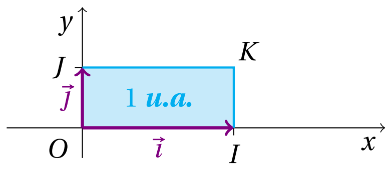
# 11 | Intégrales et primitives

## I – Intégrale et aire

### 1 – Unité d'aire

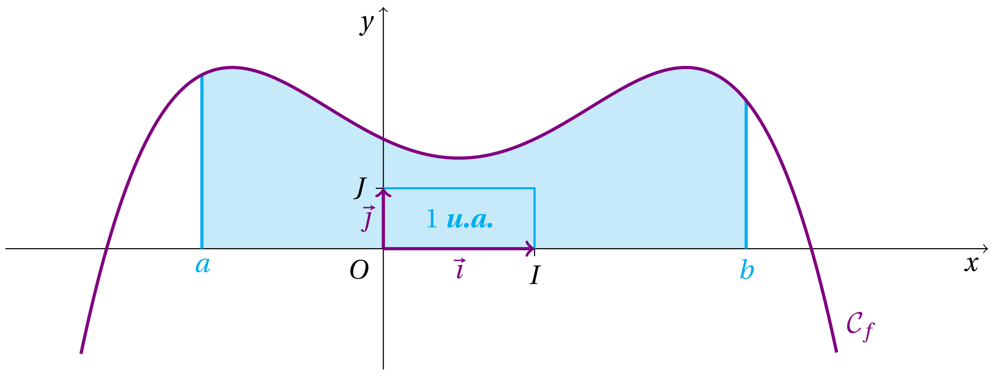
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée *u.a.*, est l'aire du rectangle unitaire $OIKJ$ avec $I(1,0)$, $J(0,1)$ et $K(1,1)$.




### 2 – Intégrale d'une fonction continue et positive

**Définition 11.1 –** Soient $f$ une fonction définie, **continue** et **positive** sur un intervalle $[a,b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'intégrale de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

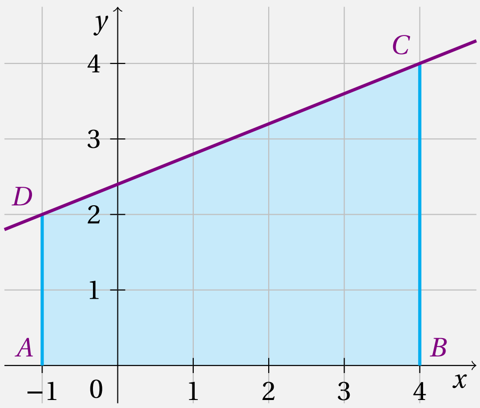
Ce nombre est noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.




**Remarque 11.2 –**

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit "intégrale de $a$ à $b$ de $f(x)\,\mathrm{d}x$".
- Les réels $a$ et $b$ sont appelés les **bornes** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- La variable $x$ est dite *"muette"*. Elle n'intervient pas dans le résultat, c'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres $a$ et $b$ : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ car le domaine $\mathcal{D}_f$ est alors réduit à un segment.

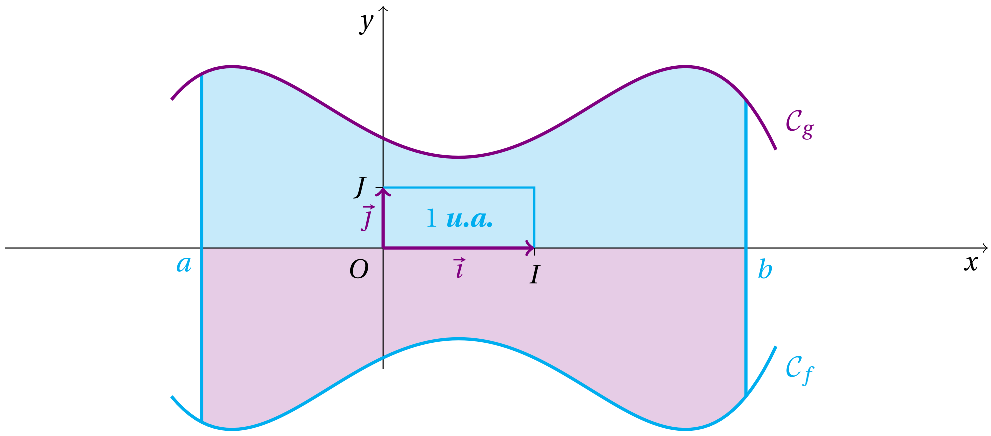
**Exemple 11.3 –** Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{2x+12}{5}\,\mathrm{d}x$.




## 3 – Intégrale d'une fonction continue et négative

Si $f$ est une fonction continue et **négative** sur un intervalle $[a,b]$, alors la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[a,b]$ par $g(x) = -f(x)$ est une fonction continue et **positive** sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine $\mathcal{D}_g$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.




**Définition 11.4 –** Soient $f$ une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a,b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'intégrale de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}.$$

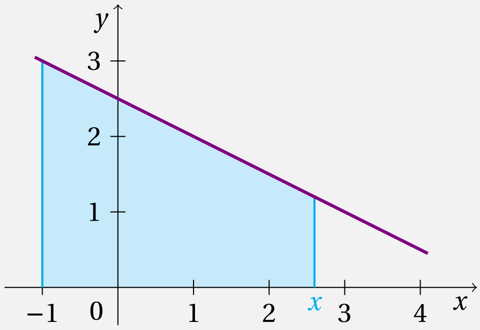
## 4 – Lien entre intégrale et dérivée

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On peut définir une nouvelle fonction $F$ qui, à tout réel $x$ de l'intervalle $[a,b]$, associe l'intégrale de la fonction $f$ entre $a$ et $x$ : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Théorème 11.5**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.
La fonction $F$ définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est $f$.

**Exemple 11.6 –** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[-1,4]$ par $f(x)=\dfrac{5-x}{2}$.




# II – Primitives

## 1 – Définition

**Définition 11.7 –** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
On dit qu'une fonction $F$ est une **primitive** de la fonction $f$ sur $I$ si $F$ est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x)=f(x).$$

**Exemple 11.8 –** Vérifier les assertions suivantes.

- $F : x \mapsto x^3+3x^2-1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2+6x$.
- $G : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2+1$, mais aussi $H : x \mapsto x^2+c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.

**Remarque 11.9 –**

- Comme $F$ est dérivable sur $I$, la fonction $F$ est en particulier continue sur $I$.
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée $f$.
  C'est pourquoi on parle d'**une** primitive de la fonction $f$ et non de **la** primitive de la fonction $f$.

**Théorème 11.10**

- Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet au moins une primitive sur $I$.
- Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors toute autre primitive de $f$ sur $I$ est de la forme $F+C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de $f$ sur $I$ qui prend une valeur donnée en un point donné :
  Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive $F_0$ de $f$ sur $I$ telle que $F_0(x_0)=y_0$.

**Exemple 11.11 –** Montrer que la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=x^2-1$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ qui vérifie $F(1)=0$.

## 2 – Primitives des fonctions usuelles

Étant donnée la définition d'une primitive, certains résultats connus pour les fonctions dérivées se prolongent aux fonctions primitives.

**Proposition 11.12**

- Si $F$ et $G$ sont des primitives des fonctions $f$ et $g$ sur un intervalle $I$, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur $I$.
- Si $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur un intervalle $I$ et $\lambda$ un réel, alors $\lambda F$ est une primitive de $\lambda f$ sur $I$.

**Proposition 11.13 – Primitives des fonctions usuelles**

Le tableau suivant récapitule les primitives des fonctions usuelles.

| $f$ **est définie sur** $I$ **par** | **une primitive** $F$ **est donnée par** | **validité** |
|---|---|---|
| $f(x)=a \qquad (a\in\mathbb{R})$ | $F(x)=ax$ | sur $\mathbb{R}$ |
| $f(x)=x^n \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$ | $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | sur $\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ | $F(x)=-\dfrac{1}{x}$ | sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{x^n} \qquad (n\geqslant 2$ entier$)$ | $F(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ | sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x)=2\sqrt{x}$ | sur $\mathbb{R}_+^*$ |

**Exemple 11.14 –** Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x)=3x^2$
2. $f(x)=x+\dfrac{3}{2}$
3. $f(x)=(2x+1)(x-3)$
4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$
5. $f(x)=x^2+3x+\dfrac{1}{x^2}$
6. $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$
7. $f(x)=x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
8. $f(x)=\dfrac{6x^2-8x+2}{5}$
9. $f(x)=-\dfrac{6}{x^4}$
10. $f(x)=x^2+3x-2$
11. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+3x^2-\dfrac{1}{x^2}$

## 3 – Primitives des fonctions composées usuelles

**Proposition 11.15 – Primitives des fonctions composées**

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Le tableau suivant récapitule les primitives des fonctions composées.

| **Conditions** | **fonction $f$** | **une primitive $F$ est donnée par** |
|---|---|---|
| $n \in \mathbb{N}^*$ | $f = u' \times u^n$ | $F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ |
| $u$ ne s'annule pas sur $I$ | $f = \dfrac{u'}{u^2}$ | $F = -\dfrac{1}{u}$ |
| $u$ ne s'annule pas sur $I$ et $n > 1$ | $f = \dfrac{u'}{u^n}$ | $F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ |
| $u$ strictement positive sur $I$ | $f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $F = 2\sqrt{u}$ |

**Méthode 11.16 – Calculer une primitive d'une fonction composée**

Pour calculer une primitive d'une fonction composée $f$, il faut s'appuyer sur le tableau précédent.
On procède de la manière suivante :

1. On repère la forme de la fonction : un produit $u' \times u^n$, un quotient $\dfrac{u'}{u^n}$, etc.
2. On **identifie** la fonction $u$ et on **calcule** sa dérivée $u'$.
3. On compare la forme repérée avec la fonction de départ. Il y a alors deux possibilités :
   - La forme repérée correspond **exactement** à la fonction de départ, auquel cas une primitive est directement donnée par la formule du tableau.
   - La forme repérée est de la forme $k \times f(x)$, auquel cas une primitive est donnée par la formule du tableau, **multipliée par** $\dfrac{1}{k}$.

**Exemple 11.17 –** Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x+1)^2$

2. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(1-3x)^2}$

4. $f(x) = (2x-1)\left(x^2-x+1\right)^3$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

**Méthode 11.18 – Déterminer la primitive vérifiant une condition donnée**

Pour déterminer **la** primitive $F$ d'une fonction $f$ vérifiant une condition donnée :

1. On commence par déterminer la forme générale de toutes les primitives de la fonction $f$ :
   - ▷ Les primitives de $f$ sont toutes de la forme $F + C$.
2. On utilise ensuite la condition que doit vérifier la primitive demandée pour déterminer la valeur de la constante $C$.

**Exemple 11.19 –** Calculer la primitive $F$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

# III – Intégrale d'une fonction continue

## 1 – Définition

**Définition 11.20 –** Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux éléments de $I$. Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors l'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$ :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

**Remarque 11.21 –**

- La différence $F(b) - F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$. Ainsi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Puisqu'il s'agit de la différence entre deux termes, le résultat ne dépend pas de la primitive $F$ choisie.

**Exemple 11.22 –** Calculer chacune des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^3 3t^2 + 2t - 1\,\mathrm{d}t$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

**Proposition 11.23**

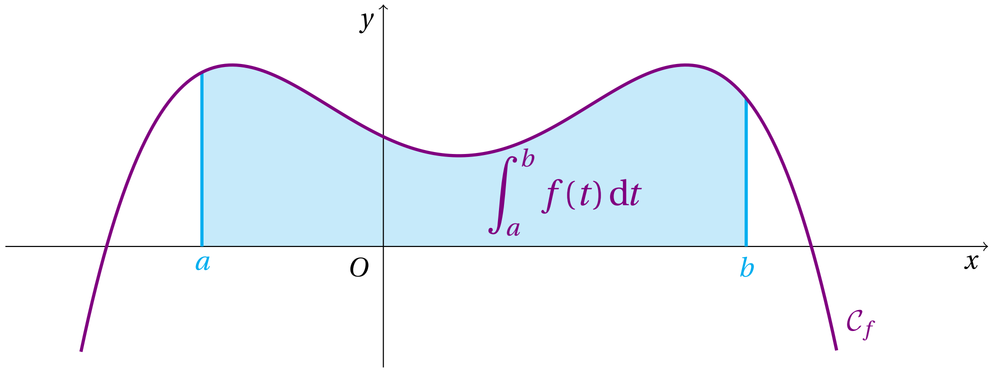
Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux réels de $I$. Alors

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

## 2 – Premières propriétés

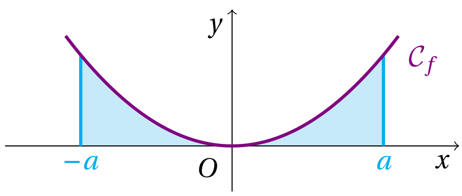
**Proposition 11.24**

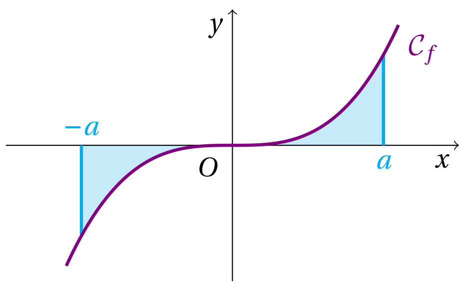
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leqslant b$, $f$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.




**Proposition 11.25**

- Si la fonction $f$ est continue et paire sur $[-a,a]$, alors $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \times \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si la fonction $f$ est continue et impaire sur $[-a,a]$, alors $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.




**Exemple 11.26 –**

- $\int_{-1}^1 t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
- $\int_{-1}^1 t^2 + |t|\,\mathrm{d}t$

**Proposition 11.27 – Relation de Chasles**

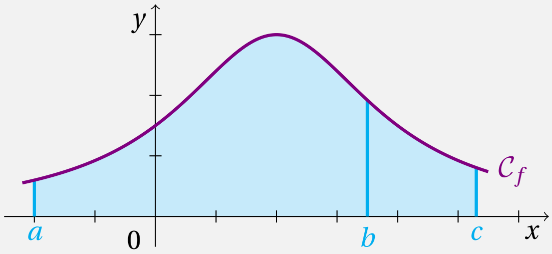
Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$, $b$ et $c$ trois réels de $I$. Alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exemple 11.28 – Interprétation graphique**

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = b$ et $x = c$.

($f$ continue et positive sur $[a, c]$ et $a \leqslant b \leqslant c$).




**Méthode 11.29 – Calculer l'intégrale d'une fonction $f$ définie "par morceaux"**

Pour calculer l'intégrale d'une fonction $f$ dont l'expression est définie en plusieurs morceaux, on utilise la relation de Chasles. On décompose ainsi l'intégrale de $f$ sur chaque intervalle sur lequel on connaît l'expression de $f$.

**Exemple 11.30 –** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2, 3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.