NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 9

Exercice 1 – Déterminer la nature des séries suivantes et préciser la somme en cas de convergence.

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n}$
2. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{6}$
4. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{3}{2}\right)^n$
5. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{4}{5^n}$

Solution :

1. Je reconnais la série géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.
   Comme $\frac{1}{3} \in \left]-1,1\right[$, alors la série converge et
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$
2. Je reconnais la série géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$, à laquelle il manque le premier terme. Comme $\frac{2}{3} \in \left]-1,1\right[$, alors la série converge et
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{3}} - 1 = 3 - 1 = 2.$$
3. Le terme général de cette série est $u_n = \frac{5}{6}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{6} \neq 0$.
   Donc la série diverge.
4. Je reconnais la série géométrique de raison $q = \frac{3}{2}$.
   Or $\frac{3}{2} > 1$ donc la série diverge.
5. Je commence par calculer la somme partielle de la série. Soit $n \geqslant 1$,
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{5^k} = \sum_{k=1}^{n} 4 \times \frac{1}{5^k} = 4 \times \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 4 \times \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k - \left(\frac{1}{5}\right)^0\right) = 4 \times \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k - 1\right).$$
   Je reconnais la somme partielle de la série géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.
   Comme $\frac{1}{5} \in \left]-1,1\right[$, alors la série converge et
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{5^k} = 4 \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k - 1\right) = 4 \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 4 = 4 \times \frac{1}{\frac{4}{5}} - 4 = 4 \times \frac{5}{4} - 4 = 5 - 4 = 1.$$

Exercice 2 – On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Solution : Je calcule la différence :
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. En déduire la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Solution : Je somme l'inégalité précédente pour tous les k entre 1 et n et j'obtiens une somme télescopique :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\\ &= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

3. En déduire que la série converge et préciser sa somme.

Solution : Comme $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1,$ alors la série converge et
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$