DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 – On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. **Étude du signe de g.**
   (a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$.
   (b) Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x et en déduire le tableau de variation de g.
   (c) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. **Étude asymptotique de f.**
   (a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$.
   (b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ quand $x \to +\infty$.
3. **Représentation graphique de f.**
   (a) Démontrer que
   $$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$
   (b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbf{R}_+^*$ en indiquant dans celui-ci les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
   (c) Tracer sur un même dessin le graphe de $\mathscr{C}_f$ ainsi que celui de son asymptote (D).

Exercice 2 –

- On note $E(X)$ et $V(X)$, respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X et $\mathrm{Cov}(X,Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.
- On donnera tous les résultats sous forme fractionnaire.

On dispose de deux urnes $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$. L'urne $\mathscr{U}_1$ contient 3 boules rouges et 2 boules vertes tandis que l'urne $\mathscr{U}_2$ contient 1 boule rouge et 4 boules vertes. On choisit une des deux urnes au hasard (c'est-à-dire que chacune des deux urnes a la même probabilité d'être choisie) puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

- Si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage dans l'urne $\mathscr{U}_1$.
- Si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage dans l'urne $\mathscr{U}_2$.

Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge,} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte.} \end{cases} \quad \text{et } X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge,} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte.} \end{cases}$$

On note $Z = X_1 + X_2$.

1. (a) Montrer que $P(X_1 = 1) = \dfrac{2}{5}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?
   (b) Donner les valeurs de $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. (a) Montrer que $P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = \dfrac{12}{25}$.
   (b) Donner, sous forme de tableau, la loi du couple (X_2, Z).

3. (a) Déterminer la loi de X_2 ainsi que $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
   (b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?
   (c) Déterminer la loi de Z.
   (d) Calculer $E(Z)$. Montrer que $V(Z) = \frac{414}{625}$.
4. On considère l'évènement "la première boule tirée est verte". Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathscr{U}_1$.
5. On se propose dans cette question de calcuer $V(Z)$ par une autre méthode.
   (a) Calculer $E(X_2 Z)$.
   (b) Montrer que $\text{Cov}(X_2, Z) = \frac{204}{625}$.
   (c) En déduire la valeur de $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
   (d) Utiliser le résultat précédent pour calculer $V(Z)$.

Exercice 3 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.
2. **Application à l'étude de deux suites.**
   On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 3b_n + 3^n.$$
   Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Établir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (c) En déduire, en utilisant le résultat de la question 1, que l'on a
   $$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$
3. **Application au calcul des puissances d'une autre matrice.**
   On considère les matrices
   $$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Vérifier que $PMP^{-1} = A$. En déduire que $M = P^{-1}AP$.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $M^n = P^{-1}A^nP$.
   (d) En déduire que pour tout entier naturel n, on a
   $$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 – Intégration

1. Calculer une primitive des fonctions suivantes.

(a) $f_1(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

(b) $f_2(x) = x^2 + x - 3$

(c) $f_3(x) = (2x-1)^2$

(d) $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$

(e) $f_5(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

(f) $f_6(x) = (4x-2)(2x^2-2x+1)^3$

(g) $f_7(x) = \dfrac{2}{(2x-1)^2}$

(h) $f_8(x) = \dfrac{2}{x^2}$

(i) $f_9(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{x^2}$

(j) $f_{10}(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

2. Calculer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^1 (2x^2 - 5x + 3)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(1+3x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t$

(g) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x - 2\right)\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} (4x-1)^3\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_{-1}^0 x(5x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$

3. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

(a) $\displaystyle\int_0^1 2xe^{3x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^e x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x$