ESCP 2022

Exercice 1 –

1. a) Je calcule A^2 puis A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+6+1 & 2-4+2 & 1+6+1 \\ 3-6+3 & 6+4+6 & 3-6+3 \\ 1+6+1 & 2-4+2 & 1+6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = A^2 \times A = 8 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 8 \times \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 & 1+1 \\ 6 & -4 & 6 \\ 1+1 & 2+2 & 1+1 \end{pmatrix} = 16 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré que $A^3 = \alpha A$ pour $\alpha = 16$.

b) Je suppose par l'absurde que la matrice A est inversible. Alors en multipliant l'équation précédente à droite par A^{-1}, j'obtiens que

$$A^3 \times A^{-1} = \alpha A \times A^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A^2 = \alpha I_3.$$

Mais A^2 n'est pas une matrice diagonale donc cette égalité n'est pas vérifiée. J'obtiens ainsi une contradiction et mon hypothèse de départ, à savoir que A est inversible, est erronée. Donc A n'est pas inversible.

2. a) Je décompose la puissance pour utiliser l'expression de A^3 :

$$A^5 = A^3 \times A^2 = \alpha A \times A^2 = \alpha A^3 = \alpha \times \alpha A = \alpha^2 A.$$

Ainsi j'ai bien montré que $A^5 = \alpha^2 A$.

b) Je raisonne par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_p$ la propriété : $A^{2p-1} = \alpha^{p-1} A$.

Initialisation : Pour $p = 1$,

$$A^{2\times 1-1} = A^1 = A \quad \text{et} \quad \alpha^{1-1} A = A.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $p \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_p$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{p+1}$ l'est aussi. Alors

$$A^{2(p+1)-1} = A^{2p+1} = A^{2p-1} \times A^2 = \alpha^{p-1} A \times A^2 = \alpha^{p-1} A^3 = \alpha^{p-1} \times \alpha A = \alpha^p A.$$

Donc $A^{2(p+1)-1} = \alpha^{p+1-1} A$. Finalement $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $p = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2p-1} = \alpha^{p-1} A.$$

c) Grâce au résultat de la question précédente, pour tout entier naturel p non nul,

$$A^{2p} = A^{2p-1} \times A = \alpha^{p-1} A \times A = \alpha^{p-1} A^2.$$

3. a) D'après la question **1.a)**, je connais un polynôme annulateur de la matrice A puisque

$$A^3 = 16A, \qquad \textit{i.e.} \quad A^3 - 16A = 0_3,$$

matrice nulle d'ordre 3. Ainsi le polynôme $X^3 - 16X$ est un polynôme annulateur de A et les valeurs propres possibles pour A sont parmi ses racines. Or

$$\begin{aligned} X^3 - 16X = 0 \quad &\iff \quad X\left(X^2 - 16\right) = 0 \quad \iff \quad X(X-4)(X+4) = 0 \\ &\iff \quad X = 0 \text{ ou } X - 4 = 0 \text{ ou } X + 4 = 0 \quad \iff \quad X = 0 \text{ ou } X = 4 \text{ ou } X = -4. \end{aligned}$$

Les trois valeurs propres possibles pour A sont donc -4, 0 et 4.

b) Je cherche à résoudre l'équation matricielle $AX = -4X$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
AX = -4X \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & -4x \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & -4y \\ x & + & 2y & + & z & = & -4z \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & - & 4z & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array} \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ 2y & = & -6z \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -3z \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2
\end{aligned}$$

En posant $z = 1$, j'obtiens que la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution de l'équation $AX = -4X$. Comme cette matrice colonne est non nulle, alors -4 est bien une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

c) Je cherche à résoudre l'équation matricielle $AX = 0$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x + 4z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \tfrac{1}{4} L_2$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2} L_2$$

En posant $z = 1$, j'obtiens que la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une solution de l'équation $AX = 0$. Comme cette matrice colonne est non nulle, alors 0 est bien une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Il s'agit du vecteur donné par l'énoncé, j'ai bien vérifié qu'il s'agit d'un vecteur propre.

d) Je calcule le produit entre A et la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2+1 \\ 3-2+3 \\ 1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi 4 est aussi une valeur propre de A, puisque la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nulle.

Il s'agit d'ailleurs d'un vecteur propre associé à la valeur propre 4.

e) Je calcule les produits AP et PD :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6+1 & 1-1 & 1+2+1 \\ 3+6+3 & 3-3 & 3-2+3 \\ 1-6+1 & 1-1 & 1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Je remarque que $AP = PD$.

f) Je calcule le produit PQ :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+3 & -2+2 & 1-4+3 \\ -3+3 & 6+2 & -3+3 \\ 1-4+3 & -2+2 & 1+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_3.$$

Je remarque que $PQ = 8I_3$, donc $P \times \left(\dfrac{1}{8}Q\right) = I_3$ ce qui signifie que P est inversible et que son inverse est donné par $P^{-1} = \dfrac{1}{8}Q$.

g) La matrice D est diagonale (par construction) et la matrice P est inversible d'après la question précédente. Alors l'égalité $AP = PD$ me permet d'écrire que

$$AP \times P^{-1} = PD \times P^{-1}, \qquad \textit{i.e.} \quad A = PDP^{-1}.$$

J'ai bien montré que la matrice A est diagonalisable.
Pour calculer la puissance n-ième, je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $A = PDP^{-1}$ d'après le début de la question.
Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Puis comme D est une matrice diagonale, je sais que

$$D^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

Finalement je calcule le produit PD^nP^{-1} :

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 4^n \\ -3\times(-4)^n & 0 & 4^n \\ (-4)^n & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

et

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{8} \times PD^n \times Q = \frac{1}{8} \times \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 4^n \\ -3\times(-4)^n & 0 & 4^n \\ (-4)^n & 0 & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (-4)^n + 3\times 4^n & -2\times(-4)^n + 2\times 4^n & (-4)^n + 3\times 4^n \\ -3\times(-4)^n + 3\times 4^n & 6\times(-4)^n + 2\times 4^n & -3\times(-4)^n + 3\times 4^n \\ (-4)^n + 3\times 4^n & -2\times(-4)^n + 2\times 4^n & (-4)^n + 3\times 4^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 –

1. Soit a un réel tel que $0 < a \leqslant 1$. La fonction f est définie en quatre morceaux :
   - sur $]-\infty, 0[$, elle est continue car constante,
   - sur $[0, a]$, elle est continue car polynomiale,
   - sur $]a, 2a]$, elle est continue car polynomiale,
   - sur $]2a, +\infty[$, elle est continue car constante.

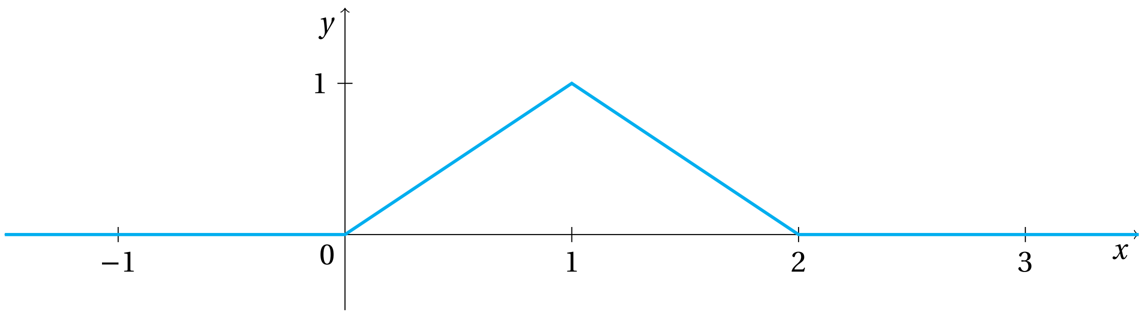
   Il me reste à étudier les éventuelles discontinuités en 0, a et $2a$.
   Pour cela, je compare les limites à gauche et à droite :
   - $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = f(0) = \dfrac{0}{a^2} = 0$
     Les limites sont égales donc la fonction f est continue en 0.
   - $\lim\limits_{t \to a^-} f(t) = f(a) = \dfrac{a}{a^2} = \dfrac{1}{a}$ et $\lim\limits_{t \to a^+} f(t) = \lim\limits_{t \to a^+} \dfrac{2a - t}{a^2} = \dfrac{a}{a^2} = \dfrac{1}{a}$
     Les limites sont égales donc la fonction f est continue en a.
   - $\lim\limits_{t \to 2a^-} f(t) = f(2a) = \dfrac{0}{a^2} = 0$ et $\lim\limits_{t \to 2a^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 2a^+} 0 = 0$
     Les limites sont égales donc la fonction f est continue en $2a$.

   Finalement, en recoupant tous ces cas, la fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

2. Pour le cas $a = 1$, la fonction est donnée par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 2 - t & \text{si } 1 < t \leqslant 2, \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}$$

   Il s'agit d'une ligne brisée dont les coins se situent aux points de coordonnées $(0,0)$, $(1,1)$ et $(2,0)$. Voici le graphe :



3. a) Je cherche à calculer les intégrales de f sur les intervalles $[0, a]$ et $]a, 2a]$.
   - Sur $[0, a]$, l'expression de f est donnée par $f(t) = \dfrac{t}{a^2}$.
     Une primitive de f est donnée par $F(t) = \dfrac{t^2}{2a^2}$. Alors l'intégrale vaut

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{t}{a^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2a^2}\right]_0^a = \frac{a^2}{2a^2} - \frac{0^2}{2a^2} = \frac{1}{2}.$$

- Sur $]a, 2a]$, l'expression de f est donnée par $f(t) = \dfrac{2a-t}{a^2}$.
  Une primitive de f est donnée par $F(t) = \dfrac{2at - \frac{1}{2}t^2}{a^2} = \dfrac{4at - t^2}{2a^2}$.
  Alors l'intégrale vaut

$$\int_a^{2a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{2a} \frac{2a-t}{a^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{4at-t^2}{2a^2}\right]_a^{2a}$$
$$= \frac{4a \times 2a - (2a)^2}{2a^2} - \frac{4a \times a - a^2}{2a^2} = \frac{4a^2 - 3a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}.$$

b) D'après la question **1.**, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est aussi positive sur $\mathbb{R}$ puisque selon les cas :

- pour $t \in]-\infty, 0[$, $\quad f(t) = 0 \geqslant 0$,
- pour $t \in [0, a]$, $\quad f(t) = \dfrac{t}{a^2} \geqslant 0$, $\quad$ car $t \geqslant 0$ et a^2 est un carré,
- pour $t \in]a, 2a]$, $\quad f(t) = \dfrac{2a-t}{a^2} \geqslant 0$, $\quad$ car $t \leqslant 2a \iff 2a - t \geqslant 0$ et a^2 est un carré,
- pour $t \in]2a, +\infty[$, $\quad f(t) = 0 \geqslant 0$.

Il ne reste plus qu'à étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$: aux extrémités, la fonction est nulle donc les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{2a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{2a}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 0. Alors par la relation de Chasles, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

D'après les trois points précédents, j'en déduis que la fonction f décrit bien une fonction de densité sur $\mathbb{R}$.

4. a) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or aux extrémités, la fonction est toujours nulle donc les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{2a}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{2a}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 0. Alors par la relation de Chasles, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, c'est-à-dire que la variable aléatoire X admet une espérance et

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} t f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a t f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} t f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2a}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \int_0^a t f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} t f(t)\,\mathrm{d}t + 0 = \int_0^a t f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Sur $[0, a]$, l'expression de f donne que $t f(t) = \dfrac{t^2}{a^2}$.
  Une primitive est donnée par $F(t) = \dfrac{t^3}{3a^2}$. $\quad$ Alors l'intégrale vaut

$$\int_0^a t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{t^2}{a^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3a^2}\right]_0^a = \frac{a^3}{3a^2} - \frac{0^3}{3a^2} = \frac{a}{3}.$$

- Sur $]a, 2a]$, l'expression de f donne que $tf(t) = \dfrac{2at - t^2}{a^2}$.
  Une primitive est donnée par $F(t) = \dfrac{2a\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3}{a^2} = \dfrac{3at^2 - t^3}{3a^2}$.
  Alors l'intégrale vaut

$$\int_a^{2a} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{2a} \frac{2at - t^2}{a^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3at^2 - t^3}{3a^2}\right]_a^{2a}$$
$$= \frac{3a \times (2a)^2 - (2a)^3}{3a^2} - \frac{3a \times a^2 - a^3}{3a^2} = \frac{4a^3 - 2a^3}{3a^2} = \frac{2a}{3}.$$

Et finalement l'espérance de X vaut

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = \frac{3a}{3} = a.$$

b) De la même manière, la variable aléatoire X^2 admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or $\int_{-\infty}^{0} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{2a}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc par la relation de Chasles, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, c'est-à-dire que la variable aléatoire X^2 admet une espérance et

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a t^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Sur $[0, a]$, l'expression de f donne que $t^2 f(t) = \dfrac{t^3}{a^2}$.
  Une primitive est donnée par $F(t) = \dfrac{t^4}{4a^2}$. Alors l'intégrale vaut

$$\int_0^a t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{t^3}{a^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4a^2}\right]_0^a = \frac{a^4}{4a^2} - \frac{0^4}{4a^2} = \frac{a^2}{4}.$$

- Sur $]a, 2a]$, l'expression de f donne que $t^2 f(t) = \dfrac{2at^2 - t^3}{a^2}$.
  Une primitive est donnée par $F(t) = \dfrac{2a\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4}{a^2} = \dfrac{8at^3 - 3t^4}{12a^2}$.
  Alors l'intégrale vaut

$$\int_a^{2a} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{2a} \frac{2at^2 - t^3}{a^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{8at^3 - 3t^4}{12a^2}\right]_a^{2a}$$
$$= \frac{8a \times (2a)^3 - 3 \times (2a)^4}{12a^2} - \frac{8a \times a^3 - 3a^4}{12a^2} = \frac{16a^4 - 5a^4}{12a^2} = \frac{11a^2}{12}.$$

Et finalement l'espérance de X^2 vaut

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a t^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4} + \frac{11a^2}{12} = \frac{3a^2}{12} + \frac{11a^2}{12} = \frac{7a^2}{6}.$$

c) Comme la variable aléatoire X^2 admet une espérance, alors la variable aléatoire X admet une variance et celle-ci est donnée par la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7a^2}{6} - a^2 = \frac{7a^2}{6} - \frac{6a^2}{6} = \frac{a^2}{6}.$$

5. a) Je calcule d'abord l'espérance de $\overline{X}_n$:
Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $E(X_k) = E(X) = a$, alors par linéarité

$$E\big(\overline{X}_n\big) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X) = \frac{1}{n}\times n\times a = a.$$

Je calcule désormais la variance $V\big(\overline{X}_n\big)$:
Comme les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors

$$V\big(\overline{X}_n\big) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X) = \frac{1}{n^2}\times n\times\frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{6n}.$$

b) Puisque $E\big(\overline{X}_n\big) = a$, alors la biais de $\overline{X}_n$ est donné par

$$b\big(\overline{X}_n\big) = E\big(\overline{X}_n\big) - a = a - a = 0.$$

Ainsi j'ai bien montré que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de a.
Puis comme l'estimateur T_n est sans biais, alors le risque quadratique de $\overline{X}_n$ est donné par la variance :

$$r\big(\overline{X}_n\big) = V\big(\overline{X}_n\big) = \frac{a^2}{6n}.$$

6. a) Comme l'estimateur $\overline{X}_n$ admet une variance, je peux appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\Big(\big|\overline{X}_n - E\big(\overline{X}_n\big)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{V\big(\overline{X}_n\big)}{\varepsilon^2} \qquad \textit{i.e.} \quad P\Big(\big|\overline{X}_n - a\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{a^2}{6n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{6n\varepsilon^2}.$$

Les valeurs de l'espérance et de la variance ont été calculées à la question précédente et la dernière inégalité provient du fait que comme $0 < a \leqslant 1$, alors $a^2 \leqslant 1$.

b) En passant à l'événement contraire, alors j'obtiens que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\Big(\big|\overline{X}_n - a\big| \leqslant \varepsilon\Big) \geqslant 1 - \frac{1}{6n\varepsilon^2}.$$

Puis en retirant la valeur absolue,

$$\big|\overline{X}_n - a\big| = \big|a - \overline{X}_n\big| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant a - \overline{X}_n \leqslant \varepsilon \iff \overline{X}_n - \varepsilon \leqslant a \leqslant \overline{X}_n + \varepsilon,$$

et j'ai bien montré que

$$P\Big(\overline{X}_n - \varepsilon \leqslant a \leqslant \overline{X}_n + \varepsilon\Big) \geqslant 1 - \frac{1}{6n\varepsilon^2}.$$

c) En appliquant le résultat précédent à $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{600}}$ et $n = 1000$, j'obtiens alors que

$$P\left(\overline{X}_{1000} - \frac{1}{\sqrt{600}} \leqslant a \leqslant \overline{X}_{1000} + \frac{1}{\sqrt{600}}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{6\times 1000\times\frac{1}{600}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Ainsi l'intervalle $\left[\overline{X}_{1000} - \dfrac{1}{\sqrt{600}}, \overline{X}_{1000} + \dfrac{1}{\sqrt{600}}\right]$ est un intervalle de confiance de a au niveau de confiance 90%.

Exercice 3 – Avant de démarrer, je fixe les notations pour les événements suivants :

- R : "la boule tirée est rouge",
- V : "la boule tirée est verte",
- U : "la boule tirée porte le numéro 1",
- D : "la boule tirée porte le numéro 2".

1. a) Je cherche $P(R \cap U)$:
   D'après l'énoncé, 20% des boules sont rouges et portent le numéro 1. Ainsi

$$P\big(R \cap U\big) = 0.2.$$

   b) Je cherche $P(D)$:
   D'après l'énoncé, $P(D) = P\big(\overline{R \cap U}\big)$. En effet, les boules qui ne sont pas parmi les 20% qui sont rouges et portent le numéro 1 portent toutes le numéro 2. Ainsi

$$P(D) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

   c) Je cherche $P(R)$:
   D'après l'énoncé, les événements U et D forment un système complet d'événements. Alors d'après la formule des probabilités totales,

$$P(R) = P\big(R \cap U\big) + P\big(R \cap D\big) = 0.2 + P(D) \times P_D(R) = 0.2 + 0.8 \times 0.1 = 0.2 + 0.08 = 0.28.$$

   En effet $P_D(R)$ est la probabilité pour une boule portant le numéro 2 d'être verte, qui est de 10% d'après l'énoncé.

2. a) La variable aléatoire G peut prendre trois valeurs selon le résultat du tirage.
   Le support de G est donné par $\{-1, 1, 2\}$ et les probabilités associées sont

$$P(G = -1) = P(V) = P(\overline{R}) = 1 - 0.28 = 1 - 0.72,$$

$$P(G = 1) = P\big(R \cap U\big) = 0.2 \quad \text{et} \quad P(G = 2) = P\big(R \cap D\big) = 0.08.$$

   Je récapitule la loi de la variable aléatoire discrète finie G sous la forme d'un tableau :

x	-1	1	2
$P(G = x)$	0.72	0.2	0.08

   b) Pour calculer l'espérance de G, j'utilise la définition $E(G) = \sum_{i=1}^{3} xP(G = x)$:

$$E(G) = -1 \times 0.72 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.08 = -0.72 + 0.2 + 0.16 = -0.36.$$

   Pour calculer la variance de G, j'utilise la formule de König-Huygens :

$$V(G) = E\big(G^2\big) - E(G)^2.$$

   Je calcule l'espérance de G^2 grâce au théorème de transfert :

$$E\big(G^2\big) = (-1)^2 \times 0.72 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.08 = 0.72 + 0.2 + 0.32 = 1.24.$$

   Alors la variance de G vaut

$$V(G) = E\big(G^2\big) - E(G)^2 = 1.24 - (-0.36)^2 = 1.24 - 0.1296 = 1.1104.$$

3. a) Il s'agit de n répétitions identiques et indépendantes d'un même tirage.
   - La variable aléatoire R_n compte le nombre de succès R : "la boule tirée est rouge", de probabilité $p_R = 0.28$. Donc R_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p_R = 0.28$.
   - La variable aléatoire V_n compte le nombre de succès V : "la boule tirée est verte", de probabilité $p_V = 0.72$. Donc V_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p_V = 0.72$.
   - La variable aléatoire U_n compte le nombre de succès U : "la boule tirée porte le numéro 1", de probabilité $p_U = 0.2$.
     Donc U_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p_U = 0.2$.
   - La variable aléatoire D_n compte le nombre de succès D : "la boule tirée porte le numéro 2", de probabilité $p_D = 0.8$.
     Donc D_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p_D = 0.8$.

   Comme ces quatre lois sont des lois binomiales, alors leurs espérances sont données par

$$E(R_n) = np_R = 0.28n, \qquad E(V_n) = np_V = 0.72n,$$

$$E(U_n) = np_U = 0.2n \quad \text{et} \quad E(D_n) = np_D = 0.8n.$$

   b) Les variables R_n et V_n comptent respectivement le nombre de boules rouges et de boules vertes parmi les n tirages. Comme il n'y a pas d'autres couleurs possibles, alors

$$R_n + V_n = n.$$

   Puisque $V_n = n - R_n$, les variables aléatoires R_n et V_n ne sont pas indépendantes et leur covariance est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(R_n, V_n) &= \mathrm{Cov}(R_n, n - R_n) = \mathrm{Cov}(R_n, n) - \mathrm{Cov}(R_n, R_n) = 0 - V(R_n)\\ &= np_R(1-p_R) = np_Rp_V = n \times 0.28 \times 0.72 = 0.2016n.\end{aligned}$$

   c) De la même manière, puisque chaque boule porte le numéro 1 ou le numéro 2, alors les variables U_n et D_n vérifient que

$$U_n + D_n = n.$$

   Puisque $D_n = n - U_n$, les variables aléatoires U_n et D_n ne sont pas indépendantes et leur covariance est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U_n, D_n) &= \mathrm{Cov}(U_n, n - U_n) = \mathrm{Cov}(U_n, n) - \mathrm{Cov}(U_n, U_n) = 0 - V(U_n)\\ &= np_U(1-p_U) = np_Up_D = n \times 0.2 \times 0.8 = 0.16n.\end{aligned}$$

4. a) Il suffit de compter le nombre de boules par gain parmi les n boules tirées :
   - Les boules rapportant un euro sont celles portant le numéro 1 : il y en a U_n.
   - Les boules rapportant deux euros sont celles portant le numéro 2 qui ne sont pas vertes : il y en a $D_n - V_n$.
   - Les boules faisant perdre un euro sont les boules vertes : il y en a V_n.

   Ainsi à l'issue des n tirages, la variable aléatoire G_n est donnée par

$$G_n = 1 \times U_n + 2 \times (D_n - V_n) - 1 \times V_n = U_n + 2D_n - 2V_n - V_n = U_n + 2D_n - 3V_n.$$

   b) Par linéarité de l'espérance,

$$E(G_n) = E(U_n) + 2E(D_n) - 3E(V_n) = 0.2n + 2 \times 0.8n - 3 \times 0.72n = (0.2 + 1.6 - 2.16)n = -0.36n.$$

Exercice 4 –

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : "a_n et b_n sont bien définis et positifs".

   Initialisation : Pour $n = 0$, $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ sont bien définis et positifs.
   Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

   - $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ est bien défini et positif puisque par hypothèse de récurrence, $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$ donc $a_n + b_n \geqslant 0$,
   - $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$ est aussi bien défini puisque $a_{n+1} \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$.
     Et comme c'est une racine carrée, $b_{n+1} \geqslant 0$.

   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, les réels a_n et b_n sont bien définis et positifs.

2. Voici le script complété.

```
n=input("entrez une valeur pour n")
a=1
b=2
for k=1:n
  a=(a+b)/2
  b=sqrt(a*b)
end
disp(a,"a=")
disp(b,"b=")
```

3. En utilisant les formules de récurrence et les valeurs de l'énoncé,

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{\frac{3}{2} \times 2} = \sqrt{3}.$$

4. a) Grâce aux formules de a_{n+1} et b_{n+1} et en utilisant l'expression conjuguée, alors

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} - a_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1}} \times \left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}\right) \\
&= \sqrt{a_{n+1}} \times \left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}\right) \times \frac{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \times \left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}\right) \times \left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \times \left(b_n - a_{n+1}\right) = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \times \left(b_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \times \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)} \times \left(b_n - a_n\right)
\end{aligned}$$

   b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $a_n < b_n$.

Initialisation : Pour $n=0$, $a_0=1$ et $b_0=2$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)}\times\left(b_n-a_n\right)$$

et tous les facteurs impliqués sont positifs, comme racines carrées et par hypothèse de récurrence, car $a_n<b_n \iff b_n-a_n>0$. Ainsi $b_{n+1}-a_{n+1}>0$, *i.e.* $a_{n+1}<b_{n+1}$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n=0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n<b_n.$$

c) Pour obtenir les variations de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, je calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques. Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n=\frac{b_n-a_n}{2}>0,$$

puisque d'après la question précédente, $a_n<b_n$, *i.e.* $b_n-a_n>0$. J'ai ainsi montré que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}-a_n>0$, *i.e.* $a_{n+1}>a_n$. Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

d) Par définition de b_{n+1},

$$b_{n+1}^2=a_{n+1}b_n \quad\iff\quad b_n=\frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}.$$

Alors comme à la question précédente, je calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques. Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$b_{n+1}-b_n=b_{n+1}-\frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}=\frac{b_{n+1}a_{n+1}-b_{n+1}^2}{a_{n+1}}=\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\left(a_{n+1}-b_{n+1}\right)<0,$$

puisque d'après la question précédente, $a_{n+1}<b_{n+1}$, *i.e.* $a_{n+1}-b_{n+1}<0$.
J'ai ainsi montré que $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_{n+1}-b_n<0$, *i.e.* $a_{n+1}<a_n$.
Donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

5. a) Par positivité de la racine carrée, comme les a_n et les b_n ne sont pas nuls, je sais que $\sqrt{b_n}>0$. Alors $\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}>\sqrt{a_{n+1}}$ et $\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}}<1$. Puis en injectant cette inéquation dans l'expression de la question **4.a)**, j'obtiens directement que

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)}\times\left(b_n-a_n\right)<\frac{1}{2}\times\left(b_n-a_n\right).$$

Pour l'encadrement, je raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $0<b_n-a_n\leqslant\dfrac{1}{2^n}$.

Initialisation : Pour $n=0$, $b_0-a_0=2-1=1$ et $0<1\leqslant\dfrac{1}{2^0}=1$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors $b_{n+1}-a_{n+1}$ est strictement positif d'après la question **4.b)** et

$$0<b_{n+1}-a_{n+1}<\frac{1}{2}\times\left(b_n-a_n\right)<\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

b) Je sais que pour tout entier naturel n, $\quad a_n < b_n$ et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Donc en particulier $b_n < b_0$ et ainsi

$$a_n < b_n < b_0.$$

De la même manière, en utilisant cette fois la stricte croissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $a_n > a_0$ et ainsi

$$a_0 < a_n < b_n.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier naturel n,

$$a_n < b_0 \quad \text{et} \quad a_0 < b_n.$$

c) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée par b_0 d'après la question **5.b)**.
Par théorème de la limite monotone, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ_a.
De la même manière, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par a_0.
Par théorème de la limite monotone, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ_b.
Pour montrer que ces deux limites sont égales, j'étudie la suite $\big(b_n - a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
Par convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cette suite converge et

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \ell_b - \ell_a.$$

Or je connais un encadrement de cette suite par la question **5.a)**
et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, alors par le théorème des gendarmes, j'en déduis que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0.$$

Enfin par unicité de la limite,

$$\ell_b - \ell_a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell_a = \ell_b,$$

ce qui signifie que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ.

d) Par stricte croissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors pour tout entier naturel n, $\quad a_n \leqslant \ell$.
De même, par stricte décroissance de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors pour tout entier n, $\quad \ell \leqslant b_n$.
Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier naturel n,

$$a_n \leqslant \ell \leqslant b_n.$$

6. Je procède par élimination. Je sais que $1 = a_0 \leqslant \ell \leqslant b_0 = 2$. Donc

- $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi} \approx \dfrac{1.73}{3.14} < 1$ ne peut pas être la limite ℓ.
- $\dfrac{3}{\pi} \approx \dfrac{3}{3.14} < 1$ ne peut pas être la limite ℓ.
- $3 > 2$ ne peut pas être la limite ℓ.

Ainsi la limite commune aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\ell = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

7. a) Voici le script complété.

```
n=0
a=1
b=2
while b-a>10∧-3
  a=(a+b)/2
  b=sqrt(a*b)
  n=n+1
end
disp(n)
```

b) Ce script affiche le plus petit entier n tel que

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-3} \quad \Longleftrightarrow \quad 2^n > 10^3 = 1000.$$

Il s'agit de $n = 10$ puisque

$$2^{10} = 1024 > 1000 \quad \text{et} \quad 2^9 = 512 < 1000.$$

8. a) Si le script renvoie 5, alors $b_5 - a_5 \leqslant 10^{-3}$ (et $b_4 - a_4 > 10^{-3}$ mais c'est ici inutile).
En particulier, puisque $a_5 \leqslant \ell \leqslant b_5$, alors a_5 et b_5 sont deux valeurs approchées de ℓ à moins de 10^{-3} près : l'une par valeur inférieure, a_5, l'autre par valeur supérieure, b_5.

b) D'après la question **5.a)**, je sais que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 < b_n - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
En particulier, pour $n = 10$,

$$0 < b_{10} - a_{10} \leqslant \frac{1}{2^{10}} < 10^{-3}.$$

Du fait que le script de la question **7.b)** me renvoie 10, je peux déduire que le script de la question **7.a)** me renverra forcément un entier plus petit ou égal à 10.
En effet, pour $n = 10$, le critère d'arrêt est vérifié. Cependant, même si pour $n = 9$, $\dfrac{1}{2^9} > 10^{-3}$, je peux quand même avoir que $0 < b_n - a_n \leqslant 10^{-3}$. Les deux valeurs renvoyées par les scripts ne se contredisent ainsi pas puisqu'elles vérifient bien que $5 \leqslant 10$.