

**DEVOIR SURVEILLÉ 1**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

**Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.**

Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 2 pages et est constitué de 9 exercices. Bon courage!

**Exercice 1** – Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

1.  $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

2.  $B = \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \times 6}{\frac{2}{15} - \frac{4}{9}}$

3.  $C = \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times 3\right) \div \frac{2}{5}$

4.  $D = \left(1 - \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{2}{7} + 1\right)^2 \div \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)$

**Exercice 2** – Simplifier l'écriture des nombres suivants.

1.  $A = \sqrt{32}$

2.  $B = \sqrt{\frac{81}{25}} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$

3.  $C = \sqrt{16+9}$

4.  $D = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$

**Exercice 3** – Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

1.  $A(x) = 2x(x+1) - (12x-11)^2$

2.  $B(x) = (3-x)(4-2x) + (-5x)^2$

3.  $C(x) = (1-3x)(x+2)(2x+5)$

4.  $D(x) = 2(x-2)(x-3)$

**Exercice 4** – Factoriser **au maximum** les expressions suivantes.

1.  $A(x) = (5x+1)(3x-2) - (3x-2)$

2.  $B(x) = (2x+5)^2 + (2x+5)(x-4)$

3.  $C(x) = 9x^2 - 100$

4.  $D(x) = (x+1)^2(x-1) - 16(x-1)$

**Exercice 5** – Résoudre les équations suivantes.

1.  $2x - 3 = 0$

2.  $-x + 7 = 0$

3.  $x + 3 = 2x - 1$

4.  $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

5.  $x^2 - 10x + 21 = 0$

6.  $3x^2 + \frac{6}{7}x + \frac{3}{49} = 0$

7.  $(x-1)(x+1) = 5x-7$

8.  $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$

**Exercice 6 –** Résoudre les inéquations suivantes.

1.  $-2x + 3 > 0$

2.  $5x - 6 \leq 0$

3.  $2x - 1 < \frac{1}{2}$

4.  $\frac{1}{3}x + 1 \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

5.  $x^2 + 2x + 1 > 0$

6.  $x^2 + x + 1 < 0$

7.  $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

8.  $(x - 1)(x - 2) \leq 2x - 4$

**Exercice 7 –**

1. Résoudre l'équation  $x^2 + \frac{16}{x^2} = 8$  pour un réel  $x$  non nul.

2. Montrer que  $x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 8$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .

**Exercice 8 –** Soit le polynôme  $P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$ .

1. Montrer que le polynôme  $P(x)$  peut se factoriser sous la forme  $P(x) = (x + 1)Q(x)$ , où  $Q(x)$  est un polynôme de degré 2 à déterminer.

2. Déterminer alors les solutions de l'équation  $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$ .

3. Résoudre l'inéquation  $P(x) \geq 0$ .

**Exercice 9 –** Soit  $m$  un nombre réel. On considère l'équation  $x^2 + 4x + 2(m - 1) = 0$ .

1. Cette équation admet-elle une solution lorsque  $m = 4$ ?

2. a) Calculer, en fonction de  $m$ , le discriminant de cette équation.

b) Déterminer  $m$  pour que cette équation admette une unique solution.

c) Déterminer la valeur de cette solution unique.

3. Préciser les cas, en fonction de  $m$ , où cette équation admet deux solutions distinctes et où cette équation n'admet aucune solution.