9 | Réduction des matrices carrées

I – Matrice diagonalisable

1 – Définition

Définition 9.1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée. On dit que la matrice A est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonale telle que

$$A = PDP^{-1}.$$

Remarque 9.2 –

- On a $A = PDP^{-1} \iff P^{-1}AP = D$.
  On suppose que $A = PDP^{-1}$. Alors $P^{-1}AP = P^{-1}PDP^{-1}P = I_nDI_n = D$.
  Réciproquement, si $D = P^{-1}AP$, alors $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = I_nAI_n = A$.
- "Diagonaliser une matrice" signifie trouver deux matrices D et P, respectivement diagonale et inversible, telle que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 9.3 – Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, en considérant les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrons que P est inversible et calculons P^{-1}. On a $1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0$ donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Remarque 9.4 – En pratique, il n'est pas nécessaire de calculer P^{-1} pour montrer que A est diagonalisable, comme le montre la proposition ci-dessous.

Proposition 9.5

Soit A une matrice, D une matrice diagonale et P une matrice inversible. Si $AP = PD$, alors la matrice A est diagonalisable.

Exemple 9.6 – On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, la matrice P est inversible car $1 \times (-1) - 1 \times 3 = -4 \neq 0$. Par conséquent, d'après la proposition ci-dessus, la matrice D est diagonalisable.

2 – Application au calcul de puissance

Proposition 9.7

Soit A une matrice. On suppose qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D telle que $A = PDP^{-1}$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Démonstration.
Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition "$A^n = PD^nP^{-1}$".

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on sait que $A^n = PD^nP^{-1}$. Par ailleurs, on sait que $A = PDP^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la proposition est héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$ *i.e.*,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

□

Remarque 9.8 – Si le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire pour montrer qu'une matrice A est diagonalisable, il est cependant **indispensable** pour obtenir une expression explicite des puissances de A, ce qui est souvent ce que l'on cherche à obtenir.

II – Valeurs propres et vecteurs propres

1 – Définition

Définition 9.9 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice et λ un réel.

- On dit que λ est une **valeur propre** de la matrice A si et seulement si

$$\text{il existe } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ \underline{non-nul} tel que } AX = \lambda X.$$

- La matrice colonne X est alors appelée **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

Exemple 9.10 – On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M et préciser les valeurs propres associées.

La matrice colonne $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est non-nulle et

$$MV_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1,$$

ce qui prouve que V_1 est vecteur propre de M pour la valeur propre 1.

La matrice colonne $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non-nulle et

$$MV_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6V_2,$$

ce qui prouve que V_2 est vecteur propre de M pour la valeur propre 6.

La matrice colonne $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est non-nulle et

$$MV_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2V_3,$$

ce qui prouve que V_3 est vecteur propre de M pour la valeur propre -2.

Proposition 9.11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice et λ un réel. Il n'y a que deux possibilités pour l'ensemble des solutions de l'équation $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

- Ou bien cet ensemble contient uniquement la matrice colonne nulle, auquel cas λ n'est pas valeur propre de A,
- ou bien cet ensemble ne contient pas uniquement la matrice colonne nulle, auquel cas λ est valeur de propre de A, et toute matrice **non-nulle** de cet ensemble est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple 9.12 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. Les réels 2 et 3 sont-ils valeurs propres de A ? Si oui, déterminer un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

On raisonne par résolution d'un système d'inconnue $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
AX=3X &\iff \begin{pmatrix}0&-6&6\\-1&-5&6\\-1&-8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} & -6y & +6z & = & 3x\\ -x & -5y & +6z & = & 3y\\ -x & -8y & +9z & = & 3z\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} & -6y & +6z & = & 3x & & \\ -x & -5y & +6z & = & 3y & & \\ & -3y & +3z & = & -3y & +3z & \quad L_3\leftarrow L_3-L_2\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccc} & -2y & +2z & = & x & \quad L_1\leftarrow \frac{1}{3}L_1\\ -x & -5y & +6z & = & 3y & \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} -x & -2y & +2z & = & 0\\ -x & -8y & +6z & = & 0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi un système à un degré de liberté (3 inconnues pour seulement 2 équations). On choisit alors de fixer une variable, $x=1$ par exemple, et le système devient

$$\left\{\begin{array}{ccccc} -1 & -2y & +2z & = & 0\\ -1 & -8y & +6z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccc} -2y & +2z & = & 1\\ -8y & +6z & = & 1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} -2y & +2z & = & 1\\ -2y & & = & -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccc} -2 & +2z & = & 1\\ y & & = & 1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} 2z & = & 3\\ y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} z & = & \frac{3}{2}\\ y & = & 1\end{array}\right.$$

Ainsi $x=1$, $y=1$ et $z=\frac{3}{2}$ est une solution du système linéaire étudié. Cette solution est non-nulle.

Donc $\lambda=3$ est une valeur propre de A et un vecteur propre associé est le vecteur $X=\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
AX=2X &\iff \begin{pmatrix}0&-6&6\\-1&-5&6\\-1&-8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} & -6y & +6z & = & 2x\\ -x & -5y & +6z & = & 2y\\ -x & -8y & +9z & = & 2z\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} -2x & -6y & +6z & = & 0\\ -x & -7y & +6z & = & 0\\ -x & -8y & +7z & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccc} -x & +y & & = & 0 & \quad L_1\leftarrow L_1-L_2\\ -x & -7y & +6z & = & 0 & \\ & -y & +z & = & 0 & \quad L_3\leftarrow L_3-L_2\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} y & = & x\\ -2y & = & 0\\ z & = & y\end{array}\right.\\
&\iff x=y=z=0
\end{aligned}$$

Autrement dit, l'unique solution de l'équation $AX = 2X$ est la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc 2 n'est pas valeur propre de A.

2 – Polynôme annulateur de A

Définition 9.13 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée et $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_p X^p$ un polynôme.
On définit le **polynôme matriciel** $P(A)$ comme étant la matrice carrée

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_p A^p.$$

On dit que le polynôme P est un **polynôme annulateur** de la matrice A lorsque $P(A) = O_n$.

Exemple 9.14 – Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Si $P(X) = X^2 + 2X$, alors $P(A) = A^2 + 2A$.
2. Si $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X + 1$, alors $P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A + I_3$.
3. Si $P(x) = -3$, alors $P(A) = -3I_3$.

Exemple 9.15 – On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que le polynôme $X^3 + X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de M.

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Donc

$$M^3 + M^2 + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que $X^3 + X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A.

Proposition 9.16

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice.
Le polynôme $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de A.

Démonstration. On a $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_3 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(a+d)a & -(a+d)b \\ -(a+d)c & -(a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ab - db \\ ca + dc - ac - dc & cb + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2. \end{aligned}$$

Donc le polynôme $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ est bien un polynôme annulateur de A. □

Exemple 9.17 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Donner un polynôme annulateur de A.
On applique la formule de la proposition ci-dessus.
Le polynôme $X^2 - (1+4)X + (1\times 4 - 2\times 3) = X^2 - 5X - 2$ est un polynôme annulateur de A.

Théorème 9.18

Soit A une matrice carrée et P un polynôme annulateur de A.

Toute valeur propre λ de A est racine du polynôme P.

ATTENTION ! Ce résultat nous indique **seulement** que les valeurs propres de A sont également des racines du polynôme P. Il peut donc y avoir des racines du polynôme P qui **ne sont pas** des valeurs propres de A.

Exemple 9.19 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P = X^3 - X$ est annulateur de A.
   On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc
   $$A^3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3,$$
   et P est bien un polynôme annulateur de A.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A.
   Il nous faut trouver les racines de P. On a
   $$X^3 - X = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1).$$
   Donc les racines de P sont 0, 1 et -1. Donc les valeurs propres possibles de A sont 0, 1, -1.
3. Déterminer lesquelles sont bien des valeurs propres de A.
   Cherchons à résoudre les équations matricielles $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = -X$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   $$\begin{aligned} AX = 0 &\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} -2x & & +2z & = & 0 \\ x & +y & -2z & = & 0 \\ -x & & +z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} & & z & = & x \\ x & +y & -2z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x \\ y & = & x \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = 0$, et cette matrice colonne est non-nulle. Donc 0 est bien valeur propre de A.

$$\begin{aligned}
AX = X &\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} -2x & & +2z & = & x \\ x & +y & -2z & = & y \\ -x & & +z & = & z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrcl} -3x & +2z & = & 0 \\ x & -2z & = & 0 \\ -x & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = X$. De plus, cette matrice colonne est non-nulle. Donc 1 est bien valeur propre de A.

$$\begin{aligned}
AX = -X &\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} -2x & & +2z & = & -x \\ x & +y & -2z & = & -y \\ -x & & +z & = & -z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} -x & & +2z & = & 0 \\ x & +2y & -2z & = & 0 \\ -x & & +2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrcl} x & & = & 2z \\ & 2y & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = -X$. De plus, cette matrice colonne est non-nulle. Donc -1 est bien valeur propre de A.

Remarque 9.20 – Comme on l'a déjà vu dans le **Chapitre 5**, disposer d'un polynôme annulateur permet également, dans certains cas, d'obtenir l'inversibilité et l'inverse d'une matrice.

Par exemple, on a vu que le polynôme $X^3 + X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a donc

$$M^3 + M^2 + I_3 = O_3 \iff M^3 + M^2 = -I_3 \iff -M^3 - M^2 = I_3 \iff M(-M^2 - M) = I_3.$$

Donc M est inversible et $M^{-1} = -M^2 - M$.

III – Diagonalisation pratique

Théorème 9.21

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ avec $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des vecteurs propres associés.
Alors la matrice P obtenue en juxtaposant les matrices colonnes $V_1, V_2, \ldots, V_n$ est inversible, et en notant D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{alors } A = PDP^{-1}.$$

Remarque 9.22 –

- Dans le cas $n = 2$, le théorème précédent se réécrit :

  Si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, ayant deux valeurs propres λ_1 et λ_2, avec $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_1 et $V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_2, alors la matrice $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible et en notant D la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, on a

  $$A = PDP^{-1}.$$

- Dans le cas $n = 3$, le théorème précédent se réécrit :

  Si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, ayant trois valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3, avec $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_1, $V_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_2 et $V_3 = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_3, alors la matrice $P = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ est inversible et en notant D la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, on a

  $$A = PDP^{-1}.$$

Exemple 9.23 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P = X^2 - 2X - 3$ est annulateur de A.

   On a $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Donc

   $$A^2 - 2A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2.$$

   Donc $X^2 - 2X - 3$ est bien un polynôme annulateur de A.

2. Calculer les racines α et β de P.
   P est un polynôme de degré 2. Calculons son discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-3) = 16$.
   P a donc deux racines

$$\alpha = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

3. Montrer que α et β sont des valeurs propres de A et calculer les vecteurs propres associés.
   Montrons tout d'abord que 3 est valeur propre, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} AX = 3X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrcl} x & +2y & = & 3x \\ 2x & +y & = & 3y \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrcl} -2x & +2y & = & 0 \\ 2x & -2y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

   Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = 3X$ et c'est une matrice colonne non-nulle. Donc 3 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
   Montrons maintenant que -1 est valeur propre.

$$\begin{aligned} AX = -X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrcl} x & +2y & = & -x \\ 2x & +y & = & -y \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrcl} 2x & +2y & = & 0 \\ 2x & +2y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = -y \end{aligned}$$

   Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = -X$ et c'est une matrice colonne non-nulle. Donc -1 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

4. Justifier que A est diagonalisable et la diagonaliser.
   Grâce au théorème 9.21, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, et en notant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a

$$A = PDP^{-1}.$$

   Autrement dit, A est diagonalisable.