# EXERCICES — CHAPITRE 14

**Exercice 1 –** Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_0^1 e^{3x}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \int_1^e \frac{-2}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \int_{-2}^2 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \int_1^2 \frac{1}{4x}\,\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \int_0^1 e^{2x} + \frac{e^x}{4}\,\mathrm{d}x$

**Exercice 2 –** Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $I_6 = \int_0^1 te^{2t}\,\mathrm{d}t$
2. $I_7 = \int_1^2 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$
3. $I_8 = \int_0^1 (x^2+1)e^{3x}\,\mathrm{d}x$
4. $I_9 = \int_1^e x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$

**Exercice 3 –** L'objectif est de calculer les intégrales $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$.

1. **Calcul de $I$.** Soit $f$ la fonction définie sur $[0,1]$ par
$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).$$
   (a) Calculer la dérivée de $f$.
   (b) En déduire la valeur de $I$.
2. **Calcul de $J$ et $K$.**
   (a) Sans calculer explicitement les intégrales $J$ et $K$, vérifier que $J+2I=K$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur $K$, montrer que $K=\sqrt{3}-J$.
   (c) En déduire les valeurs de $J$ et $K$.

**Exercice 4 –** Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_1^e \left(\ln(x)\right)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I_0$ et $I_1$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)$ et montrer qu'elle converge. Soit $\ell$ sa limite.
3. Montrer que $\forall n\in\mathbf{N},\quad I_{n+1} = e-(n+1)I_n$.
4. En déduire la valeur de $\ell$.

**Exercice 5 –** Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, on a
$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n.$$
2. Calculer $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$ puis en déduire que $0\leqslant I_n\leqslant \frac{1}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n)$.
4. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1$.
5. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose $J_n = nI_n$.
   (a) Montrer que $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.
   *(<u>Indication</u> : Penser à une intégration par parties.)*
   (b) Montrer que
$$\forall t\geqslant 0,\quad 0\leqslant \ln(1+t)\leqslant t.$$
   (c) En déduire la limite de la suite $(J_n)$.

**Exercice 6 –** Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on considère les intégrales
$$I_n = \int_0^1 x^n\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Calculer $J_1$.
   (b) Montrer que
$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad 0\leqslant J_n\leqslant \frac{1}{n+1}.$$
   (c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$.
2. (a) En intégrant par parties, montrer que
$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}.$$
   (b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.