5 | Matrices inversibles

Dans tout ce chapitre, on ne considérera que des matrices carrées.

I – Matrices inversibles

Définition 5.1 – Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Si une telle matrice B existe, elle est appelée inverse de A et est notée A^{-1}.

Remarque 5.2 –

- La notion de matrice inversible n'a de sens **QUE** pour des matrices carrées.
- Une matrice inversible admet un unique inverse.
  Supposons qu'il existe deux matrices B_1 et B_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $AB_1 = B_1A = I_n$ et $AB_2 = B_2A = I_n$.
  Alors, en particulier, $(B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$ et $(B_1A)B_2 = B_1(AB_2) = B_1I_n = B_1$, et donc $B_1 = B_2$.

Exemple 5.3 –

1. La matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$. En effet,
$$I_nI_n = I_n \quad \text{et} \quad I_nI_n = I_n.$$
2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. En effet,
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$
3. La matrice carrée nulle O_n n'est pas inversible car
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad O_n \times M = M \times O_n = O_n \neq I_n.$$
4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle mais elle n'est pas inversible pour autant.
   Quelle que soit la matrice par laquelle on la multiplie à droite, la première ligne du résultat sera constituée de trois zéros et donc la matrice produit ne peut pas être égale à I_3.

Théorème 5.4

Si P et Q sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $PQ = I_n$, alors P et Q sont inversibles et on a

$$P^{-1} = Q \quad \text{et} \quad Q^{-1} = P.$$

Exemple 5.5 –

- Considérons les matrices $P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

$$PQ = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

ce qui prouve que P et Q sont inversibles et qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

- Considérons les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$

ce qui prouve que P et Q sont inversibles et qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

Corollaire 5.6

Si P et Q sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $PQ = \lambda I_n$, avec $\lambda \neq 0$, alors P et Q sont inversibles et on a

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda} Q \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{\lambda} P.$$

Exemple 5.7 – Considérons les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10 I_3,$$

ce qui prouve que P et Q sont inversibles et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

Remarquons que le cas des matrices diagonales est facile.

Proposition 5.8

Une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux d_i sont tous non-nuls. Dans ce cas,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.9 –

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.10

Soit A une matrice triangulaire supérieure ou inférieure de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si ses termes diagonaux sont tous non-nuls.

Exemple 5.11 –

- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ est inversible car 2, 1 et -4 sont non-nuls.
- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car le deuxième coefficient diagonal est nul.

Proposition 5.12

Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A est inversible, alors A est simplifiable à gauche et à droite, c'est-à-dire que

$$AB = AC \implies B = C,$$

$$BA = CA \implies B = C.$$

Terminons avec le cas des matrices carrées de taille 2.

Proposition 5.13

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On commence par observer que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2,$$

ce qui prouve que si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si en revanche, $ad - bc = 0$, alors en posant $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, on a $AB = O_2$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que A soit inversible. Alors, on aurait $B = A^{-1}AB = A^{-1}O_2 = O_2$, ce qui donnerait $a = b = c = d = 0$ et donc $A = O_2$. Or, la matrice nulle d'ordre 2 n'est pas inversible. Contradiction. Donc A n'est pas inversible. □

Exemple 5.14 – Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, préciser leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   On a $1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

   $3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$ donc B n'est pas inversible.

II – Calcul effectif de l'inverse d'une matrice

1 – Calcul de l'inverse par la résolution d'un système

Théorème 5.15

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, le système linéaire $AX = Y$ admet une unique solution.

Méthode 5.16 – Montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on résout le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ en fonction de $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ quelconque fixé, puis on discute :

- si le système admet une unique solution $X = BY$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$,
- sinon la matrice n'est pas inversible.

Exemple 5.17 – Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on a les équivalences suivantes.

$$
\begin{aligned}
AX = Y &\iff \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr} x & - & 7y & + & 11z & = & a \\ -x & + & 12y & - & 19z & = & b \\ & - & 3y & + & 5z & = & c \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrr} x & - & 7y & + & 11z & = & a & & \\ & & 5y & - & 8z & = & a & + & b \\ & - & 3y & + & 5z & = & c & & \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrr} x & - & 7y & + & 11z & = & a & & \\ & & 15y & - & 24z & = & 3a & + & 3b \\ & - & 15y & + & 25z & = & & & 5c \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 5L_3 \end{array} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrrr} x & - & 7y & + & 11z & = & a & & & & \\ & & 15y & - & 24z & = & 3a & + & 3b & & \\ & & & & z & = & 3a & + & 3b & + & 5c \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrrr} x & - & 7y & + & 11z & = & a & & & & \\ & & 15y & & & = & 75a & + & 75b & + & 120c \\ & & & & z & = & 3a & + & 3b & + & 5c \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 24L_3 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrrr} x & - & 7y & + & 11z & = & a & & & & \\ & & y & & & = & 5a & + & 5b & + & 8c \\ & & & & z & = & 3a & + & 3b & + & 5c \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{15} L_2 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrr} x & = & 3a & + & 2b & + & c \\ y & = & 5a & + & 5b & + & 8c \\ z & = & 3a & + & 3b & + & 5c \end{array} \right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 7L_2 - 11L_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Finalement, la matrice A est inversible et son inverse est donné par $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2 – Calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss

Théorème 5.18

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A transforme la matrice A en une matrice B inversible.

Dès lors, en transformant la matrice A en la matrice identité à l'aide d'opérations sur les lignes et en effectuant simultanément les mêmes opérations sur la matrice identité, on obtient l'inverse de la matrice A.

Méthode 5.19 – Méthode de Gauss-Jordan
En pratique, pour transformer A en I_n, on commence par transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure par la méthode du pivot de Gauss, ce qui permet déjà de savoir si A est inversible ou non. Le cas échéant, on transforme alors la matrice triangulaire obtenue en la matrice identité. C'est la méthode de Gauss-Jordan.

Exemple 5.20 – On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
On utilise donc la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec tous ses pivots non-nuls donc elle est inversible. Par théorème, la matrice P est elle aussi inversible. Poursuivons la méthode.

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc la matrice P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.