Devoir Surveillé 2

Exercice 1 –

$$\begin{aligned}A &= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\\ &= \frac{6}{6}-\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= 3\left(1-\frac{1}{5}\right)+2\times\frac{3}{7}\\ &= 3\left(\frac{5}{5}-\frac{1}{5}\right)+\frac{6}{7}\\ &= 3\times\frac{4}{5}+\frac{6}{7}\\ &= \frac{12}{5}+\frac{6}{7}\\ &= \frac{84}{35}+\frac{30}{35}\\ &= \frac{114}{35}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \frac{1+\frac{1}{3}}{\frac{2}{7}+3\left(2-\frac{1}{2}\right)}\\ &= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{7}+3\times\frac{3}{2}}\\ &= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{7}+\frac{9}{2}}\\ &= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{14}+\frac{63}{14}}\\ &= \frac{4}{3}\times\frac{14}{67}\\ &= \frac{56}{201}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}\right)\div\left(1-\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(\frac{2}{6}-\frac{3}{6}\right)\times\left(\frac{3}{12}-\frac{16}{12}\right)\div\frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{6}\times\frac{-13}{12}\times 2\\ &= \frac{13}{36}\end{aligned}$$

Exercice 2 –

1. On a $2x-4=1 \iff 2x=5 \iff x=\frac{5}{2}$. Donc $\mathscr{S}=\left\{\frac{5}{2}\right\}$.
2. On a $x+3\leq 2x-1 \iff -x\leq -4 \iff x\geq 4$. Donc $\mathscr{S}=[4;+\infty[$.
3. On a

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-3}\leq 3 &\iff \frac{(x+2)-3(x-3)}{x-3}\leq 0\\ &\iff \frac{-2x+11}{x-3}\leq 0\end{aligned}$$

On fait désormais le tableau de signe de $\frac{-2x+11}{x-3}$.

x	$-\infty$		3		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$-2x+11$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x+11}{x-3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Et donc $\mathscr{S} =]-\infty;3[\cup\left[\frac{11}{2};+\infty\right[$.

4. Commençons par chercher les éventuelles valeurs interdites :

$$x-2 \iff x=2.$$

Ensuite, on a $4x-1=0 \iff x=\frac{1}{4}$. Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites.
Ainsi $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

5. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta=(-10)^2-4\times 2\times 12=100-96=4$. Il y a donc deux solutions

$$x_1=\frac{10-2}{2\times 2}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{10+2}{2\times 2}=3.$$

Ainsi $\mathscr{S}=\{2;3\}$.

6. Le discriminant de $-x^2-2x+3$ vaut $\Delta=(-2)^2-4\times(-1)\times 3=16$. L'équation $-x^2-2x+3=0$ admet donc deux solutions

$$x_1=\frac{2-4}{2\times(-1)}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{2+4}{2\times(-1)}=-3.$$

On en déduit le tableau de signe de $-x^2-2x+3$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $\mathscr{S}=]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$.

7. Posons $P(x)=6x^3+7x^2-x-2$. On a $P(-1)=-6+7+1-2=0$. Donc il existe un polynôme Q tel que $P(x)=\big(x-(-1)\big)Q(x)=(x+1)Q(x)$. Déterminons le polynôme Q par division euclidienne.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
6x^3 & + & 7x^2 & - & x & - & 2 & x+1 \\ \cline{8-8}
6x^3 & + & 6x^2 & & & & & 6x^2+x-2 \\ \cline{1-7}
 & & x^2 & - & x & - & 2 & \\
 & & x^2 & + & x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & - & 2x & - & 2 & \\
 & & & - & 2x & - & 2 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

<u>Conclusion</u> : $P(x)=(x+1)(6x^2+x-2)$.
Calculons maintenant le discriminant de $6x^2+x-2$. $\Delta=1^2-4\times 6\times(-2)=49$. Il y a donc deux racines

$$x_1=\frac{-1-7}{2\times 6}=\frac{-8}{12}=\frac{-2}{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-1+7}{2\times 6}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Ainsi $\mathscr{S}=\left\{-1;-\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 3 –

1. La fonction a est un polynôme donc $D_a=\mathbf{R}$.

2. La fonction b est une fraction rationnelle donc $D_b = \mathbf{R} \setminus \{V.I.\}$. Les valeurs interdites sont données par les solutions de $4x-1=0 \iff 4x=1 \iff x=\frac{1}{4}$. Ainsi $D_b = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$.
3. La fonction c est une fraction rationnelle donc $D_b = \mathbf{R} \setminus \{V.I.\}$. Les valeurs interdites sont données par les solutions de $x^2-5x+6=0$. On calcule le discriminant $\Delta = 25-24=1$. Il y a donc deux racines
$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$
Ainsi $D_c = \mathbf{R} \setminus \{2;3\}$.
4. d est de la forme $\sqrt{f}$ avec $f(x) = x^2-2x-3$. Il nous faut donc résoudre $x^2-2x-3 \geq 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 4+12=16$. Il y a donc deux racines
$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$
On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc $D_d =]-\infty;-1] \cup [3;+\infty[$.
5. e est la forme $f+g$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 4x-5$. On a $D_f = \mathbf{R}^*$ et $D_g = \mathbf{R}$.
Donc $D_e = D_f \cap D_g = \mathbf{R}^*$.
6. f est de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{2x-1}{-x+3}$. Il nous faut donc résoudre $\frac{2x-1}{-x+3} \geq 0$. On a le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x-1}{-x+3}$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	

Et donc $D_f = \left[\frac{1}{2};3\right[$.

Exercice 4 –

1. La fonction f est une fraction rationnelle donc $D_f = \mathbf{R} \setminus \{V.I.\}$. On a par ailleurs
$2x-3=0 \iff 2x=3 \iff x=\frac{3}{2}$, donc $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
La fonction g est un polynôme donc $D_g = \mathbf{R}$.
2. f est définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ qui n'est pas symétrique par rapport à 0. Donc f ne peut être ni paire, ni impaire. g en revanche est définie sur $\mathbf{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Par ailleurs, $g(-x) = 2(-x)^2+3 = 2x^2+3 = g(x)$ donc g est paire.

3. On a
$$f\circ f(x)=f\left(\frac{1}{2x-3}\right)=\frac{1}{2\times\frac{1}{2x-3}-3}=\frac{1}{\frac{2}{2x-3}-\frac{3(2x-3)}{2x-3}}=\frac{1}{\frac{2-6x+9}{2x-3}}=\frac{2x-3}{-6x+11}.$$
$f\circ f$ est une fraction rationnelle donc $D_{f\circ f}=\mathbf{R}\backslash\{V.I.\}$. Il n'y a qu'une valeur interdite, $x=\dfrac{11}{6}$.
Donc $D_{f\circ f}=\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{11}{6}\right\}$.
On a
$$f\circ g(x)=f\left(2x^2+3\right)=\frac{1}{2(2x^2+3)-3}=\frac{1}{4x^2+3}.$$
$f\circ g$ est une fraction rationnelle, n'ayant pas de valeur interdite (il est clair que $4x^2+3\neq 0$ pour tout $x\in\mathbf{R}$), donc $D_{f\circ g}=\mathbf{R}$.
On a
$$g\circ g(x)=g(2x^2+3)=2(2x^2+3)^2+3=8x^4+24x^2+18+3=8x^4+24x^2+21.$$
$g\circ g$ est un polynôme donc $D_{g\circ g}=\mathbf{R}$.
On a
$$\begin{aligned}g\circ f(x)=g\left(\frac{1}{2x-3}\right)=2\left(\frac{1}{2x-3}\right)^3+3=\frac{2}{(2x-3)^2}+3\\ =\frac{2+3(2x-3)^2}{(2x-3)^2}=\frac{2+3(4x^2-12x+9)}{(2x-3)^2}=\frac{12x^2-36x+29}{(2x-3)^2}.\end{aligned}$$
$g\circ f$ est une fraction rationnelle ayant pour unique valeur interdite $x=\dfrac{3}{2}$.
Donc $D_{g\circ f}=\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Exercice 5 –

1. Par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f est donné par

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Par lecture graphique, le tableau de signe de la fonction g est donné par

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. (a) On a, pour tout $x\in\mathbf{R}$,
$$\begin{aligned}\frac{(x+4)(x-2)^2}{16}&=\frac{(x+4)(x^2-4x+4)}{16}\\&=\frac{x^3-4x^2+4x+4x^2-16x+16}{16}\\&=\frac{x^3-12x+16}{16}\\&=\frac{x^3}{16}-\frac{3}{4}x+1\\&=f(x).\end{aligned}$$

(b) Un carré est toujours positif et 16 est un nombre strictement positif, donc on en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

3. On commence par calculer le discriminant. $\Delta = \frac{1}{16} + \frac{12}{8} = \frac{25}{16} > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}}{-\frac{2}{8}} = \frac{6}{4} \times \frac{8}{2} = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}}{-\frac{2}{8}} = -4.$$

On en déduit la factorisation de $g(x)$:

$$g(x) = -\frac{1}{8} \times (x+4)(x-6) = \frac{-(x+4)(x-6)}{8}.$$

4. (a) Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$ et en utilisant les questions **2.(a)** et **3.**, on a

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{(x+4)(x-2)^2}{16} - \frac{-(x+4)(x-6)}{8} \\ &= \frac{(x+4)(x-2)^2 + 2(x+4)(x-6)}{16} \\ &= \frac{(x+4)((x-2)^2 + 2x - 12)}{16} \\ &= \frac{(x+4)(x^2 - 4x + 4 + 2x - 12)}{16} \\ &= \frac{(x+4)(x^2 - 2x - 8)}{16}. \end{aligned}$$

(b) On a $f(x) \leq g(x) \iff f(x) - g(x) \leq 0$. Il nous faut donc étudier le signe de $f(x) - g(x)$. On utilise l'expression établie à la question précédente. Le discriminant de $x^2 - 2x - 8$ vaut $\Delta = 4 + 32 = 36$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{2-6}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+6}{2} = 4.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-4		-2		4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-2x-8		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi la solution de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est $]-\infty;-4] \cup [-2;4]$.

5. Le tableau de signe de f obtenu à la question **2.(a)** est bien cohérent avec le graphique fourni.
   Par ailleurs, d'après la question **4.(b)**, on a $\mathscr{C}_f$ qui est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty;-4] \cup [-2;4]$ et au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[-4;-2] \cup [4;+\infty[$. Ceci est également cohérent avec le graphique fourni.

Exercice 6 –

1. Graphiquement,
   (a) $f(0) = -6$.
   (b) l'image de 3 par f est $f(3) = 0$.
   (c) les antécédents de -4 par f sont -1 et 2.
   (d) l'antécédent de 10 par f est $4,5$.
   (e) les antécédents de -6 par f sont 0 et 1.
   (f) l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5 est 14.
   (g) les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont $-2,5$ et $3,5$.
2. On a
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{25}{4}.$$
3. On a pour tout x
$$(x-3)(x+2) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6 = f(x).$$
4. On a $(x-3)(x+2) = 0 \iff x - 3 = 0$ ou $x + 2 = 0 \iff x = 3$ ou $x = -2$. On retrouve donc bien le fait que les antécédents de 0 par f sont -2 et 3.

Exercice 7 –

1. FAUX, f est décroissante sur $[-3;-1] \subset [-5;0]$.
2. FAUX, f est décroissante sur $[4;9]$.
3. VRAI, la flèche monte sur cet intervalle.
4. VRAI, -3 est le minimum de f sur $[-5;12]$.
5. FAUX puisque le minimum de f sur $[-5;12]$ est -3.
6. VRAI, puisque $f(9) = 2 < 4 < 5 = f(4)$ et f est décroissante sur $[4;9]$.
7. VRAI, puisque $f(12) = 4$ et que f est croissante sur $[9;12]$.

Exercice 8 –

1. On a $u_0 = \dfrac{3\times 0 + 4}{0+1} = \dfrac{4}{1} = 4$. $u_2 = \dfrac{6+4}{2+1} = \dfrac{10}{3}$.
   De même, $u_1 = \dfrac{3+4}{1+1} = \dfrac{7}{2}$. Et $u_3 = \dfrac{9+4}{3+1} = \dfrac{13}{4}$.
2. On a
$$u_{n-1} = \frac{3(n-1)+4}{n-1+1} = \frac{3n-3+4}{n} = \frac{3n+1}{n},$$
$$u_n - 1 = \frac{3n+4}{n+1} - 1 = \frac{3n+4}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1},$$
$$u_{n+2} = \frac{3(n+2)+4}{n+2+1} = \frac{3n+6+4}{n+3} = \frac{3n+10}{n+3},$$

$$u_n+2=\frac{3n+4}{n+1}+2=\frac{3n+4}{n+1}+\frac{2(n+1)}{n+1}=\frac{3n+4+2n+2}{n+1}=\frac{5n+6}{n+1},$$
$$u_{2n-1}=\frac{3(2n-1)+4}{2n-1+1}=\frac{6n-3+4}{2n}=\frac{6n+1}{2n},$$
$$2u_n-1=2\frac{3n+4}{n+1}-1=\frac{6n+8}{n+1}-\frac{n+1}{n+1}=\frac{5n+7}{n+1},$$
$$u_{2n}-1=\frac{3\times 2n+4}{2n+1}-1=\frac{6n+4}{2n+1}-\frac{2n+1}{2n+1}=\frac{4n+3}{2n+1}.$$

3. On a
$$u_{n+1}=\frac{3(n+1)+4}{n+1+1}=\frac{3n+3+4}{n+2}=\frac{3n+7}{n+2}.$$

Exercice 9 –

1. On a $u_1=0,65u_0+861=0,65\times 1760+861=1144+861=2005$.
   Et $u_2=0,65u_1+861=0,65\times 2005+861=1303,25+861=2164,25$.
2. La suite (u_n) n'est pas géométrique puisque $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$.
3. (a) On a
$$\begin{aligned}v_{n+1}&=u_{n+1}-2460\\&=0,65u_n+861-2460\\&=0,65(v_n+2460)+861-2460\\&=0,65v_n+1599+861-2460\\&=0,65v_n.\end{aligned}$$
   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $0,65$. Son premier terme est donné par
$$v_0=u_0-2460=1760-2460=-700.$$
   (b) Puisque (v_n) est géométrique, on a
$$v_n=v_0\times q^n=-700\times 0,65^n.$$
   Et donc
$$u_n=2460+v_n=2460-700\times 0,65^n.$$

Exercice 10 –

1. (a) On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4}\frac{3}{(1+k)^2}&=\frac{3}{(1+0)^2}+\frac{3}{(1+1)^2}+\frac{3}{(1+2)^2}+\frac{3}{(1+3)^2}+\frac{3}{(1+4)^2}\\&=\frac{3}{1}+\frac{3}{4}+\frac{3}{9}+\frac{3}{16}+\frac{3}{25}\\&=\frac{10800}{3600}+\frac{2700}{3600}+\frac{1200}{3600}+\frac{675}{3600}+\frac{432}{3600}\\&=\frac{15807}{3600}\\&=\frac{5269}{1200}.\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\frac{k}{k^2+1}+\sum_{k=0}^{2}(k+2)^2 &= \frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+4+9+16\\ &= \frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+29\\ &= \frac{5+4+3+290}{10}\\ &= \frac{302}{10}\\ &= \frac{151}{5}.\end{aligned}$$

2. (a) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{100}}=\sum_{k=2}^{100}\sqrt{\frac{1}{k}}$

(b) $1-2+3-4+\cdots-98+99=\sum_{k=1}^{99}(-1)^{k+1}\times k$

(c) $1+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+\frac{4}{25}+\frac{1}{9}+\frac{4}{49}+\frac{1}{16}+\frac{4}{81}+\frac{1}{25}=\frac{4}{4}+\frac{4}{9}+\frac{4}{16}+\frac{4}{25}+\frac{4}{36}+\frac{4}{49}+\frac{4}{64}+\frac{4}{81}+\frac{4}{100}=\sum_{k=2}^{10}\frac{4}{k^2}$