# DEVOIR SURVEILLÉ 1

**Exercice 1 –**

1. (a) Je calcule $A-I$ puis effectue le produit $A\times(A-I)$ : $A-I=\begin{pmatrix}-3&-6&6\\0&-1&0\\-1&-3&2\end{pmatrix}$ et

$$A(A-I)=\begin{pmatrix}6-6&12+6-18&-12+12\\0&0&0\\3-3&6+3-9&-6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3.$$

Je calcule désormais $B-I$ puis effectue le produit $B\times(B-I)$ : $B-I=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&2&-2\\1&3&-3\end{pmatrix}$ et

$$B(B-I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1+3-2&6-6&-6+6\\-1+3-2&6-6&-6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3.$$

(b) D'après la question précédente,

$$A(A-I)=0_3 \iff A\times A-A\times I=0 \iff A^2-A=0 \iff A^2=A.$$

De même,

$$B(B-I)=0_3 \iff B\times B-B\times I=0 \iff B^2-B=0 \iff B^2=B.$$

*<u>Remarque</u> : Calculer le produit $A^2$ et remarquer que l'on retrouvait bien $A$ permettait de vérifier l'égalité, mais ne répondait pas à la question "En déduire".*

(c) Je calcule les produits $AB$ et $BA$.

$$AB=\begin{pmatrix}-6+6&-18+18&12-12\\0&0&0\\-3+3&-9+9&6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3.$$

$$BA=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2+2&-6+6&6-6\\-2+2&-6+6&6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3.$$

2. (a) En développant, $W^2=(A+2B)^2=A^2+A\times 2B+2B\times A+(2B)^2$.
*Mais **ATTENTION**, le produit n'est pas commutatif!*
Comme d'après la question précédente $A^2=A$, $B^2=B$, $AB=0_3$ et $BA=0_3$, j'en déduis que

$$W^2=A+(2B)^2=A+4B^2=A+4B.$$

(b) Je raisonne par récurrence sur $n\geqslant 1$.

**Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $W^n=A+2^nB$.

**Initialisation :** Pour $n=1$, $W^1=W=A+2B=A+2^1B$ d'après la question précédente. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $W^n = A + 2^n B$. Alors

$$\begin{aligned} W^{n+1} &= W^n \times W = \left(A + 2^n B\right) \times (A + 2B) = A^2 + A \times 2B + 2^n B \times A + 2^n B \times 2B \\ &= A + 0_3 + 0_3 + 2^{n+1} B^2 = A + 2^{n+1} B \end{aligned}$$

Donc $W^{n+1} = A + 2^{n+1} B$. Finalement $P_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \geqslant 1, \quad W^n = A + 2^n B.$$

**Exercice 2 –**

1. Je calcule les produits $P \times Q$ et $Q \times P$.

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$Q \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

2. (a) Je calcule $B = QAP$.

$$\begin{aligned} QA &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ QAP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

J'ai bien montré que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Je sais que $B = QAP$. Je multiplie cette égalité à gauche par $P$ et j'obtiens $PB = PQAP$. Or d'après la première question, $PQ = I_2$. Et $I_2 A = A$. D'où $PB = AP$.
Je multiplie maintenant cette égalité à droite par $Q$ et j'obtiens $PBQ = APQ$. Or toujours d'après la première question, $PQ = I_2$. Et $AI_2 = A$. D'où

$$PBQ = A.$$

(c) Comme la matrice $B$ est diagonale, je sais que

$$B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

(d) Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 0$.

**Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PB^nQ$.

**Initialisation :** Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PB^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
D'après ce qui précède, $A = PBQ$ et d'autre part, par hypothèse de récurrence, je sais que $A^n = PB^nQ$. Donc j'en déduis que

$$A^{n+1} = A^n \times A = PB^nQPBQ = PB^n I_2 BQ = PB^n BQ = PB^{n+1}Q.$$

Donc $A^{n+1} = PB^{n+1}Q$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PB^nQ.$$

(e) Grâce aux questions précédentes,

$$A^n = PB^nQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+2^n\right) & \frac{1}{2}\left(2^n-1\right) \\ \frac{1}{2}\left(2^n-1\right) & \frac{1}{2}\left(1+2^n\right) \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3 –**

1. Je résous le premier système en utilisant la méthode du Pivot de Gauss.
J'effectue l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et j'obtiens le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ -5y + 3z = -12 \\ -x + 3y + z = 7 \end{cases}$$

J'effectue l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et j'obtiens le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ -5y + 3z = -12 \\ 5y = 15 \end{cases}$$

J'effectue l'opération élémentaire $L_2 \leftrightarrow L_3$ et j'obtiens le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 5y = 15 \\ -5y + 3z = -12 \end{cases}$$

J'effectue l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et j'obtiens le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 5y = 15 \\ 3z = 3 \end{cases}$$

Le système équivalent ainsi obtenu est triangulaire, je peux donc le résoudre en remontant, équations par équations.

$$\begin{aligned} L_3 : \quad 3z = 3 \quad &\iff \quad z = \frac{3}{3} = 1 \\ L_2 : \quad 5y = 15 \quad &\iff \quad y = \frac{15}{5} = 3 \\ L_1 : x + 2y - z = 8 \quad &\iff \quad x + 6 - 1 = 8 \quad \iff \quad x = 8 - 6 + 1 = 3 \end{aligned}$$

J'obtiens ainsi une unique solution pour le système :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(3, 3, 1\right)\right\}.$$

2. Je résous le premier système en utilisant la méthode du Pivot de Gauss.
J'effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_3$ et j'obtiens le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x - y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$$

J'effectue l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et j'obtiens le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 4 \\ & & 4y & + & 5z & = & -5 \\ 3x & + & y & - & z & = & 5 \end{array}\right.$$

J'effectue l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ et j'obtiens le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 4 \\ & & 4y & + & 5z & = & -5 \\ & & 4y & + & 5z & = & -7 \end{array}\right.$$

Le système équivalent ainsi obtenu n'a pas de solution puisque les deux dernières lignes du système sont incompatibles. En effet, $4y + 5z$ ne peut pas être égal à $-5$ et à $-7$ simultanément. Ainsi pour le système,

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

**Exercice 4 –**

1. (a) Je calcule $J^2$ puis $J^3$.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

   (b) Comme $J^3 = 0_3$, pour tout $n \geqslant 3$, alors $J^n = J^3 \times J^{n-3} = 0_3 \times J^{n-3} = 0_3$.

2. (a) Je calcule $I + J$.

$$I + J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

   J'ai bien montré que $A = I + J$.

   (b) Les matrices $I$ et $J$ commutent puisque la matrice identité commute avec n'importe quelle matrice. Je peux donc appliquer la formule du binôme de Newton à $A = I + J$ :

$$A^n = (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k.$$

   Or dans cette somme, tous les termes correspondants à un $k \geqslant 3$ sont nuls, d'après la question **1.(b)**. Donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$A^n = \binom{n}{0} J^0 I^n + \binom{n}{1} J^1 I^{n-1} + \binom{n}{2} J^2 I^{n-2} = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

   (c) En explicitant les matrices de l'expression précédente, j'obtiens pour tout $n \geqslant 2$ que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n + 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   *i.e.*

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Je vérifie pour $n=0$ et $n=1$ la véracité de ma formule précédente, valable pour $n \geqslant 2$.

- Pour $n=0$, la formule précédente donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 & 0\times(2\times 0+1) \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0.$$

- Pour $n=1$, la formule précédente donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 & 1\times(2\times 1+1) \\ 0 & 1 & 2\times 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi la formule trouvée pour $n \geqslant 2$ à la question **2.(b)** est valable pour $n=0$ et $n=1$. Elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 5 –**

1. (a) Comme le dé est équilibré, tous les tirages sont équiprobables. Ainsi $X$ suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

   (b) Comme $X$ suit une loi uniforme,

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}.$$

2. Pour obtenir 2 fois PILE, il faut lancer la pièce deux fois et donc avoir obtenu un 6 avec le dé, d'où $P(Y=2) = P\big([Y=2]\cap[X=6]\big)$. Par ailleurs,

$$P\big([Y=2]\cap[X=6]\big) = P(X=6)\times P_{[X=6]}(Y=2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

3. (a) Si j'obtiens 1, 2, 3, 4 ou 5 avec le dé, alors je ne lance la pièce qu'une seule fois et donc j'ai une chance sur deux d'obtenir une fois PILE et une chance sur deux de n'en obtenir aucune. Ainsi

$$\forall k \in \{1,2,3,4,5\}, \quad P_{[X=k]}(Y=0) = \frac{1}{2}.$$

   (b) Si j'obtiens un 6 avec le dé, alors je lance la pièce deux fois. Ainsi j'obtiens 0 fois PILE si et seulement si j'obtiens 2 fois FACE. Donc

$$P_{[X=6]}(Y=0) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

   D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= \sum_{k=1}^{6} P(X=k)\times P_{[X=k]}(Y=0) \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4} = \frac{11}{24} \end{aligned}$$

   (c) Je sais déjà que $P(Y=2) = \dfrac{1}{24}$ et que $P(Y=0) = \dfrac{11}{24}$. Donc il ne me reste plus qu'à déterminer $P(Y=1)$. Et

$$P(Y=1) = 1 - P(Y=0) - P(Y=2) = 1 - \frac{1}{24} - \frac{11}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

   Je récapitule cela dans le tableau suivant :

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(Y=k)$ | $\frac{11}{24}$ | $\frac{12}{24}$ | $\frac{1}{24}$ |

Pour le calcul de l'espérance,

$$E(Y) = 0 \times \frac{11}{24} + 1 \times \frac{12}{24} + 2 \times \frac{1}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}.$$

4. (a) Grâce aux probabilités déjà calculées, j'obtiens

| | $X=1$ | $X=2$ | $X=3$ | $X=4$ | $X=5$ | $X=6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y=0$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{24}$ |
| $Y=1$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |
| $Y=2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{24}$ |

(b) Je commence par calculer $E(XY)$.

$$E(XY) = 0 \times 1 \times \frac{1}{12} + 0 \times 2 \times \frac{1}{12} + \cdots + 2 \times 6 \times \frac{1}{24} = \frac{1+2+3+4+5+6+6}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

J'en déduis alors, d'après la formule de König-Huygens, que

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \times \frac{7}{12} = \frac{54}{24} - \frac{49}{24} = \frac{5}{24}.$$

**Exercice 6 –**

1. La dérivée de $g$ est donnée, pour tout $x \in ]0,+\infty[$, par

$$g'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2-4}{x}.$$

Or pour $x>0$, $2x^2-4 \geqslant 0 \iff 2x^2 \geqslant 4 \iff x^2 \geqslant 2 \iff x \geqslant \sqrt{2}$. J'en déduis le tableau de signe de $g'(x)$ ainsi que le tableau de variation de $g$.

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x^2-4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2\big(1-\ln(2)\big)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

En effet,

$$g\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4\ln\left(\sqrt{2}\right) = 2 - 2\ln(2) = 2\big(1 - \ln(2)\big).$$

D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction $g$ admet bien un minimum en $\sqrt{2}$, égal à $2\big(1 - \ln(2)\big)$.

2. Comme $\ln(2) \approx 0.7$, alors $2(1 - \ln(2)) \approx 2 \times (1 - 0.7) = 2 \times 0.3 = 0.6 > 0$.
Le minimum de $g$ est donc strictement positif, donc pour tout $x$ de $]0, +\infty[, \quad g(x) > 0$.

3. Je calcule les limites en $0^+$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = \quad 0 \end{array}\right\} \text{Par quotient, } \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln(x)}{x} = -\infty.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\ln(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{4} = \quad 0 \end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x} = -\infty.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

et la courbe $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

4. Je calcule les limites en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to +\infty} 1 + \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{Par croissances comparées, } \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0^+.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\ln(x)}{x} = \quad 0^+ \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty \end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x} = +\infty.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

5. Je calcule l'écart entre la courbe et l'asymptote :

$$f(x) - y = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x} - \frac{x}{4} = \frac{1+\ln(x)}{x}.$$

Et grâce à la question précédente, je sais que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - y = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{x}{4}$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

6. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$, il me faut étudier le signe de $f(x) - y$. D'après la question précédente, je sais que

$$f(x) - y = \frac{1+\ln(x)}{x}.$$

Or

$$1 + \ln(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(x) \geqslant -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqslant e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant.

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $1+\ln(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-y$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi,

- sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$, $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{D}$,
- sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.

En particulier, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ se coupent en un point $A$, dont l'abscisse est $\frac{1}{e}$ et l'ordonnée est $\frac{\frac{1}{e}}{4} = \frac{1}{4e}$.

7. Je pose $u(x) = 1+\ln(x)$ et $v(x) = x$. Alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$. Ainsi pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{x} \times x - (1+\ln(x)) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1-1-\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{4} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 4\ln(x)}{4x^2} = \frac{g(x)}{4x^2} \end{aligned}$$

Or j'ai déjà étudié le signe de $g(x)$ à la question **2**. J'en déduis le tableau de signe de $f'(x)$ ainsi que le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

8. (a) Je pose $u(x) = x^2 - 4\ln(x)$ et $v(x) = 4x^2$. Alors $u'(x) = 2x - \frac{4}{x}$ et $v'(x) = 8x$. Ainsi pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\left(2x - \frac{4}{x}\right) \times 4x^2 - \left(x^2 - 4\ln(x)\right) \times 8x}{(4x^2)^2} \\ &= = \frac{8x^3 - 16x - 8x^3 + 32x\ln(x)}{16x^4} = \frac{32x\ln(x) - 16x}{16x^4} = \frac{16x(2\ln(x)-1)}{16x^4} = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}. \end{aligned}$$

(b) Je cherche le signe de cette expression.

$$2\ln(x) - 1 \geqslant 0 \iff 2\ln(x) \geqslant 1 \iff \ln(x) \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant.

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2\ln(x)-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi,

- la fonction $f$ est concave sur $]0,\sqrt{e}[$,
- la fonction $f$ est convexe sur $]\sqrt{e},+\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}$ possède donc un point d'inflexion dont l'abscisse est $\sqrt{e}$ et l'ordonnée est $f(\sqrt{e})$.

9. Voici le graphe des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.