NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 9

Exercice 1 – On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Solution : Je calcule la différence :
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. En déduire la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Solution : Je somme l'inégalité précédente pour tous les k entre 1 et n et j'obtiens une somme télescopique :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

3. En déduire que la série converge et préciser sa somme.

Solution : Comme $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1,$ alors la série converge et
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Exercice 2 – On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

1. Calculer la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

> **Solution :** Il s'agit d'une somme télescopique :
>
> $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k} &= \cancel{\sqrt{1}}-\sqrt{0} + \cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{1}} + \cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}} + \cdots + \cancel{\sqrt{n}}-\cancel{\sqrt{n-1}} + \sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{n+1}-\sqrt{0} = \sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

2. La série converge-t-elle ? Si oui, préciser sa somme.

> **Solution :** Comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$, j'en déduis que la série diverge.