DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1 –

1. $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12}{12} - \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

2. $B = \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \times 6}{\frac{2}{15} - \frac{4}{9}} = \frac{\left(\frac{10}{15} - \frac{12}{15}\right) \times 6}{\frac{6}{45} - \frac{20}{45}} = \frac{-\frac{2}{15} \times 6}{-\frac{14}{45}} = \frac{-\frac{12}{15}}{-\frac{14}{45}} = \frac{12}{15} \times \frac{45}{14} = \frac{2 \times 6 \times 3 \times 15}{15 \times 2 \times 7} = \frac{18}{7}$

3. $C = \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times 3\right) \div \frac{2}{5} = \left(1 - \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) \times 3\right) \div \frac{2}{5} = \left(1 - \frac{1}{6} \times 3\right) \div \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$

4. $D = \left(1 - \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{2}{7} + 1\right)^2 \div \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8} \times \left(\frac{9}{7}\right)^2 \div \frac{13}{12} = \frac{7}{8} \times \frac{81}{49} \times \frac{12}{13} = \frac{7 \times 9 \times 9 \times 4 \times 3}{4 \times 2 \times 7 \times 7 \times 13}$
   $= \frac{9 \times 9 \times 3}{2 \times 7 \times 13} = \frac{243}{182}$

Exercice 2 –

1. $A = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

2. $B = \sqrt{\frac{81}{25}} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5} - \frac{9}{25} = \frac{45}{25} - \frac{9}{25} = \frac{36}{25}$

3. $C = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

4. $D = \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$

Exercice 3 –

1. $A(x) = 2x(x+1) - (12x - 11)^2 = 2x^2 + 2x - \left(144x^2 - 264x + 121\right)$
   $= 2x^2 + 2x - 144x^2 + 264x - 121 = -142x^2 + 266x - 121$

2. $B(x) = (3 - x)(4 - 2x) + (-5x)^2 = 12 - 6x - 4x + 2x^2 + 25x^2 = 27x^2 - 10x + 12$

3. $C(x) = (1 - 3x)(x + 2)(2x + 5) = \left(x + 2 - 3x^2 - 6x\right)(2x + 5) = \left(-3x^2 - 5x + 2\right)(2x + 5)$
   $= -6x^3 - 15x^2 - 10x^2 - 25x + 4x + 10 = -6x^3 - 25x^2 - 21x + 10$

4. $D(x) = 2(x - 2)(x - 3) = 2\left(x^2 - 3x - 2x + 6\right) = 2\left(x^2 - 5x + 6\right) = 2x^2 - 10x + 12$

Exercice 4 –

1. $A(x) = (5x + 1)(3x - 2) - (3x - 2) = (3x - 2)\Big(5x + 1 - 1\Big) = 5x(3x - 2)$

2. $B(x) = (2x + 5)^2 + (2x + 5)(x - 4) = (2x + 5)\Big(2x + 5 + x - 4\Big) = (2x + 5)(3x + 1)$

3. $C(x) = 9x^2 - 100 = (3x)^2 - 10^2 = (3x - 10)(3x + 10)$

4. $D(x) = (x + 1)^2(x - 1) - 16(x - 1) = (x - 1)\Big((x + 1)^2 - 16\Big) = (x - 1)\Big((x + 1)^2 - 4^2\Big)$
   $= (x - 1)(x + 1 - 4)(x + 1 + 4) = (x - 1)(x - 3)(x + 5)$

Exercice 5 –

1. $2x-3=0 \iff 2x=3 \iff x=\dfrac{3}{2}$ donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
2. $-x+7=0 \iff x=7$ donc $\mathcal{S}=\{7\}$.
3. $x+3=2x-1 \iff x-2x=-1-3 \iff -x=-4 \iff x=4$ donc $\mathcal{S}=\{4\}$.
4. $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{4} \iff \dfrac{1}{3}x=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3} \iff \dfrac{1}{3}x=\dfrac{1}{12} \iff x=\dfrac{1}{12}\times 3=\dfrac{1}{4}$ donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.
5. Je calcule le discriminant : $\Delta=(-10)^2-4\times 1\times 21=100-84=16=4^2>0$.
   Le polynôme admet deux racines :
   $$x_1=\frac{10-4}{2}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{10+4}{2}=7.$$
   Donc $\mathcal{S}=\{3,7\}$.
6. Je calcule le discriminant : $\Delta=\left(\dfrac{6}{7}\right)^2-4\times 3\times\dfrac{3}{49}=\dfrac{36}{49}-\dfrac{36}{49}=0$.
   Le polynôme admet une unique racine :
   $$x_0=-\frac{\frac{6}{7}}{2\times 3}=-\frac{1}{7}.$$
   Donc $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{7}\right\}$.
7. $(x-1)(x+1)=5x-7 \iff x^2-1=5x-7 \iff x^2-5x+6=0$
   Je calcule le discriminant de ce polynôme : $\Delta=(-5)^2-4\times 1\times 6=25-24=1=1^2>0$.
   Le polynôme admet deux racines :
   $$x_1=\frac{5-1}{2}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+1}{2}=3.$$
   Donc $\mathcal{S}=\{2,3\}$.
8. Je calcule le discriminant : $\Delta=(-3)^2-4\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=9-8=1=1^2>0$.
   Le polynôme admet deux racines :
   $$x_1=\frac{3-1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{3+1}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$
   Donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right\}$.

Exercice 6 –

1. $-2x+3>0 \iff -2x>-3 \iff x<\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$ donc $\mathcal{S}=\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$.
2. $5x-6\leqslant 0 \iff 5x\leqslant 6 \iff x\leqslant\dfrac{6}{5}$ donc $\mathcal{S}=\left]-\infty,\dfrac{6}{5}\right]$.
3. $2x-1<\dfrac{1}{2} \iff 2x<\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2} \iff x<\dfrac{3}{4}$ donc $\mathcal{S}=\left]-\infty,\dfrac{3}{4}\right[$.
4. $\dfrac{1}{3}x+1\geqslant\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3} \iff -\dfrac{1}{3}x\geqslant-\dfrac{4}{3} \iff x\leqslant\dfrac{-\frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}}=4$ donc $\mathcal{S}=]-\infty,4]$.

5. Je commence par étudier le signe de x^2+2x+1. Le discriminant vaut $\Delta = 4-4=0$.
   Le polynôme admet une racine $x_0=-1$. J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^2+2x+1		$+$	0	$+$	

   Donc $\mathcal{S} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.
6. Je commence par étudier le signe de x^2+x+1. Le discriminant vaut $\Delta = 1-4=-3<0$.
   Le polynôme n'admet pas de racine. J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2+x+1		$+$	

   Donc $\mathcal{S}=\emptyset$.
7. Je commence par étudier le signe de x^2-5x+6. Le discriminant vaut $\Delta = 25-24=1>0$.
   Le polynôme admet deux racines $x_1=2$ et $x_2=3$. J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $\mathcal{S}=[2,3]$.
8. $(x-1)(x-2)\leqslant 2x-4 \iff x^2-3x+2\leqslant 2x-4 \iff x^2-5x+6\leqslant 0$.
   J'ai déjà résolu cette inéquation à la question précédente. J'en déduis que $\mathcal{S}=[2,3]$.

Exercice 7 –

1. Comme x est non nul, je peux multiplier chaque membre de l'égalité par x^2. J'obtiens alors
$$x^2+\frac{16}{x^2}=8 \iff x^4+16=8x^2 \iff x^4-8x^2+16=0.$$
   Je pose $X=x^2$. Alors mon équation devient une équation de degré 2 en X : $X^2-8X+16=0$.
   Je calcule le discriminant : $\Delta=(-8)^2-4\times 1\times 16=0$. Il y a une unique solution : $X_0=\frac{8}{2}=4$.
   J'en déduis donc que les solutions de mon équation de départ vérifient $x^2=4$,
   i.e. $x=2$ ou $x=-2$. Ainsi $\mathcal{S}=\{-2,2\}$.
2. Grâce à la résolution précédente, je peux obtenir une factorisation du trinôme de degré 2 :
$$X^2-8X+16=(X-4)^2=\left(x^2-4\right)^2.$$
   Et comme un carré est toujours positif, $\left(x^2-4\right)^2\geqslant 0$. Alors comme x^2 aussi est positif,
$$\frac{\left(x^2-4\right)^2}{x^2}\geqslant 0 \iff \frac{x^4-8x^2+16}{x^2}\geqslant 0 \iff x^2-8+\frac{16}{x^2}\geqslant 0 \iff x^2+\frac{16}{x^2}\geqslant 8.$$
   Donc pour tout $x\in]0,+\infty[$, j'ai bien montré que $x^2+\frac{16}{x^2}\geqslant 8$.

Exercice 8 –

1. a) Comme $P(-1) = -3 - 7 + 7 + 3 = 0$, le polynôme $P(x)$ se factorise par $x - (-1) = x + 1$.
Donc il existe un polynôme $Q(x)$, de degré $3 - 1 = 2$, tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$.
Je détermine ce polynôme $Q(x)$ en effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 3x^3 & - & 7x^2 & - & 7x & + & 3 & x+1 \\ \cline{9-9}
- & \big(3x^3 & + & 3x^2\big) & & & & & 3x^2 - 10x + 3 \\ \cline{2-8}
 & & - & 10x^2 & - & 7x & + & 3 & \\
 & - & \big(- & 10x^2 & - & 10x\big) & & & \\ \cline{3-8}
 & & & & & 3x & + & 3 & \\
 & & & & - & \big(3x & + & 3\big) & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Finalement $P(x) = (x+1)\big(3x^2 - 10x + 3\big)$.

b) Il me reste à traiter le polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 100 - 36 = 64 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3.$$

Donc l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$ admet trois solutions : $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{3}, 3\right\}$.

2. a) Je détermine les valeurs interdites : ce sont les solutions de l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$.
Le discriminant vaut $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 12 == 144 - 144 = 0$.
Il y a donc une unique racine, *i.e.* une unique valeur interdite :

$$x_0 = \frac{12}{6} = 2.$$

b) J'établis le tableau de signe de la fraction rationnelle $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x^2-10x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2-12x+12$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty[.$$

Exercice 9 –

1. Lorsque $m = 4$, $x^2 + 4x + 2(m-1) = x^2 + 4x + 2 \times 3 = x^2 + 4x + 6$. L'équation que je cherche à résoudre est donc $x^2+4x+6 = 0$. Je calcule le discriminant : $\Delta = 4^2-4\times 1\times 6 = 16-24 = -8 < 0$. Comme le discriminant est négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle lorsque $m = 4$.
2. a) Je calcule le discriminant associé à l'équation $x^2 + 4x + 2(m-1) = 0$ en fonction de m :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 2(m-1) = 16 - 8(m-1) = 16 - 8m + 8 = 24 - 8m.$$

   b) Je sais que cette équation admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul. J'obtiens alors que

$$\Delta = 0 \iff 24 - 8m = 0 \iff 24 = 8m \iff m = \frac{24}{8} = 3.$$

   c) Lorsque $m = 3$, l'équation devient $x^2 + 4x + 4 = 0$. Son discriminant est nul et l'unique solution est donnée par

$$x_0 = \frac{-4}{2 \times 1} = -2.$$

3. L'équation admet 2 solutions distinctes si et seulement si

$$\Delta > 0 \iff 24 - 8m > 0 \iff 8m < 24 \iff m < 3.$$

   De la même façon, l'équation n'admet aucune solution réelle lorsque

$$\Delta < 0 \iff m > 3.$$