Exercices — Chapitre 11

Exercice 1 – Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
4. $f(x) = (7x+1)^8$
5. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 2 – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$.

1. $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{2}$
2. $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3} + 1$

Exercice 3 – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$.

1. $f(x) = 3x + \dfrac{3}{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$

Exercice 4 – Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x - 1$ et $F\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
2. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + \dfrac{1}{2}$ et $F(1) = 0$.
3. f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2} + 1$ et $F(1) = 2$.
4. f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x^2}$ et $F(1) = -\dfrac{1}{4}$.
5. f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $F(1) = 1$.

Exercice 5 – Soient F et G les fonctions définies sur $]-1, +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et $G(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x+1}$. Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1, +\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

Exercice 6 – Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{(2x^2+x-1)^2}$.

Montrer que la fonction G définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $G(x) = \dfrac{2x^2}{2x^2+x-1}$ est une primitive de la fonction f.

Exercice 7 – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f.

1. f est définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{3}{(2x-1)^3}$.
2. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x+1)(x^2+2x-3)^3$.
3. f est définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$.
4. f est définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{4}{(1-2x)^2}$.

Exercice 8 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x + 1\right) \mathrm{d}x$,
2. $B = \displaystyle\int_{2}^{6} \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{x^2} - 1\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 9 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{3} (x^3 + x - 2)\, \mathrm{d}x$,
2. $I_2 = \displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\, \mathrm{d}x$,
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \dfrac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 10 – Montrer que la fonction F définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{(x-1)^2}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_2^3 \frac{x^2 - 5x + 1}{(x-1)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Exercice 11 – Montrer que la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = 12x^2(x^3+1)^3$ est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = (x^3+1)^4.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^1 (x^3+1)^4 \, \mathrm{d}x.$$