EXERCICES — CHAPITRE 3

Exercice 1 – Déterminer la nature des séries suivantes et préciser leur somme en cas de convergence.

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$
2. $\sum_{n\geq 1} 2^n$
3. $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
4. $\sum_{n\geq 0} n$
5. $\sum_{n\geq 0} 0,01$
6. $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{3}{2}\right)^n$
7. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$
8. $\sum_{n\geq 0} \frac{5}{3^n}$
9. $\sum_{n\geq 0} \frac{5}{3^n} + \frac{3}{4^n}$
10. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{5^n}$
11. $\sum_{n\geq 0} \frac{-1}{3^n}$
12. $\sum_{n\geq 0} \frac{5}{4^{n+2}}$
13. $\sum_{n\geq 2} \frac{3}{4^n}$
14. $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$
15. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{7^{n+1}}$
16. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$
17. $\sum_{n\geq 0} \frac{-5^{n+1}}{n!}$
18. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!}$
19. $\sum_{n\geq 0} \frac{2}{3^n n!}$
20. $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)!}$

Exercice 2 –

1. Le but de cette question est de montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge et de déterminer sa somme.
   (a) Calculer $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ et $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
   (c) Conclure.
2. À l'aide d'un raisonnement similaire à celui effectué dans la question **1**, démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa somme.
   Indication : commencer par vérifier qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
   $$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}.$$
3. À l'aide d'un raisonnement similaire à celui effectué dans la question **1**, démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa somme.
   Indication : commencer par vérifier qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
   $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

Exercice 3 – En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes.

1. $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$
3. $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 4 – Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geq 2$ par
$$u_n = \frac{n}{n^2-1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge. (*Rappel : la série harmonique* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge*).

Exercice 5 – Pour tout $n \geq 3$, on pose $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k \ln(k)}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$,
   $$0 \leq \frac{5}{4^n \ln(n)} \leq \frac{5}{4^n}.$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 3$,
   $$0 \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k \ln(k)} \leq \frac{5}{48}\left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right).$$
3. En déduire que la suite (S_n) est majorée.
4. Étudier la monotonie de la suite (S_n).
5. En déduire que la série $\sum_{n\geq 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ converge et que
   $$0 \leq \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{5}{4^k \ln(k)} \leq \frac{5}{48}.$$

Exercice 6 – Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Vérifier que pour tout $k \geq 2$, on a l'encadrement
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a l'encadrement
$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$
3. En déduire que la suite (S_n) est majorée.
4. Étudier la monotonie de la suite (S_n).
5. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que
$$\frac{3}{2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Exercice 7 – On considère la série numérique
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}},$$
et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note S_n sa n-ième somme partielle.

1. Montrer que
$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right).$$
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq S_n \leq 2\sqrt{n}.$$
3. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?

Exercice 8 – Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{4k^3}{3k^4 - 1}$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{4k^3}{3k^4-1} \geq \frac{4}{3k}$.
2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{4n^3}{3n^4-1}$ est divergente.

Exercice 9 – Le but de cet exercice est de prouver que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

1. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Soit k un élément de $\mathbf{N}^*$. Justifier que l'on a
   $$\forall t \in [k; k+1], \quad \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$
   (b) En déduire, par intégration, que, pour tout k de $\mathbf{N}^*$, on a
   $$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$
   (c) En déduire, par sommation, que
   $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \ln(n+1) \leq S_n.$$
   (d) Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ne converge pas absolument.
2. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0;1]$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}$.
   (b) En déduire que l'on a, pour tout n de $\mathbf{N}^*$,
   $$T_n = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
   (c) Montrer à l'aide du théorème des gendarmes que l'on a
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$
   (d) En déduire que
   $$\lim_{n\to+\infty} \left((-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) = 0.$$
   (e) Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n_1}}{n}$ converge et que sa somme est donnée par
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$