# 9 Réduction des matrices carrées

## I – Matrice diagonalisable

### 1 – Définition

**Définition 9.1 –** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que la matrice $A$ est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **inversible** et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **diagonale** telle que

$$A = PDP^{-1}.$$

**Remarque 9.2 –**

- On sait que $A = PDP^{-1} \iff P^{-1}AP = D$.
  Je suppose que $A = PDP^{-1}$. Alors $P^{-1}AP = P^{-1}PDP^{-1}P = I_nDI_n = D$.
  Réciproquement, si $D = P^{-1}AP$, alors $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = I_nAI_n = A$.
- *Diagonaliser* une matrice $A$ signifie trouver deux matrices $D$ et $P$, respectivement diagonale et inversible, telle que $A = PDP^{-1}$.

**Exemple 9.3 –** Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, en considérant les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Je commence par montrer que $P$ est inversible et je calcule $P^{-1}$.

Comme $1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0$, alors $P$ est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Alors

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je retrouve la matrice $A$, donc $A = PDP^{-1}$ avec $P$ inversible et $D$ diagonale, *i.e.* $A$ est diagonalisable.

**Remarque 9.4 –** En pratique, il n'est pas toujours nécessaire de calculer $P^{-1}$ pour montrer qu'une matrice $A$ est diagonalisable, comme le montre la proposition ci-dessous.

**Proposition 9.5**

Soient $A$ une matrice, $D$ une matrice diagonale et $P$ une matrice inversible.

Si $AP = PD$, alors la matrice $A$ est diagonalisable.

**Exemple 9.6 –** Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que $A$ est diagonalisable à l'aide des matrices $P$ et $D$.

Je calcule les produits $AP$ et $PD$ :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, la matrice $P$ est inversible car $1 \times (-1) - 1 \times 3 = -4 \neq 0$.
Par conséquent, d'après la proposition ci-dessus, la matrice $A$ est diagonalisable.

### 2 – Application au calcul de puissance

**Proposition 9.7**

Soit $A$ une matrice. On suppose qu'il existe une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ telles que $A = PDP^{-1}$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

*Démonstration.* Je raisonne par récurrence sur $n$.

**Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.

**Initialisation :** Pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors, comme $A = PDP^{-1}$,

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^n\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

□

**Remarque 9.8 –** Si le calcul de $P^{-1}$ n'est pas nécessaire pour montrer qu'une matrice $A$ est diagonalisable, il est cependant **indispensable** pour obtenir une expression explicite des puissances de $A$, ce qui est souvent ce que l'on cherche à obtenir.

## II – Valeurs propres et vecteurs propres

### 1 – Définition

**Définition 9.9 –** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et $\lambda$ un réel.

- On dit que $\lambda$ est une **valeur propre** de la matrice $A$ si et seulement si

$$\text{il existe } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \textbf{ NON NUL} \text{ tel que } AX = \lambda X.$$

- La matrice colonne $X$ est alors appelée **vecteur propre** associé à la valeur propre $\lambda$.

**Exemple 9.10 –** On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $V_1$, $V_2$ et $V_3$ sont des vecteurs propres de la matrice $M$ et préciser les valeurs propres associées.

La matrice colonne $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est non nulle et

$$MV_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1,$$

ce qui prouve que $V_1$ est vecteur propre de $M$ pour la valeur propre 1.

La matrice colonne $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nulle et

$$MV_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6V_2,$$

ce qui prouve que $V_2$ est vecteur propre de $M$ pour la valeur propre 6.

La matrice colonne $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est non nulle et

$$MV_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2V_3,$$

ce qui prouve que $V_3$ est vecteur propre de $M$ pour la valeur propre $-2$.

**Proposition 9.11**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et $\lambda$ un réel. Il n'y a que deux possibilités pour l'ensemble des solutions de l'équation $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ :

- Ou bien cet ensemble contient uniquement la matrice colonne nulle, auquel cas $\lambda$ **n'est pas** valeur propre de $A$.
- Ou bien cet ensemble contient aussi d'autres matrices non nulles, auquel cas $\lambda$ est valeur de propre de $A$ et n'importe quelle matrice **non nulle** de cet ensemble est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$.

**Exemple 9.12 –** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. Les réels 2 et 3 sont-ils valeurs propres de $A$ ? Si oui, déterminer un vecteur propre de $A$ associé à cette valeur propre.

Je raisonne en cherchant les solutions $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'équation matricielle $AX = 3X$.

$$\begin{aligned}
AX = 3X \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & -6y & + & 6z & = & 3x \\ -x & - & 5y & + & 6z & = & 3y \\ -x & - & 8y & + & 9z & = & 3z \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & - & 6y & + & 6z & = & 0 \\ -x & - & 8y & + & 6z & = & 0 \\ -x & - & 8y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & - & 8y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1
\end{aligned}$$

J'obtiens ainsi un système à un degré de liberté (3 inconnues pour seulement 2 équations).
Je choisis alors de fixer une variable, $x = 1$ par exemple, et le système devient

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & - & 8y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} -2y & + & 2z & = & 1 \\ -8y & + & 6z & = & 1 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad &\left\{\begin{array}{rcrcl} -2y & + & 2z & = & 1 \\ -2y & & & = & -2 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} -2 & + & 2z & = & 1 \\ y & & & = & 1 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad &\left\{\begin{array}{rcl} 2z & = & 3 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & \frac{3}{2} \\ y & = & 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi $x = 1$, $y = 1$ et $z = \frac{3}{2}$ forme une solution du système linéaire étudié. Cette solution est non nulle.

Donc $\lambda = 3$ est une valeur propre de $A$ et un vecteur propre associé est le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Je raisonne de la même manière pour $AX = 2X$.

$$\begin{aligned}
AX = 2X \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & -6y & + & 6z & = & 2x \\ -x & - & 5y & + & 6z & = & 2y \\ -x & - & 8y & + & 9z & = & 2z \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & 6y & + & 6z & = & 0 \\ -x & - & 7y & + & 6z & = & 0 \\ -x & - & 8y & + & 7z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & & & = & 0 \\ -x & - & 7y & + & 6z & = & 0 \\ & & -y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x \\ -2y & = & 0 \\ z & = & y \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad x = y = z = 0
\end{aligned}$$

Autrement dit, l'unique solution de l'équation $AX = 2X$ est la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc 2 n'est pas valeur propre de $A$.

**Corollaire 9.13**

Un réel $\lambda$ est une valeur propre d'une matrice $A$ si et seulement si l'équation matricielle $AX = \lambda X$ admet une solution $X$ non nulle.

## 2 – Polynôme annulateur de $A$

**Définition 9.14 –** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polynôme. On définit le **polynôme matriciel** $P(A)$ comme étant la matrice carrée

$$P(A) = a_d A^d + a_{d-1}A^{d-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

On dit que le polynôme $P(x)$ est un **polynôme annulateur** de la matrice $A$ lorsque $P(A) = 0_n$.

**Exemple 9.15 –** Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Si $P(x) = x^2 + 2x$, alors $P(A) = A^2 + 2A$.
2. Si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, alors $P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A + I_3$.
3. Si $P(x) = -3$, alors $P(A) = -3I_3$.

**Exemple 9.16 –** On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que le polynôme $x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de $M$.

Je calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Puis je calcule la somme :

$$M^3 + M^2 + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui prouve bien que $x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de $M$.

**Proposition 9.17**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice.

Le polynôme $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de $A$.

*Démonstration.*
Je calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$ puis j'en déduis le polynôme matriciel :

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_3 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(a+d)a & -(a+d)b \\ -(a+d)c & -(a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ab - db \\ ca + dc - ac - dc & cb + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2. \end{aligned}$$

Donc le polynôme $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ est bien un polynôme annulateur de $A$. □

**Exemple 9.18 –** On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Donner un polynôme annulateur de $A$.
J'applique simplement la formule de la proposition ci-dessus.
Le polynôme $x^2 - (1+4)x + (1 \times 4 - 2 \times 3) = x^2 - 5x - 2$ est un polynôme annulateur de $A$.

**Théorème 9.19**
Soient $A$ une matrice carrée et $P(x)$ un polynôme annulateur de $A$.

Toute valeur propre $\lambda$ de $A$ est racine du polynôme $P(x)$.

**ATTENTION !** Ce résultat nous indique **seulement** que les valeurs propres de $A$ sont **nécessairement** des racines du polynôme $P(x)$. Mais il peut aussi y avoir des racines du polynôme $P(x)$ qui **ne sont pas** des valeurs propres de $A$.

**Exemple 9.20 –** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 - x$ est un polynôme annulateur de $A$.
   Je calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis le polynôme matriciel :
   $$A^3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$
   Donc $P(x) = x^3 - x$ est bien un polynôme annulateur de $A$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de $A$.
   Il me faut trouver les racines de $P(x)$. Je factorise
   $$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1).$$
   Ainsi les racines de $P(x)$ sont 0, 1 et $-1$ et les valeurs propres **possibles** de $A$ sont donc 0, 1 et $-1$.
3. Déterminer lesquelles sont bien des valeurs propres de $A$.
   Je cherche à résoudre les trois équations matricielles $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = -X$ en $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   $$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & & & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$
   $$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & z & = & x \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$
   $$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x \\ y & = & x \end{array} \right.$$
   Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = 0$.
   Et comme cette matrice colonne est non nulle, alors 0 est bien valeur propre de $A$.

$$AX = X \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 2z = x \\ x + y - 2z = y \\ -x + z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x + 2z = 0 \\ x - 2z = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = X$.

Et comme cette matrice colonne est non nulle, alors 1 est bien valeur propre de $A$.

$$AX = -X \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 2z = -x \\ x + y - 2z = -y \\ -x + z = -z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = X$.

Et comme cette matrice colonne est non nulle, alors $-1$ est bien valeur propre de $A$.

**Remarque 9.21 –** Comme déjà vu dans le **Chapitre 5**, disposer d'un polynôme annulateur permet également, dans certains cas, d'obtenir l'inversibilité et l'inverse d'une matrice.
Par exemple, en se servant du fait que le polynôme $x^3 + x^2 + 1$ soit un polynôme annulateur de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Je sais que

$$M^3 + M^2 + I_3 = 0_3 \iff M^3 + M^2 = -I_3 \iff -M^3 - M^2 = I_3 \iff M(-M^2 - M) = I_3.$$

Donc $M$ est inversible et $M^{-1} = -M^2 - M$.

# III – Diagonalisation pratique

**Théorème 9.22**

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A$ possède $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ avec $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des vecteurs propres associés.
Alors la matrice $P$ obtenue en juxtaposant les matrices colonnes $V_1, V_2, \ldots, V_n$ est inversible.
Et en notant $D$ la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{alors } A = PDP^{-1}.$$

**Remarque 9.23 –**

- Dans le cas $n = 2$, le théorème précédent se réécrit :

  Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ayant deux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$, avec $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_1$ et $V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_2$, alors la matrice $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible et en notant $D$ la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

  $$A = PDP^{-1}.$$

- Dans le cas $n = 3$, le théorème précédent se réécrit :

  Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ayant trois valeurs propres $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$, avec $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_1$, $V_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_2$ et $V_3 = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_3$, alors la matrice $P = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ est inversible et en notant $D$ la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,

  $$A = PDP^{-1}.$$

**Exemple 9.24 –** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P(x) = x^2 - 2x - 3$ est un polynôme annulateur de $A$.

   Je calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ puis le polynôme matriciel :

   $$A^2 - 2A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

   Donc $P(x) = x^2 - 2x - 3$ est bien un polynôme annulateur de $A$.

2. Calculer les racines $\alpha$ et $\beta$ de $P(x)$.

$P(x)$ est un polynôme de degré 2. Je calcule son discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0.$$

$P(x)$ a donc deux racines

$$\alpha = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

3. Montrer que $\alpha$ et $\beta$ sont des valeurs propres de $A$ et calculer les vecteurs propres associés.

Je montre tout d'abord que 3 est valeur propre, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} AX = 3X \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 3x \\ 2x & + & y & = & 3y \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & - & 2y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = 3X$.

Et comme cette matrice colonne est non nulle, alors 3 est bien valeur propre de $A$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Je montre maintenant que $-1$ est valeur propre.

$$\begin{aligned} AX = -X \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & -x \\ 2x & + & y & = & -y \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & + & 2y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad x = -y \end{aligned}$$

Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = -X$.

Et comme cette matrice colonne est non nulle, alors $-1$ est bien valeur propre de $A$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

4. Justifier que $A$ est diagonalisable et la diagonaliser.

La matrice $A$ admet deux valeurs propres distinctes donc la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, juxtaposition des deux vecteurs propres, est inversible.

Et en notant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors

$$A = PDP^{-1}.$$

Autrement dit, la matrice $A$ est diagonalisable.