1 Calcul numérique & littéral

I – Opérations sur les nombres réels

1 – Addition et soustraction

Proposition 1.1 – Propriétés de l'addition

- L'addition est **commutative**, *i.e.*, pour tous réels a et b, on a

$$a+b=b+a.$$

- L'addition est **associative**, *i.e.*, pour tous réels a, b et c, on a

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Exemple 1.2 – Les propriétés de l'addition (commutativité et associativité) permettent de simplifier la somme $A=3+x+4$.

$$A=3+x+4=3+4+x=7+x.$$

Proposition 1.3 – Distributivité du signe "−"

Pour tous réels a, b et c, on a

$$a-(b+c)=a-b-c \quad \text{et} \quad a-(b-c)=a-b+c.$$

On retiendra la méthode suivante.

Méthode 1.4 – Suppression de parenthèses précédées d'un signe "+" ou d'un signe "−"

On commence par repérer le signe qui précède la parenthèse que l'on souhaite supprimer, puis

- s'il s'agit d'un signe "+", on supprime les parenthèses sans rien changer de plus,
- s'il s'agit d'un signe "−", on supprime les parenthèses en changeant le signe de **tous** les termes à l'intérieur de la parenthèse.

Exemple 1.5 – Simplifier les expressions suivantes.

- $A=x-1+(1-x)$
  $=x-1+1-x$
  $=0$
- $B=x-1-(1-x)$
  $=x-1-1+x$
  $=2x-2$

2 – Multiplication et division

Proposition 1.6 – Propriétés de la multiplication

- La multiplication est **commutative**, *i.e.*, pour tous réels a et b, on a
$$a \times b = b \times a.$$
- La multiplication est **associative**, *i.e.*, pour tous réels a, b et c, on a
$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

Exemple 1.7 – Les propriétés de la multiplication (commutativité et associativité) permettent de simplifier le produit $A = 3 \times x \times 4$.
$$A = 3 \times x \times 4 = 3 \times 4 \times x = 12x.$$

Proposition 1.8 – Règle de simplification des fractions
Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Si c est réel non nul, alors
$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

Exemple 1.9 – Simplifier les fractions suivantes.
- $A = \dfrac{21}{12} = \dfrac{\cancel{3} \times 7}{\cancel{3} \times 4} = \dfrac{7}{4}$
- $B = \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2 \times \cancel{x}}{3 \times \cancel{x}} = \dfrac{2}{3}$

ATTENTION ! Il s'agit de l'unique règle de simplification d'une fraction et elle concerne les FACTEURS d'un produit !

Méthode 1.10 – Manipulation des fractions

- Pour **additionner** (ou **soustraire**) des fractions, on commence par les mettre au même dénominateur PUIS on ajoute (ou soustrait) les numérateurs.
- Pour **multiplier** des fractions, on multiplie les numérateurs et les dénominateurs entre eux.
- Pour **diviser** par une fraction, on multiplie par son INVERSE.

Exemple 1.11 – Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

- $A = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3 \times 1}{3 \times 4} - \dfrac{4 \times 1}{4 \times 3} = \dfrac{3}{12} - \dfrac{4}{12} = -\dfrac{1}{12}$
- $B = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{8}{5} = \dfrac{3 \times 8}{2 \times 5} = \dfrac{3 \times 4 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 5} = \dfrac{12}{5}$
- $C = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$

Remarque 1.12 – On donnera toujours le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

3 – Puissance entière

Définition 1.13 – Soit n un entier naturel non nul et a un réel.

- Le réel noté a^n (lire "a puissance n") est le produit de n facteurs tous égaux à a, *i.e.*,
$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$
- Si a est non nul, on a
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$
- Par convention, $a^0 = 1$.

Exemple 1.14 – Calculer les nombres suivants.

- $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
- $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

Proposition 1.15 – Règles de calcul

Pour tous réels a et b et tous entiers relatifs m et n, on a

$$a^1 = a, \qquad a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad \left(a^m\right)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Démonstration. On a

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n \text{ fois}} = a^{m+n}.$$

□

Corollaire 1.16

Soit a un réel et n un entier naturel. Alors

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exemple 1.17 – Calculer les nombres suivants.

- $A = 2^2 \times 2^{-4} \times 2 = 2^{2-4+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
- $B = \frac{3^8}{3^7} = 3^{8-7} = 3^1 = 3$
- $C = \frac{(5^4)^3}{5^{11}} = \frac{5^{4\times 3}}{5^{11}} = \frac{5^{12}}{5^{11}} = 5^{12-11} = 5^1 = 5$

4 – Racines carrées

Définition 1.18 – Soit a un réel positif ou nul. On appelle **racine carrée** de a, l'unique réel positif (ou nul) x solution de l'équation $x^2 = a$. On le note $x = \sqrt{a}$.

Proposition 1.19

Soient a et b deux réels **positifs**, on a

$$\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}, \qquad \sqrt{a^2} = a \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ si } b \neq 0.$$

ATTENTION ! On veillera à retenir qu'en général,

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Par exemple, si on choisit $a = 9$ et $b = 16$, on a

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ mais } \sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7.$$

Remarque 1.20 – Il n'est pas inutile de remarquer que les règles de calcul pour la racine carrée et les puissances sont analogues pour la multiplication et la division :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \text{vs} \quad (ab)^n = a^n b^n \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{vs} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

II – Calcul littéral

1 – Règles de priorité

Méthode 1.21 – Règles de priorité

Afin de mener à bien des calculs, il faut savoir dans quel ordre effectuer les différentes opérations. Pour cela, il est indispensable de parfaitement maîtriser les règles de priorité. Celles-ci sont rappelées ci-dessous.

1. On effectue d'abord les calculs des expressions entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus à l'intérieur.
2. On effectue les puissances AVANT les multiplications, les divisions, les additions et les soustractions.
3. On effectue d'abord les multiplications et les divisions AVANT les additions et les soustractions.
4. Enfin, on effectue les additions et les soustractions.

Exemple 1.22 – Calculer les nombres suivants.

- $A = 5-4\times3+5\times(3-6)$

  $= 5-12+5\times(-3)$

  $= 5-12-15 = -22$

- $B = \dfrac{2\times(4-2)}{3^2\times2^2}$

  $= \dfrac{2\times2}{9\times4}$

  $= \dfrac{\cancel{4}}{9\times\cancel{4}} = \dfrac{1}{9}$

ATTENTION ! Il ne faut surtout pas confondre $(-5)^2$ et -5^2.
D'un côté, on a $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$ et de l'autre $-5^2 = -(5 \times 5) = -25$.

2 – Développement

Définition 1.23 – **Développer** une expression consiste à transformer un produit en une somme.

Proposition 1.24 – Règle de distributivité

Soient a, b, c, d et k des réels. On a

1. $k(a+b) = ka + kb$,
2. $k(a-b) = ka - kb$,
3. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

Exemple 1.25 – Développer les expressions suivantes.

- $A = (x-4)(-2x+3)$
  $= -2x^2 + 3x + 8x - 12$
  $= -2x^2 + 11x - 12$
- $B = (x-4)(2x-1)(x^2-5x+6)$
  $= (2x^2 - x - 8x + 4)(x^2 - 5x + 6)$
  $= (2x^2 - 9x + 4)(x^2 - 5x + 6)$
  $= 2x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 9x^3 + 45x^2 - 54x + 4x^2 - 20x + 24$
  $= 2x^4 - 19x^3 + 61x^2 - 74x + 24$
- $C = 4x(x-3) + (x-1)(x-4)$
  $= x^2 - 12x + x^2 - 4x - x + 4$
  $= 5x^2 - 17x + 4$

3 – Factorisation

Définition 1.26 – **Factoriser** une expression consiste à transformer une somme en produit.

Les règles utiles à la factorisation sont les mêmes que celles utilisées pour développer une expression, cette fois écrites dans l'autre sens.

1. $ka + kb = k(a+b)$,
2. $ka - kb = k(a-b)$.

Factoriser consiste donc à identifier le facteur commun aux différents termes d'une somme (ici, k) et à regrouper entre parenthèses les facteurs complémentaires associés (ici, a et b).

Remarque 1.27 – "Développer" et "factoriser" sont des transformations inverses l'une de l'autre.

Méthode 1.28 – Factoriser une expression

Pour mener à bien une factorisation, il faut

1. identifier le facteur commun,
2. identifier les facteurs complémentaires,
3. identifier les signes à placer entre les facteurs complémentaires.

Exemple 1.29 – Factoriser les expressions suivantes.

- $A = 8x + 4$
  $= 4 \times 2x + 4 \times 1$
  $= 4(2x + 1)$
- $B = (x-4)(2x-1) + (x-4)$
  $= (x-4) \times (2x-1) + (x-4) \times 1$
  $= (x-4)(2x-1+1)$
  $= 2x(x-4)$
- $C = (x-2)^2 + 3(x-2) + (2x-3)(x-2)$
  $= (x-2)(x-2) + (2x-3)(x-2)$
  $= (x-2)(x-2+2x-3)$
  $= (x-2)(3x-5)$

4 – Identités remarquables

Proposition 1.30 – Identités remarquables

Soient a et b deux réels. On a

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Démonstration.

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
3. $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.

□

Remarque 1.31 – Ces trois identités remarquables (à connaître parfaitement) permettent de développer ou de factoriser rapidement des expressions comportant des carrés.

Exemple 1.32 – Développer les expressions suivantes.

- $A = (8x+4)^2$
  $= (8x)^2 + 2 \times 8x \times 4 + 4^2$
  $= 64x^2 + 64x + 16$
- $B = (2x-1)^2$
  $= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2$
  $= 4x^2 - 4x + 1$

Exemple 1.33 – Factoriser les expressions suivantes.

- $A = 4x^2 + 4x + 1$
  $= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2$
  $= (2x+1)^2$
- $B = x^2 - 6x + 9$
  $= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$
  $= (x-3)^2$
- $C = 4x^2 - 9$
  $= (2x)^2 - 3^2$
  $= (2x-3)(2x+3)$

5 – Détection d'erreurs

Méthode 1.34 – Détection d'erreurs dans des calculs littéraux
Une façon de détecter des erreurs dans des calculs littéraux consiste à "tester" les différentes expressions pour une valeur numérique particulière.
On est alerté d'une erreur dès qu'il y a discordance entre les résultats obtenus.

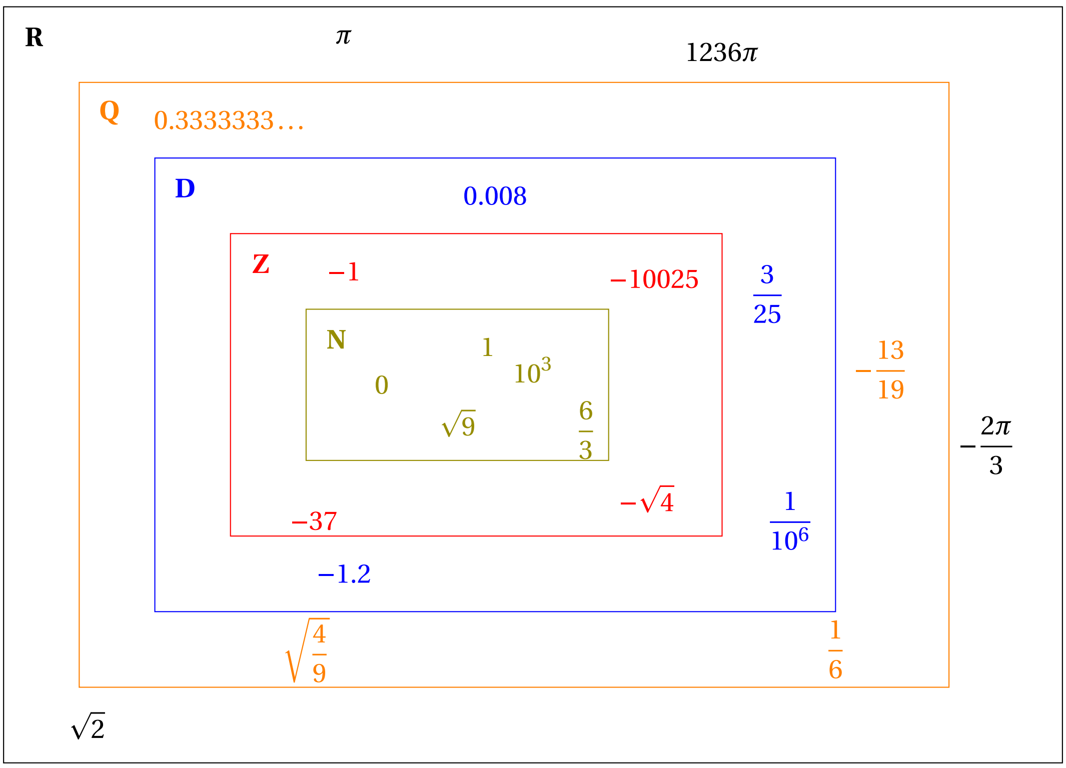
Exemple 1.35 – Détecter d'éventuelles erreurs dans les calculs de l'exemple précédent.

III – Ensembles usuels de nombres

1 – Notations

Rappelons les notations usuelles des principaux ensembles de nombres.

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, ...
- $\mathbf{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs : ensemble des entiers naturels et de leurs opposés.
- $\mathbf{D}$ désigne l'ensemble des nombres décimaux : ensemble des quotients de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec a un entier relatif et n un entier naturel.
- $\mathbf{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels : ensemble des quotients $\dfrac{p}{q}$ avec p un entier relatif et q un entier naturel non nul.
- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des réels : il contient, outre les rationnels, des nombres dits irrationnels tels que $\sqrt{2}, \pi, \ldots$

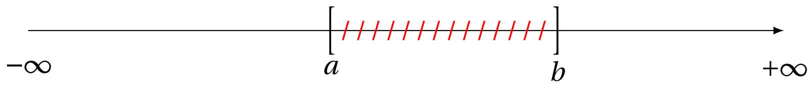


Remarque 1.36 – Ces ensembles privés de 0 sont respectivement notés $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{D}^*$, $\mathbf{Q}^*$ et $\mathbf{R}^*$.

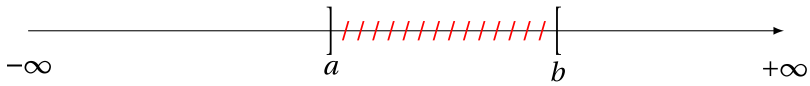
2 – Intervalles de R

Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \leq b$, on introduit différents ensembles de nombres appelés **intervalles** de **R**.

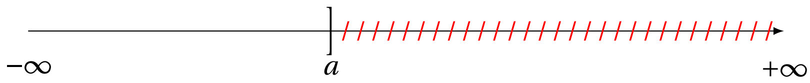
- les segments ou intervalles fermés : $[a;b] = \{x \in \mathbf{R}; a \leq x \leq b\}$;



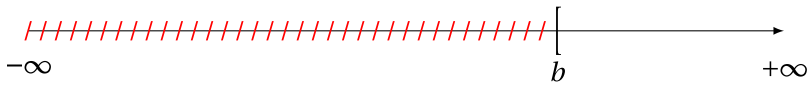
- intervalles ouverts : $]a;b[= \{x \in \mathbf{R}; a < x < b\}$



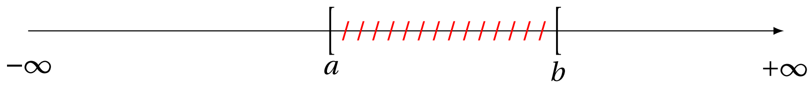
  $]a;+\infty[= \{x \in \mathbf{R}; x > a\}$



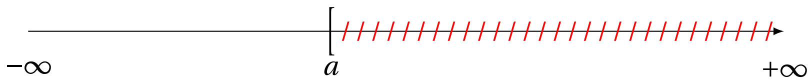
  et $]-\infty;b[= \{x \in \mathbf{R}; x < b\}$;



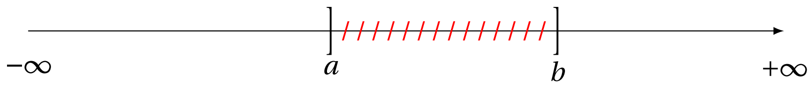
- intervalles semi-ouverts à droite : $[a;b[= \{x \in \mathbf{R}; a \leq x < b\}$



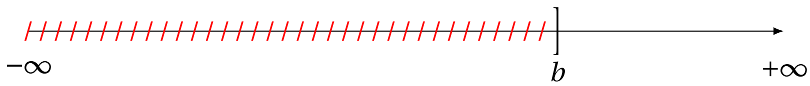
  et $[a;+\infty[= \{x \in \mathbf{R}; x \geq a\}$;



- intervalles semi-ouverts à gauche : $]a;b] = \{x \in \mathbf{R}; a < x \leq b\}$



  et $]-\infty;b] = \{x \in \mathbf{R}; x \leq b\}$



Remarque 1.37 – On peut aussi être amené à considérer des intervalles d'entiers. Pour tous $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $a \leq b$, on note $[\![a;b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b :

$$[\![a;b]\!] = \{n \in \mathbf{Z};\ a \leq n \leq b\}.$$

Par exemple, $[\![0;2]\!] = \{0;1;2\}$.