EXERCICES — CHAPITRE 9

Exercice 1 – Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par

1. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \dfrac{1}{n}$,
2. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$,
3. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \sqrt{n+3}$,
4. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \dfrac{3^n}{n}$.

Exercice 2 – Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+1} = u_n - u_n^2,$$
2. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{1+u_n^2},$$
3. $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+1} = u_n + n^2 + 2n + 1,$$
4. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+1} = u_n + \sqrt{1+u_n}.$$

Exercice 3 –

1. Soit (u_n) définie par $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = -n+4$.
   (a) Établir le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = -x+4$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_{n+1} = -v_n + 4 = f(v_n)$.
   (a) Calculer les six premiers termes de la suite.
   (b) Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de (v_n) ?

Exercice 4 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + 3n + 2$.
On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n - n - \dfrac{1}{3}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3.
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 5 – On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 3.
2. En déduire qu'elle est bornée.

Exercice 6 – En factorisant le numérateur par 2^n et le dénominateur par 3^n, étudier la convergence de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par
$$u_n = \frac{2^n+1}{3^n+1}.$$

Exercice 7 – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. On pose $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que (v_n) est géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Étudier la convergence de (v_n) et de (u_n).

Exercice 8 – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est égal à $\sqrt{1+n}$.
3. Étudier la convergence de (u_n).

Exercice 9 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 16$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0.75 \times u_n$.

1. (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   (c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$
   (a) Calculer S_4.
   (b) Montrer que pour tout entier n, $S_n = 64\left(1 - 0.75^{n+1}\right)$.
   (c) Vers quel réel tend S_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 10 – En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3% de son volume d'eau. On remplit ce bassin avec 90m^3 d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine 2.4m^3 d'eau dans le bassin.
On note u_n le nombre de m^3 d'eau contenus dans ce bassin au bout de n semaines. On a donc $u_0 = 90$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0.97 \times u_n + 2.4$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 80 + 10 \times 0.97^n$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

Exercice 11 – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 12 – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 3$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 6.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?
4. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 13 – On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = x^2$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0.7$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \in]0;1[$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (1-x)^3 + x$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en posant $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $a_0 = 0.4$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < a_n < 1$.
2. Démontrer que (a_n) est croissante.
3. La suite (a_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.