DEVOIR SURVEILLÉ 4

Exercice 1 – [BSB 2017 / Ex1]

1. Je calcule P^2 puis P^3 :

$$P^2 = P \times P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P^3 = P^2 \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

J'obtiens finalement que $P^3 = I$, *i.e.* $P \times P^2 = I$.

J'en déduis alors que P est inversible et que $P^{-1} = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Je calcule $P^{-1}A$ puis multiplie le résultat par P :

$$P^{-1} \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}A \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

Ainsi j'ai bien montré que $P^{-1}AP = L$.

3. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $P^{-1}A^nP = L^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I \quad \text{et} \quad L^0 = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $P^{-1}A^nP = L^n$. Alors

$$L^{n+1} = L^n \times L = P^{-1}A^nP \times P^{-1}AP = P^{-1}A^nIAP = P^{-1}A^{n+1}P.$$

Donc $P^{-1}A^{n+1}P = L^{n+1}$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{-1}A^nP = L^n.$$

b) Je détermine J puis calcule ses puissances successives :

$$J = L - I = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$J^2 = J \times J = \begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

et

$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 0_3.$$

c) D'après la question précédente, pour tout $k \geqslant 3$, $\quad J^k = J^3 \times J^{k-3} = 0_3 \times J^{k-3} = 0_3$.
Par ailleurs, les matrices I et J commutent donc je peux appliquer la formule du binôme de Newton à la matrice $L = I + J$. J'obtiens alors

$$L^n = \left(I + J\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k.$$

Comme tous les termes de cette somme sont nuls dès lors que $k \geqslant 3$, j'obtiens que

$$\forall n \geqslant 2, \quad L^n = \binom{n}{0} I^{n-0} J^0 + \binom{n}{1} I^{n-1} J^1 + \binom{n}{2} I^{n-2} J^2 = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

d) D'après les résultats obtenus aux questions précédentes, pour $n \geqslant 2$,

$$L^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&2n&0\\0&0&2n\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&2n(n-1)\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2n&2n(n-1)\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, cette formule me donne les matrices

$$\begin{pmatrix}1&2\times 0&2\times 0\times(-1)\\0&1&2\times 0\\0&0&1\end{pmatrix} = I = L^0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1&2\times 1&2\times 1\times 0\\0&1&2\times 1\\0&0&1\end{pmatrix} = L = L^1.$$

Donc cette formule est bien valable pour tous les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$.

e) Je sais désormais que $P^{-1}A^nP = L^n$, donc que $PL^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = IA^nI = A^n$.
Ainsi $A^n = PL^nP^{-1}$ et il ne me reste plus qu'à calculer les produits :

$$P \times L^n = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&2n&2n(n-1)\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&2n&2n(n-1)\\0&1&2n\end{pmatrix}$$

et

$$A^n = PL^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&2n&2n(n-1)\\0&1&2n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\2n(n-1)&1&2n\\2n&0&1\end{pmatrix}.$$

4. a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à $u_1 = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = 1.$$

b) Pour $n \geqslant 1$, je calcule le produit AX_n :

$$A \times X_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2 + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que $X_{n+1} = AX_n$.

c) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = A^{n-1}X_1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $A^0 X_1 = IX_1 = X_1$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $X_n = A^{n-1}X_1$. Alors

$$X_{n+1} = A \times X_n = A \times A^{n-1}X_1 = A^n X_1.$$

Donc $X_{n+1} = A^{n+1-1}X_1$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = A^{n-1}X_1.$$

d) Par définition, je sais que $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Or j'ai montré que $X_n = A^{n-1}X_1$.

Donc il me suffit de calculer $X_n = A^{n-1}X_1$ pour déduire les formules de v_n et w_n :

$$A^{n-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n-2) + 4(n-1) \\ 2(n-1) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) \\ 2n \end{pmatrix}$$

Ainsi j'en déduis bien que pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = 2n(n-1) \quad \text{et} \quad w_n = 2n.$$

5. a) La ligne 2 doit être complétée de la façon suivante :
`1.  A=np.array([[1,0,0],[0,1,2],[2,0,1]]).`

b) Il faut, pour chaque `i`, mémoriser le deuxième coefficient de la matrice colonne `X`.
D'où la réponse C : `v[i]=X[1]` (puisque Python commence à compter à 0).

c) De la même manière, pour mémoriser les termes de la suite $(w_n)_{n \geqslant 1}$, il faut cette fois considérer le troisième coefficient de la matrice colonne `X`. D'où `w[i]=X[2]`.

Finalement, voici le programme complété :

```
 1.  import numpy as np
 2.  A=np.array([[1,0,0],[0,1,2],[2,0,1]])
 3.  u=np.zeros(10)
 4.  v=np.zeros(10)
 5.  w=np.zeros(10)
 6.  u[0]=1; v[0]=0; w[0]=2
 7.  X=np.array([[1],[0],[2]])
 8.  for i in range(1,10):
 9.      X=np.dot(A,X)
10.      u[i]=1
11.      v[i]=X[1]
12.      w[i]=X[2]
```

Exercice 2 – [BSB 2017 / Ex2]

1. a) Je calcule la limite de la fonction g en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty.$$

Donc par somme,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^x - 1 = +\infty.$$

b) La fonction g est donnée sous la forme d'une somme. Plus particulièrement, g est de la forme $g(x) = u(x) \times v(x) - 1$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. Comme $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x + 0 = (x+1)e^x.$$

Pour obtenir les variations de g, il me faut étudier le signe de $g'(x)$: pour tout $x \geqslant 0$, $x + 1 > 0$ et $e^x > 0$ donc $g'(x) > 0$. Ainsi la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $g(0) = -1$, ce qui me permet de déduire le tableau de variation suivant pour la fonction g sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
g	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : J'anticipe la question suivante en plaçant le réel α.

c) Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction g est dérivable donc continue. Elle y est aussi strictement croissante d'après le tableau de variation précédent. Aussi, comme $g(0) = -1$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique antécédent de 0 dans l'intervalle $[0, +\infty[$ (l'unicité vient de la stricte monotonie). Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.
Plus précisément, puisque $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = e - 1 \approx 1.7 > 0$,
alors j'en déduis que $0 < \alpha < 1$, *i.e.*

$$\alpha \in [0, 1].$$

d) Je sais désormais que la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et qu'elle s'annule en α. Alors le signe de $g(x)$ est directement donné par le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. a) Je calcule les limites de la fonction f en 0^+ et en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to0^+} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} -\ln(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^x - \ln(x) = +\infty.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, les formules habituelles me donnent une forme indéterminée. Je réécris donc la fonction f sous une forme plus adaptée aux croissances comparées :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Alors par croissances comparées,

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln(x)}{x} = \quad 0 \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = +\infty.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty.$$

b) La fonction f est donnée sous la forme d'une somme donc je dérive terme à terme :

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}.$$

Ainsi j'ai bien montré que $\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

Pour obtenir les variations de f, il me faut étudier le signe de $f'(x)$: sur $\left]0,+\infty\right[$, $x > 0$ et j'ai déjà étudié le signe de $g(x)$. J'en déduis donc le tableau de variation de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Par définition, α est l'unique solution de l'équation $g(\alpha) = 0$. Donc $\alpha \times e^\alpha - 1 = 0$. Par suite, $\alpha \times e^\alpha = 1$ et puisque α est non nul (je sais que $g(0) = -1$), je peux en conclure que le réel α vérifie

$$\frac{1}{\alpha} = e^\alpha.$$

Par conséquent, en utilisant cette identité dans les deux sens, j'obtiens que

$$f(\alpha) = e^\alpha - \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} + \ln\left(e^\alpha\right) = \frac{1}{\alpha} + \alpha.$$

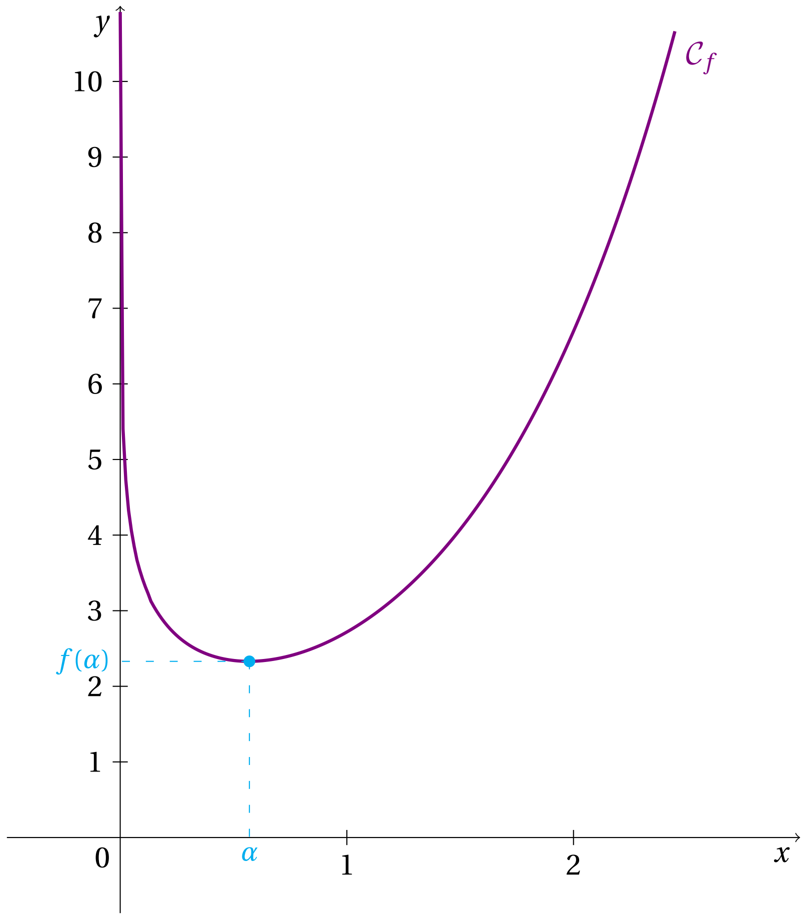
Ainsi j'ai bien montré que $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.

3. a) D'après la question **2.b)**, pour tout $x > 0$, $\quad f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$. Ainsi f' est donnée sous la forme d'une somme, donc je dérive terme à terme :

$$f''(x) = e^x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^x + \frac{1}{x^2}.$$

b) Pour tout $x > 0$, $e^x > 0$ et $\dfrac{1}{x^2} > 0$ donc $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2} > 0$ ce qui démontre que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. Voici l'allure de la courbe représentative de la fonction f.



Exercice 3 – [BSB 2017 / Ex3]

1. Selon l'énoncé, à l'instant 0, l'enfant se trouve au niveau A. Alors à l'instant 1, il sera toujours au niveau A avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ et il passera au niveau B avec probabilité $\dfrac{2}{3}$. Donc

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad b_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad c_1 = 0.$$

2. À l'instant n, l'enfant se trouve au niveau A, B ou C. Donc $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'événements. Alors par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times 0 + c_n \times 0 = \frac{1}{3} a_n \end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{2}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times 0 = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{2}{3} + c_n \times 1 = \frac{2}{3} b_n + c_n \end{aligned}$$

Finalement j'ai bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{2}{3} b_n + c_n.$$

3. Je sais que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$. Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$. Comme l'enfant débute au niveau A, le premier terme est $a_0 = 1$.
   Je peux alors donner la forme explicite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$a_n = a_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}.$$
   J'ai bien montré que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{3^n}.$$

4. a) Pour montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, j'exprime v_{n+1} en fonction de v_n pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque :
   $$\begin{aligned} v_{n+1} = 3^{n+1} b_{n+1} &= 3^{n+1} \times \left(\frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n\right) = 3^n \times (2a_n + b_n) \\ &= 2 \times 3^n a_n + 3^n b_n = 2 \times 3^n \times \frac{1}{3^n} + v_n = 2 + v_n. \end{aligned}$$
   Finalement j'ai montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = v_n + 2$.
   Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite arithmétique de raison $r = 2$.

   b) Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 3^0 b_0 = 1 \times 0 = 0$, je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_n = v_0 + n \times r = 0 + n \times 2 = 2n.$$
   Et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = 3^n b_n$, $\quad$ alors j'en déduis que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{v_n}{3^n} = \frac{2n}{3^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, la somme des probabilités $a_n + b_n + c_n$ correspond à la probabilité que l'enfant soit au niveau A, au niveau B ou au niveau C. Ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n + b_n + c_n = 1.$$
   Je peux alors en déduire une expression de c_n en fonction de n grâce aux expressions désormais connues pour a_n et b_n :
   $$c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \frac{1}{3^n} - \frac{2n}{3^n} = 1 - \frac{2n+1}{3^n}.$$
   Comme par croissances comparées $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3^n} = 0$, $\quad$ alors
   $$\lim_{n\to+\infty} c_n = 1.$$
   Cela signifie que l'enfant terminera par arriver au niveau C avec une probabilité 1.

6. a) Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont entières. En outre, il faut au moins deux étapes pour arriver du niveau A au niveau C.
Ainsi X peut prendre n'importe quelle valeur entière supérieure ou égale à 2.

b) Soit $n \geqslant 2$. L'événement $[X = n]$ correspond au fait que l'enfant atteint le sommet à l'instant n, donc qu'il se trouve au niveau C à l'instant n mais est encore au niveau B à l'instant $n-1$. Cela justifie bien l'égalité ensembliste $[X = n] = B_{n-1} \cap C_n$.

c) D'après la question précédente et en me servant des formules déjà connues,
pour $n \geqslant 2$, en appliquant la formules des probabilités composées, j'obtiens que

$$P(X = n) = P\big(B_{n-1} \cap C_n\big) = P(B_{n-1}) \times P_{B_{n+1}}(C_n) = \frac{2(n-1)}{3^{n-1}} \times \frac{2}{3} = \frac{4(n-1)}{3^n}.$$

7. a) La variable aléatoire X_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{2}{3}$.
En effet, X_1 est le rang du premier succès "monter au niveau B" lors de répétitions identiques et indépendantes d'expériences de Bernoulli (montera ou ne montera pas) de probabilité de succès $p = \dfrac{2}{3}$.
Le support de X_1 est donné par $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_1 = k) = p(1-p)^{k-1} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3^k}.$$

L'espérance de X_1 est donnée par $E(X_1) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

b) Il s'agit exactement de la même situation sauf que l'enfant se trouve cette fois au niveau B et le succès devient "monter au niveau C", avec la même probabilité $p = \dfrac{2}{3}$.
Donc X_2 suit aussi une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{2}{3}$.

c) Le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le niveau C depuis le niveau A est égal à la somme du nombre d'étapes pour passer de A à B et de celui pour passer de B à C. Ainsi

$$X = X_1 + X_2.$$

Comme X_1 admet une espérance et que X_2 suit la même loi que X_1, alors X_2 admet une espérance et $E(X_2) = E(X_1) = \dfrac{3}{2}$.
Puis par linéarité, la variable aléatoire X admet aussi une espérance et

$$E(X) = E\big(X_1 + X_2\big) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

Exercice 4 – [ECRICOME 2012 / Ex1]

1. a) La matrice A est une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, donc non nuls. Ainsi la matrice A est inversible.
Pour calculer l'inverse de A, j'applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2+2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3+L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Finalement, l'inverse de la matrice A est donnée par $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété :

"il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix}$".

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc en posant $u_0 = v_0 = 0$,
$\mathcal{P}_0$ est bien vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, il existe u_n et v_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix}$.
Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n - 2 & 1 & 0 \\ v_n - 2u_n & u_n - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors en posant $u_{n+1} = u_n - 1$ et $v_{n+1} = v_n - 2u_n$, j'obtiens bien que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_{n+1} & 1 & 0 \\ v_{n+1} & u_{n+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

pour tout entier$n \geqslant 0$, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix}$.

En particulier, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par

$$u_0 = v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 1, \\ v_{n+1} = v_n - 2u_n. \end{cases}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, j'ai trouvé que $u_{n+1} = u_n - 1$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, de raison $r = -1$. Je peux donc trouver une formule explicite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \times r = 0 + n \times (-1) = -n.$$

d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $v_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$v_1 = v_0 - 2u_0 = 0 - 2 \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad 2\sum_{k=0}^{1-1} k = 2 \times 0 = 0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $v_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k$.

Alors

$$v_{n+1} = v_n - 2u_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} k - 2 \times (-n) = 2 \times \left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right) = 2 \times \sum_{k=0}^{n} k.$$

Donc $v_{n+1} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1-1} k$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} k.$$

e) Je sais que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \times \dfrac{(n-1) \times n}{2} = n(n-1)$.
Et finalement

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2n & 1 & 0 \\ n(n-1) & -n & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) La fonction f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = ax^2 + bx + c$ et $v(x) = e^{-x}$.
Comme $u'(x) = 2ax + b$ et $v'(x) = -e^{-x}$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = (2ax+b)e^{-x} + \big(ax^2+bx+c\big)\big(-e^{-x}\big) \\ &= \big(-ax^2 + (2a-b)x + (b-c)\big)e^{-x} = \big(a_1x^2 + b_1x + c_1\big)e^{-x}, \end{aligned}$$

en posant $a_1 = -a$, $b_1 = 2a - b$ et $c_1 = b - c$.

Pour vérifier l'égalité matricielle $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, je calcule le produit $-A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$-A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ -2a+b \\ -b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 2a-b \\ b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré que $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

b) Puisque $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + b_1 \\ 2a_1 + b_1 + c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -2a_1 - b_1 \\ -2a_1 - b_1 - c_1 \end{pmatrix}.$$

3. La question **2.a)** me permet d'exprimer, pour une fonction de la forme précisée, les coefficients de la dérivée en fonction de ceux de la fonction de départ. La question **2.b)** me permet elle de faire le chemin inverse, à savoir d'exprimer les coefficients de la fonction de départ en fonction de ceux de la dérivée. Donc d'exprimer les coefficients d'une primitive en fonction de ceux de la fonction de départ. J'applique donc cette méthode pour trouver une primitive de chacune des deux fonctions r et s.
   - Pour r, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 1$ donc $a = 0$, $b = -1$, $c_1 = -1 - 1 = -2$.
     Ainsi une primitive de r est donnée par $R(x) = \big(-x - 2\big)e^{-x}$.
   - Pour s, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$ donc $a = -1$, $b = -2 - 1 = -3$, $c_1 = -2 - 1 = -2$.
     Ainsi une primitive de s est donnée par $S(x) = \big(-x^2 - 3x - 3\big)e^{-x}$.

4. a) Tout d'abord, je remarque que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = \dfrac{1}{2} r(x)$ et $xg(x) = \dfrac{1}{2} s(x)$.
   Ainsi

$$\int_0^X g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^X \frac{r(x)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{R(x)}{2}\right]_0^X = \frac{R(X) - R(0)}{2}$$
$$= \frac{(-X-2)e^{-X} - (-0-2)e^{-0}}{2} = \frac{2 - (X+2)e^{-X}}{2} = 1 - \frac{X+2}{2e^X}.$$

   Et

$$\int_0^X xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^X \frac{s(x)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{S(x)}{2}\right]_0^X = \frac{S(X) - S(0)}{2}$$
$$= \frac{\big(-X^2 - 3X - 3\big)e^{-X} - \big(-0^2 - 3 \times 0 - 3\big)e^{-0}}{2}$$
$$= \frac{3 - \big(X^2 + 3X + 3\big)e^{-X}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{X^2 + 3X + 3}{2e^X}.$$

   b) Par croissances comparées, je sais que

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{X+2}{2e^X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X^3 + 3X + 3}{2e^X} = 0.$$

   J'en déduis alors que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ convergent et que

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X g(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 0 = 1,$$

$$\int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X xg(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}.$$

c) Je vérifie les trois conditions de la définition d'une densité :

- Pour $x < 0$, $g(x) = 0 \geqslant 0$ et pour $x \geqslant 0$, $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} \geqslant 0$ car $x+1 \geqslant 1 > 0$.
  Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geqslant 0$.
- La fonction g est continue sur $\left]-\infty, 0\right[$ car constante et elle est continue sur $\left[0, +\infty\right[$ comme produit de fonctions continues.
  Donc g admet au plus un point de discontinuité en 0.
- Il reste à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.
  J'étudie séparément les intégrales $\int_{-\infty}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{0}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$:
  - ▷ Tout d'abord, $\int_{-\infty}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
  - ▷ Et par la question précédente, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

  Je conclus avec la relation de Chasles : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.$$

La fonction g vérifie les trois conditions donc g est bien une densité de probabilité.

d) La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ converge. J'étudie séparément les intégrales $\int_{-\infty}^{0} xg(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{0}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$.

- Tout d'abord, $\int_{-\infty}^{0} xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
- Et par une question précédente, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{3}{2}$.

Je conclus avec la relation de Chasles :
l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ converge donc la variable aléatoire Y admet une espérance et

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} xg(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$