EXERCICES — CHAPITRE 5

Exercice 1 $(\star)$ –

1. Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\-1&1&2\end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-5&2\\-1&3&-1\end{pmatrix}$.
2. On considère les matrices $P=\begin{pmatrix}-24&18&5\\20&-15&-4\\-5&4&1\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\5&6&0\end{pmatrix}$.

   Calculer le produit $P\times Q$. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
3. On considère les matrices $P=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-2\\4&0&1\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}-3&-1&4\\8&7&-2\\12&4&-3\end{pmatrix}$.

   Calculer le produit $P\times Q$. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
4. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$.
   a) Calculer A^3-A.
   b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 2 $(\star\star)$ – On note $I=I_3$ et on considère $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$.

1. a) Calculer A^2 puis A^3.
   b) En déduire que A n'est pas inversible.
2. a) Calculer $(I-A)(I+A+A^2)$.
   b) En déduire que $I-A$ est inversible et donner son inverse.
3. Par un raisonnement similaire, montrer que $I+A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 3 $(\star\star)$ –

1. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.
   a) Calculer A^2.
   b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$.
   a) Calculer $-A^3-3A^2-3A$.
   b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
3. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&-3&-1\\1&4&1\\-1&-3&0\end{pmatrix}$.
   a) Calculer $A^2-3A+2I_3$.
   b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 4 $(\star\star)$ – On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-1&2&0\\-5&9&-3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-2&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. Calculer B^3. La matrice B est-elle inversible ?

Exercice 5 $(\star\star)$ – On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

En résolvant un système, montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6 $(\star\star\star)$ – On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.
2. Résoudre le système linéaire : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 1\\ x & & & + & z & = & 2\\ x & + & y & & & = & 3\end{array}\right.$

Exercice 7 $(\star\star\star)$ –

1. Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-1&2\\-3&4&-8\end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & y & + & 2z & = & 4\\ x & - & y & + & 2z & = & -2\\ -3x & + & 4y & - & 8z & = & 4\end{array}\right. \quad\text{et}\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & y & + & 2z & = & 1\\ x & - & y & + & 2z & = & 0\\ -3x & + & 4y & - & 8z & = & 3\end{array}\right.$$

Exercice 8 $(\star\star\star)$ – Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

1. $A=\begin{pmatrix}-2&3&1\\3&6&2\\1&2&1\end{pmatrix}$
2. $B=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$
3. $C=\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}$
4. $D=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-2&7&2\\3&2&3\end{pmatrix}$
5. $E=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-3&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$
6. $F=\begin{pmatrix}4&0\\0&-5\end{pmatrix}$
7. $G=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$
8. $H=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$

Exercice 9 (⋆⋆⋆) – Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par la donnée de $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et les relations de récurrence valables pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{3}{4}y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{4}y_n.$$

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. a) Donner U_0.
   b) Déterminer une matrice A telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = AU_n$.
   c) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $U_n = A^n U_0$.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$.
3. Soit $D = P^{-1}AP$.
   a) Calculer D, puis pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer D^n en fonction de n.
   b) Montrer que $A = PDP^{-1}$.
4. a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
   c) Déterminer x_n et y_n en fonction de n, puis les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Exercice 10 (⋆⋆⋆) – [BSB 2008 / Ex1] *Une maladresse de l'énoncé est corrigée dans la Partie A.*
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer D^k pour tout entier naturel k.
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$ et *(en déduire par récurrence)* que pour tout entier naturel k,
$$A^k = PD^kP^{-1}.$$
4. Déterminer $P^{-1}X_1$ et en déduire ~~par récurrence~~ que pour tout entier naturel k,
$$A^kX_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \end{pmatrix}.$$

Partie B

On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée (appelée "semaine 1"). Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A, B et C.
On considère en outre que :

- Si M a choisi le dessert A la semaine n, alors la semaine $n+1$, il choisit :
  le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
- Si M a choisi le dessert B la semaine n, alors la semaine $n+1$, il choisit :
  le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
- Si M a choisi le dessert C la semaine n, il reprend le dessert C la semaine $n+1$.
- Le consommateur choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On note pour tout entier naturel non nul n,

- A_n l'événement : "M a choisi le dessert A la n-ième semaine",
- B_n l'événement : "M a choisi le dessert B la n-ième semaine",
- C_n l'événement : "M a choisi le dessert C la n-ième semaine".

On note aussi

$$U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}.$$

1. Donner $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$ ainsi que les probabilités suivantes : $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier avec soin que
$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).$$
Donner de même des relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.
3. a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_{n+1} = AU_n$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = A^{n-1}X_1$.
4. En déduire, en fonction de n, la probabilité $P(A_n)$ ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.