DEVOIR SURVEILLÉ 3

Exercice 1 – [ESCP 2015 / Ex2]

1. a) Pour cette question, $a = b = -1$ donc la matrice M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   Une matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
   Or $\det(M) = 1 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 - (-1) = 0$ donc la matrice M n'est pas inversible.

   b) Je commence par calculer M^2 :
$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$
   Puisque M^2 est la matrice nulle, alors pour tout $n \geqslant 2$,
$$M^n = M^2 \times M^{n-2} = 0_2 \times M^{n-2} = 0_2.$$

2. a) Pour cette question, $a = b$ donc la matrice M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$.
   Une matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
   Or $\det(M) = 1 \times a - 1 \times a = a - a = 0$ donc la matrice M n'est pas inversible.

   b) Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 2$.
   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n = (1+a)^{n-1} M$.
   Initialisation : Pour $n = 2$, je calcule M^2 et vérifie que $M^2 = (1+a) \times M = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix}$:
$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix} = (1+a) \times M.$$
   Ainsi $\mathcal{P}_2$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, $M^n = (1+a)^{n-1} M$. Alors
$$M^{n+1} = M^n \times M = (1+a)^{n-1} M \times M = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^{n-1}(1+a) M = (1+a)^n M.$$
   Donc $M^{n+1} = (1+a)^n M$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
   Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 2$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$, *i.e.*
$$\forall n \geqslant 2, \quad M^n = (1+a)^{n-1} M.$$

3. Dans le cas général, la matrice M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et cette matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si
$$\det(M) \neq 0 \iff 1 \times b - 1 \times a \neq 0 \iff b - a \neq 0 \iff a \neq b.$$

4. a) Je cherche à exprimer la probabilité de l'événement $[X = Y]$. Les deux variables aléatoires doivent êtres égales mais peuvent prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\big[X = Y\big] = \big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\big\} = \big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \text{ et } Y(\omega) = k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*\big\}.$$

i.e.

$$\big[X = Y\big] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \text{ et } Y(\omega) = k\big\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \big([X = k] \cap [Y = k]\big).$$

Alors par incompatibilité des événements puis par indépendance des variables aléatoires X et Y, j'obtiens que les probabilités concernées vérifient

$$P\big([X = Y]\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\big([X = k] \cap [Y = k]\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k).$$

Ainsi j'ai bien montré que $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k)$.

b) Afin d'établir la convergence de cette somme, je passe par la somme partielle.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, je fixe $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} p^2 q^{2k-2}$. Alors

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} p^2 q^{2k-2} = p^2 \times \sum_{k=1}^{N} \left(q^2\right)^{k-1} = p^2 \times \sum_{n=0}^{N-1} \left(q^2\right)^n \qquad \text{en posant } n = k - 1.$$

Je reconnais alors la somme partielle d'une série géométrique de raison q^2.

Puisque $q = 1 - p$ avec $0 < p < 1$, alors $0 < q < 1$ et par conséquent $0 < q^2 < 1$.

Donc la série géométrique est convergente et admet pour somme $S = \dfrac{1}{1 - q^2}$.

Alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \lim_{N\to+\infty} S_N = p^2 \times \frac{1}{1 - q^2} = \frac{(1 - q)^2}{1 - q^2} = \frac{(1 - q)(1 - q)}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{1 - q}{1 + q}.$$

c) L'événement A est l'événement contraire de $[X = Y]$ puisque d'après la question **3.**, la matrice N n'est inversible que lorsque les deux variables aléatoires X et Y prennent des valeurs différentes. Donc

$$P(A) = 1 - P\big(X = Y\big).$$

Mais comme X et Y suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre p,
alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X = k) = P(Y = k) = p \times (1 - p)^{k-1} = p \times q^{k-1}$.
Donc

$$P(A) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \times pq^{k-1} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}.$$

Alors grâce au résultat de la question précédente, j'en déduis que

$$P(A) = 1 - \frac{1 - q}{1 + q} = \frac{1 + q}{1 + q} - \frac{1 - q}{1 + q} = \frac{1 + q - (1 - q)}{1 + q} = \frac{2q}{1 + q}.$$

5. a) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme de Newton me donne

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times x^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Puis en appliquant cette formule à l'entier $2n \in \mathbb{N}$, j'obtiens

$$(x + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \times x^k \times 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

b) Comme rappelé par l'énoncé, je sais que $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, c'est-à-dire d'après la question précédente, en modifiant les variables de sommation pour plus de clarté,

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right).$$

Ces deux quantités sont deux polynômes de degré $2n$. Cette égalité implique donc $2n+1$ égalités des coefficients de degré k pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

En particulier pour $k = n$, le coefficient à gauche vaut $\binom{2n}{n}$ tandis que le coefficient de droite est la somme de tous les produits $\binom{n}{i}\binom{n}{j}$ pour les valeurs de i et de j entre 0 et n telles que $i + j = n$. Ainsi en posant $k = i$, alors $j = n - k$ et j'obtiens bien la formule :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

c) Dans la question **4.a)**, je n'ai pas utilisé les lois des variables aléatoires, donc la formule est toujours vraie dans ce cas précis. Cette fois en revanche, X et Y suivent toutes deux une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$ donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X = k) = P(Y = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \times \binom{n}{k}.$$

Donc

$$P\big(X = Y\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n}{k}\binom{n}{k}.$$

Et puisque par symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, alors d'après la question précédente,

$$P\big(X = Y\big) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

d) Pour les mêmes raisons que dans la question **4.c)**, $P(A) = 1 - P\big(X = Y\big)$ et donc

$$P(A) = 1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 2 – [ESCP 2015 / Ex4]

1. En remplaçant n par 0 puis par 1 dans la définition de X_n, j'obtiens

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. a) Je calcule le produit AX_n pour tout $n \in \mathbb{N}$: comme $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

alors

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

J'ai bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

3. a) Je calcule le produit PQ :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-4-8 & -16+4+12 & 4-4 \\ 16-8-8 & -16+8+12 & 4-4 \\ 16-16 & -16+16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3.$$

Comme $PQ = 4I_3$, alors la matrice P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$.

b) Je calcule les produits PT et AP :

$$PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2+4 \\ 2 & 2 & 4+4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8-5+1 & 8-10+4 & 32-20 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

J'ai ainsi montré que $AP = PT$ et, comme la matrice P est inversible,
alors j'en déduis en multipliant à droite par P^{-1} que $A = PTP^{-1}$.

Je raisonne alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PT^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_3 \quad \text{et} \quad PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} = PT^n \times TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nP^{-1}.$$

4. a) Je commence par déterminer l'expression de la matrice N avant d'en calculer les puissances successives :

$$N = T - D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^2 = N \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Et donc pour tout entier $k \geqslant 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3$.

b) Je calcule les produits DN et ND :

$$D \times N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N \times D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $DN = ND$ et ainsi, d'après la formule du binôme de Newton,

$$T^n = \big(N + D\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} = D^n + nND^{n-1}.$$

En effet, tous les autres termes de la somme sont nuls puisque la matrice N y est élevée à une puissance $k \geqslant 2$. Et comme la matrice D est diagonale, alors

$$D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
T^n &= D^n + nND^{n-1} = D^n + n \times ND \times D^{n-2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Je calcule PT^n avant de multiplier le résultat par P^{-1} pour obtenir $A^n = PT^nP^{-1}$:

$$P \times T^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
PT^n \times P^{-1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \begin{pmatrix} 16 \times 2^n - 4 - 2(2n+4) & -16 \times 2^n + 4 + 3(2n+4) & 4 \times 2^n - (2n+4) \\ 16 \times 2^n - 8 - 2(4n+4) & -16 \times 2^n + 8 + 3(4n+4) & 4 \times 2^n - (4n+4) \\ 16 \times 2^n - 16 - 16n & -16 \times 2^n + 16 + 24n & 4 \times 2^n - 8n \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 & -2^{n+3} + 3n + 8 & 2^{n+1} - n - 2 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 & -2^{n+3} + 6n + 10 & 2^{n+1} - 2n - 2 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 & -2^{n+3} + 12n + 8 & 2^{n+1} - 4n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. a) D'après la question **2.b)**, je sais que $X_n = A^n X_0$ et que son dernier coefficient est u_n.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
X_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 & -2^{n+3} + 3n + 8 & 2^{n+1} - n - 2 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 & -2^{n+3} + 6n + 10 & 2^{n+1} - 2n - 2 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 & -2^{n+3} + 12n + 8 & 2^{n+1} - 4n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^{n+2} - n - 3 \\ 2^{n+2} - 2n - 4 \\ 2^{n+2} - 4n - 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(2^{n+2} - 4n - 4\right) = \frac{2^{n+2} - 4n - 4}{2^n}.$$

b) Je réécris l'expression de u_n afin d'en calculer aisément la limite :

$$u_n = \frac{2^{n+2} - 4n - 4}{2^n} = 4 - 4 \times \frac{n}{2^n} - 4 \times \frac{1}{2^n}.$$

Enfin, comme par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, et par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, alors par somme,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 4.$$

Exercice 3 – [ESCP 2016 / Ex2]

1. Voici la fonction complétée.

```
import numpy as np
def calculu(n):
    u=1
    for k in range(n):
        u=np.log(1+u**2)
    return u
```

2. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   Initialisation : Pour $n = 0$,
   $$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant 1 \leqslant 1.$$
   Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, je sais que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Donc par croissance de la fonction carré sur l'intervalle $[0,1]$, $0 = 0^2 \leqslant u_n^2 \leqslant 1^2 = 1$ et $1 \leqslant 1 + u_n^2 \leqslant 2$.
   Enfin par croissance de la fonction ln sur l'intervalle $[1,2]$, alors $\ln 1 \leqslant \ln\left(1+u_n^2\right) \leqslant \ln 2$.
   Comme $\ln 1 = 0$ et $\ln 2 \approx 0.7 \leqslant 1$, alors $0 \leqslant \ln\left(1+u_n^2\right) \leqslant 1$, *i.e.* $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

3. a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0,1]$ et de la forme $f(x) = \ln\big(u(x)\big) - x$, avec $u(x) = 1 + x^2$. Donc pour tout $x \in [0,1]$,
   $$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} = \frac{-\left(x^2-2x+1\right)}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leqslant 0,$$
   puisque $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$ et $(x-1)^2 \geqslant 0$. De plus, $f'(x)$ ne s'annule qu'en une seule valeur : $x = 1$. Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$.
   Sachant que $f(0) = \ln\left(1+0^2\right) - 0 = \ln 1 = 0$ et $f(1) = \ln\left(1+1^2\right) - 1 = \ln 2 - 1$, alors j'obtiens le tableau suivant :

x	0		1
$f'(x)$		$-$	0
f	0	$\searrow$	$\ln 2 - 1$

   Puisque la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0,1]$ et que $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant 0$.

b) Je calcule la différence entre deux termes consécutifs pour déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 + u_n^2\right) - u_n = f(u_n).$$

Or d'après les questions précédentes, je sais que $u_n \in [0,1]$ et par conséquent, $f(u_n) \leqslant 0$. Finalement $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) J'ai montré à la question **2.** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, en particulier minorée par 0. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi décroissante, alors je peux déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge grâce au théorème de la limite monotone.

4. a) Pour tout réel $x \geqslant 0$, je pose $g(x) = \ln(1+x) - x$.
La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leqslant 0.$$

Par conséquent, la fonction g est décroissante sur $[0,+\infty[$ et puisque $g(0) = 0$, alors pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$. Autrement dit pour tout $x \geqslant 0$,

$$g(x) = \ln(1+x) - x \leqslant 0 \quad \iff \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité obtenue à la question précédente à $x = u_n^2 \geqslant 0$, j'obtiens que

$$\ln\left(1 + u_n^2\right) \leqslant u_n^2, \qquad \textit{i.e.} \quad u_{n+1} \leqslant u_n^2.$$

c) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \leqslant \left(\ln 2\right)^n$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$u_1 = \ln\left(1 + 1^2\right) = \ln 2 \quad \text{et} \quad \ln 2 \leqslant \left(\ln 2\right)^1.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, je sais que $u_n \leqslant \left(\ln 2\right)^n$. Alors d'après la question **4.b)**,

$$u_{n+1} \leqslant u_n^2 \leqslant \left(\left(\ln 2\right)^n\right)^2 = \left(\ln 2\right)^{2n} \leqslant \left(\ln 2\right)^{n+1},$$

la dernière inégalité venant du fait que $n \geqslant 1$ implique $2n \geqslant n+1$ et que $0 \leqslant \ln 2 \leqslant 1$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \left(\ln 2\right)^n.$$

d) En combinant les inégalités obtenues précédemmet, je sais que

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\ln 2\right)^n.$$

Puisque $\ln 2 \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln 2\right)^n = 0$. Alors par théorème d'encadrement, j'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

e) Il s'agit d'un algorithme de seuil : celui-ci calcule les termes successifs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à ce qu'un terme u_n soit inférieur à 0.001. Alors il affiche le rang de ce terme.
Ici comme le résultat affiché est 6, j'en conclus que $u_5 \geqslant 0.001$ et que $u_6 < 0.001$.

5. En me servant de l'inégalité obtenue à la question **4.c)**, qui est aussi vérifiée pour $n = 0$ puisque $u_0 = 1 \leqslant 1 = \left(\ln 2\right)^0$, et en passant à la somme j'obtiens alors la somme des premiers termes d'une suite géométrique que je sais calculer. Soit $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln 2\right)^k = \frac{1-\left(\ln 2\right)^{n-1+1}}{1-\ln 2} = \frac{1-\left(\ln 2\right)^n}{1-\ln 2}.$$

Exercice 4 – [ESCP 2016 / Ex4]

1. La puce effectue un saut d'une, deux ou trois unités vers la droite donc :

$$A_1(\Omega) = [\![1,3]\!]$$

à l'issu du premier saut, la puce se trouve sur le point d'abscisse 1 avec le probabilité $\frac{1}{2}$, *i.e.* $P(A_1) = \frac{1}{2}$.
à l'issu du premier saut, la puce se trouve sur le point d'abscisse 2 avec le probabilité $\frac{1}{4}$, *i.e.* $P(A_2) = \frac{1}{4}$.
à l'issu du premier saut, la puce se trouve sur le point d'abscisse 3 avec le probabilité $\frac{1}{4}$, *i.e.* $P(A_3) = \frac{1}{4}$.
Ainsi, la loi de la variable aléatoire A_1 est donnée par le tableau suivant :

k	1	2	3
$P(A_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Ainsi,
$$E(A_1) = 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Pour calculer $V(A_1)$, on commence par calculer $E(A_1^2)$:

$$E(A_1^2) = 1^2\times\frac{1}{2} + 2^2\times\frac{1}{4} + 3^2\times\frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Puis, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(A_1) = E(A_1^2) - E(A_1)^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{60}{16} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}$$

2. a) Au minimum, au bout de deux sauts, la puce s'est déplacée deux fois d'une seule unité vers la droite, et au maximum, elle s'est déplacée deux fois de trois unités vers la droite. La puce peut également s'être déplacée de 3, 4 ou 5 unités. Bref,

$$A_2(\Omega) = [\![2,6]\!]$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(A_2=2) &= P(A_1=1)\times \underbrace{P_{A_1=1}(A_2=2)}_{=\frac{1}{2}} + P(A_1=2)\times \underbrace{P_{A_1=2}(A_2=2)}_{=0} + P(A_1=3)\times \underbrace{P_{A_1=3}(A_2=2)}_{=0}\\
&= \frac{1}{2}\times P(A_1=1)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

De même, D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(A_2=3) &= P(A_1=1)\times \underbrace{P_{A_1=1}(A_2=3)}_{=\frac{1}{4}} + P(A_1=2)\times \underbrace{P_{A_1=2}(A_2=3)}_{=\frac{1}{2}} + P(A_1=3)\times \underbrace{P_{A_1=3}(A_2=3)}_{=0}\\
&= \frac{1}{4}\times P(A_1=1)+\frac{1}{2}\times P(A_1=2)\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_2=4) &= P(A_1=1)\times \underbrace{P_{A_1=1}(A_2=4)}_{=\frac{1}{4}} + P(A_1=2)\times \underbrace{P_{A_1=2}(A_2=4)}_{=\frac{1}{4}} + P(A_1=3)\times \underbrace{P_{A_1=3}(A_2=4)}_{=\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{4}\times P(A_1=1)+\frac{1}{4}\times P(A_1=2)+\frac{1}{2}P(A_1=3)\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_2=5) &= P(A_1=1)\times \underbrace{P_{A_1=1}(A_2=5)}_{=0} + P(A_1=2)\times \underbrace{P_{A_1=2}(A_2=5)}_{=\frac{1}{4}} + P(A_1=3)\times \underbrace{P_{A_1=3}(A_2=5)}_{=\frac{1}{4}}\\
&= \frac{1}{4}\times P(A_1=2)+\frac{1}{4}P(A_1=3)\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_2=6) &= P(A_1=1)\times \underbrace{P_{A_1=1}(A_2=6)}_{=0} + P(A_1=2)\times \underbrace{P_{A_1=2}(A_2=6)}_{=0} + P(A_1=3)\times \underbrace{P_{A_1=3}(A_2=6)}_{=\frac{1}{4}}\\
&= \frac{1}{4}\times P(A_1=3)\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Ainsi, la loi de la variable aléatoire A_2 est donnée par :

k	2	3	4	5	6
$P(A_2 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

On peut au passage vérifier que l'on a bien $\sum_{k=2}^{6} P(A_2 = k) = 1$.

b) On a :

$$E(A_2) = 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{5}{16} + 5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{16} = \frac{56}{16} = \frac{7}{2}$$

3. a) Calculons les probabilités $P([A_2 = i] \cap [Z_2 = j])$ avec $i \in [\![2,6]\!]$ et $j \in [\![0,2]\!]$:

- $[A_2 = 2] \cap [Z_2 = 0]$ signifie que l'on a fait deux sauts d'une unité. Ainsi,

$$P([A_2 = 2] \cap [Z_2 = 0]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- $[A_2 = 3] \cap [Z_2 = 0]$ signifie que la puce a effectué :
  - ⋆ soit un premier saut d'une unité puis un deuxième saut de deux unités,
  - ⋆ soit un premier saut de deux unités puis un deuxième saut d'une unité.

  Ainsi,

$$P([A_2 = 3] \cap [Z_2 = 0]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- $[A_2 = 4] \cap [Z_2 = 0]$ signifie que l'on a effectué deux sauts de deux unités ($[Z_2 = 0]$ impose de ne faire aucun saut de trois unités, ce qui exclut les cas où l'on fait un saut d'une unité et un saut de trois unités). Ainsi,

$$P([A_2 = 4] \cap [Z_2 = 0]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

- $[A_2 = 5] \cap [Z_2 = 0]$ est un événement impossible puisque la puce se retrouver à l'abscisse 5 en deux sauts sans avoir fait de saut de trois unités. Ainsi,

$$P([A_2 = 5] \cap [Z_2 = 0]) = 0$$

- De même, $[A_2 = 6] \cap [Z_2 = 0]$ est un événement impossible donc :

$$P([A_2 = 6] \cap [Z_2 = 0]) = 0$$

- $[A_2 = 2] \cap [Z_2 = 1]$ est un événement impossible puisque la puce ne peut se retrouver à l'abscisse 2 après deux sauts, tout en ayant fait un saut de trois unités. Ainsi,

$$P([A_2 = 2] \cap [Z_2 = 1]) = 0$$

- De même,

$$P([A_2 = 3] \cap [Z_2 = 1]) = 0$$

- $[A_2 = 4] \cap [Z_2 = 1]$ signifie que la puce a effectué :
  - ⋆ soit un premier saut d'une unité puis un deuxième saut de trois unités,
  - ⋆ soit un premier saut de trois unités puis un deuxième saut d'une unité.

  Le cas de deux sauts de deux unités est exclu puisque $[Z_2 = 1]$ impose de faire un saut de trois unités. Bref,

$$P(A_2 = 4] \cap [Z_2 = 1]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- $[A_2 = 5] \cap [Z_2 = 1]$ signifie que la puce a effectué :
  - ⋆ soit un premier saut de deux unités puis un deuxième saut de trois unités,
  - ⋆ soit un premier saut de trois unités puis un deuxième saut de deux unités.

  Ainsi,
$$P([A_2 = 5] \cap [Z_2 = 1]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$
- $[A_2 = 6] \cap [Z_2 = 1]$ est un événement impossible puisque la puce ne peut se retrouver à l'abscisse 6 après deux sauts en ayant fait un seul saut de trois unités. Ainsi,
$$P([A_2 = 6] \cap [Z_2 = 1]) = 0$$
- Les événement $[A_2 = 2] \cap [Z_2 = 3]$, $[A_2 = 3] \cap [Z_2 = 3]$, $[A_2 = 4] \cap [Z_2 = 3]$, $[A_2 = 5] \cap [Z_2 = 3]$ sont impossibles puisque si la puce fait deux sauts de trois unités, alors elle se retrouve forcément à l'abscisse 6. Ainsi,
$$P([A_2 = 2] \cap [Z_2 = 3]) = P([A_2 = 3] \cap [Z_2 = 3]) = P([A_2 = 4] \cap [Z_2 = 3]) = P([A_2 = 5] \cap [Z_2 = 3]) = 0$$
- ENFIN, l'événement $[A_2 = 6] \cap [Z_2 = 2]$ signifie que la puce a effectué deux sauts de trois unités et donc :
$$P([A_2 = 6] \cap [Z_2 = 2]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Ainsi, la loi du couple (A_2, Z_2) est donnée par le tableau suivant :

	$A_2 = 2$	$A_2 = 3$	$A_2 = 4$	$A_2 = 5$	$A_2 = 6$
$Z_2 = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	0
$Z_2 = 1$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
$Z_2 = 2$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$

On peut au passage vérifier que la somme des probabilités est bien égale à 1.
La loi de Z_2 s'obtient en additionnant les probabilités figurant sur chaque ligne du tableau ci-dessus :
$$P(Z_2 = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + 0 + 0 = \frac{9}{16}$$
$$P(Z_2 = 1) = 0 + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}$$
$$P(Z_2 = 2) = 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$
Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(Z_2 = k)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

On a alors :
$$E(Z_2) = 0 \times \frac{9}{16} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

b) Pour calculer $\text{Cov}(A_2, Z_2)$, on commence par calculer $E(A_2 Z_2)$. On a :

$$E(A_2 Z_2) = 1 \times 4 \times \frac{1}{4} + 1 \times 5 \times \frac{1}{8} + 2 \times 6 \times \frac{1}{16} = \frac{19}{8}$$

Or, d'après **2.(b)** $E(A_2) = \frac{7}{2}$ et d'après **3.(a)** $E(Z_2) = \frac{1}{2}$. Ainsi, d'après la formule de König-Huygens,

$$\text{Cov}(A_2, Z_2) = E(A_2 Z_2) - E(A_2)E(Z_2) = \frac{19}{8} - \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Si A_2 et Z_2 étaient indépendantes, alors on aurait $\text{Cov}(A_2, Z_2) = 0$. Ce n'est pas le cas, donc A_2 et Z_2 ne sont pas indépendantes.

4. Le programme suivant simule les 100 premiers déplacements de la puce :

Explications : à chaque tour de boucle, la variable `t` prend pour valeur un nombre entier choisi au hasard entre 1 et 4. Ce nombre est donc inférieur ou égal à 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, il est égal à 3 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et il est égal à 4 avec probabilité $\frac{1}{4}$. La variable $A(k)$, correspondant au nombre d'unités dont la puce se déplace au tour k, vaut 1, 2 ou 3 avec les probabilités adéquates.

5. X_n compte le nombre de succès (*i.e.* "la puce se déplace d'une unité vers la droite") lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, X_n suit la loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$$

Y_n compte le nombre de succès (*i.e.* "la puce se déplace de deux unités vers la droite") lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, Y_n suit la loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{4}$.

$$\boxed{Y_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)}$$

Z_n compte le nombre de succès (*i.e.* "la puce se déplace de trois unités vers la droite") lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, Z_n suit la loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{4}$.

$$\boxed{Z_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)}$$

Enfin, à chaque instant, la probabilité que la puce se déplace d'une ou deux unités vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ainsi, $X_n + Y_n$ compte le nombre de succès (*i.e.* "la puce se déplace d'une ou deux unités vers la droite") lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, $X_n + Y_n$ suit la loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{X_n + Y_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)}$$

6. a) Puisqu'à chaque instant, la puce se déplace d'une, deux ou trois unités, $X_n + Y_n + Z_n$ est égal au nombre total de déplacements à l'issue des n sauts, donc :

$$\boxed{X_n + Y_n + Z_n = n}$$

On a donc $X_n + Y_n = n - Z_n$ et donc :

$$\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n) = \text{Cov}(Z_n, n - Z_n) = \text{Cov}(Z_n, n) - \text{Cov}(Z_n, Z_n)$$

Or, $\text{Cov}(Z_n, n) = 0$ et :

$$\text{Cov}(Z_n, Z_n) = V(Z_n) = np(1-p) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}$$

Par conséquent,

$$\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n) = -\frac{3n}{16}$$

b) On a $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ donc $V(X_n) = np(1-p) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$.
On a $Y_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$ donc $V(Y_n) = np(1-p) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}$.
On a $X_n + Y_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$ donc $V(X_n + Y_n) = np(1-p) = n \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3n}{16}$.
Or, on sait que :

$$V(X_n + Y_n) = VV(X_n) + V(Y_n) + 2\,\text{Cov}(X_n, Y_n)$$

d'où :

$$\frac{3n}{16} = \frac{n}{4} + \frac{3n}{16} + 2\,\text{Cov}(X_n, Y_n)$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_n, Y_n) &= \frac{\frac{3n}{16} - \frac{n}{4} - \frac{3n}{16}}{2} \\ &= \frac{-\frac{n}{4}}{2} = -\frac{n}{8}\end{aligned}$$

c) On a :

$$\rho(X_n, Y_n) = \frac{\text{Cov}(X_n, Y_n)}{\sqrt{V(X_n)V(Y_n)}} = \frac{-\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{n}{4} \times \frac{3n}{16}}} = \frac{\frac{-n}{8}}{\frac{n\sqrt{3}}{2\times 4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

7. a) Au cours des n sauts, les X_n sauts d'une unité augmentent l'abscisse de X_n unités, les Y_n sauts de deux unités augmentent l'abscisse de $2Y_n$ unités, et les Z_n sauts de trois unités augmentent l'abscisse de $3Z_n$ unités. Ainsi,

$$\boxed{A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n}$$

Et donc,

$$E(A_n) = E(X_n) + 2E(Y_n) + 3E(Z_n) = n\frac{1}{2} + 2 \times n \times \frac{1}{4} + 3 \times n \times \frac{3}{4} = \frac{7n}{4}$$

b) D'après la question **6.(a)**, on a $X_n + Y_n + Z_n = n$ donc $Z_n = n - (X_n + Y_n)$. Et donc,

$$\begin{aligned}A_n &= X_n + 2Y_n + 3(n - (X_n + Y_n)) \\ &= X_n + 2Y_n + 3n - 3X_n - 3Y_n \\ &= 3n - 2X_n - Y_n\end{aligned}$$

D'après les propriétés de la variance, on a alors :

$$\begin{aligned} V(A_n) &= V(3n-(2X_n+Y_n)) \\ &= (-1)^2 V(2X_n+Y_n) \\ &= V(2X_n)+V(Y_n)+2\,\mathrm{Cov}(2X_n,Y_n) \\ &= 4V(X_n)+V(Y_n)+4\,\mathrm{Cov}(X_n,Y_n) \end{aligned}$$

En utilisant les résultats de la question **6.(b)**, on obtient alors :

$$\begin{aligned} V(A_n) &= 4V(X_n)+V(Y_n)+4\,\mathrm{Cov}(X_n,Y_n) \\ &= 4\times\frac{n}{4}+\frac{3n}{16}+4\times\left(-\frac{n}{8}\right) \\ &= n+\frac{3n}{16}-\frac{n}{2} \\ &= \frac{19n}{16}-\frac{8n}{16} \\ &= \frac{11n}{16} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(A_n,X_n) &= \mathrm{Cov}(3n-2X_n-Y_n,X_n) \\ &= \mathrm{Cov}(3n,X_n)-2\,\mathrm{Cov}(X_n,X_n)-\mathrm{Cov}(Y_n,X_n) \\ &= 0-2V(X_n)-\mathrm{Cov}(X_n,Y_n) \\ &= -2\times\frac{n}{4}+\frac{n}{8} \\ &= -\frac{3n}{8} \end{aligned}$$

8. `A=(A(1),A(2),...,A(100)` est une matrice ligne possédant 100 colonnes, donc l'instruction `y=cumsum(A)` crée une matrice ligne `y=(y(1),y(2),...,y(100))` possédant également 100 colonnes, définies par :

$$\forall k\in[\![1,100]\!] \quad y(k)=\sum_{k=1}^{100} A(i)$$

Puisque $A(i)$ est le nombre d'unités du i-ième saut, $y(k)$ est l'abscisse du point où se trouve la puce à l'issu du k-ième saut.
L'exécution du programme `SCILAB` crée donc une ligne brisée représentant le déplacement de la puce lors des 100 premiers sauts. L'abscisse de chacun des 100 points est le numéro i du saut, et l'ordonnée est l'abscisse du point où se trouve la puce à l'issue du i-ième saut.
Pour information, voici un exemple de sortie graphique :