EXERCICES — CHAPITRE 14

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_0^1 e^{3x}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \int_1^e \frac{-2}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \int_{-2}^2 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \int_1^2 \frac{1}{4x}\,\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \int_0^1 e^{2x} + \frac{e^x}{4}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 – Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $I_6 = \int_0^1 te^{2t}\,\mathrm{d}t$
2. $I_7 = \int_1^2 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$
3. $I_8 = \int_0^1 (x^2+1)e^{3x}\,\mathrm{d}x$
4. $I_9 = \int_1^e x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 – L'objectif est de calculer les intégrales $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$.

1. **Calcul de I.** Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).$$

   (a) Calculer la dérivée de f.

   (b) En déduire la valeur de I.

2. **Calcul de J et K.**

   (a) Sans calculer explicitement les intégrales J et K, vérifier que $J+2I=K$.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K=\sqrt{3}-J$.

   (c) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 4 – Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_1^e \left(\ln(x)\right)^n \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite I_n et montrer qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_{n+1} = e-(n+1)I_n$.
4. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 5 – Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n.$$

2. Calculer $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$ puis en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (I_n).
4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1$.
5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $J_n = nI_n$.

   (a) Montrer que $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.
   (Indication : Penser à une intégration par parties.)

   (b) Montrer que

$$\forall t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

   (c) En déduire la limite de la suite (J_n).

Exercice 6 – Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Calculer J_1.

   (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

   (c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$.

2. (a) En intégrant par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}.$$

   (b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.