9 | Compléments sur les suites

I – Propriétés éventuelles d'une suite

1 – Suites monotones

Définition 9.1 – Soit (u_n) une suite réelle.

- (u_n) est dite **strictement croissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n < u_{n+1}.$$
- (u_n) est dite **strictement décroissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > u_{n+1}.$$
- (u_n) est dite **croissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$
- (u_n) est dite **décroissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}.$$

La suite (u_n) est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Méthode 9.2 – Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante
Pour établir qu'une suite est monotone, on peut

1. Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. En effet, on a
$$\begin{aligned} (u_n) \text{ croissante } &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0, \\ (u_n) \text{ décroissante } &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0. \end{aligned}$$
2. Lorsque tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. En effet, dans ce cas, on a
$$\begin{aligned} (u_n) \text{ croissante } &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1, \\ (u_n) \text{ décroissante } &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1. \end{aligned}$$

Exemple 9.3 –

1. La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ est strictement croissante.
Nous avons $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

2. La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ est strictement croissante.
   La suite (u_n) est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2\times(n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2}.$$

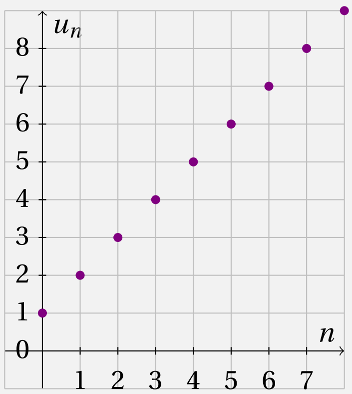
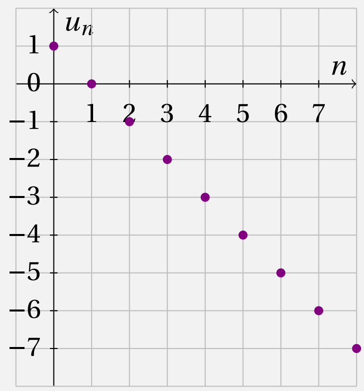
   Ainsi, la suite (u_n) est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ donc la suite (u_n) est croissante.

Exemple 9.4 –

- **Cas des suites arithmétiques.**
  Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors $u_{n+1} = u_n + r$ et donc

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

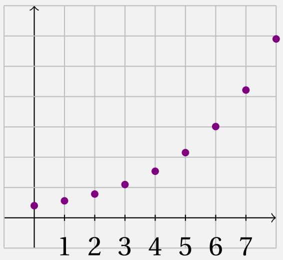
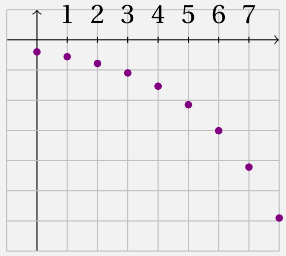
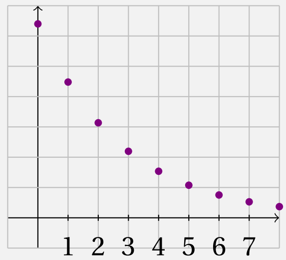
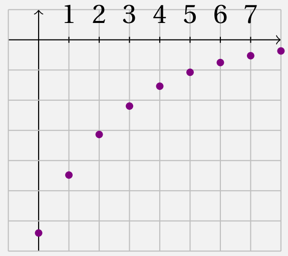
  La monotonie de la suite dépend donc du signe de r.
  1. Si $r \geqslant 0$, alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc (u_n) est croissante.
  2. Si $r \leqslant 0$, alors $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et donc (u_n) est décroissante.

Si $r \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante.	Si $r \leqslant 0$, la suite (u_n) est décroissante.
	

- **Cas des suites géométriques.**
  Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

$$u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n \times (q-1).$$

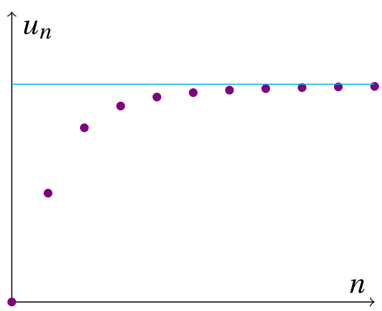
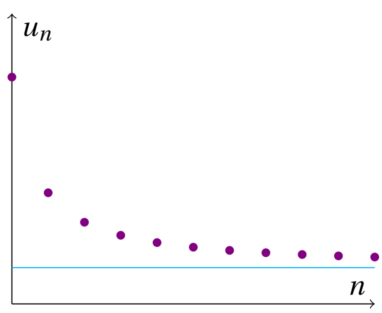
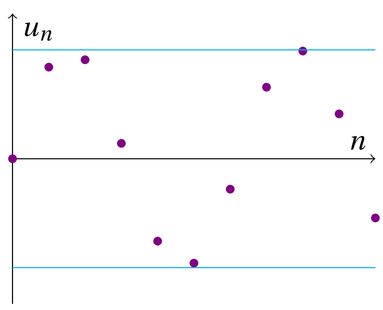
  La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$.
  1. Si $q < 0$, alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.
  2. Si $q > 0$, alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$:
     - Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est croissante.
     - Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite est décroissante.
     - Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite est décroissante.
     - Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, la suite est croissante.

Si $q>1$		Si $0<q<1$	
Si $u_0>0$, alors la suite (u_n) est croissante.	Si $u_0<0$, alors la suite (u_n) est décroissante.	Si $u_0>0$, alors la suite (u_n) est décroissante.	Si $u_0<0$, alors la suite (u_n) est croissante.
			

2 – Suite majorée/minorée/bornée

Définition 9.5 – Soit (u_n) une suite réelle.

- (u_n) est dite **majorée** par M si
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant M.$$
- (u_n) est dite **minorée** par m si
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geqslant m.$$
- (u_n) est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

(u_n) est majorée	(u_n) est minorée	(u_n) est bornée
		

Exemple 9.6 – La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}$ est majorée par 3.

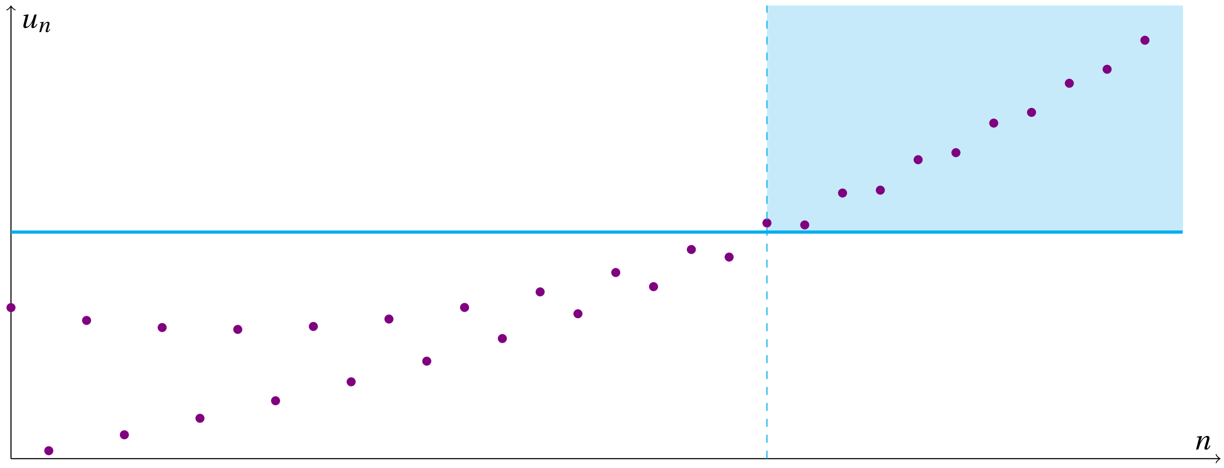
Pour tout entier n, on a
$$u_n - 3 = \frac{3n^2}{n^2+1} - 3 = \frac{3n^2 - 3(n^2+1)}{n^2+1} = \frac{-3}{n^2+1}.$$
Or, $-3<0$ et $n^2+1>0$ donc $\dfrac{-3}{n^2+1}<0$. Autrement dit, $u_n - 3 < 0$ soit $u_n < 3$. Donc, la suite (u_n) est bien majorée par 3.

II – Limite d'une suite réelle

1 – Limite infinie

Définition 9.7 –

- On dit qu'une suite (u_n) **admet une limite** égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si u_n prend des valeurs **positives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
- On dit qu'une suite (u_n) **admet une limite** égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si u_n prend des valeurs **négatives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

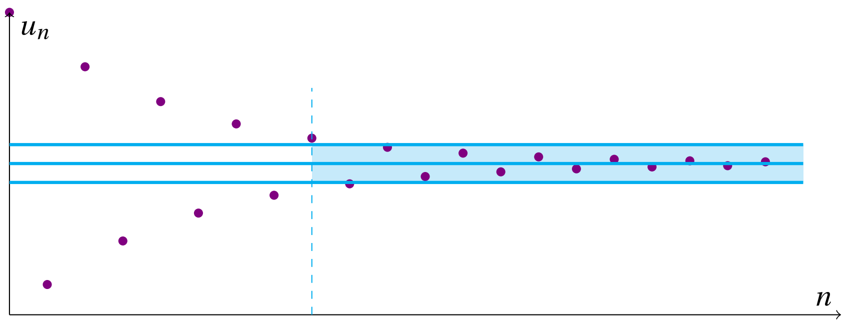


Exemple 9.8 – La suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
On a $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

2 – Limite finie

Définition 9.9 – Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbf{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite (u_n) admet pour **limite** le réel ℓ signifie que u_n devient aussi proche que l'on veut de ℓ pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite **convergente**.



Exemple 9.10 – La suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ tend vers 1 en $+\infty$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} = 1$.

Proposition 9.11

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$.

Remarque 9.12 – Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet donc pas de limite.

Exemple 9.13 –

- **Cas des suites arithmétiques.**
  Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_0 + n \times r$.

  La limite de la suite (u_n) dépend donc du signe de r.

  1. Si $r \geqslant 0$, alors (u_n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  2. Si $r \leqslant 0$, alors (u_n) diverge vers $-\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- **Cas des suites géométriques.**
  Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
  Alors $u_{n+1} = q \times u_n$ et $u_n = u_0 \times q^n$.

  L'existence d'une limite pour la suite (u_n) dépend donc du signe de q.

  1. Si $q < 0$, alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite est alternée et n'admet pas de limite.
  2. Si $q > 0$, alors la suite est monotone donc elle admet une limite qui dépend du signe de u_0 et de la valeur de q :
     - Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
     - Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
     - Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

  Les graphiques de l'exemple 9.3 montrent les différentes limites possibles.

III – Lien entre convergence et inégalités

1 – Minoration et majoration

Proposition 9.14

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant v_n$.

- Si (u_n) et (v_n) convergent, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$
- Si au contraire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors (u_n) diverge et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$
- Enfin, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (v_n) diverge et
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

Exemple 9.15 – Soit (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = \left(2+(-1)^n\right) n.$$

En posant $u_n = n$ pour tout n, on a bien $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant v_n$.
C'est pourquoi on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

2 – Théorème des gendarmes

Théorème 9.16

Soient (u_n), (v_n), et (w_n) trois suites telles que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors (v_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Exemple 9.17 – Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par

$$u_n = \frac{1}{2n^2+(-1)^n}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

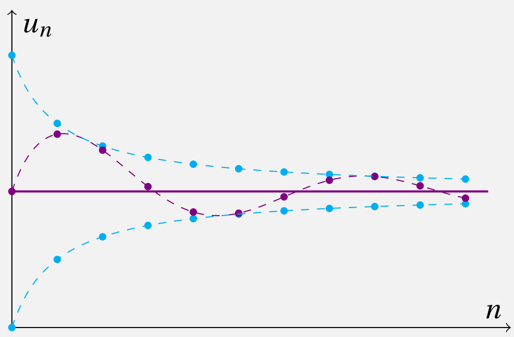
$$\frac{1}{2n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n^2-1}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2-1} = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$



3 – Théorème de convergence monotone

Théorème 9.18 – Théorème de convergence monotone

- Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

Exemple 9.19 – Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \text{et } u_0 = \frac{1}{2}.$$

1. Étudier les variations de la suite (u_n).
   Pour tout entier n, on a
   $$u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leqslant 0.$$
   Donc la suite (u_n) est décroissante.
2. Montrer par récurrence que $u_n \in [0;1]$ pour tout entier naturel n.
   Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : "$u_n \in [0;1]$".
   Initialisation : Pour $n = 0$,
   $$u_0 = \frac{1}{2} \in [0;1].$$
   Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0;1]$, donc $u_n \geqslant u_n^2$. Ainsi $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \geqslant 0$.
   Par ailleurs, puisque $u_n^2 \geqslant 0$, on a $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \leqslant u_n \leqslant 1$. Donc on a
   $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 \qquad \textit{i.e.,} \quad u_{n+1} \in [0;1].$$
   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
   Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$ *i.e.*,
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in [0;1].$$
3. En déduire que (u_n) converge.
   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Donc, d'après le théorème, elle converge.
4. Déterminer sa limite ℓ.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Or $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ donc en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient
   $$\ell = \ell - \ell^2.$$
   Autrement dit $\ell^2 = 0$ donc $\ell = 0$. Ainsi
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$