NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 3

Exercice 1 – On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-8&0&-8\\9&0&8\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ et QP. *(Pas de détails, pas de points.)*

Solution :

$$PQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1-1&1&1-1\\-1+1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

$$QP=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1-1&1&-1+1\\1-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

2. On définit la matrice $D=QAP$. Calculer D. *(D est presque sûrement une matrice diagonale.)*

Solution :

$$QA=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\-8&0&-8\\9&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1-8+9&0&-8+8\\-1+9&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}$$

$$D=QAP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\8-8&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&8\end{pmatrix}$$

3. En utilisant que $D=QAP$, en déduire que $A=PDQ$.

Solution : Je sais que $D=QAP$. Ainsi

$$PDQ=\underbrace{PQ}_{=I_3}A\underbrace{PQ}_{=I_3}=I_3AI_3=A.$$

J'ai bien montré que $A=PDQ$.

4. Calculer D^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Solution : Comme la matrice D est diagonale,

$$D^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&0&0\\0&0&8^n\end{pmatrix}.$$

5. Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad A^n=PD^nQ$.

Solution :

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la proposition : $A^n = PD^nQ$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PD^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$.
Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

$$A^{n+1} = A^n \times A,$$

avec $A = PDQ$, et par hypothèse de récurrence je sais que $A^n = PD^nQ$. Donc

$$A^{n+1} = PD^nQPDQ = PD^nI_3DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q.$$

Donc $A^{n+1} = PD^{n+1}Q$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nQ.$$

6. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8^n \\ -(-1)^n & 0 & 8^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nQ = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8^n \\ -(-1)^n & 0 & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ -8^n & 0 & -8^n \\ 8^n - (-1)^n & 0 & 8^n \end{pmatrix}$$