INTERRO DE COURS 9

Exercice 1 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Solution :

- Pour $x < 0$, on a $f(x) = 0$ et pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) = e^{-x}$.
  Dans les deux cas, on a bien $f(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est continue partout sauf en 0.
- Il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut 0}} + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $M \geqslant 0$. On a

$$\int_0^M e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^M = 1 - e^{-M}.$$

Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} 1 - e^{-M} = 1$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

En résumé, la fonction f est bien une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire admettant X pour densité.

Solution : Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Il faut distinguer deux cas :

- Si $x < 0$, alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

- Si $x \geqslant 0$, alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

En résumé, on a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

3. Calculer $P(X \leqslant 2)$, $P(0 < X \leqslant 1)$ et $P\big(X > \ln(2)\big)$.

Solution : On a

$$P(X \leqslant 2) = F_X(2) = 1 - e^{-2},$$

$$P(0 < X \leqslant 1) = F_X(1) - F_X(0) = 1 - e^{-1} - 0 = 1 - e^{-1},$$

$$P\big(X > \ln(2)\big) = 1 - F_X\big(\ln(2)\big) = 1 - \big(1 - e^{-\ln(2)}\big) = 1 - \left(1 - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$