CONCOURS BLANC 2

Exercice 1 – [extrait de BSB 2021 / Ex2]

1. J'étudie le signe de x^2+x+1 pour $x\in\mathbb{R}$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 1^2-4\times1\times1 = 1-4 = -3 < 0$. Comme le discriminant est strictement négatif, le polynôme n'admet pas de racine et son signe est constant. Comme $a = 1 > 0$, j'en déduis que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^2+x+1>0.$$

2. Je sais que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.
Alors comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, j'en déduis par composition que
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

3. Je calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, en remplaçant x par $-\frac{1}{2}$ dans l'expression de $f(x)$:
$$\begin{aligned}f\left(-\frac{1}{2}\right)&=\ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)=\ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)=\ln\left(\frac{3}{4}\right)\\&=\ln(3)-\ln(4)=\ln(3)-\ln\left(2^2\right)=\ln(3)-2\ln(2).\end{aligned}$$
Ainsi j'ai bien montré que $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln(3)-2\ln(2)$.

4. a) La fonction f est de la forme $f=\ln(u)$ avec $u(x)=x^2+x+1$.
Comme $u'(x)=2x+1$, alors
$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

   b) J'obtiens les variations de f en étudiant le signe de $f'(x)$. Je sais que le dénominateur est strictement positif d'après la question **1.**. Je cherche le signe du numérateur :
$$2x+1\geqslant 0 \iff 2x\geqslant -1 \iff x\geqslant -\frac{1}{2}.$$
Je peux donc déduire le tableau de variation de f grâce au tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)-2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. a) Je résous $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x + 1 = \mathrm{e}^0 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x(x+1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que les deux seules solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -1 et 0.

b) L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

Or $f(0) = 0$ puisque 0 est solution de $f(x) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{2 \times 0 + 1}{0^2 + 0 + 1} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = 1 \times (x - 0) + 0, \qquad \textit{i.e.} \quad y = x.$$

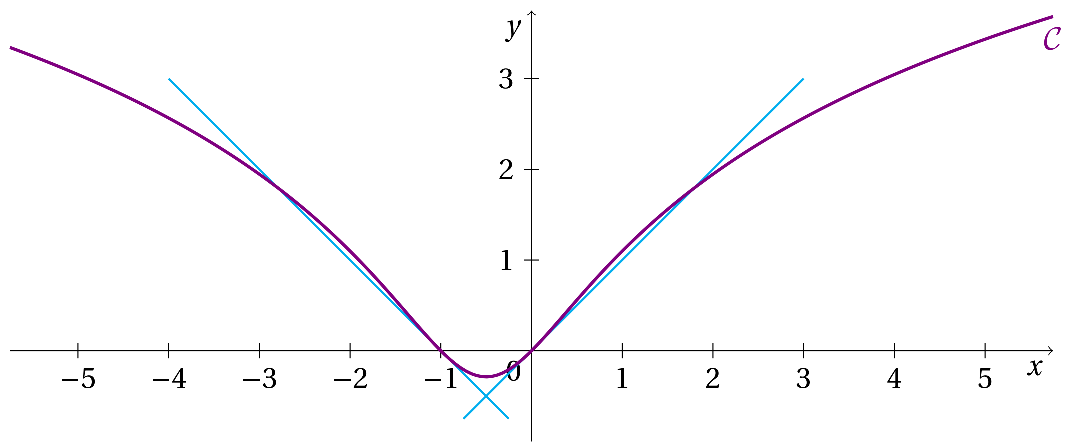
De la même manière, pour $a = -1$, l'équation de la tangente devient

$$y = f'(-1) \times \big(x - (-1)\big) + f(-1).$$

Or $f(-1) = 0$ puisque -1 est solution de $f(x) = 0$ et $f'(-1) = \dfrac{-2 + 1}{1 - 1 + 1} = \dfrac{-1}{1} = -1$.
Donc la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation

$$y = -1 \times (x + 1) + 0, \qquad \textit{i.e.} \quad y = -x - 1.$$

6. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de ses tangentes :



Exercice 2 – [extrait d'ECRICOME 2017 / Ex2]

Partie I – Tirages dans une urne

1. a) En considérant comme succès l'événement "piocher une boule noire", la variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition successive de 400 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \frac{1}{4}$, puisque une seule boule parmi les quatre boules de l'urne est noire.
En particulier, le support est donné par $X(\Omega) = [\![0, 400]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \binom{400}{k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}.$$

b) Comme X suit une loi binomiale, alors

$$E(X) = np = 400 \times \frac{1}{4} = 100 \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = 100 \times \frac{3}{4} = 25 \times 3 = 75.$$

2. a) La variable aléatoire Z ne semble pas suivre un loi usuelle. En revanche, il s'agit d'une variable aléatoire discrète finie puisque les valeurs possibles pour Z sont 1, 2, 3 et 4. Alors le support est donné par $Z(\Omega) = [\![1, 4]\!]$ et pour déterminer la loi de Z, il suffit de calculer $P(Z = 1)$, $P(Z = 2)$, $P(Z = 3)$ et $P(Z = 4)$, en utilisant la formule des probabilités composées. J'obtiens alors

$$P(Z = 1) = \frac{1}{4}, \qquad P(Z = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$
$$P(Z = 3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad P(Z = 4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}.$$

Alors après calculs, je remarque que Z suit la loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$.

b) Comme Z suit une loi uniforme, alors

$$E(Z) = \frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{4^2-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

Partie II – Tirages dans une urne choisie au hasard

1. La variable aléatoire T compte le nombre de boules noires obtenues après deux tirages. Aucune, une ou deux boules noires peuvent avoir été piochées. Donc $T(\Omega) = [\![0, 2]\!]$.
2. Je note P l'événement "obtenir PILE", F l'événement "obtenir FACE" et pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$, N_k l'événement "obtenir une boule noire au k-ième tirage" et B_k l'événement "obtenir une boule blanche au k-ième tirage". Alors d'après la formule des probabilités totales, comme les événements P et F forment un système complet d'événements,

$$P(T = 0) = P(F) \times P_F\big(B_1 \cap B_2\big) + P(P) \times P_P\big(B_1 \cap B_2\big) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{9}{32} = \frac{13}{32}.$$

De même,

$$P(T = 2) = P(F) \times P_F\big(N_1 \cap N_2\big) + P(P) \times P_P\big(N_1 \cap N_2\big) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}.$$

Et finalement

$$P(T = 1) = 1 - P(T = 0) - P(T = 2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}.$$

3. Comme il s'agit d'une variable aléatoire discrète finie,

$$E(T) = 0 \times P(T=0) + 1 \times P(T=1) + 2 \times P(T=2) = 0 \times \frac{13}{32} + 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{32} = \frac{2 \times 7 + 10}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Si la variable aléatoire T suivait une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, comme $T(\Omega) = [\![0,2]\!]$, alors nécessairement n serait égal à 2. Dans ce cas, l'espérance serait $E = np = 2p$, ce qui force $p = \dfrac{3}{8}$. Ainsi la seule loi binomiale possible serait $\mathcal{B}\left(2, \dfrac{3}{8}\right)$. Mais alors la probabilité $P(T=2)$ serait égale à $p^2 = \left(\dfrac{3}{8}\right)^2 = \dfrac{9}{64}$, ce qui n'est pas le cas puisque $P(T=2) = \dfrac{5}{32}$.
J'en déduis donc que T ne suit pas une loi binomiale.

4. Je calcule puis compare les deux probabilités $P_{[T=1]}(P)$ et $P_{[T=1]}(F)$:

$$P_{[T=1]}(P) = \frac{P\big(P \cap [T=1]\big)}{P(T=1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right)}{\frac{7}{16}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}.$$

Et donc
$$P_{[T=1]}(F) = 1 - P_{[T=1]}(P) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

Il est donc plus probable d'avoir obtenu FACE que PILE si une seule boule noire est piochée.

Exercice 3 – [extrait de BSB 2023 / Ex1]

1. Je remplace x par -1 dans l'expression de $P(x)$:

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0.$$

En effet, P s'annule bien en $x = -1$.

2. D'après la question précédente, -1 est une racine du polynôme P.
Ainsi $x - (-1) = x + 1$ est un diviseur de $P(x)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme de degré $3 - 1 = 2$ tel que $P(x) = (x+1)\big(ax^2 + bx + c\big)$. Je développe ce produit :

$$(x+1)\big(ax^2 + bx + c\big) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c.$$

Par identification des coefficients, comme ce produit est égal au polynôme $P(x)$, alors

$$\left\{\begin{array}{c} a = 1 \\ b + a = -1 \\ c + b = -1 \\ c = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 - 1 = -2 \\ c = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1 \end{array}\right.$$

Ainsi une factorisation de $P(x)$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x+1)\big(x^2 - 2x + 1\big).$$

3. D'après la question **1.**, -1 est une racine de $P(x)$. Grâce à la question précédente, je cherche les racines de $x^2 - 2x + 1$. Je reconnais une identité remarquable :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Finalement $P(x)$ admet bien deux racines : -1 et 1.

4. Comme $P(x)$ est un polynôme, il me suffit d'étudier la limite du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

5. Pour étudier les variations de P, j'étudie le signe de sa dérivée. La fonction P est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
Je calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$.
Donc $P(x)$ a deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Comme $a = 3 > 0$, j'en déduis le tableau de signe de $P'(x)$ et le tableau de variation de P :

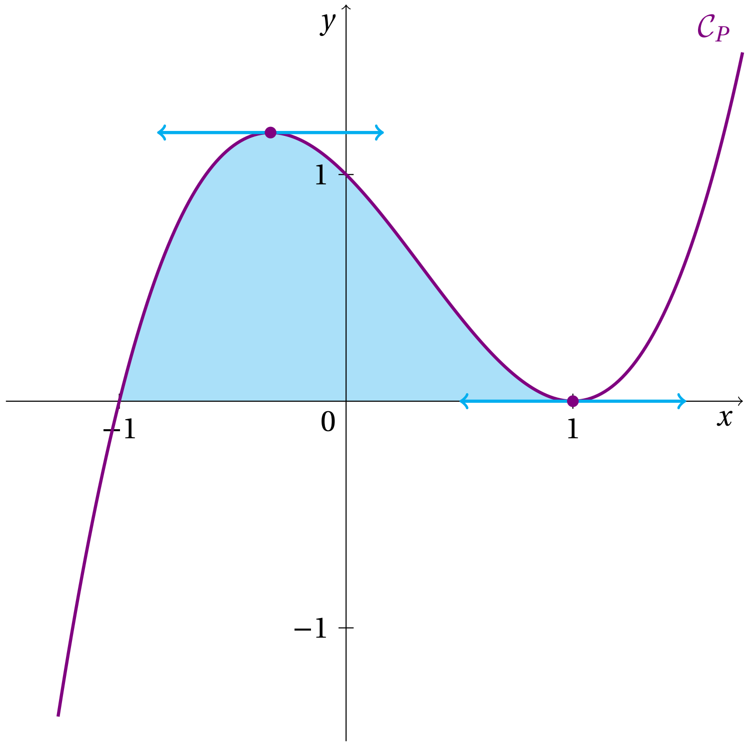
$$\begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
x & -\infty & & -\frac{1}{3} & & 1 & & +\infty \\
\hline
P'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\
\hline
P & -\infty & \nearrow & \frac{32}{27} & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty \\
\hline
\end{array}$$

avec $P\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1-3+9+27}{27} = \frac{32}{27}$.

6. Pour calculer l'intégrale I, il me faut cette fois une primitive de la fonction P.
Comme il s'agit d'une fonction polynomiale, j'opère directement terme à terme :

$$I = \int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - x^2 - x + 1\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1}$$
$$= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

7. Les tangentes horizontales se situent aux points d'abscisses $-\frac{1}{3}$ et 1.
Voici le tracé de la courbe de P, avec en bleu l'aire de l'intégrale I :



8. Je remplace x par 0 dans l'expression de $f(x)$:

$$f(0) = \left(0^2 - 2 \times 0 - 1\right) \mathrm{e}^0 = -1 \times 1 = -1.$$

L'image de 0 par f est -1.

9. Pour calculer les limites, je décompose le produit en deux facteurs :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{array}\right\} \text{Par produit, } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 2x - 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \quad 0 \end{array}\right\} \text{Par croissances comparées, } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

10. La fonction f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.
f est de la forme $u \times v$, avec $u(x) = x^2 - 2x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
Comme $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x - 2) \times \mathrm{e}^x + \left(x^2 - 2x - 1\right) \times \mathrm{e}^x = \left(x^2 - 3\right) \mathrm{e}^x.$$

Alors comme l'exponentielle est toujours strictement positive,

$$f'(x) = 0 \iff \left(x^2-3\right)\mathrm{e}^x = 0 \iff x^2-3=0 \iff x^2=3$$
$$\iff x=\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{3}.$$

11. Grâce aux informations précédentes, je peux dresser le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$f\left(-\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$f\left(\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

12. Grâce au tableau de variation, je sais que la fonction f est croissante sur $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right]$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Alors j'en déduis que $f\left(-\sqrt{3}\right)$ est positif.
De même, comme la fonction f est décroissante sur $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ et que $f(0)=-1<0$. Alors j'en déduis que $f\left(\sqrt{3}\right)$ est négatif.
13. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 est $y=f'(-1)\times(x+1)+f(-1)$.
Je calcule ces deux valeurs :

$$f(-1)=\left((-1)^2-2\times(-1)-1\right)\mathrm{e}^{-1}=2\,\mathrm{e}^{-1}=\frac{2}{e} \quad \text{et} \quad f'(-1)=\left((-1)^2-3\right)\mathrm{e}^{-1}=-2\,\mathrm{e}^{-1}=-\frac{2}{e}.$$

Finalement l'équation de la tangente devient

$$y=-\frac{2}{e}\times(x+1)+\frac{2}{e}, \qquad \textit{i.e.} \quad y=-\frac{2}{e}x.$$

Lorsque x vaut 0, j'obtiens que y vaut aussi 0, ce qui confirme bien que cette tangente passe par l'origine du repère.
14. a) L'équation d'une tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est $y=f'(x_0)\times(x-x_0)+f(x_0)$.
Cette tangente passe par l'origine si et seulement cette équation est vérifiée lorsque $(x,y)=(0,0)$, *i.e.*

$$0=f'(x_0)\times(0-x_0)+f(x_0) \iff f(x_0)-x_0f'(x_0)=0.$$

b) En remplaçant $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ par leurs expressions dans l'équation précédente, j'obtiens

$$\begin{aligned} f(x_0)-x_0f'(x_0)=0 &\iff \left(x_0^2-2x_0-1\right)\mathrm{e}^{x_0}-x_0\left(x_0^2-3\right)\mathrm{e}^{x_0}=0 \\ &\iff \left(x_0^2-2x_0-1-\left(x_0^3-3x_0\right)\right)\mathrm{e}^{x_0}=0 \\ &\iff \left(-x_0^3+x_0^2+x_0-1\right)\mathrm{e}^{x_0}=0 \iff -P(x_0)\,\mathrm{e}^{x_0}=0. \end{aligned}$$

Comme une exponentielle n'est jamais nulle, alors on retrouve bien que la tangente passe par l'origine si et seulement si $P(x_0)=0$.

c) Comme P n'admet que deux racines distinctes, alors il n'existe que deux abscisses pour lesquelles la tangente en ce point passe par l'origine : en -1 (la tangente déterminée à la question **15.**) et en 1.

Exercice 4 – [BSB 2021 / Ex3]

1. a) La probabilité a_2 est la probabilité de l'événement A_2, à savoir que le joueur tire vers la cible A. Or s'il tire de nouveau vers la cible A, c'est qu'il n'a pas réussi à atteindre le secteur 1 la première fois. Comme il n'y a que deux secteurs sur la cible A, alors

$$a_2 = P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

De la même manière, b_2 est la probabilité de l'événement B_2, à savoir que le joueur tire vers la cible B. Or s'il tire cette fois vers la cible B, c'est qu'il a réussi à atteindre le secteur 1 la première fois sur la cible A. Comme il n'y a que deux secteurs sur cette cible, alors

$$b_2 = P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

b) Le deuxième lancer ne pouvant se faire que sur l'une des deux cibles A ou B, $\{A_2, B_2\}$ forme un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} b_3 = P(B_3) &= P\big(A_2 \cap B_3\big) + P\big(B_2 \cap B_3\big) = P(A_2) \times P_{A_2}(B_3) + P(B_2) \times P_{B_2}(B_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$b_3 = \frac{5}{8}.$$

2. Je raisonne de manière similaire à la question précédente.
Si le joueur effectue un $(n+1)$-ième lancer, alors le n-ième lancer a été tiré ou bien sur la cible A, ou bien sur la cible B. Donc $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap A_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times 0 = \frac{1}{2} a_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P\big(A_n \cap B_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap B_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n + \frac{1}{2} a_n.$$

3. a) Voici le script complété.

```
def calcul(n) :
    a=1
    b=0
    for k in range(1,n) :
        b=b*3/4+a/2
        a=a/2
    return a,b
```

b) Si les lignes 5. et 6. se retrouvent échangées, la variable `a` est mise à jour en premier et contient la valeur a_k au moment de mettre à jour la variable `b` par la valeur b_k.
C'est un problème puisque b_k dépend de a_{k-1} et non pas de a_k.

4. Je sais que $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n$ donc la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
Son premier terme est $a_1 = 1$ et je peux donner sa forme explicite : pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

5. a) Comme $v_n = 2^{n-1} b_n + 2$, je sais que

$$v_1 = 2^{1-1} b_1 + 2 = 1 \times b_1 + 2 = 1 \times 0 + 2 = 2.$$

Aussi pour tout $n \geqslant 1$, en me servant des questions précédentes et du fait que

$$v_n = 2^{n-1} b_n + 2 \iff v_n - 2 = 2^{n-1} b_n \iff \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = b_n,$$

alors je peux montrer que

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2^{n+1-1} b_{n+1} + 2 = 2^n \left(\frac{3}{4} b_n + \frac{1}{2} a_n\right) + 2 \\ &= \frac{3 \times 2^n}{4} b_n + \frac{2^n}{2} a_n + 2 = \frac{3 \times 2^n}{4} \times \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} + \frac{2^n}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \\ &= \frac{3 \times 2 \times (v_n - 2)}{4} + \frac{2}{2} + 2 = \frac{3}{2}(v_n - 2) + 1 + 2 \\ &= \frac{3}{2} v_n - 3 + 3 = \frac{3}{2} v_n. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$v_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n.$$

b) Je reconnais en $(v_n)_{n \geqslant 1}$ une suite géométrique, de raison $q = \dfrac{3}{2}$ et de premier terme $v_1 = 2$. Je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

c) Grâce aux questions précédentes, je sais que $b_n = \dfrac{v_n - 2}{2^{n-1}}$ et $v_n = 2 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$.
Alors il me suffit de combiner ces deux expressions pour obtenir que pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = \frac{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^{n-1}} \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}} = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

J'ai ainsi bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

6. Voici le script complété.

```
import numpy.random as rd
cible='a'
n=0
while cible!='c' :
    n=n+1
    if cible=='a' :
        secteur=rd.randint(1,3)
        if secteur==1 :
            cible='b'
    else :
        secteur=rd.randint(1,5)
        if secteur==1 :
            cible='c'
print(n)
```

7. a) Si le joueur se décourage au bout de deux lancers, la seule façon pour que celui-ci gagne un lot est qu'il arrive à la cible C en deux lancers, c'est-à-dire qu'il atteigne le secteur 1 de la cible A au premier lancer, puis le secteur 1 de la cible B au deuxième lancer.
La probabilité ainsi obtenue est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
J'ai bien montré que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot est de $\frac{1}{8}$.

b) Les 20 joueurs représentent $n = 20$ répétitions d'une même épreuve de Bernoulli de succès "Le joueur gagne un lot", de probabilité $p = \frac{1}{8}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire Y compte le nombre de succès.
La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{8}$.
Le support de Y est donné par $Y(\Omega) = [\![0,20]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,20]\!]$,

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{20}{k} \times \frac{1}{8^k} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{20-k}.$$

c) Comme Y suit une loi binomiale, alors

$$E(Y) = np = 20 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = np(1-p) = \frac{5}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{16}.$$

d) La variable aléatoire Y compte le nombre de succès des joueurs, qui coûtent au forain 5€ de lot mais lui rapporte trois fois 1€ par fléchette lancée, soit un gain algébrique de −2€. Cela laisse $(20 - Y)$ échecs qui eux rapportent au forain 2€. En additionnant tout cela, le gain total du forain est donné par

$$G = -2 \times Y + 2 \times (20 - Y) = 2(20 - Y) - 2Y.$$

Finalement, le gain moyen du forain correspond à l'espérance de G, *i.e.* par linéarité,

$$E(G) = E\big(2(20 - Y) - 2Y\big) = 2\big(20 - E(Y)\big) - 2E(Y) = 2\left(20 - \frac{5}{2}\right) - 2 \times \frac{5}{2} = 40 - 5 - 5 = 30.$$

Le forain gagne donc en moyenne 30€ pour 20 joueurs.