NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 28

Exercice 1 – Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - 7x + 12\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

Solution : La fonction f est définie lorsque $x^2 - 7x + 12 > 0$.
Je résous l'inéquation $x^2 - 7x + 12 > 0$.
Le discriminant vaut $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1 = 1^2 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc la fonction f est définie sur $\left]-\infty, 3\right[\cup \left]4, +\infty\right[$.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Solution : Je dois calculer les limites de f en $-\infty$, 3^-, 4^+ et $+\infty$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} x^2 - 7x + 12 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty \end{aligned}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to-\infty} \ln\left(x^2 - 7x + 12\right) = +\infty.$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to3^-} x^2 - 7x + 12 = 0^+ \\ \lim_{X\to0^+} \ln(X) = -\infty \end{aligned}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to2^-} \ln\left(x^2 - 7x + 12\right) = -\infty.$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to4^+} x^2 - 7x + 12 = 0^+ \\ \lim_{X\to0^+} \ln(X) = -\infty \end{aligned}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to3^+} \ln\left(x^2 - 7x + 12\right) = -\infty.$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x^2 - 7x + 12 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty \end{aligned}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2 - 7x + 12\right) = +\infty.$$

3. Étudier les variations de la fonction f.

Solution : Pour étudier les variations de la fonction f, il faut connaître la dérivée f' puis étudier son signe. La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 - 7x + 12$. Alors $u'(x) = 2x - 7$ et donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x-7}{x^2-7x+12}.$$

Je connais déjà le signe de $x^2 - 7x + 12$, positif sur tout l'ensemble de définition.
J'étudie maintenant le signe de $2x - 7$: $2x - 7 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant 7 \iff x \geqslant \frac{7}{2}$.
J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		3		$\frac{7}{2}$		4		$+\infty$
$2x-7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-7x+12$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$						$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$				$-\infty$	↗	$+\infty$

4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f.

Solution :