

## EXERCICES — CHAPITRE 9

**Exercice 1** – On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à une valeur propre à préciser.
2. Montrer que  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à une valeur propre à préciser.
3. Montrer que  $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à une valeur propre à préciser.

**Exercice 2** – On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $2A^3 - 3A^2 + A$ .
2. En déduire les valeurs propres possibles de  $A$ .
3. Déterminer lesquelles sont effectivement valeurs propres et trouver des vecteurs propres associés.

**Exercice 3** – On donne  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $B^2 - 2B + 2I$  puis en déduire que la matrice  $B$  n'a aucune valeur propre.
2. En déduire également que  $B$  est inversible et donner son inverse en fonction de  $B$  et  $I$ .

**Exercice 4** – On considère la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Donner un polynôme annulateur de  $B$ .
2. En déduire que  $B$  n'admet pas de valeur propre.

**Exercice 5** – On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier l'égalité  $M^2 - M - 6I = 0$  et en déduire les valeurs propres possibles de  $M$ .

2. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de  $M$  et donner un vecteur propre pour chacune d'elle.

3. On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible.

4. On pose  $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Vérifier l'égalité  $MP = PD$ .  
Que peut-on en déduire?

**Exercice 6** – On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que l'on a  $A(A - I)(A - 2I) = O_3$  et en déduire les valeurs propres possibles de  $A$ .
2. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de  $A$  et donner un vecteur propre pour chacune d'elle.
3. En déduire une matrice  $P$  inversible telle que  $AP = PD$  où  $D$  est une matrice diagonale que l'on précisera.

**Exercice 7** – On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que le polynôme  $X^3 - 3X^2 + 4$  est annulateur de  $A$  et en déduire les valeurs propres possibles de  $A$ .

2. Vérifier que  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  et préciser la valeur propre associée,

$V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  et préciser la valeur propre associée et  $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  et préciser la valeur propre associée.

3. On note  $P$  la matrice dont la première colonne est  $V_1$ , la deuxième est  $V_2$  et la dernière est  $V_3$ . Calculer  $P^3 - 3P^2 + 5P - 3I_3$ . En déduire que  $P$  est inversible et donner une expression de  $P^{-1}$  en fonction de  $I_3$ ,  $P$  et  $P^2$ .

4. Vérifier l'égalité  $AP = PD$  où  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

5. En déduire que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 8** – On considère les suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$$

On note  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer une matrice  $A$  telle que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$ .
3. Vérifier que le polynôme  $P = (X - 1)(X + 1)(X - 3)$  est annulateur de  $A$ .
4. Montrer que la matrice  $A$  est diagonalisable et la diagonaliser.
5. En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ , une expression explicite de  $A^n$ .
6. En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ , une expression explicite de  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$ .

**Exercice 9** – On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. (a) Calculer  $A^2$  et  $8A - 15I$  puis déterminer un polynôme annulateur de  $A$ . En déduire les valeurs propres possibles de  $A$ .  
(b) Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de  $A$  et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
2. (a) Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible et donner son inverse.  
(b) Soit  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $AP = PD$ .
3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $A^n = PD^n P^{-1}$ , puis donner l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$  pour tout entier  $n$ .
4. Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies par  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$$

- (a) On note  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ . Exprimer  $X_{n+1}$  en fonction de  $A$  et  $X_n$ .
- (b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $X_n = A^n X_0$ , puis donner l'expression de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 10** – Soit la suite  $(u_n)$  définie par ses trois premiers termes  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 1$  et  $u_2 = -2$  et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = 6u_n - 11u_{n+1} + 6u_{n+2}.$$

On pose  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $MX_n = X_{n+1}$ . En déduire l'expression de  $X_n$  en fonction des matrices  $M$ ,  $X_0$  et de l'entier naturel  $n$ .
2. (a) Calculer  $(M - I)(M - 2I)(M - 3I)$  puis en déduire les valeurs propres possibles de  $M$ .  
(b) Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de  $M$  et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
3. (a) Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $PQ$ .  
En déduire que  $P$  est inversible et donner son inverse  $P^{-1}$ .  
(b) Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $MP = PD$ .  
(c) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable?
4. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $M^n = PD^n P^{-1}$ .  
(b) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , les coefficients de la première ligne de  $M^n$ . Donner alors l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .