5 | Probabilités élémentaires

I – Le cadre probabiliste

Le but est ici de reprendre le vocabulaire des probabilités, vue en classe de terminale, et d'établir le lien avec une vision ensembliste.

1 – Un peu de vocabulaire

Définition 5.1 – Une **expérience aléatoire** est une expérience dont l'issue (le résultat) ne peut pas être prévue. La répétition d'une telle expérience ne donne, *a priori*, pas le même résultat.

Exemple 5.2 –

1. Jeter un dé à 6 faces et noter le résultat.
2. Lancer une pièce de monnaie et noter le résultat.
3. Lancer une copie du haut d'un escalier à 20 marches et obtenir la note de la copie.

Définition 5.3 – **L'univers** est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. Il est souvent noté Ω. Une issue est un élément $\omega \in \Omega$.

Exemple 5.4 –

1. $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1;6]\!]$,
2. $\Omega = \{\text{PILE}; \text{FACE}\}$,
3. $\Omega = \{0;1;2;3;\dots;18;19;20\} = [\![0;20]\!]$.

Définition 5.5 – Un **évènement** est un résultat possible d'une expérience aléatoire. Dans le cas où l'univers Ω est fini, on peut associer de manière unique un évènement A à une partie (ou sous-ensemble) de Ω, que l'on note également A.

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ réalise } A\}.$$

Autrement dit, si $\omega \in \Omega$ est un résultat de l'expérience, alors ω réalise A si et seulement si $\omega \in A$.

Exemple 5.6 –

1. "obtenir un numéro impair" : la partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{1;3;5\}$.
2. "obtenir FACE" : la partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{\text{FACE}\}$.
3. "avoir la moyenne" : la partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{10;11;\dots;19;20\} = [\![10;20]\!]$.

2 – Lien entre terminologie probabiliste et ensembliste

On effectue une expérience aléatoire. On note Ω l'univers. On considère A et B deux évènements liés à l'expérience aléatoire.

Définition 5.7 – Un événement est dit

- **élémentaire** lorsque la partie associée est réduite à un élément (on parle de singleton),
- **certain** s'il est toujours réalisé (c'est alors Ω),
- **impossible** s'il n'est jamais réalisé (c'est alors $\emptyset$).

Exemple 5.8 –

1. Un évènement élémentaire est "obtenir 5", associé au singleton $\{5\}$.
2. Un événement certain est "obtenir PILE ou FACE", associé à la partie Ω.
3. Un événement impossible est "avoir une note négative", associé à la partie $\emptyset$.

Définition 5.9 – Soit $\omega \in \Omega$. On dit que ω réalise **l'évènement contraire** de A si et seulement si ω ne réalise pas A. On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A. La partie $\overline{A}$ associée est la partie constituée de tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. Autrement dit, $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Exemple 5.10 –

1. Soit A l'évènement "obtenir FACE". La partie associée est $A = \{\text{FACE}\}$. L'évènement contraire est $\overline{A}$: "obtenir PILE". La partie associée est $\overline{A} = \{\text{PILE}\}$.
2. Soit A l'évènement "obtenir un nombre pair". La partie associée est $A = \{2;4;6\}$. L'évènement contraire est $\overline{A}$: "obtenir un nombre impair". La partie associée est $\overline{A} = \{1;3;5\}$.
3. Soit A l'évènement "avoir une note supérieure où égale à 12". La partie associée est $A = [\![12;20]\!]$. L'évènement contraire est $\overline{A}$: "avoir une note inférieure ou égale à 11". La partie associée est $\overline{A} = [\![0;11]\!]$.

Définition 5.11 – On dit que l'évènement A **implique** l'évènement B si la réalisation de l'évènement A implique celle de l'évènement B. En terme ensembliste, cela signifie que

$$A \text{ implique } B \iff A \subset B.$$

Exemple 5.12 – Considérons l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à 6 faces deux fois de suite. Soit A l'évènement "faire un 6 au premier lancer" et B l'évenement "faire au moins un 6". Les parties associées sont :

$$A = \{(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\} \quad \text{et}$$

$$B = \{(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6);(1;6);(2;6);(3;6);(4;6);(5;6)\}.$$

Définition 5.13 – On dit que l'évènement A **ou** B est réalisé si et seulement si au moins l'un des deux évènements A ou B est réalisé. La partie associée est $A \cup B$.

Exemple 5.14 – On reprend l'expérience précédente. Soit A l'évènement "faire un 3 au premier lancer" et B l'évènement "faire un 5 au deuxième lancer". Les parties associées sont

$$A = \{(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(3;5);(3;6)\} \quad \text{et} \quad B = \{(1;5);(2;5);(3;5);(4;5);(5;5);(6;5)\}.$$

L'évènement A ou B est "faire un 3 au premier lancer ou un 5 au deuxième lancer" et la partie associée est

$$A \cup B = \{(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(3;5);(3;6);(1;5);(2;5);(4;5);(5;5);(6;5)\}.$$

Définition 5.15 – On dit que l'évènement A **et** B est réalisé si et seulement si les deux évènements A et B sont réalisés. La partie associée est $A \cap B$.

Exemple 5.16 – Reprenons l'exemple précédent. L'évènement A et B est "faire un 3 au premier lancer et un 5 au deuxième lancer" et la partie associée est

$$A \cap B = \{(3;5)\}.$$

Définition 5.17 – On dit que deux évènements A et B sont **incompatibles** si l'évènement A et B est impossible. Autrement dit, les évènements A et B sont incompatibles si les parties A et B associées vérifient $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 5.18 – On reprend l'expérience des exemples précédents. Soit A l'évènement "faire un 3 au premier lancer" et B l'évènement "faire un 5 au premier lancer".
On vérifie alors facilement que les deux parties A et B associées vérifient $A \cap B = \emptyset$. Les évènements A et B sont donc incompatibles.

On récapitule toutes ces notions dans le tableau suivant.

Terminologie probabiliste	**Terminologie ensembliste**	**Notation**
Évènement certain	Ensemble dans sa totalité	Ω
Évènement impossible	Ensemble vide	$\emptyset$
Évènement élémentaire	Singleton	$\{\omega\}$
Évènement A	Ensemble A	$A \subset \Omega$
Évènement contraire de A	Complémentaire de A	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
A ou B	A union B	$A \cup B$
A et B	A inter B	$A \cap B$
A et B incompatibles	A et B disjoints	$A \cap B = \emptyset$
ω réalise A	ω appartient à A	$\omega \in A$

II – Probabilités

Dans toute la suite, Ω désigne un ensemble fini et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Définition 5.19 – On appelle **probabilité** sur Ω (ou loi de probabilité) toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \mapsto [0;1]$ vérifiant

1. $P(\Omega) = 1$ et
2. pour tous évènements incompatibles A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'évènement A.

ATTENTION ! Une probabilité est par définition à valeurs dans $[0;1]$, ainsi, pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1.}$$

On vérifiera donc **systématiquement** que le résultat d'un calcul de probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

1 – Propriétés de base

Proposition 5.20

Soient A et B deux évènements. Alors

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.
4. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration.

1. On a $\Omega = A \cup \overline{A}$ avec $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Donc $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$. D'où le résultat.
2. Il suffit d'appliquer le point précédent à $A = \Omega$.
3. Si $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ donc $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.
4. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$. D'où $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.
5. On a $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$. De plus, $A \cap (B \cap \overline{A}) = \emptyset$, d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$. On en déduit grâce au point précédent, la propriété énoncée.

□

Proposition 5.21 – Formule du crible de Poincaré

1. Si $A_1, \ldots, A_k$ est une famille d'évènements **deux à deux incompatibles**, alors
$$P\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j).$$
2. Si A, B et C sont trois évènements quelconques, alors
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$
3. Pour un nombre fini d'évènements, il suffit de suivre le schéma de la formule précédente :
   (a) à chaque ligne, on change de signe,
   (b) et on considère les probabilités des intersections regroupant un évènement de plus.

Exemple 5.22 – Écrire la formule du crible pour 4 évènements.

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) = {} & P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) \\ & + P(A \cap B \cap C) + P(B \cap C \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(A \cap B \cap D) \\ & - P(A \cap B \cap C \cap D). \end{aligned}$$

2 – Probabilités élémentaires

Théorème 5.23

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement. Si $A = \{\omega_1; \dots; \omega_n\}$, alors on a

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}).$$

Exemple 5.24 – Un dé est truqué pour que le 6 apparaisse deux fois plus souvent que les autres faces qui, elles, ont toutes la même probabilité de tomber. Calculer $P\big(\{4;5;6\}\big)$.

Les nombres 1, 2, 3, 4, et 5 ayant la même probabilité de tomber, il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que

$$\forall k \in [\![1;5]\!], \quad P(\{k\}) = \lambda.$$

De plus, le 6 apparait deux fois plus souvent que les autres faces, donc $P(\{6\}) = 2\lambda$. Par ailleurs, on a

$$1 = \sum_{k=1}^{6} P(\{k\}) = 5 \times \lambda + 2\lambda = 7\lambda.$$

D'où $\lambda = \frac{1}{7}$, duquel on déduit que

$$P(\{4;5;6\}) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \lambda + \lambda + 2\lambda = 4\lambda = \frac{4}{7}.$$

3 – Le cas de l'équiprobabilité

Définition 5.25 – Deux évènements A et B sont dits **équiprobables** s'ils ont la même probabilité, c'est-à-dire si $P(A) = P(B)$. On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

Remarque 5.26 – Les situations d'équiprobabilité sont très nombreuses. Citons par exemple le lancer d'une pièce ou d'un dé équilibré, le tirage au hasard d'une boule dans une urne (on dit souvent "indiscernable au toucher" pour supposer l'équiprobabilité), d'une carte dans un jeu, d'une personne dans un échantillon, etc. Il faut cependant bien faire attention à ne pas voir de l'équiprobabilité dans toutes les situations !

Remarque 5.27 – Loto et équiprobabilité

Le tirage du Loto est un exemple classique d'équiprobabilité : tous les nombres ont absolument la même chance d'être tirés. Par exemple, le tirage $\{1;2;3;4;5;6\}$ *a la même probabilité de sortir que les autres, alors que peu de gens auraient l'idée de jouer ces 6 numéros. De quoi alimenter la célèbre maxime "le loto est un impôt sur les gens qui ne connaissent pas les probabilités" ?*

Théorème 5.28

On suppose que l'on est en situtation d'équiprobabilité. Alors

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, $P\big(\{\omega\}\big) = \frac{1}{n}$ où $n = \mathrm{Card}(\Omega)$.
2. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}.$$

Remarque 5.29 – On appelle **cardinal** d'un ensemble fini E, son nombre d'éléments, et on le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.

Exemple 5.30 –

- $\mathrm{Card}\{0;3;7\} = 3$,
- $\mathrm{Card}\,\emptyset = 0$
- $\mathrm{Card}[\![1;n]\!] = n$
- $\mathrm{Card}[\![0;n]\!] = n+1$

III – Probabilités conditionnelles

1 – Définitions et propriétés.

Définition 5.31 – Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement tel que $P(A) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A le nombre, noté $P_A(B)$, défini par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple 5.32 – On lance un dé cubique équilibré. On considère les évènements suivants.

- A : "obtenir un nombre inférieur à 3",
- B : "obtenir un 5",
- C : "obtenir un 2".

Calculer $P_A(B)$ et $P_A(C)$ de deux façons différentes.
Première méthode : on a $A = \{1;2;3\}$, $B = \{5\}$ et $C = \{2\}$. Donc $A \cap B = \emptyset$ et $A \cap C = \{2\}$. Donc

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{et} \quad P_A(C) = \frac{P(A\cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}.$$

Deuxième méthode : $P_A(B)$ correspond à la probabilité d'obtenir un 5 **sachant** que l'on a obtenu un nombre inférieur à 3, ce qui est bien évidemment impossible. D'où

$$P_A(B) = 0.$$

Par ailleurs, $P_A(C)$ correspond à la probabilité d'obtenir un 2 sachant que l'on a obtenu un nombre inférieur à 3. Puisqu'il y a 3 nombres inférieurs ou égaux à 3, on a une chance sur 3 d'obtenir un 2. Donc

$$P_A(C) = \frac{1}{3}.$$

Proposition 5.33

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement tel que $P(A) \neq 0$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0;1] \\ B & \mapsto & P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{array}$$

est une probabilité sur Ω.

Remarque 5.34 – En particulier, toutes les propriétés du II s'appliquent à $B \mapsto P_A(B)$.

2 – Formule des probabilités composées

Si A et B sont deux évènements de probabilité non-nulle, alors par définition de $P_A(B)$ et de $P_B(A)$, on a

$$P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = P(B)\times P_B(A).$$

On peut généraliser la formule précédente.

Proposition 5.35 – Formule des probabilités composées

Soient $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des évènements tels que $P(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$. On a

$$P(A_1\cap\cdots\cap A_n) = P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)\times P_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\cdots\times P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Remarque 5.36 –

1. Dans le cas $n=2$, on retrouve la formule
$$P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B).$$
2. Dans le cas $n=3$, cela donne
$$P(A\cap B\cap C) = P(A)P_A(B)P_{A\cap B}(C).$$

Exemple 5.37 – Considérons une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules blanches.
On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches ?
Notons A_i l'évènement "la i-ème boule tirée est blanche". Clairement, on a

$$P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$P(A_2)$ est moins évident car on ne connaît pas la composition précise de l'urne lors du deuxième tirage. Cependant, le calcul de $P_{A_1}(A_2)$ est facile :

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

De même,

$$P_{A_1\cap A_2}(A_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Par la formule des probabilités composées, on obtient

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{30}.$$

3 – Formule des probabilités totales

Définition 5.38 – Soient $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des évènements. On dit que $\{A_1,\dots,A_n\}$ est un **système complet d'évènements** si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. $\forall 1\leq i<j\leq n,\quad A_i\cap A_j = \emptyset$ et
2. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_j$.

Exemple 5.39 –

- Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'évènements.
  On lance un dé à 6 faces. On note A l'évènement "obtenir un nombre pair" et B l'évènement "obtenir un nombre impair". Les ensembles associés sont $A = \{2;4;6\}$ et $B = \{1;3;5\}$. Ainsi $\{A, B\}$ forme un système complet d'évènements.
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors $\big\{\{\omega_1\}; \dots; \{\omega_n\}\big\}$ est un système complet d'évènements.
  Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. Les évènements A_1 : "obtenir un 1", A_2 : "obtenir un 2", A_3 : "obtenir un 3" et A_4 : "obtenir un 4" forment un système complet d'évènements.

Théorème 5.40 – Formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complets d'évènements. Alors, pour tout évènement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k).$$

Si de plus, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$, alors

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B).$$

Exemple 5.41 – Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?
Notons A_i l'évènement "la boule obtenue lors du i-ème tirage est noire". On introduit un système complet d'évènements en considérant les évènements

$$B_1 = A_1 \cap A_2, \qquad B_2 = A_1 \cap \overline{A_2}, \qquad B_3 = \overline{A_1} \cap A_2, \qquad B_4 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.$$

Par la formule des probabilités totales, on a $P(A_3) = \sum_{k=1}^{4} P(B_k) \times P_{B_k}(A_3)$. On calcule facilement

$$P_{B_1}(A_3) = 0, \qquad P_{B_2}(A_3) = P_{B_3}(A_3) = \frac{1}{8} \text{ avec } P(B_2) = P(B_3) = \frac{8 \times 2}{10 \times 9},$$

$$\text{et} \quad P_{B_4}(A_3) = \frac{2}{8} \text{ avec } P(B_4) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9}.$$

Au final

$$P(A_3) = 0 + 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{8}{45} + \frac{1}{4} \times \frac{28}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}.$$

Théorème 5.42 – Formule de Bayes

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'évènements et soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement. On suppose que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$ et que $P(B) \neq 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B)}.$$

Exemple 5.43 – On utilise souvent la formule de Bayes dans le cas particulier suivant.
Soient A et B deux évènements. On suppose que $0 < P(A) < 1$ et que $P(B) \neq 0$. Le système $\{A, \overline{A}\}$ forme un système complet d'évènements et

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}.$$

Exemple 5.44 – Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99% des malades mais aussi faussement positif chez 0.1% des personnes non-atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?
Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a

$$P(M) = 10^{-4}, \qquad P_M(T) = 0.99 \quad \text{et} \quad P_{\overline{M}}(T) = 10^{-3}.$$

Par la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T),$$

puis par la formule de Bayes,

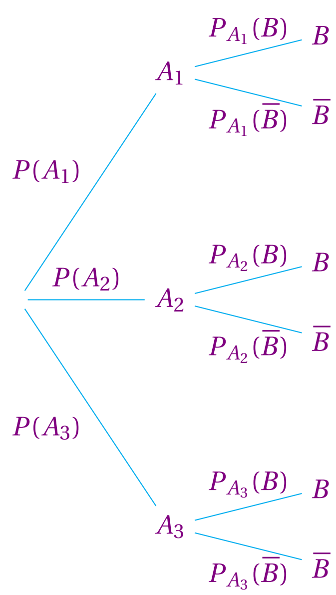
$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(T)},$$

ce qui numériquement donne 9%.
La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif ! Cela s'explique par le fait que la population de malades est de 1/10000 et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de 1/1000.

4 – Lien avec les arbres pondérés

Il est souvent pratique de représenter une situation de probabilités par un arbre pondéré et de savoir utiliser cet arbre pour faire des calculs de probabilités.
Considérons l'exemple ci-contre dont l'univers associé comporte six issues :

$$\Omega = \{A_1 \cap B; A_1 \cap \overline{B}; A_2 \cap B; A_2 \cap \overline{B}; A_3 \cap B; A_3 \cap \overline{B}\}.$$



Le but de ce paragraphe est d'illustrer les propriétés vues précédemment via un certain nombre de "règles" de calcul sur les arbres pondérés.

Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
Cette règle illustre notamment le fait que la probabilité conditionnelle est bien une probabilité. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple :

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1,$$
$$P_{A_1}(B)+P_{A_1}(\overline{B})=1, \quad \text{etc.}$$

Règle 2 : La probabilité de l'évènement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
Cette règle illustre la formule des probabilités composées. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple :

$$P(A_1\cap B)=P(A_1)\times P_{A_1}(B),$$
$$P(A_2\cap \overline{B})=P(A_2)\times P_{A_2}(\overline{B}), \quad \text{etc.}$$

Règle 3 : La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet évènement.
Cette règle illustre la formule des probabilités totales. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple

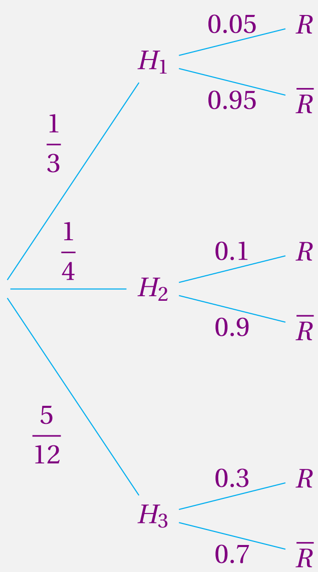
$$P(B)=P(A_1)\times P_{A_1}(B)+P(A_2)\times P_{A_2}(B)+P(A_3)\times P_{A_3}(B).$$

Exemple 5.45 – Un élève a beaucoup de mal à se réveiller le matin. Aussi, pour parer à toute éventualité, il programme son réveil à 3 horaires h_1, h_2 et h_3. Il se réveille à l'horaire h_1 avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et à l'horaire h_2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsqu'il se réveille à l'horaire h_1, la probabilité qu'il arrive à l'heure en classe est de 95%. Lorsqu'il se réveille à l'horaire h_2, la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de 10%. Enfin, lorsqu'il se réveille à l'horaire h_3, la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de 30%. Quelle est la probabilité que l'élève soit en retard ?

Représentons la situation par un arbre pondéré. Notons R l'évènement "l'élève est en retard en classe" et H_i l'évènement "l'élève se réveille à l'horaire h_i" pour $i\in\{1;2;3\}$. $\{H_1;H_2;H_3\}$ forme un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales (correspondant à la règle 3), on a

$$\begin{aligned}P(R)&=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\times P_{H_i}(R)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{4}\times\frac{10}{100}+\frac{5}{12}\times\frac{30}{100}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

L'élève arrive donc en retard avec une probabilité $\frac{1}{6}$.



Remarque 5.46 – On peut toujours faire un arbre pondéré mais contrairement aux exigences du bac, il ne suffit plus pour la justification des calculs. Les règles énoncées ci-dessus ne sont finalement qu'une bonne représentation visuelle des propriétés énoncées précédemment.

IV – Indépendance

1 – Indépendance de deux évènements

Définition 5.47 – Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux évènements. On dit que A et B sont **indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Remarque 5.48 – Il est facile de voir que deux évènements A et B sont indépendants si $P_B(A) = P(A)$ ou de manière équivalente si $P_A(B) = P(B)$. Autrement dit, deux évènements A et B sont indépendants si la donnée de l'information "A est réalisé" (resp. "B est réalisé") n'influe pas sur la réalisation de B (resp. A). On retrouve donc une notion intuitive d'indépendance.

Remarque 5.49 – Les probabilités et les préjugés des joueurs
À la roulette, la boule s'arrête au hasard sur un numéro rouge ou un numéro noir. Dans des ouvrages sur la roulette, on lit que la plus longue "série" (c'est-à-dire suite de résultats de même couleur) que l'on ait observée a été de 24 rouges ou de 24 noirs. Beaucoup de joueurs, s'ils observent un jour une série de 24 rouges n'hésitent pas à conclure que le noir doit forcément sortir au coup suivant "puisqu'il n'y a jamais eu de série de 25..." Mais comme l'écrivait le mathématicien Joseph Bertrand (1822-1900), "la roulette n'a ni conscience, ni mémoire..."
Alors, au Loto, les numéros les moins souvent obtenus lors des tirages précédents ont-ils plus de chances de sortir au tirage suivant ? Le hasard réserve bien des surprises : par exemple, le numéro 22 n'est sorti comme numéro complémentaire qu'après 344 tirages, c'est-à-dire plus de 6 ans après le premier tirage du Loto (le 19 mai 1976)...
Le "bon sens" devrait suffire à persuader les joueurs que les coups successifs de la roulette, comme les tirages successifs du Loto sont indépendants les uns des autres...

Exemple 5.50 – On lance un dé cubique et on considère les évènements

- A : "le résultat obtenu est inférieur ou égal à 2",
- B : "le résultat obtenu est supérieur ou égal à 4".

Déterminer si A et B sont indépendants dans les deux cas suivants :

Cas 1 : dé équilibré.
On a $A = \{1;2\}$ et $B = \{4;5;6\}$, et donc $A \cap B = \emptyset$. Ainsi

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \neq 0 = P(A \cap B)$$

Donc les évènements A et B ne sont pas indépendants.
Cas 2 : dé pipé. On considère un dé qui permet d'obtenir 1 avec la probabilité 1.
Puisque le dé permet d'obtenir 1 avec probabilité 1 alors la probabilité d'obtenir n'importe quel autre nombre est 0. Ainsi

$$P(A) \times P(B) = 1 \times 0 = 0 = P(A \cap B)$$

Donc les évènements A et B sont indépendants.

Remarque 5.51 – La notion d'indépendance dépend donc de la probabilité P étudiée.

2 – Indépendance d'une famille d'évènements

Définition 5.52 – Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements. On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si

$$\forall I \subset [\![1;n]\!], \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Exemple 5.53 – Avec 4 évènements A_1, A_2, A_3 et A_4, on dit que les évènements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont mutuellement indépendants lorsque l'on a les 11 égalités

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2), P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3), P(A_1 \cap A_4) = P(A_1)P(A_4), P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3), P(A_2 \cap A_4) = P(A_2)P(A_4), P(A_3 \cap A_4) = P(A_3)P(A_4)$,
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3), P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_4), P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_3)P(A_4), P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_2)P(A_3)P(A_4)$,
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$.

Exemple 5.54 – On lance deux fois un dé équilibré et on considère les évènements suivants.

- A : "le premier chiffre est pair",
- B : "le second chiffre est impair",
- C : "la somme des chiffres est paire".

Les évènements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

On a

- $A = \{(2;1);(2;2);\dots;(2;6);(4;1);(4;2);\dots;(4;6);(6;1);(6;2);\dots;(6;6)\}$,
- $B = \{(1;1);(2;1);\dots;(6;1);(3;1);(3;2);\dots;(3;6);(5;1);(5;2);\dots;(5;6)\}$,
- $C = \{(1;1);(1;3);(1;5);(2;2);(2;4);(2;6);\dots;(6;2);(6;4);(6;6)\}$.

Donc

- $A \cap B = \{(2;1);(2;3);(2;5);(4;1);(4;3);(4;5);(6;1);(6;3);(6;5)\}$,
- $B \cap C = \{(1;1);(1;3);(1;5);(3;1);(3;3);(3;5);(5;1);(5;3);(5;5)\}$,
- $A \cap C = \{(2;2);(2;4);(2;6);(4;2);(4;4);(4;6);(6;2);(6;4);(6;6)\}$,
- $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Ainsi

- $P(A \cap B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = P(A) \times P(B)$
- $P(B \cap C) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = P(B) \times P(C)$
- $P(A \cap C) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = P(A) \times P(C)$
- MAIS $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Les évènements A, B et C ne sont donc pas mutuellement indépendants.

Théorème 5.55

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des évènements mutuellement indépendants.
Soient $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des évènements tels que $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $B_i \in \{A_i; \overline{A_i}\}$. Alors les évènements $B_1, \dots, B_n$ sont également mutuellement indépendants.

Exemple 5.56 – Si A, B C sont mutuellement indépendants alors A, $\overline{B}$, C aussi, ou encore $\overline{A}$, B, C, etc.