

CONCOURS BLANC 4 — ECRICOME

Exercice 1 –

1. a) Je calcule chaque matrice puis le produit :

$$M - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

donc

$$(M - I)(M + 3I) = \begin{pmatrix} 5-4-1 & -2+2 & 1-4+3 \\ 10-8-2 & -4+4 & 2-8+6 \\ -5+4+1 & 2-2 & -1+4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Comme $(M - I)(M + 3I) = 0_3$, j'en déduis que le polynôme

$$P(X) = (X - 1)(X + 3) = X^2 + 2X - 3$$

est un polynôme annulateur de la matrice M .

- c) Les valeurs propres possibles pour la matrice M sont les racines du polynôme annulateur. Or $X^2 + 2X - 3 = 0 \iff (X - 1)(X + 3) = 0 \iff X = 1$ ou $X = -3$.

Comme $X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de M et que ses racines sont -3 et 1 , les valeurs propres possibles pour M sont

$$-3 \quad \text{et} \quad 1.$$

2. a) D'après la question 1.a), je sais que $P(M) = (M - I)(M + 3I) = 0_3$, i.e. $M^2 + 2M - 3I = 0_3$. J'en déduis donc que

$$M^2 = 3I - 2M.$$

- b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $M^n = u_n M + v_n I$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I \quad \text{et} \quad u_0 M + v_0 I = 0 \times M + 1 \times I = I.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi. Alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (u_n M + v_n I) \times M = u_n M^2 + v_n M = u_n (3I - 2M) + v_n M \\ &= 3u_n I - 2u_n M + v_n M = (-2u_n + v_n)M + 3u_n I = u_{n+1} M + v_{n+1} I. \end{aligned}$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = u_n M + v_n I.$$

3. a) D'après les formules de l'énoncé, je cherche une matrice A telle que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_n + v_n \\ 3u_n \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Alors en posant $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, j'obtiens bien l'égalité souhaitée. En effet,

$$A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_n + v_n \\ 3u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}.$$

- b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Alors

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \times A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Voici le script complété.

```
1. import numpy as np
2. def fonction(n):
3.     A=np.array([[ -2, 1], [3, 0]])
4.     C=np.array([[0], [1]])
5.     for k in range(n):
6.         C=np.dot(A,C)
7.     return C
```

4. a) Je calcule le produit matriciel :

$$A \times V_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = V_1.$$

Comme V_1 est un vecteur non nul qui vérifie $AV_1 = 1V_1$, alors V_1 est un vecteur propre de A , associé à la valeur propre 1.

De même

$$A \times V_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3V_2.$$

Comme V_2 est un vecteur non nul qui vérifie $AV_2 = -3V_2$, alors V_2 est un vecteur propre de A , associé à la valeur propre -3 .

- b) Je calcule le déterminant de la matrice Q : $1 \times (-1) - 3 \times 1 = -1 - 3 = -4$.

Comme ce déterminant est non nul, alors la matrice Q est inversible et son inverse est donné par

$$Q^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

- c) La matrice A possède deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

Comme la matrice Q est construite comme juxtaposition des deux vecteurs propres de A , alors en construisant D comme la matrice diagonale composée des deux valeurs propres 1 et -3 , *i.e.*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

alors $A = QDQ^{-1}$ et donc

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}QDQ^{-1}Q = IDI = D, \quad \text{i.e.} \quad D = Q^{-1}AQ.$$

- d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $D^n = Q^{-1}A^nQ$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$D^0 = I \quad \text{et} \quad QA^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Alors, comme d'après la question précédente $A = QDQ^{-1}$,

$$A^{n+1} = A^n \times A = QD^nQ^{-1} \times QDQ^{-1} = QD^nIDQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = Q^{-1}A^nQ.$$

- e) Comme D est une matrice diagonale, je sais que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Puis comme $A^n = QD^nQ^{-1}$, alors je calcule les produits :

$$QD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n \\ 3 & -(-3)^n \end{pmatrix}$$

et

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n \\ 3 & -(-3)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+3 \times (-3)^n & 1-(-3)^n \\ 3-3 \times (-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-(-3)^{n+1} & 1-(-3)^n \\ 3+(-3)^{n+1} & 3+(-3)^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{En factorisant par } -1, \text{ j'obtiens bien } A^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n \end{pmatrix}.$$

f) D'après la question **3.b**), je sais que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En connaissant désormais la formule explicite de A^n , j'obtiens que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{-1}{4} \times (-1 + (-3)^n) = \frac{1 - (-3)^n}{4} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{-1}{4} \times (-3 - (-3)^n) = \frac{3 + (-3)^n}{4}.$$

5. a) D'après la question **2.b**), je sais que $M^n = u_n M + v_n I$.

En connaissant désormais les formules explicites de u_n et v_n , j'obtiens que

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1 - (-3)^n}{4} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3 + (-3)^n}{4} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} + \frac{3 + (-3)^n}{4} & -2 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} & \frac{1 - (-3)^n}{4} \\ 2 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} & -3 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} + \frac{3 + (-3)^n}{4} & 2 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} \\ -\frac{1 - (-3)^n}{4} & 2 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} & \frac{3 + (-3)^n}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5 - (-3)^n}{4} & \frac{(-3)^n - 1}{2} & \frac{1 - (-3)^n}{4} \\ \frac{1 - (-3)^n}{2} & (-3)^n & \frac{1 - (-3)^n}{2} \\ \frac{(-3)^n - 1}{4} & \frac{1 - (-3)^n}{2} & \frac{3 + (-3)^n}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Après exécution d'un des deux scripts de la question **3.c**), les variables C(1) et C(2) contiennent respectivement les valeurs de u_n et v_n . Ainsi le résultat rendu par ce nouveau script sera la puissance n -ième de la matrice M , *i.e.* M^n .

Exercice 2 –

1. a) Grâce aux croissances comparées, je sais que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Graphiquement, j'en déduis que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$.

- b) La fonction f est donnée sous la forme d'un quotient $f = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$.

Puisque $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Comme un carré est toujours positif, pour tout $x \geq 1$ le dénominateur de $f'(x)$ est positif. Donc le signe du quotient est donné par celui du numérateur, à savoir $1 - \ln(x)$.

- c) Je résous : $1 - \ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq \ln(x) \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e^1 = e$.

Je peux désormais établir le tableau de signe de $f'(x)$ et donc le tableau de variation de f .

Je remarque aussi que $f(1) = \frac{\ln(1)}{1} = 0$ et $f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$.

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{e}$	0

2. a) Je dérive de nouveau f' pour obtenir f'' . La fonction f' est donnée sous la forme d'un quotient $f' = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = 1 - \ln(x)$ et $v(x) = x^2$. Puisque $u'(x) = -\frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$, alors

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{-x - 2x + 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x \times (2 \ln(x) - 3)}{x^4} = \frac{2 \ln(x) - 3}{x^3}.$$

- b) Pour déterminer la convexité de f , j'étudie le signe de $f''(x)$.

Pour commencer, comme $x \geq 1$, alors le dénominateur x^3 est toujours positif.

Donc le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $2 \ln(x) - 3$.

Je résous : $2 \ln(x) - 3 \geq 0 \iff 2 \ln(x) \geq 3 \iff \ln(x) \geq \frac{3}{2} \iff x \geq e^{\frac{3}{2}}$.

Je peux alors en déduire que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right]$,

car $f''(x)$ y est positif, et concave sur l'intervalle $\left[1, e^{\frac{3}{2}}\right]$.

- c) La courbe \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion là où la convexité de la fonction change, c'est-à-dire ici en le point d'abscisse $x = e^{\frac{3}{2}}$.

Donc le point $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$ est point d'inflexion à la courbe \mathcal{C}_f .

3. a) Le point M étant positionné sur la courbe représentative de la fonction f , ses coordonnées sont $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$ (je reconnais le point d'inflexion). Aussi

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}.$$

- b) L'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = e^{\frac{3}{2}}$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \times \left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + f\left(e^{\frac{3}{2}}\right).$$

Or $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$ et

$$f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1 - \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{e^{2 \times \frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{e^3} = -\frac{1}{2e^3}.$$

Alors l'équation de la tangente \mathcal{T} est donnée par

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times \left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{2e^3} + \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2e^3} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{2e^3} + \frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}},$$

qui se ramène à

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times x + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

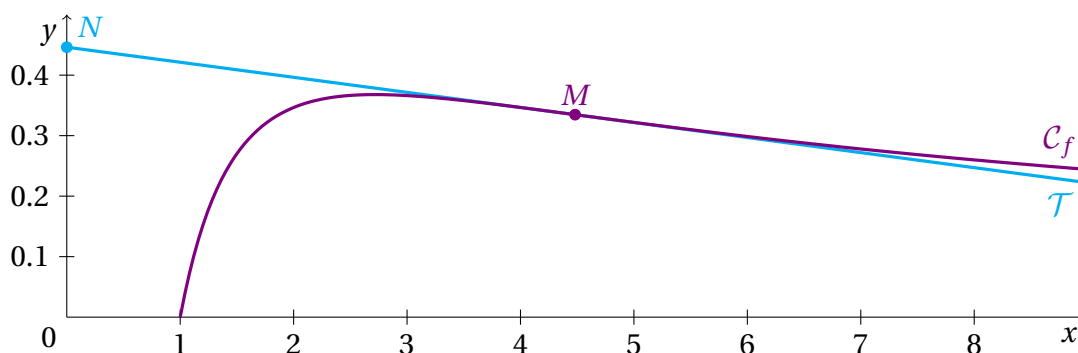
- c) L'axe des ordonnées correspond à l'ensemble des points (x, y) dont l'abscisse est $x = 0$. Comme les points de la tangente (\mathcal{T}) vérifient l'équation $y = -\frac{1}{2e^3} \times x + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$, je peux trouver quelle est l'ordonnée du point d'abscisse $x = 0$ sur la tangente (\mathcal{T}) :

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times 0 + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi le point d'intersection N de la tangente (\mathcal{T}) avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $\left(0, \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

- d) Comme M est le point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f , alors je conclus que par définition, la tangente est au dessus de la courbe sur l'intervalle $\left[1, e^{\frac{3}{2}}\right]$, là où f est concave, puis en dessous de la courbe sur l'intervalle $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right]$, là où f est convexe.

4. Voici l'allure de la courbe \mathcal{C}_f et de sa tangente \mathcal{T} .



5. a) Soit $A \geq 1$. Je cherche à calculer $I(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx$. Je commence par chercher une primitive à $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Je remarque que f est de la forme $f = u' \times u$ avec $u(x) = \ln(x)$, puisqu'alors $u'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi une primitive de f est donnée par $F(x) = \frac{u(x)^2}{2} = \frac{\ln(x)^2}{2}$. Finalement

$$I(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{\ln(x)^2}{2} \right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} = \frac{\ln(A)^2}{2}.$$

- b) Par définition, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ converge si et seulement si la limite $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx$ existe et est finie.
Or $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx = I(A) = \frac{\ln(A)^2}{2}$ donc sa limite lorsque A tend vers $+\infty$ existe et vaut $+\infty$.
J'en déduis donc que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ diverge vers $+\infty$.

6. a) Soit $A \geq 1$. Je cherche à calculer $J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx$. Je pose

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x^2} & u(x) &= -\frac{1}{x} \\ v(x) &= \ln(x) & v'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx &= \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x} \right) dx = -\frac{\ln(A)}{A} + \frac{\ln(1)}{1} + \int_1^A \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + 0 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + \frac{1}{1} \end{aligned}$$

J'ai bien montré que $J(A) = \frac{-\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1$.

- b) Par croissances comparées, je sais que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(A)}{A} = 0$. Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} = 0$ aussi, j'en déduis par somme que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} J(A) = -0 - 0 + 1 = 1.$$

7. a) La fonction g est définie en deux morceaux :

Sur l'intervalle $] -\infty, 1[$, $g(x) = 0$ donc la fonction g est continue car constante.

Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ donc la fonction g est continue comme quotient de fonctions continues. Il ne reste plus qu'à étudier la continuité en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0$$

Comme la limite à gauche de g en 1 est égale à la limite à droite de g en 1, j'en déduis que la fonction g est continue en 1. Finalement g est continue sur \mathbb{R} .

b) J'ai déjà montré à la question précédente que la fonction g est continue sur \mathbb{R} .

Aussi, sur l'intervalle $] -\infty, 1[$, $g(x) = 0 \geq 0$ et sur l'intervalle $[1, +\infty[$, $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \geq 0$ car $x^2 > 0$ et $\ln(x) \geq 1$ dès lors que $x \geq 1$. Donc la fonction g est positive sur \mathbb{R} .

Il ne reste plus qu'à montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ converge et vaut 1.

Je décompose, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^1 g(x) dx + \int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

Je sais que $\int_{-\infty}^1 0 dx$ converge et vaut 0 car la fonction sous l'intégrale est nulle.

Et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ est la limite de $J(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Donc cette intégrale converge et vaut 1 par la question **6.b**).

Finalement, la fonction g est continue sur \mathbb{R} , positive sur \mathbb{R} et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = 0 + 1 = 1.$$

Donc la fonction g est bien une densité de probabilité.

c) Voici le script complété.

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. def g(x):
4.     if x>=1:
5.         y=np.log(x)/x**2
6.     else:
7.         y=0
8.     return y
9. x=np.linspace(-4,8,100)
10. y=np.zeros(100)
11. for k in range(100):
12.     y[k]=g(x[k])
13. plt.plot(x,y)
14. plt.show()
```

d) L'exécution des lignes 8 et 9 du script précédent permet de tracer une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $[-4, 8]$.

8. a) La fonction de répartition G de X est donnée par $G(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$.

Je raisonne par disjonction de cas :

- si $x < 1$, alors $G(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$,
- si $x \geq 1$, alors $G(x) = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt = J(x) = \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1$.

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

b) Je cherche $P([X > e^2])$:

$$P([X > e^2]) = 1 - P([X \leq e^2]) = 1 - G(e^2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{e^2} - \frac{\ln(e^2)}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} = \frac{3}{e^2}.$$

Puis par la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[X > e]}([X > e^2]) = \frac{P([X > e] \cap [X > e^2])}{P([X > e])} = \frac{P([X > e^2])}{P([X > e])}.$$

$$\text{J'ai besoin de } P([X > e]) = 1 - P([X \leq e]) = 1 - G(e) = 1 - \left(1 - \frac{1}{e} - \frac{\ln(e)}{e}\right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}.$$

Donc

$$P_{[X > e]}([X > e^2]) = \frac{\frac{3}{e^2}}{\frac{2}{e}} = \frac{3}{e^2} \times \frac{e}{2} = \frac{3}{2e}.$$

c) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx$ converge.

Or $xg(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et j'ai montré à la question **5.b)** que l'intégrale de cette fonction entre 1 et $+\infty$ diverge. Donc la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.

Exercice 3 –**Partie A**

1. a) La variable aléatoire X est à valeurs entières. Donc l'événement $[X > n - 1]$ correspond à toutes les valeurs entières strictement supérieures à $n - 1$, *i.e.* $n, n + 1$ et toutes les valeurs entières supérieures. En mettant en avant la valeur n , je peux alors décomposer l'événement $[X > n - 1]$ en les événements incompatibles $[X = n]$ et $[X > n]$, qui correspond à toutes les valeurs strictement supérieures à n .

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[X > n - 1] = [X = n] \cup [X > n].$$

- b) Par la relation obtenue à la question précédente, je sais que

$$P([X > n - 1]) = P([X = n] \cup [X > n]) = P([X = n]) + P([X > n])$$

puisque les deux événements sont incompatibles. Comme $u_n = P([X > n])$, alors de même $u_{n-1} = P([X > n - 1])$ et l'équation précédente se réécrit $u_{n-1} = P([X = n]) + u_n$, *i.e.* pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n-1} - u_n = P([X = n]).$$

2. a) Je suis cette fois en présence de probabilités conditionnelles, supposant que l'événement $[X > n - 1]$ est vérifié. Immédiatement $P_{[X > n - 1]}([X > n - 1]) = 1$ puisqu'il s'agit de la probabilité de l'événement que je suppose. Puis, par un raisonnement similaire à celui de la question **1.b)**, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 = P_{[X > n - 1]}([X = n] \cup [X > n]) = P_{[X > n - 1]}([X = n]) + P_{[X > n - 1]}([X > n]).$$

Autrement dit,

$$P_{[X > n - 1]}([X > n]) = 1 - P_{[X > n - 1]}([X = n]).$$

- b) L'énoncé donne : $P_{[X > n - 1]}([X = n]) = \frac{2}{5}$.

Donc la formule de la question précédente se réécrit $P_{[X > n - 1]}([X > n]) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Puis, par la formule des probabilités composées, j'obtiens que

$$u_n = P([X > n]) = P([X > n - 1]) \times P_{[X > n - 1]}([X > n]) = u_{n-1} \times \frac{3}{5}.$$

J'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{3}{5} u_{n-1}.$$

- c) Grâce à la question précédente, je reconnais en $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique, de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme $u_0 = 1$. Alors la formule explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par

$$u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

3. a) Grâce à la question **1.b)**, je sais que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P([X = n]) = u_{n-1} - u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \frac{2}{5}.$$

J'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P([X = n]) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

b) Je remarque que $P([X = n]) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = p(1-p)^{n-1}$ pour $p = \frac{2}{5}$.

Je reconnais là la formule des probabilités d'une loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{5}$.

c) Comme la variable aléatoire X suit une loi géométrique, alors

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{3}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \times \frac{5^2}{2^2} = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4}.$$

Partie B

4. a) Voici le script complété.

```
1. import numpy.random as rd
2. def geom():
3.     X=1
4.     while rd.random()>2/5:
5.         X=X+1
6.     return X
```

b) Voici le script complété.

```
1. def simulZ():
2.     X1=geom()
3.     X2=geom()
4.     if X1>X2:
5.         Z=X1
6.     else:
7.         Z=X2
8.     return Z
```

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme X_1 suit la même loi que X , alors en me réservant de la question 2.c),

$$P([X_1 \leq n]) = 1 - P([X_1 > n]) = 1 - P([X > n]) = 1 - u_n = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

6. a) La variable aléatoire Z est égale à la durée de vie de l'appareil, qui elle-même correspond à la durée de vie maximale des deux composants. Ainsi la durée de vie de l'appareil est inférieure ou égale à n si et seulement si les durées de vie des deux composants sont elles mêmes inférieures ou égales à n , *i.e.* pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[Z \leq n] = [\max(X_1, X_2) \leq n] = [X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n].$$

b) Grâce à la relation établie à la question précédente, et puisque les variables aléatoires X_1 et X_2 sont identiques et indépendantes, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P([Z \leq n]) = P([X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n]) = P([X_1 \leq n]) \times P([X_2 \leq n]) = P([X_1 \leq n])^2.$$

Puis grâce au résultat de la question 5., pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P([Z \leq n]) = \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^2 = 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^{2 \times n} = 1 - 2 \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{9}{25}\right)^n.$$

- c) Pour des raisons similaires à celles utilisées dans la question 1., l'égalité d'événements $[Z \leq n] = [Z = n] \cup [Z \leq n-1]$ est vérifiée et donc

$$P([Z \leq n]) = P([Z = n]) + P([Z \leq n-1]) \iff P([Z = n]) = P([Z \leq n]) - P([Z \leq n-1]).$$

Alors avec les valeurs de la question précédente, j'obtiens que

$$\begin{aligned} P([Z = n]) &= P([Z \leq n]) - P([Z \leq n-1]) \\ &= \left(1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{9}{25}\right)^n\right) - \left(1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\right) \\ &= (1-1) - 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \left(\frac{3}{5} - 1\right) + \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \times \left(\frac{9}{25} - 1\right) \\ &= 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \frac{2}{5} + \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{16}{25}\right) = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P([Z = n]) = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

7. Les deux séries $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{25}\right)^n$ sont des séries géométriques, de raisons $\frac{3}{5}$ et $\frac{9}{25}$.

Dans les deux cas, comme la raison est strictement comprise entre 0 et 1, la série converge.

Et pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N P([Z = n]) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \right) = \frac{4}{5} \sum_{n=1}^N \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \sum_{n=1}^N \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{16}{25} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{9}{25}\right)^n. \end{aligned}$$

Et par convergence des séries géométriques citées précédemment, toutes les sommes partielles écrites ici convergent et j'obtiens

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} P([Z = n]) &= \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{16}{25} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{9}{25}\right)^n = \frac{4}{5} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{1 - \frac{9}{25}} \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{\frac{2}{5}} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} - \frac{16}{25} \times \frac{25}{16} = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P([Z = n]) = 1.$$

8. a) Pour vérifier cette égalité, je cherche d'abord à exprimer chacun des termes : d'après la question 6.c),

$$P([Z = n]) = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

Et comme X_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{5}$ et que Y suit une loi géométrique de paramètre $p' = \frac{16}{25}$, alors

$$P([X_1 = n]) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad P([Y = n]) = p' \times (1 - p')^{n-1} = \frac{16}{25} \times \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

En rassemblant les morceaux et en multipliant par n , j'obtiens bien l'égalité souhaitée :

$$nP([Z = n]) = 2nP([X_1 = n]) - nP([Y = n]).$$

- b) La variable Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} nP([Z = n])$ converge.

Or pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N nP([Z = n]) &= \sum_{n=1}^N (2nP([X_1 = n]) - nP([Y = n])) \\ &= 2 \times \left(\sum_{n=1}^N nP([X_1 = n]) \right) - \left(\sum_{n=1}^N nP([Y = n]) \right) \end{aligned}$$

Et comme les variables aléatoires X_1 et Y suivent des lois géométriques, elles admettent toutes deux des espérances, ce qui me permet d'établir la convergence des deux sommes partielles ici présentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP([X_1 = n]) \text{ existe et vaut } E(X_1) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nP([Y = n]) \text{ existe et vaut } E(Y).$$

J'en déduis donc que la série $\sum_{n \geq 1} nP([Z = n])$ converge,

i.e. que la variable aléatoire Z admet une espérance et que

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP([Z = n]) = 2E(X_1) - E(Y) = 2 \times \frac{1}{\frac{2}{5}} - \frac{1}{\frac{16}{25}} = 2 \times \frac{5}{2} - \frac{25}{16} = \frac{80 - 25}{16} = \frac{55}{16}.$$

Ainsi j'ai montré que

$$E(Z) = \frac{55}{16}.$$