DEVOIR SURVEILLÉ 1

Les documents, la calculatrice et tout matériel éléctronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez.
Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.
Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise.

Ce sujet comporte 1 page et est constitué de 5 problèmes. Bon courage!

Exercice 1 – Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

Solution :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{8}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

2. $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right)$

Solution :

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{7}{12} \\ &= \frac{8}{12} - \frac{7}{12} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

3. $C = \dfrac{1 + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}$

Solution :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1+\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}-2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{5}-2\times\frac{7}{12}} \\ &= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{12}{60}-\frac{70}{60}} \\ &= \frac{11}{6}\times\frac{-60}{58} \\ &= -\frac{110}{58} \\ &= -\frac{55}{29} \end{aligned}$$

4. $D=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\div\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$

Solution :

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\div\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{1}{20}\div\frac{9}{4} \\ &= \frac{1}{120}\times\frac{4}{9} \\ &= \frac{1}{270} \end{aligned}$$

Exercice 2 – Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $2x-3=4$

Solution : On a $2x-3=4 \iff 2x=7 \iff x=\frac{7}{2}$ donc $\mathscr{S}=\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

2. $x-\frac{1}{2}=2x-1$

Solution : On a $x-\frac{1}{2}=2x-1 \iff -x=-\frac{1}{2} \iff x=\frac{1}{2}$ donc $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3. $2x-4<3x+5$

Solution : On a $2x-4<3x+5 \iff -x<9 \iff x>-9$ donc $\mathscr{S}=]-9;+\infty[$.

4. $x^2-12x+27=0$

Solution : Commençons par calculer le discriminant $\Delta=144-108=36$.

Il y a donc deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{12-6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12+6}{2} = 9.$$

Donc $\mathscr{S} = \{3;9\}$.

5. $-x^2+3x+10<0$

Solution : Commençons par calculer le discriminant $\Delta = 9+40 = 49$.
Il y a donc deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{-3-7}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+7}{-2} = -2.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$-x^2+3x+10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\mathscr{S} =]-\infty;-2[\cup]5;+\infty[$.

6. $x(x-2) = -1$

Solution : On a $x(x-2)=-1 \iff x^2-2x+1=0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4-4=0$.
Il y a donc une seule racine

$$x_0 = \frac{2}{2} = 1.$$

Ainsi, $\mathscr{S} = \{1\}$.

7. $\dfrac{2}{x+3} = \dfrac{1}{x+1}$

Solution : On a

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+3} = \frac{1}{x+1} &\iff \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1} = 0 \\ &\iff \frac{2(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+3)} = 0 \\ &\iff \frac{2x+2-x-3}{(x+1)(x+3)} = 0 \\ &\iff \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} = 0 \end{aligned}$$

On a $(x+1)(x+3)=0 \iff x+1=0$ ou $x+3=0 \iff x=-1$ ou $x=-3$ donc les valeurs interdites sont $x=-1$ et $x=-3$.
Par ailleurs, $x-1=0 \iff x=1$. Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites donc $\mathscr{S} = \{1\}$.

8. $\dfrac{x^2-5x+6}{x-3} = 0$

Solution : On a $x-3=0 \iff x=3$ donc il y a une valeur interdite qui est $x=3$. Par ailleurs, le discriminant de x^2-5x+6 vaut $\Delta=25-24=1$. Il y a donc deux racines qui sont

$$x_1=\frac{5-1}{2}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+1}{2}=3.$$

Au final, on a donc $\mathscr{S}=\{2\}$.

9. $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{2}{2x-3}$

Solution : On a

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1} \leq \frac{2}{2x-3} &\iff \frac{x}{x+1}-\frac{2}{2x-3} \leq 0\\ &\iff \frac{x(2x-3)-2(x+1)}{(x+1)(2x-3)} \leq 0\\ &\iff \frac{2x^2-3x-2x-2}{(x+1)(2x-3)} \leq 0\\ &\iff \frac{2x^2-5x-2}{(x+1)(2x-3)} \leq 0\end{aligned}$$

Calculons le discriminant de $2x^2-2x-5$: $\Delta=25+16=41$.
Il y a donc deux racines qui sont

$$x_1=\frac{5-\sqrt{41}}{4} \simeq -0,3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+\sqrt{41}}{4} \simeq 2,8.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-1		x_1		$\frac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
$2x^2-2x-5$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x^2-5x-2}{(x+1)(2x-3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{S}=\left]-1;x_1\right] \cup \left]\frac{3}{2};x_2\right]$.

10. $x^3-9x^2+11x+21=0$

Solution : On a $(-1)^3-9\times(-1)^2+11\times(-1)+21=-1-9-11+21=0$. On effectue donc la division euclidienne de $x^3-9x^2+11x+21$ par $x+1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & - & 9x^2 & + & 11x & + & 21 & x+1 \\
\cline{8-8}
x^3 & + & x^2 & & & & & x^2-10x+1 \\
\cline{1-7}
 & - & 10x^2 & + & 11x & + & 21 & \\
 & - & 10x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 21x & + & 21 & \\
 & & & & 21x & + & 21 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Conclusion : $P(x) = (x+1)(x^2 - 10x + 21)$.
On calcule le discriminant de $x^2 - 10x + 21$: $\Delta = 100 - 84 = 16$.
Il y a donc deux racines, qui sont

$$x_1 = \frac{10-4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+4}{2} = 7.$$

Au final, on a donc $\mathscr{S} = \{-1; 3; 7\}$.

Exercice 3 – Soit m un nombre réel. On considère l'équation $x^2 + 4x + 2(m-1) = 0$.

1. Cette équation admet-elle une solution lorsque $m = 4$?

Solution : Lorsque $m = 3$, $x^2 + 4x + 2(m-1) = x^2 + 4x + 2 \times 3$.
L'équation que l'on cherche à résoudre est donc la suivante : $x^2 + 4x + 6 = 0$.
On commence par calculer le discriminant. $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 6 = 16 - 24 = -8 < 0$.
Comme le discriminant est négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle lorsque $m = 4$.

2. Déterminer m pour que cette équation admette une unique solution. Déterminer cette solution.

Solution : On sait que cette équation admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul. Or $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 2(m-1) = 16 - 8(m-1)$.
Donc $\Delta = 0 \iff 8(m-1) = 16 \iff m - 1 = 2 \iff m = 3$.
Lorsque $m = 3$, l'équation devant $x^2 + 4x + 4$. Son discriminant est nul et l'unique solution est donnée par

$$x_0 = \frac{-4}{2 \times 1} = -2.$$

3. Préciser les cas, en fonction de m, où cette équation admet deux solutions distinctes, et où cette équation n'admet aucune solution.

Solution : L'équation admet 2 solutions distinctes si et seulement si $x\Delta > 0 \iff 16 - 8(m-1) > 0 \iff m - 1 < 2 \iff m < 3$.
De la même façon, l'équation n'admet aucune solution réelle lorsque $x\Delta < 0 \iff m > 3$.

Exercice 4 –

1. Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$.
   (a) Montrer que le polynôme P peut se factoriser sous la forme $P(x) = (x+1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.

Solution : On a $P(-1) = -3-7+7+3 = 0$. Donc il existe Q tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$. On détermine ce polynôme Q en effectuant la division euclidienne de P par $x+1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
3x^3 & - & 7x^2 & - & 7x & + & 3 & x+1 \\
\cline{8-8}
3x^3 & + & 3x^2 & & & & & 3x^2-10x+3 \\
\cline{1-7}
 & - & 10x^2 & - & 7x & + & 3 & \\
 & - & 10x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{2-7}
 & & & & 3x & + & 3 & \\
 & & & & 3x & + & 3 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Donc $P(x) = (x+1)(3x^2 - 10x + 3)$.

(b) Déterminer alors les solutions de l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

Solution : Calculons le discriminant de $3x^2 - 10x + 3$. On a $\Delta = 100 - 36 = 64$. Il y a donc deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3.$$

Donc $\mathscr{S} = \left\{-1; \frac{1}{3}; 1\right\}$.

2. On considère la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 12x + 12}$.

(a) Déterminer les valeurs interdites de $f(x)$.

Solution : Déterminons les valeurs interdites. Ce sont les solutions de l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 144 - 144 = 0$. Il y a donc une racine qui est

$$x_0 = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc 2 est valeur interdite de $f(x)$.

(b) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Solution : On a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x^2-10x+3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$3x^2-12x+12$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	

Et donc $\mathscr{S} = \left[-1; \frac{1}{3}\right] \cup [1;2[$.

Exercice 5 – Soit $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$. Montrer que $f(x) \geq 8$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} f(x) \geq 8 &\iff x + \frac{16}{x} - 8 \geq 0 \\ &\iff \frac{x \times x + 16 - 8x}{x} \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 8x + 16}{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Or je reconnais en $x^2 - 8x + 16$ une identité remarquable :

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x-4)^2.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$(x-4)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-8x+16}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

Donc pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a bien $\dfrac{x^2-8x+16}{x} \geq 0$ *i.e.*, $f(x) \geq 8$.