DEVOIR SURVEILLÉ 1

Les documents, la calculatrice et tout matériel éléctronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez.
Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.
Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise.

Ce sujet, comportant 2 pages, est constitué de 4 problèmes. Bon courage!

Exercice 1 – Soient A, J et I les trois matrices carrées de dimension 3 définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer J^2 et J^3.

Solution : On a
$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

(b) Déterminer J^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.

Solution : Comme $J^3 = 0_3$, pour tout $n \geq 3$, on a $J^n = J^3 \times J^{n-3} = 0_3 \times J^{n-3} = 0_3$.

2. (a) Montrer que $A = I + J$.

Solution : On a

$$I + J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Donc on a bien $A = I + J$.

(b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, A^n en fonction des matrices I, J, J^2 et de n. *Indication :* $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Solution : Les matrices I et J commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^n &= (J+I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} J^0 I^n + \binom{n}{1} J^1 I^{n-1} + \binom{n}{2} J^2 I^{n-2} \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2. \end{aligned}$$

(c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression explicite de la matrice A^n en fonction de n.

Solution : On a donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n+2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Vérifier que le résultat trouvé est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Solution :

- Pour $n = 0$, la formule précédente donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 & 0\times(2\times 0+1) \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0.$$

- Et pour $n = 1$, la formule précédente donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 & 1\times(2\times 1+1) \\ 0 & 1 & 2\times 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi, le résultat trouvé est bien valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice 2 – On définit les trois matrices carrées de dimension 2

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits $P \times Q$ et $Q \times P$.

Solution : On a
$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$
De même, on a
$$Q \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

2. On souhaite calculer A^n. On pose $B = QAP$.

   (a) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. *(Les calculs intermédiaires devront être indiqués sur votre copie.)*

   Solution : Calculons $B = QAP$.
$$\begin{aligned} B &= QAP \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   (b) Montrer que $A = PBQ$.

   Solution : On a déjà vu que $B = QAP$. On multiplie cette égalité à gauche par P. Cela donne $PB = PQAP$. Or, d'après la première question, on a $PQ = I_2$. Par ailleurs, $I_2 A = A$. D'où, $PB = AP$. On multiplie maintenant cette égalité à droite par Q, cela donne $PBQ = APQ$. Or, toujours d'après la première question, on a $PQ = I_2$. Par ailleurs, $AI_2 = A$. D'où
$$PBQ = A.$$

   (c) Donner les quatre coefficients de la matrice B^n.

   Solution : Comme la matrice B est diagonale, on sait que
$$B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

   (d) Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 0, \quad A^n = PB^nQ$.

Solution :

Énoncé : Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $A^n = PB^nQ$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PB^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$. Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n, montrons la au rang $n+1$. D'après ce qui précède, $A = PBQ$. D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que $A^n = PB^nQ$, donc on en déduit que

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PB^nQPBQ \\ &= PB^nI_2BQ \qquad \text{car } QP = I_2 \\ &= PB^nBQ \\ &= PB^{n+1}Q \end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi la proposition est héréditaire.

Conclusion : $\mathscr{P}_n$ est vraie en 0 et est héréditaire. Ainsi, par principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, *i.e.*,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PB^nQ.$$

(e) En déduire les quatre coefficients de la matrice A^n.

Solution : Dès lors,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+2^n\right) & \frac{1}{2}\left(2^n-1\right) \\ \frac{1}{2}\left(2^n-1\right) & \frac{1}{2}\left(1+2^n\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3 – Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer les produits matriciels $A(A-I)$ et $B(B-I)$.

Solution :

- $A - I = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$A(A-I) = \begin{pmatrix} 6-6 & 12+6-18 & -12+12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3-3 & 6+3-9 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

- $B - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et

$$B(B-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1+3-2 & 6-6 & -6+6 \\ -1+3-2 & 6-6 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

(b) Montrer que $A^2 = A$ et que $B^2 = B$.

Solution : On a $A(A-I) = 0_3 \iff A \times A - A \times I = 0 \iff A^2 - A = 0 \iff A^2 = A$.
De même, $B(B-I) = 0_3 \iff B \times B - B \times I = 0 \iff B^2 - B = 0 \iff B^2 = B$.
Il était aussi possible de calculer le produit A^2 et de remarquer que l'on retrouvait bien A.

(c) Calculer AB ainsi que BA *(ces deux produits donnent un résultat simple).*

Solution :

$$AB = \begin{pmatrix} -6+6 & -18+18 & 12-12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3+3 & -9+9 & 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2+2 & -6+6 & 6-6 \\ -2+2 & -6+6 & 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

2. On note dans toute la suite $W = A + 2B$.

(a) En utilisant les relations obtenues à la question précédente, montrer que $W^2 = A + 4B$.

Solution : On a $W^2 = (A+2B)^2 = A^2 + A \times 2B + 2B \times A + (2B)^2$.
ATTENTION! *Le produit n'est pas commutatif!*
Comme d'après la question précédente $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = 0_3$ et $BA = 0_3$, on

en déduit que
$$W^2 = A + (2B)^2 = A + 4B^2 = A + 4B.$$

(b) Plus généralement, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non-nul,
$$W^n = A + 2^n B.$$

Solution :

Énoncé : Montrons pour tout $n \geq 1$ que $\mathscr{P}_n$: « $W^n = A + 2^n B$ ».

Initialisation : Pour $n = 1$, nous avons $W^1 = W = A+2B = A+2^1 B$ par la question précédente. Ainsi, la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n, montrons la au rang $n+1$. $W^{n+1} = W^n \times W = \big(A + 2^n B\big) \times (A + 2B)$ par hypothèse de récurrence. Donc
$$W^{n+1} = A^2 + A \times 2B + 2^n B \times A + 2^n B \times 2B = A + 0_3 + 0_3 + 2^{n+1} B^2 = A + 2^{n+1} B.$$
P_{n+1} est vérifiée, on en conclut que la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vérifiée pour $n = 1$ et est héréditaire. Ainsi, par principe de récurrence, on en déduit que la propriété est vraie pour tout n supérieur ou égal à 1, *i.e.,*
$$\forall n \geq 1, W^n = A + 2^n B.$$

Exercice 4 – Résolution de systèmes.

1. Résoudre le système suivant.

$$(\star_1) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ 3x & + & y & & & = & 12 \\ -x & + & 3y & + & z & = & 7 \end{array}\right.$$

Solution :

$$(\star_1) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ & - & 5y & + & 3z & = & -12 \\ -x & + & 3y & + & z & = & 7 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ & - & 5y & + & 3z & = & -12 \\ & + & 5y & & & = & 15 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ & & 5y & & & = & 15 \\ & - & 5y & + & 3z & = & -12 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ & & 5y & & & = & 15 \\ & & & & 3z & = & 3 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Le système équivalent ainsi obtenu est triangulaire, nous pouvons donc le résoudre en remontant, équations par équations.

$L_3 : 3z = 3 \iff z = \dfrac{3}{3} = 1.$

$L_2 : 5y = 15 \iff y = \dfrac{15}{5} = 3.$

$L_1 : x + 2y - z = 8 \iff x + 6 - 1 = 8 \iff x = 8 - 6 + 1 = 3.$

On obtient une unique solution pour le système $(\star_1)$: $\mathscr{S} = \{(3,3,1)\}$.

2. Résoudre le système suivant.

$$(\star_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & z & = & 5 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & - & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Solution :

$$(\star_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & y & - & z & = & 5 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 4 \\ & & 4y & + & 5z & = & -5 \\ 3x & + & y & - & z & = & 5 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 4 \\ & & 4y & + & 5z & = & -5 \\ & & 4y & + & 5z & = & -7 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

Le système équivalent ainsi obtenu n'a pas de solution puisque les deux dernières lignes du système sont incompatibles. En effet, $4y + 5z$ ne peut pas être égal à -5 et à -7 simultanément. Ainsi, pour le système $(\star_2)$,

$$\mathscr{S} = \emptyset.$$