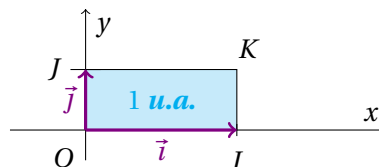


11 | Intégrales et primitives

I – Intégrale et aire

1 – Unité d'aire

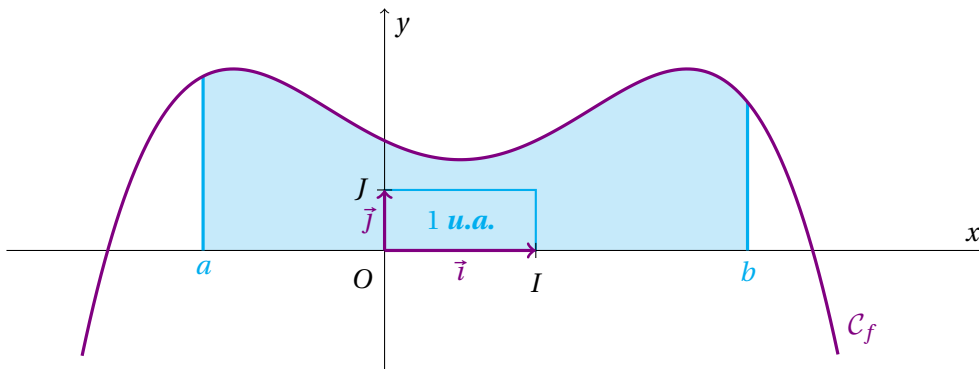
Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée $u.a.$, est l'aire du rectangle unitaire $OIKJ$ avec $I(1, 0)$, $J(0, 1)$ et $K(1, 1)$.



2 – Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 11.1 – Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$.



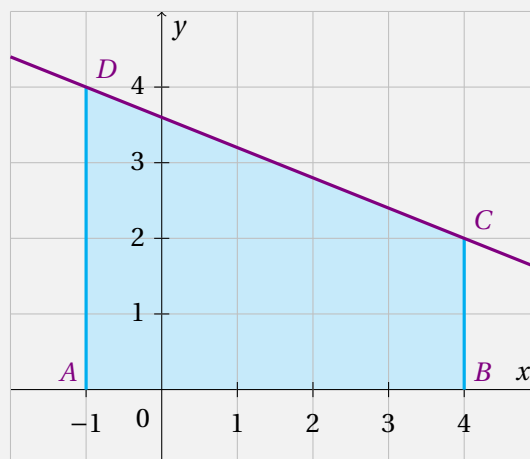
Remarque 11.2 –

- $\int_a^b f(x) dx$ se lit "intégrale de a à b de $f(x) dx$ ".
- Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.
- La variable x est dite "muette", elle n'intervient pas dans le résultat. C'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$.
- $\int_a^a f(x) dx = 0$, car le domaine \mathcal{D}_f est alors réduit à un segment.

Exemple 11.3 – Calculer $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x + 3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1, 4]$. L'intégrale $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

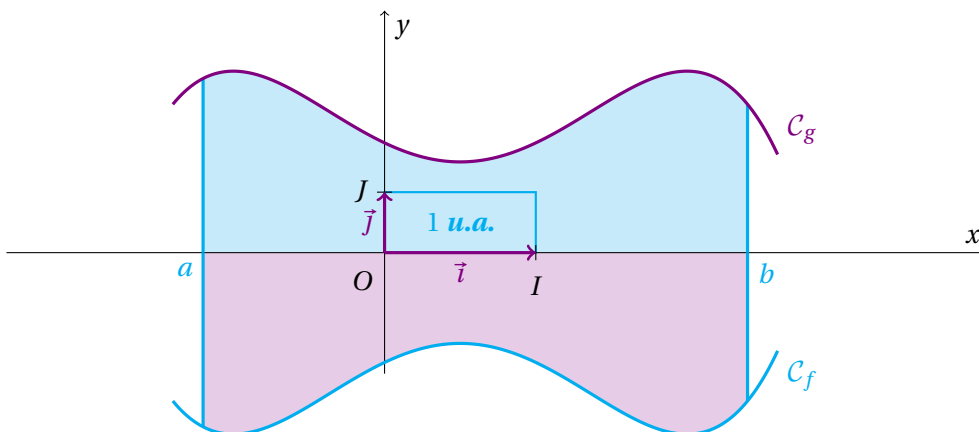
$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx &= \frac{(AD + BC) \times AB}{2} \\ &= \frac{(4 + 2) \times 5}{2} \\ &= 15. \end{aligned}$$



3 – Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a, b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a, b]$ par $g = -f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine \mathcal{D}_g compris entre la courbe \mathcal{C}_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Définition 11.4 – Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a, b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire \mathcal{A} , exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}.$$

4 – Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a, b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Théorème 11.5

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f .

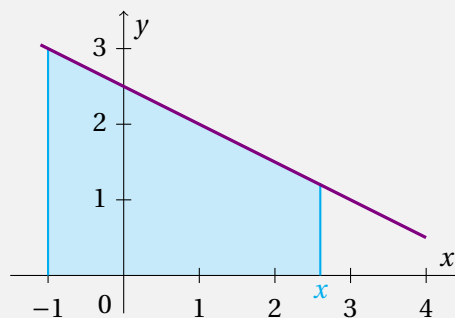
Exemple 11.6 – Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 4]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Si x est un réel de l'intervalle $[-1, 4]$, la fonction F définie par $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ est égale à l'aire du trapèze colorié. On a donc

$$F(x) = \frac{(3 + (-0,5x + 2,5)) \times (x + 1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}.$$

La fonction F est dérivable sur $[-1, 4]$ et

$$F'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x).$$



II – Primitives

1 – Définition

Définition 11.7 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que F est une **primitive de la fonction f sur I** si F est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 11.8 –

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur \mathbf{R} de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.

En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = 3x^2 + 6x = f(x)$.

- $G : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur \mathbf{R}_+^* de $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $G'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$.

- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H : x \mapsto x^2 + c$, $c \in \mathbf{R}$ sont des primitives sur \mathbf{R} de la fonction $f : x \mapsto 2x$.

En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x = f(x)$.

Remarque 11.9 –

- Comme F est dérivable sur I , la fonction F est en particulier continue sur I .
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f . C'est pourquoi on parle **d'une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f .

Théorème 11.10

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I .
- Si F est une primitive de f sur I , alors toute autre primitive de f sur I est la forme $F + c$ où c est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné. Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbf{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 11.11 – La fonction F définie sur \mathbf{R} par $F(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $F(1) = 0$.

En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = 2x = f(x)$ et $F(1) = 1^2 - 1 = 0$.

2– Primitives des fonctions usuelles

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants.

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I .

f est définie sur I par	une primitive F est donnée par	validité
$f(x) = a \quad (a \in \mathbf{R})$	$F(x) = ax$	sur \mathbf{R}
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbf{N})$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur \mathbf{R}
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	sur $] -\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n > 2 \text{ entier})$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $] -\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0, +\infty[$

Exemple 11.12 – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2$
 $F(x) = 3 \times \frac{1}{3} x^3 + C = x^3 + C$

2. $f(x) = x + \frac{3}{2}$
 $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + C$

3. $f(x) = (2x+1)(x-3)$
 Tout d'abord, développons $f(x) = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$.
 Ainsi une primitive est donnée par $F(x) = 2 \times \frac{1}{3} x^3 - 5 \times \frac{1}{2} x^2 - 3x + C = \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 - 3x + C$.

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
 $F(x) = -\frac{1}{x} + C$

7. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + 2x + 2\sqrt{x} + C$

5. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$
 $F(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{x} + C$

8. $f(x) = \frac{6x^2 - 8x + 2}{5}$
 $F(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{5} + C$

6. $f(x) = \frac{1}{x^5}$
 $F(x) = -\frac{1}{4x^4} + C$

9. $f(x) = -\frac{6}{x^4}$
 $F(x) = -\frac{6}{3x^3} = -\frac{2}{x^3} + C$

3– Primitive des fonctions composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Conditions	fonction f	une primitive F est donnée par
$n \in \mathbf{N}, n > 0$	$f = u' \times u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I et $n > 1$	$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$

Exemple 11.13 – Calculer des primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x+1)^2$

f semble être de la forme $u' u^2$ avec $u(x) = 2x+1$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$u'(x)u(x)^2 = 2(2x+1)^2 = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{1}{6}(2x+1)^3.$$

2. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x+1$. On a $u'(x) = 1$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x+1}.$$

3. $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$

f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1-3x$. On a $u'(x) = -3$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(1-3x)^2} = -3f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{-3} \times \left(-\frac{1}{u(x)} \right) = \frac{1}{-3} \times \left(-\frac{1}{1-3x} \right) = \frac{1}{3(1-3x)}.$$

4. $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$

f semble être de la forme $u' u^3$ avec $u(x) = x^2-x+1$. On a $u'(x) = 2x-1$ donc

$$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)(x^2-x+1)^3 = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2-x+1)^4}{4}.$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

f semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x+2$. On a $u'(x) = 1$ donc

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x+2}.$$

III – Intégrale d'une fonction continue

1 – Définition

Définition 11.14 – Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I . Soit F une primitive de f sur I . L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Remarque 11.15 –

- La différence $F(b) - F(a)$ se note $\left[F(x)\right]_a^b$. Ainsi

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 11.16 –

- $\int_1^3 3t^2 + 2t - 1 dt = \left[t^3 + t^2 - t\right]_1^3 = (3^3 + 3^2 - 3) - (1^3 + 1^2 - 1) = 33 - 1 = 32.$
- $\int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Proposition 11.17

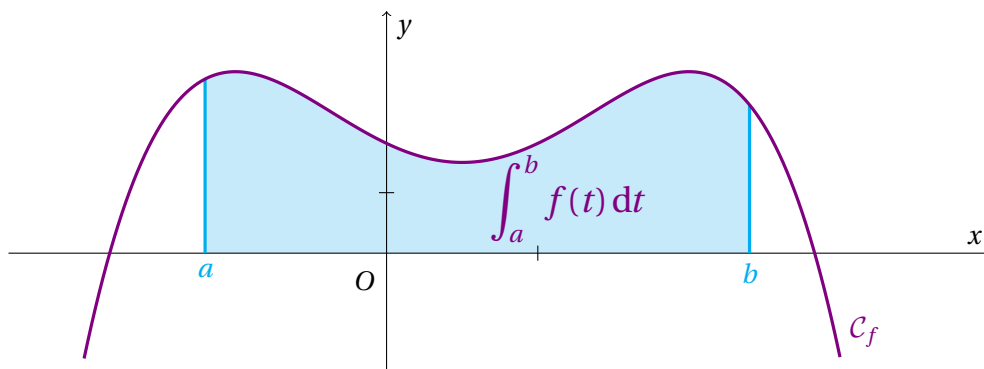
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I . Soit F une primitive de f sur I . On a alors

$$\int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt.$$

2– Premières propriétés

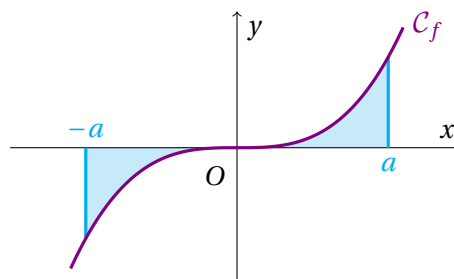
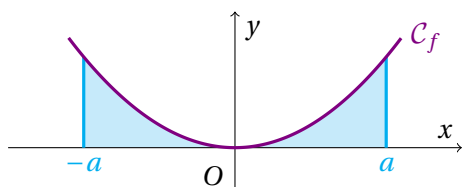
Proposition 11.18

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Soit C_f la courbe représentative de f . Alors $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire de la surface comprise entre C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Proposition 11.19

- Si f est continue et paire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
- Si f est continue et impaire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.



Exemple 11.20 –

- $\int_{-1}^1 t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt = 0$.
- $\int_{-1}^1 t^2 + |t| dt = 2 \int_0^1 t^2 + |t| dt = 2 \int_0^1 t^2 + t dt = 2 \left[\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3}$.

Proposition 11.21 – Relation de Chasles

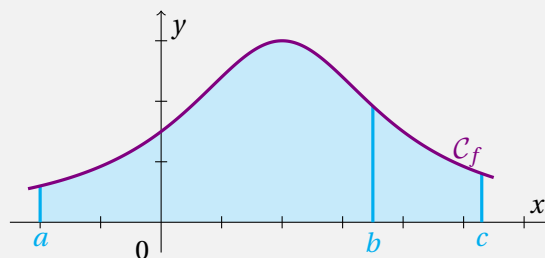
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I . Alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

Exemple 11.22 – Interprétation graphique

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

L'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = b$ et $x = c$.

**Proposition 11.23 – Linéarité de l'intégrale**

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors, pour tout réel λ , on a

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx.$$

Exemple 11.24 – Soit a un réel et f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Vérifier que $\int_{-1}^1 f(x) \, dx = 1$.

Par la relation de Chasles, on a

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx = \int_{-1}^0 f(x) \, dx + \int_0^1 f(x) \, dx.$$

Puis, par linéarité,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) \, dx &= \int_{-1}^0 \frac{1-a}{2} \, dx + \int_0^1 \frac{1+a}{2} \, dx = \frac{1-a}{2} \int_{-1}^0 1 \, dx + \frac{1+a}{2} \int_0^1 1 \, dx \\ &= \frac{1-a}{2} [x]_{-1}^0 + \frac{1+a}{2} [x]_0^1 = \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1. \end{aligned}$$