NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 12

Exercice 1 – Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger. En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est de 15000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre de clients abonnés au site évolue selon la règle suivante : chaque mois, 10% des clients se désabonnent et 2500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture. On a ainsi $v_0 = 15000$.

1. Calculer v_1 et v_2.

Solution : Je calcule grâce à la relation de récurrence donnée par l'énoncé :

$$v_1 = 0.9 \times 15000 + 2500 = 16000 \quad \text{et} \quad v_2 = 0.9 \times 16000 + 2500 = 16900.$$

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $\quad v_{n+1} = 0.9 \times v_n + 2500$.

Solution : Le nombre d'abonnés diminue de 10% chaque mois, il est donc multiplié par 0.9. À cela, je dois ajouter 2500, qui correspond aux 2500 nouveaux abonnés.
Alors j'obtiens bien

$$v_{n+1} = 0.9 \times v_n + 2500.$$

3. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 25000$.

   a) Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser son premier terme.

Solution : J'exprime w_{n+1} en fonction de w_n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 25000 = 0.9 \times v_n + 2500 - 25000 = 0.9 \times v_n - 22500 \\ &= 0.9 \times (w_n + 25000) - 22500 = 0.9w_n + 22500 - 22500 = 0.9w_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de raison $q = 0.9$.
Par ailleurs, son premier terme est donné par $w_0 = v_0 - 25000 = 15000 - 25000 = -10000$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $\quad v_n = 25000 - 10000 \times 0.9^n$.

Solution : Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, alors pour tout n,

$$w_n = w_0 \times q^n = -10000 \times 0.9^n.$$

Par ailleurs, puisque $v_n = w_n + 25000$ alors j'obtiens que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 25000 - 10000 \times 0.9^n.$$

c) Calculer le nombre d'abonnés au bout d'un an.
Indication numérique : $0.9^{12} \approx 0.2824$.

> **Solution :** Une année correspond à 12 mois. Il me faut donc calculer v_{12}.
> La formule de la question précédente me donne
> $$v_{12} = 25000 - 10000 \times 0.9^{12} \approx 25000 - 10000 \times 0,2824 = 25000 - 2824 = 22176.$$

Exercice 2 –

1. Calculer la somme suivante :
$$S = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2^k + 1} + \sum_{k=1}^{3} \frac{k^2}{2}.$$

> **Solution :** Je commence par calculer chaque somme séparément :
> $$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2^k+1} = \frac{1}{2^0+1} + \frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} = \frac{45+30+18+10}{90} = \frac{103}{90},$$
> $$\sum_{k=1}^{3} \frac{k^2}{2} = \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$
> Donc
> $$S = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2^k+1} + \sum_{k=1}^{3} \frac{k^2}{2} = \frac{103}{90} + 7 = \frac{103}{90} + \frac{630}{90} = \frac{733}{90}.$$

2. Traduire à l'aide du symbole Σ la somme suivante (on ne demande pas de calculer cette somme) :
$$T = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{102}{103} + \frac{103}{104}.$$

> **Solution :** Je remarque que
> $$T = \sum_{k=1}^{103} \frac{k}{k+1}.$$