## EXERCICES — CHAPITRE 6

**Exercice 1**  $(\star\star)$  – Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0=2$  et pour tout entier naturel  $n\in\mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 5u_n + 4$$
.

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .

**Exercice 2**  $(\star\star)$  – Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0=-3$  et pour tout entier naturel  $n\in\mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 5 - 4u_n$$
.

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (-4)^{n+1} + 1$ .

**Exercice 3**  $(\star\star)$  – Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0=\frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n\in\mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2}.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 1$ .

**Exercice 4**  $(\star\star)$  – Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0=1$  et pour tout entier naturel  $n\in\mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 4$ .

**Exercice 5**  $(\star\star)$  – Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0=3$  et pour tout entier naturel  $n\in\mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq 3$ .

**Exercice 6**  $(\star\star)$  – Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0=2$  et pour tout entier naturel  $n\in\mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^n + n + 1$ .

Exercice 7 (\*\*) – Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \le u_n \le 1$ .

**Exercice 8**  $(\star\star)$  – Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0=1$ ,  $u_1=1$  et pour tout entier  $n\in\mathbb{N}$ ,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2.$$

- 1. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
- 2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .

**Exercice 9**  $(\star \star \star)$  – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

- 1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
- 2. Montrer que pour tout  $n \ge 4$ ,  $u_n \ge 0$ .
- 3. En déduire que pour tout  $n \ge 5$ ,  $u_n \ge n-3$ .

**Exercice 10** ( $\star \star \star$ ) – Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$2^n > n$$
.

**Exercice 11**  $(\star\star)$  – Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

**Exercice 12**  $(\star \star \star)$  – Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

**Exercice 13**  $(\star\star)$  – Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 14 (\* \* \*) -

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$