

# DEVOIR MAISON 1

## Exercice 1 – BSB 2019 / Ex2

1. Pour calculer la limite en  $-\infty$ , j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1 \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

J'en déduis que la représentation graphique  $\mathcal{C}$  de  $f$  admet une asymptote horizontale, au voisinage de  $-\infty$ , d'équation  $y = 0$ .

2. (a) Je pars de l'expression  $\frac{1}{1+e^{-x}}$  et je multiplie numérateur et dénominateur par  $e^x$  pour obtenir l'expression de  $f(x)$  :

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1 \times e^x}{(1+e^{-x}) \times e^x} = \frac{e^x}{e^x + e^0} = \frac{e^x}{1+e^x} = f(x).$$

J'ai bien montré que  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ .

- (b) Grâce à cette nouvelle expression, je calcule la limite de  $f$  en  $+\infty$  :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1 + 0 = 1 \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

J'en déduis alors que la représentation graphique  $\mathcal{C}$  de  $f$  admet une seconde asymptote horizontale, au voisinage de  $+\infty$ , d'équation  $y = 1$ .

3. (a) La fonction  $f$  est de la forme  $f = \frac{u}{v}$ , avec  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = 1 + e^x$ .  
Puisque  $u'(x) = e^x$  et  $v'(x) = e^x$ , alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x \times (1 + e^x) - e^x \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

J'ai bien montré que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ .

- (b) Les variations de la fonction  $f$  s'obtiennent en étudiant le signe de  $f'(x)$ . Ici, le signe est immédiat puisque le dénominateur est un carré et le numérateur est une exponentielle. Ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) > 0$  et donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

D'où le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$

- (c) L'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  est donnée par la formule  $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$ . Ici  $a = 0$  donc l'équation devient

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

Or

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Donc l'équation devient

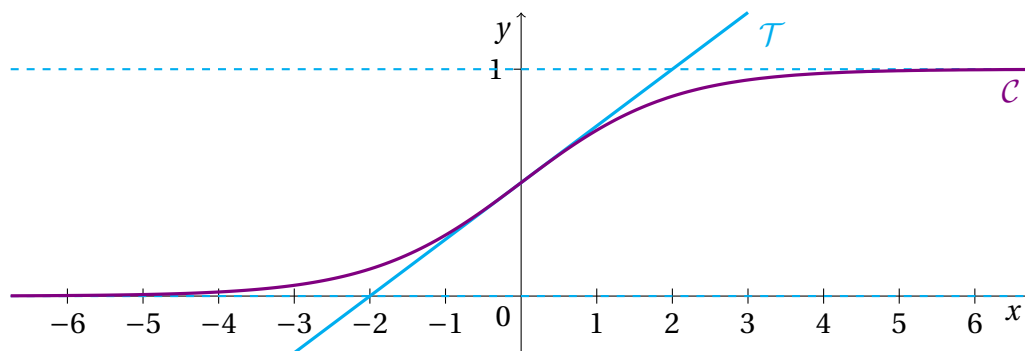
$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

4. Je sais que la convexité de  $f$  s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde  $f''(x)$ .

Comme  $f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$  et que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$  et  $(1+e^x) > 0$ , j'en déduis que le signe de  $f''(x)$  est donné par celui de  $(1-e^x)$ . Or  $1-e^x \geq 0 \iff 1 \geq e^x \iff 0 \geq x$ , donc j'en déduis que la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $] -\infty, 0[$  puis concave sur l'intervalle  $] 0, +\infty[$ .

Le point de coordonnées  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  est point d'inflexion : la tangente en ce point, calculée précédemment, traverse la courbe en ce point.

5. La courbe admet deux asymptotes horizontales, je connais l'équation de la tangente à la courbe en 0. Je suis donc capable de tracer l'allure de la courbe.



### Exercice 2 – BSB 2019 / Ex3

1. Si la pièce amène FACE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne  $\mathcal{U}_2$  et donc la boule tirée est rouge avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ . Ainsi  $P_F(R_1) = \frac{1}{2}$ .

Au contraire, si la pièce amène PILE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne  $\mathcal{U}_1$  et la boule tirée est rouge avec une probabilité 1. Autrement dit  $P_{\bar{F}}(R_1) = 1$ .

Alors d'après la formule des probabilités totales, comme  $\{F, \bar{F}\}$  forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer une boule rouge est donnée par

$$\begin{aligned} P(R_1) &= P(F \cap R_1) + P(\bar{F} \cap R_1) = P(F) \times P_F(R_1) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2. (a) Si la pièce amène FACE, alors les tirages s'effectuent dans l'urne  $\mathcal{U}_2$ . D'après la formule des probabilités composées,

$$P_F(R_1 \cap R_2) = P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(R_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

De même,

$$P_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2) = P_{\bar{F}}(R_1) \times P_{\bar{F} \cap R_1}(R_2) = 1 \times 1 = 1.$$

Alors en appliquant la formule des probabilités totales, comme  $\{F, \bar{F}\}$  forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer deux boules rouges de suite est donnée par

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= P(F) \times P_F(R_1 \cap R_2) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

(b) Je cherche ici  $P_{R_1 \cap R_2}(\bar{F})$ . D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{R_1 \cap R_2}(\bar{F}) = \frac{P(\bar{F} \cap R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{7} = \frac{6}{7}.$$

Si les deux boules tirées sont rouges, la probabilité que la pièce ait amené PILE est de  $\frac{6}{7}$ .

3. (a) Si une boule blanche est tirée au premier tirage, alors je sais qu'il s'agit de l'urne  $\mathcal{U}_2$ , donc  $Y = 1$ . Si au contraire une boule rouge est tirée, il peut s'agir de l'urne  $\mathcal{U}_1$  ou de  $\mathcal{U}_2$  et il faut donc faire au moins un autre tirage.

Si ce deuxième tirage donne une boule blanche, alors encore une fois, je sais qu'il s'agit de l'urne  $\mathcal{U}_2$ , donc  $Y = 2$ . Si au contraire une boule rouge est tirée, alors il peut encore s'agir de l'urne  $\mathcal{U}_1$  ou de  $\mathcal{U}_2$ . Il faut donc refaire un troisième tirage pour déterminer dans quelle urne l'on se trouve.

Au troisième tirage, si une boule blanche est tirée, alors il s'agit de l'urne  $\mathcal{U}_2$ . Cependant, si une boule rouge est tirée alors ce ne peut être que l'urne  $\mathcal{U}_1$  puisque seule l'urne  $\mathcal{U}_1$  contient plus de 2 boules rouges.

Ainsi j'ai bien montré que  $Y(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ .

- (b) Comme expliqué à la question précédente, l'événement  $[Y = 1]$  ne se réalise que lorsqu'une boule blanche est tirée au premier tirage. Ceci n'est possible que si la boule a été tirée dans l'urne  $\mathcal{U}_2$  et donc que la pièce a amené FACE.

Ainsi j'ai bien montré que

$$[Y = 1] = F \cap B_1.$$

Alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(Y = 1) = P(F \cap B_1) = P(F) \times P_F(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

- (c) Par un raisonnement similaire à la question précédente, je peux montrer que

$$[Y = 2] = F \cap R_1 \cap B_2.$$

Alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(Y = 2) = P(F \cap R_1 \cap B_2) = P(F) \times P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

- (d) Par complémentarité, j'obtiens que

$$P(Y = 3) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

- (e) Je connais désormais la loi de  $Y$  donc je peux facilement calculer son espérance :

$$E(Y) = 1 \times P(Y = 1) + 2 \times P(Y = 2) + 3 \times P(Y = 3) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{7}{4} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

**Exercice 3 – ESCP 2015 / Ex2**

1. (a) Pour cette question,  $a = b = -1$ , donc la matrice  $M$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .  
 Cette matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si  $1 \times (-1) - 1 \times (-1) \neq 0$ .  
 Or  $1 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 - (-1) = 0$ , donc la matrice  $M$  n'est pas inversible.

(b) Je commence par calculer  $M^2$  :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Puisque  $M^2$  est la matrice nulle, alors pour tout  $n \geq 2$ ,

$$M^n = M^2 \times M^{n-2} = 0_2 \times M^{n-2} = 0_2.$$

2. (a) Pour cette question,  $a = b =$ , donc la matrice  $M$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ .  
 Cette matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si  $1 \times a - 1 \times a \neq 0$ .  
 Or  $1 \times a - 1 \times a = a - a = 0$ , donc la matrice  $M$  n'est pas inversible.

(b) Je raisonne par récurrence sur  $n \geq 2$ .

**Énoncé :** Je note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $M^n = (1+a)^{n-1} M$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 2$ , je calcule  $M^2$  et vérifie que  $M^2 = (1+a) \times M = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix}$ .

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix} = (1+a) \times M.$$

Ainsi  $\mathcal{P}_2$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 2$ . Je suppose que  $\mathcal{P}_n$  vraie et je montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence,  $M^n = (1+a)^{n-1} M$ . Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = (1+a)^{n-1} M \times M = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^{n-1} \times (1+a) M = (1+a)^n M.$$

Donc  $M^{n+1} = (1+a)^n M$ . Finalement,  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est héréditaire et vraie pour  $n = 2$ , alors par principe de récurrence, la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 2$ , i.e.

$$\forall n \geq 2, \quad M^n = (1+a)^{n-1} M.$$

3. Dans le cas général, la matrice  $M$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$  et cette matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si

$$1 \times b - 1 \times a \neq 0 \iff b - a \neq 0 \iff a \neq b.$$

4. (a) Je cherche à exprimer la probabilité de l'événement  $[X = Y]$ . Les deux variables aléatoires doivent être égales mais peuvent prendre n'importe quelle valeur dans  $\mathbb{N}^*$ . Ainsi

$$[X = Y] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \text{ et } Y(\omega) = k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*\}.$$

i.e.

$$[X = Y] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \text{ et } Y(\omega) = k\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} ([X = k] \cap [Y = k]).$$

Alors, par incompatibilité des événements puis par indépendances des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , j'obtiens que les probabilités concernées vérifient

$$P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k).$$

Ainsi j'ai bien montré que  $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k)$ .

(b) Afin d'établir la convergence de cette somme, je passe par la somme partielle.

Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , je fixe  $S_N = \sum_{k=1}^N p^2 q^{2k-2}$ . Alors

$$S_N = \sum_{k=1}^N p^2 q^{2k-2} = p^2 \times \sum_{k=1}^N (q^2)^{k-1} = p^2 \times \sum_{n=0}^{N-1} (q^2)^n \quad \text{en posant } n = k - 1.$$

Je reconnais alors la somme partielle d'une série géométrique de raison  $q^2$ .

Puisque  $q = 1 - p$  avec  $0 < p < 1$ , alors  $0 < q < 1$  et par conséquent  $0 < q^2 < 1$ .

Donc la série géométrique est convergente et admet pour somme  $\frac{1}{1 - q^2}$ . Alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = p^2 \times \frac{1}{1 - q^2} = \frac{(1 - q)^2}{1 - q^2} = \frac{(1 - q)^2}{(1 + q)(1 - q)} = \frac{1 - q}{1 + q}.$$

(c) L'événement  $A$  est l'événement contraire de  $[X = Y]$  puisque d'après la question 3., la matrice  $N$  n'est inversible que lorsque les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  prennent des valeurs différentes. Donc

$$P(A) = 1 - P(X = Y).$$

Mais comme  $X$  et  $Y$  suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre  $p$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X = k) = P(Y = k) = p \times (1 - p)^{k-1} = p \times q^{k-1}$ . Donc

$$P(A) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{k-1} \times p q^{k-1} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}.$$

Alors grâce au résultat de la question précédente, j'en déduis que

$$P(A) = 1 - \frac{1 - q}{1 + q} = \frac{1 + q}{1 + q} - \frac{1 - q}{1 + q} = \frac{1 + q - (1 - q)}{1 + q} = \frac{2q}{1 + q}.$$

5. (a) Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$  et tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , la formule du binôme de Newton me donne

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times x^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Puis en appliquant cette formule à l'entier  $2n \in \mathbb{N}$ , j'obtiens

$$(x + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \times x^k \times 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

(b) Comme rappelé par l'énoncé, je sais que  $(x + 1)^{2n} = (x + 1)^n (x + 1)^n$ , c'est-à-dire d'après la question précédente, en modifiant les variables de sommation pour plus de clarté,

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \right) \times \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right).$$

Ces deux quantités sont deux polynômes de degré  $2n$ . Cette égalité implique donc  $2n + 1$  égalités des coefficients de degré  $k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ .

En particulier pour  $k = n$ , le coefficient à gauche vaut  $\binom{2n}{n}$  tandis que le coefficient de droite est la somme de tous les produits  $\binom{n}{i}\binom{n}{j}$  pour les valeurs de  $i$  et de  $j$  entre 0 et  $n$  telles que  $i + j = n$ . Ainsi en posant  $k = i$ , alors  $j = n - k$  et j'obtiens bien la formule :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

- (c) Dans la question **4.a**), je n'ai pas utilisé les lois des variables aléatoires, donc la formule est toujours vraie dans ce cas précis. Cette fois en revanche,  $X$  et  $Y$  suivent toutes deux une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = \frac{1}{2}$  donc pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$P(X = k) = P(Y = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \times \binom{n}{k}.$$

Donc

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n}{k} \binom{n}{k}.$$

Or puisque par symétrie  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , alors d'après la question précédente,

$$P(X = Y) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

- (d) Pour les mêmes raisons que dans la question **4.c**),  $P(A) = 1 - P(X = Y)$  et donc

$$P(A) = 1 - \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$