

NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 19

Exercice 1 – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Solution : Je vérifie les trois conditions de la définition d'une densité :

- Pour $x < 0$, $f(x) = 0 \geq 0$ et pour $x \geq 0$, $f(x) = e^{-x} > 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- La fonction f est continue sur $] -\infty, 0]$ car constante et continue sur $]0, +\infty[$ comme exponentielle. Donc f admet au plus un point de discontinuité en 0.
- Il reste à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

▷ Déjà, $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx$ converge et vaut 0.

▷ Puis j'étudie la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Je fixe $M \geq 0$. Alors

$$\int_0^M e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^M = -e^{-M} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-M}.$$

Or $\lim_{M \rightarrow +\infty} 1 - e^{-M} = 1$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

Je conclus avec la relation de Chasles : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 + 1 = 1.$$

La fonction f vérifie les trois conditions donc f est bien une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire admettant X pour densité.

Solution : Étant donnée l'expression de f , je distingue deux cas selon les valeurs de x :

- Si $x < 0$, alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.
- Si $x \geq 0$, alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x e^{-t} dt = 0 + \left[-e^{-t} \right]_0^x = 1 - e^{-x}$.

Finalement j'ai montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Calculer $P(X \leq 2)$, $P(0 < X \leq 1)$ et $P(X > \ln(2))$.

Solution : En utilisant la fonction de répartition, j'obtiens que

$$P(X \leq 2) = F_X(2) = 1 - e^{-2},$$

$$P(0 < X \leq 1) = F_X(1) - F_X(0) = 1 - e^{-1} - 0 = 1 - e^{-1},$$

$$P(X > \ln(2)) = 1 - F_X(\ln(2)) = 1 - (1 - e^{-\ln(2)}) = e^{-\ln(2)} = \frac{1}{e^{\ln(2)}} = \frac{1}{2}.$$