

# ECRICOME 2021

## Exercice 1 –

1. (a)

$$M - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

donc

$$(M - I)(M + 3I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Comme  $(M - I)(M + 3I) = O_3$ , j'en déduis que le polynôme

$$P(X) = (X - 1)(X + 3) = X^2 + 2X - 3$$

est un polynôme annulateur de la matrice  $M$ .

(c) Les valeurs propres possibles pour la matrice  $M$  sont les racines du polynôme annulateur. Or  $X^2 + 2X - 3 = 0 \iff (X - 1)(X + 3) = 0 \iff X = 1$  ou  $X = -3$ . Donc comme  $X^2 + 2X - 3$  est un polynôme annulateur de  $M$  et que ses racines sont  $-3$  et  $1$ , les valeurs propres possibles pour  $M$  sont

$$-3 \quad \text{et} \quad 1.$$

2. (a) D'après la question 1a, je sais que  $P(M) = (M - I)(M + 3I) = O_3$ , i.e.  $M^2 + 2M - 3I = O_3$ . J'en déduis donc que

$$M^2 = 3I - 2M.$$

(b) Notons  $P_n$  la propriété  $M^n = u_n M + v_n I$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,

$$M^0 = I \quad \text{et} \quad u_0 M + v_0 I = 0 \times M + 1 \times I = I.$$

Donc la propriété  $P_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P_n$  soit vraie au rang  $n$  et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie aussi.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (u_n M + v_n I) \times M = u_n M^2 + v_n M = u_n (3I - 2M) + v_n M \\ &= 3u_n I - 2u_n M + v_n M = (-2u_n + v_n) M + 3u_n I = u_{n+1} M + v_{n+1} I. \end{aligned}$$

Donc  $P_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est héréditaire et que  $P_0$  est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \geq 0$ , i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = u_n M + v_n I.$$

3. (a) D'après les formules de l'énoncé,  $\begin{pmatrix} -2u_n + v_n \\ 3u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ . Ainsi, en posant

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient bien l'égalité souhaitée.

(b) Notons  $P_n$  la propriété  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété  $P_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P_n$  soit vraie au rang  $n$  et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie aussi.

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \times A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc  $P_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est héréditaire et que  $P_0$  est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \geq 0$ , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Voici les deux scripts complétés.

```
// Script 1
n=input('n= ')
A=[-2,1;3,0]
C=[0;1]
C=(A^n)*C
disp(C)
```

```
// Script 2
n=input('n= ')
A=[-2,1;3,0]
C=[0;1]
for k=1:n
    C=A*C
end
disp(C)
```

4. (a) On a

$$A \times V_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = V_1.$$

Comme  $V_1$  est un vecteur non-nul qui vérifie  $AV_1 = 1V_1$ , alors  $V_1$  est un vecteur propre de  $A$ , associé à la valeur propre 1.

On a

$$A \times V_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3V_2.$$

Comme  $V_2$  est un vecteur non-nul qui vérifie  $AV_2 = -3V_2$ , alors  $V_2$  est un vecteur propre de  $A$ , associé à la valeur propre  $-3$ .

(b) Je calcule le déterminant de  $Q$  :

$$1 \times (-1) - 3 \times 1 = -1 - 3 = -4.$$

Comme ce déterminant est non-nul, je sais que  $Q$  est inversible et

$$Q^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) La matrice  $A$  possède deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. De plus, la matrice  $Q$  est construite comme juxtaposition des deux vecteurs propres de  $A$ . Donc en construisant  $D$  comme la matrice diagonale composée des deux valeurs propres 1 et  $-3$ , *i.e.*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

on obtient que  $A = QDQ^{-1}$  donc que

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}QDQ^{-1}Q = IDI = D.$$

- (d) Notons  $P_n$  la propriété  $D^n = Q^{-1}A^nQ$ . On a établi à la question précédente  $A = QDQ^{-1}$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,

$$D^0 = I \quad \text{et} \quad QA^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I.$$

Donc la propriété  $P_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P_n$  soit vraie au rang  $n$  et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie aussi.

$$A^{n+1} = A^n \times A = QD^nQ^{-1} \times QDQ^{-1} = QD^nIDQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

Donc  $P_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est héréditaire et que  $P_0$  est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \geq 0$ , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = Q^{-1}A^nQ.$$

- (e) Comme  $D$  est une matrice diagonale, je sais que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Alors comme  $A^n = QD^nQ^{-1}$ , on a

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \times \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n \\ 3 & -(-3)^n \end{pmatrix} \times \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 - 3 \times (-3)^n & -1 + (-3)^n \\ -3 + 3 \times (-3)^n & -3 - (-3)^n \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (f) D'après la question 3b, on a  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

En connaissant désormais la formule explicite de  $A^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{-1}{4} \times (-1 + (-3)^n) = \frac{1 - (-3)^n}{4}, \\ v_n &= \frac{-1}{4} \times (-3 - (-3)^n) = \frac{3 + (-3)^n}{4}. \end{aligned}$$

5. (a) D'après la question 2b, on a  $M^n = u_n M + v_n I$ .

En connaissant désormais les formules explicites de  $u_n$  et  $v_n$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 M^n &= \frac{1 - (-3)^n}{4} \times M + \frac{3 + (-3)^n}{4} \times I = \frac{1 - (-3)^n}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3 + (-3)^n}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} + \frac{3 + (-3)^n}{4} & -2 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} & \frac{1 - (-3)^n}{4} \\ 2 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} & -3 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} + \frac{3 + (-3)^n}{4} & 2 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} \\ -\frac{1 - (-3)^n}{4} & 2 \times \frac{1 - (-3)^n}{4} & \frac{3 + (-3)^n}{4} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{5 - (-3)^n}{4} & \frac{(-3)^n - 1}{2} & \frac{1 - (-3)^n}{4} \\ \frac{1 - (-3)^n}{2} & (-3)^n & \frac{1 - (-3)^n}{2} \\ \frac{(-3)^n - 1}{4} & \frac{1 - (-3)^n}{2} & \frac{3 + (-3)^n}{4} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- (b) Après exécution d'un des deux scripts de la question 3c, C(1) et C(2) contiennent respectivement les valeurs de  $u_n$  et  $v_n$ . Ainsi le résultat rendu par ce nouveau script sera la puissance  $n$ -ième de la matrice  $M$ , ie  $M^n$ .

## Exercice 2 –

1. (a) Grâce aux croissances comparées, je sais que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Graphiquement, j'en déduis que la droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

- (b) La fonction  $f$  est donnée sous la forme d'un quotient  $f = \frac{u}{v}$ ,  
avec  $u(x) = \ln(x)$  et  $v(x) = x$ . On a alors  $u'(x) = \frac{1}{x}$  et  $v'(x) = 1$ , puis

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Comme un carré est toujours positif, pour tout  $x \geq 1$ , le dénominateur de  $f'(x)$  est toujours positif, donc son signe est donné par celui du numérateur, i.e.  $1 - \ln(x)$ .

- (c) Je résous  $1 - \ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq \ln(x) \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e^1 = e$ . Je peux donc désormais déduire le tableau de variation de  $f$  grâce au tableau de signe de  $f'$ .

$$f(1) = \frac{\ln(1)}{1} = 0 \quad \text{et} \quad f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}.$$

$x$	1	$e$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f$	0	$\frac{1}{e}$	0

2. (a) Je dérive de nouveau  $f'$  pour obtenir  $f''$ . La fonction  $f'$  est donnée sous la forme d'un quotient  $f' = \frac{u}{v}$ , avec  $u(x) = 1 - \ln(x)$  et  $v(x) = x^2$ . On a alors  $u'(x) = -\frac{1}{x}$  et  $v'(x) = 2x$ , puis

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{-x - 2x + 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{2 \ln(x) - 3}{x^3}.$$

- (b) Pour étudier la convexité de  $f$ , j'étudie le signe de  $f''(x)$ . Pour commencer, je remarque que comme  $x \geq 1$ , le dénominateur  $x^3$  est toujours positif. Alors le signe de  $f''(x)$  me sera donné par celui de  $3 - 2 \ln(x)$ .

Je résous  $3 - 2 \ln(x) \geq 0 \iff 3 \geq 2 \ln(x) \iff \ln(x) \leq \frac{3}{2} \iff x \leq e^{\frac{3}{2}}$ . Je peux alors en déduire que la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $\left[1, e^{\frac{3}{2}}\right]$ , car  $f''(x)$  y est positif, puis concave sur l'intervalle  $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$ .

- (c) La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un point d'inflexion lorsque la convexité de la fonction change, c'est-à-dire en le point d'abscisse  $x = e^{\frac{3}{2}}$ . Donc le point  $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$  est point d'inflexion à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
3. (a)  $M$  étant sur la courbe représentative de la fonction  $f$ , j'en déduis que ses coordonnées sont  $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$  (je reconnais le point d'inflexion). Or

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}.$$

- (b) L'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en le point d'abscisse  $a$  est donnée par la formule  $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$ . Ici  $a = e^{\frac{3}{2}}$ , donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \times \left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + f\left(e^{\frac{3}{2}}\right).$$

Or  $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$  et

$$f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1 - \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{e^{2 \times \frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{e^3} = -\frac{1}{2e^3}.$$

Alors l'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  est donnée par

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times \left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{2e^3} + \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2e^3} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{2e^3} + \frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui se ramène à

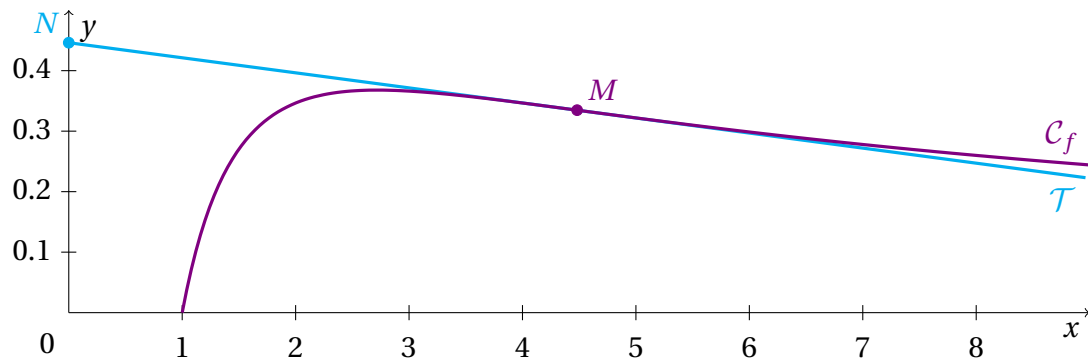
$$y = -\frac{1}{2e^3} \times x + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

- (c) L'axe des ordonnées correspond à l'ensemble des points  $(x, y)$  dont l'abscisse vaut  $x = 0$ . Comme les points de la tangente  $(\mathcal{T})$  vérifient l'équation  $y = -\frac{1}{2e^3} \times x + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$ , je peux trouver quelle est l'ordonnée du point d'abscisse  $x = 0$  sur la tangente  $(\mathcal{T})$  :

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times 0 + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi le point d'intersection  $N$  de la tangente  $(\mathcal{T})$  avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées  $\left(0, \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$ .

- (d) Comme  $M$  est le point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$ , je sais par définition que la tangente est en-dessous de la courbe sur l'intervalle  $\left[1, e^{\frac{3}{2}}\right]$ , là à  $f$  est convexe, puis au-dessus de la courbe sur l'intervalle  $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right]$ , là à  $f$  est concave.
4. Voici l'allure de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de sa tangente  $\mathcal{T}$ .



5. (a) Soit  $A \geq 1$ . Je cherche à calculer  $I(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx$ . Je commence par chercher une primitive à  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ . Je remarque que  $f$  est de la forme  $f = u' \times u$ , avec  $u(x) = \ln(x)$  puisqu'alors  $u'(x) = \frac{1}{x}$ . Ainsi une primitive de  $f$  est donnée par  $F(x) = \frac{u(x)^2}{2} = \frac{\ln(x)^2}{2}$ . Donc

$$I(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[ \frac{\ln(x)^2}{2} \right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} = \frac{\ln(A)^2}{2}.$$

- (b) Par définition, l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$  converge si et seulement si la limite  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx$  existe et est finie. Or  $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx = I(A) = \frac{\ln(A)^2}{2}$ , donc sa limite lorsque  $A$  tend vers  $+\infty$  existe et vaut  $+\infty$ .

De là, on déduit que l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$  diverge vers  $+\infty$ .

6. (a) Soit  $A \geq 1$ . Je cherche à calculer  $J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ . Je pose  $u(x) = \ln(x)$  et  $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ .

Alors  $u'(x) = \frac{1}{x}$  et  $v(x) = -\frac{1}{x}$ , puis par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^A u(x) v'(x) dx &= \left[ u(x) v(x) \right]_1^A - \int_1^A u'(x) v(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx &= \left[ -\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x} \times \left( -\frac{1}{x} \right) dx \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{\ln(1)}{1} + \int_1^A \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} - 0 + \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^A \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + \frac{1}{1} \end{aligned}$$

J'ai bien montré que  $J(A) = \frac{-\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1$ .

- (b) Par croissances comparées,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(A)}{A} = 0$ . Comme  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} = 0$  aussi, j'en déduis, par somme, que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} J(A) = -0 - 0 + 1 = 1.$$

7. (a) La fonction  $g$  est définie en deux morceaux. Sur l'intervalle  $]-\infty, 1[$ ,  $g(x) = 0$  donc la fonction  $g$  est continue car constante. Sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ ,  $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$  donc la fonction  $g$  est continue comme quotient de fonctions continues. Il ne me reste plus qu'étudier la continuité en  $x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0$$

Comme la limite à gauche de  $g$  en 1 est égale à la limite à droite de  $g$  en 1, on en déduit que la fonction  $g$  est continue en 1, donc en conclusion, sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

- (b) On a déjà vu à la question précédente que la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Aussi, sur l'intervalle  $]-\infty, 1[$ ,  $g(x) = 0 \geq 0$  donc la fonction  $g$  est positive.

Et sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ ,  $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \geq 0$  car  $x^2 > 0$  et  $\ln(x) \geq 1$  dès lors que  $x \geq 1$ . Donc la fonction  $g$  est positive sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

Enfin il me reste à montrer que l'intégrale généralisée  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$  converge et vaut 1. Je décompose, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

Je sais que  $\int_{-\infty}^1 0 dx$  converge et vaut 0 car la fonction dans l'intégrale est nulle.

Et  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$  est la limite de  $J(A)$  lorsque  $A$  tend vers  $+\infty$ .

Donc cette intégrale converge et vaut 1 par la question 6b.

En résumé, la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , positive sur  $\mathbb{R}$  et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = 0 + 1 = 1,$$

donc je peux en conclure que  $g$  est une densité de probabilité.

(c) Voici le script complété.

```

1 function y=g(x)
2   if x>=1 then
3     y=log(x)/(x^2)
4   else
5     y=0
6   end
7 endfunction
8 x=linspace(-4,8,100)
9 plot(x,g)

```

(d) L'exécution des lignes 8 et 9 du script pr  c  dent permet de tracer une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[-4, 8]$ .

8. (a) La fonction de répartition  $G$  de  $X$  est donnée par  $G(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$ .

Je raisonne par disjonction de cas :

$$\text{si } x < 1, G(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0,$$

$$\text{si } x \geq 1, G(x) = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt = J(x) = \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1.$$

J'ai bien montré que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(b) Je cherche  $P([X > e^2])$ .

$$P([X > e^2]) = 1 - P([X \leq e^2]) = 1 - G(e^2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{e^2} - \frac{\ln(e^2)}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} = \frac{3}{e^2}.$$

Je cherche  $P_{[X > e]}([X > e^2])$ . Par la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[X > e]}([X > e^2]) = \frac{P([X > e] \cap [X > e^2])}{P([X > e])} = \frac{P([X > e^2])}{P([X > e])}.$$

$$\text{J'ai besoin de } P([X > e]) = 1 - P([X \leq e]) = 1 - G(e) = 1 - \left(1 - \frac{1}{e} - \frac{\ln(e)}{e}\right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}.$$

Donc

$$P_{[X > e]}([X > e^2]) = \frac{\frac{3}{e^2}}{\frac{2}{e}} = \frac{3}{e^2} \times \frac{e}{2} = \frac{3}{2e}.$$

- (c) La variable aléatoire  $X$  admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée  $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx$  converge. Or  $xg(x) = \frac{\ln(x)}{x}$  et on a montré à la question 5b que l'intégrale de cette fonction diverge entre 1 et  $+\infty$ .

Donc la variable aléatoire  $X$  n'admet pas d'espérance.



**Exercice 3 –****Partie A**

1. (a) La variable aléatoire  $X$  est à valeurs ent  res. Donc à l'  v  nement  $[X > n - 1]$  correspond toutes les valeurs ent  res strictement supérieures à  $n - 1$ , *i.e.*  $n$ ,  $n + 1$  et toutes les valeurs ent  res supérieures. En mettant en avant la valeur  $n$ , on peut alors décomposer l'  v  nement  $[X > n - 1]$  en les   v  nements  $[X = n]$  et  $[X > n]$ , à qui correspond toutes les valeurs strictement supérieures à  $n$ . J'ai bien montré que pour tout entier  $n$ ,

$$[X > n - 1] = [X = n] \cup [X > n].$$

- (b) Par la relation obtenue à la question précédente, je sais que

$$P([X > n - 1]) = P([X = n] \cup [X > n]) = P([X = n]) + P([X > n])$$

puisque les deux   v  nements sont indépendants. Comme  $u_n = P([X > n])$ , alors de même  $u_{n-1} = P([X > n - 1])$  et l'équation précédente se réécrit  $u_{n-1} = P([X = n]) + u_n$ , *i.e.* pour tout entier  $n$ ,

$$u_{n-1} - u_n = P([X = n]).$$

2. (a) Je suis cette fois en présence de probabilités conditionnelles, sachant que l'  v  nement  $[X > n - 1]$  est vérifié. Trivialement,  $P_{[X > n - 1]}([X > n - 1]) = 1$ , et par un raisonnement similaire à celui de la question 1b,

$$1 = P_{[X > n - 1]}([X = n] \cup [X > n]) = P_{[X > n - 1]}([X = n]) + P_{[X > n - 1]}([X > n]).$$

Autrement dit,

$$P_{[X > n - 1]}([X > n]) = 1 - P_{[X > n - 1]}([X = n]).$$

- (b) L'énoncé nous donne  $P_{[X > n - 1]}([X = n]) = \frac{2}{5}$ .

Donc la formule de la question précédente se réécrit  $P_{[X > n - 1]}([X > n]) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ . Puis, par la formule des probabilités composées, j'obtiens

$$u_n = P([X > n]) = P([X > n - 1]) \times P_{[X > n - 1]}([X > n]) = u_{n-1} \times \frac{3}{5}.$$

J'ai bien montré que pour tout entier  $n$ ,

$$u_n = \frac{3}{5} u_{n-1}.$$

- (c) Gr  ce à la question précédente, je reconnais en  $(u_n)$  une suite géométrique, de raison  $\frac{3}{5}$  et de premier terme  $u_0 = 1$ . Alors la formule explicite de la suite  $(u_n)$  est donnée par

$$u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

3. (a) Gr  ce à la question 1b, je sais que pour tout entier  $n$ ,

$$P([X = n]) = u_{n-1} - u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \frac{2}{5}.$$

J'ai bien montré que pour tout entier  $n$ ,

$$P([X = n]) = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

- (b) On a  $P([X = n]) = p(1 - p)^{n-1}$  pour  $p = \frac{2}{5}$ . Je reconnais là la formule donnant les probabilités d   une loi géométrique de paramètre  $p = \frac{2}{5}$ .
- (c) Comme la variable aléatoire  $X$  suit une loi géométrique, je sais que

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{3}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \times \frac{5^2}{2^2} = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4}.$$

### Partie B

4. (a) Voici le script complété.

```
function X=geom()
    X = 1
    while rand() > 2/5
        X = X + 1
    end
endfunction
```

- (b) Voici le script complété.

```
function Z=simulZ()
    X1=geom()
    X2=geom()
    if X1>X2 then
        Z=X1
    else
        Z=X2
    end
endfunction
```

5. Soit  $n$  un entier naturel. Comme  $X_1$  suit la même loi géométrique que  $X$  et que je sais calculer la somme des premiers termes d   une suite géométrique,

$$\begin{aligned} P([X_1 \leq n]) &= \sum_{k=1}^n P([X_1 = k]) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} = \frac{2}{5} \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^k\right) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{2}{5}} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n. \end{aligned}$$

J  ai bien montré que pour tout entier  $n$ ,

$$P([X_1 \leq n]) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

6. (a) La variable aléatoire  $Z$  est égale à la durée de vie de l  appareil, qui elle-même correspond à la durée de vie maximale des deux composants. Ainsi la durée de vie de l  appareil est inférieure ou égale à  $n$  si et seulement si les durées de vie des deux composants sont elle-mêmes inférieures ou égales à  $n$ , *i.e.*

$$[Z \leq n] = [\max(X_1, X_2) \leq n] = [X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n].$$

- (b) Gr  ce à la relation établie à la question précédente, et comme les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont identiques et indépendantes, j'en déduis que

$$P([Z \leq n]) = P([X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n]) = P([X_1 \leq n]) \times P([X_2 \leq n]) = P([X_1 \leq n])^2.$$

Ainsi, grâce au résultat de la question 5,

$$P([Z \leq n]) = \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^2 = 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{9}{25}\right)^n.$$

- (c) Pour les mêmes raisons que celles utilisées dans la question 1, on peut établir l'égalité  $[Z \leq n] = [Z = n] \cup [Z \leq n-1]$ , et donc

$$P([Z = n]) = P([Z \leq n]) - P([Z \leq n-1]).$$

Alors, avec les valeurs de la question précédente, j'obtiens

$$\begin{aligned} P([Z = n]) &= P([Z \leq n]) - P([Z \leq n-1]) \\ &= \left(1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{9}{25}\right)^n\right) - \left(1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{9}{25}\right) \times \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} = \frac{2}{5} \times 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \times \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout entier  $n$ ,

$$P([Z = n]) = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

7. Les deux séries  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$  et  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{25}\right)^n$  sont des séries géométriques, de raisons respectivement  $\frac{3}{5}$  et  $\frac{9}{25}$ . Dans les deux cas, comme les raisons sont strictement comprises entre 0 et 1, les séries sont convergentes. Or pour tout  $K \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K P([Z = n]) &= \sum_{n=1}^K \left( \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \right) = \frac{4}{5} \sum_{n=1}^K \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \sum_{n=1}^K \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{K-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{16}{25} \sum_{n=0}^{K-1} \left(\frac{9}{25}\right)^n. \end{aligned}$$

Et par convergence des séries géométriques citées précédemment, toutes les sommes partielles écrites ici convergent et on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} P([Z = n]) &= \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{16}{25} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{9}{25}\right)^n = \frac{4}{5} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{1 - \frac{9}{25}} \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{\frac{2}{5}} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} - \frac{16}{25} \times \frac{25}{16} = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout entier  $n$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P([Z = n]) = 1.$$

8. (a) Je sais, d'après la question 6c, que

$$P([Z = n]) = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

Comme  $X_1$  suit la même loi géométrique de paramètre  $p = \frac{2}{5}$  que  $X$ , alors, par la question 3a,  $P([X_1 = n]) = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ . De la même manière, si  $Y$  suit une loi géométrique de paramètre  $p = \frac{16}{25}$ , alors  $P([Y = n]) = p \times (1-p)^{n-1} = \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}$ . En rassemblant les morceaux puis en multipliant par  $n$ , j'obtiens que

$$\begin{aligned} P([Z = n]) &= 2 \times P([X_1 = n]) - P([Y = n]) \\ \iff nP([Z = n]) &= 2nP([X_1 = n]) - nP([Y = n]) \end{aligned}$$

- (b) La variable aléatoire  $Z$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 1} nP([Z = n])$  converge. Or pour tout  $K \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K nP([Z = n]) &= \sum_{n=1}^K (2nP([X_1 = n]) - nP([Y = n])) \\ &= 2 \times \left( \sum_{n=1}^K nP([X_1 = n]) \right) - \left( \sum_{n=1}^K nP([Y = n]) \right) \end{aligned}$$

Et comme les variables aléatoires  $X_1$  et  $Y$  suivent des lois géométriques, elles admettent toutes les deux des espérances, ce qui nous permet d'établir la convergence des deux sommes partielles ici présentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP([X_1 = n]) \text{ existe et vaut } E(X_1) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nP([Y = n]) \text{ existe et vaut } E(Y).$$

J'en déduis donc que la série  $\sum_{n \geq 1} nP([Z = n])$  converge, *i.e.* que la variable aléatoire  $Z$  admet une espérance et que

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP([Z = n]) = 2E(X_1) - E(Y) = 2 \times \frac{1}{\frac{2}{5}} - \frac{1}{\frac{16}{25}} = 2 \times \frac{5}{2} - \frac{25}{16} = \frac{80 - 25}{16} = \frac{55}{16}.$$

J'ai montré que

$$E(Z) = \frac{55}{16}.$$