14 | Complément d'intégration

I – Primitive des fonctions logarithme & exponentielle

Les fonctions logarithme et exponentielle étant connues, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les lignes suivantes.

f **est définie sur** I **par**	**une primitive** F **est donnée par**
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\left(\lvert x\rvert\right)$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln\left(\lvert u\rvert\right)$

Remarque 14.1 – On pourra retenir en particulier que la primitive d'une fonction de la forme $f(x) = e^{ax}$ (avec $a \neq 0$) est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax}.$$

Exemple 14.2 – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{x}$
3. $f(x) = e^{3x} - e^{-x}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
5. $f(x) = xe^{x^2}$

II – Formule d'intégration par parties

Proposition 14.3

Soient u et v deux fonctions dérivables et soient a et b deux réels. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 14.4 –

- On peut résumer la formule d'intégration par parties de la manière suivante :

$$\int u'v = \Big[uv\Big] - \int uv'.$$

- La formule d'intégration par parties permet de calculer des intégrales lorsque l'on ne sait pas trouver de primitive de la fonction à intégrer. Il faut alors choisir les fonctions u et v adéquates.
  Pour des intégrales impliquant la fonction exponentielle, on choisira souvent la fonction exponentielle pour la fonction **à intégrer** (*i.e.*, u').
  Inversement, pour des intégrales impliquant la fonction logarithme, on choisira la fonction logarithme pour la fonction **à dériver** (*i.e.*, v).

Exemple 14.5 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$

2. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$

III – Intégrales et inégalités

On suppose dans cette partie que $a \leqslant b$.

Proposition 14.6 – Positivité de l'intégrale

- Si f est continue et positive sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Si f est continue et positive sur $[a;b]$ et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a;b]$.

Remarque 14.7 – En particulier, si f est continue, positive et non-identiquement nulle sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Proposition 14.8 – Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que $\forall\, t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t)$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 14.9 – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer u_1.

2. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a
$$0 \leqslant \frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2} \leqslant x^n.$$

3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.