

# 9 | Compléments sur les suites

## I – Propriétés éventuelles d'une suite

### 1 – Suites monotones

**Définition 9.1** – Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

- $(u_n)$  est dite **strictement croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}.$$

- $(u_n)$  est dite **strictement décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}.$$

- $(u_n)$  est dite **croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

- $(u_n)$  est dite **décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}.$$

La suite  $(u_n)$  est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).



#### Méthode 9.2 – Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante

Pour établir qu'une suite est monotone, on peut

1. Étudier le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ croissante} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0, \\ (u_n) \text{ décroissante} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0. \end{aligned}$$

2. Lorsque tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont strictement positifs, comparer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et 1. En effet, dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ croissante} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \\ (u_n) \text{ décroissante} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1. \end{aligned}$$

#### Exemple 9.3 –

1. La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$  est strictement croissante. Nous avons  $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 > 0$ . La suite  $(u_n)$  est donc strictement croissante.

2. La suite  $(u_n)$  définie pour tout entier  $n$  par  $u_n = \frac{2^n}{n+1}$  est strictement croissante.

La suite  $(u_n)$  est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2 \times (n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2}.$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

#### Exemple 9.4 –

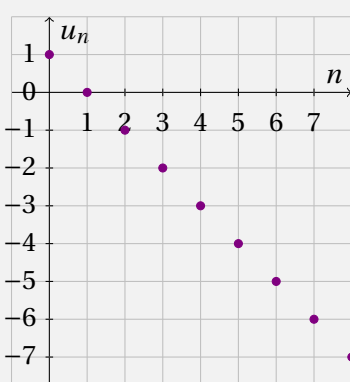
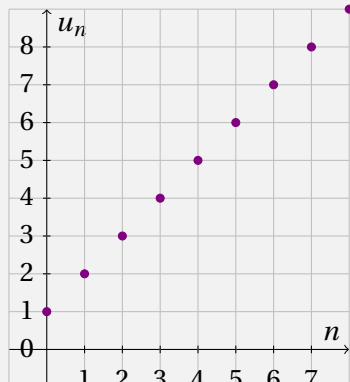
- **Cas des suites arithmétiques.**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors  $u_{n+1} = u_n + r$  et donc

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

La monotonie de la suite dépend donc du signe de  $r$ .

1. Si  $r \geq 0$ , alors  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  et donc  $(u_n)$  est croissante.
2. Si  $r \leq 0$ , alors  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  et donc  $(u_n)$  est décroissante.

Si $r \geq 0$ , la suite $(u_n)$ est croissante.	Si $r \leq 0$ , la suite $(u_n)$ est décroissante.
	

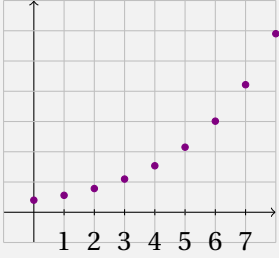
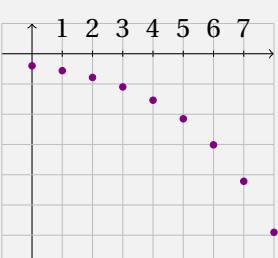
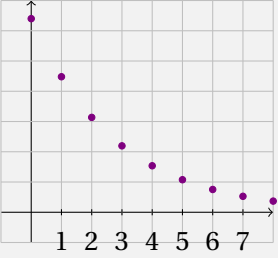
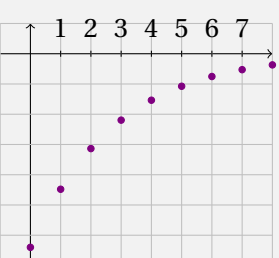
- **Cas des suites géométriques.**

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .

$$u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n \times (q - 1).$$

La monotonie de la suite dépend du signe de  $u_0$ ,  $q^n$  et  $(q - 1)$ .

1. Si  $q < 0$ , alors  $q^n$  est positif pour  $n$  pair, négatif pour  $n$  impair donc la suite n'est pas monotone.
2. Si  $q > 0$ , alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit  $u_0 \times (q - 1)$ .

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$ , alors la suite $(u_n)$ est croissante.	Si $u_0 < 0$ , alors la suite $(u_n)$ est décroissante.	Si $u_0 > 0$ , alors la suite $(u_n)$ est décroissante.	Si $u_0 < 0$ , alors la suite $(u_n)$ est croissante.
			

## 2 – Suite majorée/minorée/bornée

**Définition 9.5** – Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

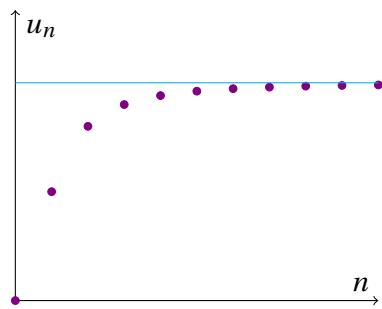
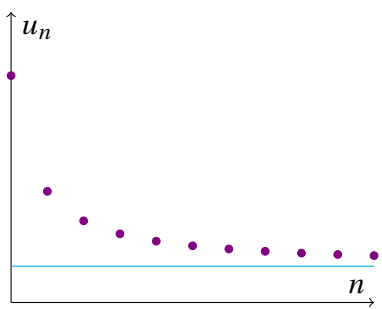
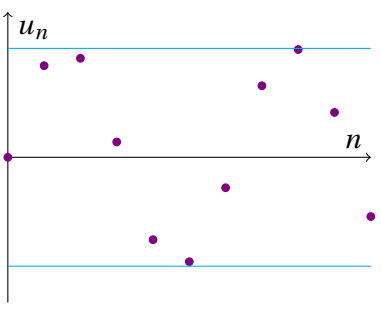
- $(u_n)$  est dite **majorée** par  $M$  si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

- $(u_n)$  est dite **minorée** par  $m$  si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$

- $(u_n)$  est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

$(u_n)$ est majorée	$(u_n)$ est minorée	$(u_n)$ est bornée
		

**Exemple 9.6** – La suite  $(u_n)$  définie pour tout entier  $n$  par  $u_n = \frac{3n^2}{n^2 + 1}$  est majorée par 3.

Pour tout entier  $n$ , on a

$$u_n - 3 = \frac{3n^2}{n^2 + 1} - 3 = \frac{3n^2 - 3(n^2 + 1)}{n^2 + 1} = \frac{-3}{n^2 + 1}.$$

Or,  $-3 < 0$  et  $n^2 + 1 > 0$  donc  $\frac{-3}{n^2 + 1} < 0$ . Autrement dit,  $u_n - 3 < 0$  soit  $u_n < 3$ . Donc, la suite  $(u_n)$  est bien majorée par 3.

## II – Limite d'une suite réelle

### 1 – Limite infinie

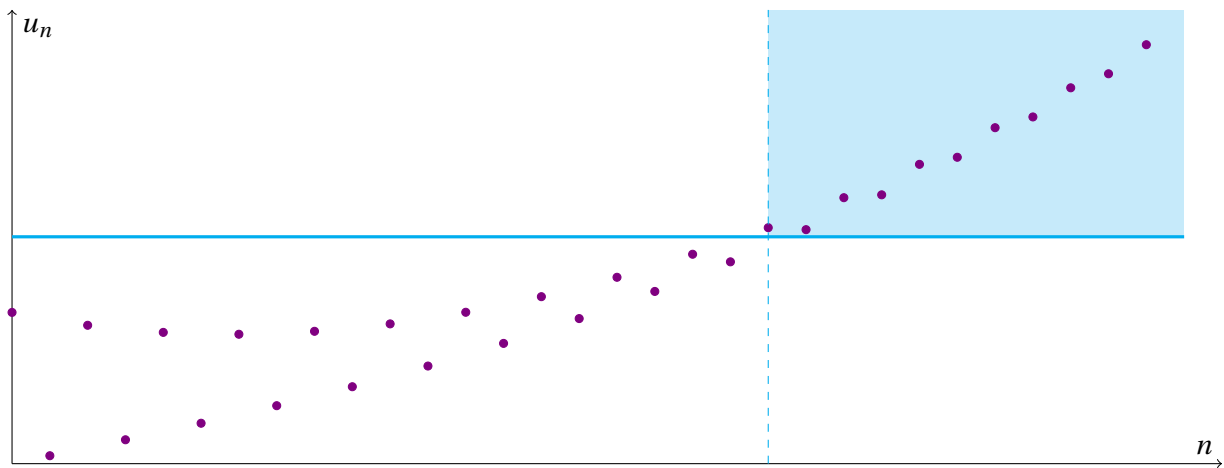
#### Définition 9.7 –

- On dit qu'une suite  $(u_n)$  **admet une limite** égale à  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si  $u_n$  prend des valeurs **positives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse  $n$  suffisamment grand. On écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- On dit qu'une suite  $(u_n)$  **admet une limite** égale à  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si  $u_n$  prend des valeurs **négatives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse  $n$  suffisamment grand. On écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$



**Exemple 9.8 –** La suite définie pour tout entier  $n$  par  $u_n = n^2$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ .

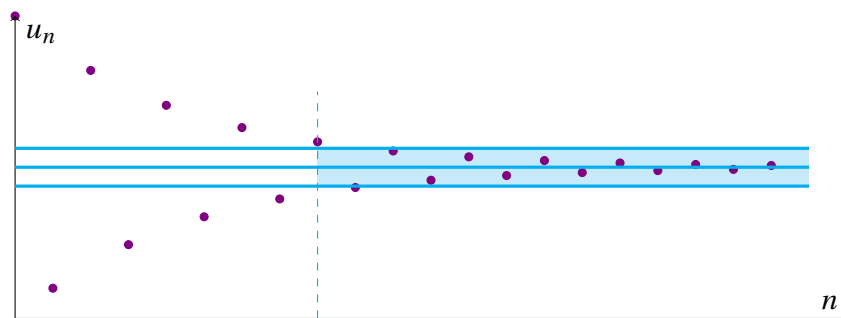
### 2 – Limite finie

**Définition 9.9 –** Soit  $(u_n)$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$  et  $\ell$  un réel.

1. Dire que la suite  $(u_n)$  admet pour **limite** le réel  $\ell$  signifie que  $u_n$  devient aussi proche que l'on veut de  $\ell$  pourvu que l'on choisisse  $n$  suffisamment grand. On écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel  $\ell$  est dite **convergente**.



**Exemple 9.10** – La suite définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$  tend vers 1 en  $+\infty$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$ .

### Proposition 9.11

La suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \ell = 0$ .

**Remarque 9.12** – Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général  $(-1)^n$  prend alternativement les valeurs 1 et  $-1$ . Elle n'admet donc pas de limite.

## III – Lien entre convergence et inégalités

### 1 – Minoration et majoration

#### Proposition 9.13

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

- Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

- Si au contraire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $(u_n)$  diverge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

- Enfin, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $(v_n)$  diverge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

**Exemple 9.14** – Soit  $(v_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (2 + (-1)^n) n.$$

En posant  $u_n = n$  pour tout  $n$ , on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

C'est pourquoi on peut affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

## 2 – Théorème des gendarmes

### Théorème 9.15

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ , et  $(w_n)$  trois suites telles que

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ , alors  $(v_n)$  converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

**Exemple 9.16** – Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$u_n = \frac{1}{2n^2 + (-1)^n}.$$

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

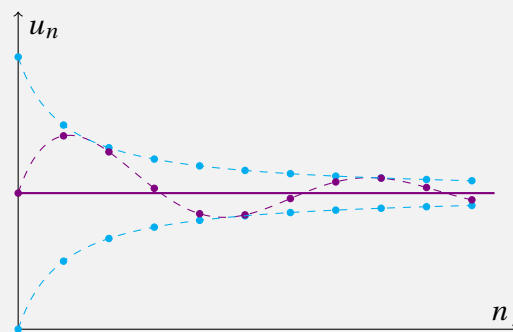
$$\frac{1}{2n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{1}{2n^2 - 1}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2 + 1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2 - 1} = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$



## 3 – Théorème de convergence monotone

### Théorème 9.17 – Théorème de convergence monotone

- Si  $(u_n)$  est une suite croissante et majorée, alors  $(u_n)$  converge.
- Si  $(u_n)$  est une suite décroissante et minorée, alors  $(u_n)$  converge.

**Exemple 9.18** – Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{1}{2}.$$

1. Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ .

Pour tout entier  $n$ , on a

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leq 0.$$

Donc, la suite  $(u_n)$  est décroissante.

2. Montrer par récurrence que  $u_n \in [0; 1]$  pour tout entier naturel  $n$ .

Notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété «  $u_n \in [0; 1]$  ».

**Initialisation :**  $u_0 = \frac{1}{2} \in [0; 1]$ . Ainsi,  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie et montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence,  $u_n \in [0; 1]$ , donc  $u_n \geq u_n^2$ . Ainsi,  $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \geq 0$ . Par ailleurs, puisque  $u_n^2 \geq 0$ , on a  $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \leq u_n \leq 1$ . Bref, on a

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1, \quad \text{i.e.,} \quad u_{n+1} \in [0; 1].$$

Finalement,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie et la propriété  $\mathcal{P}$  est héréditaire.

**Conclusion :** La propriété  $\mathcal{P}$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0; 1]$$

3. En déduire que  $(u_n)$  converge.

La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0. Donc, d'après le théorème, elle converge.

4. Déterminer sa limite  $\ell$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ . Or,  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$  donc en passant à la limite quand  $n$  tend vers l'infini, on obtient

$$\ell = \ell - \ell^2$$

Autrement dit,  $\ell^2 = 0$  donc  $\ell = 0$ . Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$