

# INTERRO DE RENTRÉE

## Exercice 1 –

$$1. \quad 4x - 5 = -2x + 3 \iff 6x = 8 \iff x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{ \frac{4}{3} \right\}.$$

$$2. \quad x + 4 \leq -2x + 5 \iff 3x \leq 1 \iff x \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{1}{3} \right].$$

$$3. \quad 2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 3x - 18 \iff x^2 - 10x + 21 = 0$$

Je calcule le discriminant :  $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 21 = 100 - 84 = 16 > 0$ .

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{10 - 4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 4}{2} = 7.$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \{3, 7\}.$$

$$4. \quad \text{Je cherche à connaître le signe de } 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4.$$

Je cherche une racine évidente. Comme la somme des coefficients est nulle, alors 1 est racine évidente :  $f(1) = 2 - 3 + 5 - 4 = 0$ . Donc  $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$  est un multiple de  $x - 1$ .

Soit  $Q(x) = ax^2 + bx + c$  tel que

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = (x - 1) \times (ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.$$

Alors par identification des coefficients,

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = 5 \\ -c = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 + a = -3 + 2 = -1 \\ c = 5 + b = 5 - 1 = 4 \\ -c = -4 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = (x - 1)(2x^2 - x + 4).$$

Je calcule le discriminant du facteur de degré 2 :  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 1 - 32 = -31 < 0$ .

Il n'y a donc pas de racine et ce facteur est de signe constant, positif puisque  $a = 2 > 0$ .

Comme ce facteur est toujours positif, j'en déduis que

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 < 0 \iff x - 1 < 0 \iff x < 1.$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left] -\infty, 1 \right[.$$

$$5. \quad \frac{2x+3}{x-1} + \frac{1}{x} = 0 \iff \frac{(2x+3) \times x + (x-1) \times 1}{(x-1) \times x} = 0 \iff \frac{2x^2 + 4x - 1}{x(x-1)} = 0$$

Cette équation a deux valeurs interdites : 0 et 1.

Je calcule le discriminant du numérateur :  $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 16 + 8 = 24 > 0$ .

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{24}}{2 \times 2} = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{4} = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{4} = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Aucune de ces solutions n'est valeur interdite, donc } \mathcal{S} = \left\{ -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$

**Exercice 2 –**

1. Je calcule la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x = +\infty.$$

2. Je calcule la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0$$

$$\text{Donc par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0.$$

3. Je calcule la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

4. Je calcule la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \text{Forme indéterminée.}$$

$$\text{Or } \ln(x) - x = x \times \left( \frac{\ln(x)}{x} - 1 \right) \quad \text{et par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0. \quad \text{D'où}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x)}{x} - 1 \right) = -1 \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x = -\infty.$$

5. Je calcule la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} 4x - 1 = 7 \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) + 4x - 1 = +\infty.$$

**Exercice 3 –**

1.  $f$  est polynomiale donc  $f'(x) = 3x^2 + 4 \times 2x - 5 = 3x^2 + 8x - 5$ .

2.  $f$  est de la forme  $u \times v$  avec  $u(x) = 4x - 1$  et  $v(x) = \ln(x)$ . Comme  $u'(x) = 4$  et  $v'(x) = \frac{1}{x}$ , alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 4 \times \ln(x) + (4x - 1) \times \frac{1}{x} = 4\ln(x) + 4 - \frac{1}{x}.$$

3.  $f$  est de la forme  $e^u + 1$  avec  $u(x) = 2x + 3$ . Comme  $u'(x) = 2$ , alors

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} + 0 = 2 \times e^{2x+3} = 2e^{2x+3}.$$

4.  $f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = x^2$ . Comme  $u'(x) = e^x$  et  $v'(x) = 2x$ , alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{x^2 e^x - 2x e^x}{(x^2)^2} = \frac{x(x-2)e^x}{x^4} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}.$$

5.  $f$  est de la forme  $u^2$  avec  $u(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . Alors  $f'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x)$ .

Il me faut donc calculer  $u'(x)$ .  $u$  est de la forme  $\frac{w}{v}$  avec  $w(x) = x+1$  et  $v(x) = x-1$ .

Comme  $w'(x) = 1$  et  $v'(x) = 1$ , alors

$$u'(x) = \frac{w'(x)v(x) - w(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Ainsi

$$f'(x) = 2 \times \left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right) \times \frac{x+1}{x-1} = -\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}.$$

#### Exercice 4 –

1. Je calcule la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^5 = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty \end{array} \right\} \text{Par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+.$$

2.  $f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u(x) = \ln(x)$  et  $v(x) = x^5$ . Comme  $u'(x) = \frac{1}{x}$  et  $v'(x) = 5x^4$ , alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x^5 - \ln(x) \times 5x^4}{(x^5)^2} = \frac{x^4(1 - 5\ln(x))}{x^{10}} = \frac{1 - 5\ln(x)}{x^6}.$$

Il me reste à étudier le signe de  $f'(x)$  :

$$1 - 5\ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq 5\ln(x) \iff \frac{1}{5} \geq \ln(x) \iff e^{\frac{1}{5}} \geq x.$$

J'en déduis le tableau de variation suivant, avec  $f\left(e^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{5}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{5}}\right)^5} = \frac{\frac{1}{5}}{e} = \frac{1}{5e}$ .

$x$	0	$e^{\frac{1}{5}}$	$+\infty$	
$1-5\ln(x)$	+	0	-	
$x^6$	0	+	+	
$f'(x)$		+	0	-
$f$	$-\infty \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \frac{1}{5e} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} 0$			

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  est donnée par  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

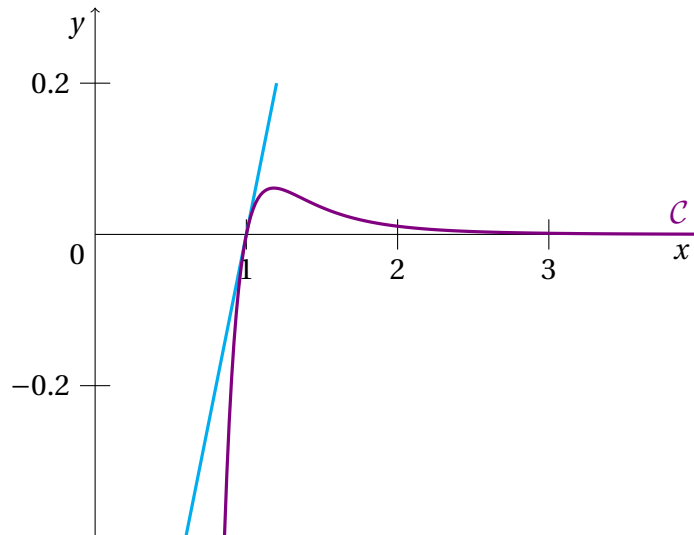
Ici  $a = 1$  et

$$f(1) = \frac{\ln(1)}{1^5} = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{1 - 5\ln(1)}{1^6} = 1.$$

Ainsi l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par

$$y = 1 \times (x - 1) + 0 = x - 1.$$

4. Voici le graphe de la courbe et de sa tangente :



### Exercice 5 –

1. Je calcule la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+.$$

2.  $f$  est de la forme  $u \times v$  avec  $u(x) = 2 - x$  et  $v(x) = e^x$ . Comme  $u'(x) = -1$  et  $v'(x) = e^x$ , alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -1 \times e^x + (2 - x) \times e^x = (1 - x)e^x.$$

Il me reste à étudier le signe de  $f'(x)$ . Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$ , alors

$$f'(x) \geq 0 \iff (1 - x)e^x \geq 0 \iff 1 - x \geq 0 \iff 1 \geq x.$$

J'en déduis le tableau de variation suivant, avec  $f(1) = (2 - 1) \times e^1 = e$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$1 - x$	+	0	-
$e^x$	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f$	0 $\nearrow$	$e$	$\searrow$ $-\infty$

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  est donnée par  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

Ici  $a = 1$  et

$$f(1) = e \quad \text{et} \quad f'(1) = (1 - 1) \times e^1 = 0.$$

Ainsi l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par

$$y = 0 \times (x - 1) + e = e.$$

4.  $f'$  est de la forme  $u \times v$  avec  $u(x) = 1 - x$  et  $v(x) = e^x$ . Comme  $u'(x) = -1$  et  $v'(x) = e^x$ , alors

$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -1 \times e^x + (1 - x) \times e^x = -xe^x.$$

La fonction  $f$  est convexe là où sa dérivée seconde est positive.

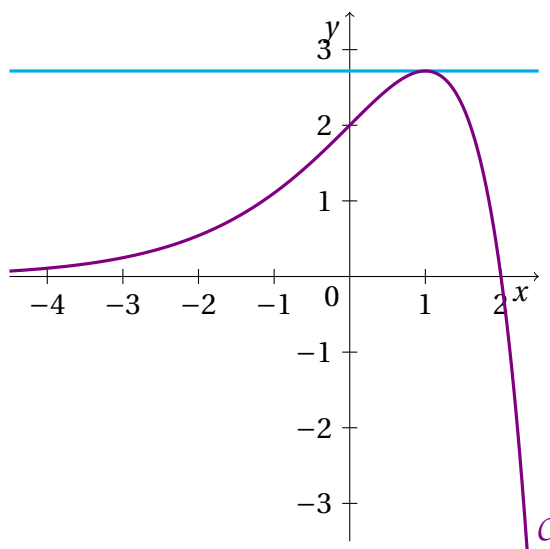
Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$ , alors

$$f''(x) \geq 0 \iff -xe^x \geq 0 \iff x \leq 0.$$

Donc  $f$  est convexe sur  $] -\infty, 0]$  et concave sur  $[0, +\infty[$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  admet un point d'inflexion en  $(0, f(0)) = (0, 2)$ .

5. Voici le graphe de la courbe et de sa tangente :



### Exercice 6 –

1. a)  $f$  est de la forme  $u \times v$  avec  $u(x) = x^2 - 2x + 2$  et  $v(x) = e^x$ .

Comme  $u'(x) = 2x - 2$  et  $v'(x) = e^x$ , alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x - 2) \times e^x + (x^2 - 2x + 2) \times e^x = x^2 e^x.$$

- b) Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$  et  $x^2 \geq 0$ , alors je déduis le tableau de variation suivant, avec  $f(0) = (0^2 - 2 \times 0 + 2) \times e^0 = 2$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$x^2$	+	0	+
$e^x$	+		+
$f'(x)$	+	0	+
$f$	0	2	$+\infty$

2. L'équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  est donnée par  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

Ici  $a = 1$  et

$$f(1) = (1^2 - 2 \times 1 + 2) \times e^1 = e \quad \text{et} \quad f'(1) = 1^2 \times e^1 = e.$$

Ainsi l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par

$$y = e \times (x - 1) + e = ex.$$

3. a)  $f'$  est de la forme  $u \times v$  avec  $u(x) = x^2$  et  $v(x) = e^x$ . Comme  $u'(x) = 2x$  et  $v'(x) = e^x$ , alors

$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x = (x^2 + 2x)e^x = x(x+2)e^x.$$

- b) La fonction  $f$  est convexe là où sa dérivée seconde est positive.

Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$ , alors

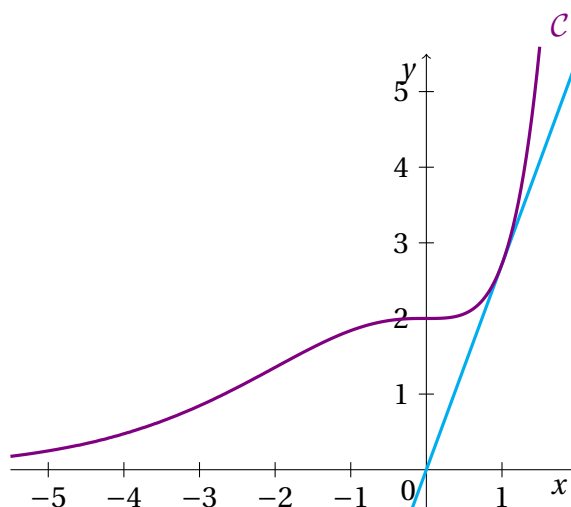
$$f''(x) \geq 0 \iff x(x+2)e^x \geq 0 \iff x(x+2) \geq 0.$$

Il s'agit de la forme factorisée d'un polynôme de degré 2 dont les racines sont  $-2$  et  $0$ . Comme  $a = 1 > 0$  le polynôme est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre celles-ci. Donc  $f$  est convexe sur  $] -\infty, -2]$  et sur  $[0, +\infty[$  et concave sur  $[-2, 0]$ .

- c) La courbe  $\mathcal{C}$  admet deux points d'inflexion :

$$(-2, f(-2)) = \left(-2, \frac{10}{e^2}\right) \quad \text{et} \quad (0, f(0)) = (0, 2).$$

4. Voici le graphe de la courbe et de sa tangente :



### Exercice 7 –

1. La fonction est polynomiale donc je calcule directement :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x - 4) dx &= \left[ 3 \times \frac{x^4}{4} - 2 \times \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x \right]_0^1 \\ &= \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 4 \right) - 0 = \frac{9 - 8 + 6 - 48}{12} = -\frac{41}{12}. \end{aligned}$$

2. Je commence par calculer une primitive de  $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ .

$f$  semble être de la forme  $\frac{u'}{u^2}$  avec  $u(x) = 1 + x^2$ . Puisque  $u'(x) = 2x$ , alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de  $f$  est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \left( -\frac{1}{u(x)} \right) = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Et donc

$$\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \left[ -\frac{1}{2(1+x^2)} \right]_0^2 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

3. Je commence par calculer une primitive de  $f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ .

$f$  semble être de la forme  $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$  avec  $u(t) = t^2 + 1$ . Puisque  $u'(t) = 2t$ , alors

$$\frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = f(t).$$

Donc une primitive de  $f$  est donnée par

$$F(t) = \sqrt{u(t)} = \sqrt{t^2+1}.$$

Et donc  $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = \left[ \sqrt{t^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1.$

4. La fonction est une somme donc je calcule directement :

$$\int_1^2 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + 4x - 1 \right) dx = \left[ 2\sqrt{x} + 2x^2 - x \right]_1^2 = (2\sqrt{2} + 8 - 2) - (2 + 2 - 1) = 2\sqrt{2} + 3.$$

5. Je commence par calculer une primitive de  $f(x) = \frac{x^3}{x^4+3}$ .

$f$  semble être de la forme  $\frac{u'}{u}$  avec  $u(x) = x^4 + 3$ . Puisque  $u'(x) = 4x^3$ , alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{4x^3}{x^4+3} = 4f(x).$$

Donc une primitive de  $f$  est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \ln(u(x)) = \frac{\ln(x^4+3)}{4}.$$

Et donc

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x^3}{x^4+3} dx = \left[ \frac{\ln(x^4+3)}{4} \right]_{-2}^{-1} = \frac{\ln(4)}{4} - \frac{\ln(19)}{4} = \frac{1}{4} \times \ln\left(\frac{4}{19}\right) = -\frac{1}{4} \times \ln\left(\frac{19}{4}\right).$$

### Exercice 8 –

1. a)  $f$  est de la forme  $f(x) = u(x)^3 + x$  avec  $u(x) = 1 - x$ . Comme  $u'(x) = -1$ , alors

$$f'(x) = 3 \times (-1) \times (1-x)^2 + 1 = -3(x^2 - 2x + 1) + 1 = -3x^2 + 6x - 3 + 1 = -3x^2 + 6x - 2.$$

Pour étudier le signe de  $f'(x)$ , je calcule le discriminant :  $\Delta = 6^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 12 > 0$ .

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{12}}{2 \times (-3)} = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{-6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{-6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Je déduis le tableau de signe de  $f'(x)$  et le tableau de variation de  $f$ , avec

$$f(0) = (1-0)^3 + 0 = 1, \quad f(1) = (1-1)^3 + 1 = 1$$

$$\text{et} \quad f\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{9} = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

$x$	0	$1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f$	1	$1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$	1

b) D'après le tableau de variation précédent, je sais que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \leq f(x) \leq 1.$$

Il ne me reste alors plus qu'à montrer que  $1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \geq 0$ .

Comme  $0 \leq 2\sqrt{3} \leq 9$ , alors  $0 \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \leq 1$  et donc  $1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \geq 0$ .

J'ai bien montré que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \in [0, 1]$ .

2. a) Je raisonne par récurrence sur  $n \geq 0$ .

**Énoncé :** Je note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $u_n \in [0, 1]$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,  $u_0 = \frac{4}{10}$  et  $0 \leq \frac{4}{10} \leq 1$ . Ainsi  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 0$ . Je suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et je montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que  $u_n \in [0, 1]$ . Or d'après la question **1.b)**, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \in [0, 1]$ . Donc  $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$ .

Finalement  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour  $n = 1$  et est héréditaire, alors par principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ , i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1].$$

b) J'étudie le signe de la différence de deux termes consécutifs : pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} - u_n = (1 - u_n)^3 + u_n - u_n = (1 - u_n)^3 \geq 0 \quad \text{car } u_n \in [0, 1].$$

Ainsi  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  donc  $u_{n+1} \geq u_n$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

c) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante (d'après la question **2.b)**) et majorée par 1 (d'après la question **2.a)**). Donc selon le théorème de la limite monotone, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Je note  $\ell$  sa limite, i.e.  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$  aussi et en passant à la limite dans l'égalité  $u_{n+1} = (1 - u_n)^3 + u_n$ , j'obtiens donc que  $\ell = (1 - \ell)^3 + \ell$ . Ainsi  $(1 - \ell)^3 = 0$  donc  $1 - \ell = 0$  et  $\ell = 1$ . J'ai bien montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

### Exercice 9 –

1. a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12500 = 1.02u_n - 250 - 12500 = 1.02(v_n + 12500) - 250 - 12500 \\ &= 1.02v_n + 12750 - 250 - 12500 = 1.02v_n. \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc géométrique de raison 1.02.

b) La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison 1.02 et son premier terme vaut  $v_0 = u_0 - 12500 = 8500 - 12500 = -4000$ . Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = v_0 \times q^n = -4000 \times 1.02^n.$$



c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = v_n + 12500 = 12500 - 4000 \times 1.02^n.$$

2. Comme  $1.02 > 1$  et que  $v_0 = -4000$  est négatif, la suite géométrique  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Alors comme pour tout entier  $n$ ,  $u_n = v_n + 12500$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi décroissante.

3. Comme  $1.02 > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1.02^n = +\infty$  et donc par somme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 12500 - 4000 \times 1.02^n = -\infty.$$

### Exercice 10 –

1. a) D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} P(H) &= \frac{52}{100} = \frac{13}{25}, & P_H(\bar{S}) &= \frac{15}{100} = \frac{3}{20}, & P_F(S) &= \frac{916}{1000} = \frac{229}{250}, \\ P(F) &= 1 - P(H) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}, & P_H(S) &= 1 - P_H(\bar{S}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20} \\ \text{et } P_F(\bar{S}) &= 1 - P_F(S) = 1 - \frac{229}{250} = \frac{21}{250}. \end{aligned}$$

b) D'après la formule des probabilités composées,

$$P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = \frac{12}{25} \times \frac{229}{250} \approx 0.44.$$

Ainsi environ 44% des personnes sont des femmes salariées.

c) D'après la formule des probabilités totales, comme  $\{F, S\}$  forme un système complet d'événements, alors

$$P(F) = P(F)P_F(S) + P(H)P_H(S) = \frac{12}{25} \times \frac{229}{250} + \frac{13}{25} \times \frac{17}{20} \approx 0.44 + \frac{221}{500} \approx 0.88.$$

d) Je cherche  $P_S(H)$ . D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_S(H) = \frac{P(H \cap S)}{P(S)} \approx \frac{0.44}{0.88} \approx 0.5.$$

2. a) Il s'agit de la répétition de  $n = 40$  épreuves de Bernoulli de succès "la femme travaille à temps partiel", de probabilité  $p = 0.3$ , identiques et indépendantes. La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de succès donc  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 40$  et  $p = 0.3$ . Le support de  $X$  est donné par  $X(\Omega) = \llbracket 0, 40 \rrbracket$  et pour tout  $k \in X(\Omega)$ ,

$$P(X = k) = \binom{40}{k} \times 0.3^k \times 0.7^{40-k}.$$

b) Puisque  $X$  suit une loi binomiale,

$$E(X) = np = 40 \times 0.3 = 12.$$

Cela signifie qu'il y a en moyenne 12 femmes qui travaillent à temps partiel.

c) Je cherche  $P(X = 12)$ . En appliquant la formule de la question 2.a), j'obtiens que

$$P(X = 12) = \binom{40}{12} \times 0.3^{12} \times 0.7^{28}.$$

**Exercice 11 –**

1. Le support est l'ensemble des issues possibles, donc  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ . Pour tout  $k \in \{0, 1\}$ , je note  $R_k$ ,  $V_k$  et  $B_k$  les événements "obtenir une boule rouge au  $k$ -ième tirage", "obtenir une boule verte au  $k$ -ième tirage" et "obtenir une boule bleue au  $k$ -ième tirage".  
D'après la formule des probabilités composées,

$$P(X = 2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Les tirages possibles n'amenant aucune boule rouge sont les suivants :  $V_1 \cap V_2$ ,  $V_1 \cap B_2$  et  $B_1 \cap V_2$ . Donc

$$P(X = 0) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) + P(V_1) \times P_{V_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(V_2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Enfin

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 2) - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Tout ceci est résumé dans le tableau suivant :

$k$	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. Grâce aux valeurs du tableau,

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

Pour la variance, je commence par calculer  $E(X^2)$ . Grâce au théorème de transfert,

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{5}.$$

Puis d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{5} - 1^2 = \frac{2}{5}.$$

3. La formule de la fonction de répartition est donnée par  $F_X(x) = P(X \leq x)$ . Donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{5} & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \frac{4}{5} & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

