

## EXERCICES — CHAPITRE 5

### Évènements et langage ensembliste

**Exercice 1** – Soient  $A, B, C$  trois évènements d'un espace probabilisé  $\Omega$ . Exprimer en terme ensembliste les évènements suivants.

1.  $A$  et  $B$  sont réalisés.
2. Seulement  $A$  est réalisé.
3. Aucun des évènements  $A, B$  ou  $C$  n'est réalisé.
4. Un seul des évènements  $A, B$  ou  $C$  est réalisé.
5. Au moins deux des trois évènements  $A, B$  ou  $C$  sont réalisés.
6. Pas plus de deux des trois évènements  $A, B$  ou  $C$  sont réalisés.

**Exercice 2** – Soient  $A, B, C$  trois évènements d'un espace probabilisé  $\Omega$ .

1. Vérifier que  $(A \cup B) \cap C$  entraîne  $A \cup (B \cap C)$ .
2. À quelle condition sur  $A$  et  $C$  les deux évènements précédents sont-ils égaux?

**Exercice 3** – On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les ensembles suivants.

- $A$  : "les deux cartes tirées sont rouges",
- $B$  : "les deux cartes tirées sont un valet et un dix",
- $C$  : "les deux cartes tirées sont des personnages".

1. Que représente les ensembles suivants?

(a) $\bar{A}$ (b) $A \cap B \cap \bar{C}$	(c) $(A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C})$ (d) $(A \cap B) \cap C$
--	---

2. Écrire à l'aide des ensembles  $A, B, C$  les ensembles suivants.

- $F$  : "les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges",
- $G$  : "on obtient au plus une figure".

**Exercice 4** – Dans une boîte, il y a 4 jetons disponibles numérotés de 1 à 4. On tire simultanément au hasard deux jetons.

1. Donner tous les tirages possibles.  
Pour la suite, on note  $A$  : "les deux jetons sont pairs".

2. Quels sont les tirages constituant les ensembles  $\bar{A}$ , «  $A$  ou  $\bar{A}$  » et  $A \cap \bar{A}$ .
3. On considère l'ensemble  $C$  : "la somme des chiffres numérotés sur les deux jetons est paire". Quels sont les tirages constituant les ensembles

$$\bar{C}, \quad A \cup C, \quad \text{« } A \text{ et } C \text{ »,} \quad \text{« } A \text{ ou } \bar{C} \text{ »} \quad \text{et} \quad A \cap \bar{C}.$$

**Exercice 5** – Une épreuve aléatoire consiste à effectuer des lancers successifs d'un dé. Pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 1,  $A_k$  désigne l'évènement : "le  $k$ -ième lancer a fourni un 6".

Exprimer les évènements ci-dessous à l'aide des évènements  $A_k$  et des opérations autorisées sur les évènements.

1.
  - $E_2$  : "Le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer",
  - $E_5$  : "Le premier 6 a été obtenu au cinquième lancer",
  - $E_n$  : "Le premier 6 a été obtenu au  $n$ -ième lancer" où  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2.
2.
  - $G_3$  : "Le deuxième 6 a été obtenu au troisième lancer",
  - $G_4$  : "Le deuxième 6 a été obtenu au quatrième lancer".

### Calculs directs de probabilités

**Exercice 6** – On extrait 3 cartes d'un jeu de 32 cartes, une par une, avec remise.

1. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 3 valets?
2. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 3 fois la même carte?

**Exercice 7** – On extrait  $n$  boules d'une urne contenant une boule noire et une boule blanche, une par une, avec remise. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des boules tirées soit blanche?

**Exercice 8** – On lance un dé équilibré deux fois de suite.

1. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8?
2. Il y a 11 sommes possibles (tous les entiers entre 2 et 12). Pourquoi la probabilité calculée à la première question n'est-elle pas tout simplement égale à  $\frac{1}{11}$ ?

### Probabilités conditionnelles

**Exercice 9** – Soient  $A, B, C$  trois évènements d'un espace probabilisé  $\Omega$  avec  $P(B \cap C) > 0$ . Vérifier que

$$P_{B \cap C}(A)P_C(B) = P_C(A \cap B).$$

**Exercice 10** – Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage?
2. Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire?

**Exercice 11** – On considère deux événements  $A$  et  $B$  tels que

$$P(A) = 0.2, \quad P(B) = 0.6 \quad \text{et} \quad P(A \cup B) = 0.7.$$

1. Calculer  $P(A \cap B)$ .
2. En déduire les probabilités conditionnelles  $P_A(B)$  et  $P_B(A)$ .

## Formules des probabilités composées et totales

**Exercice 12** – Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire?

**Exercice 13** – On s'intéresse à une entreprise chargée de mettre du lait en bouteilles. La bouteille vide arrive sur un tapis roulant et passe successivement dans deux machines  $M_1$  et  $M_2$ . La machine  $M_1$  remplit la bouteille de lait et la machine  $M_2$  met le bouchon. Une étude statistique portant sur un grand nombre de bouteilles de lait à la fin de la chaîne a permis d'établir que 5% des bouteilles ne sont pas correctement remplies et que parmi elles 8% n'ont pas de bouchon. D'autre part, 4% des bouteilles correctement remplies n'ont pas de bouchon. On choisit une bouteille de lait au hasard à la fin de la chaîne et on note

- $R$  l'évènement : "la bouteille est correctement remplie",
- $B$  l'évènement : "la bouteille a un bouchon".

1. Calculer  $P(R)$ ,  $P(\bar{R})$ ,  $P_R(B)$ ,  $P_R(\bar{B})$ ,  $P_{\bar{R}}(\bar{B})$  et  $P_{\bar{R}}(B)$ .
2. Calculer  $P(R)$ .
3. Calculer la probabilité qu'une bouteille soit correctement remplie et qu'elle ait un bouchon.

**Exercice 14** – Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes. On sait que

- 15% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.

- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par  $E$  l'évènement "les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation" et par  $V$  l'évènement "les sacs contiennent des pommes de variétés différentes". On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

1. Calculer  $P(E)$ ,  $P(\bar{E})$ ,  $P_E(V)$ ,  $P_E(\bar{V})$ ,  $P_{\bar{E}}(\bar{V})$  et  $P_{\bar{E}}(V)$ .
2. Calculer  $P(V)$ .
3. On constate que le sac de pommes contient des pommes de variétés différentes. Calculer la probabilité qu'il ait été acheté dans un supermarché.

**Exercice 15** – Dans un magasin de CD, 5 % des boîtes sont en mauvais état, 60 % des boîtes abîmées contiennent un CD défectueux, et 98 % des boîtes en bon état contiennent un CD en bon état. Un client achète un CD. On note  $A$  l'évènement "la boîte achetée est abîmée" et  $D$  l'évènement "le CD acheté est défectueux".

1. Calculer  $P(A)$ ,  $P(\bar{A})$ ,  $P_A(D)$ ,  $P_A(\bar{D})$ ,  $P_{\bar{A}}(\bar{D})$  et  $P_{\bar{A}}(D)$ .
2. Calculer  $P(D)$ .
3. Le client constate que son CD est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée?

**Exercice 16** – Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que

- s'il a arrêté le  $n$ -ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le  $(n+1)$ -ième est 0,8,
- s'il a laissé passer le  $n$ -ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6,
- la probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7.

On note  $A_n$  l'évènement "le gardien arrête le  $n$ -ième tir". On a donc  $P(A_1) = 0,7$ .

1. (a) Donner, pour  $n \geq 1$ , les valeurs de  $P_{A_n}(A_{n+1})$  et  $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$ .  
(b) En déduire que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$P(A_{n+1}) = 0,2P(A_n) + 0,6.$$

2. On pose à présent, pour  $n \geq 1$ ,  $p_n = P(A_n)$  et  $u_n = p_n - 0,75$ .  
(a) Démontrer que  $u_n$  est une suite géométrique de raison 0,2.  
(b) En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 17 –****Première partie :**

On considère la suite  $(u_n)$  de nombres réels définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par la relation de récurrence  $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$  et par la condition initiale  $u_1 = \frac{1}{2}$ .

1. Soit  $(v_n)$  la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par  $v_n = 13u_n - 4$ . Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
3. Prouver que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$u_n = \frac{4}{13} + \frac{5}{26} \left( -\frac{3}{10} \right)^{n-1}.$$

**Deuxième partie :**

Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de khôlle. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on note  $E_n$  l'évènement : "le professeur oublie ses clés le jour  $n$ " et  $p_n = P(E_n)$ . On suppose qu'il oublie ses clés le premier jour avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ . On suppose en outre que

- s'il oublie ses clés le jour  $n$ , alors il oublie ses clés le jour  $n+1$  avec une probabilité  $\frac{1}{10}$ ,
- s'il n'oublie pas ses clés le jour  $n$ , alors il oublie ses clés le jour  $n+1$  avec une probabilité  $\frac{4}{10}$ .

1. Calculer les probabilités

$$P_{E_n}(E_{n+1}) \quad \text{et} \quad P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}).$$

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$p_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}p_n.$$

3. À l'aide des résultats de la **Première partie**, donner l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 18 –** Soit  $a \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[$ . Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Le premier jour, le titre est stable.

Si un jour  $n$  le titre monte, le jour  $n+1$ , il montera avec la probabilité  $1-2a$ , restera stable avec la probabilité  $a$  et baissera avec la probabilité  $a$ .

Si un jour  $n$  le titre est stable, le jour  $n+1$ , il montera avec la probabilité  $a$ , restera stable avec la probabilité  $1-2a$  et baissera avec la probabilité  $a$ .

Si un jour  $n$  le titre baisse, le jour  $n+1$  il montera avec la probabilité  $a$ , restera stable avec la probabilité  $a$  et baissera avec la probabilité  $1-2a$ .

On note  $M_n$  (resp.  $S_n$ , resp.  $B_n$ ) l'évènement "le titre monte (resp. reste stable, resp. baisse) le jour  $n$ ".

On pose  $p_n = P(M_n)$ ,  $q_n = P(S_n)$  et  $r_n = P(B_n)$ .

1. Expliciter  $p_{n+1}$  et  $q_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ ,  $q_n$  et  $r_n$ .
2. Que vaut  $p_n + q_n + r_n$ ? En déduire l'expression de  $r_n$  en fonction de  $p_n$  et  $q_n$ .
3. Montrer que les suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  sont arithmético-géométriques.
4. En déduire  $p_n$ ,  $q_n$  puis  $r_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 19 –** Les poules pondent des œufs que l'on classe suivant trois calibres A, B, C.

- Si une poule pond un œuf de calibre A, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B, ou C avec des probabilités respectives  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{4}$ .
- Si une poule pond un œuf de calibre B, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B, ou C avec des probabilités respectives  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{4}$ .
- Si une poule pond un œuf de calibre C, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B, ou C avec des probabilités respectives  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{2}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  les probabilités respectives pour que le  $n$ -ième œuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

1. On suppose que le premier œuf pondu par une poule est de calibre C. Calculer  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ , et  $c_2$ .
2. Calculer les probabilités suivantes.

$$P_{A_n}(A_{n+1}), P_{A_n}(B_{n+1}), P_{A_n}(C_{n+1}),$$

$$P_{B_n}(A_{n+1}), P_{B_n}(B_{n+1}), P_{B_n}(C_{n+1}),$$

$$P_{C_n}(A_{n+1}), P_{C_n}(B_{n+1}), P_{C_n}(C_{n+1}).$$

3. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

**Exercice 20** – On étudie le comportement d'un consommateur  $M$  à partir d'une semaine donnée (appelée "semaine 1"). Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On considère en outre que

- si  $M$  a choisi le dessert  $A$  la semaine  $n$ , alors la semaine  $n + 1$  il choisit le dessert  $A$  avec une probabilité de  $\frac{1}{3}$  ou le dessert  $C$  avec une probabilité de  $\frac{2}{3}$ ,
- si  $M$  a choisi le dessert  $B$  la semaine  $n$ , alors la semaine  $n + 1$  il choisit le dessert  $A$  avec une probabilité de  $\frac{1}{3}$  ou le dessert  $B$  avec une probabilité de  $\frac{2}{3}$ ,
- si  $M$  a choisi le dessert  $C$  la semaine  $n$ , il reprend le dessert  $C$  la semaine  $n + 1$ ,
- le consommateur choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On notera, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

- $A_n$  l'évènement : " $M$  a choisi le dessert  $A$  la  $n$ -ième semaine",
- $B_n$  l'évènement : " $M$  a choisi le dessert  $B$  la  $n$ -ième semaine",
- $C_n$  l'évènement : " $M$  a choisi le dessert  $C$  la  $n$ -ième semaine".

1. Donner  $P(A_1)$ ,  $P(B_1)$ ,  $P(C_1)$  ainsi que les probabilités :

$$\begin{array}{lll} P_{A_n}(A_{n+1}), & P_{A_n}(B_{n+1}), & P_{A_n}(C_{n+1}), \\ P_{B_n}(A_{n+1}), & P_{B_n}(B_{n+1}), & P_{B_n}(C_{n+1}), \\ P_{C_n}(A_{n+1}), & P_{C_n}(B_{n+1}), & P_{C_n}(C_{n+1}). \end{array}$$

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier avec soin que

$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).$$

Donner de même des relations exprimant  $P(B_{n+1})$  et  $P(C_{n+1})$  en fonction de  $P(A_n)$ ,  $P(B_n)$  et  $P(C_n)$ .

## Indépendance

**Exercice 21** – On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des événements  $A$  : "on obtient le tirage 2, 4 ou 6" et  $B$  : "on obtient le tirage 3 ou 6".

**Exercice 22** – Dans une population de 10 000 personnes, il y a 45% de fumeurs et 35% de personnes atteintes de bronchite. De plus, 65% des personnes ayant une bronchite sont fumeurs.

1. On choisit une personne au hasard dans cette population. Calculer la probabilité des événements suivants.
  - $E_1$  : "la personne choisie fume et a une bronchite",
  - $E_2$  : "la personne choisie ne fume pas et a une bronchite",
  - $E_3$  : "la personne choisie ne fume pas et n'a pas de bronchite".
2. Fumer et avoir une bronchite sont-ils des événements indépendants?
3. On choisit une personne au hasard parmi les fumeurs. Calculer la probabilité que cette personne ait une bronchite.

**Exercice 23** – Dans une ville comprenant deux arrondissements  $A$  et  $B$ , la probabilité pour une entreprise de faire l'objet d'un contrôle fiscal est de  $\frac{1}{4}$  dans l'arrondissement  $A$  et de  $\frac{1}{5}$  dans l'arrondissement  $B$ . On suppose que ces deux événements sont indépendants. Un groupe financier possède un hypermarché implanté dans l'arrondissement  $A$  et un autre dans l'arrondissement  $B$ .

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants.

- $E_1$  : "les deux hypermarchés sont contrôlés",
- $E_2$  : "l'un au moins des hypermarchés est contrôlés",
- $E_3$  : "un hypermarché et un seul est contrôlé",
- $E_4$  : "aucun des deux hypermarchés n'est contrôlé".

**Exercice 24** – Un archer tire sur une cible située à 20m et une cible située à 50m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20m (resp. 50m) est  $\frac{1}{3}$  (resp.  $\frac{1}{4}$ ). On suppose que les trois tirs sont indépendants. L'archer gagne s'il atteint deux cibles consécutivement.

Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20m et en commençant par la cible située à 50m. Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer?