DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 – On considère le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$P(x) = x^3 - 21x - 20.$$

1. Calculer $P(-1)$.
2. En déduire qu'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$ et le déterminer.
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.
4. En déduire le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 21x - 20}.$$

5. Donner le domaine de définition de la fonction g définie par

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 14} + \sqrt{x^3 - 21x - 20}.$$

Exercice 2 – Le nombre d'arbres d'une forêt, **en milliers d'unités**, est modélisée par une suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, **en milliers**, au cours de l'année $(2010 + n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 3.$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = 60 - u_n.$$

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$.

   (b) Calculer v_0.

   (c) Déterminer l'expression de (v_n) en fonction de n.

   (d) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n.$$

3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2020. On donnera une valeur approchée arrondie au millier. *Indication numérique :* $0,95^{10} \approx 0,60$.

Exercice 3 – Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules noires et 4 boules rouges. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne.

1. Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient noires.
2. Calculer la probabilité que la deuxième boule tirée soit noire.
3. On constate que la deuxième boule tirée est noire. En vous appuyant sur des calculs de probabilité, quelle était *a priori* la couleur de la première boule tirée ?

Exercice 4 – Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine. L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour. Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'entretien suivantes : la formule Simple (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule Confort (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien). Le gestionnaire a constaté que

- 60% des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20% ne souscrivent aucune formule d'entretien,
- la formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45% des locataires de studio et par 55% des locataires de deux-pièces,
- 18% des locataires ne souscrivent aucune formule.

On rencontre un résident au hasard. On note

- S l'évènement "Le résident a loué un studio",
- A l'évènement "Le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien",
- B l'évènement "Le résident a souscrit la formule Simple",
- C l'évènement "Le résident a souscrit la formule Confort".

1. Donner les valeurs des probabilités suivantes.
$$P(S), \qquad P(\overline{S}), \qquad P_S(A), \qquad P_S(B), \qquad P_S(C), \qquad P_{\overline{S}}(B) \quad \text{et} \quad P(A).$$
2. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisit la formule Simple. Justifier cette affirmation par le calcul.
3. On pose $x = P_{\overline{S}}(A)$.
   (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que
   $$0,18 = 0,12 + 0,4x.$$
   (b) En déduire la valeur de $P_{\overline{S}}(A)$.
4. Calculer la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces sachant qu'il n'a souscrit aucune formule d'entretien.

Exercice 5 – Récurrence. Les trois questions sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n - 3$.
   Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,
   $$u_n = 2 \times 4^n + 1.$$
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$u_n \leq 1.$$
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$