

DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 – On considère les matrices suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ et QP .
2. Vérifier que $QAP = L$.
3. a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $QA^nP = L^n$.
 b) Soit $J = L - I$. Calculer J^2 puis J^3 .
 c) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

- d) En déduire, pour $n \geq 2$, les neufs coefficients de L^n .
 Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque $n = 0$ et $n = 1$.
- e) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On considère les trois suites $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ et $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_n, \quad v_{n+1} = v_n + 2w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = 2u_n + w_n.$$

- a) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$? Donner u_n pour tout entier $n \geq 1$.
- b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
- c) Établir pour tout entier $n \geq 1$ que $X_n = A^{n-1}X_1$.
- d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$v_n = 2n(n-1) \quad \text{et} \quad w_n = 2n.$$

Exercice 2 –

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - 1 + x$.

1. a) Montrer que g est croissante sur \mathbb{R} .
 b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x , le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}$. On note \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 2 cm.

2. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- b) Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.
- c) Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
3. a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , la relation $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.
- b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites calculées en 2..
4. Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel x , la relation $f''(x) = \frac{2-x}{e^x}$. Étudier la convexité de f .
5. Tracer l'allure de \mathcal{C} et de \mathcal{D} .

Exercice 3 –

- On note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X et $\text{Cov}(X, Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y .
- On donnera tous les résultats sous forme fractionnaire.

On dispose de deux urnes \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 . L'urne \mathcal{U}_1 contient trois boules rouges et deux boules vertes, tandis que l'urne \mathcal{U}_2 contient une boule rouge et quatre boules vertes. On choisit une des deux urnes au hasard (c'est-à-dire que chacune des deux urnes a la même probabilité d'être choisie), puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

- Si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne \mathcal{U}_1 .
- Si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne \mathcal{U}_2 .

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge,} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte.} \end{cases} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge,} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte.} \end{cases}$$

On pose $Z = X_1 + X_2$.

- a) Montrer que $P(X_1 = 1) = \frac{2}{5}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?
b) Donner les valeurs de $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
- a) Montrer que $P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = \frac{12}{25}$.
b) Donner sous forme de tableau la loi du couple (X_2, Z) .
- a) Déterminer la loi de X_2 ainsi que $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
c) Déterminer la loi de Z .
d) Calculer $E(Z)$. Montrer que $V(Z) = \frac{414}{625}$.
- On considère l'événement "la première boule tirée est verte". Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne \mathcal{U}_1 .
- On se propose dans cette question de calculer $V(Z)$ par une autre méthode.
a) Calculer $E(X_2 Z)$.
b) Montrer que $\text{Cov}(X_2, Z) = \frac{204}{625}$.
c) En déduire la valeur de $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
d) Utiliser le résultat précédent pour calculer $V(Z)$.