# DEVOIR SURVEILLÉ 3

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
***Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.***
*Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.*

*Ce sujet comporte 5 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage!*

**Exercice 1 –**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

2. **Application à l'étude de deux suites.**
On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 3b_n + 3^n.$$

(a) Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 4 dans le programme suivant pour qu'il affiche la valeur de $a_n$, l'entier $n$ étant donné par l'utilisateur (on justifiera la réponse)?

```
1.  n=input(''n?'')
2.  a=2
3.  for i=1:n
4.       ...
5.  end
6.  disp(a)
```

`i. a=2*a+3∧n`     `ii. a=2*a+3∧(i-1)`
`iii.` une autre instruction à préciser.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a $X_{n+1} = AX_n$.

(c) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche la valeur de $a_n$, l'entier $n$ étant donné par l'utilisateur.

```
1.  n=input(''n?'')
2.  A=[....]
3.  X=[....]
4.  for i=1:n
5.       X=...
6.  end
7.  disp(X(1))
```

(d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $X_n = A^n X_0$.

(e) En déduire en utilisant la question **1.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$

3. **Application au calcul des puissances d'une autre matrice.**

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $PQ$.

(b) Vérifier que $PMQ = A$.

(c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a $M^n = QA^nP$.
En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$

4. **Application au calcul d'une somme.**

(a) Montrer que pour tout entier naturel $k$, on a $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

(b) Pour tout entier naturel $n$, calculer $\sum_{k=0}^{n} 3^k$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel $k$, on a $\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$.

(d) Déduire des questions précédentes et de la question **2.e)** que pour tout entier naturel $n$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}.$$

**Exercice 2 –** On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de $f$.

(c) Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $[1, +\infty[$ et en dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0, 1]$.

2. (a) Calculer la dérivée de $g$. En déduire le sens de variation de $g$ sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2).$$

En déduire que $g(x)$ est strictement positif sur $]0, +\infty[$.

(c) Montrer que la dérivée de $f$ vérifie pour tout réel $x$ strictement positif,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

(d) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de $f$ en y faisant figurer les limites trouvées en **1.a)**.

3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$.

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n \geqslant n+1$.

   (b) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 3 –** Coralie est étudiante en classe préparatoire. Chaque matin, elle se lève en retard avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle se lève en retard, elle est obligée de prendre le bus pour se rendre au lycée. Par contre, lorsqu'elle est à l'heure, elle choisit avec deux chances sur cinq d'aller à pied et avec trois chances sur cinq de prendre le bus.

**Partie I**

On considère un matin donné et on définit les évènements $R$ : "Coralie se lève en retard" et $B$ : "Coralie prend le bus".

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(B) = \frac{11}{15}$.
2. On remarque qu'un matin donné, Coralie prend le bus. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?
3. On étudie maintenant les trajets pendant les 180 jours de cours d'une année scolaire. On suppose que chaque jour, les choix de Coralie sont indépendants des choix des jours précédents.
   On nomme $X$ la variable aléatoire égale au nombre de fois où Coralie prend le bus.
   (a) Reconnaître la loi de $X$. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par $X$ et pour chaque entier $k$, une expression de $P(X = k)$ en fonction de $k$.
   (b) Donner $E(X)$ et $V(X)$.
   (c) En moyenne, combien de matins dans l'année Coralie peut-elle espérer aller au lycée à pied ?

**Partie II**

La société de bus annonce pour la semaine prochaine un préavis de grève reconductible. On suppose que durant la grève, aucune bus ne circule. Cette fois-ci, bien entendu, Coralie est obligée de se rendre au lycée à pied. Mais si elle se lève en retard, elle arrivera en retard au lycée. Chaque jour de grève, elle arrive donc en retard au lycée avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On admet que la durée de la grève en nombre de jours suit une variable aléatoire $N$ dont la loi est donnée dans le tableau suivant :

| $k$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(N=k)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |

Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de jours où Coralie est en retard au lycée pendant la période de grève.

1. Calculer $E(N)$.
2. Décrire $Y(\Omega)$, ensemble des valeurs prises par $Y$.
3. (a) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{[N=1]}(Y=0)$ et $P_{[N=1]}(Y=1)$.

   (b) En déduire que $P\big([N=1]\cap[Y=0]\big)=\dfrac{1}{3}$ et $P\big([N=1]\cap[Y=1]\big)=\dfrac{1}{6}$.
   Que valent $P\big([N=1]\cap[Y=2]\big)$ et $P\big([N=1]\cap[Y=3]\big)$ ?
4. On admet que la loi conjointe du couple $(N,Y)$ est donnée dans le tableau suivant :

| $N$ \ $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 |
| 2 | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{72}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{72}$ |

   (a) Déterminer la loi de $Y$. Justifier que $E(Y)=\dfrac{5}{8}$.

   (b) Quelle est la probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève ?

   (c) Les variables aléatoires $Y$ et $N$ sont-elles indépendantes ?

   (d) Calculer $E(YN)$. En déduire $\mathrm{Cov}(Y,N)$.

**Exercice 4 –** On considère deux urnes notées respectivement $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. On suppose que :

- l'urne $\mathcal{U}$ contient deux boules noires et deux boules blanches,
- l'urne $\mathcal{V}$ contient deux boules noires, deux boules blanches et deux boules vertes.

1. On considère l'expérience suivante $(\mathcal{E})$ : "On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne $\mathcal{U}$, on note leur couleur, puis on les remet dans l'urne $\mathcal{U}$".

   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

   Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. On répète $n$ fois l'expérience $(\mathcal{E})$ et on note $N$ la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu deux boules de même couleur lors de ces $n$ tirages dans l'urne $\mathcal{U}$.

   (b) Montrer que $N$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres puis expliciter $P(N=k)$ pour $k$ appartenant aux valeurs prises par $N$.

   (c) Préciser la valeur de l'espérance $E(N)$ de $N$ ainsi que sa variance $V(N)$.

   (d) Quelle est la probabilité que sur ces $n$ tirages, on ait obtenu au moins une fois deux boules de même couleur ?

2. On considère une autre expérience $(\mathcal{F})$ : "On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne $\mathcal{U}$. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne $\mathcal{U}$. Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne $\mathcal{U}$ puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne $\mathcal{U}$ soit vide".
   On note $X$ le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne $\mathcal{U}$ soit vide. On désigne par $A$ l'évènement : "Au premier tirage dans l'urne $\mathcal{U}$, les deux boules sont de même couleur." et on note $a$ sa probabilité, c'est-à-dire $a = P(A)$.
   (a) Calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad P(X=n) = a(1-a)^{n-2}$.
   (c) Établir que la variable $Z = X-1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   (d) Donner l'espérance et la variance de $Z$ puis l'espérance et la variance de $X$.
3. On considère deux réels $r$, $s$ distincts et non nuls ainsi qu'un réel $\lambda$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par
$$u_2 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = \lambda r^{n-2} + s u_n.$$
   Montrer par récurrence que
$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{\lambda}{r-s}\left(r^{n-2} - s^{n-2}\right).$$
4. On considère une nouvelle expérience $(\mathcal{G})$ : "On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne $\mathcal{V}$. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne $\mathcal{V}$. Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne $\mathcal{V}$ puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne $\mathcal{V}$ soit vide".
   On note $Y$ le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne $\mathcal{V}$ soit vide. On désigne par $B$ l'évènement : "Au premier tirage dans l'urne $\mathcal{V}$, les deux boules sont de même couleur." et on note $b$ sa probabilité, c'est-à-dire $b = P(B)$.
   (a) Calculer la probabilité $b$.
   (b) Calculer $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$.
   (c) À l'aide du système complet d'évènements $\left(B, \overline{B}\right)$, démontrer que pour tout $n \geqslant 2$ :
$$P(Y=n+1) = bP(X=n) + (1-b)P(Y=n).$$
   (d) À l'aide de la question **3.**, montrer que
$$\forall n \geqslant 2, \quad P(Y=n) = \frac{ab}{b-a}\left((1-a)^{n-2} - (1-b)^{n-2}\right).$$
   (e) Calculer la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} P(Y=n)$.