DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 – On considère les matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\2&0&1\end{pmatrix},\qquad L=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ et QP.
2. Vérifier que $QAP = L$.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $QA^nP = L^n$.
   (b) Soit $J = L - I$. Calculer J^2 puis J^3.
   (c) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a
   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$
   (d) En déduire, pour $n \geqslant 2$, les neufs coefficients de L^n.
   Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque $n = 0$ et $n = 1$.
   (e) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$A^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\2n(n-1)&1&2n\\2n&0&1\end{pmatrix}.$$
4. On considère les trois suites $(u_n)_{n\geqslant1}$, $(v_n)_{n\geqslant1}$ et $(w_n)_{n\geqslant1}$ définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ et $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
   $$u_{n+1} = u_n,\qquad v_{n+1} = v_n + 2w_n\quad\text{et}\quad w_{n+1} = 2u_n + w_n.$$
   (a) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$? Donner u_n pour tout entier $n \geqslant 1$.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix}1\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
   (c) Établir pour tout entier $n \geqslant 1$ que $X_n = A^{n-1}X_1$.
   (d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
   $$v_n = 2n(n-1)\quad\text{et}\quad w_n = 2n.$$

Exercice 2 – On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2}\quad\text{et}\quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. **Étude du signe de $g(x)$.**
   (a) Calculer $g'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   (b) Vérifier que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution p à préciser et construire le tableau de variation de g.
   (c) Calculer $g(p)$ puis donner le signe de $g(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. **Étude asymptotique de f.**
   (a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$.
   (b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique de $\mathcal{C}_f$ quand $x \to +\infty$ et préciser la position de cette asymptote par rapport à $\mathcal{C}_f$.
3. **Représentation graphique de f.**
   (a) Démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$
   (b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en indiquant dans celui-ci les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
   (c) Tracer sur un même dessin le graphe de $\mathcal{C}_f$ ainsi que celui de son asymptote $\mathcal{D}$.

Exercice 3 –

- *On note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X et $\mathrm{Cov}(X,Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.*
- *On donnera tous les résultats sous forme fractionnaire.*

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 3 boules rouges et 2 boules vertes tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient 1 boule rouge et 4 boules vertes. On choisit une des deux urnes au hasard (c'est-à-dire que chacune des deux urnes a la même probabilité d'être choisie) puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

- Si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
- Si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge,} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte.} \end{cases} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge,} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte.} \end{cases}$$

On note $Z = X_1 + X_2$.

1. (a) Montrer que $P(X_1 = 1) = \dfrac{2}{5}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?
   (b) Donner les valeurs de $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. (a) Montrer que $P\big([X_2 = 0] \cap [Z = 0]\big) = \dfrac{12}{25}$.
   (b) Donner sous forme de tableau, la loi du couple (X_2, Z).
3. (a) Déterminer la loi de X_2 ainsi que $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
   (b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer la loi de Z.
   (d) Calculer $E(Z)$. Montrer que $V(Z) = \dfrac{414}{625}$.
4. On considère l'évènement "la première boule tirée est verte". Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
5. On se propose dans cette question de calculer $V(Z)$ par une autre méthode.
   (a) Calculer $E(X_2 Z)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Cov}(X_2, Z) = \dfrac{204}{625}$.
   (c) En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
   (d) Utiliser le résultat précédent pour calculer $V(Z)$.