

CONCOURS BLANC 3

Exercice 1 – [ECRICOME 2011 / Ex2]

Partie I.

1. Je calcule N^2 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Et donc pour tout entier $k \geq 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3$.

2. a) Je calcule les produits PQ et QP :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 & 0 \\ -2+2 & -1+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$

$$Q \times P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 2-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

b) Je calcule le produit $Q \times \Delta$ puis $Q\Delta \times P$:

$$Q \times \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3+2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q\Delta \times P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0 & 4-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

Je retrouve bien la matrice D introduite dans l'énoncé.

c) Je sais que $Q\Delta P = D$. En multipliant à gauche par P et à droite par Q , j'obtiens que

$$PDQ = P \times Q\Delta P \times Q = \underbrace{PQ}_{=I_3} \times \Delta \times \underbrace{PQ}_{=I_3} = I_3 \times \Delta \times I_3 = \Delta.$$

J'ai ainsi montré que $\Delta = PDQ$.

d) Je raisonne par récurrence sur $n \geq 0$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $\Delta^n = PD^nQ$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $\Delta^0 = I_3$ et $PD^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$.

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $\Delta^n = PD^nQ$. Alors

$$\Delta^{n+1} = \Delta^n \times \Delta = PD^nQ \times PDQ = PD^nI_3DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q.$$

Donc $\Delta^{n+1} = PD^{n+1}Q$. Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n = PD^nQ.$$

e) Comme la matrice D est diagonale, alors $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Or d'après la question précédente, $\Delta^n = PD^nQ$. Donc

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta^n = PD^n \times Q = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a) Je calcule les produits ΔN et $N\Delta$:

$$\Delta \times N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3+2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N \times \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $\Delta N = N\Delta$, et je remarque aussi que $\Delta N = N\Delta = N$.

b) Les matrices Δ et N commutent d'après la question précédente donc je peux appliquer la formule du binôme de Newton à la matrice $A = \Delta + N$:

$$A^n = (\Delta + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k}.$$

Or d'après la question 1., pour tout $k \geq 2$, le terme de la somme est nul puisque $N^k = 0_3$. Ainsi

$$A^n = \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}.$$

c) Grâce à la formule précédente et à l'expression de Δ^n en fonction de n , j'obtiens que

$$A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, à la question 2.a), j'ai remarqué que $N\Delta = N$, donc $N\Delta^{n-1} = N$. Finalement

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II.

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n$. Donc la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = z_0 = 1$.

- b) En remplaçant z_n par 1 dans les expressions de l'énoncé, j'obtiens que

$$x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = -2x_n + 2.$$

2. a) J'exprime $r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$ dans le but d'obtenir une expression de la forme $r_n + r$:

$$r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = 3x_n + y_n - 1 - 2x_n + 2 = x_n + y_n + 1 = r_n + 1.$$

Ainsi j'ai bien montré que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

- b) Puisque la suite est arithmétique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = r_0 + 1 \times n, \quad \text{i.e.} \quad x_n + y_n = x_0 + y_0 + n = n + 2.$$

3. a) J'exprime $s_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1}$ dans le but d'obtenir une expression de la forme $q \times s_n$:

$$s_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2 \times (3x_n + y_n - 1) - 2x_n + 2 = 4x_n + 2y_n = 2 \times (2x_n + y_n) = 2s_n.$$

Ainsi j'ai bien montré que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.

- b) Puisque la suite est géométrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = s_0 \times q^n, \quad \text{i.e.} \quad 2x_n + y_n = (2x_0 + y_0) \times 2^n = 3 \times 2^n.$$

4. Grâce aux expressions des suites auxiliaires $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, je remarque que

$$s_n - r_n = 2x_n + y_n - x_n - y_n = x_n \quad \text{et} \quad 2r_n - s_n = 2(x_n + y_n) - 2x_n - y_n = 2x_n + 2y_n - 2x_n - y_n = y_n.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = s_n - r_n = 3 \times 2^n - n - 2 \quad \text{et} \quad y_n = 2r_n - s_n = 2n + 4 - 3 \times 2^n.$$

Exercice 2 – [BSB 2015 / Ex1]

1. a) Je cherche à déterminer la matrice Q telle que $PQ = I_2$.

Pour cela, j'exprime PQ en fonction des coefficients de Q :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a-2b & c-2d \end{pmatrix}.$$

Alors $PQ = I_2$ si et seulement si $a + b = c - 2d = 1$ et $c + d = a - 2b = 0$.

Trouver de tels coefficients revient bien en effet à résoudre les systèmes

$$S_1 : \begin{cases} a + b = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_2 : \begin{cases} c + d = 0 \\ c - 2d = 1 \end{cases}$$

- b) En soustrayant la deuxième équation à la première dans les deux systèmes, j'obtiens

$$b + 2b = 1 - 0 \iff 3b = 1 \iff b = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad d + 2d = 0 - 1 \iff 3d = -1 \iff d = -\frac{1}{3}.$$

Puis en remplaçant la variable par sa valeur dans la première équation, j'aboutis à

$$a + \frac{1}{3} = 1 \iff a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad c - \frac{1}{3} = 0 \iff c = \frac{1}{3}.$$

Finalement j'obtiens pour la matrice Q :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Je calcule les produits PQ et QP avec la matrice Q trouvée précédemment :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2+1 & 1-1 \\ 2-2 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

$$Q \times P = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2+1 & 2-2 \\ 1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

J'ai bien vérifié que $PQ = QP = I_2$.

2. a) La matrice D est diagonale donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$.

b) Comme $A^n = PD^nQ$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-\frac{1}{2})^n \\ 1 & -2 \times (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix},$$

$$A^n = PD^n \times Q = \begin{pmatrix} 1 & (-\frac{1}{2})^n \\ 1 & -2 \times (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 + (-\frac{1}{2})^n & 1 - (-\frac{1}{2})^n \\ 2 - 2 \times (-\frac{1}{2})^n & 1 + 2 \times (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}.$$

Or comme $-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1) \times 2 \times \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,
j'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 + (-\frac{1}{2})^n & 1 - (-\frac{1}{2})^n \\ 2 + (-\frac{1}{2})^{n-1} & 1 - (-\frac{1}{2})^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Les événements A_n , B_n et C_n forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}).$$

Or d'après l'énoncé, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$.

D'où

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

De même, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales,

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}).$$

Et d'après l'énoncé, $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1$, $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{C_n}(B_{n+1}) = 1$.

D'où

$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n.$$

Enfin, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales,

$$P(C_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}).$$

Et d'après l'énoncé, $P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$, $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{C_n}(C_{n+1}) = 0$.

D'où

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède,

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n.$$

5. a) À l'instant 0, la mouche se trouve dans la pièce B donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.

D'après la question 3., $b_1 = a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0 = \frac{1}{2}$. Par conséquent,

$$U_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors d'après la question précédente,

$$AU_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

J'ai bien montré que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b) **Énoncé :** Je note \mathcal{P}_n la propriété : $U_n = A^n U_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $U_n = A^n U_0$. Alors

$$U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0.$$

Donc $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$. Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente ainsi que la question 2.,

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = U_n = A^n \times U_0 = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$b_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{3} \times \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right).$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right).$$

d) J'ai déjà traité le cas $n = 0$ à la question 5.a) : $a_0 = c_0 = 0$.

Pour $n \geq 1$, cette fois d'après la question 3.

$$a_n = c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} = \frac{1}{12} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right).$$

Exercice 3 – [BSB 2015 / Ex2]

1. a) Pour la limite en $+\infty$, j'utilise les résultats de croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Pour la limite en 0, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1 \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

- b) Je commence par calculer l'écart entre $f(x)$ et $y = x + 1$, avant de montrer que cet écart tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

$$f(x) - y = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} - (x + 1) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Or j'ai déjà calculé la limite de cet écart à la question précédente :
par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Donc la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ est bien asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.

- c) J'étudie désormais le signe de $f(x) - y$, pour connaître la position relative des courbes.

Je sais que $f(x) - y = \frac{\ln(x)}{x}$ et puisque $x \in]0, +\infty[$, le signe de $\frac{\ln(x)}{x}$ dépend uniquement du signe de $\ln(x)$. Or je sais que $\ln(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ et que $\ln(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$. Ainsi,

- $f(x) - y \leq 0$ sur $]0, 1]$, i.e. \mathcal{C} est en dessous de \mathcal{D} sur $]0, 1]$,
- $f(x) - y \geq 0$ sur $[1, +\infty[$, i.e. \mathcal{C} est au-dessus de \mathcal{D} sur $[1, +\infty[$.


2. a) La fonction g est donnée sous la forme d'une somme, donc je dérive terme à terme :

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

Comme $x > 0$, le dénominateur est positif. Alors le signe de $g(x)$ est donné par celui de $2x^2 - 1$. Ainsi pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$2x^2 - 1 \geq 0 \iff 2x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq \frac{1}{2} \iff x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{car } x \text{ positif}).$$

J'en déduis alors le tableau de signe de $g'(x)$ et le tableau de variation de g :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
g			

b) Je remplace x par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans l'expression de $g(x)$ et j'obtiens

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2).$$

Or je sais que $\ln(2) > 0$ puisque $2 > 1$, donc $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$. Et comme $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ correspond au minimum de la fonction g sur $]0, +\infty[$ (d'après le tableau de variation obtenu à la question précédente), alors j'en déduis que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

c) La fonction f est donnée sous la forme d'une somme : je peux dériver terme à terme. Plus précisément, f est de la forme $f(x) = x + 1 + \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$.

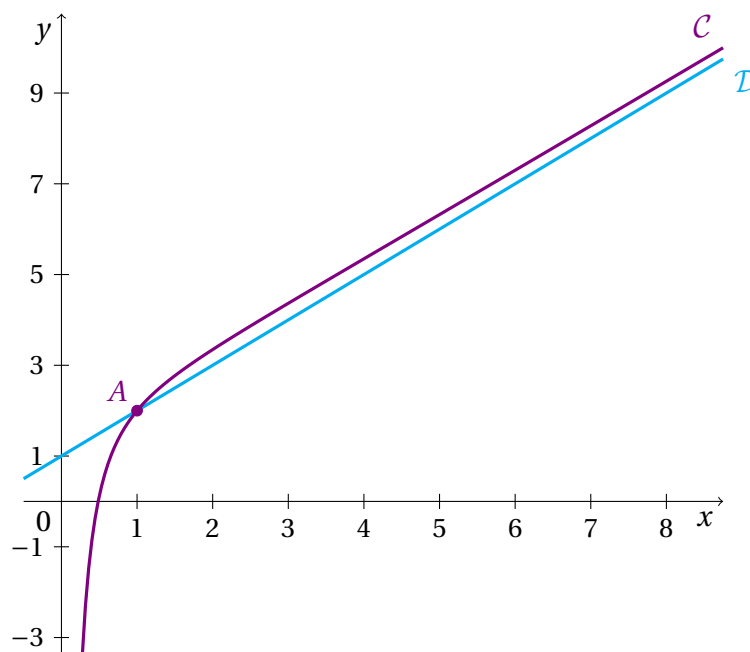
Puisque $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

d) J'ai montré à la question **2.b)** que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Puisque $x^2 > 0$ également, j'en déduis que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. J'obtiens donc le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

3. La courbe a une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et la droite \mathcal{D} est asymptote en $+\infty$. Le point d'intersection de \mathcal{C} avec \mathcal{D} a pour abscisse 1. Je suis donc capable de tracer l'allure de la courbe.



4. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $u_n \geq n + 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 + 1 = 1$ donc $u_0 \geq 0 + 1$.

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq n + 1 \geq 1$.

Et j'ai montré à la question 1.c) que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq x + 1$. Ainsi

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n + 1 \geq n + 1 + 1 = n + 2.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n + 1.$$

- b) Pour établir le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, j'étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n + 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} - u_n = 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

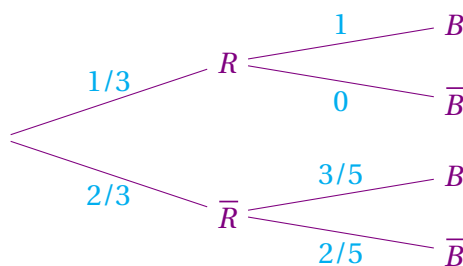
Or d'après la question précédente, $u_n \geq n + 1$ pour tout n . En particulier, $u_n \geq 1$ pour tout n et donc $\ln(u_n) \geq 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 1 \geq 0$. Et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Par ailleurs, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$, alors par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 4 – [BSB 2015 / Ex3]

Partie I

La situation peut être illustrée à l'aide de l'arbre de probabilités suivant :



1. Les événements R et \bar{R} forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(R \cap B) + P(\bar{R} \cap B) = P(R) \times P_R(B) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(B) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

2. Il s'agit de calculer la probabilité $P_B(\bar{R})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_B(\bar{R}) = \frac{P(B \cap \bar{R})}{P(B)} = \frac{P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{11}{15}} = \frac{6}{11}.$$

La probabilité que Coralie se soit levée à l'heure sachant qu'elle prend le bus est égale à $\frac{6}{11}$.

3. a) La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de $n = 180$ répétitions, identiques et indépendantes, de l'épreuve de Bernoulli de succès "Coralie prend le bus", de probabilité $p = \frac{11}{15}$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 180$ et $p = \frac{11}{15}$. Par conséquent, le support est donné par $X(\Omega) = \llbracket 0, 180 \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, 180 \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{180}{k} \times \left(\frac{11}{15}\right)^k \times \left(\frac{4}{15}\right)^{180-k}.$$

- b) Comme X suit une loi binomiale,

$$E(X) = np = 180 \times \frac{11}{15} = 132 \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = 132 \times \frac{4}{15} = \frac{176}{5}.$$

- c) Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de jours dans l'année où Coralie va au lycée à pied. Il est clair que $Z = 180 - X$ puisqu'il y a X jours où Coralie prend le bus sur un total de 180 jours. Puis par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(180 - X) = 180 - E(X) = 180 - 132 = 48.$$

En conclusion, Coralie peut espérer aller au lycée à pied 48 jours dans l'année.

Partie II

1. En utilisant le tableau définissant la loi de N , j'obtiens

$$E(N) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8}.$$

2. D'après le tableau de la loi de N , le support de N est donné par $N(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$. Il y a donc au plus 3 jours de grève et Coralie peut arriver en retard 0, 1, 2 ou 3 matins. Donc $Y(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

3. a) En utilisant les données de l'énoncé, $P_{[N=1]}(Y = 0)$ est la probabilité que Coralie ne soit pas en retard le premier jour de grève donc $P_{[N=1]}(Y = 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$P_{[N=1]}(Y = 1)$ est la probabilité que Coralie soit en retard le premier jour de grève donc $P_{[N=1]}(Y = 1) = \frac{1}{3}$.

- b) Par la formule des probabilités composées,

$$P([N = 1] \cap [Y = 0]) = P(N = 1) \times P_{[N=1]}(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

et

$$P([N = 1] \cap [Y = 1]) = P(N = 1) \times P_{[N=1]}(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Enfin, il est impossible que Coralie ait plus de retard qu'il n'y a de jours de grève.

Donc puisque Y est le nombre de retards pendant la période de grève, j'en déduis que

$$P([N = 1] \cap [Y = 2]) = 0 \quad \text{et} \quad P([N = 1] \cap [Y = 3]) = 0.$$

4. a) Les événements $[N = 1]$, $[N = 2]$ et $[N = 3]$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales et les probabilités données par la loi conjointe,

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P([N = 1] \cap [Y = 0]) + P([N = 2] \cap [Y = 0]) + P([N = 3] \cap [Y = 0]) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{6+1+2}{18} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Je raisonne de même pour le calcul des probabilités $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$ et $P(Y = 3)$ et j'obtiens ainsi la loi de Y , que je résume dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{1}{72}$

Enfin par définition de l'espérance,

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{7}{18} + 2 \times \frac{7}{72} + 3 \times \frac{1}{72} = \frac{28 + 14 + 3}{72} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8}.$$

- b) La probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève est donnée par $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$.
- c) D'après la question **3.b)**, $P([N = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{3}$ alors que $P(N = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$.
Donc $P([N = 1] \cap [Y = 0]) \neq P(N = 1) \times P(Y = 0)$, ce qui prouve que les variables aléatoires Y et N ne sont pas indépendantes.
- d) En utilisant la définition, j'obtiens que

$$E(YN) = \frac{1}{6} + \frac{2}{18} + \frac{3}{6} + \frac{4}{72} + \frac{6}{12} + \frac{9}{72} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{18} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{24 + 8 + 3}{24} = \frac{35}{24}.$$

Alors d'après la formule de König-Huygens,

$$\text{Cov}(Y, N) = E(YN) - E(Y) \times E(N).$$

Et d'après les questions **1.** et **4.a)**, $E(N) = \frac{15}{8}$ et $E(Y) = \frac{5}{8}$.

Donc

$$\text{Cov}(Y, N) = \frac{35}{24} - \frac{5}{8} \times \frac{15}{8} = \frac{35}{24} - \frac{75}{64} = \frac{35 \times 8}{192} - \frac{75 \times 3}{192} = \frac{280 - 225}{192} = \frac{55}{192}.$$