

12 | Fonction logarithme népérien

I – Définition et premières propriétés

Définition 12.1 – La fonction **logarithme népérien**, notée \ln , est la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

Proposition 12.2

- La fonction \ln est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- $\ln(1) = 0$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 12.3

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

On peut tirer plusieurs conséquences de cette propriété fondamentale de la fonction \ln .

Proposition 12.4

- Pour tout nombre réel strictement positif a , $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- Pour tout nombre réel strictement positif a , et pour tout entier relatif n , $\ln(a^n) = n \ln(a)$.
- Pour tout nombre réel strictement positif a , $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

Démonstration.

□

Exemple 12.5 – Soient x et $y > 0$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\ln(2x) - \ln(x)$

4. $2\ln(x^3) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$

2. $\ln(x^2) - \ln(x)$

5. $\ln(1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

3. $\ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

6. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

II – Étude de la fonction logarithme népérien

1 – Domaine de définition

Proposition 12.6

Le domaine de définition de la fonction logarithme est $D =]0, +\infty[$.

Ainsi dans le cas d'une fonction de la forme $f = \ln(u)$, le domaine de définition est donné par les solutions de l'inéquation $u(x) > 0$.

Exemple 12.7 – Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

2 – Variations

Proposition 12.8

La fonction logarithme népérien est **continue** et **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

□

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes.

Proposition 12.9

Pour tous réels a et b strictement positifs,

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$,
- $\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$.

Exemple 12.10 – Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes.

1. $\ln(x+2) = 2\ln(x)$ sur $I =]0, +\infty[$.

2. $\ln(2x-3) + \ln(3) = 2\ln(x)$ sur $I = \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$.

3. $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12)$ sur $I = \left] \frac{4}{3}, +\infty \right[$.

4. $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2)$ sur $I = \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$.

Exemple 12.11 – Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes.

1. $\ln(2x) < \ln(x+7)$ sur $I =]0, +\infty[$.

2. $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geq \ln(2)$ sur $I = \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[$.

En particulier, puisque $\ln(1) = 0$,

Proposition 12.12

Pour tout réel x strictement positif,

- $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$,
- $\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$,
- $\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$.

3– Limites

Proposition 12.13

La fonction \ln a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Proposition 12.14

La fonction \ln a pour limite $-\infty$ en 0, *i.e.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe d'équation $y = \ln x$.

Exemple 12.15 – Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{2x-1}{x-3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln \left(\frac{2x-1}{x-3} \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln \left(\frac{2x-1}{x-3} \right).$$

•

•

•

4 – Nombre e

D'après les résultats des paragraphes précédents, on a le tableau de variation suivant.

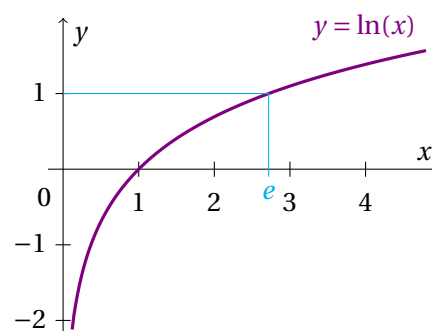
x	0	1	$+\infty$
\ln	$-\infty$	0	$+\infty$

On en déduit donc l'allure de la courbe de la fonction logarithme.

Nous observons graphiquement qu'il existe un point unique de la courbe ayant pour ordonnée 1. Son abscisse est voisine de 2.7.

Au-delà de cette observation graphique, l'existence d'un unique antécédent de 1 repose sur la variation de la fonction \ln qui est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et qui prend chaque valeur réelle une fois et une seule quand x varie dans $]0, +\infty[$.

Il existe donc un seul réel x tel que $\ln(x) = 1$.



Définition 12.16 – e est le nombre réel défini par l'équation $\ln(e) = 1$.

Remarque 12.17 – On a $e \approx 2.718$.

5 – Croissances comparées

Étudions désormais quelques limites remarquables, qui font intervenir la fonction logarithme. On étudie ce que l'on appelle des résultats de *croissances comparées*.

Proposition 12.18

Pour tout entier naturel non-nul n , on a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$$

En particulier, lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Remarque 12.19 – Ces limites sont normalement des **formes indéterminées**. Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de croissances comparées. On retient que les puissances "l'emportent" sur la fonction logarithme.

Exemple 12.20 –

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x)$$

III – Étude d'une fonction de la forme $\ln(u)$

Proposition 12.21

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I . La fonction composée $f = \ln \circ u$, définie par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \ln(u(x))$$

est dérivable sur I et on a

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple 12.22 – Soit la fonction f définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$. Calculer $f'(x)$.

Exemple 12.23 – Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .

2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Étudier les variations de la fonction f .

4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f .

