CONCOURS BLANC 2

Exercice 1 – [BSB 2021 / Ex2]

1. J'étudie le signe de x^2+x+1 pour $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = 1-4 = -3 < 0$. Comme le discriminant est strictement négatif, le polynôme n'admet pas de racine et son signe est constant. Comme $a = 1 > 0$, j'en déduis que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2+x+1 > 0.$$

2. Je sais que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
Alors comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, j'en déduis par composition que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Je calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, en remplaçant x par $-\frac{1}{2}$ dans l'expression de $f(x)$:
$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \ln(3) - \ln(4) = \ln(3) - \ln\left(2^2\right) = \ln(3) - 2\ln(2). \end{aligned}$$
Ainsi j'ai bien montré que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2)$.

4. a) La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2+x+1$.
Puisque $u'(x) = 2x+1$, alors
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

   b) J'obtiens les variations de f en étudiant le signe de $f'(x)$. Je sais que le dénominateur est strictement positif d'après la question **1.**. Je cherche le signe du numérateur :
$$2x+1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -1 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}.$$
Je peux donc déduire le tableau de variation de f grâce au tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)-2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. a) Je résous $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \iff \ln\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \iff x^2 + x + 1 = e^0 = 1 \iff x^2 + x = 0$$
$$\iff x(x+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1.$$

J'ai bien montré que les deux seules solutions de $f(x) = 0$ sont -1 et 0.

b) L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en le point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

Or $f(0) = 0$ puisque 0 est solution de $f(x) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{2 \times 0 + 1}{0^2 + 0 + 1} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = 1 \times (x - 0) + 0, \qquad \textit{i.e.} \quad y = x.$$

De la même manière, pour $a = -1$, l'équation de la tangente devient

$$y = f'(-1) \times \left(x - (-1)\right) + f(-1).$$

Or $f(-1) = 0$ puisque -1 est solution de $f(x) = 0$ et $f'(-1) = \dfrac{-2 + 1}{1 - 1 + 1} = \dfrac{-1}{1} = -1$.
Donc la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation

$$y = -1 \times (x + 1) + 0, \qquad \textit{i.e.} \quad y = -x - 1.$$

6. a) Je dérive de nouveau f' pour obtenir f''. La fonction f' est donnée sous la forme d'un quotient $f' = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x^2+x+1$. Puisque $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x+1$, alors

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(2x + 1)}{\left(x^2 + x + 1\right)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 2 - (4x^2 + 4x + 1)}{\left(x^2 + x + 1\right)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}.$$

b) Pour étudier la convexité de f, j'étudie le signe de $f''(x)$. Pour commencer, je remarque que le dénominateur est toujours positif. Alors le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $-2x^2 - 2x + 1$. Je cherche donc le signe de ce polynôme de degré 2.
Son discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 4 + 8 = 12 > 0$.
Il y a donc deux racines et comme $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, alors

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{12}}{2 \times (-2)} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{12}}{2 \times (-2)} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Je déduis alors le tableau de signe de $-2x^2 - 2x + 1$, qui est aussi celui de $f''(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

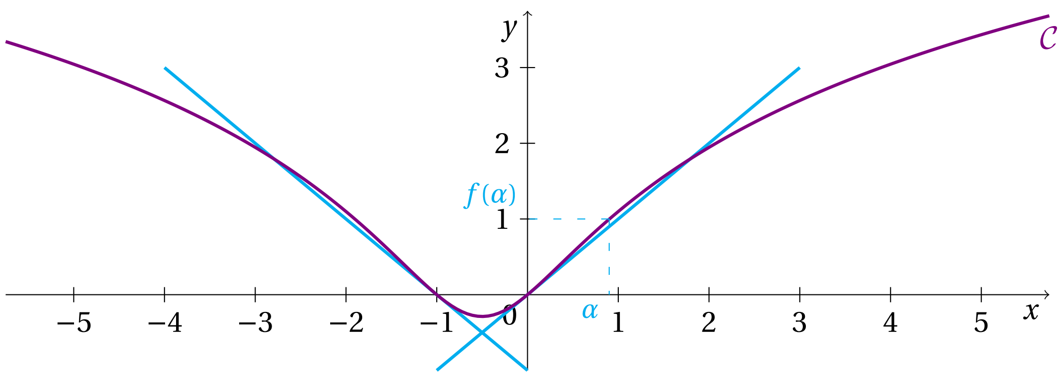
Je peux alors déduire que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$ car $f''(x)$ y est positif et concave sur les intervalles $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right]$ et $\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.
Cela m'amène bien à deux points d'inflexion, points où la convexité change, le premier d'abscisse $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et le second d'abscisse $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

7. a) Le fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante (d'après la question **4.b)**) sur l'intervalle $[0,+\infty[$. J'ai aussi montré que $f(0)=0$ et que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$. Ainsi comme $1 \in [0,+\infty[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, je peux déduire qu'il existe une unique solution, notée α, de l'équation $f(x)=1$.

   b) Je calcule $f(0)$ et $f(1)$: $f(0)=0$ et $f(1)=\ln(1+1+1)=\ln(3)\approx 1.1$.
   Comme $f(\alpha)=1$, que $f(0)\leqslant 1 \leqslant f(1)$ et que f est croissante, j'en déduis que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
   J'ai bien montré que
   $$\alpha \in [0,1].$$

   c) Comme α est solution de $f(x)=1$, je sais que $\ln\left(\alpha^2+\alpha+1\right)=1$. Alors
   $$f(-1-\alpha)=\ln\left((-1-\alpha)^2+(-1-\alpha)+1\right)=\ln\left(\alpha^2+2\alpha+1-1-\alpha+1\right)=\ln\left(\alpha^2+\alpha+1\right)=1.$$
   Ainsi j'ai bien montré que
   $$f(-1-\alpha)=1.$$

8. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de ses tangentes.



Exercice 2 – [extrait d'ECRICOME 2017 / Ex2]

Partie I – Tirages dans une urne

1. a) En considérant comme succès l'événement "piocher une boule noire", la variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition successive de 400 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=400$ et $p=\frac{1}{4}$, puisque une seule boule parmi les quatre boules de l'urne est noire.
   En particulier, le support est donné par $X(\Omega)=[\![0,400]\!]$ et pour tout $k\in X(\Omega)$,
   $$P(X=k)=\binom{400}{k}\times\left(\frac{1}{4}\right)^k\times\left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}.$$

   b) Puisque X suit une loi binomiale, alors
   $$E(X)=np=400\times\frac{1}{4}=100 \quad \text{et} \quad V(X)=np(1-p)=100\times\frac{3}{4}=25\times 3=75.$$

2. a) La variable aléatoire Z ne semble pas suivre un loi usuelle. En revanche, il s'agit d'une variable aléatoire discrète finie puisque les valeurs possibles pour Z sont 1, 2, 3 et 4. Alors le support est donné par $Z(\Omega) = [\![1,4]\!]$ et pour déterminer la loi de Z, il suffit de calculer $P(Z=1)$, $P(Z=2)$, $P(Z=3)$ et $P(Z=4)$, en utilisant la formule des probabilités composées. J'obtiens alors

$$P(Z=1) = \frac{1}{4}, \qquad P(Z=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$

$$P(Z=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad P(Z=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}.$$

Alors après calculs, je remarque que Z suit la loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$.

b) Comme Z suit une loi uniforme, alors

$$E(Z) = \frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{4^2-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

Partie II – Tirages dans une urne choisie au hasard

1. La variable aléatoire T compte le nombre de boules noires obtenues après deux tirages. Aucune, une ou deux boules noires peuvent avoir été piochées. Donc $T(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
2. Je note P l'événement "obtenir PILE", F l'événement "obtenir FACE" et pour tout $k \in [\![0,2]\!]$, N_k l'événement "obtenir une boule noire au k-ième tirage" et B_k l'événement "obtenir une boule blanche au k-ième tirage". Alors d'après la formule des probabilités totales, comme les événements P et F forment un système complet d'événements,

$$P(T=0) = P(F) \times P_F\big(B_1 \cap B_2\big) + P(P) \times P_P\big(B_1 \cap B_2\big) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{9}{32} = \frac{13}{32}.$$

De même,

$$P(T=2) = P(F) \times P_F\big(N_1 \cap N_2\big) + P(P) \times P_P\big(N_1 \cap N_2\big) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}.$$

Et finalement

$$P(T=1) = 1 - P(T=0) - P(T=2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}.$$

3. Comme il s'agit d'une variable aléatoir discrète finie,

$$E(T) = 0 \times P(T=0) + 1 \times P(T=1) + 2 \times P(T=2) = 0 \times \frac{13}{32} + 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{32} = \frac{2 \times 7 + 10}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Si la variable aléatoire T suivait une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, comme $T(\Omega) = [\![0,2]\!]$, alors nécessairement n serait égal à 2. Dans ce cas, l'espérance serait $E = np = 2p$, ce qui force $p = \frac{3}{8}$.

Ainsi la seule loi binomiale possible serait $\mathcal{B}\left(2, \frac{3}{8}\right)$. Mais alors la probabilité $P(T=2)$ serait égale à $p^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$, ce qui n'est pas le cas puisque $P(T=2) = \frac{5}{32}$.

J'en déduis donc que T ne suit pas une loi binomiale.

4. Je calcule puis compare les deux probabilités $P_{[T=1]}(P)$ et $P_{[T=1]}(F)$:

$$P_{[T=1]}(P) = \frac{P\big(P \cap [T=1]\big)}{P(T=1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right)}{\frac{7}{16}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}.$$

Et donc

$$P_{[T=1]}(F) = 1 - P_{[T=1]}(P) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

Il est donc plus probable d'avoir obtenu FACE que PILE si une seule boule noire est piochée.

Exercice 3 – [BSB 2022 / Ex2]

1. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $f(x) = \dfrac{1}{u(x)} + x$, avec $u(x) = 1 + e^x$.
Comme $u'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} + 1 = 1 - \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}.$$

La fonction f' ainsi obtenue est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f' = 1 - \dfrac{u}{v}$,
avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = \left(1+e^x\right)^2$. Comme $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 2e^x\left(1+e^x\right)$, alors

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 - \frac{e^x \times \left(1+e^x\right)^2 - e^x \times 2e^x\left(1+e^x\right)}{\left(\left(1+e^x\right)^2\right)^2} = \frac{-e^x \times \left(1+e^x\right) \times \left(\left(1+e^x\right) - 2e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^4} \\ &= \frac{-e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3} = \frac{e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^3} \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$.

b) La convexité de la fonction s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde. Comme une exponentielle est toujours positive, alors $e^x > 0$ et $1 + e^x > 1 > 0$ donc $\left(1+e^x\right)^3 > 0$.
Il me reste à étudier le signe de $\left(e^x - 1\right)$:

$$e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0.$$

Ainsi j'en déduis que

- f est concave sur l'intervalle $\left]-\infty, 0\right]$, car $f''(x)$ y est négatif,
- f est convexe sur l'intervalle $\left[0, +\infty\right[$, car $f''(x)$ y est positif.

La courbe $\mathcal{C}$ admet bien un point d'inflexion, de coordonnées $\left(0, f(0)\right) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$,
car $f(0) = \dfrac{1}{1+e^0} + 0 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

c) Les variations de la fonction f' s'obtiennent en étudiant le signe de la dérivée f''.
J'ai déjà étudié le signe de f'', je peux directement établir le tableau de signe de $f''(x)$ et le tableau de variation de f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	

J'évalue $f'(x)$ en $x = 0$: $f'(0) = 1 - \dfrac{e^0}{\left(1+e^0\right)^2} = 1 - \dfrac{1}{(1+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Je retrouve bien la valeur annoncée par l'énoncé. En outre, il s'agit du minimum de la fonction f' et ce minimum est positif. J'en conclus donc que la fonction f' est toujours strictement positive et donc que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Je rappelle que

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Alors

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = \ 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = +\infty.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = \ 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = -\infty.$$

b) Je connais les limites de f et sais que la fonction est strictement croissante.
Je dresse alors aisément le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a) Je commence par calculer la différence : $f(x) - x = \dfrac{1}{1+e^x} + x - x = \dfrac{1}{1+e^x}$.
Or j'ai déjà calculé cette limite en $+\infty$ à la question **2.a)** :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ se réduit au voisinage de $+\infty$: la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

b) Je raisonne de la même manière qu'à la question précédente.
Je commence par calculer la différence : $f(x) - \big(x+1\big) = \dfrac{1}{1+e^x} + x - x - 1 = \dfrac{1}{1+e^x} - 1$.
Or j'ai déjà calculé la limite de $\dfrac{1}{1+e^x}$ en $-\infty$ à la question **2.a)**. Alors par somme,

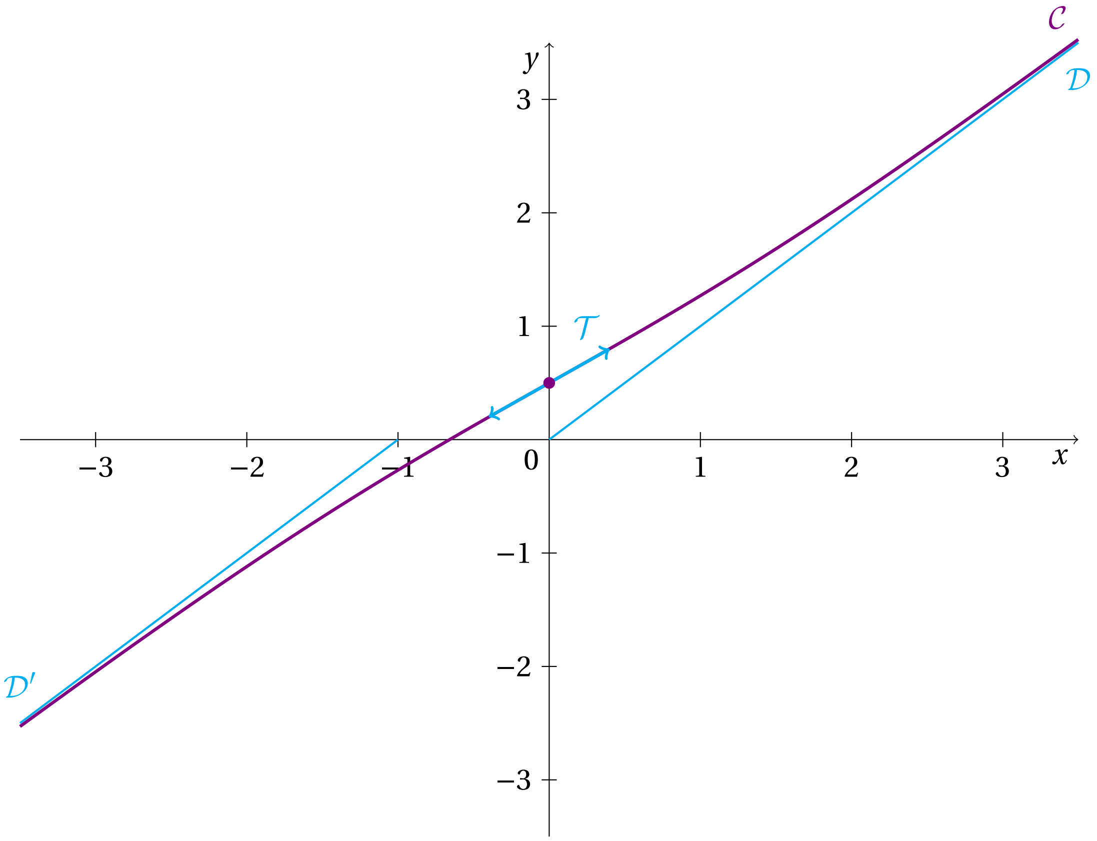
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \big(x+1\big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = x+1$ se réduit au voisinage de $-\infty$: la droite $\mathcal{D}'$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

c) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$. Je connais déjà $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = \dfrac{3}{4}$.
Ainsi l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

d) Voici le graphe des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}$.



4. a) Le fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante (d'après la question **1.c)**) sur $\mathbb{R}$. J'ai aussi montré que la limite de $f(x)$ en $-\infty$ est $-\infty$ et que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$.
Ainsi comme $0 \in \left]-\infty,+\infty\right[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, je peux déduire qu'il existe une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, de l'équation $f(x)=0$.

b) Je calcule $f(-1)$ et $f(0)$: $f(-1)=\dfrac{1}{1+e^{-1}}-1=\dfrac{e}{e+1}-1=-\dfrac{1}{e+1}<0$ et $f(0)=\dfrac{1}{2}>0$.
Comme $f(\alpha)=0$, que $f(-1)\leqslant 0\leqslant f(0)$ et que f est croissante, j'en déduis bien que

$$-1\leqslant \alpha\leqslant 0.$$

c) Voici le script complété.

```
import numpy as np
def f(x) :
    y=1/(1+np.e**x)+x
    return y
a=-1; b=0
while b-a>10**(-3) :
    c=(a+b)/2
    if f(c)*f(a)<0 :
        b=c
    else :
        a=c
print(c)
```

Exercice 4 – [BSB 2021 / Ex3]

1. a) La probabilité a_2 est la probabilité de l'événement A_2, à savoir que le joueur tire vers la cible A. Or s'il tire de nouveau vers la cible A, c'est qu'il n'a pas réussi à atteindre le secteur 1 la première fois. Comme il n'y a que deux secteurs sur la cible A, alors

$$a_2 = P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

De la même manière, b_2 est la probabilité de l'événement B_2, à savoir que le joueur tire vers la cible B. Or s'il tire cette fois vers la cible B, c'est qu'il a réussi à atteindre le secteur 1 la première fois sur la cible A. Comme il n'y a que deux secteurs sur cette cible, alors

$$b_2 = P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

b) Le deuxième lancer ne pouvant se faire que sur l'une des deux cibles A ou B, $\{A_2, B_2\}$ forme un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} b_3 = P(B_3) &= P\big(A_2 \cap B_3\big) + P\big(B_2 \cap B_3\big) = P(A_2) \times P_{A_2}(B_3) + P(B_2) \times P_{B_2}(B_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$b_3 = \frac{5}{8}.$$

2. Je raisonne de manière similaire à la question précédente.
Si le joueur effectue un $(n+1)$-ième lancer, alors le n-ième lancer a été tiré ou bien sur la cible A, ou bien sur la cible B. Donc $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap A_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times 0 = \frac{1}{2} a_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P\big(A_n \cap B_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap B_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n + \frac{1}{2} a_n.$$

3. a) Voici le script complété.

```
def calcul(n) :
    a=1
    b=0
    for k in range(1,n) :
        b=b*3/4+a/2
        a=a/2
    return a,b
```

b) Si les lignes 4. et 5. se retrouvent échangées, la variable `a` est mise à jour en premier et contient la valeur a_i au moment de mettre à jour la variable `b` par la valeur b_i.
C'est un problème puisque b_i dépend de a_{i-1} et non pas de a_i.

4. Je sais que $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ donc la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.
Son premier terme est $a_1 = 1$ et je peux donner sa forme explicite : pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

5. a) Comme $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$, je sais que

$$v_1 = 2^{1-1}b_1 + 2 = 1 \times b_1 + 2 = 1 \times 0 + 2 = 2.$$

Aussi pour tout $n \geqslant 1$, en me servant des questions précédentes et du fait que

$$v_n = 2^{n-1}b_n + 2 \iff v_n - 2 = 2^{n-1}b_n \iff \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = b_n,$$

alors je peux montrer que

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 2^{n+1-1}b_{n+1} + 2 = 2^n\left(\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n\right) + 2 \\
&= \frac{3 \times 2^n}{4}b_n + \frac{2^n}{2}a_n + 2 = \frac{3 \times 2^n}{4} \times \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} + \frac{2^n}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \\
&= \frac{3 \times 2 \times (v_n - 2)}{4} + \frac{2}{2} + 2 = \frac{3(v_n - 2)}{2} + 1 + 2 \\
&= \frac{3}{2}v_n - 3 + 3 = \frac{3}{2}v_n.
\end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$v_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n.$$

b) Je reconnais en $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une suite géométrique, de raison $q = \frac{3}{2}$ et de premier terme $v_1 = 2$. Je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

c) Grâce aux questions précédentes, je sais que $b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}}$ et $v_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.
Alors il me suffit de combiner ces deux expressions pour obtenir que pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^{n-1}} \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}} = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

J'ai ainsi bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

6. Voici le script complété.

```
import numpy.random as rd
cible='a'
n=0
while cible!='c' :
    n=n+1
    if cible=='a' :
        secteur=rd.randint(1,3)
        if secteur==1 :
            cible='b'
    else :
        secteur=rd.randint(1,5)
        if secteur==1 :
            cible='c'
print(n)
```

7. a) Si le joueur se décourage au bout de deux lancers, la seule façon pour que celui-ci gagne un lot est qu'il arrive à la cible C en deux lancers, c'est-à-dire qu'il atteigne le secteur 1 de la cible A au premier lancer, puis le secteur 1 de la cible B au deuxième lancer.
La probabilité ainsi obtenue est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
J'ai bien montré que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot est de $\frac{1}{8}$.

b) Les 20 joueurs représentent $n = 20$ répétitions d'une même épreuve de Bernoulli de succès "Le joueur gagne un lot", de probabilité $p = \frac{1}{8}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire Y compte le nombre de succès.
La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{8}$.
Le support de Y est donné par $Y(\Omega) = [\![0,20]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,20]\!]$,

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{20}{k} \times \frac{1}{8^k} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{20-k}.$$

c) Comme Y suit une loi binomiale, alors

$$E(Y) = np = 20 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = np(1-p) = \frac{5}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{16}.$$

d) La variable aléatoire Y compte le nombre de succès des joueurs, qui coûtent au forain 5€ de lot mais lui rapporte trois fois 1€ par fléchette lancée, soit un gain algébrique de -2€. Cela laisse $(20 - Y)$ échecs qui eux rapportent au forain 2€. En additionnant tout cela, le gain total du forain est donné par

$$G = -2 \times Y + 2 \times (20 - Y) = 2(20 - Y) - 2Y.$$

Finalement, le gain moyen du forain correspond à l'espérance de G, *i.e.* par linéarité,

$$E(G) = E\big(2(20-Y) - 2Y\big) = 2\big(20 - E(Y)\big) - 2E(Y) = 2\left(20 - \frac{5}{2}\right) - 2 \times \frac{5}{2} = 40 - 5 - 5 = 30.$$

Le forain gagne donc en moyenne 30€ pour 20 joueurs.