

# 15 | Systèmes linéaires

## I – Définition et exemples

**Définition 15.1** – On appelle **système linéaire** de  $n$  équations à  $p$  inconnues  $x_1, \dots, x_p$  tout système (S) de la forme

$$(S) \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les  $a_{i,j}$  et les  $b_i$  désignent des réels supposés connus.

La  $i$ -ème équation du système (S) est notée  $L_i$  et s'appelle la  $i$ -ème **ligne** du système (S).

**Résoudre** le système (S), c'est déterminer tous les  $p$ -uplets  $(x_1, \dots, x_p)$  vérifiant les  $n$  équations du système. Si tous les  $b_i$  sont nuls, on dit que le système (S) est **homogène**.

### Exemple 15.2 –

- Le système suivant est un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Le couple  $(-1, 3)$  en est une solution car

- Le système suivant est un système **homogène** de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

On note que le triplet  $(0, 0, 0)$  est solution évidente, mais il peut y en avoir d'autres.

- Le système suivant est un système de trois équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x + 5y = -2 \\ 3x + y = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

### Remarque 15.3 –

- Il ne faut pas croire qu'un système linéaire admet **toujours** une **unique** solution! En effet, certains systèmes linéaires admettent une infinité de solutions et d'autres n'admettent aucune solution.
- En pratique, on rencontre principalement des systèmes de deux équations à deux inconnues ou bien des systèmes de trois équations à trois inconnues.

**Définition 15.4** – On dit que deux systèmes (S) et (S') sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

## II – Résolution des systèmes linéaires

### 1 – Méthode par substitution

Pour les systèmes de deux équations à deux inconnues, on peut résoudre un système en exprimant une inconnue en fonction de l'autre, puis en remplaçant cette inconnue dans l'autre ligne.

**Exemple 15.5** – Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

### 2 – Opérations élémentaires sur les lignes

**Définition 15.6** – Les opérations suivantes sur les lignes d'un système linéaire (S) sont appelées **opérations élémentaires**.

- $L_i \leftrightarrow L_j$  : échange de deux lignes.
- $L_i \leftarrow aL_i$  : remplacement d'une ligne par son produit par un réel **non nul**  $a$ .
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$  : remplacement d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.
- $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$  : regroupement en une opération des deux opérations précédentes.

#### Proposition 15.7

Si on transforme un système à l'aide d'**UNE** opération élémentaire, on obtient un système équivalent.



**ATTENTION !** Il est très important de n'appliquer qu'**UNE** opération élémentaire à la fois. Sinon on peut ne pas obtenir un système équivalent.

**Exemple 15.8** –

$$\begin{cases} x - 7y + 11z = 1 \\ -x + 12y - 19z = 2 \\ -3y + 5z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 7y + 11z = 1 \\ 5y - 8z = 3 \\ -3y + 5z = 3 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$



Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, je fais "disparaître" la première inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, je "nettoie" la première colonne des  $x$ .

Deuxième étape : Il faut que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici  $y$ ). Si ce n'est pas le cas, j'échange la deuxième ligne avec une autre ligne contenant  $y$  (avec si possible le coefficient 1 pour simplifier les calculs), **mais sans utiliser la ligne  $L_1$** .

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, je fais "disparaître" la deuxième inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, je "nettoie" la deuxième colonne des  $y$ .

Troisième étape : J'obtiens alors un système triangulaire que je sais résoudre.