

EXERCICES — CHAPITRE 5

Exercice 1 – On note $I = I_3$ et on donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 , puis A^3 .
(b) En déduire que A n'est pas inversible.
2. (a) Calculer $(I - A)(I + A + A^2)$.
(b) En déduire que $I - A$ est inversible et donner son inverse.
3. Montrer également que $I + A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 2 –

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer A^2 .
- (b) La matrice A est-elle inversible? Si oui, expliciter son inverse.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer $-A^3 - 3A^2 - 3A$.
- (b) La matrice A est-elle inversible? Si oui, expliciter son inverse.

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer $A^3 - A$.
- (b) La matrice A est-elle inversible? Si oui, expliciter son inverse.

Exercice 3 – On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4 – On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^3 . En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer B^3 . La matrice B est-elle inversible?

Exercice 5 – On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En résolvant un système, montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6 –

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

2. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Exercice 7 –

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Résoudre les systèmes (S_1) et (S_2) suivants.

$$(S_1) \begin{cases} -3x + y + 2z = 4 \\ x - y + 2z = -2 \\ -3x + 4y - 8z = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2) \begin{cases} -3x + y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ -3x + 4y - 8z = 3 \end{cases}$$

Exercice 8 – Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Si oui, calculer leur inverse.

$$1. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$6. F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8. H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 – Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par la donnée de $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et les relations de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + \frac{3}{4}y_n \\ y_{n+1} &= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{4}y_n \end{cases}$$

valables pour tout entier naturel n .

On pose, pour tout entier naturel n , $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

- (a) Donner U_0 .
(b) Déterminer une matrice A telle que, pour tout entier $n \geq 0$, on ait $U_{n+1} = AU_n$.
(c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $U_n = A^n U_0$.
- On pose $P = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible, avec $P^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$.
- Soit $D = P^{-1}AP$.
(a) Calculer D , puis pour tout entier $n \geq 0$, donner D^n en fonction de n .
(b) Montrer que $A = PDP^{-1}$.
- (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
(b) En déduire l'expression de A^n .
(c) Déterminer x_n et y_n en fonction de n , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

Exercice 10 – Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A :

- Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
- Déterminer D^k pour tout entier naturel k .
- Montrer que $A = PDP^{-1}$ et que pour tout entier naturel k ,

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

- Déterminer $P^{-1}X_1$ et en déduire par récurrence que, pour tout entier naturel k ,

$$A^k X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k \end{pmatrix}.$$

Partie B :

On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée (appelée "semaine 1"). Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A , B et C .

On considère en outre que :

- si M a choisi le dessert A la semaine n , alors la semaine $n+1$, il choisit le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$,
- si M a choisi le dessert B la semaine n , alors la semaine $n+1$, il choisit le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$,
- si M a choisi le dessert C la semaine n , il reprend le dessert C la semaine $n+1$,
- le consommateur choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On notera, pour tout entier naturel non-nul n ,

- A_n l'évènement : " M a choisi le dessert A la n -ième semaine",
- B_n l'évènement : " M a choisi le dessert B la n -ième semaine",

- C_n l'évènement : " M a choisi le dessert C la n -ième semaine".

On note aussi

$$U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}.$$

1. Donner $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$ ainsi que les probabilités suivantes.

$$\begin{array}{lll} P_{A_n}(A_{n+1}), & P_{A_n}(B_{n+1}), & P_{A_n}(C_{n+1}), \\ P_{B_n}(A_{n+1}), & P_{B_n}(B_{n+1}), & P_{B_n}(C_{n+1}), \\ P_{C_n}(A_{n+1}), & P_{C_n}(B_{n+1}), & P_{C_n}(C_{n+1}). \end{array}$$

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier avec soin que

$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).$$

Donner de même des relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel non-nul n ,

$$U_{n+1} = AU_n.$$

- (b) Montrer que pour tout entier naturel non-nul n ,

$$U_n = A^{n-1}X_1.$$

4. En déduire, en fonction de n , la probabilité $P(A_n)$ ainsi que sa limite n tend vers $+\infty$.