DEVOIR SURVEILLÉ 4

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez.
Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.
Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise.

Ce sujet, comportant 3 pages, est constitué de 3 problèmes. Bon courage !

Exercice 1 –
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

2. **Application à l'étude de deux suites.**
On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 3b_n + 3^n.$$

(a) Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 4 dans le programme suivant pour qu'il affiche la valeur de a_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur (on justifiera la réponse) ?

```
1.  n=input(‘‘n?’’)
2.  a=2
3.  for i=1:n
4.       ...
5.  end
6.  disp(a)
```

`i.` `a=2*a+3∧n`   `ii.` `a=2*a+3∧(i-1)`
`iii.` une autre instruction à préciser.

Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $X_{n+1} = AX_n$.

(c) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche la valeur de a_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

```
n=input(‘‘n?’’)
A=[....]
X=[....]
for i=1:n
     X=...
end
disp(X(1))
```

(d) Établir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n X_0$.

(e) En déduire, en utilisant la question 1, que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$

3. **Application au calcul des puissances d'une autre matrice.**
On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.
   (b) Vérifier que $PMP^{-1} = A$.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $M^n = P^{-1}A^nP$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, on a
$$M^n = \begin{pmatrix} 2\times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$

4. **Application au calcul d'une somme.**
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, on a $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.
   (b) Pour tout entier naturel n, calculer $\sum_{k=0}^{n} 3^k$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel k, on a $\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$.
   (d) Déduire des questions précédentes et de la question 2e que pour tout entier naturel n, on a
$$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}.$$

Exercice 2 –
On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un répère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f ?
2. (a) Montrer que pour tout réel x on a $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?
3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
   (b) Déterminer le sens de variation de f. Dresser son tableau de variation en y faisant figurer les limites calculées aux questions 1 et 2 ainsi que $f(0)$.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
4. On admet que pour tout réel x on a $f''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Étudier la convexité de f.
5. Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.
6. Pour tout réel, on pose on pose $h(x) = \ln(1+e^x)$.
   (a) Calculer la dérivée de h.
   (b) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 3 –

Dans cet exercice, on suppose que l'on dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 4 boules rouges, tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient deux boules rouges et deux boules blanches.
On commence par lancer une pièce non-truquée. Si l'on obtient "pile" on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne $\mathcal{U}_1$. Dans le cas contraire, on choisit de faire les tirages dans l'urne $\mathcal{U}_2$. On note F l'évènement « la pièce amène face ». L'évènement « la pièce amène pile » est donc $\overline{F}$. On définit également, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'évènement R_k « le k-ème tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge ».

1. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue un tirage. Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{3}{4}$.
2. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue deux tirages *sans remise*. C'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.
   (a) Calculer $P_F(R_1 \cap R_2)$ et $P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$. En déduire que la probabilité que le tirage amène deux boules rouges de suite est $\dfrac{7}{12}$.
   (b) On remarque *a posteriori* que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené pile ?
3. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on décide de faire des tirages *sans remise* dans l'urne choisie jusqu'à ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![1;3]\!]$.
   (b) Expliquer pourquoi $[Y=1] = F \cap B_1$. En déduire $P(Y=1)$.
   (c) Calculer de même $P(Y=2)$.
   (d) En déduire la valeur de $P(Y=3)$.
   (e) Calculer $E(Y)$.