DEVOIR MAISON 3

Exercice 1 –

1. D'après la formule des probabilités totales, comme $\left\{R,\overline{R}\right\}$ forme un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned} P(J) &= P(R\cap J)+P(\overline{R}\cap J) = P(R)\times P_R(J)+P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(J) \\ &= \frac{3}{5}\times 1+\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{1}{3} = \frac{3}{5}+\frac{2}{15} = \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

   En effet, si l'élève connaît la réponse, il va répondre juste avec une probabilité 1, contre une probabilité $\frac{1}{3}$ s'il répond au hasard.

2. Les 20 questions représentent $n=20$ répétitions d'une expérience de Bernoulli (succès : "répondre juste", de probabilité $p=\frac{11}{15}$), identiques et indépendantes. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\frac{11}{15}$. Le support de X est donné par $X(\Omega)=[\![0,20]\!]$ et pour tout $k\in[\![0,20]\!]$,

$$P(X=k)=\binom{20}{k}\left(\frac{11}{15}\right)^k\left(\frac{4}{15}\right)^{20-k}.$$

3. Comme X suit une loi binomiale, on a

$$E(X)=np=20\times\frac{11}{15}=\frac{44}{3}\quad\text{et}\quad V(X)=np(1-p)=\frac{44}{3}\times\frac{4}{15}=\frac{176}{45}.$$

4. (a) D'après l'énoncé, il y a X bonnes réponses, rapportant 1 point chacune, et donc $20-X$ mauvaises réponses, rapportant -2 points chacune. Ainsi la note finale devient

$$N=1\times X+(-2)\times(20-X)=X-40+2X=3X-40.$$

   (b) Comme $N=3X-40$, on a

$$E(N)=E(3X-40)=3E(X)-40=3\times\frac{44}{3}-40=44-40=4,$$

$$V(N)=V(3X-40)=3^2V(X)=9\times\frac{176}{45}=\frac{176}{5}.$$

5. (a) Il s'agit cette fois de $n=20$ répétitions d'une expérience de Bernoulli (succès : "répondre juste" de probabilité $p=\frac{3}{5}$), identiques et indépendantes. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès, elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\frac{3}{5}$.

   (b) La note moyenne obtenue par l'élève B correspond à l'espérance de Y, *i.e.*

$$E(Y)=20\times\frac{3}{5}=12.$$

(c) En comparant les notes moyennes obtenues par les élèves A et B dans le cas de points négatifs en cas de mauvaises réponses (4 pour l'élève A et 12 pour l'élève B), il vient naturellement la conclusion que la meilleure stratégie est de ne pas répondre au hasard aux questions pour lesquelles on ne connaît pas la réponse. C'est donc l'élève B qui possède la meilleure stratégie.

Exercice 2 –

1. (a) Comme une primitive de x^n est donnée par $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, une primitive de f_1 est donnée par

$$F_1(x) = 4\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - x = x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x.$$

(b) De la même manière, une primitive de f_2 est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x.$$

(c) f_3 semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = 2x - 1$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$u'(x)u(x)^2 = 2(2x-1)^2 = 2f_3(x).$$

Donc une primitive de f_3 est donc donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-1)^3}{3} = \frac{(2x-1)^3}{6}.$$

(d) f_4 semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 3x + 1$. On a $u'(x) = 3$ donc

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{\sqrt{3x+1}} = 3f_4(x).$$

Donc une primitive de f_4 est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u(x)} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3x+1} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}.$$

(e) f_5 semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 + 1$. On a $u'(x) = 2x$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 2f_5(x).$$

Donc une primitive de f_5 est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{u(x)} = \frac{-1}{2x^2+2}.$$

(f) f_6 semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = 2x^2 - 2x + 1$. On a $u'(x) = 4x - 2$ donc

$$u'(x)u(x)^3 = (4x-2)(2x^2-2x+1)^3 = f_6(x).$$

Donc une primitive de f_6 est donnée par

$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(2x^2-2x+1)^4}{4}.$$

(g) f_7 semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 2x-1$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2} = f_7(x).$$

Donc une primitive de f_7 est donnée par

$$F(x) = \frac{-1}{u(x)} = \frac{-1}{2x-1}.$$

(h) f_8 n'est pas une fonction composée. On peut donc primitiver directement. On a

$$f_8(x) = 2 \times \frac{1}{x^2}.$$

Donc une primitive de f_8 est donnée par

$$F(x) = 2 \times \frac{-1}{x} = \frac{-2}{x}.$$

(i) Une primitive de f_9 est donnée par

$$F(x) = 4\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x} = 2x^2 - x - \frac{1}{x}.$$

(j) On réécrit f_{10} pour faire apparaître des fonctions dont on sait calculer une primitive :

$$f_{10}(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Donc une primitive de f_{10} est donnée par

$$F(x) = x - \frac{1}{x}.$$

2. (a) On a

$$\int_0^1 (2x^2 - 5x + 3)\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 3 = \frac{4}{6} - \frac{15}{6} + \frac{18}{6} = \frac{7}{6}.$$

(b) On a

$$\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x = \left[4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = 1 - 1 + 1 + 1 = 2.$$

(c) Commençons par trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{(1+3x^2)^2}$.

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1+3x^2$. On a $u'(x) = 6x$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{6x}{(1+x^2)^2} = 6f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{6} \times \frac{-1}{u(x)} = \frac{1}{6} \times \frac{-1}{1+3x^2} = \frac{-1}{6+18x^2}.$$

Et donc

$$\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{6+18x^2}\right]_1^2 = \frac{-1}{78} - \frac{-1}{24} = \frac{-4}{312} + \frac{13}{312} = \frac{9}{312} = \frac{3}{104}.$$

(d) Commençons par trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}$.

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + x^4$. On a $u'(x) = 4x^3$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} = 4f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{u(x)} = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{1+x^4} = \frac{-1}{4+4x^4}.$$

Et donc

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{4+4x^4}\right]_0^1 = \frac{-1}{8} - \frac{-1}{4} = \frac{1}{8}.$$

(e) Commençons par trouver une primitive de $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^2 + 1$. On a $u'(t) = 2t$ donc

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} = 2f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(t)} = \sqrt{t^2+1}.$$

Et donc

$$\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_{-1}^1 = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0.$$

Remarque : La fonction $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est impaire. Il est donc normal d'obtenir que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = 0$.

(f) Commençons par trouver une primitive de $f(t) = \dfrac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}$.

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^4 + 1$. On a $u'(x) = 4t^3$ donc

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}} = f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = 2\sqrt{u(t)} = 2\sqrt{t^4+1}.$$

Et donc

$$\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t^4+1}\right]_{-1}^1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0.$$

(g) On a

$$\int_1^2 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3} - 1 + \frac{3}{8} = \frac{56}{24} - \frac{24}{24} + \frac{9}{24} = \frac{41}{24}.$$

(h) On a

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x - 2\right) \mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^4 = \left(2\sqrt{4} + \frac{16}{2} - 8\right) - \left(2 + \frac{1}{2} - 2\right) = 4 + 8 - 8 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

(i) Commençons par trouver une primitive de $f(x) = (4x-1)^3$.
f semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = 4x - 1$. On a $u'(x) = 4$ donc

$$u'(x)u(x)^3 = 4(4x-1)^3 = 4f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(4x-1)^4}{16}.$$

Et donc

$$\int_{-2}^{-1} (4x-1)^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{(4x-1)^4}{16}\right]_{-2}^{-1} = \frac{625}{16} - \frac{6561}{16} = -\frac{5936}{16} = -371.$$

(j) Commençons par trouver une primitive de $f(x) = x(5x^2+1)^2$.
f semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = 5x^2 + 1$. On a $u'(x) = 10x$ donc

$$u'(x)u(x)^2 = 10x(5x^2+1)^2 = 10f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{10} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{(5x^2+1)^3}{30}.$$

Et donc

$$\int_{-1}^{0} x(5x^2+1)^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{(5x^2+1)^3}{30}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{30} - \frac{216}{30} = \frac{-215}{30} = -\frac{43}{6}.$$