

NOM :

## INTERRO DE COURS – SEMAINE 15

**Exercice 1** – Calculer les intégrales suivantes à l'aide des primitives usuelles.

1.  $I_1 = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \, dx$

**Solution :**

$$I_1 = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \, dx = \left[ \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 5x \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 2 - 5 = -\frac{15}{4}$$

2.  $I_2 = \int_0^2 (6x+3)^7 \, dx$  (Vous avez le droit d'arrêter le calcul lorsque celui-ci vous semble trop compliqué.)

**Solution :** Je pose  $f_2(x) = (6x+3)^7$ .  $f_2$  semble être de la forme  $u' u^7$ , avec  $u(x) = 6x+3$ .  
Puisque  $u'(x) = 6$ , alors  $u'(x) u(x)^7 = 6(6x+3)^7 = 6 \times f_2(x)$ .

Ainsi une primitive de  $f_2$  est donnée par  $F_2(x) = \frac{1}{6} \times \frac{u(x)^8}{8} = \frac{(6x+3)^8}{48}$ . Donc

$$I_2 = \int_0^2 (6x+3)^7 \, dx = \left[ \frac{(6x+3)^8}{48} \right]_0^2 = \frac{15^8}{48} - \frac{3^8}{48} = \frac{3^7}{16} (5^4 + 1)(5^2 + 1)(5 + 1)(5 - 1) = 53393418.$$

3.  $I_3 = \int_1^3 \frac{4}{\sqrt{3x+7}} \, dx$

**Solution :** Je pose  $f_3(x) = \frac{4}{\sqrt{3x+7}}$ .  $f_3$  semble être de la forme  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ , avec  $u(x) = 3x+7$ .

Puisque  $u'(x) = 3$ , alors  $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{\sqrt{3x+7}} = \frac{3}{4} \times f_3(x)$ .

Ainsi une primitive de  $f_3$  est donnée par  $F_3(x) = \frac{4}{3} \times 2\sqrt{u(x)} = \frac{8}{3}\sqrt{3x+7}$ . Donc

$$I_3 = \int_1^3 \frac{4}{\sqrt{3x+7}} \, dx = \left[ \frac{8}{3} \times \sqrt{3x+7} \right]_1^3 = \frac{8}{3}\sqrt{16} - \frac{8}{3}\sqrt{10} = \frac{8}{3}(4 - \sqrt{10}).$$

4.  $I_4 = \int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1} \, dx$

**Solution :** Je pose  $f_4(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}$ .  $f_4$  semble être de la forme  $\frac{u'}{u}$ , avec  $u(x) = x^2+x+1$ .

Puisque  $u'(x) = 2x+1$ , alors  $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times f_4(x)$ .

Ainsi une primitive de  $f_4$  est donnée par  $F_4(x) = 2\ln(|x^2+x+1|)$ . Donc

$$I_4 = \int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1} \, dx = \left[ 2\ln(|x^2+x+1|) \right]_2^4 = 2\ln(21) - 2\ln(7) = 2\ln\left(\frac{21}{7}\right) = 2\ln(3).$$

**Exercice 2** – Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1.  $I_5 = \int_0^2 t e^t dt$

**Solution :**

Je pose

$$u'(t) = e^t \quad \text{et} \quad v(t) = t.$$

Alors

$$u(t) = e^t \quad \text{et} \quad v'(t) = 1.$$

Et par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^2 u'(t) v(t) dt = \left[ u(t) v(t) \right]_0^2 - \int_0^2 u(t) v'(t) dt \\ &= \left[ t e^t \right]_0^2 - \int_0^2 1 \times e^t dt = 2e^2 - \left[ e^t \right]_0^2 = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1. \end{aligned}$$

2.  $I_6 = \int_1^e t \ln(t) dt$

**Solution :**

Je pose

$$u'(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(t).$$

Alors

$$u(t) = \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{1}{t}.$$

Et par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_1^e u'(t) v(t) dt = \left[ u(t) v(t) \right]_1^e - \int_1^e u(t) v'(t) dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt = \frac{e^2}{2} \ln(e) - \int_1^e \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{e^2}{2} - \left[ \frac{t^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left( \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$