ECRICOME 2023

Exercice 1 –

Partie 1

1. Voici la fonction Python complétée :

```
import numpy as np

def suite(n,u1):
    u=u1
    for k in range(1,n):
        u=u*5/12+1/3
    return(u)
```

2. a) Je résous l'équation demandée :

$$x=\frac{5}{12}x+\frac{1}{3} \iff x-\frac{5}{12}x=\frac{1}{3} \iff \frac{7}{12}x=\frac{1}{3} \iff x=\frac{1}{3}\times\frac{12}{7}=\frac{4}{7}.$$

b) Soit $n \geqslant 1$. J'exprime v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-\ell=\frac{5}{12}u_n+\frac{1}{3}-\ell=\frac{5}{12}\times\left(v_n+\ell\right)+\frac{1}{3}-\ell \\ &= \frac{5}{12}v_n+\frac{5}{12}\times\ell+\frac{1}{3}-\ell=\frac{5}{12}v_n, \end{aligned}$$

puisque ℓ est une solution de $x=\frac{5}{12}x+\frac{1}{3}$, *i.e.* $\frac{5}{12}\times\ell+\frac{1}{3}-\ell=0$.

Ainsi j'ai bien montré que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique, de raison $q=\frac{5}{12}$.

c) Comme la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique, de raison $q=\frac{5}{12}$ et de premier terme v_1, alors son expression explicite est donnée par

$$\forall n\geqslant 1,\quad v_n=v_1\times\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

d) Enfin, comme pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=v_n+\ell$ et que $v_1=u_1-\ell$, alors

$$u_n=v_1\times\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}+\ell=\left(u_1-\ell\right)\times\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}+\ell=\left(u_1-\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}.$$

Partie 2

3. a) Je calcule les produits matriciels AX_1 et AX_2 :

$$AX_1=\begin{pmatrix}9&4\\3&8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36+12\\12+24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48\\36\end{pmatrix}=12\times\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=12\times X_1,$$

$$AX_2=\begin{pmatrix}9&4\\3&8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9+4\\-3+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}=5\times\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=5\times X_2.$$

b) D'après la question précédente, comme X_1 est une matrice colonne non nulle telle que $AX_1 = 12X_1$, alors 12 est une valeur propre de la matrice A, associée au vecteur propre X_1. De même, comme X_2 est une matrice colonne non nulle telle que $AX_2 = 5X_2$, alors 5 est une valeur propre de la matrice A, associée au vecteur propre X_2.

4. Comme il s'agit d'une matrice carrée de taille 2, je calcule le déterminant de la matrice P :

$$\det(P) = 4 \times 1 - 3 \times (-1) = 4 + 3 = 7 \neq 0.$$

Comme le déterminant est non nul, alors la matrice P est inversible
et la matrice inverse est donnée par

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 1 & -(-1) \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = Q.$$

5. J'effectue le produit matriciel PDP^{-1} dans le but de retrouver la matrice A :

$$P \times D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$$

$$PD \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 48+15 & 48-20 \\ 36-15 & 36+20 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = A.$$

Finalement j'ai bien montré que $A = PDP^{-1}$.

6. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_2 \quad \text{et} \quad PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

7. a) Je calcule le produit :

$$P^{-1}X = QX = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Grâce à la question **6.**, je sais que $A^nX = PD^nP^{-1}X$. Je connais $P^{-1}X$
et comme la matrice D est diagonale, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

Finalement je termine le produit matriciel : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n \times P^{-1}X = \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 12^n \\ 5^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = P \times D^nP^{-1}X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 12^n \\ 5^n \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12^n - 5^n \\ 3 \times 12^n + 5^n \end{pmatrix}.$$

Partie 3

8. b_1 correspond à la probabilité qu'il pleuve la premier jour. Or il fait beau le jour 1.
Donc $\quad b_1 = 0$.
Puis comme il faut beau le jour 1, la probabilité qu'il fasse beau le jour 2 est $\frac{3}{4}$.
Ainsi $\quad a_2 = \frac{3}{4} \quad$ et $\quad b_2 = 1 - a_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

9. a) D'après la formule des probabilités totales, comme $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(A_{n+1}) = P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap A_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}).$$

La probabilité qu'il fasse beau le jour $n+1$ s'il fait beau le jour n est $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}$
et la probabilité qu'il fasse beau le jour $n+1$ s'il pleut le jour n est $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
Ainsi j'obtiens bien que

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times \frac{3}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).$$

De la même manière, j'obtiens aussi que

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + P(B_n) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n). \end{aligned}$$

b) Je calcule le produit $M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans le but de retrouver les expressions de a_{n+1} et b_{n+1} :

$$M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \times \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \times \begin{pmatrix} 9a_n + 4b_n \\ 3a_n + 8b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{9a_n + 4b_n}{12} \\ \dfrac{3a_n + 8b_n}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

Finalement j'ai bien montré que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

c) Comme $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements, en particulier les deux événements sont contraires l'un de l'autre et

$$a_n + b_n = P(A_n) + P(B_n) = 1.$$

10. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Et grâce à la question **9.b)**,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Comme $M = \dfrac{1}{12}A$, alors pour tout $n \geqslant 1$, $M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12^{n-1}}A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12^{n-1}}A^{n-1}X$.
Or cette matrice ayant été calculée dans la partie précédente, j'en déduis que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12^{n-1}} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12^n - 5^n \\ 3 \times 12^n + 5^n \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12 - 5 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} \\ 3 \times 12 + 5 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{1}{7}\left(48 - 5 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{7}\left(36 + 5 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}\right).$$

11. a) D'après la question **9.a)**, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$ et d'après la question **9.c)**, $b_n = 1 - a_n$.
Alors en combinant ces deux équations, j'obtiens bien que

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3} \times (1 - a_n) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)a_n + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}.$$

b) La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ étudiée dans cette partie vérifie bien la définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ étudiée dans la Partie 1, avec $u_1 = a_1 = 1 \in [0,1]$. Alors en me servant du résultat de la question **2.d)** avec $u_1 = 1$, j'obtiens bien que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_n = \left(1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7} = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}.$$

c) Enfin j'obtiens aussi que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$b_n = 1 - a_n = 1 - \left(\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}\right) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

12. Comme $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} = 0$. Alors par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{3}{7} - 0 = \frac{3}{7}.$$

13. a) Je cherche $P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_9 \cap B_{10}\big)$. Par la formule des probabilités composées, et comme le temps ne dépend que de celui de la veille,

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_9 \cap B_{10}\big) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_8}(A_9) \times P_{A_9}(B_{10})$$
$$= 1 \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \frac{1}{4} = \frac{3^8}{4^9}.$$

b) Je cherche $P\big(B_{10}\big)$. Or

$$P\big(B_{10}\big) = b_{10} = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{10-1} = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{9} = \frac{3}{7}\left(1 - \frac{5^9}{12^9}\right).$$