

CONCOURS BLANC 1

Exercice 1 –

1. On a $2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = \frac{4}{2} = 2$ donc $\mathcal{S} = \{2\}$.
2. On a $4(x - 1) + 3(2x - 1) = 0 \iff 4x - 4 + 6x - 3 = 0 \iff 10x = 7 \iff x = \frac{7}{10}$ donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{7}{10} \right\}$.
3. On a $x^2 + 2x + 3 = x(x - 1) \iff x^2 + 2x + 3 = x^2 - x \iff 3x + 3 = 0 \iff 3x = -3 \iff x = -1$ donc $\mathcal{S} = \{-1\}$.
4. Calculons le discriminant $\Delta = 49 - 40 = 9$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+3}{2} = 5,$$

donc $\mathcal{S} = \{2, 5\}$.

5. On a $2x(x + 1) = -1 \iff 2x^2 + 2x + 1 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$. Il n'y a donc pas de solution. Donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
6. On a $x(x + 1) - (4x - 1)(x + 3) = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 + x - 4x^2 - 12x + x + 3 = x^2 - 2x + 1 \iff -4x^2 - 8x + 2 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 64 + 32 = 96$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{96}}{-8} = \frac{8 - 4\sqrt{6}}{-8} = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8 + \sqrt{96}}{-8} = \frac{8 + 4\sqrt{6}}{-8} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1.$$

7. On a $-2x + 3 > 0 \iff -2x > -3 \iff x < \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right[$.
8. Calculons le discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-5-1}{-2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+1}{-2} = 2.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x^2 + 5x - 6$		-	0	+	0	-	

Donc $\mathcal{S} =]2, 3[$.

9. On a $2x(x - 2) \leq x^2 - 4 \iff 2x^2 - 4x \leq x^2 - 4 \iff x^2 - 4x + 4 \leq 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 16 - 16 = 0$. Il y a donc une unique racine

$$x_0 = 2.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x^2 - 4x + 4$		+	0	+	

Et donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

10. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x-1} = 0 &\iff \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} - \frac{2(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 0 \\
 &\iff \frac{x-1-2x-6}{(x-1)(x+3)} = 0 \\
 &\iff \frac{-x-7}{(x-1)(x+3)} = 0.
 \end{aligned}$$

Commençons par chercher les valeurs interdites.

On a $(x-1)(x+3) = 0 \iff x-1=0$ ou $x+3=0 \iff x=1$ ou $x=-3$.Par ailleurs, $-x-7=0 \iff x=-7$. Or -7 n'est pas valeur interdite, donc $\mathcal{S} = \{-7\}$.

11. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{2x-4} + \frac{3}{-2x+1} \leq \frac{1}{2} &\iff \frac{2x(-2x+1)}{(2x-4)(-2x+1)} + \frac{6(2x-4)}{(2x-4)(-2x+1)} - \frac{(2x-4)(-2x+1)}{(2x-4)(-2x+1)} \leq 0 \\
 &\iff \frac{-4x^2+2x+12x-24+4x^2-2x-8x+4}{(2x-4)(-2x+1)} \leq 0 \\
 &\iff \frac{4x-20}{(2x-4)(-2x+1)} \leq 0.
 \end{aligned}$$

On a $4x-20=0 \iff x=5$, $2x-4=0 \iff x=2$ et $-2x+1=0 \iff x=\frac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	5	$+\infty$
$4x-20$	-	-	-	0	+
$2x-4$	-	-	0	+	+
$-2x+1$	+	0	-	-	-
$\frac{4x-20}{(2x-4)(-2x+1)}$	+	-	+	0	-

Et donc $\mathcal{S} = \left] \frac{1}{2}, 2 \right[\cup [5, +\infty[$.12. On a $(-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$ donc -1 est racine. On effectue alors la division euclidienne de $x^3 - 7x - 6$ par $x+1$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & -7x - 6 \\
 x^3 + x^2 & \\
 \hline
 -x^2 - 7x - 6 & \\
 -x^2 - x & \\
 \hline
 -6x - 6 & \\
 -6x - 6 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 x+1 \\
 \hline
 x^2 - x - 6
 \end{array}$$

Calculons désormais le discriminant de $x^2 - x - 6$. On a $\Delta = 1 + 24 = 25$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Au final on obtient donc $\mathcal{S} = \{-2, -1, 3\}$.

13. On a $-2^3 + 2^2 + 22 \times 2 - 40 = -8 + 4 + 44 - 40 = 0$ donc 2 est racine. On effectue alors la division euclidienne de $-x^3 + x^2 + 22x - 40$ par $x - 2$.

$$\begin{array}{r|l}
 -x^3 & + & x^2 & + & 22x & - & 40 & x-2 \\
 -x^3 & + & 2x^2 & & & & & -x^2 - x + 20 \\
 \hline
 & - & x^2 & + & 22x & - & 40 & \\
 & - & x^2 & + & 2x & & & \\
 \hline
 & & & & 20x & - & 40 & \\
 & & & & 20x & - & 40 & \\
 \hline
 & & & & & & 0 &
 \end{array}$$

Calculons désormais le discriminant de $-x^2 - x + 20$. On a $\Delta = 1 + 80 = 81$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{1-9}{-2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+9}{-2} = -5.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	-5	2	4	$+\infty$		
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$-x^2 - x + 20$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$-x^3 + x^2 + 22x - 40$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Et donc $\mathcal{S} =]-\infty, -5[\cup]2, 4[$.

Exercice 2 –

1. (a) On a $P(-1) = -3 - 7 + 7 + 3 = 0$. Donc il existe Q tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$. On détermine ce polynôme Q en effectuant la division euclidienne de P par $x+1$.

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 & - & 7x^2 & - & 7x & + & 3 & x+1 \\
 3x^3 & + & 3x^2 & & & & & 3x^2 - 10x + 3 \\
 \hline
 & - & 10x^2 & - & 7x & + & 3 & \\
 & - & 10x^2 & - & 10x & & & \\
 \hline
 & & & & 3x & + & 3 & \\
 & & & & 3x & + & 3 & \\
 \hline
 & & & & & & 0 &
 \end{array}$$

Donc $P(x) = (x+1)(3x^2 - 10x + 3)$.

- (b) Calculons le discriminant de $3x^2 - 10x + 3$. On a $\Delta = 100 - 36 = 64$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3.$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{ -1, \frac{1}{3}, 3 \right\}.$$

2. (a) Déterminons les valeurs interdites. Ce sont les solutions de l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 144 - 144 = 0$. Il y a donc une unique racine

$$x_0 = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

- (b) On a le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	2	3	$+\infty$		
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		
$3x^2-10x+3$	$+$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$3x^2-12x+12$	$+$		$+$	$+$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$			
						$-$	0	$+$

$$\text{Et donc } \mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3} \right] \cup [3, +\infty[.$$

Exercice 3 –

1. Les fonctions f et g sont des polynômes donc $D_f = \mathbf{R}$ et $D_g = \mathbf{R}$.

Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty.$$

2. On a $f(2) = 8 + 24 - 10 - 5 = 17$ et $g(2) = 8 + 4 + 5 = 17$.

Donc le point de coordonnées $(2, 17)$ est bien un point de \mathcal{C}_f et de \mathcal{C}_g .

3. On a $f(2) - g(2) = 17 - 17 = 0$. Donc 2 est racine du polynôme $f(x) - g(x)$. Donc il existe un polynôme Q tel que $f(x) - g(x) = (x-2)Q(x)$. Déterminons ce polynôme Q par division euclidienne. On a $f(x) - g(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ et

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & + & 4x^2 & - & 7x & - & 10 & & x-2 \\
 x^3 & - & 2x^2 & & & & & & \hline
 & + & 6x^2 & - & 7x & - & 10 & & \\
 & + & 6x^2 & - & 12x & & & & \\
 & & & & 5x & - & 10 & & \\
 & & & & 5x & - & 10 & & \\
 & & & & & & 0 & &
 \end{array}$$

$$\text{Donc } f(x) - g(x) = (x-2)(x^2 + 6x + 5).$$

4. Calculons le discriminant de $x^2 + 6x + 5$. On a $\Delta = 36 - 20 = 16$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-6-4}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6+4}{2} = -1.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$
$x-2$		-	-	0	+
x^2+6x+5	+	0	-	0	+
$f(x)-g(x)$	-	0	+	0	+

Ainsi,

- \mathcal{C}_f est en-dessous de \mathcal{C}_g lorsque $f(x) \leq g(x)$, i.e. sur $]-\infty, -5] \cup [-1, 2]$.
- \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g lorsque $f(x) \geq g(x)$, i.e. sur $[-5, -1] \cup [2, +\infty[$.

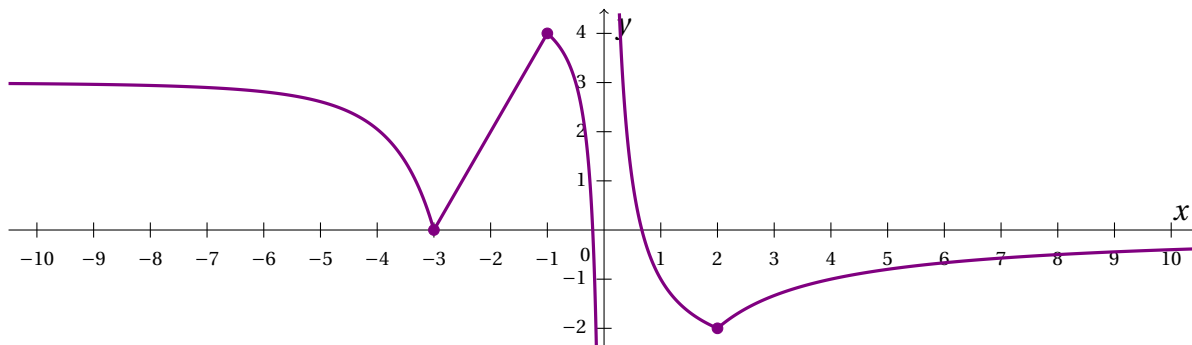
Exercice 4 –

1. (a) Par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f est donné par

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
f	$2 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 2$	

- (b) (i) FAUX. L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions $x \approx 3$ et $x \approx 7$.
(ii) FAUX. La courbe \mathcal{C}_f admet deux asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$ et deux asymptotes verticales en -2 et en 4 .
(iii) VRAI. Le maximum de f sur $[-2, 2]$ est atteint en 2 et vaut environ -1 .
(iv) FAUX. f est strictement croissante sur $] -2, 4[$ et sur $]4, +\infty[$ (mais f n'est pas définie en 4).

2.



3. (i) FAUX. L'équation $g(x) = 0$ admet une solution pour $x = -3$ et une autre solution dans l'intervalle $] -1, 0[$.
(ii) VRAI. On a bien $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$.
(iii) VRAI. g est croissante sur $[2, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
(iv) FAUX. f est décroissante sur $] -\infty, -3]$.

Exercice 5 –

1. On a

$$u_1 = 1.01 \times 100\,000 - 2000 = 99\,000.$$

Puis

$$u_2 = 1.01 \times 99\,000 - 2000 = 97\,990.$$

2. La somme qu'il reste à rembourser à la fin du n -ième mois d'emprunt est donnée par u_n . Le taux mensuel étant de 1%, ce montant augmente de 1%. Autrement dit, il est multiplié par 1.01. Après remboursement de 2000 euros, le montant u_{n+1} restant à rembourser est donc donné par

$$u_{n+1} = 1.01 u_n - 2000.$$

3. Soit
- $n \in \mathbb{N}$
- . On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 200\,000 \\ &= 1.01 u_n - 2000 - 200\,000 \\ &= 1.01 (v_n + 200\,000) - 2000 - 200\,000 \\ &= 1.01 v_n + 202\,000 - 2000 - 200\,000 \\ &= 1.01 v_n. \end{aligned}$$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison 1.01. Son premier terme est donné par

$$v_0 = u_0 - 200\,000 = 100\,000 - 200\,000 = -100\,000.$$

4. La suite (v_n) étant géométrique de premier terme $v_0 = -100\,000$ et de raison $q = 1.01$, on a pour tout entier n ,

$$v_n = v_0 \times q^n = -100\,000 \times (1.01)^n.$$

Alors pour tout entier n ,

$$u_n = v_n + 200\,000 = 200\,000 - 100\,000 \times (1.01)^n.$$

5. On a

$$u_{69} = 200\,000 - 100\,000 \times (1.01)^{69} \approx 200\,000 - 100\,000 \times 1.99 = 1000.$$

6. Il faudra donc 70 mois à cette personne pour rembourser son crédit, avec un dernier remboursement d'un montant d'environ 1000 euros.

Exercice 6 –

1. D'après l'énoncé, on a

$$P(S) = 0.3, \quad P(\bar{S}) = 1 - 0.3 = 0.7, \quad P_S(E) = 1 - 0.223 = 0.777,$$

$$P_S(\bar{E}) = 0.223, \quad P_{\bar{S}}(E) = 0.827 \quad \text{et} \quad P_{\bar{S}}(\bar{E}) = 1 - 0.827 = 0.173.$$

2. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(S \cap \bar{E}) = P(S) \times P_S(\bar{E}) = 0.3 \times 0.223 = 0.0669.$$

Autrement dit, la probabilité que la personne interrogée ait plus de 50 ans et qu'elle travaille à temps partiel est de 0.0669, *i.e.* 6.69%.

3. On cherche $P(\bar{E})$. D'après la formule des probabilités totales, comme S et \bar{S} forment un système complet d'évènements, on a

$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= P(S \cap \bar{E}) + P(\bar{S} \cap \bar{E}) = P(S) \times P_S(\bar{E}) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(\bar{E}) \\ &= 0.3 \times 0.223 + 0.7 \times 0.173 = 0.0669 + 0.1211 = 0.188. \end{aligned}$$

4. On cherche $P_{\bar{E}}(S)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a

$$P_{\bar{E}}(S) = \frac{P(S \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{0.0669}{0.188} = \frac{669}{1880}.$$

Exercice 7 –

Notons \mathcal{P}_n la proposition : " $u_n > 0$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 2 > 0$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque de \mathbf{N} . Supposons que \mathcal{P}_n est vraie et montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie aussi. On a

$$u_{n+1} = 2u_n + 4 > 2 \times 0 + 4 = 4 > 0,$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que \mathcal{P}_0 est vraie, alors, par principe de récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout n dans \mathbf{N} , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > 0.$$

Exercice 8 –

1. Notons \mathcal{P}_n la proposition : " $\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$ ".

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^1 2^k = 2^1 = 2 \quad \text{et} \quad 2 \times (2^1 - 1) = 2 \times 1 = 2,$$

donc \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans \mathbf{N}^* . Supposons que \mathcal{P}_n est vraie et montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie aussi. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = \sum_{k=1}^n 2^k + 2^{n+1} = 2(2^n - 1) + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 2 = 2(2^{n+1} - 1),$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que \mathcal{P}_1 est vraie, alors, par principe de récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout n dans \mathbf{N}^* , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1).$$

2. On sait que pour tout $q \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=1}^n q^k = q \times \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Donc pour $q = 2$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2(2^n - 1).$$

Exercice 9 –

1. On a

$$\lim_{x \rightarrow -2} 2x^3 - x^2 + 5x + 6 = 2 \times (-8) - 4 + 5 \times (-2) + 6 = -16 - 4 - 10 + 6 = -24.$$

2. On a

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{2x-3} = \frac{-1-2}{-2-3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

3. On décompose :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 1 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -2x + 4 = 0^+,$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{-2x+4} = +\infty.$$

4. On décompose :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - 1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x(x+1) = 0^+,$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-1}{x(x+1)} = -\infty.$$

5. On décompose :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x^2} = 0,$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} = 2.$$

6. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 5x^2 + 4x - 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty.$$

7. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{-4x^3 + 2x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{-4x} = 0^-.$$

8. On décompose :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2,$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + 1) \times \frac{2x+1}{x+5} = -\infty.$$

9. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 16 = 16$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{x} + 16} = \sqrt{16} = 4$.

10. On a $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3}{-x+2} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{-3}{-x+2}} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{-3}{-x+2}} - 2 = +\infty$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\sqrt{\frac{-3}{-x+2}} - 2 \right)^3 = +\infty.$$

Exercice 10 –

1. (a) La fonction f étant une fraction rationnelle, on a $D_f = \mathbf{R} \setminus \{V.I.\}$.
Par ailleurs, $2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = 2$. Donc $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

(b) On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty.$$

Et de même,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x + 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 4 = 0^-,$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = -\infty.$$

Et de même,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x + 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 4 = 0^+,$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = +\infty.$$

(c) On remarque que

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = \frac{x(x - 2) + 1}{2x - 4} = x \times \frac{x - 2}{2(x - 2)} + \frac{1}{2x - 4} = x \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2x - 4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x - 4},$$

ce qui nous amène à $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ et $c = 1$.

Comme $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{2x - 4}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x - 4} = 0$, on en déduit que la droite \mathcal{D} d'équation $y = \frac{x}{2}$ est bien asymptote oblique à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$.

2. (a) Posons $u(x) = x^2 - 2x + 1$ et $v(x) = 2x - 4$, de sorte que $f = \frac{u}{v}$.

On a $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = 2$. Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{(2x - 2)(2x - 4) - 2(x^2 - 2x + 1)}{(2x - 4)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 4x + 8 - 2x^2 + 4x - 2}{(2x - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(2x - 4)^2}. \end{aligned}$$

- (b) Pour étudier les variations de f , il faut commencer par étudier le signe de f' . Pour cela, calculons le discriminant de $2x^2 - 8x + 6$. On a $\Delta = 64 - 48 = 16$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{8 - 4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8 + 4}{4} = 3.$$

Par ailleurs, on a vu que $2x - 4 = 0 \iff x = 2$. On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f .

$$\text{On a } f(1) = \frac{1^2 - 2 \times 1 + 1}{2 \times 1 - 4} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \text{et} \quad f(3) = \frac{3^2 - 2 \times 3 + 1}{2 \times 3 - 4} = \frac{4}{2} = 2.$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$2x^2 - 8x + 6$	+	0	-	-	0	+
$(2x - 4)^2$	+		+	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
f	$-\infty$	\nearrow 0 \searrow	$-\infty$	$+\infty$	\searrow 2 \nearrow	$+\infty$

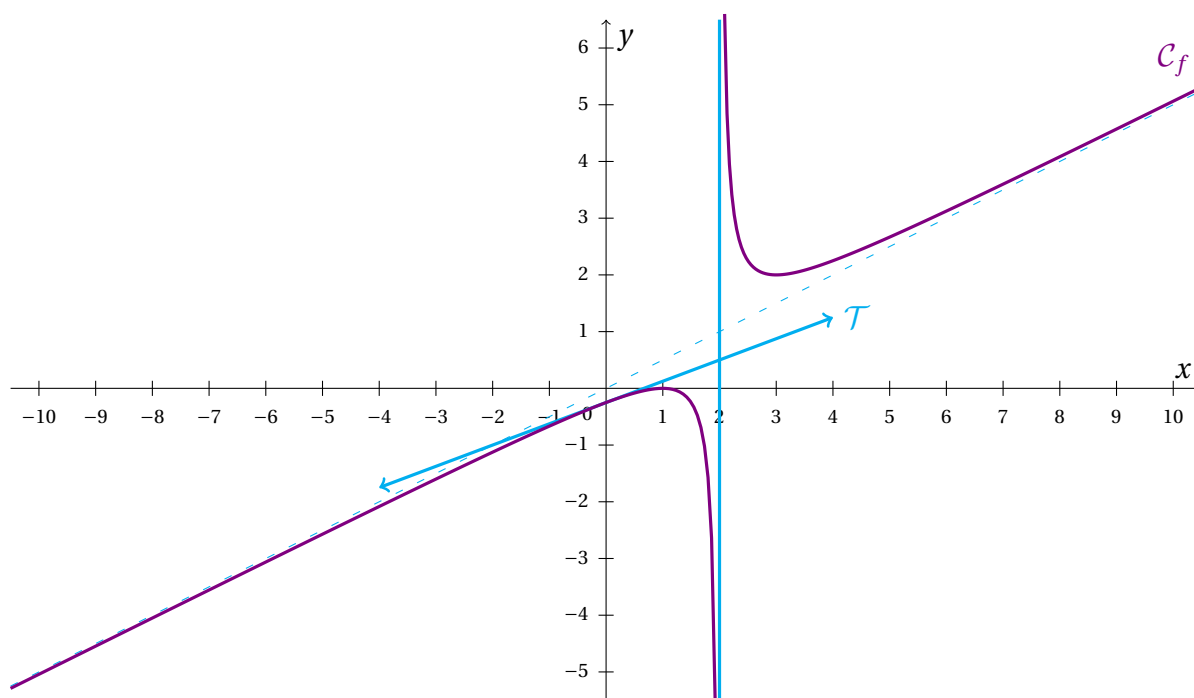
(c) L'équation de la tangente est donnée par $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Ici $a = 0$. On a

$$f(0) = \frac{0^2 - 2 \times 0 + 1}{2 \times 0 - 4} = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{2 \times 0^2 - 8 \times 0 + 6}{(2 \times 0 - 4)^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

On en déduit l'équation de la tangente.

$$y = \frac{3}{8}(x - 0) - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}.$$

3. On a l'allure de courbe suivante.



4. (a) La convexité est donnée par le signe de $f''(x)$. Ici, on remarque que le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $(x - 2)^3$, donc le même que celui de $x - 2$. Ainsi,
- f est convexe lorsque $f''(x) \geq 0 \iff x - 2 \geq 0$, i.e. sur $]2, +\infty[$, et
 - f est concave lorsque $f''(x) \leq 0 \iff x - 2 \leq 0$, i.e. sur $] -\infty, 2[$.

Comme la dérivée seconde ne s'annule pas, la courbe \mathcal{C}_f n'admet pas de point d'inflexion.

- (b) Sur $]2, +\infty[$, comme f est convexe, les tangentes à la courbe sont situées en-dessous de la courbe alors que sur $] -\infty, 2[$, où f est concave, les tangentes à la courbe sont situées au-dessus de la courbe.

Exercice 11 – Partie A

1. On a $f'(x) = 2x - 1$. Or $2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f .

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$2x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
f	1	$\frac{3}{4}$	1

En effet,

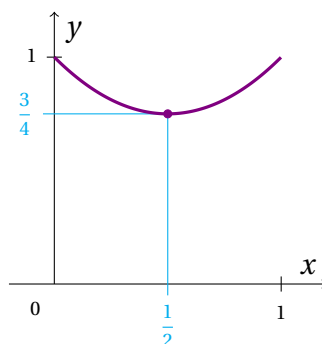
$$f(0) = 0^2 + 1 - 0 = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

2. D'après le tableau de variation, la fonction admet un minimum local pour $x = \frac{1}{2}$ de valeur $\frac{3}{4}$. Elle n'admet pas de maximum local.
3. D'après le tableau de variation de la question 1, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$\frac{3}{4} \leq f(x) \leq 1.$$

En particulier, on a bien que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

4. La fonction f est une fonction polynomiale de degré 2, sa courbe suit donc une parabole.

**Partie B**

1. On a

$$u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{7}{9} \quad \text{et} \quad u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81} + 1 - \frac{7}{9} = \frac{67}{81}.$$

2. Notons \mathcal{P}_n la proposition : " $u_n \in [0, 1]$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{3} \in [0, 1]$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans \mathbf{N} . Supposons que \mathcal{P}_n est vraie et montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in [0, 1]$. D'après la Partie A, on sait que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \in [0, 1]$. Ainsi $f(u_n) \in [0, 1]$, i.e. $u_{n+1} \in [0, 1]$. Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que \mathcal{P}_0 est vraie, alors, par principe de récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout n dans \mathbf{N} , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in [0, 1].$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 - u_n - u_n = u_n^2 + 1 - 2u_n = (u_n - 1)^2 \geq 0.$$

Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante (d'après la question 3) et majorée par 1 (d'après la question 2), donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

Notons ℓ sa limite. Puisque $u_{n+1} = u_n^2 + 1 - u_n$, on a par passage à la limite

$$\ell = \ell^2 + 1 - \ell \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell - 1)^2 = 0.$$

Et donc $\ell = 1$. Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 12 –

1. D'après l'énoncé, on a

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0.2.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements, on a

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= 0.7P(A_n) + 0.2P(\overline{A_n}) = 0.7P(A_n) + 0.2(1 - P(A_n)) \\ &= 0.7P(A_n) + 0.2 - 0.2P(A_n) = 0.5P(A_n) + 0.2. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a bien $p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.

3. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.4 = 0.5p_n + 0.2 - 0.4 = 0.5(u_n + 0.4) + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n + 0.2 + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0.5. Son premier terme est donné par

$$u_1 = p_1 - 0.4 = 0.2 - 0.4 = -0.2.$$

- (b) Comme (u_n) est une suite géométrique, on a pour tout entier n ,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

Alors pour tout entier n , on a

$$p_n = u_n + 0.4 = 0.4 - 0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

4. La suite (u_n) est une suite géométrique, de premier terme $u_1 = -0.2$ négatif et de raison $q = 0.5 \in]0, 1[$. Donc la suite (u_n) est une suite croissante à termes négatifs. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_n = u_n + 0.4$, la suite (p_n) partage la même variation que la suite (u_n) , elle est donc croissante.

5. Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, la limite de la suite géométrique (u_n) est 0. Alors, comme $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $p_n = u_n + 0.4$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + 0.4 = 0 + 0.4 = 0.4.$$