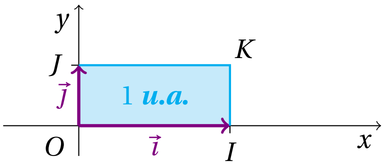
11 | Intégrales et primitives

I – Intégrale et aire

1 – Unité d'aire

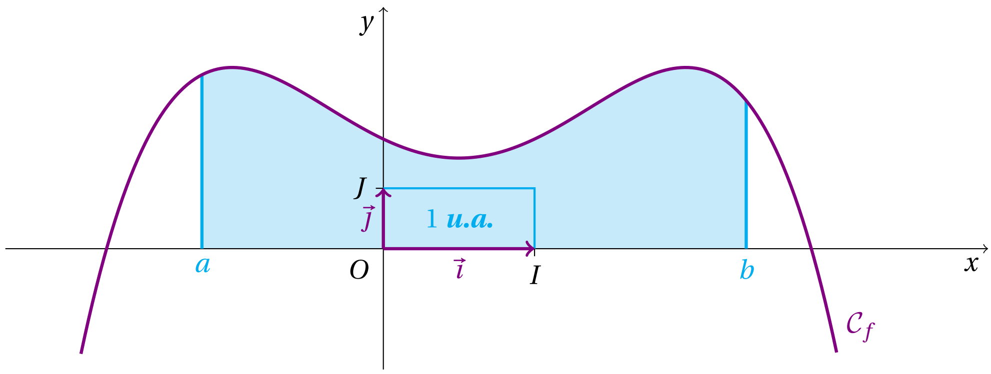
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée *u.a.*, est l'aire du rectangle unitaire $OIKJ$ avec $I(1,0)$, $J(0,1)$ et $K(1,1)$.



2 – Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 11.1 – Soient f une fonction définie, **continue** et **positive** sur un intervalle $[a,b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

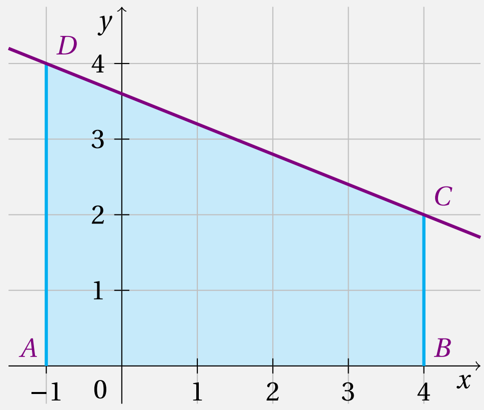
Ce nombre est noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque 11.2 –

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit "intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$".
- Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- La variable x est dite *"muette"*. Elle n'intervient pas dans le résultat, c'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ car le domaine $\mathcal{D}_f$ est alors réduit à un segment.

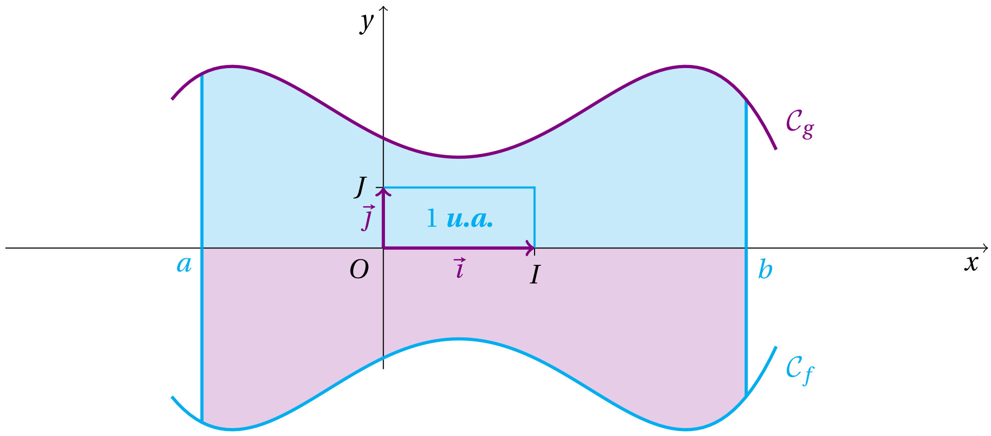
Exemple 11.3 – Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{2x+18}{5}\,\mathrm{d}x$.



3 – Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et **négative** sur un intervalle $[a,b]$, alors la fonction g définie sur l'intervalle $[a,b]$ par $g(x) = -f(x)$ est une fonction continue et **positive** sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine $\mathcal{D}_g$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Définition 11.4 – Soient f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a,b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}.$$

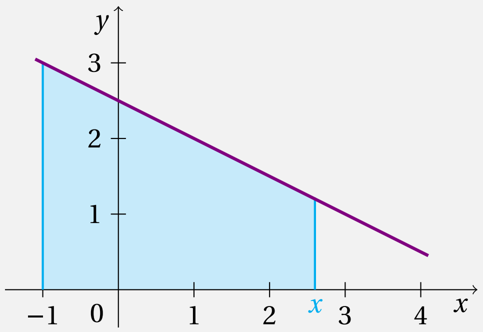
4 – Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a,b]$, associe l'intégrale de la fonction f entre a et x : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 11.5

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.
La fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est f.

Exemple 11.6 – Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1,4]$ par $f(x) = \dfrac{5-x}{2}$.



II – Primitives

1 – Définition

Définition 11.7 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une **primitive** de la fonction f sur I si F est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 11.8 – Vérifier les assertions suivantes.

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
- $G : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H : x \mapsto x^2 + c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.

Remarque 11.9 –

- Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle d'**une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.

Théorème 11.10

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est de la forme $F + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné : Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 11.11 – Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 - 1$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ qui vérifie $F(1) = 0$.

2 – Primitives des fonctions usuelles

Étant donné la définition d'une primitive, certains résultats connus pour les fonctions dérivées se prolongent aux fonctions primitives.

Proposition 11.12

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

Proposition 11.13 – Primitives des fonctions usuelles

Le tableau suivant récapitule les primitives des fonctions usuelles.

f **est définie sur** I **par**	**une primitive** F **est donnée par**	**validité**
$f(x)=a \qquad (a\in\mathbb{R})$	$F(x)=ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=x^n \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{x}$	sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n} \qquad (n\geqslant 2 \text{ entier})$	$F(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	sur $\mathbb{R}_+^*$

Exemple 11.14 – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x)=3x^2$
2. $f(x)=x+\dfrac{3}{2}$
3. $f(x)=(2x+1)(x-3)$
4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$
5. $f(x)=x^2+3x+\dfrac{1}{x^2}$
6. $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$
7. $f(x)=x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
8. $f(x)=\dfrac{6x^2-8x+2}{5}$
9. $f(x)=-\dfrac{6}{x^4}$
10. $f(x)=x^2+3x-2$
11. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+3x^2-\dfrac{1}{x^2}$

3 – Primitives des fonctions composées usuelles

Proposition 11.15 – Primitives des fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Le tableau suivant récapitule les primitives des fonctions composées.

Conditions	**fonction f**	**une primitive F est donnée par**
$n \in \mathbb{N}^*$	$f = u' \times u^n$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f = \dfrac{u'}{u^2}$	$F = -\dfrac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I et $n > 1$	$f = \dfrac{u'}{u^n}$	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$

Méthode 11.16 – Calculer une primitive d'une fonction composée
Pour calculer une primitive d'une fonction composée f, il faut s'appuyer sur le tableau précédent.
On procède de la manière suivante :

1. On repère la forme de la fonction : un produit $u' \times u^n$, un quotient $\dfrac{u'}{u^n}$, etc.
2. On **identifie** la fonction u et on **calcule** sa dérivée u'.
3. On compare la forme repérée avec la fonction de départ. Il y a alors deux possibilités :
   - La forme repérée correspond exactement à la fonction de départ, auquel cas une primitive est directement donnée par la formule du tableau.
   - La forme repérée est de la forme $k \times f(x)$, auquel cas une primitive est donnée par la formule du tableau, **multipliée par** $\dfrac{1}{k}$.

Exemple 11.17 – Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x+1)^2$

2. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(1-3x)^2}$

4. $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

Méthode 11.18 – Déterminer la primitive vérifiant une condition donnée
Pour déterminer **la** primitive F d'une fonction f vérifiant une condition donnée :

1. On commence par déterminer la forme générale de toutes les primitives de la fonction f :
   - ▷ Les primitives de f sont toutes de la forme $F + C$.
2. On utilise ensuite la condition que doit vérifier la primitive demandée pour déterminer la valeur de la constante C.

Exemple 11.19 – Calculer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

III – Intégrale d'une fonction continue

1 – Définition

Définition 11.20 – Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Si F est une primitive de f sur I, alors l'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Remarque 11.21 –

- La différence $F(b) - F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$. Ainsi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Puisqu'il s'agit de la différence entre deux termes, le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 11.22 – Calculer chacune des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^3 3t^2 + 2t - 1\,\mathrm{d}t$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

Proposition 11.23

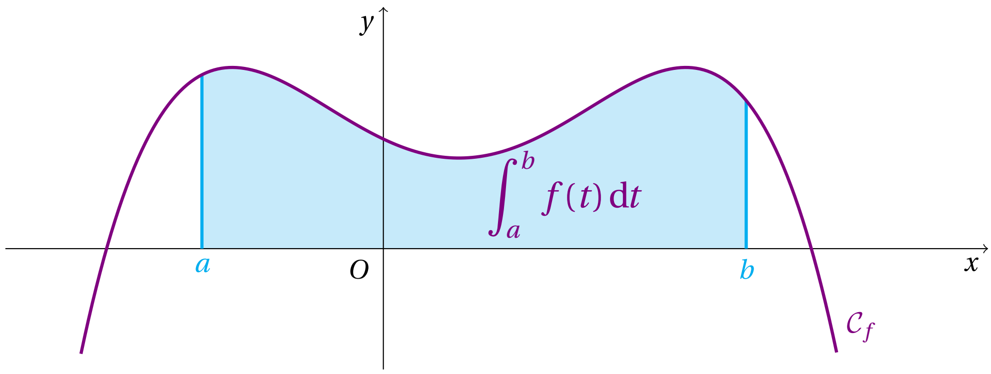
Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I. Alors

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 – Premières propriétés

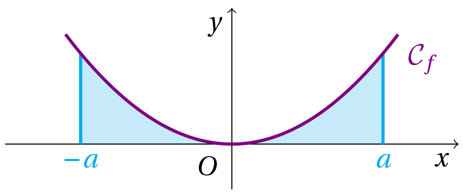
Proposition 11.24

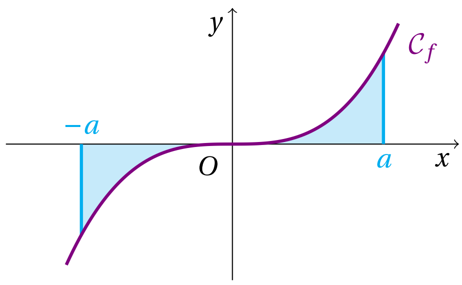
Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$, f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.



Proposition 11.25

- Si la fonction f est continue et paire sur $[-a,a]$, alors $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si la fonction f est continue et impaire sur $[-a,a]$, alors $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.





Exemple 11.26 –

- $\int_{-1}^1 t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
- $\int_{-1}^1 t^2+|t|\,\mathrm{d}t$

Proposition 11.27 – Relation de Chasles

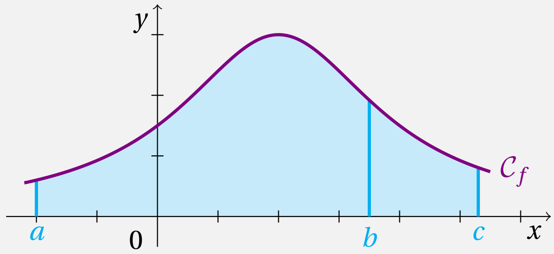
Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I. Alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 11.28 – Interprétation graphique

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = b$ et $x = c$.

(f continue et positive sur $[a, c]$ et $a \leqslant b \leqslant c$).



Méthode 11.29 – Calculer l'intégrale d'une fonction f définie "par morceaux"

Pour calculer l'intégrale d'une fonction f dont l'expression est définie en plusieurs morceaux, on utilise la relation de Chasles. On décompose ainsi l'intégrale de f sur chaque intervalle sur lequel on connaît l'expression de f.

Exemple 11.30 – Soit f la fonction définie sur $[-2, 3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.