

7 | Limites et continuité

I – Notions de limite

1 – Illustration

- Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Étudions les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-1	-0,5	-0,1	-0,01	0	0,01	0,1	0,5	1
$f(x)$	1	0,25	0,01	0,0001	0	0,0001	0,01	0,25	1

On constate que plus x se rapproche de 0, plus x^2 se rapproche de 0.

On dit que x^2 **tend vers 0, lorsque x tend vers 0**, et on note

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

- Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Étudions les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-1	-0,5	-0,1	-0,01	0	0,01	0,1	0,5	1
$f(x)$	1	4	100	10000	0	10000	100	4	1

On constate que plus x se rapproche de 0, plus $\frac{1}{x^2}$ devient "grand".

On dit que $\frac{1}{x^2}$ **tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers 0**, et on note

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

- Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Étudions les valeurs de $f(x)$ lorsque x devient "grand".

x	1	5	10	100
$f(x)$	1	0,04	0,01	0,0001

On constate que plus x devient "grand", plus $\frac{1}{x^2}$ se rapproche de 0.

On dit que $\frac{1}{x^2}$ **tend vers 0, lorsque x tend vers $+\infty$** , et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

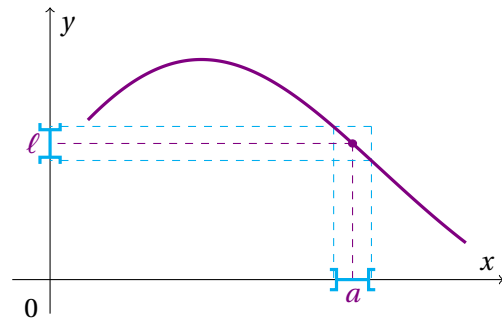
2– Limite finie en un point

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a .

On dit que f **admet ℓ pour limite en a** lorsque $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de ℓ pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a .

On note alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$



Exemple 7.1 – Soit f la fonction définie sur $] -2; 4[$ par $f(x) = x^2 + 3x - 5$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -5 \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -7 \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 23$$

3– Limite à gauche/à droite en un point

Pour certaines fonctions, il peut être utile de distinguer le comportement en un point a selon que l'on s'approche de a exclusivement par la gauche, par valeurs inférieures, *i.e.*, pour des abscisses $x < a$, ou exclusivement par la droite, par valeurs supérieures, *i.e.*, pour des abscisses $x > a$.

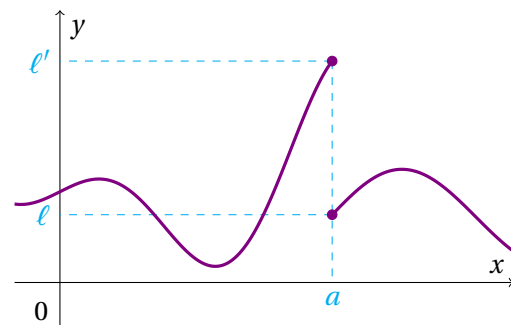
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- si lorsque x se rapproche de a par valeurs inférieures, $f(x)$ se rapproche de ℓ , on dit que f admet ℓ pour **limite à gauche** en a et on note

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x < a} f(x) = \ell.$$

- si lorsque x se rapproche de a par valeurs supérieures, $f(x)$ se rapproche de ℓ , on dit que f admet ℓ pour **limite à droite** en a et on note

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x > a} f(x) = \ell.$$



4– Limite infinie en un point

Une fonction f peut également avoir une limite infinie en un point, *i.e.*, prendre des valeurs positives ou négatives aussi grande que l'on veut.

Plus précisément, pour une fonction f , on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers a , si $f(x)$ peut prendre des valeurs **positives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a . On note alors

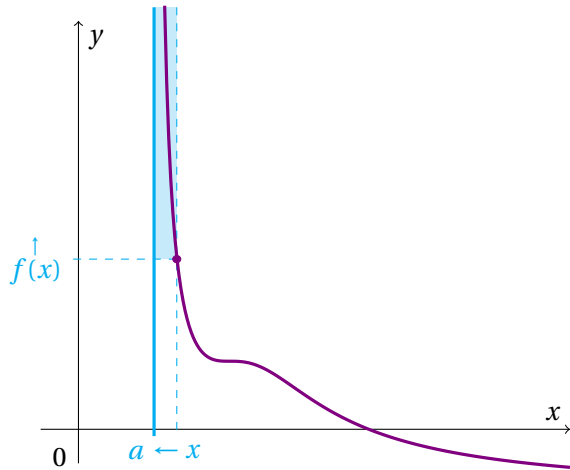
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

De même, on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$, lorsque x tend vers a , si $f(x)$ peut prendre des valeurs **négatives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a . On note alors

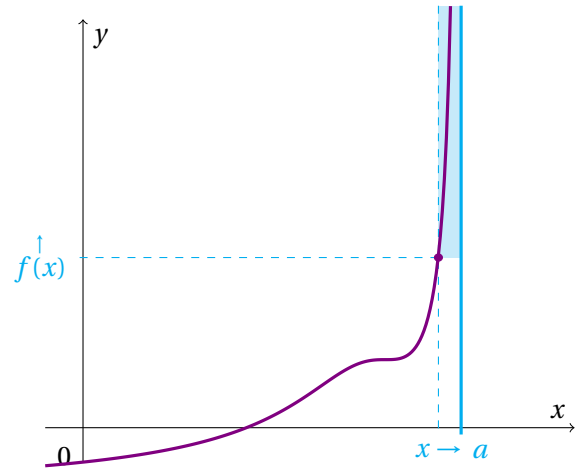
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Si la fonction n'est définie qu'à gauche de a (resp. qu'à droite de a), on note de manière similaire

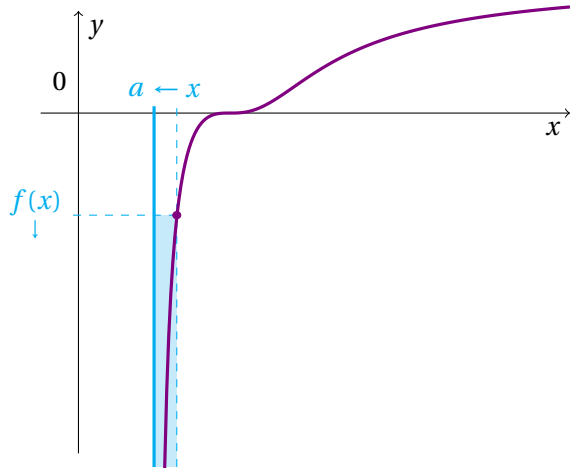
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty).$$

Limite "à droite" de a :

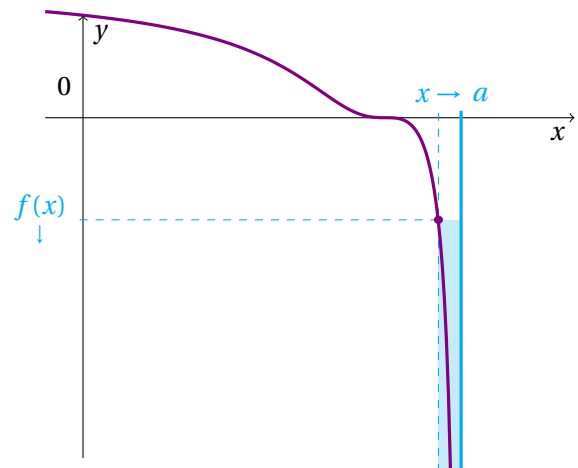
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

Limite "à gauche" de a :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



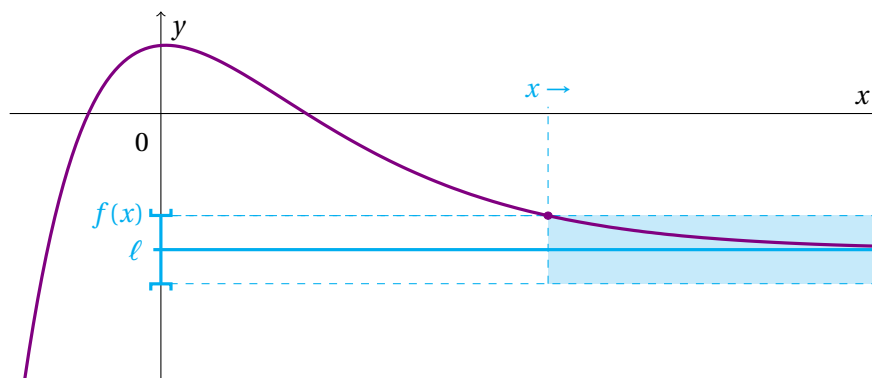
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

5 – Limite finie en l'infini

Lorsqu'une fonction f est définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, on peut s'intéresser au comportement de $f(x)$ lorsque x devient très grand dans les positifs ou les négatifs. Soit $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$. On dit que f **admet ℓ pour limite en $+\infty$** lorsque $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de ℓ pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand. On note alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

Il en va de même pour définir $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition de choisir x suffisamment grand.

6– Limite infinie en l'infini

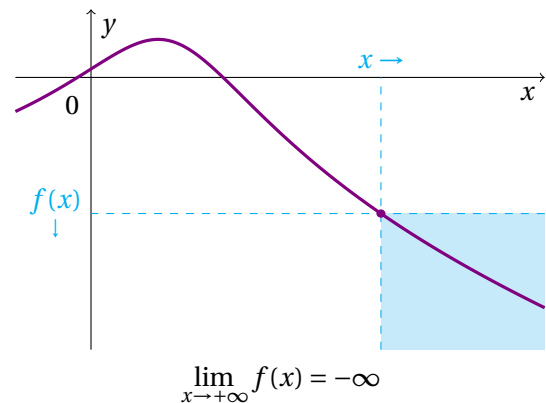
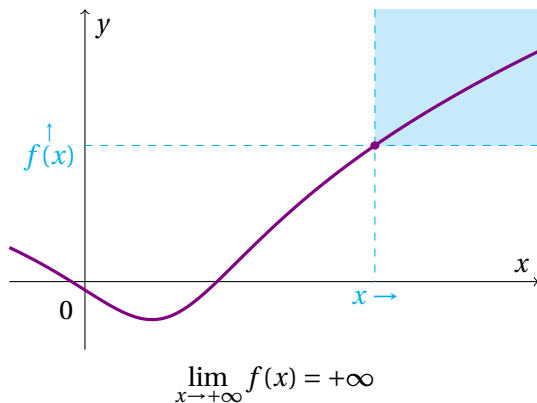
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$, où A est un réel.

1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$



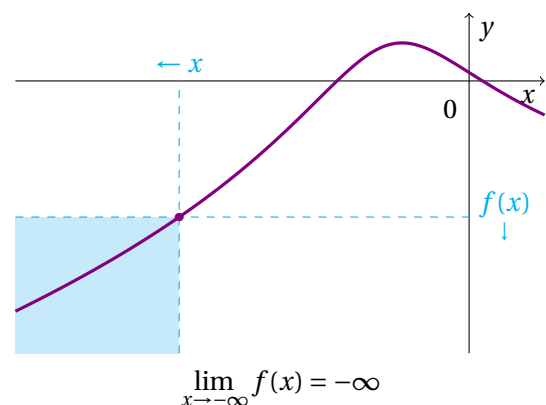
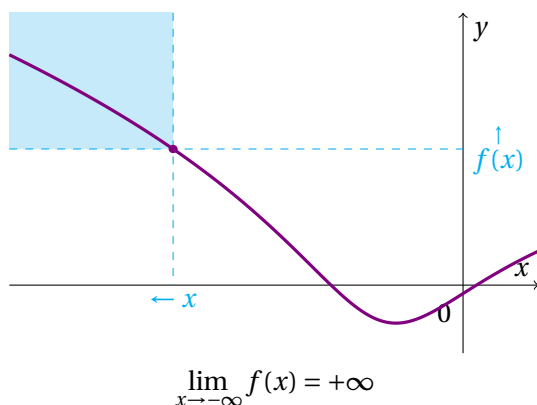
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -\infty; A]$, où A est un réel.

1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x négatif suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

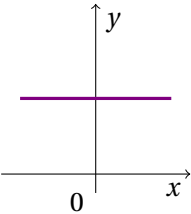
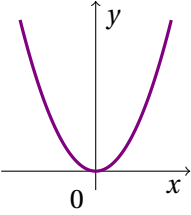
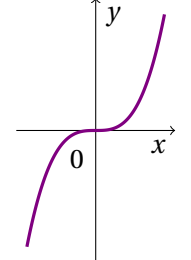
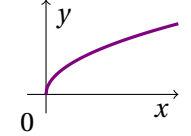
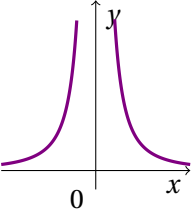
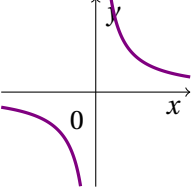
2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x négatif suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$



II – Calculs de limites

1 – Limites des fonctions usuelles

Fonction	Définie sur	Courbe	Limite en $-\infty$	Limite en 0	Limite en $+\infty$
$x \mapsto c$ $c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}		c	c	c
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbf{N}^*$ pair	\mathbf{R}		$+\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbf{N}^*$ impair	\mathbf{R}		$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	\mathbf{R}_+		NON DÉFINI	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbf{N}^*$ pair	\mathbf{R}^*		0^+	$\lim_{x \rightarrow 0^-} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty$	0^+
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbf{N}^*$ impair	\mathbf{R}^*		0^-	$\lim_{x \rightarrow 0^-} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty$	0^+

Exemple 7.2 – On a

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0^-$

2– Limite d'une somme de deux fonctions

Ce tableau récapitule les cas possibles pour la limite d'une somme de deux fonctions u et v selon les limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) + v(x) =$$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) \backslash \lim_{x \rightarrow \alpha} v(x)$	$\ell \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbf{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	EL
$-\infty$	$-\infty$	EL	$-\infty$

Exemple 7.3 – Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x}$. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 - 1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty,$$

donc par somme, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3– Limite d'un produit de deux fonctions

Ce tableau récapitule les cas possibles pour la limite d'un produit de deux fonctions u et v selon les limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) \times v(x) =$$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) \backslash \lim_{x \rightarrow \alpha} v(x)$	$\ell \in \mathbf{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\ell' \in \mathbf{R}^*$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$
0	0	0	EL
$\pm\infty$	$\pm\infty$	EL	$\pm\infty$

Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat entre $+\infty$ et $-\infty$.

Exemple 7.4 – Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \times \left(\frac{1}{x} - 1\right)$. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} - 1 = +\infty,$$

donc nous sommes en présence de la forme indéterminée " $0 \times \infty$ ".

Or pour tout réel x non-nul, $x^2 \times \left(\frac{1}{x} - 1\right) = x - x^2$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x - x^2 = 0$. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1,$$

donc par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

4 – Limite d'un quotient de deux fonctions

Ce tableau récapitule les cas possibles pour la limite d'un quotient de deux fonctions u et v selon les limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{u(x)}{v(x)} =$$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) \backslash \lim_{x \rightarrow \alpha} v(x)$	$\ell \in \mathbf{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\ell' \in \mathbf{R}^*$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	<i>EL</i>	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	0	<i>EL</i>

Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat entre $+\infty$ et $-\infty$.

Exemple 7.5 – Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = 0^+,$$

donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty,$$

donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5 – Composition de limites

Théorème 7.6 – Composition de limites

Soient f et g deux fonctions et a , b et c des réels ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c.$$

Exemple 7.7 – Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} + 2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 0^+} \sqrt{X} = 0,$$

donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} = 0$.

Dès lors, par somme, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} + 2 = 2$.

6 – Limites de fonctions polynômes ou rationnelles en $\pm\infty$

Théorème 7.8

La limite d'une fonction polynôme en $\pm\infty$ est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

Exemple 7.9 – $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 - 2x^2 + x - 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = -\infty$.

Théorème 7.10

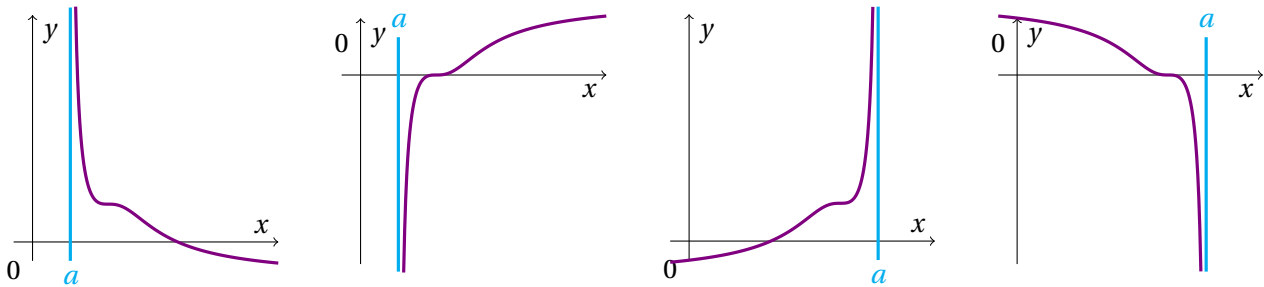
La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

Exemple 7.11 – $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x^3}{3x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{3x} = 0$.

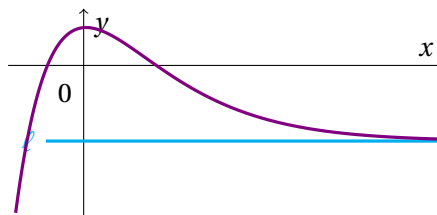
III– Asymptotes et branches infinies

1 – Asymptotes

Définition 7.12 – Soit a un réel. Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ et/ou que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à \mathcal{C}_f en a .

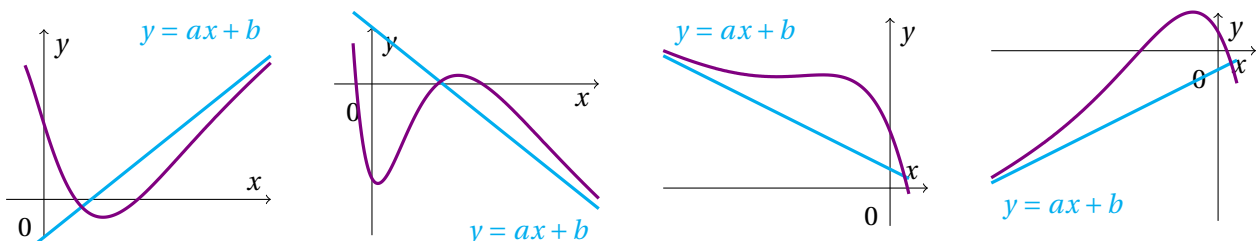


Définition 7.13 – Soit ℓ un réel. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (resp. si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), alors la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** en $+\infty$ (resp. $-\infty$).



Définition 7.14 – Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, et \mathcal{D} une droite d'équation $y = ax + b$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$), on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).



Exemple 7.15 – Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations de ses éventuelles asymptotes.

Commençons par étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$. D'après le théorème ??,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et de même} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-1}{2x+3} = \frac{5}{2}$$

Ainsi, la droite d'équation $y = \frac{5}{2}$ est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Étudions maintenant les limites en $-\frac{3}{2}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2}}} 5x-1 = -\frac{17}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2}}} 2x+3 = 0^-,$$

donc par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2}}} \frac{5x-1}{2x+3} = +\infty$. De même,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x > -\frac{3}{2}}} 5x-1 = -\frac{17}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x > -\frac{3}{2}}} 2x+3 = 0^+,$$

donc par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3}{2} \\ x > -\frac{3}{2}}} \frac{5x-1}{2x+3} = -\infty$.

Ainsi, la droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .

IV – Continuité

1 – Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbf{R} . Intuitivement, dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou). Mathématiquement, cela se traduit de la manière suivante.

Définition 7.16 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I .

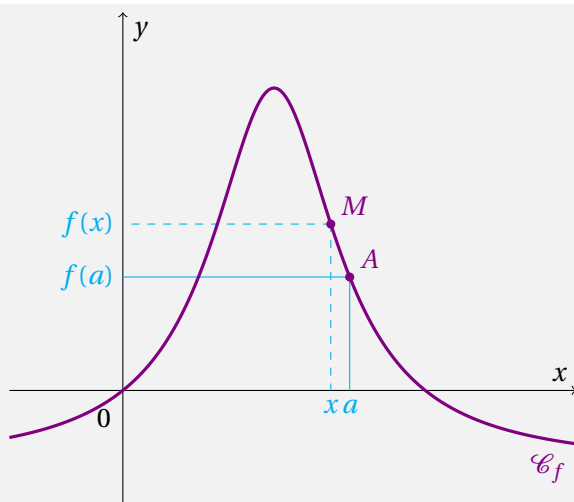
- f est dite **continue** en a lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

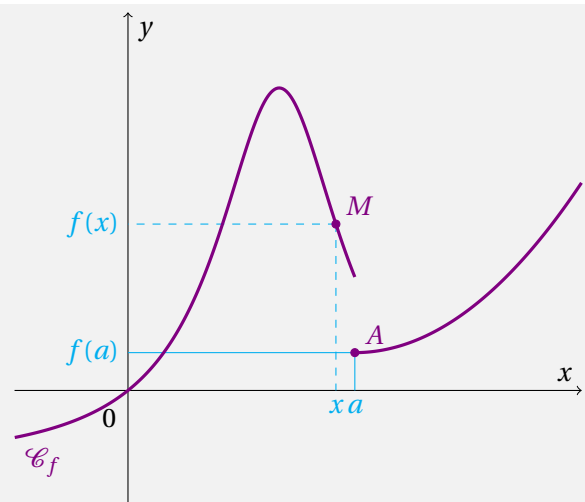
Sinon, f est dite **discontinue** en a .

- f est dite **continue sur l'intervalle** I lorsqu'elle est continue en tout point $a \in I$.

Exemple 7.17 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I . On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f et A le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse a . Pour tout réel x de l'intervalle I , on considère le point M de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse x .



La fonction f est continue.



La fonction f n'est pas continue en a .

Pour tout réel a de I , on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a .

La courbe \mathcal{C}_f présente un saut au point d'abscisse a . Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a .

2– Opérations sur les fonctions continues

Théorème 7.18

- Si f et g sont deux fonctions continues, alors la somme $f + g$ et le produit fg sont continues. Si de plus, g ne s'annule pas, alors leur quotient $\frac{f}{g}$ est aussi continue.
- Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Théorème 7.19 – Continuité des fonctions de référence

- Une fonction polynomiale est continue sur \mathbf{R} .
- La fonction racine carrée est continue sur \mathbf{R}_+ .
- La fonction inverse est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
- Une fraction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exemple 7.20 – Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 2x + 1 + \sqrt{x}$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2 - 2x + 1$ sont continues sur \mathbf{R}_+^* . Donc, f est continue sur \mathbf{R}_+^* comme somme de fonctions continues sur \mathbf{R}_+^* .