x}.$$
Dans la question précédente, j'ai déjà montré que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0.$$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{x}{4}$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

6. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$, il me faut étudier le signe de $f(x) - y$.
D'après la question précédente, je sais que
$$f(x) - y = \frac{1+\ln(x)}{x}.$$
Or $x > 0$ et
$$1+\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant e^{-1} = \frac{1}{e}.$$
J'en déduis donc le tableau de signe suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$1+\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

Ainsi,
- sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$, la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite $\mathcal{D}$,
- sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

En particulier, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ se coupent en un point A,
dont l'abscisse est $\dfrac{1}{e}$ et l'ordonnée est $\dfrac{\frac{1}{e}}{4} = \dfrac{1}{4e}$.

7. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et son expression est de la forme $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = 1+\ln(x)$ et $v(x) = x$. Comme $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, alors

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{x}\times x - \big(1+\ln(x)\big)\times 1}{x^2}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1-1-\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{4} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2-4\ln(x)}{4x^2} = \frac{g(x)}{4x^2}.$$

Or j'ai déjà étudié le signe de $g(x)$ à la question **2.**.
J'en déduis donc le tableau de signe de $f'(x)$ ainsi que le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

8. a) La fonction f' obtenue à la question précédente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f' = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = g(x)$ et $v(x) = 4x^2$. Comme $u'(x) = g'(x) = 2x - \dfrac{4}{x}$ et $v'(x) = 8x$, alors

$$f''(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\left(2x-\frac{4}{x}\right)\times 4x^2 - \left(x^2-4\ln(x)\right)\times 8x}{\left(4x^2\right)^2}$$
$$= \frac{8x^3-16x-8x^3+32x\ln(x)}{16x^4} = \frac{32x\ln(x)-16x}{16x^4} = \frac{16x\big(2\ln(x)-1\big)}{16x^4} = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2\ln(x)-1}{x^3}$.

b) Je cherche le signe de cette expression :

$$2\ln(x)-1 \geqslant 0 \iff 2\ln(x) \geqslant 1 \iff \ln(x) \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

J'en déduis alors le tableau de signe suivant :

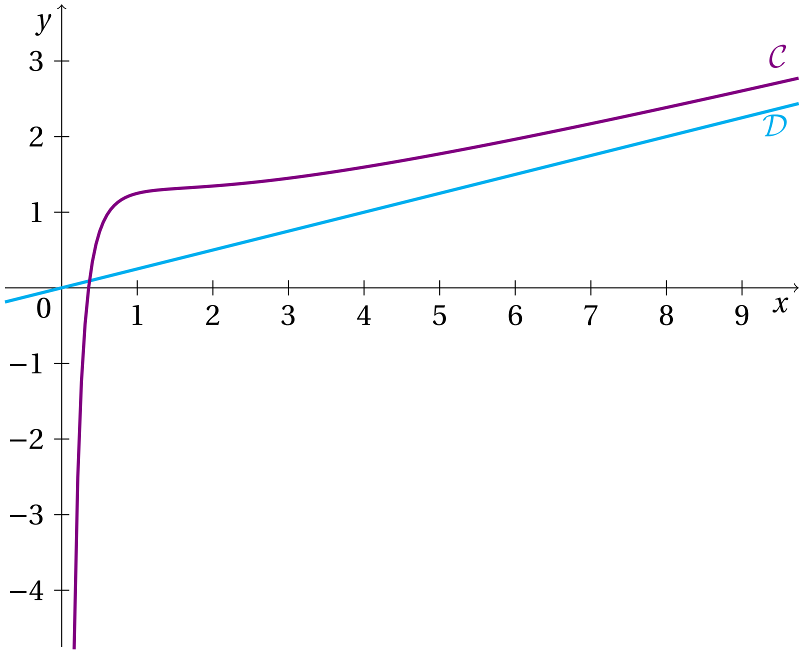
x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
x^3		$+$		$+$	
$2\ln(x)-1$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi,

- la fonction f est concave sur l'intervalle $]0, \sqrt{e}[$,
- la fonction f est convexe sur l'intervalle $]\sqrt{e}, +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}$ possède donc un point d'inflexion
dont l'abscisse est $\sqrt{e}$ et l'ordonnée est $f\left(\sqrt{e}\right)$.

9. Voici le graphe des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.



Partie II.

1. La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et de la forme v^2 avec $v(x) = \ln(x)$.
Puisque $v'(x) = \dfrac{1}{x}$, alors

$$u'(x) = 2 \times v'(x) \times v(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2\ln(x)}{x}.$$

2. Je décompose l'intégrale $\displaystyle\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$ en remplaçant $f(x)$ par son expression :

$$\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \times \int_1^e x\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Puis une primitive de $x \longmapsto x$ est donnée par $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ et une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \longmapsto \ln(x)$.
Il me reste à calculer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Or d'après la question **1.**, la dérivée de $u(x)$ est $u'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$. Donc une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2}u(x) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2$.
J'en déduis alors la valeur des différentes intégrales :

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4} \times \int_1^e x\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + \Big[\ln(x)\Big]_1^e + \left[\frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2\right]_1^e \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{e^2-1}{2} + \big(\ln(e) - \ln(1)\big) + \frac{\ln(e)^2 - \ln(1)^2}{2} = \frac{e^2-1}{8} + 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^2 - 1 + 8 + 4}{8} = \frac{e^2+11}{8}.\end{aligned}$$

3. La fonction h est définie en trois morceaux :
   - Pour $x<1$ et $x>e$, $h(x)=0 \geqslant 0$ et pour $x \in [1,e]$, $h(x)=\dfrac{8}{e^2+11}f(x) \geqslant 0$ puisque $\dfrac{8}{e^2+11}>0$ et que la fonction f est croissante avec $f(1)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1+1}{1}>0$.
     Donc la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
   - Sur $]-\infty,1[$, la fonction h est continue car constante, sur $[1,e]$, la fonction h est continue comme somme de fonctions continues et sur $]e,+\infty[$, la fonction h est continue car constante. La fonction h admet donc au plus deux points de discontinuité sur $\mathbb{R}$.
   - Il me reste à montrer que l'intégrale converge et vaut 1. Par la relation de Chasles, sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{e}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x.$$

     Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$ convergent et valent 0, puisque la fonction est nulle.
     Et par linéarité, puis en utilisant le résultat de la question **2.**,

$$\int_{1}^{e} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{e^2+11} \times \int_{1}^{e} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{e^2+11} \times \frac{e^2+11}{8} = 1.$$

     Finalement l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{e}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0+1+0=1.$$

     Ainsi j'ai bien montré que l'intégrale converge et vaut 1.

   Grâce aux trois points précédents, je conclus que h décrit bien une densité de probabilité.

4. a) Je cherche à calculer $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln(x)\,\mathrm{d}x$. Je pose

$$u'(x)=1 \qquad u(x)=x$$

$$v(x)=\ln(x) \qquad v'(x)=\frac{1}{x}$$

   Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{1}^{e} \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= e\ln(e) - 1\ln(1) - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x = e - \Big[x\Big]_1^e = e-(e-1) = 1.\end{aligned}$$

   J'ai ainsi montré que $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

   b) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Or sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} x\times 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} x \times \frac{8}{e^2+11} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{e}^{+\infty} x \times 0\,\mathrm{d}x.$$

Pour les mêmes raisons que dans la question **3.**, l'intégrale converge donc X admet une espérance et

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{e^2+11} \times \int_1^e x \times \left(\frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

Je calcule alors cette intégrale en la décomposant comme dans la question **2.** :

$$\begin{aligned}
\int_1^e x \times \left(\frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{4} \times \int_1^e x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^e 1\,\mathrm{d}x + \int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4} \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e + \left[x\right]_1^e + 1 = \frac{e^3-1}{12} + \left(e-1\right) + 1 \\
&= \frac{e^3+12e-1}{12}.
\end{aligned}$$

Alors finalement,

$$E(X) = \frac{8}{e^2+11} \times \frac{e^3+12e-1}{12} = \frac{2e^3+24e-2}{3e^2+33}.$$