ECRICOME 2024

Exercice 1 –

1. a) Je calcule la matrice M :

$$M = A - I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0-4 & -1 & 8 \\ 4 & 4-4 & -4 \\ 0 & 0 & 2-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule d'abord la matrice $2M + I$ avant de calculer son cube :

$$2M + I = 2 \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4+2 & -1 & 8 \\ 4 & 0+2 & -4 \\ 0 & 0 & -2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je peux alors calculer les produits matriciels $(2M+I)^2$ puis $(2M+I)^3$:

$$(2M+I)^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4-4 & 2-2 & -16+4 \\ -8+8 & -4+4 & 32-8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2M+I)^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6-6 \\ 0 & 0 & -12+12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Ainsi j'ai bien montré que $(2M+I)^3 = 0_3$.

c) En développant littéralement le produit précédemment obtenu, j'obtiens que

$$(2M+I)^2 = (2M)^2 + 2M \times I + I \times 2M + I^2 = 4M^2 + 4M + I \qquad \textit{(les produits commutent)}$$
$$(2M+I)^3 = (2M+I) \times \left(4M^2 + 4M + I\right) = 8M^3 + 12M^2 + 6M + I$$

Ainsi en injectant ce développement dans l'équation obtenue précédemment, j'obtiens bien que

$$(2M+I)^3 = 0_3 \iff 8M^3 + 12M^2 + 6M + I = 0_3 \iff 8M^3 + 12M^2 + 6M = -I$$
$$\iff M\left(8M^2 + 12M + 6I\right) = -I.$$

d) Grâce à la question précédente,

$$M\left(8M^2 + 12M + 6I\right) = -I \iff M\left(-8M^2 - 12M - 6I\right) = I.$$

Ainsi la matrice M est inversible et son inverse est donnée par

$$M^{-1} = -8M^2 - 12M - 6I.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule l'expression $AX_n + B$ dans le but de retrouver X_{n+1} :

$$AX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -s_n + 8t_n \\ 4r_n + 4s_n - 4t_n \\ 2t_n \end{pmatrix}$$

$$AX_n + B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -s_n + 8t_n \\ 4r_n + 4s_n - 4t_n \\ 2t_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}s_n + 2t_n \\ r_n + s_n - t_n \\ \frac{1}{2}t_n + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

3. a) Je calcule l'expression $AC+B$ dans le but de retrouver C :

$$AC+B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-1&8\\4&4&-4\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-8+16\\8+32-8\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}=C.$$

Ainsi j'ai bien montré que $AC+B=C$.

b) Par construction, $M=A-I$. Donc $I-A=-(A-I)=-M$ est inversible comme j'ai déjà démontré que M est inversible. Son inverse est donnée par

$$(I-A)^{-1}=-M^{-1}=8M^2+12M+6I.$$

c) En combinant les résultats des questions précédentes, je sais que $I-A$ est inversible et que $AC+B=C$. Alors

$$AC+B=C \iff B=C-AC=(I-A)\times C \iff C=(I-A)^{-1}B.$$

En particulier, $C=(I-A)^{-1}B$ est l'unique solution de l'équation matricielle $AX+B=X$ d'inconnue X.

4. Je raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n-C=A^n(X_0-C)$.

Initialisation : Pour $n=0$,

$$A^0(X_0-C)=I(X_0-C)=X_0-C.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $X_n-C=A^n(X_0-C)$. Or

$$\begin{aligned}X_{n+1}-C&=AX_n+B-C=A\big(A^n(X_0-C)+C\big)+B-C=A^{n+1}(X_0-C)+AC+B-C\\&=A^{n+1}(X_0-C)+C-C=A^{n+1}(X_0-C),\end{aligned}$$

comme $AC+B=C$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n-C=A^n(X_0-C).$$

5. a) D'après la question **1.b)**, je sais que $(2M+I)^3=0_3$. Or $M=A-I$, donc en combinant ces deux relations,

$$(2M+I)^3=0_3 \iff \big(2(A-I)+I\big)^3=0_3 \iff (2A-2I+I)^3=0_3 \iff (2A-I)^3=0_3.$$

Comme $(2A-I)^3=0_3$, alors le polynôme $(2x-1)^3$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Les valeurs propres de la matrice A sont donc parmi les racines de ce polynôme annulateur. Et comme

$$(2x-1)^3=0 \iff 2x-1=0 \iff 2x=1 \iff x=\frac{1}{2},$$

alors l'unique valeur propre possible pour la matrice A est $\frac{1}{2}$.

b) i. Si la matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible R telles que $A = RDR^{-1}$. La matrice D n'a alors sur sa diagonale que des valeurs propres de la matrice A. Ici, comme $\frac{1}{2}$ est l'unique valeur propre de A, alors la matrice D n'a que cette valeur sur sa diagonale, *i.e.*

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I.$$

Alors l'identité de diagonalisabilité peut se réécrire en multipliant par R^{-1} à gauche et par R à droite,

$$A = RDR^{-1} = R \times \frac{1}{2} I \times R^{-1} \quad \iff \quad \frac{1}{2} I = R^{-1} AR.$$

ii. En reprenant l'identité obtenue à la question précédente,

$$A = RDR^{-1} = R \times \frac{1}{2} I \times R^{-1} = \frac{1}{2} RR^{-1} = \frac{1}{2} I.$$

iii. Le raisonnement par l'absurde mené dans cette question suppose que la matrice A est diagonalisable et aboutit au fait que la matrice A est égale à la matrice $\frac{1}{2} I$. Or ce n'est pas le cas, la matrice A n'étant même pas diagonale. Cette contradiction démontre donc que l'hypothèse de départ est erronée : la matrice A n'est pas diagonalisable.

6. a) Je calcule le produit matriciel QP :

$$QP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -6+6 & 12 & 8-8 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

b) Comme $QP = 2I$, alors la matrice P est inversible et son inverse est donnée par $P^{-1} = \frac{1}{2} Q$.

c) Je vais calculer le produit matriciel $\frac{1}{4} PTQ$ dans le but de retrouver A :

$$PT = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & -6+6 & 12+4 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 16 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PTQ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 16 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 48 \\ 24 & 12+12 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} PTQ.$$

d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad A^n = \frac{1}{2^{n+1}} PT^n Q.$

Initialisation : Pour $n=0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^1}PT^0Q = \frac{1}{2}PQ = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $A^n = \dfrac{1}{2^{n+1}}PT^nQ$. Or

$$A^{n+1} = A^n \times A = \frac{1}{2^{n+1}}PT^nQ \times \frac{1}{4}PTQ = \frac{1}{2^{n+1}}PT^n \times \frac{1}{2}I \times TQ = \frac{1}{2^{n+2}}PT^{n+1}Q.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{2^{n+1}}PT^nQ.$$

e) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n=0$,

$$T^0 = I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 & 2\times 0\times(-1) \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or

$$\begin{aligned} T^{n+1} = T^n \times T &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2n & 2\times 2n + 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & 2n(2+n-1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & 2(n+1)(n+1-1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

***Remarque :** Il aurait aussi été possible d'utiliser le binôme de Newton mais la récurrence semble plus facile puisqu'il ne s'agit que de vérifier une formule de l'énoncé.*

7. D'après la question **4.**, je sais que $X_n - C = A^n(X_0 - C)$. Et je connais désormais une formule pour la matrice A_n. Donc je peux en déduire X_n, et les formes explicites des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix} = A^n(X_0 - C) + C = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_0 - 2 \\ s_0 - 8 \\ t_0 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+3n^2-11n \\ 4n+4-6n^2+10n \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\left(3n^2 - 13n\right) \\ 8 + \frac{1}{2^{n+1}}\left(-6n^2 + 14n + 4\right) \\ 2 - \frac{2}{2^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\left(3n^2 - 13n\right) \\ 8 + \frac{1}{2^n}\left(-3n^2 + 7n + 2\right) \\ 2 - \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$$

Finalement j'obtiens bien pour tout entier naturel n,

$$r_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\left(3n^2 - 13n\right), \qquad s_n = 8 + \frac{1}{2^n}\left(-3n^2 + 7n + 2\right) \quad \text{et} \quad t_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

8. a) Grâce à la propriété fondamentale du logarithme,

$$\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \ln\left(n^2\right) - \ln\left(2^n\right) = 2\ln(n) - n\ln(2) = n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right).$$

Puis par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right) = -\ln(2)$ et par produit, comme $\ln(2) > \ln(1) = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right) = -\infty.$$

Alors par continuité de la fonction exponentielle, comme $\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Enfin comme pour tout $n \geqslant 1$, $\quad 0 \leqslant \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{n^2}{2^n}$, alors par théorème d'encadrement des limites, j'en déduis que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

b) Par opérations sur les limites, grâce aux deux résultats obtenus à la question précédente et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\left(3n^2 - 13n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\left(-3n^2 + 7n + 2\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Finalement par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 2 + 0 = 2, \qquad \lim_{n\to+\infty} s_n = 8 + 0 = 8 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = 2 - 0 = 2.$$

Exercice 2 –

Partie 1

1. a) Je sais que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Ainsi par opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{4}{1+0} = 4.$$

Comme la limite est finie, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ au voisinage de $-\infty$.

b) Je sais que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Ainsi en décomposant numérateur et dénominateur,

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} 4 = \quad 4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^x = +\infty \end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Comme la limite est finie, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f = \dfrac{4}{u}$, avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^x$. Comme $u'(x) = \mathrm{e}^x$, alors

$$f'(x) = -\frac{4u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{4\,\mathrm{e}^x}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, alors j'en déduis que $4\,\mathrm{e}^x > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2 > 0$.
En conséquence, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) < 0$.

b) Les variations de la fonction f s'obtiennent grâce au signe de la dérivée. D'après la question précédente, comme la dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}$, la fonction f est strictement décroissante. Aussi $f(0) = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^0} = \dfrac{4}{1+1} = \dfrac{4}{2} = 2$, ce qui me permet d'établir le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	4	$\searrow$ 2 $\searrow$	0

c) Comme la fonction f est décroissante et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$, alors la courbe représentative de f est toujours en dessous de la droite d'équation $y = 4$, asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

d) L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$. Or

$$f(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'(0) = -\frac{4\,\mathrm{e}^0}{\left(1+\mathrm{e}^0\right)^2} = -\frac{4\times 1}{(1+1)^2} = -1.$$

Finalement l'équation de cette tangente est donnée par

$$y = -1\times x + 2 \qquad \textit{i.e.} \quad y = -x+2.$$

3. a) Comme la fonction f est deux fois dérivable, alors la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f' = -\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 4\,\mathrm{e}^x$ et $v(x) = \left(1+\mathrm{e}^x\right)^2$.
Comme $u'(x) = 4\,\mathrm{e}^x$ et que $v'(x) = 2\times\mathrm{e}^x\times\left(1+e^x\right)$, alors

$$f''(x) = -\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{4\,\mathrm{e}^x\times\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2 - 4\,\mathrm{e}^x\times 2\,\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{\left(\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2\right)^2}$$
$$= -\frac{4\,\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^x-2\,\mathrm{e}^x\right)\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^4} = -\frac{4\,\mathrm{e}^x\left(1-\mathrm{e}^x\right)}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^3} = \frac{4\,\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^3}$$

Finalement je retrouve bien la formule souhaitée : $\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f''(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^3}$.

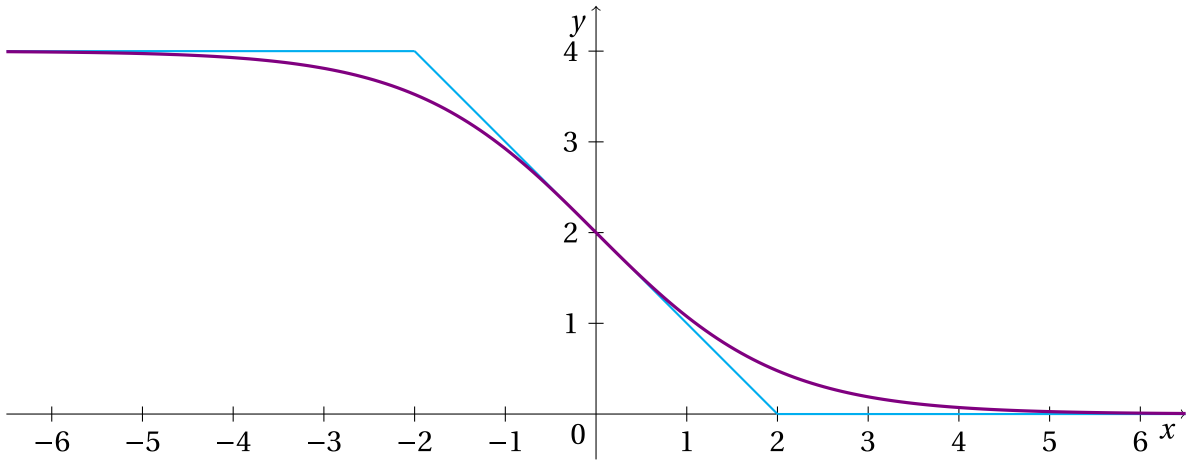
b) Les points d'inflexion de la courbe sont les points où la convexité change. Or la convexité s'obtient grâce au signe de la dérivée seconde. J'étudie donc le signe de $f''(x)$.
Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x>0$, alors j'en déduis que $\quad 4\,\mathrm{e}^x>0 \quad$ et $\quad \left(1+\mathrm{e}^x\right)^3>0$.
En outre, $\mathrm{e}^x-1\geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x\geqslant 1 \iff x\geqslant \ln(1)=0$. Par conséquent, j'établis le tableau de signe de la fonction f'' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi le point d'abscisse $x=0$, à savoir le point de coordonnées $(0,2)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe représentative de f et la fonction est convexe sur l'intervalle $[0,\infty[$ et concave sur l'intervalle $]-\infty,0]$.

c) Comme le point d'abscisse 0 est le point d'inflexion, et que la courbe est concave avant puis convexe après, alors la courbe se trouve en dessous de la tangente sur l'intervalle $]-\infty,0]$ et au-dessus de la tangente sur l'intervalle $[0,\infty[$.

4. Voici l'allure de la courbe représentative de la fonction f.



5. a) En partant de la définition de la fonction f, je multiplie numérateur et dénominateur par e^{-x} : pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{4\times\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)\times\mathrm{e}^{-x}} = \frac{4\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} = 4\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

b) Je débute par déterminer une primitive de la fonction f. L'ensemble des primitives s'obtiendront alors en ajoutant une constante et il me suffira de choisir la constante qui convient pour que la primitive s'annule en 0. f semble être de la forme $-4\times\dfrac{u'}{u}$, avec $u(x)=1+\mathrm{e}^{-x}$. Puisque $u'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$, alors

$$-4\times\frac{u'(x)}{u(x)}=-4\times\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=4\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x)=-4\times\ln\big(u(x)\big)=-4\times\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Ainsi l'ensemble des primitives de la fonction f sont de la forme $F(x)=-4\times\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)+C$ pour une constante $C\in\mathbb{R}$. Je calcule alors l'image de 0 :

$$F(0)=-4\times\ln\left(1+\mathrm{e}^{-0}\right)+C=-4\times\ln(2)+C.$$

Ainsi $F(0)=0 \iff -4\times\ln(2)+C=0 \iff C=4\times\ln(2)$ et la primitive de f qui s'annule en 0 est donnée par

$$F(x)=-4\times\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)+4\times\ln(2)=4\times\left(\ln(2)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right)=4\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)=4\ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right).$$

Partie 2

6. a) La fonction f est continue car dérivable et strictement décroissante, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image, à savoir $]0,4[$.

b) i. Soit $y\in\,]0,4[$.

$$f\big(g(y)\big)=\frac{4}{1+\mathrm{e}^{g(y)}}=\frac{4}{1+\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{4}{y}-1\right)}}=\frac{4}{1+\frac{4}{y}-1}=\frac{4}{\frac{4}{y}}=4\times\frac{y}{4}=y.$$

ii. Comme $\forall y\in\,]0,4[,\quad f\big(g(y)\big)=y,$ alors g est la bijection réciproque de la fonction f *i.e.* $g=f^{-1}$.

c) Comme f et g sont bijections réciproques, alors pour tout $x\in\mathbb{R},\quad g\big(f(x)\big)=x$.
Ainsi comme f est décroissante, alors g est décroissante et

$$0.05\leqslant f(x)\leqslant 2 \iff g(0.05)\geqslant g\big(f(x)\big)\geqslant g(2) \iff g(2)\leqslant x\leqslant g(0.05).$$

Or

$$g(2)=\ln\left(\frac{4}{2}-1\right)=\ln(2-1)=\ln(1)=0 \quad\text{et}\quad g(0.05)=\ln\left(\frac{4}{0.05}-1\right)=\ln(80-1)=\ln(79).$$

Donc

$$0.05\leqslant f(x)\leqslant 2 \iff g(2)\leqslant x\leqslant g(0.05) \iff 0\leqslant x\leqslant \ln(79).$$

7. a) En traduisant l'énoncé, le fabriquant souhaite que la hauteur de la rampe soit entre 0.05m et 2m, *i.e.* $0.05\leqslant f(x)\leqslant 2$. J'ai résolu cette in équation à la question précédente et trouvé que cela signifie que $0\leqslant x\leqslant\ln(79)$.
La longueur sur le sol de la rampe est donc bien de $\ln(79)-0=\ln(79)$ mètres.

b) L'aire qui établit le volume de béton nécessaire est donné par l'intégrale de la fonction f entre les bornes $a = 0$ et $b = \ln(79)$. Je calcule alors cette intégrale à l'aide de la primitive obtenue à la question **5.b)**, qui s'annule en 0 :

$$\int_0^{\ln(79)} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^{\ln(79)} = F\big(\ln(79)\big) - F(0) = 4\ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}^{\ln(79)}}{1+\mathrm{e}^{\ln(79)}}\right) - 0 = 4\ln\left(\frac{2\times 79}{1+79}\right) = 4\ln\left(\frac{79}{40}\right).$$

Le volume de béton nécessaire est donc de $4\ln\left(\frac{79}{40}\right)\mathrm{m}^3$.

Partie 3

8. a) Il s'agit d'une intégrale impropre. Je fixe $M \leqslant 0$ et calcule l'intégrale sur le segment $[0, M]$ avant de faire tendre M vers $+\infty$. J'utilise de nouveau la primitive obtenue à la question **5.b)**, qui s'annule en 0. Ainsi

$$\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^M = F(M) - F(0) = 4\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-M}}\right) - 0 = 4\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-M}}\right).$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty} \mathrm{e}^{-M} = \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc $\lim\limits_{M\to+\infty} 4\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-M}}\right) = 4\ln\left(\frac{2}{1+0}\right) = 4\ln(2)$.
Donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 4\ln(2)$.

b) Je fixe $\alpha = \frac{1}{4\ln(2)}$ et je montre que la fonction ainsi obtenue αh est une densité de probabilité. Déjà comme $\ln(2) > 0$, alors $\alpha > 0$.

- Pour $x < 0$, $\alpha h(x) = \alpha \times 0 = 0 \geqslant 0$ et pour $x \geqslant 0$, $\alpha h(x) = \alpha f(x) \geqslant 0$ car $\alpha > 0$ et $f(x) \geqslant s > 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha h(x) \geqslant 0$.
- Sur $]-\infty, 0[$, αh est continue car constante et sur $[0, +\infty[$, αh est continue comme f est continue. Donc αh admet au plus un point de discontinuité sur $\mathbb{R}$.
- Il me reste à montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x$.
  Je calcule séparément les deux intégrales suivantes :
  ▷ $\int_{-\infty}^{0} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \alpha \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
  ▷ $\int_{0}^{+\infty} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \alpha f(x)\,\mathrm{d}x$.

  L'intégrale impropre converge et $\int_0^{+\infty} \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\ln(2)} \times 4\ln(2) = 1$.
  Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{s}^{+\infty} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.$$

Finalement j'ai bien montré que αh est une densité de probabilité.

c) La variable aléatoire U suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.
Sa fonction de répartition est donc donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

d) Soit $x \in [0,+\infty[$. Par croissance de la fonction exponentielle,

$$x \geqslant 0 \iff -x \leqslant 0 \iff 0 < e^{-x} \leqslant e^0 = 1 \iff 1 = 1+0 < 1+e^{-x} \leqslant 1+1 = 2.$$

Puis par croissance de la fonction logarithme népérien,

$$1 < 1+e^{-x} \leqslant 2 \iff 0 = \ln(1) < \ln\left(1+e^{-x}\right) \leqslant \ln(2)$$

$$\iff 0 < \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)} \leqslant \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1 \iff 0 = 1-1 \leqslant 1 - \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)} < 1-0 = 1.$$

Finalement j'ai bien montré que

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad 1 - \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)} \in [0,1[.$$

e) Soit $x \in [0,+\infty[$. Je commence par m'intéresser aux inégalités impliquant les variables aléatoires avant de passer aux probabilités.
Par croissance des fonctions exponentielle et logarithme,

$$\begin{aligned} X \leqslant x &\iff -\ln\left(e^{(1-U)\ln(2)} - 1\right) \leqslant x &&\iff \ln\left(e^{(1-U)\ln(2)} - 1\right) \geqslant -x \\ &\iff e^{(1-U)\ln(2)} - 1 \geqslant e^{-x} &&\iff e^{(1-U)\ln(2)} \geqslant 1+e^{-x} \\ &\iff (1-U)\ln(2) \geqslant \ln\left(1+e^{-x}\right) &&\iff \ln\left(1+e^{-x}\right) \leqslant (1-U)\ln(2). \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré la première partie de l'égalité :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad P\big([X \leqslant x]\big) = P\big([\ln\left(1+e^{-x}\right) \leqslant (1-U)\ln(2)]\big).$$

Puis en continuant mon travail sur les inégalités,

$$\ln\left(1+e^{-x}\right) \leqslant (1-U)\ln(2) \iff \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)} \leqslant 1-U \iff U \leqslant 1 - \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)}.$$

Alors

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad P\big([X \leqslant x]\big) = P\Big([U \leqslant 1 - \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)}]\Big) = F_U\left(1 - \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)}\right).$$

Et comme d'après la question précédente, $1 - \dfrac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)} \in [0,1[$, alors

$$F_U\left(1 - \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)}\right) = 1 - \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)}.$$

f) Par définition, la fonction de répartition de X est donnée pour $x \in]-\infty,0[$ par $F_X(x) = 0$ et pour $x \in [0,+\infty[$ par

$$F_X(x) = P\big([X \leqslant x]\big) = 1 - \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\ln(2)}.$$

Comme cette fonction de répartition est dérivable, alors X est une variable aléatoire à densité et une densité est donnée par la dérivée de la fonction de répartition.
Pour $x \in]-\infty,0[$, $\quad F_X'(x) = 0$ et pour $x \in [0,+\infty[$, $\quad F_X$ est de la forme $F_X = 1 - \dfrac{1}{\ln(2)}\ln(u)$, avec $u(x) = 1+e^{-x}$. Comme $u'(x) = -e^{-x}$, alors

$$F_X'(x) = -\frac{1}{\ln(2)} \times \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{4\ln(2)} \times \frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}} = \alpha f(x).$$

Ainsi je retrouve bien la fonction αh définie précédemment qui est bien une densité de X.

g) Voici une fonction `Python` qui renvoie une simulation de X, après importation des librairies `numpy` et `numpy.random` :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX():
    u=rd.random()
    return -np.log(np.exp((1-u)*np.log(2))-1)
```

h) Le script calcule 10000 simulations de la loi de la variable aléatoire X et sont représentées sur le graphe les moyennes des N premières simulations pour tous les entiers N entre 1 et 10000. On remarque alors que pour des grandes valeurs de N, la moyenne tend vers une limite finie. Il s'agit d'une illustration de la loi des grands nombres, et la limite observée est l'espérance de la variable aléatoire X.