

# ECRICOME 2023

## Exercice 1 –

### Partie 1

1. Voici la fonction Python complétée :

```

1. import numpy as np
2.
3. def suite(n,u1):
4.     u=u1
5.     for k in range(1,n):
6.         u=u*5/12+1/3
7.     return(u)

```

2. a) Je résous l'équation demand  e :

$$x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3} \iff x - \frac{5}{12}x = \frac{1}{3} \iff \frac{7}{12}x = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{3} \times \frac{12}{7} = \frac{4}{7}.$$

b) Soit  $n \geq 1$ . J'exprime  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell = \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3} - \ell = \frac{5}{12} \times (v_n + \ell) + \frac{1}{3} - \ell \\ &= \frac{5}{12}v_n + \frac{5}{12} \times \ell + \frac{1}{3} - \ell = \frac{5}{12}v_n, \end{aligned}$$

puisque  $\ell$  est une solution de  $x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$ , i.e.  $\frac{5}{12} \times \ell + \frac{1}{3} - \ell = 0$ .

Ainsi j'ai bien montré que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique, de raison  $q = \frac{5}{12}$ .

c) Comme la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est géométrique, de raison  $q = \frac{5}{12}$  et de premier terme  $v_1$ , alors son expression explicite est donnée par

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = v_1 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

d) Enfin, comme pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = v_n + \ell$  et que  $v_1 = u_1 - \ell$ , alors

$$u_n = v_1 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \ell = (u_1 - \ell) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \ell = \left(u_1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}.$$

### Partie 2

3. a) Je calcule les produits matriciels  $AX_1$  et  $AX_2$  :

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+12 \\ 12+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = 12 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 \times X_1,$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+4 \\ -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \times X_2.$$

- b) D'après la question précédente, comme  $X_1$  est une matrice colonne non nulle telle que  $AX_1 = 12X_1$ , alors 12 est une valeur propre de la matrice  $A$ , associée au vecteur propre  $X_1$ . De même, comme  $X_2$  est une matrice colonne non nulle telle que  $AX_2 = 5X_2$ , alors 5 est une valeur propre de la matrice  $A$ , associée au vecteur propre  $X_2$ .
4. Comme il s'agit d'une matrice carrée de taille 2, je calcule le déterminant de la matrice  $P$  :

$$\det(P) = 4 \times 1 - 3 \times (-1) = 4 + 3 = 7 \neq 0.$$

Comme le déterminant est non nul, alors la matrice  $P$  est inversible et la matrice inverse est donnée par

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 1 & -(-1) \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = Q.$$

5. J'effectue le produit matriciel  $PDP^{-1}$  dans le but de retrouver la matrice  $A$  :

$$P \times D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$$

$$PD \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 48+15 & 48-20 \\ 36-15 & 36+20 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = A.$$

Finalement j'ai bien montré que  $A = PDP^{-1}$ .

6. Je raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

**  nonc   :** Je note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,

$$A^0 = I_2 \quad \text{et} \quad PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2.$$

Ainsi  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 0$ . Je suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et je montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence,  $A^n = PD^nP^{-1}$ . Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour  $n = 0$  et est héréditaire, alors par principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ , i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

7. a) Je calcule le produit :

$$P^{-1}X = QX = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- b) Gr  ce à la question 6., je sais que  $A^nX = PD^nP^{-1}X$ . Je connais  $P^{-1}X$  et comme la matrice  $D$  est diagonale, alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$D^n = \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

Finalement je termine le produit matriciel : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$D^n \times P^{-1}X = \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12^n \\ -3 \times 5^n \end{pmatrix}$$

$$A^nX = P \times D^nP^{-1}X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12^n \\ -3 \times 5^n \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \times 12^n + 3 \times 5^n \\ 3 \times 12^n - 3 \times 5^n \end{pmatrix}.$$

**Partie 3**

8.  $b_1$  correspond à la probabilité qu'il pleuve le premier jour. Or il fait beau le jour 1.

Donc  $b_1 = 0$ .

Puis comme il fait beau le jour 1, la probabilité qu'il fasse beau le jour 2 est  $\frac{3}{4}$ .

Ainsi  $a_2 = \frac{3}{4}$  et  $b_2 = 1 - a_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ .

9. a) D'après la formule des probabilités totales, comme  $\{A_n, B_n\}$  forme un système complet d'  v  nements, alors

$$P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}).$$

La probabilité qu'il fasse beau le jour  $n + 1$  s'il fait beau le jour  $n$  est  $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}$   
et la probabilité qu'il fasse beau le jour  $n + 1$  s'il pleut le jour  $n$  est  $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$ .

Ainsi j'obtiens bien que

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times \frac{3}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).$$

De la même manière, j'obtiens aussi que

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + P(B_n) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n). \end{aligned}$$

- b) Je calcule le produit  $M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  dans le but de retrouver les expressions de  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  :

$$M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \times \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \times \begin{pmatrix} 9a_n + 4b_n \\ 3a_n + 8b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9a_n + 4b_n}{12} \\ \frac{3a_n + 8b_n}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

Finalement j'ai bien montré que  $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ .

- c) Comme  $\{A_n, B_n\}$  forme un système complet d'  v  nements, en particulier les deux   v  nements sont contraires l'un de l'autre et

$$a_n + b_n = P(A_n) + P(B_n) = 1.$$

10. a) Je raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**  nonc   :** Je note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 1$ ,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 1$ . Je suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et je montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence,  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Et grâce à la question 9.b),

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour  $n = 1$  et est héréditaire, alors par principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Comme  $M = \frac{1}{12}A$ , alors pour tout  $n \geq 1$ ,  $M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12^{n-1}} A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12^{n-1}} A^{n-1} X$ .

Or cette matrice ayant été calculée dans la partie précédente, j'en déduis que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12^{n-1}} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \times 12^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} \\ 3 \times 12^{n-1} - 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 + 3 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \\ 3 - 3 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$a_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

11. a) D'après la question 9.a),  $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n$  et d'après la question 9.c),  $b_n = 1 - a_n$ .  
Alors en combinant ces deux équations, j'obtiens bien que

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3} \times (1 - a_n) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)a_n + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}.$$

- b) La suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  étudiée dans cette partie vérifie bien la définition de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  étudiée dans la Partie 1, avec  $u_1 = a_1 = 1 \in [0, 1]$ . Alors en me servant du résultat de la question 2.d) avec  $u_1 = 1$ , j'obtiens bien que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$a_n = \left(1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}.$$

- c) Enfin j'obtiens aussi que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$b_n = 1 - a_n = 1 - \left(\frac{3}{7} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}\right) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

12. Comme  $-1 < \frac{5}{12} < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} = 0$ . Alors par somme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{3}{7} - 0 = \frac{3}{7}.$$

13. a) Je cherche  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_9 \cap B_{10})$ . Par la formule des probabilités composées, et comme le temps ne dépend que de celui de la veille,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_9 \cap B_{10}) &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_8}(A_9) \times P_{A_9}(B_{10}) \\ &= 1 \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \frac{1}{4} = \frac{3^8}{4^9}. \end{aligned}$$

- b) Je cherche  $P(B_{10})$ . Or

$$P(B_{10}) = b_{10} = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \left(\frac{5}{12}\right)^{10-1} = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \left(\frac{5}{12}\right)^9.$$

**Exercice 2 –****Partie 1**

1. Je cherche à savoir pour quelles valeurs de  $x$  l'expression  $f(x)$  est définie.

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'exponentielle  $e^x$  est définie et positive.
- En particulier,  $1 + e^x > 0$  et comme la fonction  $\ln$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors l'expression  $f(x) = \ln(1 + e^x)$  est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

J'ai bien montré que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $f$  est de la forme  $\ln(u)$ , avec  $u(x) = 1 + e^x$ .  
Comme  $u'(x) = e^x$ , alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

En me servant du fait que pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ , alors j'obtiens que le quotient  $f'(x)$  est strictement positif, donc que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

3. Je calcule la limite en  $-\infty$  en décomposant :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0 \end{array} \right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

J'en déduis alors que la droite d'équation  $y = 0$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $-\infty$ .

4. a) Je raisonne de même pour la limite en  $+\infty$  :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^x = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b) En factorisant par l'exponentielle  $e^x$ , j'obtiens que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \ln(1 + e^x) = \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x} + 1) = x + \ln(1 + e^{-x}).$$

c) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1 + 0 = 1$ , alors par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = \ln(1) = 0.$$

Comme la limite de la différence est nulle, alors j'en conclus que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

d) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$ . Or  $e^{-x} > 0$  donc  $1 + e^{-x} > 1$  et par croissance de la fonction  $\ln$ , j'en déduis que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) > 0$ .

Alors la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de l'asymptote  $(D)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

5. L'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 est donnée par

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

$$\text{Or } f(0) = \ln(1 + e^0) = \ln(1 + 1) = \ln(2) \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

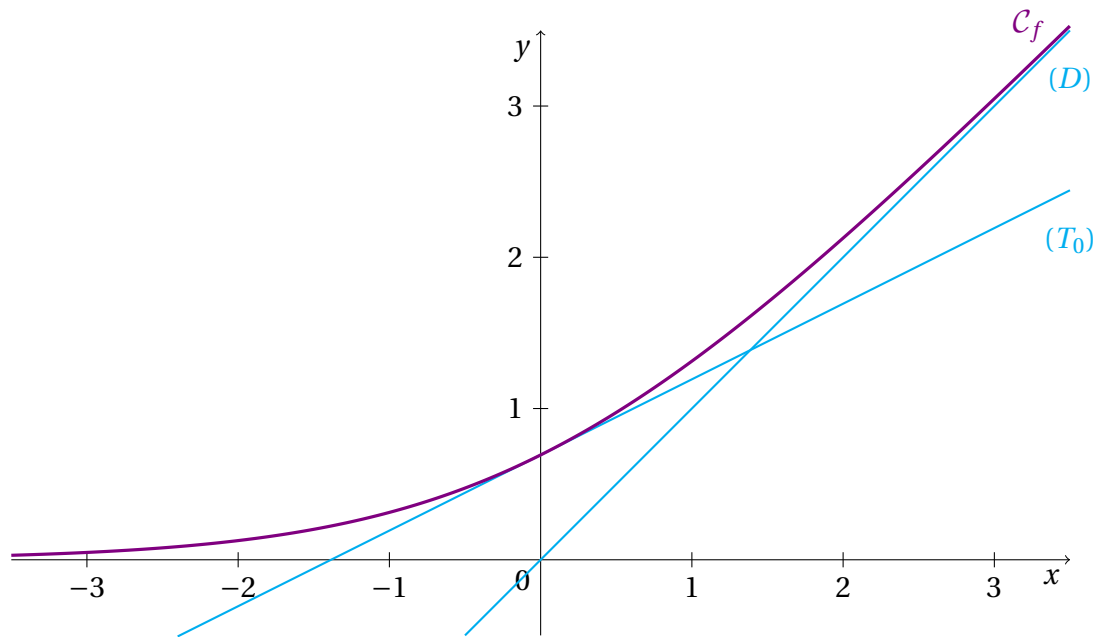
Finalement l'équation de la tangente  $(T_0)$  est donnée par

$$y = \frac{1}{2} \times x + \ln(2) = \frac{x}{2} + \ln(2).$$

6. a) Je sais déjà que  $f$  est strictement croissante, je connais les limites et la valeur en 0.  
Voici donc le tableau de variation :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f$	0	$\ln(2)$	$+\infty$

- b) Grâce au tableau de variation, à la tangente en 0 et aux asymptotes en  $-\infty$  et  $+\infty$ ,  
je peux tracer l'allure de la courbe  $\mathcal{C}_f$  :



### Partie 2

7. a)  
b)  
c)
8. a)  
b)  
c)  
d)
9. a)  
b)