

DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 –

$$1. A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$$

$$2. B = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{8}{12} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$$

$$3. C = \frac{1 + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \frac{7}{12}} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{12}{60} - \frac{70}{60}} = \frac{11}{6} \times \frac{-60}{58} = -\frac{110}{58} = -\frac{55}{29}$$

$$4. D = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \div \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{20} \div \frac{9}{4} = \frac{1}{120} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{270}$$

Exercice 2 –

$$1. 2x - 3 = 4 \iff 2x = 7 \iff x = \frac{7}{2} \quad \text{donc } \mathcal{S} = \left\{\frac{7}{2}\right\}.$$

$$2. x - \frac{1}{2} = 2x - 1 \iff -x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{2} \quad \text{donc } \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

$$3. 2x - 4 < 3x + 5 \iff -x < 9 \iff x > -9 \quad \text{donc } \mathcal{S} =]-9, +\infty[.$$

4. Je calcule le discriminant $\Delta = 144 - 108 = 36$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{12-6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12+6}{2} = 9.$$

Donc $\mathcal{S} = \{3, 9\}$.

5. Je calcule le discriminant $\Delta = 9 + 40 = 49$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-3-7}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+7}{-2} = -2.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$-x^2+3x+10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$.

6. $x(x-2) = -1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 - 4 = 0$.

Il y a donc une seule racine

$$x_0 = \frac{2}{2} = 1.$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{1\}$.

$$7. \frac{2}{x+3} = \frac{1}{x+1} \iff \frac{2(x+1) - (x+3)}{(x+1)(x+3)} = 0 \iff \frac{2x+2-x-3}{(x+1)(x+3)} = 0 \iff \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} = 0$$

Or $(x+1)(x+3) = 0 \iff x+1 = 0$ ou $x+3 = 0 \iff x = -1$ ou $x = -3$, donc les valeurs interdites sont $x = -1$ et $x = -3$. Par ailleurs $x-1 = 0 \iff x = 1$. Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

$$8. x-3 = 0 \iff x = 3 \text{ donc il y a une valeur interdite : } x = 3. \text{ Par ailleurs le discriminant de } x^2 - 5x + 6 \text{ vaut } \Delta = 25 - 24 = 1. \text{ Il y a donc deux racines}$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Comme 3 est valeur interdite, finalement $\mathcal{S} = \{2\}$.

$$9. \frac{x}{x+1} \leq \frac{2}{2x-3} \iff \frac{x}{x+1} - \frac{2}{2x-3} \leq 0 \iff \frac{x(2x-3) - 2(x+1)}{(x+1)(2x-3)} \leq 0 \iff \frac{2x^2 - 5x - 2}{(x+1)(2x-3)} \leq 0$$

Je calcule le discriminant de $2x^2 - 2x - 5$: $\Delta = 25 + 16 = 41$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{41}}{4} \approx -0.3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{41}}{4} \approx 2.8.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	x_1	$\frac{3}{2}$	x_2	$+\infty$	
$2x^2-2x-5$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x^2-5x-2}{(x+1)(2x-3)}$	$+$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

$$\text{Donc } \mathcal{S} =]-1, x_1] \cup \left] \frac{3}{2}, x_2 \right[.$$

$$10. \text{ Je cherche une racine évidente au polynôme } P(x) = x^3 - 9x^2 + 11x + 21.$$

$$\text{Et } P(-1) = (-1)^3 - 9 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) + 21 = -1 - 9 - 11 + 21 = 0.$$

Donc j'effectue donc la division euclidienne de $x^3 - 9x^2 + 11x + 21$ par $x+1$.

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 & - & 9X^2 & + & 11X & + & 21 & X+1 \\
 - & (X^3 & + & X^2) & & & & X^2 - 10X + 21 \\
 \hline
 & & - & 10X^2 & + & 11X & + & 21 \\
 & & - & (- & 10X^2 & - & 10X) & \\
 \hline
 & & & & 21X & + & 21 \\
 & & & & - & (21X & + & 21) \\
 \hline
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

$$\text{Finalement } P(x) = (x+1)(x^2 - 10x + 21).$$

Puis je calcule le discriminant de $x^2 - 10x + 21$: $\Delta = 100 - 84 = 16$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+4}{2} = 7.$$

En conclusion, $\mathcal{S} = \{-1, 3, 7\}$.

Exercice 3 –

1. (a) Comme $P(-1) = -3 - 7 + 7 + 3 = 0$, le polynôme $P(x)$ se factorise par $x - (-1) = x + 1$.
Donc il existe un polynôme $Q(x)$, de degré $3 - 1 = 2$, tel que $P(x) = (x + 1)Q(x)$.
Je détermine ce polynôme $Q(x)$ en effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 3X^3 & - & 7X^2 & - & 7X & + & 3 & X+1 \\
 - (3X^3 & + & 3X^2) & & & & & \hline
 & & - & 10X^2 & - & 7X & + & 3 \\
 - (- & 10X^2 & - & 10X) & & & & \\
 \hline
 & & & & 3X & + & 3 \\
 & & & & - & (3X & + & 3) \\
 \hline
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

Finalement $P(x) = (x + 1)(3x^2 - 10x + 3)$.

- (b) Il me reste à traiter le polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 100 - 36 = 64 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 8}{6} = 3.$$

Donc l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$ a trois solutions : $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{3}, 3\right\}$.

2. (a) Je détermine les valeurs interdites : ce sont les solutions de l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$.
Le discriminant vaut $\Delta = 144 - 144 = 0$. Il y a donc une unique racine

$$x_0 = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- (b) J'établis le tableau de signe de la fraction rationnelle $f(x)$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	2	3	$+\infty$		
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		
$3x^2-10x+3$	$+$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$3x^2-12x+12$	$+$		$+$	$+$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$			
						$-$	0	$+$

Et donc l'inéquation $f(x) \geq 0$ a pour solutions : $\mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty[$.

Exercice 4 –

1. (a) $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{3} - \frac{9}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4} = \frac{-\frac{27}{8}}{3} + \frac{27}{8} + \frac{9}{4} = -\frac{9}{8} + \frac{27}{8} + \frac{18}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$.
- (b) Graphiquement, j'établis le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f		$\nearrow \frac{9}{2}$	$\searrow 0$	\nearrow

(c) Je développe la forme factorisée donnée par l'énoncé pour retrouver $f(x)$:

$$\frac{(x+3)(2x-3)^2}{12} = \frac{(x+3)(4x^2-12x+9)}{12} = \frac{4x^3-27x+27}{12} = \frac{x^3}{3} - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4} = f(x).$$

J'ai bien montré que pour tout réel x , $f(x) = \frac{(x+3)(2x-3)^2}{12}$.

(d) Comme $12 > 0$, il me suffit d'étudier le signe de $(x+3)(2x-3)^2$. Or un carré est toujours positif donc $(2x-3)^2 \geq 0$. Par ailleurs $x+3 = 0 \iff x = -3$.

J'en déduis le tableau de signe suivant pour $f(x)$:

x	$-\infty$	-3	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$(2x-3)^2$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$

2. Pour résoudre l'équation $g(x) = 0$, je commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{2}{3} \times (-3) = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0. \text{ Il y a donc deux racines}$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{\frac{4}{3}} = -3 \quad \text{et} \quad \frac{-1+3}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{-3, \frac{3}{2}\right\}.$$

3. Pour étudier la position des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , il me faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

$$\text{D'après la question précédente, } g(x) = \frac{2}{3}(x+3)\left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3}. \text{ Ainsi}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \times \left(\frac{2x-3}{4} - 1\right) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \times \frac{2x-7}{4} = \frac{(x+3)(2x-3)(2x-7)}{12}.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-3	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$2x-7$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Ainsi sur $]-\infty, -3]$ et sur $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$, \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f alors que sur $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right]$, \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g .