

CONCOURS BLANC 1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Tout calcul doit être accompagné d'une phrase l'expliquant!

Ce sujet comporte 5 pages et est constitué de 12 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- | | |
|--|---|
| 1. $2x - 4 = 0$ | 8. $-x^2 + 5x - 6 > 0$ |
| 2. $4(x - 1) + 3(2x - 1) = 0$ | 9. $2x(x - 2) \leq x^2 - 4$ |
| 3. $x^2 + 2x + 3 = x(x - 1)$ | 10. $\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x-1} = 0$ |
| 4. $x^2 - 7x + 10 = 0$ | 11. $\frac{x}{2x-4} + \frac{3}{-2x+1} \leq \frac{1}{2}$ |
| 5. $2x(x + 1) = -1$ | 12. $x^3 - 7x - 6 = 0$ |
| 6. $x(x + 1) - (4x - 1)(x + 3) = x^2 - 2x + 1$ | 13. $-x^3 + x^2 + 22x - 40 > 0$ |
| 7. $-2x + 3 > 0$ | |

Exercice 2 –

- Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$.
 - Montrer que le polynôme P peut se factoriser sous la forme $P(x) = (x + 1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.
 - Déterminer alors les solutions de l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.
- On considère la fraction rationnelle $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 12x + 12}$.
 - Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 3 – On considère les fonctions f et g définies sur \mathbf{R} par

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x - 5 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^2 + 2x + 5.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f et \mathcal{C}_g la courbe représentative de g .

- Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g ainsi que leurs limites en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) Répondre par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes (**TOUJOURS** en justifiant) :

- (i) L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $] -\infty, 0[$.
- (ii) La courbe \mathcal{C}_g admet une asymptote verticale en 0.
- (iii) $\forall x \in [2, +\infty[, \quad g(x) \leq 0$.
- (iv) g est strictement décroissante sur $[3, 0]$.

Exercice 5 – Un particulier s'adresse à une société de crédit et emprunte 100 000 euros. Le taux mensuel de ce crédit est de 1%. Il est prévu dans le contrat un remboursement fixe, mensuel, égal à 2000 euros, correspondant à une partie du remboursement du crédit et aux intérêts dûs chaque mois.

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 100\,000$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est la somme qu'il reste à rembourser à la fin du n -ième mois après l'emprunt.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Justifier que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 1.01u_n - 2000.$$

3. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (v_n) par

$$v_n = u_n - 200\,000.$$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
5. Calculer u_{69} . (*Indication numérique : $1.01^{69} \approx 1.99$*)
6. En déduire le temps qu'il faudra à cette personne pour rembourser totalement son emprunt. Préciser la somme qu'il lui faudra verser lors du dernier remboursement.

Exercice 6 – Une étude sur l'ensemble des personnes ayant exercé un emploi en France en 2016 a permis d'établir que

- 30% des personnes sont âgées de plus de 50 ans,
- 22.3% des personnes âgées de plus de 50 ans travaillent à temps partiel,
- 82.7% des personnes âgées de moins de 50 ans travaillent à temps plein.

On interroge au hasard une personne ayant occupé un emploi en 2016 et on note

- S l'évènement "la personne était âgée de plus de 50 ans",
- E l'évènement "la personne occupait un emploi à temps plein".

1. Donner les valeurs de

$$P(S), \quad P(\bar{S}), \quad P_S(E), \quad P_S(\bar{E}), \quad P_{\bar{S}}(E) \quad \text{et} \quad P_{\bar{S}}(\bar{E}).$$

2. Calculer $P(S \cap \bar{E})$ et interpréter le résultat.
3. Montrer que la probabilité qu'une personne occupe en 2016 un emploi à temps partiel est égale à 0.188.
4. La personne interrogée occupait un emploi à temps partiel. Quelle est la probabilité qu'elle ait été âgée de plus de 50 ans?

Exercice 7 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 4$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.

Exercice 8 –

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1).$$

2. Redémontrer cette formule en utilisant la formule donnant la somme d'une suite géométrique.

Exercice 9 – Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow -2} 2x^3 - x^2 + 5x + 6$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{2x-3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{-2x+4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-1}{x(x+1)}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 5x^2 + 4x - 7$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{-4x^3 + 2x - 5}$

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + 1) \times \frac{2x+1}{x+5}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{x} + 16}$

10. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\sqrt{\frac{-3}{-x+2}} - 2 \right)^3$

Exercice 10 – On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4},$$

et on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
(b) Calculer les limites de f en $-\infty$, 2^- , 2^+ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
(c) Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-4}$. En déduire que, au voisinage de $+\infty$, la droite \mathcal{D} d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote oblique à la courbe \mathcal{C}_f .
2. (a) Calculer $f'(x)$.
(b) Étudier les variations de f .
(c) Déterminer l'équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
3. Tracer sur un même graphique l'allure de la courbe \mathcal{C}_f ainsi que la tangente \mathcal{T} .
4. On donne $f''(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$.
(a) Étudier la convexité de f . La courbe \mathcal{C}_f possède-t-elle des points d'inflexion?
(b) Où se situent les tangentes de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à la courbe?

Exercice 11 –**Partie A**

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = x^2 + 1 - x.$$

1. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f .
2. La fonction f admet-elle un minimum local? un maximum local?
3. À l'aide du tableau de variation de f , montrer que si $x \in [0, 1]$, alors $f(x) \in [0, 1]$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
(Indication : on pourra utiliser le résultat d'une question de la Partie A.)
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

Exercice 12 – Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : *Approfondissement* ou *Ouverture culturelle*. Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés. La première semaine, 20% des élèves de la classe ont choisi *Approfondissement* et tous les autres ont choisi *Ouverture culturelle*. On admet que

- 20% des élèves ayant choisi *Ouverture culturelle* une certaine semaine s'inscrivent en *Approfondissement* la semaine suivante,
- 30% des élèves ayant choisi *Approfondissement* une certaine semaine s'inscrivent en *Ouverture culturelle* la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe. Pour tout entier naturel n non-nul, on note A_n l'évènement "l'élève a choisi *Approfondissement* la n -ième semaine" et p_n la probabilité de l'évènement A_n . On a alors $p_1 = 0.2$.

1. Donner les valeurs de $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non-nul par $u_n = p_n - 0.4$.
 - (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0.5 et préciser la valeur de son premier terme u_1 .
 - (b) En déduire pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$ l'expression de u_n en fonction de n , puis l'expression de p_n en fonction de n .
4. Étudier le sens de variation de la suite (p_n) .
5. Déterminer la limite de la suite (p_n) .