

# 35 | Fonction logarithme népérien

## I – Définition et premières propriétés

**Définition 35.1** – La fonction **logarithme népérien**, notée  $\ln$ , est la primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui prend la valeur 0 pour  $x = 1$ .

### Proposition 35.2

- La fonction  $\ln$  est définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- $\ln(1) = 0$ .
- Pour tout réel  $x > 0$ ,  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

### Proposition 35.3

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  strictement positifs, on a

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

On peut tirer plusieurs conséquences de cette propriété fondamentale de la fonction  $\ln$ .

### Proposition 35.4

- Pour tout nombre réel strictement positif  $a$ ,  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ ,
- Pour tous nombres réels strictement positifs  $a$  et  $b$ ,  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ ,
- Pour tout nombre réel strictement positif  $a$ , et pour tout entier relatif  $n$ ,  $\ln(a^n) = n \ln(a)$ ,
- Pour tout nombre réel strictement positif  $a$ ,  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$ .

*Démonstration.*

- On a  $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a)$ . Par ailleurs,  $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln(1) = 0$ .  
Ainsi,  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = 0$  et donc  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ .
- On raisonne de la même manière pour les trois autres points.

□

**Exemple 35.5** – Soient  $x$  et  $y > 0$ . Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} 1. \ln(2x) - \ln(x) \\ = \ln(2) + \ln(x) - \ln(x) = \ln(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \ln(x^2) - \ln(x) \\ = 2\ln(x) - \ln(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) \\ = \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. 2\ln(x^3) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ = 6\ln(x) - 3\ln(x) = 3\ln(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \ln(1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ = 0 - \ln(x) - 2\ln(x) = -3\ln(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) \\ = \ln(x) - \ln(y) + \ln(y) - \ln(x) = 0 \end{aligned}$$

## II – Étude de la fonction logarithme népérien

### 1 – Domaine de définition

#### Proposition 35.6

Le domaine de définition de la fonction logarithme est  $D = ]0; +\infty[$ .

Ainsi, dans le cas d'une fonction de la forme  $f = \ln(u)$ , le domaine de définition est donné par les solutions de l'inéquation  $u(x) > 0$ .

**Exemple 35.7** – Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ .  
On résout l'inéquation  $x^2 - 3x + 2 > 0$ . On a  $\Delta = 9 - 8 = 1$ , il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+

Et donc  $D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$ .

### 2 – Variations

#### Proposition 35.8

La fonction logarithme népérien est **continue** et **strictement croissante** sur  $]0; +\infty[$ .

*Démonstration.* La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  donc continue sur cet intervalle.

La dérivée de la fonction  $\ln$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ . Or si  $x > 0$ , alors  $\frac{1}{x} > 0$ .

La dérivée de la fonction  $\ln$  est strictement positive, donc la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .  $\square$

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes.

**Proposition 35.9**

Pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs,

- $\ln a = \ln b$  si et seulement si  $a = b$
- $\ln a > \ln b$  si et seulement si  $a > b$

**Exemple 35.10** – Résoudre dans l'intervalle  $I$  les équations suivantes.

1.  $\ln(x+2) = 2\ln(x)$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .

On a  $\ln(x+2) = 2\ln(x) \iff \ln(x+2) = \ln(x^2) \iff x+2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0$ . On calcule alors le discriminant  $\Delta = 1 + 8 = 9$ . Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

On ne garde que la solution qui est dans l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$ . Il n'y a donc qu'une solution, qui est  $x = 2$ .

2.  $\ln(2x-3) + \ln(3) = 2\ln(x)$  sur  $I = ]\frac{3}{2}; +\infty[$ .

On a  $\ln(2x-3) + \ln(3) = 2\ln(x) \iff \ln((2x-3) \times 3) = \ln(x^2) \iff \ln(6x-9) = \ln(x^2) \iff 6x-9 = x^2 \iff x^2 - 6x + 9 = 0$ . On calcule alors le discriminant  $\Delta = 36 - 36 = 0$ . Il y a donc une seule racine

$$x_0 = -\frac{(-6)}{2 \times 1} = 3.$$

De plus, 3 est bien dans l'intervalle  $] \frac{3}{2}; +\infty[$  donc l'unique solution de l'équation est  $x = 3$ .

3.  $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12)$  sur  $I = ]\frac{4}{3}; +\infty[$ .

On a  $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12) \iff \ln(x(x+2)) = \ln(9x-12) \iff \ln(x^2+2x) = \ln(9x-12) \iff x^2+2x = 9x-12 \iff x^2-7x+12 = 0$ . On calcule le discriminant  $\Delta = 49 - 48 = 1$ . Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Ces deux racines sont dans l'intervalle  $] \frac{4}{3}; +\infty[$  donc l'équation considérée admet deux solutions  $x = 3$  et  $x = 4$ .

4.  $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2)$  sur  $I = ]\frac{1}{3}; +\infty[$ .

On a  $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2) \iff \ln(3x-1) = \ln(2) + \ln(x) \iff \ln(3x-1) = \ln(2x) \iff 3x-1 = 2x \iff x-1 = 0 \iff x = 1$ . Or, 1 est bien dans l'intervalle  $] \frac{1}{3}; +\infty[$  donc l'équation considérée admet  $x = 1$  comme unique solution.

**Exemple 35.11** – Résoudre dans l'intervalle  $I$  les inéquations suivantes.

1.  $\ln(2x) < \ln(x+7)$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .

On a  $\ln(2x) < \ln(x+7) \iff 2x < x+7 \iff x < 7$ . Il faut donc que  $x < 7$  et que  $x$  soit dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  donc

$$\mathcal{S} = ]0; 7[.$$

2.  $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geq \ln(2)$  sur  $I = ]-\frac{1}{3}; +\infty[$ .

On a  $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geq \ln(2) \iff \ln(3x+1) \geq \ln(2) + \ln(x+1) \iff \ln(3x+1) \geq \ln(2(x+1)) \iff \ln(3x+1) \geq \ln(2x+2) \iff 3x+1 \geq 2x+2 \iff x \geq 1$ . Il faut donc que  $x \geq 1$  et que  $x$  soit dans l'intervalle  $] -\frac{1}{3}; +\infty[$  donc

$$\mathcal{S} = [1; +\infty[.$$

En particulier, puisque  $\ln 1 = 0$ ,

**Proposition 35.12**

Pour tout réel  $x$  strictement positif,

- $\ln x = 0$  si et seulement si  $x = 1$
- $\ln x > 0$  si et seulement si  $x > 1$
- $\ln x < 0$  si et seulement si  $0 < x < 1$

### 3 – Limites

**Proposition 35.13**

La fonction  $\ln$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

**Proposition 35.14**

La fonction  $\ln$  a pour limite  $-\infty$  en  $0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe d'équation  $y = \ln x$ .

**Exemple 35.15** – Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{2x-1}{x-3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln \left( \frac{2x-1}{x-3} \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln \left( \frac{2x-1}{x-3} \right).$$

- On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2,$$

et  $\lim_{X \rightarrow 2} \ln(X) = \ln(2)$ . Donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{2x-1}{x-3} \right) = \ln(2).$$

- On a

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x-1 = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} x-3 = 0^+,$$

donc par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = +\infty.$$

Et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ , donc par composition

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln \left( \frac{2x-1}{x-3} \right) = +\infty.$$

- On a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 2x - 1 = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} x - 3 = -\frac{5}{2},$$

donc par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x-1}{x-3} = 0^+.$$

Et  $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$ , donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = -\infty.$$

#### 4 – Nombre $e$

D'après les résultats des paragraphes précédents, on a le tableau de variation suivant.

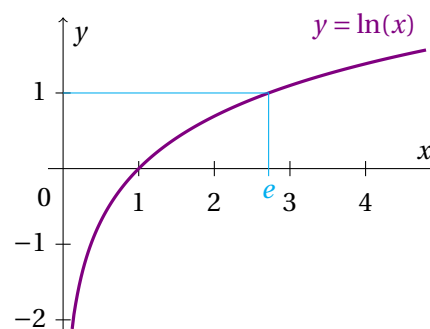
$x$	0	1	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	0	$+\infty$

On en déduit donc l'allure de la courbe de la fonction logarithme.

Nous observons graphiquement qu'il existe un point unique de la courbe ayant pour ordonnée 1. Son abscisse est voisine de 2,7.

Au delà de cette observation graphique, l'existence d'un unique antécédent de 1 repose sur la variation de la fonction  $\ln$  qui est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et qui prend chaque valeur réelle une fois et une seule quand  $x$  varie dans  $]0; +\infty[$ .

Il existe donc un seul réel  $x$  tel que  $\ln(x) = 1$ .



**Définition 35.16** –  $e$  est le nombre réel défini par l'équation  $\ln(e) = 1$ .

**Remarque 35.17** – On a  $e \simeq 2,718$ .

#### 5 – Croissance comparée

Étudions désormais quelques limites remarquables, qui font intervenir la fonction logarithme. On étudie ce que l'on appelle des résultats de *croissance comparée*.

##### Proposition 35.18

Pour tout entier naturel non-nul  $n$ , on a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$$

En particulier, lorsque  $n = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

**Remarque 35.19** – Ces limites sont des **formes indéterminées**. Pour lever de telles formes indéterminées, on applique les résultats de croissance comparée. On retient que les puissances « l'emportent » sur la fonction logarithme.

**Exemple 35.20** –

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x) = +\infty$$

### III – Étude d'une fonction de la forme $\ln(u)$

**Proposition 35.21**

Soit  $u$  une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle  $I$ . La fonction composée  $f = \ln \circ u$ , définie par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \ln(u(x))$$

est dérivable sur  $I$  et on a

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

**Exemple 35.22** – Soit la fonction  $f$  définie sur  $]2; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ . Calculer  $f'(x)$ .  
Posons  $u(x) = x^2 - 3x + 2$ . On a  $u'(x) = 2x - 3$ . Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}.$$

**Exemple 35.23 – Étude de fonction**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ .

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .

Résolvons l'inéquation  $x^2 - 5x + 6 > 0$ . On a  $\Delta = 25 - 24 = 1$ . Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

$x$	$-\infty$	$2$	$3$	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Et donc

$$D_f = ]-\infty; 2[ \cup ]3; +\infty[.$$

2. Étudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty,$$

donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 5x + 6) = +\infty.$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 5x + 6 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty,$$

donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(x^2 - 5x + 6) = -\infty.$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 5x + 6 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty,$$

donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 5x + 6) = -\infty.$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty,$$

donc par composition,

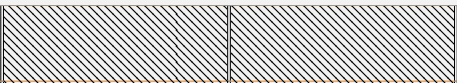
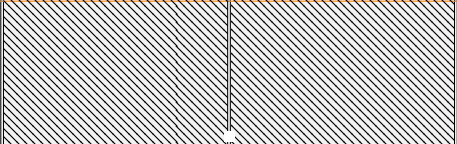
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 5x + 6) = +\infty.$$

### 3. Étudier les variations de la fonction $f$ .

Posons  $u(x) = x^2 - 5x + 6$ . Alors  $u'(x) = 2x - 5$ . Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}.$$

Étudions maintenant le signe de  $2x - 5$ . On a  $2x - 5 \geq 0 \iff 2x = 5 \iff x = \frac{5}{2}$ . Grâce au tableau de signe de  $x^2 - 5x + 6$  établi à la question 1, on en déduit le tableau de signe de  $f'(x)$  et ainsi le tableau de variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$2$	$\frac{5}{2}$	$3$	$+\infty$	
$2x-5$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	
$x^2-5x+6$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f'(x)$	$-$				$+$	
$f$	$-\infty$				$+\infty$	

4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction  $f$ .

