10 | Variables aléatoires réelles

I – Généralités sur les variables aléatoires

1 – Définitions et exemples

Quand on étudie une probabilité, l'univers Ω (l'ensemble des résultats possibles) n'est pas forcément composé d'objets mathématiques : par exemple $\{\text{PILE}, \text{FACE}\}$. Dans ce cas, à chaque issue, on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$. On peut par exemple considérer le gain obtenu à l'issu d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.

Définition 10.1 – Une **variable aléatoire** X est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
On appelle **support** de X et on note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Exemple 10.2 – Tout au long de ce chapitre, on s'appuie sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées :

1. Un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on tire le numéro 1 on gagne 4€, si on tire un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain (algébrique).
X est une variable aléatoire et son support est donné par
$$X(\Omega) =$$
2. On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des deux résultats obtenus.
X est une variable aléatoire et son support est donné par
$$X(\Omega) =$$

2 – Événements associés à une variable aléatoire

Définition 10.3 – Soient X une variable aléatoire sur Ω et $x \in \mathbb{R}$. On note
$$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$
Il s'agit de l'ensemble des issues de l'univers dont l'image par la variable aléatoire X est x.
De la même manière, on définit
$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}, \qquad [X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$
$$[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}, \qquad [X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}.$$
Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors on note
$$[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega \mid x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}.$$
Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbb{R}$, on note
$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}.$$

Exemple 10.4 – Calculer $P\big([X=3]\big)$ et $P\big([X\leqslant 2]\big)$ dans les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1.

2.

Proposition 10.5

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Alors $\big\{[X=x] \mid x\in X(\Omega)\big\}$, ensemble des événements $[X=x]$ pour toutes les valeurs x du support $X(\Omega)$, forme un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\big)=1.$$

Exemple 10.6 – On reprend les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. Un système complet d'événements est donné par
2. Un système complet d'événements est donné par

Remarque 10.7 – Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P\big([X=x]\big)$ en $P(X=x)$ et de même pour les autres ensembles.

3 – Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 10.8 – Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi** de la variable aléatoire X la donnée de toutes les probabilités $P(X=x)$ pour tous les réels $x\in X(\Omega)$.

Méthode 10.9 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

1. On détermine le support $X(\Omega)$, *i.e.* l'ensemble des valeurs prises par X.
2. On calcule la probabilité $P(X=x)$ pour tout $x\in X(\Omega)$.

On résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec sur la première ligne l'ensemble des valeurs prises par X et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

Exemple 10.10 – On reprend les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1.

2.

Remarque 10.11 – On n'oublie pas de vérifier **à chaque fois** que la somme des probabilités inscrites dans le tableau fait 1.

4 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition 10.12 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X et on note F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Les valeurs prises par F_X sont des probabilités donc **toujours** comprises entre 0 et 1.

Proposition 10.13

Soit X une variable aléatoire finie. On note le support $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Alors

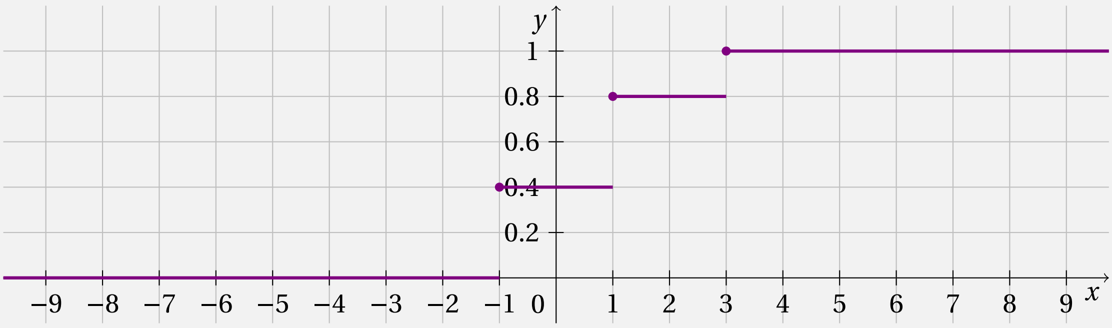
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \quad x < x_1, \\ P(X = x_1) & \text{si } x_1 \leqslant x < x_2, \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) & \text{si } x_2 \leqslant x < x_3, \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_k) & \text{si } x_k \leqslant x < x_{k+1}, \qquad (\text{pour } 3 \leqslant k \leqslant n-1) \\ 1 & \text{si } x_n \leqslant x. \end{cases}$$

En particulier F_X est constante sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$, c'est-à-dire entre deux valeurs consécutives du support.

Exemple 10.14 – Calculer la fonction de répartition de X dans les deux exemples de l'Exemple 10.2.

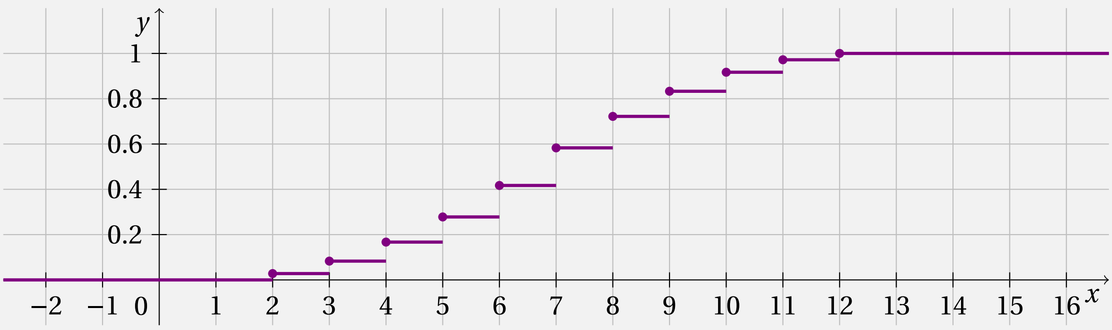
1.

Et voici le tracé de la fonction de répartition :



2.

Et voici le tracé de la fonction de répartition :



Proposition 10.15

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X. Autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

II – Moments d'une variable aléatoire finie

1 – Espérance

Définition 10.16 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont le support est noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On appelle **espérance** de X le réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n.$$

Remarque 10.17 –

- L'espérance $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs x_i affectées des fréquences p_i.
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $E(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois. Le signe de $E(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre. Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est **équitable**.

Exemple 10.18 – Calculer l'espérance de X pour chacun des deux exemples de l'Exemple 10.2.

1.

2.

Proposition 10.19 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires finies définies sur Ω et a et b deux réels. Alors

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX+b) = aE(X) + b.$$

Exemple 10.20 – On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.
Soient g la fonction définie par $g(x) = 2x+3$ et $Y = g(X) = 2X+3$. Déterminer l'espérance de Y.

Théorème 10.21 – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire finie. On note le support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i).$$

Exemple 10.22 – On considère la fonction $g(x) = x^2$. Calculer $E\big(g(X)\big)$ pour chacun des deux exemples de l'Exemple 10.2.

1.

2.

Remarque 10.23 –

- Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.
- Ce théorème est principalement utilisé pour calculer $E\big(X^2\big)$, l'espérance du carré d'une variable aléatoire, quantité nécessaire au calcul de la variance de X en utilisant la formule de König-Huygens.

2 – Variance

Définition 10.24 – Soit X une variable aléatoire finie.

- On appelle **variance** de X le réel, noté $V(X)$, défini par

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - E(X)\big)^2 P(X = x_i).$$

- On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque 10.25 – La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Théorème 10.26 – Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire finie. Alors

$$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2.$$

Méthode 10.27 – Calculer la variance d'une variable aléatoire

1. On calcule $E(X^2)$ grâce au théorème de transfert.
2. Puis on utilise la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple 10.28 – Calculer la variance $V(X)$ pour les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1.

2.

Proposition 10.29

Soient X une variable aléatoire finie et a et b deux réels. Alors

$$V(aX+b) = a^2V(X).$$

En particulier

$$V(X+b) = V(X).$$

Remarque 10.30 – Contrairement à l'espérance, la variance **N'**est **PAS** linéaire.

Exemple 10.31 – On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$.
Calculer la variance de la variable aléatoire X puis celle de Y.

Remarque 10.32 – Lorsqu'une variable aléatoire admet une espérance nulle, on parle de variable **centrée**.
Si en plus, son écart-type vaut 1, alors on parle de variable **centrée réduite**.

III – Lois usuelles

1 – Loi uniforme

Définition 10.33 – Soit un couple d'entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![a,b]\!]$ lorsque son support vaut $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$ et que chaque valeur a la même probabilité d'arriver :

$$\forall k \in [\![a,b]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{n},$$

avec n le nombre de valeurs dans l'intervalle $[\![a,b]\!]$, *i.e.* $n = b-a+1$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Exemple 10.34 – Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.

2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on note X le numéro obtenu.

Proposition 10.35

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,n]\!]$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Proposition 10.36

Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a,b]\!]$.
Alors la variable aléatoire $X-a+1$ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,b-a+1]\!]$ et l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

où $n = b-a+1$ est le nombre de valeurs.

2 – Loi de Bernoulli

Définition 10.37 – Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in \left]0,1\right[$ lorsqu'il n'y a que deux issues possibles, *i.e.* $X(\Omega) = \{0,1\}$, et que

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Une **épreuve** de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : l'une que l'on qualifie de "succès", de probabilité p, et l'autre que l'on qualifie d'"échec", de probabilité $1-p$.
On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un "succès", la variable aléatoire prend la valeur $X=1$, sinon elle prend la valeur $X=0$.

Exemple 10.38 – On lance une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est PILE et 0 sinon.

Proposition 10.39

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0,1\right[$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

Remarque 10.40 – Lorsque $p=1$, *i.e.* que le support est restreint à un unique élément, on parle alors de **loi certaine**. Les lois certaines sont caractérisées par une variance nulle.

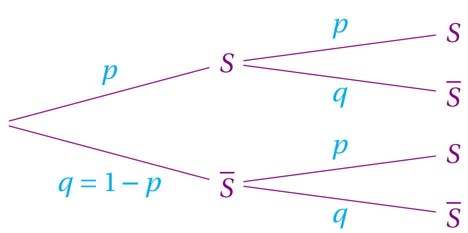
3 – Loi binomiale

Définition 10.41 – L'expérience aléatoire qui consiste à **répéter** n fois une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p, **à l'identique** et **de manière indépendante**, est appelée un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves de ce schéma de Bernoulli suit une **loi binomiale** de paramètres n et p. On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 10.42 – On lance dix fois de suite une pièce équilibrée et on note X le nombre de PILE obtenus.

Dans les cas où $n=2$ ou $n=3$, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.

1. Cas $n=2$
   On répète deux épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de manière indépendante.



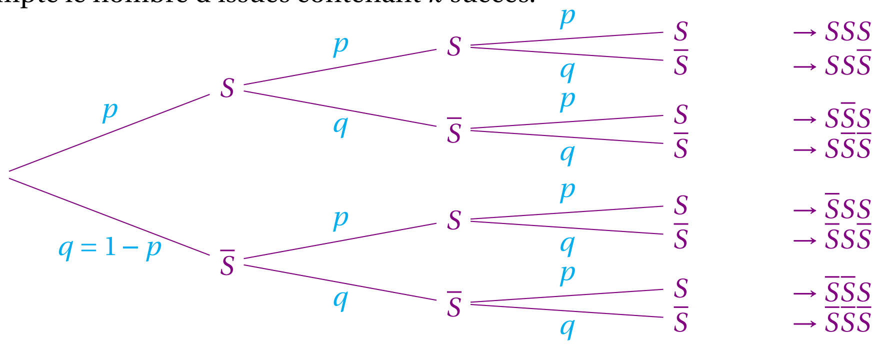
   La variable aléatoire X, égale au nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $n=2$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2
$P(X=k)$	q^2	$2\times p\times q$	p^2

2. Cas $n=3$
   On répète trois épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de façon indépendante.
   L'expérience comporte $2^3=8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{SSS, SS\overline{S}, S\overline{S}S, \overline{S}SS, S\overline{S}\overline{S}, \overline{S}S\overline{S}, \overline{S}\overline{S}S, \overline{S}\overline{S}\overline{S}\}.$$

Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X, égale au nombre de succès, on dresse un arbre et on compte le nombre d'issues contenant k succès.



La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X = k)$	q^3	$3 \times p \times q^2$	$3 \times p^2 \times q$	p^3

Définition 10.43 – Soient n un entier naturel non nul et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Si on représente par un arbre une série de n épreuves de Bernoulli, le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves répétées.

Remarque 10.44 –

- Un seul chemin permet d'obtenir 0 succès ou n succès consécutifs, donc $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- Il y a n chemins différents qui permettent d'obtenir un seul succès. Ainsi $\binom{n}{1} = n$.

Proposition 10.45

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots\big(n-(k+1)\big)}{k!}.$$

Corollaire 10.46

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les trois valeurs principales à retenir pour les coefficients binomiaux sont les suivantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pour les coefficients suivants, il suffit de rajouter des facteurs au numérateur (en retirant 1 à chaque fois au précédent) et au dénominateur (en ajoutant 1 à chaque fois au précédent).

Proposition 10.47

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$,

- Relation de symétrie des coefficients :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

- Formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Remarque 10.48 – La formule du triangle de Pascal permet de déterminer les coefficients binomiaux de proche en proche.

Exemple 10.49 – Calculer les coefficients binomiaux suivants.

- $\binom{4}{2}$
- $\binom{5}{2}$
- $\binom{11}{1}$
- $\binom{3}{0}$

Proposition 10.50

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p. Alors le support de X vaut $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Proposition 10.51

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Exemple 10.52 – Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients choisissent l'option *Livraison Express*. On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bons portant la mention *Livraison Express*.

1. Déterminer la loi de X en justifiant soigneusement.

2. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.

4 – Formule du binôme de Newton

Théorème 10.53 – Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux réels de $\mathbb{R}$ et n un entier de $\mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 10.54 – $(x+2)^3$