DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 (Extrait de ESC) – On considère les matrices suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ et QP.
2. Vérifier que $QAP = L$. En déduire que $A = PLQ$.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $A^n = PL^nQ$.
   (b) Soit $J = L - I$. Calculer J^2 puis J^3.
   (c) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a
   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$
   (d) En déduire, pour $n \geq 2$, les neufs coefficients de L^n.
   (e) Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \geq 2$, on a
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 2$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,
   $$u_{n+1} = u_n, \qquad v_{n+1} = v_n + 2w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = 2u_n + w_n.$$
   (a) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$? Donner u_n pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a
   $$v_n = 2n(n+1) \quad \text{et} \quad w_n = 2(n+1).$$

Exercice 2 (Extrait de ESC) – On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée. On lance le dé et on observe son résultat.

- Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois,
- Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILE apparus au cours de cette expérience.

1. (a) Justifier que X suit une loi uniforme que l'on précisera en détail.
   (b) Donner l'expérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

2. Montrer que $P(Y=2) = P([Y=2] \cap [X=6]) = \dfrac{1}{24}$.

3. (a) Montrer que pour $k \in \{1;2;3;4;5\}$, $P_{[X=k]}(Y=0) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Que vaut $P_{[X=6]}(Y=0)$? En déduire en utilisant la formule des probabilités totales que $P(Y=0) = \dfrac{11}{24}$.

   (c) Donner finalement la loi de la variable Y et calculer son espérance.

4. (a) Recopier et compléter les cases du tableau suivant afin qu'il fournisse la loi du couple (X,Y) (aucune justification supplémentaire n'est demandée).

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$
$Y=0$						
$Y=1$						
$Y=2$						

   (b) Calculer alors la covariance de X et Y.

Exercice 3 (Extrait de ECRICOME) – Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x).$$

1. Étudier le sens de variation de g et vérifier que g admet un minimum sur $]0;+\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.

2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$. (*Indication numérique :* $\ln(2) \simeq 0,7$.)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe réprésentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

3. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

6. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$. On montrera en particulier que $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}$ en un point A dont on calculera les coordonnées.

7. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variations de f.

8. (a) Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, on a

$$f''(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}.$$

   (b) Étudier la convexité de f. La courbe $\mathscr{C}$ possède-t-elle des points d'inflexion ?

9. On donne

$$\frac{1}{e} \simeq 0,4, \qquad \sqrt{e} \simeq 1,6, \qquad f(\sqrt{e}) \simeq 1,3 \quad \text{et} \quad f'(\sqrt{e}) \simeq 0,1.$$

   Représenter la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ dans un même repère orthonormé.