ECRICOME 2024

Exercice 1 –

1. a) Je calcule la matrice M :

$$M = A - I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0-4 & -1 & 8 \\ 4 & 4-4 & -4 \\ 0 & 0 & 2-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule d'abord la matrice $2M+I$ avant de calculer son cube :

$$2M + I = 2 \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4+2 & -1 & 8 \\ 4 & 0+2 & -4 \\ 0 & 0 & -2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je peux alors calculer les produits matriciels $(2M+I)^2$ puis $(2M+I)^3$:

$$(2M+I)^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4-4 & 2-2 & -16+4 \\ -8+8 & -4+4 & 32-8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2M+I)^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6-6 \\ 0 & 0 & -12+12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Ainsi j'ai bien montré que $(2M+I)^3 = 0_3$.

c) En développant littéralement le produit précédemment obtenu, j'obtiens que

$$(2M+I)^2 = (2M)^2 + 2M \times I + I \times 2M + I^2 = 4M^2 + 4M + I \qquad \textit{(les produits commutent)}$$
$$(2M+I)^3 = (2M+I) \times \left(4M^2 + 4M + I\right) = 8M^3 + 12M^2 + 6M + I$$

Ainsi en injectant ce développement dans l'équation obtenue précédemment, j'obtiens bien que

$$(2M+I)^3 = 0_3 \iff 8M^3 + 12M^2 + 6M + I = 0_3 \iff 8M^3 + 12M^2 + 6M = -I$$
$$\iff M\left(8M^2 + 12M + 6I\right) = -I.$$

d) Grâce à la question précédente,

$$M\left(8M^2 + 12M + 6I\right) = -I \iff M\left(-8M^2 - 12M - 6I\right) = I.$$

Ainsi la matrice M est inversible et son inverse est donnée par

$$M^{-1} = -8M^2 - 12M - 6I.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule l'expression $AX_n + B$ dans le but de retrouver X_{n+1} :

$$AX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -s_n + 8t_n \\ 4r_n + 4s_n - 4t_n \\ 2t_n \end{pmatrix}$$

$$AX_n + B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -s_n + 8t_n \\ 4r_n + 4s_n - 4t_n \\ 2t_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}s_n + 2t_n \\ r_n + s_n - t_n \\ \frac{1}{2}t_n + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

3. a) Je calcule l'expression $AC+B$ dans le but de retrouver C :

$$AC+B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-1&8\\4&4&-4\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-8+16\\8+32-8\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}=C.$$

Ainsi j'ai bien montré que $AC+B=C$.

b) Par construction, $M=A-I$. Donc $I-A=-(A-I)=-M$ est inversible comme j'ai déjà démontré que M est inversible. Son inverse est donnée par

$$(I-A)^{-1}=-M^{-1}=8M^2+12M+6I.$$

c) En combinant les résultats des questions précédentes, je sais que $I-A$ est inversible et que $AC+B=C$. Alors

$$AC+B=C \iff B=C-AC=(I-A)\times C \iff C=(I-A)^{-1}B.$$

En particulier, $C=(I-A)^{-1}B$ est l'unique solution de l'équation matricielle $AX+B=X$ d'inconnue X.

4. Je raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n-C=A^n(X_0-C)$.

Initialisation : Pour $n=0$,

$$A^0(X_0-C)=I(X_0-C)=X_0-C.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $X_n-C=A^n(X_0-C)$. Or

$$\begin{aligned}X_{n+1}-C&=AX_n+B-C=A\big(A^n(X_0-C)+C\big)+B-C=A^{n+1}(X_0-C)+AC+B-C\\&=A^{n+1}(X_0-C)+C-C=A^{n+1}(X_0-C),\end{aligned}$$

comme $AC+B=C$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n-C=A^n(X_0-C).$$

5. a) D'après la question **1.b)**, je sais que $(2M+I)^3=0_3$. Or $M=A-I$, donc en combinant ces deux relations,

$$(2M+I)^3=0_3 \iff \big(2(A-I)+I\big)^3=0_3 \iff (2A-2I+I)^3=0_3 \iff (2A-I)^3=0_3.$$

Comme $(2A-I)^3=0_3$, alors le polynôme $(2x-1)^3$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Les valeurs propres de la matrice A sont donc parmi les racines de ce polynôme annulateur. Et comme

$$(2x-1)^3=0 \iff 2x-1=0 \iff 2x=1 \iff x=\frac{1}{2},$$

alors l'unique valeur propre possible pour la matrice A est $\frac{1}{2}$.

b) i. Si la matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible R telles que $A = RDR^{-1}$. La matrice D n'a alors sur sa diagonale que des valeurs propres de la matrice A. Ici, comme $\frac{1}{2}$ est l'unique valeur propre de A, alors la matrice D n'a que cette valeur sur sa diagonale, *i.e.*

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I.$$

Alors l'identité de diagonalisabilité peut se réécrire en multipliant par R^{-1} à gauche et par R à droite,

$$A = RDR^{-1} = R \times \frac{1}{2}I \times R^{-1} \iff \frac{1}{2}I = R^{-1}AR.$$

ii. En reprenant l'identité obtenue à la question précédente,

$$A = RDR^{-1} = R \times \frac{1}{2}I \times R^{-1} = \frac{1}{2}RR^{-1} = \frac{1}{2}I.$$

iii. Le raisonnement par l'absurde mené dans cette question suppose que la matrice A est diagonalisable et aboutit au fait que la matrice A est égale à la matrice $\frac{1}{2}I$. Or ce n'est pas le cas, la matrice A n'étant même pas diagonale. Cette contradiction démontre donc que l'hypothèse de départ est erronée : la matrice A n'est pas diagonalisable.

6. a) Je calcule le produit matriciel QP :

$$QP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -6+6 & 12 & 8-8 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

b) Comme $QP = 2I$, alors la matrice P est inversible et son inverse est donnée par $P^{-1} = \frac{1}{2}Q$.

c) Je vais calculer le produit matriciel $\frac{1}{4}PTQ$ dans le but de retrouver A :

$$PT = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -6+6 & 12+4 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 16 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PTQ = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 16 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 48 \\ 24 & 12+12 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}PTQ.$$

d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = \frac{1}{2^{n+1}}PT^nQ.$

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^1} P T^0 Q = \frac{1}{2} PQ = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $A^n = \dfrac{1}{2^{n+1}} P T^n Q$. Or

$$A^{n+1} = A^n \times A = \frac{1}{2^{n+1}} P T^n Q \times \frac{1}{4} P T Q = \frac{1}{2^{n+1}} P T^n \times \frac{1}{2} I \times T Q = \frac{1}{2^{n+2}} P T^{n+1} Q.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{2^{n+1}} P T^n Q.$$

e) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$T^0 = I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 & 2\times 0 \times (-1) \\ 0 & 1 & 2 \times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or

$$\begin{aligned} T^{n+1} = T^n \times T &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2n & 2\times 2n + 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & 2n(2+n-1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & 2(n+1)(n+1-1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : *Il aurait aussi été possible d'utiliser le binôme de Newton mais la récurrence semble plus facile puisqu'il ne s'agit que de vérifier une formule de l'énoncé.*

7. D'après la question **4.**, je sais que $X_n - C = A^n(X_0 - C)$. Et je connais désormais une formule pour la matrice A_n. Donc je peux en déduire X_n, et les formes explicites des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix} = A^n(X_0 - C) + C = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_0 - 2 \\ s_0 - 8 \\ t_0 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+3n^2-11n \\ 4n+4-6n^2+10n \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\big(3n^2 - 13n\big) \\ 8 + \frac{1}{2^{n+1}}\big(-6n^2+14n+4\big) \\ 2 - \frac{2}{2^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\big(3n^2 - 13n\big) \\ 8 + \frac{1}{2^{n}}\big(-3n^2+7n+2\big) \\ 2 - \frac{1}{2^{n}} \end{pmatrix}$$

Finalement j'obtiens bien pour tout entier naturel n,

$$r_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\big(3n^2 - 13n\big), \qquad s_n = 8 + \frac{1}{2^n}\big(-3n^2+7n+2\big) \quad \text{et} \quad t_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

8. a) Grâce à la propriété fondamentale du logarithme,

$$\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \ln\big(n^2\big) - \ln(\big(2^n\big) = 2\ln(n) - n\ln(2) = n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right).$$

Puis par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right) = -\ln(2)$ et par produit, comme $\ln(2) > \ln(1) = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right) = -\infty.$$

Alors par continuité de la fonction exponentielle, comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Enfin comme pour tout $n \geqslant 1$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{n^2}{2^n}$, alors par théorème d'encadrement des limites, j'en déduis que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

b) Par opérations sur les limites, grâce aux deux résultats obtenus à la question précédente et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\big(3n^2 - 13n\big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\big(-3n^2+7n+2\big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Finalement par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 2 + 0 = 2, \qquad \lim_{n\to+\infty} s_n = 8 + 0 = 8 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = 2 - 0 = 2.$$