ECRICOME 2021

Exercice 1 –

1. a) Je calcule chaque matrice puis le produit :

$$M-I=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad M+3I=\begin{pmatrix}5&-2&1\\2&0&2\\-1&2&3\end{pmatrix}$$

donc

$$(M-I)(M+3I)=\begin{pmatrix}5-4-1&-2+2&1-4+3\\10-8-2&-4+4&2-8+6\\-5+4+1&2-2&-1+4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

b) Comme $(M-I)(M+3I)=0_3$, j'en déduis que le polynôme

$$P(X)=(X-1)(X+3)=X^2+2X-3$$

est un polynôme annulateur de la matrice M.

c) Les valeurs propres possibles pour la matrice M sont les racines du polynôme annulateur. Or $X^2+2X-3=0 \iff (X-1)(X+3)=0 \iff X=1$ ou $X=-3$.
Comme X^2+2X-3 est un polynôme annulateur de M et que ses racines sont -3 et 1, les valeurs propres possibles pour M sont

$$-3 \quad \text{et} \quad 1.$$

2. a) D'après la question **1.a)**, je sais que $P(M)=(M-I)(M+3I)=0_3$, *i.e.* $M^2+2M-3I=0_3$.
J'en déduis donc que

$$M^2=3I-2M.$$

b) Je raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n=u_nM+v_nI$.

Initialisation : Pour $n=0$,

$$M^0=I \quad\text{et}\quad u_0M+v_0I=0\times M+1\times I=I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$\begin{aligned}M^{n+1}&=M^n\times M=\big(u_nM+v_nI\big)\times M=u_nM^2+v_nM=u_n\big(3I-2M\big)+v_nM\\&=3u_nI-2u_nM+v_nM=(-2u_n+v_n)M+3u_nI=u_{n+1}M+v_{n+1}I.\end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n=0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad M^n=u_nM+v_nI.$$

3. a) D'après les formules de l'énoncé, je cherche une matrice A telle que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_n + v_n \\ 3u_n \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Alors en posant $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, j'obtiens bien l'égalité souhaitée. En effet,

$$A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_n + v_n \\ 3u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}.$$

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \times A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Voici les deux scripts complétés.

```
// Script 1
n=input('n=')
A=[-2,1;3,0]
C=[0;1]
C=(A^n)*C
disp(C)
```

```
// Script 2
n=input('n=')
A=[-2,1;3,0]
C=[0;1]
for k=1:n
    C=A*C
end
disp(C)
```

4. a) Je calcule le produit matriciel :

$$A \times V_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = V_1.$$

Comme V_1 est un vecteur non nul qui vérifie $AV_1 = 1V_1$, alors V_1 est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 1.
De même

$$A \times V_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3V_2.$$

Comme V_2 est un vecteur non nul qui vérifie $AV_2 = -3V_2$, alors V_2 est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre -3.

b) Je calcule le déterminant de la matrice Q : $1\times(-1)-3\times 1=-1-3=-4$.
Comme ce déterminant est non nul, alors la matrice Q est inversible et son inverse est donné par

$$Q^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

c) La matrice A possède deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.
Comme la matrice Q est construite comme juxtaposition des deux vecteurs propres de A, alors en construisant D comme la matrice diagonale composée des deux valeurs propres 1 et -3, *i.e.*

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix},$$

alors $A=QDQ^{-1}$ et donc

$$Q^{-1}AQ=Q^{-1}QDQ^{-1}Q=IDI=D,\qquad i.e.\quad D=Q^{-1}AQ.$$

d) Je raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $D^n=Q^{-1}A^nQ$.

Initialisation : Pour $n=0$,

$$D^0=I\quad\text{et}\quad QA^0Q^{-1}=QIQ^{-1}=QQ^{-1}=I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Alors, comme d'après la question précédente $A=QDQ^{-1}$,

$$A^{n+1}=A^n\times A=QD^nQ^{-1}\times QDQ^{-1}=QD^nIDQ^{-1}=QD^nDQ^{-1}=QD^{n+1}Q^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n=0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad D^n=Q^{-1}A^nQ.$$

e) Comme D est une matrice diagonale, je sais que

$$D^n=\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}.$$

Puis comme $A^n=QD^nQ^{-1}$, alors je calcule les produits :

$$QD^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & (-3)^n\\ 3 & -(-3)^n\end{pmatrix}$$

et

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & (-3)^n\\ 3 & -(-3)^n\end{pmatrix}\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+3\times(-3)^n & 1-(-3)^n\\ 3-3\times(-3)^n & 3+(-3)^n\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1-(-3)^{n+1} & 1-(-3)^n\\ 3+(-3)^{n+1} & 3+(-3)^n\end{pmatrix}.$$

En factorisant par -1, j'obtiens bien $A^n=\dfrac{-1}{4}\begin{pmatrix}-1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n\\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n\end{pmatrix}.$

f) D'après la question **3.b)**, je sais que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
En connaissant désormais la formule explicite de A^n, j'obtiens que $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{-1}{4} \times \big(-1 + (-3)^n\big) = \frac{1-(-3)^n}{4} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{-1}{4} \times \big(-3 - (-3)^n\big) = \frac{3+(-3)^n}{4}.$$

5. a) D'après la question **2.b)**, je sais que $M^n = u_n M + v_n I$.
En connaissant désormais les formules explicites de u_n et v_n, j'obtiens que

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1-(-3)^n}{4} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3+(-3)^n}{4} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1-(-3)^n}{4} + \frac{3+(-3)^n}{4} & -2 \times \frac{1-(-3)^n}{4} & \frac{1-(-3)^n}{4} \\ 2 \times \frac{1-(-3)^n}{4} & -3 \times \frac{1-(-3)^n}{4} + \frac{3+(-3)^n}{4} & 2 \times \frac{1-(-3)^n}{4} \\ -\frac{1-(-3)^n}{4} & 2 \times \frac{1-(-3)^n}{4} & \frac{3+(-3)^n}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5-(-3)^n}{4} & \frac{(-3)^n-1}{2} & \frac{1-(-3)^n}{4} \\ \frac{1-(-3)^n}{2} & (-3)^n & \frac{1-(-3)^n}{2} \\ \frac{(-3)^n-1}{4} & \frac{1-(-3)^n}{2} & \frac{3+(-3)^n}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Après exécution d'un des deux scripts de la question **3.c)**, les variables `C(1)` et `C(2)` contiennent respectivement les valeurs de u_n et v_n. Ainsi le résultat rendu par ce nouveau script sera la puissance n-ième de la matrice M, *i.e.* M^n.

Exercice 2 –

1. a) Grâce aux croissances comparées, je sais que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Graphiquement, j'en déduis que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

b) La fonction f est donnée sous la forme d'un quotient $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$. Puisque $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Comme un carré est toujours positif, pour tout $x \geqslant 1$ le dénominateur de $f'(x)$ est positif. Donc le signe du quotient est donné par celui du numérateur, à savoir $1-\ln(x)$.

c) Je résous : $1-\ln(x) \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \ln(x) \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant e^1 = e$.
Je peux désormais établir le tableau de signe de $f'(x)$ et donc le tableau de variation de f.
Je remarque aussi que $f(1) = \dfrac{\ln(1)}{1} = 0$ et $f(e) = \dfrac{\ln(e)}{e} = \dfrac{1}{e}$.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. a) Je dérive de nouveau f' pour obtenir f''. La fonction f' est donnée sous la forme d'un quotient $f' = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 1-\ln(x)$ et $v(x) = x^2$. Puisque $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$, alors

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\times x^2 - \big(1-\ln(x)\big)\times 2x}{\big(x^2\big)^2} = \frac{-x-2x+2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x\times\big(2\ln(x)-3\big)}{x^4} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}.$$

b) Pour déterminer la convexité de f, j'étudie le signe de $f''(x)$.
Pour commencer, comme $x \geqslant 1$, alors le dénominateur x^3 est toujours positif.
Donc le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $2\ln(x)-3$.
Je résous : $2\ln(x)-3 \geqslant 0 \iff 2\ln(x) \geqslant 3 \iff \ln(x) \geqslant \dfrac{3}{2} \iff x \geqslant e^{\frac{3}{2}}$.
Je peux alors en déduire que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$, car $f''(x)$ y est positif, et concave sur l'intervalle $\left[1, e^{\frac{3}{2}}\right]$.

c) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion là où la convexité de la fonction change, c'est-à-dire ici en le point d'abscisse $x = e^{\frac{3}{2}}$.
Donc le point $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$ est point d'inflexion à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. a) Le point M étant positionné sur la courbe représentative de la fonction f, ses coordonnées sont $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$ *(je reconnais le point d'inflexion).* Aussi

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}.$$

b) L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = e^{\frac{3}{2}}$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \times \left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + f\left(e^{\frac{3}{2}}\right).$$

Or $\quad f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} \quad$ et

$$f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1 - \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{e^{2\times\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{e^3} = -\frac{1}{2e^3}.$$

Alors l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times \left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{2e^3} + \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2e^3} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{2e^3} + \frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}},$$

qui se ramène à

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times x + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

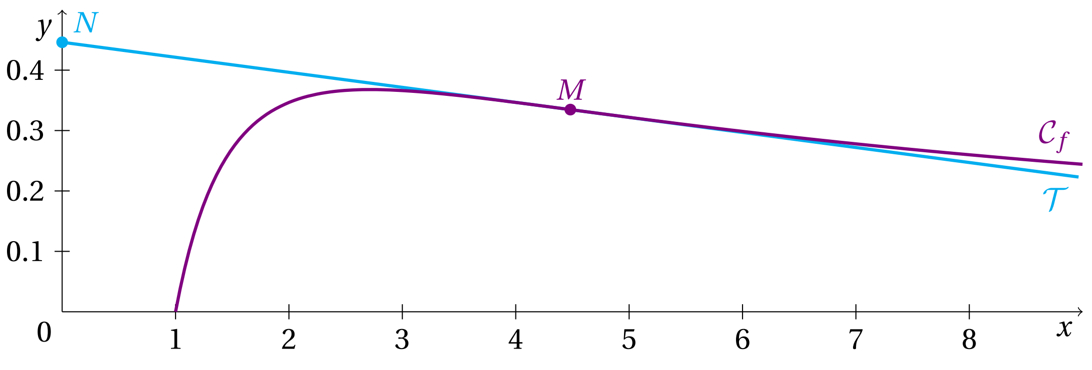
c) L'axe des ordonnées correspond à l'ensemble des points (x, y) dont l'abscisse est $x = 0$. Comme les points de la tangente $(\mathcal{T})$ vérifient l'équation $y = -\dfrac{1}{2e^3} \times x + \dfrac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$, je peux trouver quelle est l'ordonnée du point d'abscisse $x = 0$ sur la tangente $(\mathcal{T})$:

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times 0 + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi le point d'intersection N de la tangente $(\mathcal{T})$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

d) Comme M est le point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$, alors je conclus que par définition, la tangente est au dessus de la courbe sur l'intervalle $\left[1, e^{\frac{3}{2}}\right]$, là où f est concave, puis en dessous de la courbe sur l'intervalle $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$, là où f est convexe.

4. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente $\mathcal{T}$.



5. a) Soit $A \geqslant 1$. Je cherche à calculer $I(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. Je commence par chercher une primitive à $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Je remarque que f est de la forme $f = u' \times u$ avec $u(x) = \ln(x)$, puisqu'alors $u'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi une primitive de f est donnée par $F(x) = \frac{u(x)^2}{2} = \frac{\ln(x)^2}{2}$.
Finalement

$$I(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} = \frac{\ln(A)^2}{2}.$$

b) Par définition, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si la limite $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ existe et est finie.
Or $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = I(A) = \frac{\ln(A)^2}{2}$ donc sa limite lorsque A tend vers $+\infty$ existe et vaut $+\infty$.
J'en déduis donc que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge vers $+\infty$.

6. a) Soit $A \geqslant 1$. Je cherche à calculer $J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Je pose

$$u'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad u(x) = -\frac{1}{x}$$
$$v(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Alors par intégration par parties,

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\ln(A)}{A} + \frac{\ln(1)}{1} + \int_1^A \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\ln(A)}{A} + 0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + \frac{1}{1}$$

J'ai bien montré que $J(A) = \frac{-\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1$.

b) Par croissances comparées, je sais que $\lim_{A\to+\infty} \frac{\ln(A)}{A} = 0$. Comme $\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A} = 0$ aussi, j'en déduis par somme que

$$\lim_{A\to+\infty} J(A) = -0 - 0 + 1 = 1.$$

7. a) La fonction g est définie en deux morceaux :
Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, $g(x) = 0$ donc la fonction g est continue car constante.
Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ donc la fonction g est continue comme quotient de fonctions continues. Il ne reste plus qu'à étudier la continuité en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0$$

Comme la limite à gauche de g en 1 est égale à la limite à droite de g en 1,
j'en déduis que la fonction g est continue en 1. Finalement g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) J'ai déjà montré à la question précédente que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.
Aussi, sur l'intervalle $\left]-\infty,1\right[$, $g(x)=0\geqslant 0$ et sur l'intervalle $\left[1,+\infty\right[$, $g(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}\geqslant 0$ car $x^2>0$ et $\ln(x)\geqslant 1$ dès lors que $x\geqslant 1$. Donc la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$.
Il ne reste plus qu'à montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.
Je décompose, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Je sais que $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0 car la fonction sous l'intégrale est nulle.
Et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est la limite de $J(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.
Donc cette intégrale converge et vaut 1 par la question **6.b)**.
Finalement, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=0+1=1.$$

Donc la fonction g est bien une densité de probabilité.

c) Voici le script complété.

```
1 function y=g(x)
2   if x>=1 then
3     y=log(x)/(x∧2)
4   else
5     y=0
6   end
7 endfunction
8 x=linspace(-4,8,100)
9 plot(x,g)
```

d) L'exécution des lignes 8 et 9 du script précédent permet de tracer une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $\left[-4,8\right]$.

8. a) La fonction de répartition G de X est donnée par $\displaystyle G(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.
Je raisonne par disjonction de cas :

- si $x<1$, alors $\displaystyle G(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t=0$,
- si $x\geqslant 1$, alors $\displaystyle G(x)=\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}\frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t=J(x)=\frac{-\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}+1$.

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$G(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1,\\ 1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si } x\geqslant 1.\end{cases}$$

b) Je cherche $P\big([X>e^2]\big)$:

$$P\big([X>e^2]\big)=1-P\big([X\leqslant e^2]\big)=1-G\left(e^2\right)=1-\left(1-\frac{1}{e^2}-\frac{\ln\left(e^2\right)}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^2}=\frac{3}{e^2}.$$

Puis par la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[X>e]}\big([X>e^2]\big)=\frac{P\big([X>e]\cap[X>e^2]\big)}{P\big([X>e]\big)}=\frac{P\big([X>e^2]\big)}{P\big([X>e]\big)}.$$

J'ai besoin de $P\big([X>e]\big)=1-P\big([X\leqslant e]\big)=1-G(e)=1-\left(1-\frac{1}{e}-\frac{\ln(e)}{e}\right)=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}$.
Donc

$$P_{[X>e]}\big([X>e^2]\big)=\frac{\frac{3}{e^2}}{\frac{2}{e}}=\frac{3}{e^2}\times\frac{e}{2}=\frac{3}{2e}.$$

c) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Or $xg(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ et j'ai montré à la question **5.b)** que l'intégrale de cette fonction entre 1 et $+\infty$ diverge. Donc la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.

Exercice 3 –

Partie A

1. a) La variable aléatoire X est à valeurs entières. Donc l'événement $[X > n-1]$ correspond à toutes les valeurs entières strictement supérieures à $n-1$, *i.e.* n, $n+1$ et toutes les valeurs entières supérieures. En mettant en avant la valeur n, je peux alors décomposer l'événement $[X > n-1]$ en les événements incompatibles $[X = n]$ et $[X > n]$, qui correspond à toutes les valeurs strictement supérieures à n.
Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n].$$

b) Par la relation obtenue à la question précédente, je sais que
$$P\big([X > n-1]\big) = P\big([X = n] \cup [X > n]\big) = P\big([X = n]\big) + P\big([X > n]\big)$$
puisque les deux événements sont incompatibles. Comme $u_n = P\big([X > n]\big)$, alors de même $u_{n-1} = P\big([X > n-1]\big)$ et l'équation précédente se réécrit $u_{n-1} = P\big([X = n]\big) + u_n$, *i.e.* pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n-1} - u_n = P\big([X = n]\big).$$

2. a) Je suis cette fois en présence de probabilités conditionnelles, supposant que l'événement $[X > n-1]$ est vérifié. Immédiatement $P_{[X>n-1]}\big([X > n-1]\big) = 1$ puisqu'il s'agit de la probabilité de l'événement que je suppose. Puis, par un raisonnement similaire à celui de la question **1.b)**, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$1 = P_{[X>n-1]}\big([X = n] \cup [X > n]\big) = P_{[X>n-1]}\big([X = n]\big) + P_{[X>n-1]}\big([X > n]\big).$$
Autrement dit,
$$P_{[X>n-1]}\big([X > n]\big) = 1 - P_{[X>n-1]}\big([X = n]\big).$$

b) L'énoncé donne : $P_{[X>n-1]}\big([X = n]\big) = \dfrac{2}{5}$.
Donc la formule de la question précédente se réécrit $P_{[X>n-1]}\big([X > n]\big) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$.
Puis, par la formule des probabilités composées, j'obtiens que
$$u_n = P\big([X > n]\big) = P\big([X > n-1]\big) \times P_{[X>n-1]}\big([X > n]\big) = u_{n-1} \times \frac{3}{5}.$$
J'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{3}{5} u_{n-1}.$$

c) Grâce à la question précédente, je reconnais en $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique, de raison $q = \dfrac{3}{5}$ et de premier terme $u_0 = 1$. Alors la formule explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par
$$u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

3. a) Grâce à la question **1.b)**, je sais que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P\big([X = n]\big) = u_{n-1} - u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \frac{2}{5}.$$
J'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P\big([X = n]\big) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

b) Je remarque que $P\big([X=n]\big)=\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}=p\left(1-p\right)^{n-1}$ pour $p=\dfrac{2}{5}$.

Je reconnais là la formule des probabilités d'une loi géométrique de paramètre $p=\dfrac{2}{5}$.

c) Comme la variable aléatoire X suit une loi géométrique, alors

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}\quad \text{et}\quad V(X)=\frac{1-p}{p^2}=\frac{\frac{3}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}\times\frac{5^2}{2^2}=\frac{3\times 5}{4}=\frac{15}{4}.$$

Partie B

4. a) Voici le script complété.

```
function X=geom()
    X=1
    while rand()>2/5
        X=X+1
    end
endfunction
```

b) Voici le script complété.

```
function Z=simulZ()
    X1=geom()
    X2=geom()
    if X1>X2 then
        Z=X1
    else
        Z=X2
    end
endfunction
```

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme X_1 suit la même loi que X, alors en me resservant de la question **2.c)**,

$$P\big([X_1\leqslant n]\big)=1-P\big([X_1>n]\big)=1-P\big([X>n]\big)=1-u_n=1-\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

6. a) La variable aléatoire Z est égale à la durée de vie de l'appareil, qui elle-même correspond à la durée de vie maximale des deux composants. Ainsi la durée de vie de l'appareil est inférieure ou égale à n si et seulement si les durées de vie des deux composants sont elles mêmes inférieures ou égales à n, *i.e.* pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$[Z\leqslant n]=\big[\max(X_1,X_2)\leqslant n\big]=[X_1\leqslant n]\cap[X_2\leqslant n].$$

b) Grâce à la relation établie à la question précédente, et puisque les variables aléatoires X_1 et X_2 sont identiques et indépendantes, alors pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$P\big([Z\leqslant n]\big)=P\big([X_1\leqslant n]\cap[X_2\leqslant n]\big)=P\big([X_1\leqslant n]\big)\times P\big([X_2\leqslant n]\big)=P\big([X_1\leqslant n]\big)^2.$$

Puis grâce au résultat de la question **5.**, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$P\big([Z\leqslant n]\big)=\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^2=1-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^{2\times n}=1-2\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{9}{25}\right)^n.$$

c) Pour des raisons similaires à celles utilisées dans la question **1.**, l'égalité d'événements $[Z \leqslant n] = [Z = n] \cup [Z \leqslant n-1]$ est vérifiée et donc

$$P\big([Z \leqslant n]\big) = P\big([Z = n]\big) + P\big([Z \leqslant n-1]\big) \iff P\big([Z = n]\big) = P\big([Z \leqslant n]\big) - P\big([Z \leqslant n-1]\big).$$

Alors avec les valeurs de la question précédente, j'obtiens que

$$\begin{aligned} P\big([Z = n]\big) &= P\big([Z \leqslant n]\big) - P\big([Z \leqslant n-1]\big) \\ &= \left(1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{9}{25}\right)^n\right) - \left(1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\right) \\ &= (1-1) - 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \left(\frac{3}{5} - 1\right) + \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \times \left(\frac{9}{25} - 1\right) \\ &= 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \frac{2}{5} + \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{16}{25}\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\big([Z = n]\big) = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

7. Les deux séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{9}{25}\right)^n$ sont des séries géométriques, de raisons $\frac{3}{5}$ et $\frac{9}{25}$.
Dans les deux cas, comme la raison est strictement comprise entre 0 et 1, la série converge.
Et pour tout $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} P\big([Z = n]\big) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\right) = \frac{4}{5}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} - \frac{16}{25}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{9}{25}\right)^{n}. \end{aligned}$$

Et par convergence des séries géométriques citées précédemment, toutes les sommes partielles écrites ici convergent et j'obtiens

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([Z = n]\big) &= \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} - \frac{16}{25}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{25}\right)^{n} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{1-\frac{3}{5}} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{1-\frac{9}{25}} \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{\frac{2}{5}} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} - \frac{16}{25} \times \frac{25}{16} = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\big([Z = n]\big) = 1.$$

8. a) Pour vérifier cette égalité, je cherche d'abord à exprimer chacun des termes : d'après la question **6.c)**,

$$P\big([Z = n]\big) = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

Et comme X_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{5}$ et que Y suit une loi géométrique de paramètre $p' = \frac{16}{25}$, alors

$$P\big([X_1 = n]\big) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad P\big([Y = n]\big) = p' \times (1-p')^{n-1} = \frac{16}{25} \times \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

En rassemblant les morceaux et en multipliant par n, j'obtiens bien l'égalité souhaitée :

$$nP\big([Z = n]\big) = 2nP\big([X_1 = n]\big) - nP\big([Y = n]\big).$$

b) La variable Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} nP\big([Z=n]\big)$ converge.

Or pour tout $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} nP\big([Z=n]\big) &= \sum_{n=1}^{N}\Big(2nP\big([X_1=n]\big) - nP\big([Y=n]\big)\Big)\\ &= 2\times\left(\sum_{n=1}^{N} nP\big([X_1=n]\big)\right) - \left(\sum_{n=1}^{N} nP\big([Y=n]\big)\right)\end{aligned}$$

Et comme les variables aléatoires X_1 et Y suivent des lois géométriques, elles admettent toutes deux des espérances, ce qui me permet d'établir la convergence des deux sommes partielles ici présentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP\big([X_1=n]\big) \text{ existe et vaut } E(X_1) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nP\big([Y=n]\big) \text{ existe et vaut } E(Y).$$

J'en déduis donc que la série $\sum_{n\geqslant 1} nP\big([Z=n]\big)$ converge,
i.e. que la variable aléatoire Z admet un espérance et que

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP\big([Z=n]\big) = 2E(X_1) - E(Y) = 2\times\frac{1}{\frac{2}{5}} - \frac{1}{\frac{16}{25}} = 2\times\frac{5}{2} - \frac{25}{16} = \frac{80-25}{16} = \frac{55}{16}.$$

Ainsi j'ai montré que

$$E(Z) = \frac{55}{16}.$$