9 Compléments sur les suites

I – Propriétés éventuelles d'une suite

1 – Suites monotones

Définition 9.1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1},$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1},$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1},$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1},$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Méthode 9.2 – Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante
Pour établir qu'une suite est monotone, on peut :

1. Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. En effet, on sait que
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0,$$
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$
2. Comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 **lorsque tous les termes sont strictement positifs.**
En effet, on sait que
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1.$$

Exemple 9.3 –

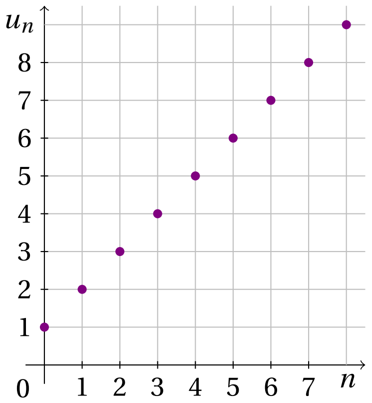
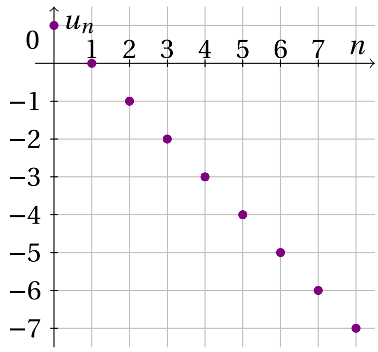
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $\quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ est strictement croissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ est strictement croissante.

Méthode 9.4 – Variations des suites usuelles

- **Cas des suites arithmétiques.**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r.$$

  La monotonie de la suite dépend donc du signe de r :
  - ▷ Si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
  - ▷ Si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

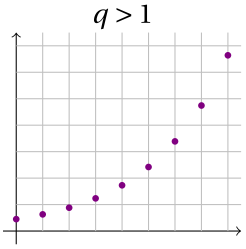
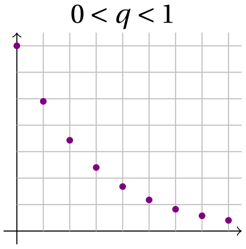
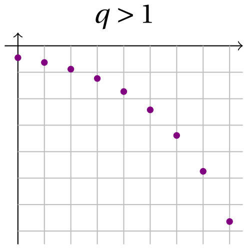
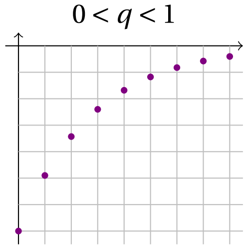
Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.	Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
	

- **Cas des suites géométriques.**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n \times (q-1).$$

  La monotonie de la suite dépend des signes de u_0, de q^n et de $(q-1)$.

  1. Si $q < 0$, alors q^n est positif lorsque n est pair et négatif lorsque n est impair, donc la suite n'est pas monotone. On parle de suite *alternée.*
  2. Si $q > 0$, alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon les cas :
     - ▷ Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est croissante *(les termes grandissent, dans le positif).*
     - ▷ Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite est décroissante *(les termes rapetissent, dans le positif).*
     - ▷ Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite est décroissante *(les termes grandissent, dans le négatif).*
     - ▷ Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, la suite est croissante *(les termes rapetissent, dans le négatif).*

$u_0 > 0$		$u_0 < 0$	
$q > 1$	$0 < q < 1$	$q > 1$	$0 < q < 1$
			

Exemple 9.5 – Déterminer le sens de variation des suites suivantes, définies par la donnée d'un terme initial et d'une relation de récurrence.

1. $u_0 = 7 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 4.$

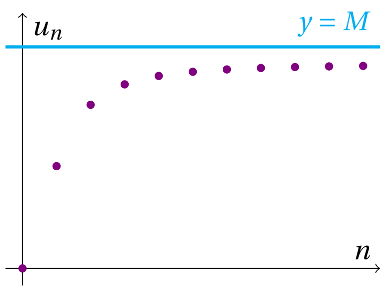
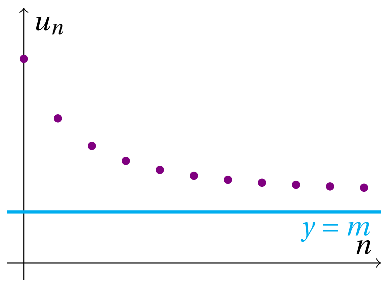
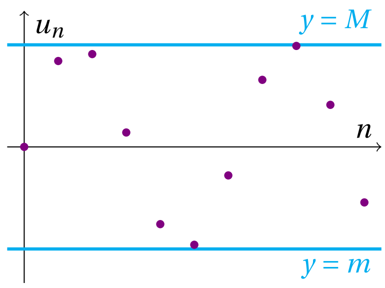
2. $v_1 = -3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = 5v_n.$

2 – Suite majorée/minorée/bornée

Définition 9.6 – Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et m et M deux réels. On dit que

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** par M lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M.$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** par m lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m.$$

Enfin la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée **et** minorée.

<table>
<tr><td>La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.</td><td>La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.</td><td>La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Méthode 9.7 – Montrer qu'une suite est majorée/minorée/bornée
Pour montrer qu'une suite est majorée, on opère de la même façon que pour une fonction : on étudie le signe de $u_n - M$ pour tout n et on montre que $u_n - M \leqslant 0$.
De la même manière, on étudie le signe de $u_n - m$ pour tout n et on montre que $u_n - m \geqslant 0$ pour prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par m.

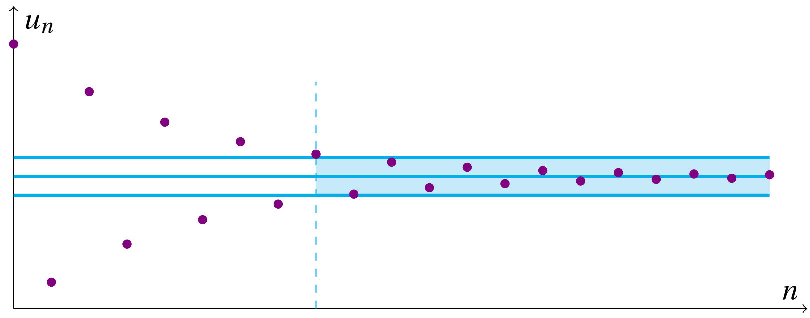
Exemple 9.8 – Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}$ est majorée par 3.

II – Limite d'une suite réelle

1 – Limite finie

Définition 9.9 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour **limite** le réel ℓ signifie que le terme u_n devient arbitrairement proche du réel ℓ pourvu que n soit suffisamment grand. On écrit alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite **convergente**.



Graphiquement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang. La distance entre les termes de la suite et sa limite tend à s'annuler, ce qui se traduit par le résultat suivant.

Proposition 9.10

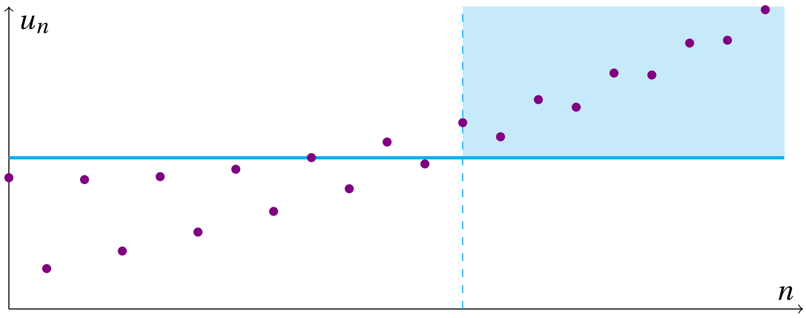
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$.

Exemple 9.11 – Montrer que la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ tend vers 1 en $+\infty$.

2 – Limite infinie

Définition 9.12 –

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet une limite** égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si le terme u_n prend des valeurs **positives** arbitrairement grandes, pourvu que n soit suffisamment grand. On écrit alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet une limite** égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si le terme u_n prend des valeurs **négatives** arbitrairement grandes, pourvu que n soit suffisamment grand. On écrit alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$
- Une suite qui admet une limite infinie est dite **divergente**.



Graphiquement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]a,+\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

Exemple 9.13 – Montrer que la suite définie $\forall n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Remarque 9.14 –

- Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet donc pas de limite. On parle là aussi de suite **divergente**.
- En revanche, si une suite converge vers un réel ℓ ou diverge vers $\pm\infty$, alors cette limite est **unique**.
- Tous les résultats concernant les opérations sur les limites vus au Chapitre 7 concernant les fonctions restent valables pour les suites.

Proposition 9.15

Le tableau suivant donne la limite de q^n, si celle-ci existe, en fonction des valeurs de q :

	$q>1$	$q=1$	$q\in\,]-1,1[$	$q\leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	*Pas de limite*

Méthode 9.16 – Limites des suites usuelles

- **Cas des suites arithmétiques.**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{et} \quad u_n = u_0 + n\times r.$$

  La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend donc du signe de r.

  1. Si $r>0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  2. Si $r<0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- **Cas des suites géométriques.**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors

$$u_{n+1} = q\times u_n \quad \text{et} \quad u_n = u_0\times q^n.$$

  L'existence d'une limite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend donc de la valeur de q.

1. Si $q < -1$, alors la suite est alternée et n'admet pas de limite.
2. Si $-1 < q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. Si $q > 1$, alors la suite est monotone donc elle admet une limite qui dépend cette fois du signe de u_0 :
   - ▷ Si $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   - ▷ Si $u_0 < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Les graphiques de la Méthode 9.4 montrent les différentes limites possibles dans le cas où $q > 0$.

Exemple 9.17 – Déterminer les limites des suites suivantes, définies par récurrence.

1. $u_0 = 7 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 4$.

2. $v_1 = -3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = 5v_n$.

III – Passage à la limite et relation d'ordre

1 – Théorèmes de majoration/minoration

Théorème 9.18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$.

- Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi et
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$
- Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

Exemple 9.19 – Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \left(2 + (-1)^n\right) n$.

2 – Théorème d'encadrement

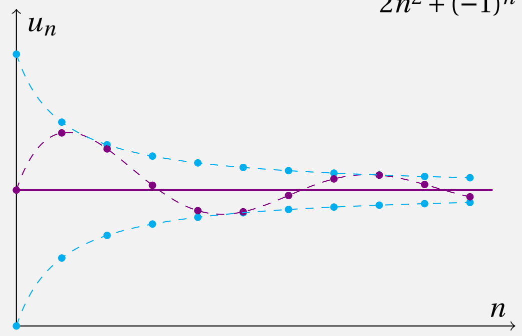
Théorème 9.20 – Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Exemple 9.21 – Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{2n^2 + (-1)^n}$.



(Le graphe n'est pas celui de la suite (u_n) mais est plus visuel.)

3 – Fonctions monotones

Théorème 9.22 – Théorème de la limite monotone

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Corollaire 9.23

En conséquence du théorème de limite monotone,

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante qui n'est pas majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui n'est pas minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Méthode 9.24 – Étudier la convergence d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier la convergence d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$:

1. On commence par étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant la Méthode 9.2.
2. On montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ou minorée en utilisant la Méthode 9.7.
3. On applique le théorème de la limite monotone (Théorème 9.22) :
   - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors elle converge.
   - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors elle converge.
4. Enfin, pour déterminer la limite ℓ, on utilise le fait que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ pour obtenir une équation du type $f(\ell) = \ell$ que l'on résout ensuite pour trouver ℓ.

Les différentes étapes de cette étude sont le plus souvent guidées par les questions de l'énoncé.

Exemple 9.25 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Déterminer sa limite ℓ.