CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. (a) $M - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On obtient $(M-I)(M+3I) = 0$.

   (b) Le polynôme $P(X) = (X-1)(X+3) = X^2 + 2X - 3$ est donc annulateur de M.

   (c) Les valeurs propres possibles de M sont à chercher parmi les racines du polynôme P.
   Or $P(x) = 0 \iff x - 1 = 0$ ou $x + 3 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -3$.
   Donc les valeurs propres possibles de M sont 1 et -3.

2. (a) En développant, on a : $(M-I)(M+3I) = 0$, donc $M^2 + 2M - 3I = 0$, donc $M^2 = -2M + 3I$.

   (b) • $M^0 = I$ et $u_0 M + v_0 I = 0M + 1I = I$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $M^n = u_n M + v_n I$. Alors

   $$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (u_n M + v_n I) \times M = u_n M^2 + v_n M = u_n(-2M + 3I) + v_n M \\ &= (-2u_n + v_n)\, M + 3u_n I = u_{n+1} M + v_{n+1} I \end{aligned}$$

   • Par récurrence, on a donc bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ M^n = u_n M + v_n I$.

3. (a) Pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 0v_n \end{cases}$, donc la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ est associée au système linéaire proposé.

   (b) • Comme $A^0 = I$, $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, on a bien : $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors :

   $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \cdot A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   • Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c)

```
// Script 1
n=input('n= ')
A=[-2,1;3;0]
C=[0;1]
C=A^n*C
disp(C)
```

```
// Script 2
n=input('n= ')
A=[-2,1;3;0]
C=[0;1]
for k=1:n
        C=A*C
end
disp(C)
```

4. (a) $V_1 \neq 0$ et $AV_1 = V_1$ donc V_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
$V_2 \neq 0$ et $AV_2 = -3V_2$ donc V_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -3.

(b) $\det(Q) = 1 \times (-1) - 1 \times 3 = -4 \neq 0$, donc Q est bien inversible et on a alors :

$$Q^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $D = Q^{-1}AQ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(d)
- Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_2 = QQ^{-1} = QD^0Q^{-1}$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $A^n = QD^nQ^{-1}$.
Alors $A^{n+1} = A^n \cdot A = (QD^nQ^{-1})(QDQ^{-1}) = QD^{n+1}Q^{-1}$.

Donc par récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = QD^nQ^{-1}$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. D est une matrice diagonale donc D^n aussi et $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3\,(-3)^n & -(-3)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+3\,(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 3-3\,(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+3\,(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 3-3\,(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit donc que : $u_n = \frac{1}{4}\left[1-(-3)^n\right]$ et $v_n = \frac{1}{4}\left[3+(-3)^n\right]$.

5. (a) D'après 2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M^n &= u_nM + v_nI_3 \\ &= \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-3)^n\right]\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-3)^n\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(-3)^n & \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}(-3)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-3)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-3)^n & (-3)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-3)^n \\ \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}(-3)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-3)^n & \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Le code **Scilab** complété permet d'afficher la matrice M^n pour un entier naturel n choisi par l'utilisateur.

EXERCICE 2

1. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

   (b) Soit $x \geqslant 1$. On a : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$
   Or $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$.

   (c) Pour tout $x \geqslant 1$, on a : $1 - \ln(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \leqslant 1 \Longleftrightarrow x \leqslant e$.
   Pour tout $x \geqslant 1$, on a donc :
   $$1 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1, e] \qquad \text{et} \qquad 1 - \ln(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [e, +\infty[$$
   On en déduit, en utilisant 1.(b), que f est croissante sur l'intervalle $[1, e]$ et que f est décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$.

2. (a) $\forall x \in [1, +\infty[\,,\ f''(x) = \dfrac{\frac{-1}{x} \times x^2 - 2x(1 - \ln(x))}{x^4} = \dfrac{-3 + 2\ln(x)}{x^3}$

   (b) Pour $x \geqslant 1$, $x^3 > 0$ donc $f''(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow -3 + 2\ln(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \geqslant 3/2 \Longleftrightarrow x \geqslant e^{3/2}$.
   On en déduit que f est concave sur $\left[1, e^{3/2}\right]$ et que f est convexe sur $\left[e^{3/2}, +\infty\right[$

   (c) f'' s'annule en changeant de signe en $e^{3/2}$ donc la courbe
   $$\mathscr{C}_f$$
   admet un unique point d'inflexion au point d'abscisse $e^{3/2}$.

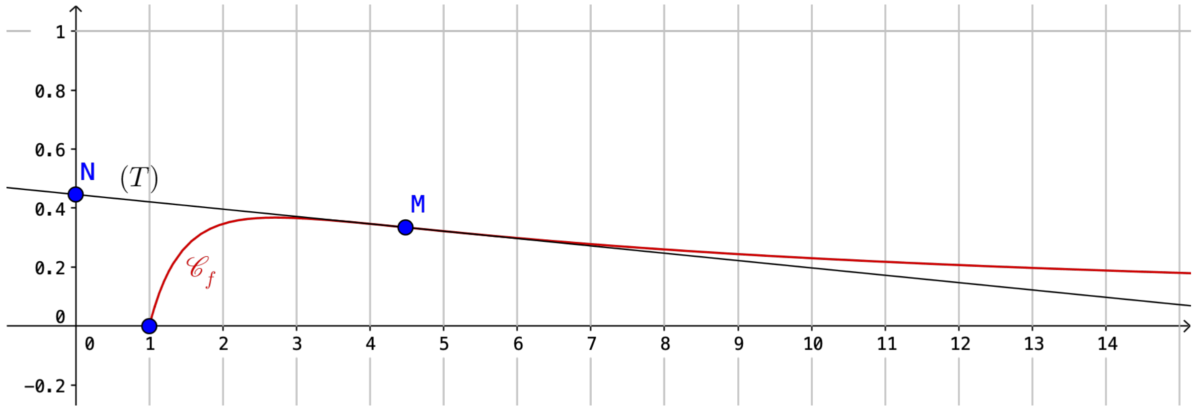
3. (a) On a $f\left(e^{3/2}\right) = \dfrac{\ln\left(e^{3/2}\right)}{e^{3/2}} = \dfrac{3}{2}e^{-3/2}$. Ainsi les coordonnées de M sont $\left(e^{3/2}, \dfrac{3}{2}e^{-3/2}\right)$

   (b) Un équation de la tangente en M est :
   $$y = f'\left(e^{3/2}\right)\left(x - e^{3/2}\right) + f\left(e^{3/2}\right).$$
   On calcule $f'\left(e^{3/2}\right) = \dfrac{1 - \frac{3}{2}}{e^3} = \dfrac{-1}{2e^3}$.
   Donc une équation de la tangente en M est : $y = \dfrac{-1}{2e^3}x + \dfrac{1}{2}e^{-3/2} + \dfrac{3}{2}e^{-3/2}$, soit :
   $$y = \frac{-1}{2e^3}x + 2e^{-3/2}.$$

   (c) La tangente (T) coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 2e^{-3/2})$.

   (d) La fonction f étant convexe sur $[e^{3/2}, +\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de (T) sur $[e^{3/2}, +\infty[$.
   La fonction f étant concave sur $[1, e^{3/2}]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous de (T) sur $[1, e^{3/2}]$.

4.



5. (a) Pour $A \geqslant 1$, on a $I(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^A \frac{1}{x} \times \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^A = \frac{(\ln(A))^2}{2}$

(b) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} I(A) = \lim_{A\to+\infty} \frac{(\ln(A))^2}{2} = +\infty$

On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

6. (a) Soit $A \geqslant 1$. On pose $\forall x \in [1, A]$, $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \text{ et } v(x) = \dfrac{-1}{x} \end{cases}$

Les fonctions u, u' et v, v' étant continues sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on peut intégrer par parties :

$$J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{-\ln(A)}{A} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^A = \frac{-\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.$$

(b) On sait que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} f(A) = 0$ d'après 1, donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} J(A) = 1$.

7. (a) $g(1) = \dfrac{\ln(1)}{1^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^+} g(x) = 0$, donc g est bien continue en 1.

De plus g est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ (fonction nulle) et $]1, +\infty[$ (quotient bien défini de fonctions continues avec le dénominateur qui ne s'annule jamais).

On en déduit que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) $*$ g est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, et g est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$

$*$ g étant nulle sur $]-\infty, 1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

De plus, d'après 6.(b), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

On en déduit, par la relation de Chasles, que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1 : g est une densité.

(c) Le code **Scilab** ci dessous prend en entrée un réel x et calcule $g(x)$.

```
function y=g(x)
  if x>=1 then
    y=log(x)/x^2
  else
    y=0
  end
endfunction
x=linspace(-4,8,100)
plot(x,g)
```

(d) Lors de l'exécution des lignes 8 et 9 du script précédent, on obtient le tracé de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[-4,8]$.

8. (a) Soit X une variable aléatoire de densité g et de fonction de répartition G.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t$

- Si $x < 1$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 0$
- Si $x \geqslant 1$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0\ \mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \frac{\ln(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t = 0 + J(x) = \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1.$

(b)
- $P\left(X > e^2\right) = 1 - P\left(X \leqslant e^2\right) = 1 - G\left(e^2\right) = \dfrac{1}{e^2} + \dfrac{\ln\left(e^2\right)}{e^2} = \dfrac{1}{e^2} + \dfrac{2}{e^2} = \dfrac{3}{e^2}.$
- $P_{(X>e)}\left(X > e^2\right) = \dfrac{P\left((X>e) \cap \left(X > e^2\right)\right)}{P(X>e)} = \dfrac{P\left(X > e^2\right)}{P(X>e)} = \dfrac{1 - G\left(e^2\right)}{1 - G(e)} = \dfrac{\frac{3}{e^2}}{\frac{1}{e} + \frac{1}{e}} = \dfrac{3}{e^2}\dfrac{e}{2} = \dfrac{3}{2e}$

(c) $E(X)$ existe ssi l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\ \mathrm{d}x$ converge.

Or pour $x \geqslant 1$, $xg(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et on a vu à la question 4.(b) que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x$ diverge.

On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\ \mathrm{d}x$ diverge, donc X n'admet pas d'espérance.

EXERCICE 3

Partie A

1. (a) Soit $n \geqslant 1$. X prenant des valeurs entières, $[X > n-1] = [X \geqslant n] = [X = n] \cup [X > n]$

   (b) Soit $n \geqslant 1$. Par incompatibilité, on a $P(X > n-1) = P(X = n) + P(X > n)$.
   Ainsi, $u_{n-1} = P(X = n) + u_n$, donc $u_{n-1} - u_n = P(X = n)$.

2. (a) Par incompatibilité,

$$P_{[X>n-1]}(X > n) + P_{[X>n-1]}(X = n) = P_{[X>n-1]}([X > n] \cup [X = n]) = P_{[X>n-1]}(X > n-1) = 1$$

   On a donc bien $P_{[X>n-1]}(X > n) = 1 - P_{[X>n-1]}(X = n)$.

   (b) Soit $n \geqslant 1$. On a donc $P_{[X>n-1]}(X = n) = \dfrac{2}{5}$.
   Or, $P_{[X>n-1]}(X = n) = \dfrac{P([X = n] \cap [X > n-1])}{P(X > n-1)} = \dfrac{P(X = n)}{P(X > n-1)}$.
   On a donc $\dfrac{P(X = n)}{P(X > n-1)} = \dfrac{2}{5}$, donc $P(X = n) = \dfrac{2}{5} P(X > n-1)$,
   soit $u_{n-1} - u_n = \dfrac{2}{5} u_{n-1}$, donc $u_n = \dfrac{3}{5} u_{n-1}$.

   (c) La suite (u_n) est donc géométrique de raison $3/5$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = u_{n-1} - u_n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} \left[1 - \dfrac{3}{5}\right]$, soit :

$$P(X = n) = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \frac{2}{5}$$

   (b) Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $2/5$

   (c) $E(X) = \dfrac{1}{\frac{2}{5}} = \dfrac{5}{2}$, et $V(X) = \dfrac{1 - \frac{2}{5}}{\frac{4}{25}} = \dfrac{15}{4}$.

Partie B

4. (a)

```
function X=geom()
        X = 1
        while rand()>2/5
                X = X+1
        end
endfunction
```

   (b)

```
function Z=simulZ()
        X1=geom()
        X2=geom()
        if X1>X2 then
                Z=X1
        else
                Z=X2
        end
endfunction
```

5. Pour $n \geqslant 1$, $P(X_1 \leqslant n) = 1 - P(X > n) = 1 - u_n = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

6. (a) L'appareil tombe en panne lorsque **les deux** composants tombent en panne; donc la durée de fonctionnement de l'appareil est inférieure ou égale à n si et seulement si la durée de fonctionnement de chacun de ces composants est inférieure ou égale à n, soit, pour tout n entier naturel non nul, $(Z \leqslant n) = (X_1 \leqslant n) \cap (X_2 \leqslant n)$

   (b) Pour $n \geqslant 1$, puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, on a :

$$P(Z \leqslant n) = P((X_1 \leqslant n) \cap (X_2 \leqslant n)) = P(X_1 \leqslant n) \times P(X_2 \leqslant n) = [P(X_1 \leqslant n)]^2 = [1 - (3/5)^n]^2$$

   (c) Pour $n \geqslant 1$, on a donc :

$$\begin{aligned}
P(Z = n) &= P(Z \leqslant n) - P(Z \leqslant n-1) \\
&= \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]^2 - \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right]^2 \\
&= 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} - 1 + 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{2(n-1)} \\
&= 2\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right] + \left(\frac{9}{25}\right)^n - \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\
&= 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\left(\frac{9}{25} - 1\right) \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

7. Les séries géométriques $\sum \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{9}{25}\right)^n$ convergent car $-1 < \frac{9}{25} < \frac{3}{5} < 1$.

   Par somme, la série $\sum P(Z = n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(Z = n) = \frac{4}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{1 - 3/5} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{1 - 9/25} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} - \frac{16}{25} \times \frac{25}{16} = 2 - 1 = 1$$

8. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$nP(Z = n) = 2n\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - n\frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} = 2nP(X_1 = n) - nP(Y = n)$$

   (b) X_1 et Y admettent chacune une espérance, qui valent respectivement $\frac{5}{2}$ et $\frac{25}{16}$.

   On en déduit par somme que la série $\sum n \times P(Z = n)$ converge, donc $E(Z)$ existe, et on a :

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Z = n) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X_1 = n) - \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y = n) = 2E(X) - E(Y) = 2 \times \frac{5}{2} - \frac{25}{16} = \frac{55}{16}$$