8 | Dérivabilité et convexité

I – Dérivée en un point

1 – Nombre dérivé

Définition 8.1 – Soit f une fonction définie sur intervalle I et soit $x_0 \in I$. La fonction f est dite **dérivable en** x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Exemple 8.2 –

- La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en 1.

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1^2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 2 \quad \text{et} \quad f'(1) = 2.$$

- Plus généralement, la fonction f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbf{R}$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x+x_0 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 2x_0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) = 2x_0.$$

- La fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbf{R}^*$.

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \frac{\frac{x_0-x}{xx_0}}{x-x_0} = -\frac{1}{xx_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x_0^2} \quad \text{et} \quad f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Remarque 8.3 –

- En posant $h = x - x_0$, et sous réserve d'existence, on a également

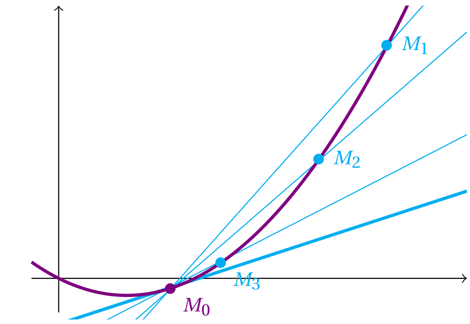
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

- En pratique, on utilise la définition seulement pour montrer la dérivabilité aux "points à problèmes". En dehors de ces points, on justifie la dérivabilité à l'aide des propriétés de la Section II.

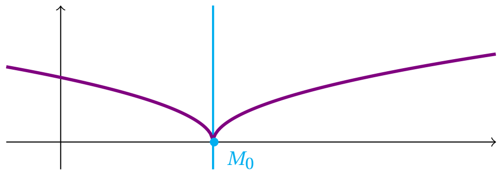
2 – Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Notons M_0 le point de coordonnées $\big(x_0, f(x_0)\big)$ et M le point de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ pour $x \in I$. Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ correspond au coefficient directeur de la droite (MM_0).

- Si f est dérivable en x_0, alors ce coefficient directeur tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. Par ailleurs, la droite (M_0M) tend vers une position limite qui est la tangente à la courbe représentative de f au point x_0. Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe f au point M_0.



- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, alors la courbe représentative de f possède en x_0 une tangente verticale d'équation $x = x_0$.



On résume cela dans la proposition suivante.

Proposition 8.4

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

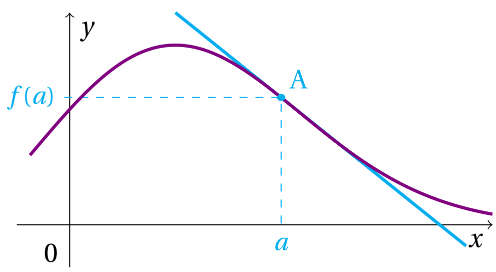
- Si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse x_0. L'équation de cette tangente est
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$
- Si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

Exemple 8.5 –

- Puisque la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en $x_0 = 1$ de dérivée $f'(1) = 2$, la courbe représentative de f admet au point M_0 de coordonnées $(1;1)$ une tangente d'équation
$$y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1.$$
- Au contraire, la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en 0 et la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point $(0;0)$.

3 – Approximation affine

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Au voisinage de a, la tangente en a ressemble beaucoup à la courbe $\mathscr{C}_f$, on dit que la tangente est une **approximation affine** de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse a.



Théorème 8.6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a. Alors pour h proche de 0, on a
$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Exemple 8.7 – Calculer une valeur approchée de $\sqrt{1.02}$.
Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 1$. f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$. Donc

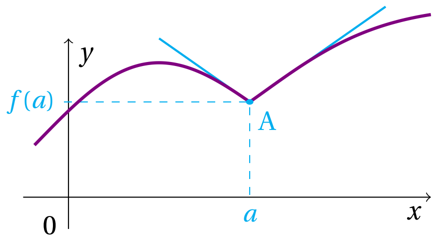
$$\sqrt{1.02} = f(1.02) \approx 1 + \frac{1}{2}(1.02 - 1) = 1.01.$$

Avec une calculatrice, on obtient $\sqrt{1.02} = 1.00995$.

Corollaire 8.8

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarque 8.9 – Une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. Par exemple, la courbe ci-contre admet des demi-tangentes à gauche et à droite en a, mais pas de tangente en a.



4 – Nombre dérivé à droite et à gauche

Définition 8.10 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
La fonction f est dite **dérivable à droite** en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^+. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé à droite** de f en x_0, et est notée $f'_d(x_0)$.

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

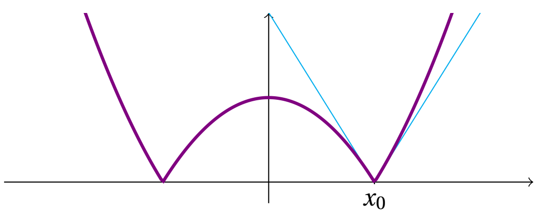
De même, f est dite **dérivable à gauche** en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^-. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé à gauche** de f en x_0, et est notée $f'_g(x_0)$.

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Proposition 8.11

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Alors la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 **ET** que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. Dans ce cas, on a $f'_g(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0)$.

La fonction f dont la courbe est donnée ci-contre est dérivable à gauche et à droite en x_0, mais pas en x_0 car $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$.



II – Fonction dérivée

Définition 8.12 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **dérivable sur** I, si f est dérivable en tout point $x \in I$. La fonction $f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ est appelée la **fonction dérivée** de la fonction f.

Exemple 8.13 –

- La fonction carrée est dérivable sur $\mathbf{R}$.
- La fonction inverse est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
- La fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

1 – Dérivée des fonctions usuelles

Le tableau suivant indique les dérivées des fonctions usuelles.

f **est définie sur**	$f(x)$	$f'(x)$	f **est dérivable sur**
$\mathbf{R}$	k	0	$\mathbf{R}$
$\mathbf{R}$	x	1	$\mathbf{R}$
$\mathbf{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$ pour n entier $n \geqslant 2$
$\mathbf{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$
$\mathbf{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbf{R}^*$ pour n entier $n \geqslant 1$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

2 – Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Opération	**Dérivée**
Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Multiplication par une constante k	$(ku)' = k \times u'$
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Composition	$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

Remarque 8.14 – La formule de dérivation de la composition de deux fonctions permet de déterminer de nombreuses formules de dérivations.

Fonction	**Dérivée**
u^n pour $n > 0$	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

Exemple 8.15 – Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

- $f(x) = 2x^2 - x + 5$
  f est un polynôme et sa dérivée se calcule tout simplement
  $$f'(x) = 4x - 1.$$
- $g(x) = (x+3)\sqrt{x}$
  g est de la forme uv avec $u(x) = x+3$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Donc $g' = u'v + uv'$, avec
  $$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
  Donc
  $$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x+3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x+3}{2\sqrt{x}} = \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x+3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+3}{2\sqrt{x}}.$$
- $h(x) = \dfrac{2x-5}{x^2+3}$
  h est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x-5$ et $v(x) = x^2+3$. Donc $h' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, avec
  $$u'(x) = 2 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x.$$
  Donc
  $$h'(x) = \frac{2(x^2+3) - 2x(2x-5)}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^2+6-4x^2+10x}{(x^2+3)^2} = \frac{-2x^2+10x+6}{(x^2+3)^2}.$$
- $i(x) = x\sqrt{x} - x$
  La fonction i est la somme de la fonction $x\sqrt{x}$ qui est un produit uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ et qui se dérive donc comme un produit $(uv)' = u'v + uv'$, et de la fonction $-x$ dont la dérivée vaut -1. On a
  $$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
  Donc
  $$i'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$
- $j(x) = \sqrt{x^2+1}$
  j est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2+1$, donc $j' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, avec $u'(x) = 2x$. Donc
  $$j'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}.$$
- $k(x) = \dfrac{1}{2x^2+3}$
  k est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 2x^2+3$ donc $k' = \dfrac{-u'}{u^2}$, avec $u'(x) = 4x$. Donc
  $$k'(x) = \frac{-4x}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

Proposition 8.16

- Une fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbf{R}$.
- Une fraction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

3 – Dérivées successives

Exemple 8.17 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.
La fonction f est dérivable et $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$.
La fonction f' est dérivable et $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f''(x) = 6x - 6$.
La fonction f'' est dérivable et $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'''(x) = f^{(3)}(x) = 6$.

Définition 8.18 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **deux fois dérivable** si f et f' sont dérivables. Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Plus généralement, on dit que f est n **fois dérivable** ($n \geqslant 1$) si, pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $f^{(p)}$ est dérivable. On note alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

ATTENTION ! La notation $f^{(p)}$ n'a rien à voir avec la notion de puissance !

Exemple 8.19 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \qquad \text{etc.}$$

On peut alors montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

III – Application à l'étude des variations d'une fonction

1 – Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 8.20

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors

$$f \text{ est constante sur } I \iff \forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

ATTENTION ! Le résultat est faux si I n'est pas un intervalle. Ainsi la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$, vérifie $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, mais f n'est pas constante.

Théorème 8.21

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors

- f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$) pour tout $x \in I$.
- f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I **sauf éventuellement en un nombre fini de points** où f' peut s'annuler.

Exemple 8.22 – On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3$.
Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 3x^2$. Ainsi $f'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) > 0$. On peut donc appliquer le deuxième point du théorème précédent et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Méthode 8.23 – Étudier les variations d'une fonction

1. On justifie que la fonction est bien dérivable.
2. On calcule la dérivée de la fonction.
3. On détermine le signe de la dérivée.
4. On en déduit les variations de la fonction.

Exemple 8.24 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$. Étudier les variations de la fonction f.
La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ en tant que polynôme. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36.$$

Il nous faut maintenant étudier le signe de ce polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 6 \times 36 = 36$. L'équation $6x^2 - 30x + 36 = 0$ admet donc deux racines,

$$x_1 = \frac{30 - \sqrt{36}}{2 \times 6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{30 + \sqrt{36}}{2 \times 6} = 3.$$

Par ailleurs, le coefficient dominant est strictement positif. On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On prendra par ailleurs l'habitude de compléter les tableaux de variation par les limites de f aux bornes de l'intervalle et par les valeurs de f aux valeurs où f change de monotonie. Ainsi on a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty,$$

et

$$f(2) = 2 \times 2^3 - 15 \times 2^2 + 36 \times 2 + 7 = 35 \quad \text{et} \quad f(3) = 2 \times 3^3 - 15 \times 3^2 + 36 \times 3 + 7 = 34.$$

D'où le tableau de variation complété.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	35	$\searrow$	34	$\nearrow$	$+\infty$

2 – Extrema locaux

On rappelle qu'un extremum est un maximum ou un minimum.

Théorème 8.25

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.

1. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

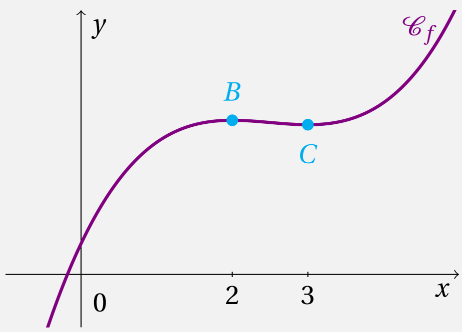
x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Exemple 8.26 – Reprenons l'exemple de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$.
On a déjà établi le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	35	$\searrow$	34	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi f' s'annule aux points d'abscisses 2 et 3 tout en changeant de signe. Donc, 2 et 3 sont les abscisses des extrema locaux de f. D'après le tableau de variation, on peut affirmer que 35 est un maximum local, atteint en 2, et que 34 est un minimum local, atteint en 3.



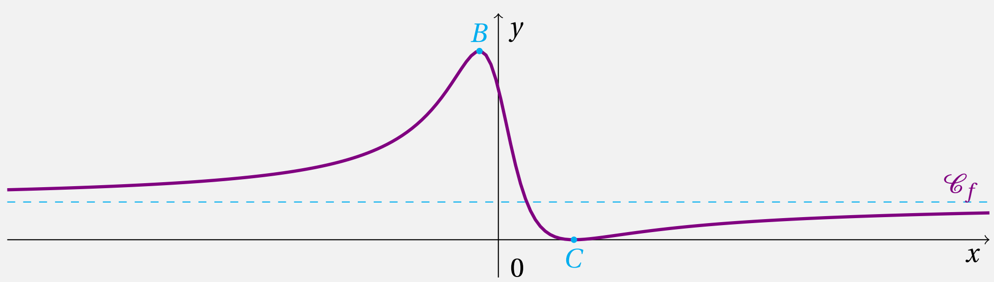
3 – Exemple : étude d'une fonction

Exemple 8.27 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.
   f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme et quotient de deux fonctions dérivables. $f = 1 - \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = -\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, avec pour tout réel x,
   $$u(x) = 4x-3, \text{ d'où } u'(x) = 4, \quad \text{et} \quad v(x) = x^2+1, \text{ d'où } v'(x) = 2x.$$
   Soit pour tout réel x,
   $$f'(x) = -\frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} = -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}.$$
   Ainsi f' est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{\left(x^2+1\right)^2}$
2. Étudier les variations de la fonction f.
   Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée. Étudions le signe de $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$. Pour tout réel x, $(x^2+1)^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a=4$, $b=-6$ et $c=-4$. Le discriminant du trinôme est $\Delta = (-6)^2 - 4\times 4 \times (-4) = 100$. Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines,
   $$x_1 = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6+10}{8} = 2.$$
   Un polynôme du second degré est du signe de a, sauf pour les valeurs comprises entre les racines. De plus, on a
   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 1 - \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1.$$
   Nous pouvons déduire le tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x ainsi que les variations de la fonction f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

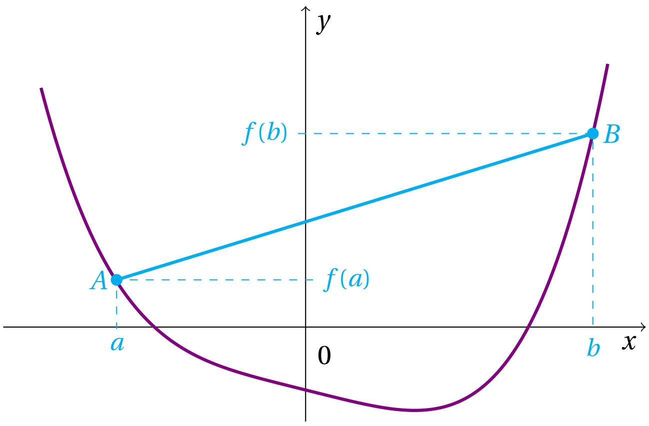


IV – Convexité

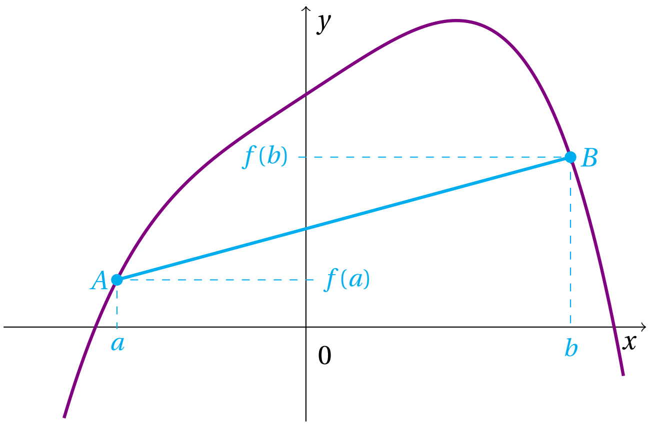
1 – Définition

Définition 8.28 – Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que la fonction f est **convexe** sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située **au-dessous de chacune de ses cordes**.
- Dire que la fonction f est **concave** sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située **au-dessus de chacune de ses cordes**.



f est convexe.



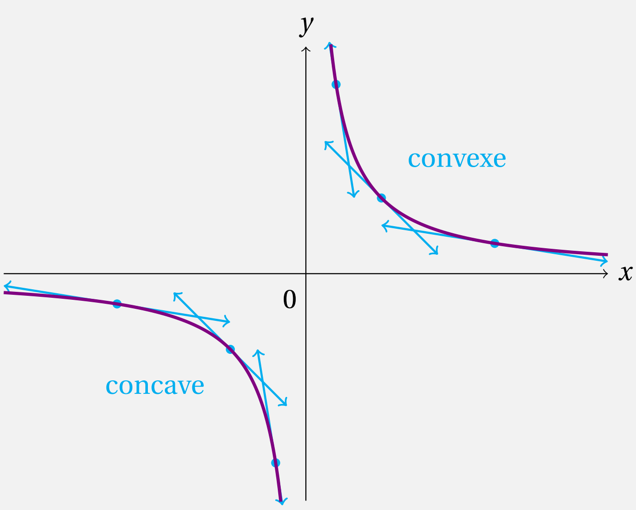
f est concave

Théorème 8.29

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors

- f est **convexe** sur I si et seulement si sa courbe est située entièrement **au-dessus de chacune de ses tangentes**.
- f est **concave** sur I si et seulement si sa courbe est située entièrement **au-dessous de chacune de ses tangentes**.

Exemple 8.30 – La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$.



2 – Dérivation et convexité

Théorème 8.31

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors

- f est **convexe** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.
- f est **concave** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

Exemple 8.32 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbf{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbf{R}$ par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$.
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x-3$. D'où le tableau suivant.

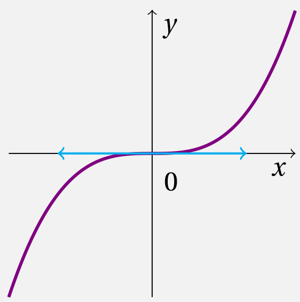
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$			-162	$\nearrow$	$+\infty$

En conclusion, f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

3 – Point d'inflexion

Définition 8.33 – Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Un **point d'inflexion** de la courbe $\mathscr{C}_f$ est un point où la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en ce point. C'est aussi le point où la convexité change de sens.

Exemple 8.34 – La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine (le point de coordonnées $(0;0)$) du repère.
La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $(0;0)$ est un point d'inflexion.



Théorème 8.35

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Le point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_0.

Exemple 8.36 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe.
Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbf{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 40$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbf{R}$ par $f''(x) = 20x^2(x-3)$.
L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x-3$.
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$			-162	$\nearrow$	$+\infty$

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f', on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A\big(3; f(3)\big)$.
En effet,

- $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty; 3]$, $f''(x) \leqslant 0$ donc le point $B\,(0; 120)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$.)
- f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A\,(3; -162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$.)