

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez.

Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise.

Ce sujet comporte 1 page et est constitué de 5 problèmes. Bon courage!

Exercice 1 – Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

Solution :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{8}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

2. $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right)$

Solution :

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{7}{12} \\ &= \frac{8}{12} - \frac{7}{12} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

3. $C = \frac{1 + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}$

Solution :

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1 + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} \\
 &= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \frac{7}{12}} \\
 &= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{12}{60} - \frac{70}{60}} \\
 &= \frac{11}{6} \times \frac{-60}{58} \\
 &= -\frac{110}{58} \\
 &= -\frac{55}{29}
 \end{aligned}$$

$$4. D = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \div \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$

Solution :

$$\begin{aligned}
 D &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \div \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{20} \div \frac{9}{4} \\
 &= \frac{1}{120} \times \frac{4}{9} \\
 &= \frac{1}{270}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 – Résoudre les équations et inéquations suivantes.

$$1. 2x - 3 = 4$$

$$\textbf{Solution :} \text{ On a } 2x - 3 = 4 \iff 2x = 7 \iff x = \frac{7}{2} \text{ donc } \mathcal{S} = \left\{\frac{7}{2}\right\}.$$

$$2. x - \frac{1}{2} = 2x - 1$$

$$\textbf{Solution :} \text{ On a } x - \frac{1}{2} = 2x - 1 \iff -x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{2} \text{ donc } \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

$$3. 2x - 4 < 3x + 5$$

$$\textbf{Solution :} \text{ On a } 2x - 4 < 3x + 5 \iff -x < 9 \iff x > -9 \text{ donc } \mathcal{S} =] -9; +\infty[.$$

$$4. x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$\textbf{Solution :} \text{ Commençons par calculer le discriminant } \Delta = 144 - 108 = 36.$$

Il y a donc deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{12-6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12+6}{2} = 9.$$

Donc $\mathcal{S} = \{3; 9\}$.

5. $-x^2 + 3x + 10 < 0$

Solution : Commençons par calculer le discriminant $\Delta = 9 + 40 = 49$.

Il y a donc deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{-3-7}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+7}{-2} = -2.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$-x^2+3x+10$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi, $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]5; +\infty[$.

6. $x(x-2) = -1$

Solution : On a $x(x-2) = -1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 - 4 = 0$.

Il y a donc une seule racine

$$x_0 = \frac{2}{2} = 1.$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{1\}$.

7. $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x+1}$

Solution : On a

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+3} = \frac{1}{x+1} &\iff \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1} = 0 \\ &\iff \frac{2(x+1) - (x+3)}{(x+1)(x+3)} = 0 \\ &\iff \frac{2x+2-x-3}{(x+1)(x+3)} = 0 \\ &\iff \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} = 0 \end{aligned}$$

On a $(x+1)(x+3) = 0 \iff x+1 = 0$ ou $x+3 = 0 \iff x = -1$ ou $x = -3$ donc les valeurs interdites sont $x = -1$ et $x = -3$.

Par ailleurs, $x-1 = 0 \iff x = 1$. Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

8. $\frac{x^2-5x+6}{x-3} = 0$

Solution : On a $x - 3 = 0 \iff x = 3$ donc il y a une valeur interdite qui est $x = 3$. Par ailleurs, le discriminant de $x^2 - 5x + 6$ vaut $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Au final, on a donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

9. $\frac{x}{x+1} \leq \frac{2}{2x-3}$

Solution : On a

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} \leq \frac{2}{2x-3} &\iff \frac{x}{x+1} - \frac{2}{2x-3} \leq 0 \\ &\iff \frac{x(2x-3) - 2(x+1)}{(x+1)(2x-3)} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x^2 - 3x - 2x - 2}{(x+1)(2x-3)} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x^2 - 5x - 2}{(x+1)(2x-3)} \leq 0 \end{aligned}$$

Calculons le discriminant de $2x^2 - 5x - 2$: $\Delta = 25 + 16 = 41$.

Il y a donc deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{41}}{4} \simeq -0,3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{41}}{4} \simeq 2,8.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	-1	x_1	$\frac{3}{2}$	x_2	$+\infty$	
$2x^2-2x-5$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x^2-5x-2}{(x+1)(2x-3)}$	$+$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Donc $\mathcal{S} =]-1; x_1] \cup \left] \frac{3}{2}; x_2 \right]$.

10. $x^3 - 9x^2 + 11x + 21 = 0$

Solution : On a $(-1)^3 - 9 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) + 21 = -1 - 9 - 11 + 21 = 0$. On effectue donc la division euclidienne de $x^3 - 9x^2 + 11x + 21$ par $x + 1$.

x^3	-	$9x^2$	+	$11x$	+	21	$x + 1$
x^3	+	x^2					$x^2 - 10x + 1$
	-	$10x^2$	+	$11x$	+	21	
	-	$10x^2$	-	$10x$			
				$21x$	+	21	
				$21x$	+	21	
							0

Conclusion : $P(x) = (x + 1)(x^2 - 10x + 21)$.

On calcule le discriminant de $x^2 - 10x + 21$: $\Delta = 100 - 84 = 16$.

Il y a donc deux racines, qui sont

$$x_1 = \frac{10 - 4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 4}{2} = 7.$$

Au final, on a donc $\mathcal{S} = \{-1; 3; 7\}$.

Exercice 3 – Soit m un nombre réel. On considère l'équation $x^2 + 4x + 2(m - 1) = 0$.

1. Cette équation admet-elle une solution lorsque $m = 4$?

Solution : Lorsque $m = 3$, $x^2 + 4x + 2(m - 1) = x^2 + 4x + 2 \times 3$.

L'équation que l'on cherche à résoudre est donc la suivante : $x^2 + 4x + 6 = 0$.

On commence par calculer le discriminant. $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 6 = 16 - 24 = -8 < 0$.

Comme le discriminant est négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle lorsque $m = 4$.

2. Déterminer m pour que cette équation admette une unique solution. Déterminer cette solution.

Solution : On sait que cette équation admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul. Or $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 2(m - 1) = 16 - 8(m - 1)$.

Donc $\Delta = 0 \iff 8(m - 1) = 16 \iff m - 1 = 2 \iff m = 3$.

Lorsque $m = 3$, l'équation devient $x^2 + 4x + 4$. Son discriminant est nul et l'unique solution est donnée par

$$x_0 = \frac{-4}{2 \times 1} = -2.$$

3. Préciser les cas, en fonction de m , où cette équation admet deux solutions distinctes, et où cette équation n'admet aucune solution.

Solution : L'équation admet 2 solutions distinctes si et seulement si $\Delta > 0 \iff 16 - 8(m - 1) > 0 \iff m - 1 < 2 \iff m < 3$.

De la même façon, l'équation n'admet aucune solution réelle lorsque $\Delta < 0 \iff m > 3$.

Exercice 4 –

1. Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$.

- (a) Montrer que le polynôme P peut se factoriser sous la forme $P(x) = (x + 1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.

Solution : On a $P(-1) = -3 - 7 + 7 + 3 = 0$. Donc il existe Q tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$. On détermine ce polynôme Q en effectuant la division euclidienne de P par $x+1$.

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 & - & 7x^2 & - & 7x & + & 3 & & x+1 \\
 3x^3 & + & 3x^2 & & & & & & \hline
 & - & 10x^2 & - & 7x & + & 3 & & \\
 & - & 10x^2 & - & 10x & & & & \hline
 & & & & 3x & + & 3 & & \\
 & & & & 3x & + & 3 & & \hline
 & & & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Donc $P(x) = (x+1)(3x^2 - 10x + 3)$.

(b) Déterminer alors les solutions de l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

Solution : Calculons le discriminant de $3x^2 - 10x + 3$. On a $\Delta = 100 - 36 = 64$. Il y a donc deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3.$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{ -1; \frac{1}{3}; 3 \right\}.$$

2. On considère la fraction rationnelle $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 12x + 12}$.

(a) Déterminer les valeurs interdites de $f(x)$.

Solution : Déterminons les valeurs interdites. Ce sont les solutions de l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 144 - 144 = 0$. Il y a donc une racine qui est

$$x_0 = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc 2 est valeur interdite de $f(x)$.

(b) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Solution : On a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	2	3	$+\infty$		
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		
$3x^2-10x+3$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$3x^2-12x+12$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

$$\text{Et donc } \mathcal{S} = \left[-1; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty[.$$

Exercice 5 – Soit $f(x) = x + \frac{16}{x}$. Montrer que $f(x) \geq 8$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} f(x) \geq 8 &\iff x + \frac{16}{x} - 8 \geq 0 \\ &\iff \frac{x \times x + 16 - 8x}{x} \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 8x + 16}{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Or je reconnais en $x^2 - 8x + 16$ une identité remarquable :

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x - 4)^2.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$(x-4)^2$	$+$	$+$	0	$+$	
x	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{x^2-8x+16}{x}$	$-$		$+$	0	$+$

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a bien $\frac{x^2 - 8x + 16}{x} \geq 0$ i.e., $f(x) \geq 8$.