

3 | Généralités sur les fonctions

I – Quelques rappels sur les fonctions

Définition 3.1 – Une **fonction** est un procédé qui, à un nombre x appartenant à un ensemble D , associe un nombre y . On note

$$f: \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

$f(x)$ est appelé **l'image** de x par f , tandis que x est appelé **antécédent** de $f(x)$ par f .

Exemple 3.2 –

1. Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 2x + 3$.

- L'image de 2 est $f(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$.
- Les antécédents de 4 vérifient $f(x) = 4$ i.e.,

$$2x + 3 = 4 \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}.$$

2. Soit g la fonction définie sur \mathbf{R} par $g(x) = x^2 + 3$.

- L'image de 5 est $g(5) = 5^2 + 3 = 28$.
- Les antécédents de 7 vérifient $g(x) = 7$ i.e.,

$$x^2 + 3 = 7 \iff x^2 = 4 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

- Il n'y a pas d'antécédent de 1 car

$$x^2 + 3 = 1 \iff x^2 = -2$$

ce qui est impossible puisqu'un carré est toujours positif.

Remarque 3.3 – Il peut y avoir un, plusieurs ou même aucun antécédent. Par contre, il ne peut y avoir qu'une seule image!

Définition 3.4 – Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé **ensemble de définition** de la fonction f , souvent noté D_f .

Exemple 3.5 – La fonction $f: x \mapsto \frac{1}{2x-4}$ a pour ensemble de définition $\mathbf{R} \setminus \{2\}$.

Définition 3.6 – Dans le plan, muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on nomme **courbe représentative** d'une fonction numérique f , l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ du plan, pour x parcourant l'ensemble de définition de f . On la note souvent \mathcal{C}_f . Ainsi,

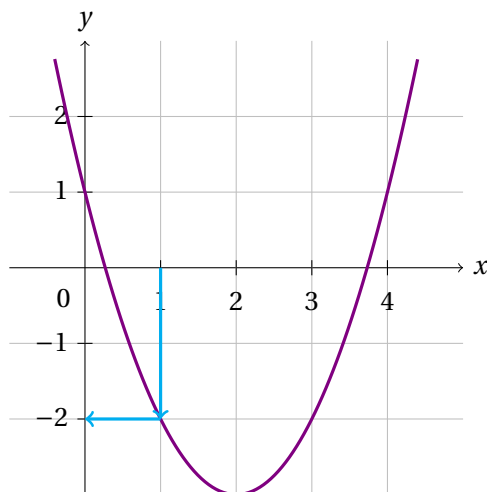
$$\mathcal{C}_f = \{(x; f(x)); x \in D_f\}.$$

Remarque 3.7 – En résumé, les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées et les antécédents x sur l'axe des abscisses.



Méthode 3.8 – Lire une image ou un antécédent à partir d'une courbe

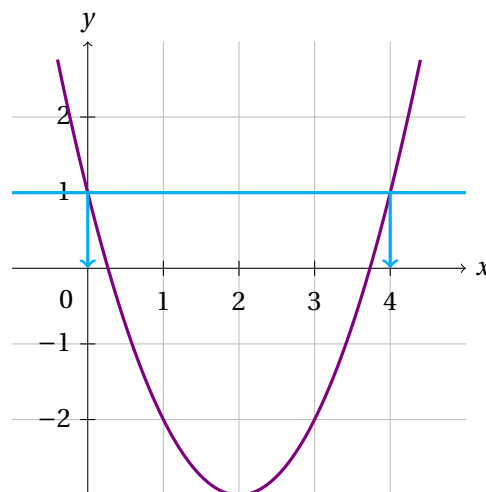
Lire l'image d'un nombre.



1. on place x sur l'axe des abscisses,
2. on se déplace verticalement pour rencontrer \mathcal{C}_f ,
3. on lit $f(x)$ sur l'axe des ordonnées.

L'image de 1 par f est -2 .

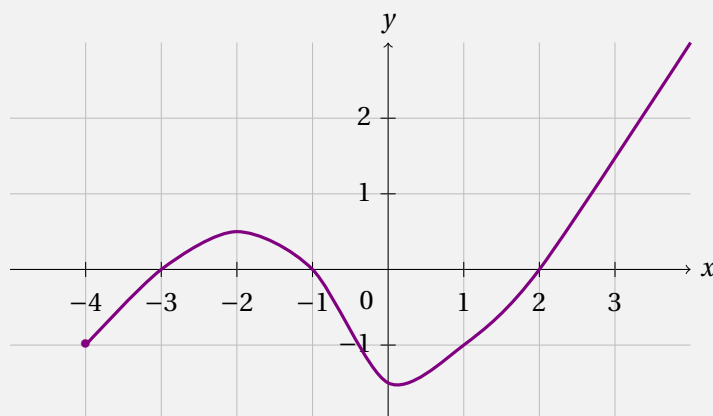
Trouver le ou les antécédents d'un nombre.



1. on trace une droite horizontale passant par cette valeur,
2. à partir des points d'intersection, on se déplace verticalement vers l'axe des abscisses pour lire les antécédents.

Les antécédents de 1 par f sont 0 et 4 .

Exemple 3.9 – Soit f la fonction dont on donne la courbe représentative \mathcal{C}_f suivante.



1. Utiliser le graphique pour déterminer les valeurs de $f(-4)$, $f(-3)$ et $f(0)$.
On a $f(-4) = -1$, $f(-3) = 0$ et $f(0) = -1,5$.
2. Déterminer les images par f de 1 et 3.
On a $f(1) = -1$ et $f(3) = 1,5$.
3. Trouver le ou les antécédents par la fonction f , s'ils existent, des nombres $\frac{1}{2}$, -1 et 2 .
 - Les antécédents de $\frac{1}{2}$ sont -2 et $2,4$.
 - Les antécédents de -1 sont -4 , $-0,5$ et 1 .
 - L'antécédent de 2 est $3,4$.

II – Propriétés éventuelles d'une fonction

1 – Parité

Définition 3.10 –

- On dit que f est **paire** si D_f est symétrique par rapport à 0 et que pour tout $x \in D_f$,

$$f(-x) = f(x).$$

- On dit que f est **impaire** si D_f est symétrique par rapport à 0 et que pour tout $x \in D_f$,

$$f(-x) = -f(x).$$

Remarque 3.11 – La condition " D_f est symétrique par rapport à 0" ne doit pas être oubliée lorsque l'on démontre qu'une fonction est paire ou impaire. Par exemple, une fonction $f : [-1; 2] \rightarrow \mathbf{R}$, quelque soit son expression, ne saurait être paire ou impaire, puisque son ensemble de définition, $[-1; 2]$, n'est pas une partie de \mathbf{R} symétrique par rapport à 0.



Méthode 3.12 – Étudier la parité d'une fonction

On procède toujours en deux temps.

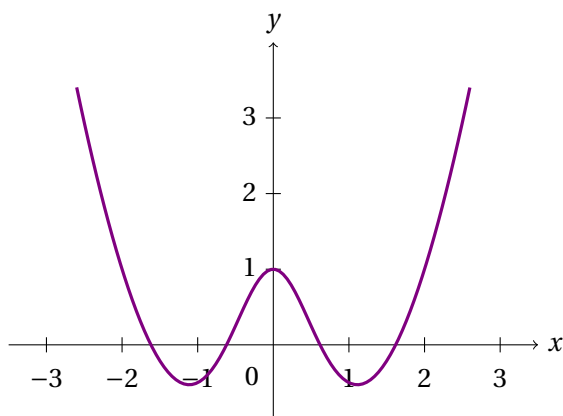
- On vérifie que D_f est symétrique par rapport à 0.
- On exprime $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$, pour tout $x \in D_f$.

Exemple 3.13 – La fonction définie sur \mathbf{R} par $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est **impaire** car

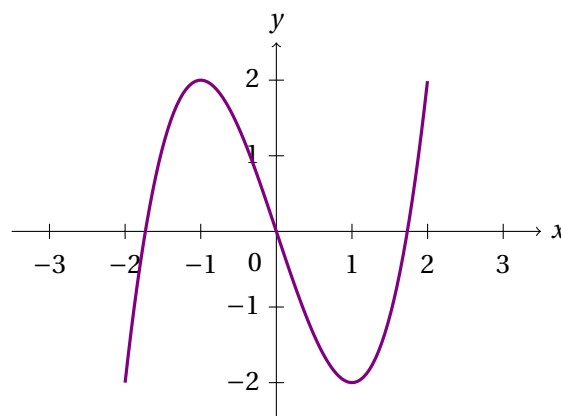
$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x).$$

Théorème 3.14 – Interprétation graphique

- Si f est **paire**, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est **impaire**, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Courbe représentative d'une fonction paire



Courbe représentative d'une fonction impaire

2– Monotonie

Définition 3.15 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

1. f est **croissante** sur I si

$$\forall x, y \in I, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y),$$

2. f est **strictement croissante** sur I si

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \implies f(x) < f(y),$$

3. f est **décroissante** sur I si

$$\forall x, y \in I, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y),$$

4. f est **strictement décroissante** sur I si

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \implies f(x) > f(y).$$

Lorsque f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante), on dit que f est **monotone** (resp. **strictement monotone**).

Enfin, f est dite **constante** sur I lorsque $\forall x, y \in I, \quad f(x) = f(y)$.

Remarque 3.16 –

- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.
- Il existe des fonctions qui ne sont pas monotones, c'est-à-dire qu'elles ne sont ni croissantes ni décroissantes.

3– Fonctions bornées

Définition 3.17 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est

- **majorée** lorsqu'elle vérifie

$$\exists M \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in D, \quad f(x) \leq M.$$

On dit alors que M est un **majorant** de f .

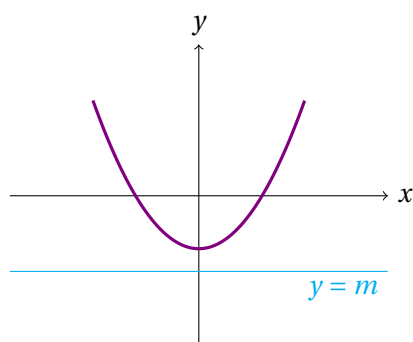
- **minorée** lorsqu'elle vérifie

$$\exists m \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in D, \quad f(x) \geq m.$$

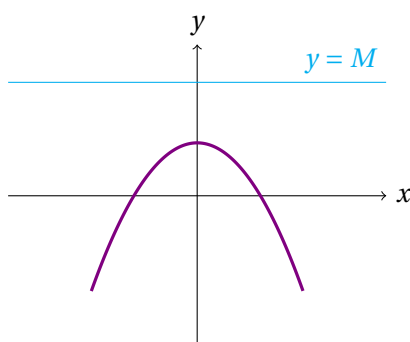
On dit alors que m est un **minorant** de f .

- **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

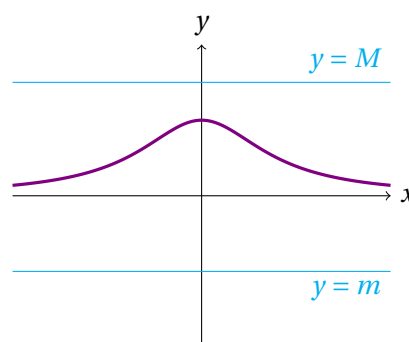
Remarque 3.18 – Graphiquement, une fonction f est majorée par un réel M (resp. minorée par un réel m) lorsque sa courbe représentative est située au-dessous (resp. au-dessus) de la droite horizontale d'équation $y = M$ (resp. $y = m$).



Courbe représentative
d'une fonction minorée



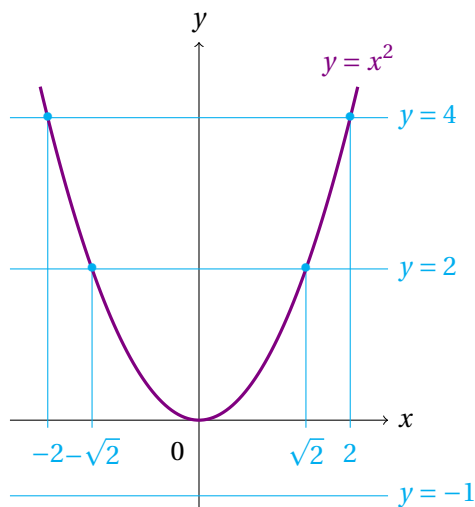
Courbe représentative
d'une fonction majorée



Courbe représentative
d'une fonction bornée

III– Fonctions usuelles

1 – Fonction carrée



Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction carrée, dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

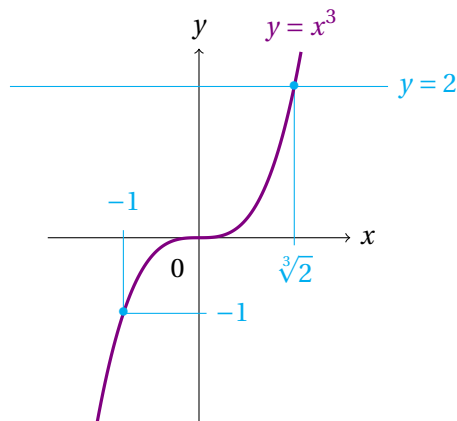
- Son ensemble de définition est $D_f = \mathbf{R}$.
- 2 et -2 ont la même image par la fonction carrée : 4.
En effet, $2^2 = (-2)^2 = 4$.
- Les antécédents de 2 par la fonction carrée sont $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.
En effet, les deux solutions de l'équation $x^2 = 2$ sont $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
- -1 n'a pas d'antécédent par la fonction carrée, puisque l'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution réelle.

Théorème 3.19 – La fonction carrée

$$f: \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

- est à valeurs positives,
- est paire,
- est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2 – Fonction cube



Soit $g : x \mapsto x^3$ la fonction cube, dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

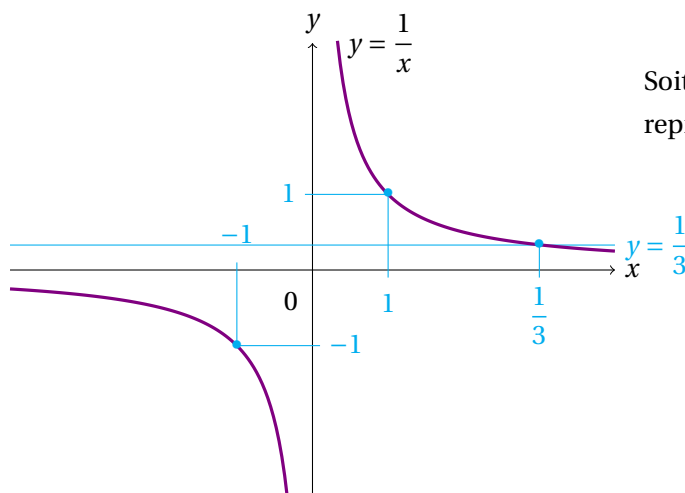
- Son ensemble de définition est $D_g = \mathbf{R}$.
- -1 a pour image -1.
En effet, $g(-1) = (-1)^3 = -1$.
- 2 a pour unique antécédent par g le nombre $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$.
- En fait, tout élément $y \in \mathbf{R}$ admet un unique antécédent x par g , noté $\sqrt[3]{y}$. On dit que la fonction cube $g : x \mapsto x^3$ est une **bijection** de \mathbf{R} sur \mathbf{R} .

Théorème 3.20 – La fonction cube

$$g: \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array}$$

- est impaire,
- est strictement croissante sur \mathbf{R} ,
- n'est ni majorée, ni minorée sur \mathbf{R} .

3– Fonction inverse



Soit h la fonction inverse $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

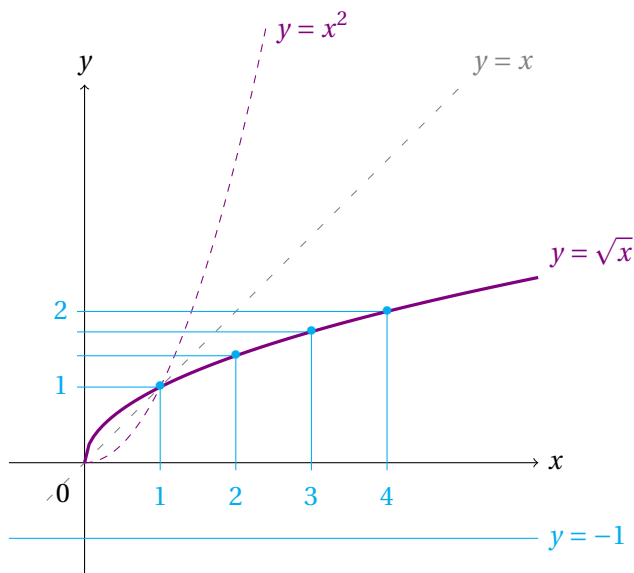
- Son ensemble de définition est $D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\} = \mathbf{R}^*$.
En effet, $\frac{1}{x}$ n'est pas défini pour $x = 0$.
- Les images respectives de 1 et -1 sont 1, -1.
En effet, $h(1) = \frac{1}{1} = 1$ et $h(-1) = \frac{1}{-1} = -1$.
- L'unique antécédent de $\frac{1}{3}$ est 3.

Théorème 3.21 – La fonction inverse

$$h: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}^* \\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

- est impaire,
- est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$,
- n'est ni majorée, ni minorée sur \mathbf{R}^* .

4– Fonction racine carrée



Soit i la fonction racine carrée $i : x \mapsto \sqrt{x}$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

- Sa courbe représentative est la branche de parabole obtenue par symétrie par rapport à la droite $y = x$ de la courbe représentative de la fonction carrée sur l'intervalle \mathbf{R}_+ .
- Son domaine de définition est $D_i = \mathbf{R}_+$.
- Les images de 0, 1, 2 et 3 sont

$$i(0) = \sqrt{0} = 0, \quad i(1) = \sqrt{1} = 1,$$

$$i(2) = \sqrt{2} \approx 1.41, \quad i(3) = \sqrt{3} \approx 1.73.$$

- -1 n'a pas d'antécédent par la fonction racine carrée.

Théorème 3.22 – La fonction racine carrée

$$i: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x}$$

- est strictement croissante sur \mathbf{R}_+ ,
- est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

IV – Opérations sur les fonctions

Définition 3.23 – Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g .

- **Addition** : $f + g$ désigne la fonction définie sur $D_f \cap D_g$ par

$$\forall x \in D_f \cap D_g, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- **Multiplication** : fg désigne la fonction définie sur $D_f \cap D_g$ par

$$\forall x \in D_f \cap D_g, \quad (fg)(x) = f(x) \times g(x).$$

- **Division** : $\frac{f}{g}$ désigne la fonction définie $D = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$ par

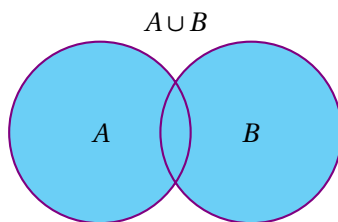
$$\forall x \in D, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Remarque 3.24 – Les symboles "réunion" \cup , "intersection" \cap et "privé de" \setminus

Soient A et B deux ensembles.

- On appelle **réunion** (ou **union**) de A et de B l'ensemble des x , noté $A \cup B$, tels que

$$x \in A \quad \underline{\text{OU}} \quad x \in B.$$

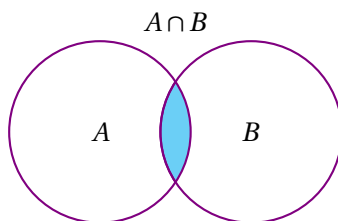


Par exemple, si $A = \{1; 2; 4; 7\}$ et $B = \{2; 3; 7; 8; 9\}$, alors

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9\}.$$

- On appelle **intersection** de A et de B l'ensemble des x , noté $A \cap B$, tels que

$$x \in A \quad \underline{\text{ET}} \quad x \in B.$$

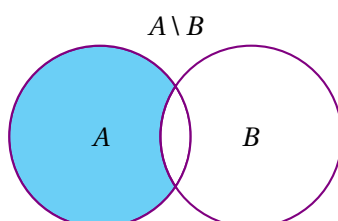


Par exemple, si $A = [1; 3]$ et $B = [-1; 2]$, alors

$$A \cap B = [1; 2].$$

- On note $A \setminus B$ (lire A "privé de" B), l'ensemble des x tels que

$$x \in A \quad \underline{\text{ET}} \quad x \notin B.$$



Par exemple, si $A = \{1; 2; 4; 7\}$ et $B = \{2; 3; 7; 8; 9\}$, alors

$$A \setminus B = \{1; 4\}.$$

Exemple 3.25 – Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$ et $g: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$.

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition et son expression.

1. $f + g$: f est définie sur \mathbf{R} et g est définie sur \mathbf{R}_+ donc $f + g$ est définie sur $\mathbf{R} \cap \mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, (f + g)(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x}.$$

2. fg : f est définie sur \mathbf{R} et g est définie sur \mathbf{R}_+ donc fg est définie sur $\mathbf{R} \cap \mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, (fg)(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x} = x^2\sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

3. $\frac{g}{f}$: f est définie sur \mathbf{R} et g est définie sur \mathbf{R}_+ . Aussi, $f(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$. Donc $\frac{g}{f}$ est définie sur $\mathbf{R} \cap \mathbf{R}_+ \setminus \{-1; 1\} = \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}, \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}.$$

Définition 3.26 – Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g . La **composée** de f suivi de g , notée $g \circ f$, est définie pour les $x \in D_f$ tels que $f(x) \in D_g$ par

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Ainsi, $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

Exemple 3.27 –

- Soit $f(x) = 3x - 4$ et $g(x) = x^2$. Ces deux fonctions sont définies sur \mathbf{R} , donc la fonction $g \circ f$ est définie sur \mathbf{R} .

De plus,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x - 4) = (3x - 4)^2.$$

- Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. La fonction f est définie sur \mathbf{R} et g est définie sur \mathbf{R}_+ . Par ailleurs,

$$f(x) \geq 0 \iff x^2 + 1 \geq 0 \iff x^2 \geq -1 \iff x \in \mathbf{R}.$$

Donc, $g \circ f$ est définie sur \mathbf{R} .

Et

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Méthode 3.28 – Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

1. Fonctions usuelles

- Une fonction polynomiale est définie sur \mathbf{R} .
- Une fraction rationnelle est définie sur \mathbf{R} privé des valeurs qui annulent son dénominateur. En pratique, on résout ainsi l'équation "dénominateur = 0".
- La fonction racine carrée est définie sur \mathbf{R}_+ .



2. Fonctions quelconques

On commence par déterminer la forme de l'expression (somme, produit, quotient, composée),

- pour une somme ou un produit : déterminer l'ensemble de définition de chacun des termes/facteurs et prendre l'intersection de ces ensembles,
- pour un quotient : prendre l'intersection des ensembles de définition respectifs du numérateur et du dénominateur, puis retirer les valeurs qui annulent le dénominateur,
- pour une composée : déterminer l'ensemble de définition de la première fonction et exprimer la condition assurant que l'image de la première fonction soit dans l'ensemble de définition de la seconde fonction. En particulier, une composée de la forme \sqrt{f} est définie lorsque f l'est ET lorsque $f(x) \geq 0$.

Exemple 3.29 – Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

f est une fonction polynomiale donc f est définie sur \mathbf{R} .

2. $g(x) = \frac{2x+3}{4x-1}$

g est une fraction rationnelle donc g est définie sur \mathbf{R} privé de ses valeurs interdites.

Les valeurs interdites sont les solutions de $4x - 1 = 0 \iff 4x = 1 \iff x = \frac{1}{4}$.

Donc, g est définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$.

3. $h(x) = 4x - 1 + \sqrt{x}$

h est la somme de la fonction $x \mapsto 4x - 1$ définie sur \mathbf{R} et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur \mathbf{R}_+ donc h est définie sur $\mathbf{R} \cap \mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_+$.

4. $i(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

i est le quotient de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur \mathbf{R}_+ et de la fonction $x \mapsto x$ définie sur \mathbf{R} et qui s'annule en 0. Donc, i est définie sur $\mathbf{R} \cap \mathbf{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbf{R}_+^*$.

5. $j(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

j est de la forme \sqrt{f} avec $f(x) = x^2 - 5x + 6$. f est définie sur \mathbf{R} . Il nous reste à résoudre $x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Pour cela, il nous faut établir le tableau de signe de $x^2 - 5x + 6$. Commençons par calculer le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Donc, j est définie sur $] -\infty; 2] \cup [3; +\infty[$.

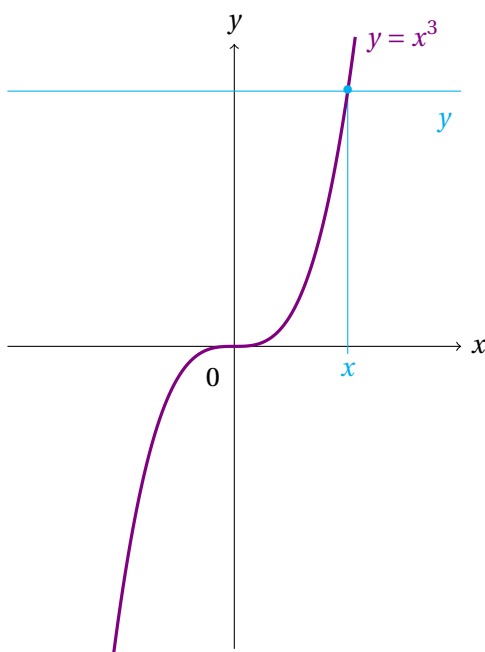
V – Fonction bijective

Définition 3.30 – Soient I et J deux intervalles. On dit qu'une fonction f est une **bijection** de I dans J ou que $f : I \rightarrow J$ est **bijection** si les deux conditions suivantes sont réunies :

- pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$,
- pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

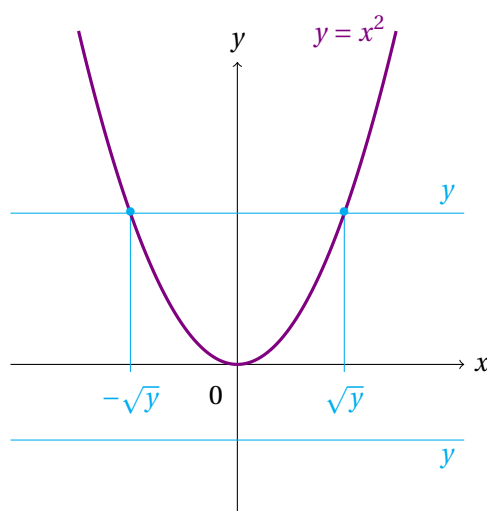
On peut alors définir une fonction appelée **bijection réciproque** ou **fonction réciproque** de f , notée f^{-1} , définie sur J et à valeurs dans I , et qui à un réel $y \in J$ associe l'unique solution $x \in I$ de l'équation $f(x) = y$.

$$\forall x \in I, \quad \forall y \in J, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$



Pour la fonction cube $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $x \mapsto x^3$ dont la courbe est représentée ci-dessus, on observe graphiquement que tout élément y de \mathbf{R} admet un unique antécédent x .

Autrement dit, pour toute ordonnée $y \in \mathbf{R}$, il existe une unique abscisse $x \in \mathbf{R}$ telle que $y = x^3$. g est donc une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R} .



Pour la fonction carrée $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $x \mapsto x^2$ dont la courbe est représentée ci-dessus, la situation varie selon le signe de y . Graphiquement,

- $y > 0$ admet deux antécédents par $g : \pm\sqrt{y}$,
- $y < 0$ n'admet aucun antécédent.

Du fait de l'absence d'existence ou d'unicité pour les antécédents de y , la fonction carrée ne définit pas une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R} .

Remarque 3.31 – En revanche, $x \mapsto x^2$ définit une bijection de \mathbf{R}_+ sur \mathbf{R}_+ .

Exemple 3.32 – $a(x) = 3x - 4$ réalise une bijection de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .