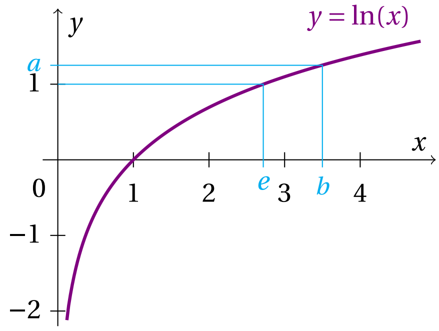
13 | Fonction exponentielle

I – Définition et premières propriétés

Nous pouvons généraliser la démarche qui nous a permis d'introduire dans le chapitre précédent le nombre e. Il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre réel a quelconque : il existe un unique nombre réel b tel que $\ln(b) = a$.

Ainsi, pour $a = 1$, on trouve $b = e$. Pour $a = 2$, on trouve $b = e^2$. Pour $a = 3$, on trouve $b = e^3$. Pour $a = -1$, on trouve $b = e^{-1}$. Et pour $a = n$, où n est un entier relatif, on trouve $b = e^n$.



Définition 13.1 – Le nombre b tel que $\ln(b) = a$ est appelé **exponentielle de** a et est noté e^a.

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée exp, définie sur $\mathbf{R}$ et prenant ses valeurs dans $]0;+\infty[$. Pour des raisons évidentes, nous noterons le plus souvent $\exp(x) = e^x$.

$$]0;+\infty[\xrightarrow{\ln}\mathbf{R} \quad \text{et en sens inverse} \quad]0;+\infty[\xleftarrow{\exp}\mathbf{R}.$$

Proposition 13.2

- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\quad e^x > 0$.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$ et pour tout réel $y > 0$, $\quad y = e^x \iff x = \ln(y)$.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\quad \ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\quad e^{\ln(x)} = x$.

Remarque 13.3 – On a

$$\ln(1) = 0 \iff e^0 = 1.$$

Exemple 13.4 – Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes.

- $e^x = 1$
  $e^x = 1 \iff x = \ln(1) \iff x = 0.$
- $e^{2t-1} = 1$
  $e^{2t-1} = 1 \iff 2t - 1 = \ln(1) = 0$
  $\iff 2t = 1 \iff t = \frac{1}{2}.$
- $\ln(x) = 2$
  $\ln(x) = 2 \iff x = e^2.$
- $\ln(3x) = \frac{1}{2}$
  $\ln(3x) = \frac{1}{2} \iff 3x = e^{\frac{1}{2}} \iff x = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}.$

Proposition 13.5

Pour tous réels a et b,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Comme pour la fonction logarithme népérien, on peut tirer plusieurs conséquences de cette propriété fondamentale de la fonction exponentielle.

Proposition 13.6

- Pour tout réel $a \in \mathbf{R}$, $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- Pour tous réels a et b dans $\mathbf{R}$, $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout réel $a \in \mathbf{R}$ et pour tout entier relatif $n \in \mathbf{N}$, $\quad e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

Démonstration.

- $e^a \times e^{-a} = e^0 = 1$ donc $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- $e^{a-b} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \dfrac{1}{e^b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- $e^{na} = \exp\left(\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{e^a \times e^a \times \ldots e^a}_{n \text{ fois}} = (e^a)^n$.

□

Exemple 13.7 – Soient x et y deux réels. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$.
2. $\dfrac{(e^x)^2}{e^x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$.
3. $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{x+x} = e^{2x}$.
4. $(e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2 = e^{6x} \times e^{-2x} = e^{6x-2x} = e^{4x}$.
5. $e^0 \times e^{-x} \times (e^x)^2 = 1 \times e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x$.
6. $\dfrac{e^x}{e^y} \times e^{y-x} = e^{x-y} \times e^{y-x} = e^{x-y+y-x} = e^0 = 1$.

II – Étude de la fonction exponentielle

1 – Dérivée et sens de variation

Proposition 13.8

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\left(\exp(x)\right)' = \exp(x)$.

Démonstration. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \ln\left(\exp(x)\right)$.
On a $f'(x) = \dfrac{\left(\exp(x)\right)'}{\exp(x)}$. Mais on sait par ailleurs que $\ln\left(\exp(x)\right) = x$ et donc que $f(x) = x$. Donc on a également $f'(x) = 1$. Ainsi

$$1 = \frac{\left(\exp(x)\right)'}{\exp(x)} \text{ et donc } \left(\exp(x)\right)' = \exp(x).$$

□

Proposition 13.9

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. Pour tout réel x, on a $\left(\exp(x)\right)' = \exp(x) > 0$.
Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. □

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes.

Proposition 13.10

Pour tous réels a et b,

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$,
- $e^a > e^b$ si et seulement si $a = b$.

Exemple 13.11 – Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$

$$\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1} \iff e^{5x+2} = e^{2x^2-1} \iff 5x+2 = 2x^2-1 \iff 2x^2-5x+1 = 0.$$

On calcule le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 25 - 8 = 17$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{4}.$$

2. $e^{x^2+x-1} = 1$

$$e^{x^2+x-1} = 1 \iff e^{x^2+x-1} = e^0 \iff x^2+x-1 = 0.$$

On calcule le discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. $e^{2x} \leqslant e^x$

$$e^{2x} \leqslant e^x \iff 2x \leqslant x \iff x \leqslant 0.$$

Donc $\mathscr{S} =]-\infty; 0]$.

4. $e^{2x}e^{x^2} < 1$

$$e^{2x}e^{x^2} < 1 \iff e^{2x+x^2} < e^0 \iff 2x + x^2 < 0.$$

Les racines de ce polynôme de degré 2 sont 0 et -2. On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc $\mathscr{S} =]-2; 0[$.

2 – Limites

Proposition 13.12

La fonction exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Proposition 13.13

La fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe d'équation $y = e^x$ en $-\infty$.

Exemple 13.14 – Calculer les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} e^X = 1$. Donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

- $\lim\limits_{x\to0^-} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

  On a $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc par composition, $\lim\limits_{x\to0^-} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

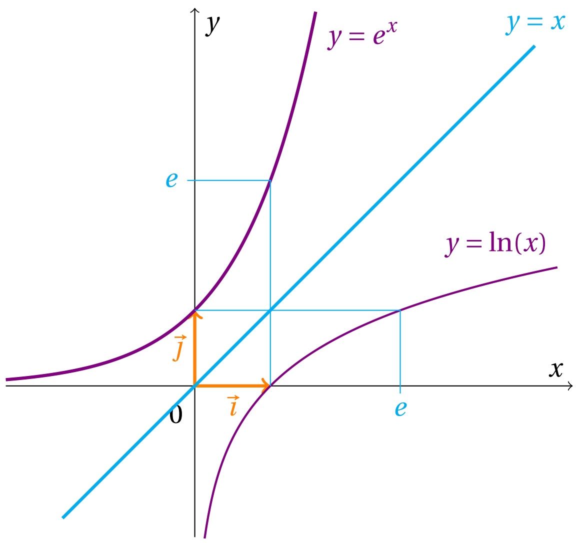
- $\lim\limits_{x\to0^+} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

  On a $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. Donc par composition, $\lim\limits_{x\to0^+} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

3 – Courbe représentative

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.

- La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



4 – Croissance comparée

Proposition 13.15

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

En particulier, lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Remarque 13.16 – Ces limites sont normalement des formes indéterminées. Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de croissance comparée.
On retient que l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances de x.

Exemple 13.17 –

- $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty.$

III – Étude d'une fonction de la forme $\exp(u)$

Proposition 13.18

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $f = e^u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

On note en abrégé

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Exemple 13.19 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{x^3-4x^2+2x-3}$. Calculer $f'(x)$.
Posons $u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$. On a $u'(x) = 3x^2 - 8x + 2$. Donc

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (3x^2 - 8x + 2)e^{x^3-4x^2+2x-3}.$$

Exemple 13.20 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{2x^3-15x^2+36x-25}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to-\infty} e^X = 0,$$

donc par composition,

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x^3-15x^2+26x-25} = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = \lim_{x\to+\infty} x^3 + -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty,$$

donc par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x^3-15x^2+26x-25} = +\infty.$$

2. Étudier les variations de la fonction f.
Posons $u(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25$. Alors $u'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$. Donc

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 6(x^2 - 5x + 6)e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25}.$$

Une exponentielle est toujours positive. Il ne nous reste donc qu'à étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$. On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ et ainsi le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$6(x^2 - 5x + 6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25}$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	e^3	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$