BSB 2019

Exercice 1 –

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$,

   $$A^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

   Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

   $$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 0 & 2(3^n - 2^n) + 3^n \\ 0 & 3 \times 3^n & 3 \times n3^{n-1} + 3^n \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2 \times 3^n - 2^{n+1} + 3^n \\ 0 & 3^{n+1} & n3^n + 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1) \times 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. a) L'instruction manquante est `a=2*a+3∧(i-1)`. Pour calculer le terme a_i, il faut sommer le double du terme précédent $2a^{i-1}$ avec la puissance de 3 correspondant à cet indice, *i.e.* 3^{i-1}. D'où `a=2*a+3∧(i-1)`.

   b) Pour $n \in \mathbb{N}$, je calcule le produit AX_n :

   $$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3^n \\ 3b_n + 3^n \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

   c) Voici le programme complété.

```
n=input("n?")
A=[2 0 1;0 3 1;0 0 3]
X=[2;0;1]
for i=1:n
    X=A*X
end
disp(X(1))
```

d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

e) D'après les questions précédentes,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 3^n - 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré qu'en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$

3. a) Je calcule le produit $P \times Q$.

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je remarque que le produit $P \times Q$ est égal à la matrice identité I_3.

b) Je calcule le produit $P \times M$ avant de multiplier le résultat par Q :

$$PM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4+1 & 0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$PMQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 1 \\ 1-1 & 3 & 1 \\ 3-3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi j'ai bien montré que $PMQ = A$.

c) Avant de raisonner par récurrence, il me faut montrer que $M = QAP$. Il s'agit d'une conséquence directe de la question précédente :
Comme $PMQ = A$, alors $Q \times PMQ \times P = QAP$ *i.e.* $M = QAP$ puisque $QP = PQ = I_3$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n = QA^nP$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad QA^0P = QI_3P = QP = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = QA^nP \times QAP = QA^n \times AP = QA^{n+1}P.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QA^nP.$$

d) D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} M^n = QA^nP &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n - 3^n - 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & 2^n - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n - 2 \times 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & 2^n - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2^n + 2^n - 2 \times 3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^n + 2^n - 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. a) D'après la question **2.e)**, je sais que $b_k = k \times 3^{k-1}$ et que $b_{k+1} = (k+1) \times 3^k = k \times 3^k + 3^k$. Alors

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_k - 3^k &= k \times 3^k + 3^k - k \times 3^{k-1} - 3^k = k \times \left(3^k - 3^{k-1}\right) = k \times \left(3 \times 3^{k-1} - 3^{k-1}\right) \\ &= k \times 3^{k-1} \times (3-1) = b_k \times 2 = 2b_k. \end{aligned}$$

D'où $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

b) Je reconnais la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = 1 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1-3} = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right).$$

c) Je reconnais une somme télescopique. Ici, seuls les deux termes extrêmes vont rester. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=0}^{n} b_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n+1} b_k - \sum_{k=0}^{n} b_k = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1}.$$

En effet, tous les termes sont présents dans les deux sommes sauf b_{n+1} qui n'est que dans la première et b_0 que dans la seconde. Et comme $b_0 = 0$, j'obtiens bien le résultat souhaité.

d) En assemblant les résultats des questions précédentes, j'obtiens l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(b_{k+1} - b_k - 3^k\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) - \sum_{k=0}^{n} 3^k\right) \\ = \frac{1}{2}\left(b_{n+1} - \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)\right) &= \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{1 - 3^{n+1}}{4} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2 –

1. Pour calculer la limite en $-\infty$, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x = 1\end{array}\right\}\text{ Par quotient,}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

J'en déduis que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote horizontale, au voisinage de $-\infty$, d'équation $y = 0$.

2. a) Je pars de l'expression $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ et je multiplie numérateur et dénominateur par e^x pour obtenir l'expression de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1\times e^x}{(1+e^{-x})\times e^x} = \frac{e^x}{e^x+e^0} = \frac{e^x}{1+e^x} = f(x).$$

J'ai bien montré que $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

b) Grâce à cette nouvelle expression, je calcule la limite de f en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1+0 = 1\end{array}\right\}\text{ Par quotient,}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

J'en déduis alors que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f admet une seconde asymptote horizontale, au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = 1$.

3. a) La fonction f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1+e^x$.
Puisque $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x\times\left(1+e^x\right)-e^x\times e^x}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

J'ai bien montré que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

b) Les variations de la fonction f s'obtiennent en étudiant le signe de $f'(x)$. Ici, le signe est immédiat puisque le dénominateur est un carré et le numérateur est une exponentielle. Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad f'(x) > 0 \quad$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

c) L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a)\times(x-a)+f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation devient

$$y = f'(0)\times(x-0)+f(0).$$

Or

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{e^0}{\left(1+e^0\right)^2} = \frac{1}{\left(1+1\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

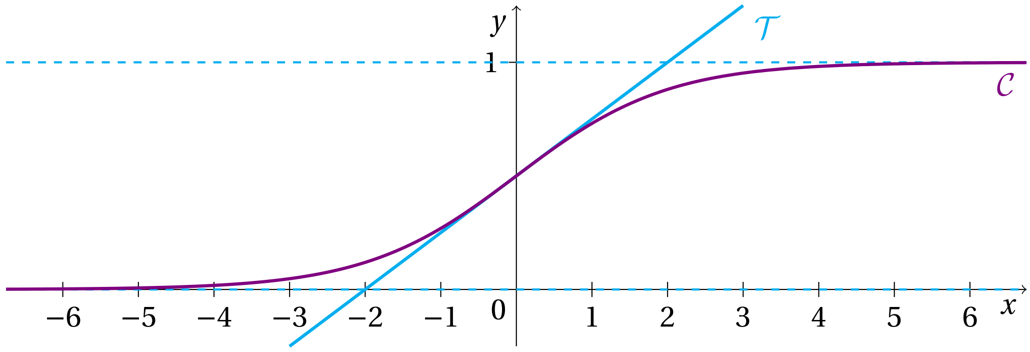
Donc l'équation devient

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

4. Je sais que la convexité de f s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde $f''(x)$. Comme $f''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $(1+e^x) > 0$, j'en déduis que le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $(1-e^x)$. Or $1 - e^x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant e^x \iff 0 \geqslant x$, donc j'en déduis que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ puis concave sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

   Le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ *est point d'inflexion : la tangente en ce point, calculée précédemment, traverse la courbe en ce point.*

5. La courbe admet deux asymptotes horizontales, je connais l'équation de la tangente à la courbe en 0. Je suis donc capable de tracer l'allure de la courbe.



Exercice 3 –

1. Si la pièce amène FACE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_2$ et donc la boule tirée est rouge avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi $P_F(R_1) = \frac{1}{2}$.
   Au contraire, si la pièce amène PILE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_1$ et la boule tirée est rouge avec une probabilité 1. Autrement dit $P_{\overline{F}}(R_1) = 1$.
   Alors d'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer une boule rouge est donnée par

$$P(R_1) = P(F \cap R_1) + P(\overline{F} \cap R_1) = P(F) \times P_F(R_1) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(R_1)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

2. a) Si la pièce amène FACE, alors les tirages s'effectuent dans l'urne $\mathcal{U}_2$. D'après la formule des probabilités composées,

$$P_F(R_1 \cap R_2) = P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(R_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

   De même,
$$P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2) = P_{\overline{F}}(R_1) \times P_{\overline{F} \cap R_1}(R_2) = 1 \times 1 = 1.$$

   Alors en appliquant la formule des probabilités totales, comme $\{F, \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer deux boules rouges de suite est donnée par
$$P(R_1 \cap R_2) = P(F) \times P_F(R_1 \cap R_2) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

   b) Je cherche ici $P_{R_1 \cap R_2}(\overline{F})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{R_1 \cap R_2}(\overline{F}) = \frac{P(\overline{F} \cap R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{7} = \frac{6}{7}.$$

   Si les deux boules tirées sont rouges, la probabilité que la pièce ait amené PILE est de $\frac{6}{7}$.

3. a) Si une boule blanche est tirée au premier tirage, alors je sais qu'il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y = 1$. Si au contraire une boule rouge est tirée, il peut s'agir de l'urne $\mathcal{U}_1$ ou de $\mathcal{U}_2$ et il faut donc faire au moins un autre tirage.
   Si ce deuxième tirage donne une boule blanche, alors encore une fois, je sais qu'il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y = 2$. Si au contraire une boule rouge est tirée, alors il peut encore s'agir de l'urne $\mathcal{U}_1$ ou de $\mathcal{U}_2$. Il faut donc refaire un troisième tirage pour déterminer dans quelle urne l'on se trouve.
   Au troisième tirage, si une boule blanche est tirée, alors il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$. Cependant, si une boule rouge est tirée alors ce ne peut être que l'urne $\mathcal{U}_1$ puisque seule l'urne $\mathcal{U}_1$ contient plus de 2 boules rouges.
   Ainsi j'ai bien montré que $Y(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

   b) Comme expliqué à la question précédente, l'événement $[Y = 1]$ ne se réalise que lorsqu'une boule blanche est tirée au premier tirage. Ceci n'est possible que si la boule a été tirée dans l'urne $\mathcal{U}_2$ et donc que la pièce a amené FACE.
   Ainsi j'ai bien montré que
$$\left[Y = 1\right] = F \cap B_1.$$

Alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(Y=1) = P(F \cap B_1) = P(F) \times P_F(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

c) Par un raisonnement similaire à la question précédente, je peux montrer que

$$\left[Y=2\right] = F \cap R_1 \cap B_2.$$

Alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(Y=2) = P(F \cap R_1 \cap B_2) = P(F) \times P_F(R_1) \times P_{F\cap R_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

d) Par complémentarité, j'obtiens que

$$P(Y=3) = 1 - P(Y=1) - P(Y=2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

e) Je connais désormais la loi de Y donc je peux facilement calculer son espérance :

$$E(Y) = 1\times P(Y=1)+2\times P(Y=2)+3\times P(Y=3) = 1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{7}{12} = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{7}{4} = 2+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exercice 4 –