

NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 15

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes à l'aide des primitives usuelles.

1. $I_1 = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \, dx$

Solution :

$$I_1 = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 5x \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 2 - 5 = -\frac{15}{4}$$

2. $I_2 = \int_0^2 (6x+3)^7 \, dx$ (Vous avez le droit d'arrêter le calcul lorsque celui-ci vous semble trop compliqué.)

Solution : Je pose $f_2(x) = (6x+3)^7$. f_2 semble être de la forme $u' u^7$, avec $u(x) = 6x+3$.
Puisque $u'(x) = 6$, alors $u'(x) u(x)^7 = 6(6x+3)^7 = 6 \times f_2(x)$.

Ainsi une primitive de f_2 est donnée par $F_2(x) = \frac{1}{6} \times \frac{u(x)^8}{8} = \frac{(6x+3)^8}{48}$. Donc

$$I_2 = \int_0^2 (6x+3)^7 \, dx = \left[\frac{(6x+3)^8}{48} \right]_0^2 = \frac{15^8}{48} - \frac{3^8}{48} = \frac{3^7}{16} (5^4 + 1)(5^2 + 1)(5 + 1)(5 - 1) = 53393418.$$

3. $I_3 = \int_1^3 \frac{4}{\sqrt{3x+7}} \, dx$

Solution : Je pose $f_3(x) = \frac{4}{\sqrt{3x+7}}$. f_3 semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, avec $u(x) = 3x+7$.

Puisque $u'(x) = 3$, alors $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{\sqrt{3x+7}} = \frac{3}{4} \times f_3(x)$.

Ainsi une primitive de f_3 est donnée par $F_3(x) = \frac{4}{3} \times 2\sqrt{u(x)} = \frac{8}{3}\sqrt{3x+7}$. Donc

$$I_3 = \int_1^3 \frac{4}{\sqrt{3x+7}} \, dx = \left[\frac{8}{3} \times \sqrt{3x+7} \right]_1^3 = \frac{8}{3}\sqrt{16} - \frac{8}{3}\sqrt{10} = \frac{8}{3}(4 - \sqrt{10}).$$

4. $I_4 = \int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1} \, dx$

Solution : Je pose $f_4(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}$. f_4 semble être de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = x^2+x+1$.

Puisque $u'(x) = 2x+1$, alors $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times f_4(x)$.

Ainsi une primitive de f_4 est donnée par $F_4(x) = 2\ln(|x^2+x+1|)$. Donc

$$I_4 = \int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1} \, dx = \left[2\ln(|x^2+x+1|) \right]_2^4 = 2\ln(21) - 2\ln(7) = 2\ln\left(\frac{21}{7}\right) = 2\ln(3).$$

Exercice 2 – Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1. $I_5 = \int_0^2 t e^t dt$

Solution : Je pose

$$\begin{array}{ll} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{array}$$

Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^2 u'(t) v(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_0^2 - \int_0^2 u(t) v'(t) dt \\ &= \left[t e^t \right]_0^2 - \int_0^2 1 \times e^t dt = 2e^2 - \left[e^t \right]_0^2 = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1. \end{aligned}$$

2. $I_6 = \int_1^e t \ln(t) dt$

Solution : Je pose

$$\begin{array}{ll} u'(t) = t & u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \frac{1}{t} \end{array}$$

Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_1^e u'(t) v(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_1^e - \int_1^e u(t) v'(t) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt = \frac{e^2}{2} \ln(e) - \int_1^e \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$