

EXERCICES — CHAPITRE 11

Exercice 1 –

1. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = x^2 - 3x + 7$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 7 \times x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x$$

2. Ce n'est pas une forme usuelle donc je simplifie pour obtenir une somme.

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}$$

3. Je reconnais une forme usuelle que je préfère écrire $f(x) = x^{-3}$.

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

4. f semble être de la forme $u' \times u^8$ avec $u(x) = 7x + 1$.

On a $u'(x) = 7$ donc

$$u'(x) \times u(x)^8 = 7 \times (7x + 1)^8 = 7f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{7} \times \frac{u(x)^9}{9} = \frac{1}{63} \times (7x + 1)^9.$$

5. f semble être de la forme $\frac{u'}{u^4}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$.

On a $u'(x) = 2x + 1$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^4} = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^4} = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -\frac{1}{3u(x)^3} = -\frac{1}{3(x^2 + x + 1)^3}.$$

6. f semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^3 + 1$.

On a $u'(x) = 3x^2$ donc

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} = 3f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u(x)} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 1}.$$

Exercice 2 –

1. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$$

$$F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \times x = x^3 + \frac{1}{2}x$$

2. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 4 \times \frac{x^2}{2} + \sqrt{2} \times x = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \sqrt{2}x$$

3. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 1$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{x^2}{2} + 1 \times x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + x$$

Exercice 3 –

1. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = 3x + \frac{3}{x^2}$$

$$F(x) = 3 \times \frac{x^2}{2} + 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{x}$$

2. Ce n'est pas une forme usuelle donc je simplifie pour obtenir une somme.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2} = x - 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2 \times x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{x}$$

3. Ce n'est pas une forme usuelle donc je simplifie pour obtenir une somme.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$F(x) = x - 2 \times 2\sqrt{x} = x - 4\sqrt{x}$$

Exercice 4 – Cette fois, on ne me demande pas une primitive mais la primitive vérifiant une condition supplémentaire. Il faudra donc trouver l'ensemble des primitives, puis exhiber celle qui satisfait la condition souhaitée.

1. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 5 \times \frac{x^2}{2} - 1 \times x + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + C = -\frac{1}{24} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + C$$

$$\text{Ainsi } F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \iff C = \frac{2}{3} \text{ et}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{2}{3}.$$

2. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} - 5 \times \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \times x + C = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F(1) = 1^3 - \frac{5}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 1 + C = 1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + C = C - 1$$

$$\text{Ainsi } F(1) = 0 \iff C = 1 \text{ et}$$

$$F(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

3. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \left(-\frac{1}{x}\right) + 1 \times x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + x + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F(1) = \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{1} + 1 + C = \frac{1}{2} + 2 + C$$

$$\text{Ainsi } F(1) = 2 \iff C = -\frac{1}{2} \text{ et}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{2}.$$

4. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + C = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{x} + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F(1) = \frac{1}{4} \times 1^4 - \frac{2}{1} + C = -\frac{7}{4} + C$$

$$\text{Ainsi } F(1) = -\frac{1}{4} \iff C = \frac{3}{2} \text{ et}$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}.$$

5. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = 2 \times \frac{x^4}{4} - 1 \times x - \left(-\frac{1}{x}\right) + C = \frac{1}{2}x^4 - x + \frac{1}{x} + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F(1) = \frac{1}{2} \times 1^4 - 1 + \frac{1}{1} + C = \frac{1}{2} + C$$

$$\text{Ainsi } F(1) = 1 \iff C = \frac{1}{2} \text{ et}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 5 – Dire que F et G sont deux primitives d'une même fonction f signifie qu'elles ont toutes les deux pour dérivée f . Il me suffit donc de dériver F et G puis de remarquer que $F' = G'$. Ce sera alors ma fonction f .

On a $F = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(x) = x + 1$.

Alors $u'(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = 1$, et $F' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, i.e.

$$F'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2},$$

donc

$$F'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

$G(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1}$ est une somme que je dérive terme à terme.

$$G'(x) = 1 - 0 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

On a bien montré que $F' = G'$, donc que F et G sont bien deux primitives de la même fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

Exercice 6 – Plutôt que de montrer que G est une primitive de f , je préfère montrer que f est la dérivée de G (c'est équivalent et bien plus facile).

On a $G = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x^2$ et $v(x) = 2x^2 + x - 1$.

Alors $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 4x + 1$, et $G' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, i.e.

$$G'(x) = \frac{4x \times (2x^2 + x - 1) - 2x^2 \times (4x + 1)}{(2x^2 + x - 1)^2} = \frac{4x \times (x - 1) - 2x^2}{(2x^2 + x - 1)^2},$$

donc

$$G'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(2x^2 + x - 1)^2} = f(x).$$

On a bien montré que $G' = f$, i.e. f est la dérivée de G , i.e. G est une primitive de f .

Exercice 7 –

1. f semble être de la forme $\frac{u'}{u^3}$ avec $u(x) = 2x - 1$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^3} = \frac{2}{(2x-1)^3} = \frac{2}{3} \times f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{3}{2} \times \frac{-1}{2u(x)^2} = -\frac{3}{4(2x-1)^2}.$$

2. f semble être de la forme $u' \times u^3$ avec $u(x) = x^2 + 2x - 3$. On a $u'(x) = 2x + 2$ donc

$$u'(x) \times u(x)^3 = (2x+2) \times (x^2+2x-3)^3 = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^4}{4} = \frac{1}{8} \times (x^2+2x-3)^4.$$

3. f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 - 1$. On a $u'(x) = 2x$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{(x^2-1)^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{u(x)} = -\frac{1}{2(x^2-1)}.$$

4. f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 - 2x$. On a $u'(x) = -2$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-2}{(1-2x)^2} = -\frac{1}{2} \times f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -2 \times \frac{-1}{u(x)} = \frac{2}{1-2x}.$$

Exercice 8 –

1. Une primitive de la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est donnée par

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 1 \times x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x.$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 1) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \right]_{-1}^2 = \left(\frac{1}{3}2^3 - \frac{3}{2}2^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 + (-1) \right) \\ &= \left(\frac{8}{3} - 6 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 1 \right) = 3 - 3 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2. Une primitive de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1$ est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} - 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) - 1 \times x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{x} - x.$$

$$\begin{aligned} \int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1 \right) dx &= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{x} - x \right]_2^6 = \left(\frac{1}{6}6^3 + \frac{2}{6} - 6 \right) - \left(\frac{1}{6}2^3 + \frac{2}{2} - 2 \right) \\ &= \left(36 + \frac{1}{3} - 6 \right) - \left(\frac{4}{3} + 1 - 2 \right) = 31 - 1 = 30 \end{aligned}$$

Exercice 9 –

1. Une primitive de la fonction $f(x) = x^3 + x - 2$ est donnée par

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2 \times x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 (x^3 + x - 2) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-2}^3 = \left(\frac{1}{4}3^4 + \frac{1}{2}3^2 - 2 \times 3 \right) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 2 \times 2 \right) \\ &= \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} - 6 \right) - (4 + 2 + 4) = \frac{99}{4} - 16 = \frac{35}{4} \end{aligned}$$

2. Il faut trouver une primitive à $f(x) = \sqrt{2x+3} = (2x+3)^{\frac{1}{2}}$.

f semble être de la forme $u' \times u^{\frac{1}{2}}$ avec $u(x) = 2x+3$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$u'(x) \times u(x)^{\frac{1}{2}} = 2 \times (2x+3)^{\frac{1}{2}} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \times (2x+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}.$$

$$\begin{aligned} \int_3^{11} \sqrt{2x+3} dx &= \left[\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} \right]_3^{11} = \left(\frac{2 \times 11 + 3}{3} \sqrt{2 \times 11 + 3} \right) - \left(\frac{2 \times 3 + 3}{3} \sqrt{2 \times 3 + 3} \right) \\ &= \frac{25}{3} \times 5 - \frac{9}{3} \times 3 = \frac{125 - 27}{3} = \frac{98}{3} \end{aligned}$$

3. Il faut trouver une primitive à $f(t) = \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}$.

f semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^5+3$. On a $u'(t) = 5t^4$ donc

$$u'(t) \times \sqrt{u(t)} = \frac{5t^4}{\sqrt{t^5+3}} = 5f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = \frac{1}{5} \times 2\sqrt{u(t)} = \frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} dt &= \left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5+3} \right]_0^1 = \left(\frac{2}{5}\sqrt{1^5+3} \right) - \left(\frac{2}{5}\sqrt{0^5+3} \right) \\ &= \frac{2}{5} \times 2 - \frac{2}{5} \times \sqrt{3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

Exercice 10 – Je préfère montrer que f est la dérivée de F .

On a $F = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = x^2+3x-1$ et $v(x) = x-1$.

Alors $u'(x) = 2x+3$ et $v'(x) = 1$, et $F' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, i.e.

$$F'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x-1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2+x-3-x^2-3x+1}{(x-1)^2},$$

donc

$$F'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} = f(x).$$

Donc une primitive de la fonction $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$ est donnée par $F(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$.

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} dx &= \left[\frac{x^2+3x-1}{x-1} \right]_2^3 = \left(\frac{3^2+3 \times 3-1}{3-1} \right) - \left(\frac{2^2+3 \times 2-1}{2-1} \right) \\ &= \frac{17}{2} - 9 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 11 – Je préfère montrer que f est la dérivée de F .

On a $F = u^4$, avec $u(x) = x^3+1$. Alors $u'(x) = 3x^2$ et $F' = 4u'u^3$, i.e.

$$F'(x) = 4 \times 3x^2 \times (x^3+1)^3 = f(x).$$

Donc une primitive de $f(x) = 12x^2(x^3+1)^3$ est $F(x) = (x^3+1)^4$.

$$\int_0^1 12x^2(x^3+1)^3 dx = \left[(x^3+1)^4 \right]_0^1 = (1^3+1)^4 - (0^3+1)^4 = 16 - 1 = 15$$