DEVOIR SURVEILLÉ 4

Exercice 1 – [Int16 / Ex1]

1. Il s'agit d'une fonction polynomiale que je peux primitiver terme à terme. Alors

$$\int_0^1 \left(2x^2-5x+3\right)\mathrm{d}x = \left[2\times\frac{x^3}{3}-5\times\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{5}{2}+3-0 = \frac{4}{6}-\frac{15}{6}+\frac{18}{6} = \frac{7}{6}.$$

2. Je cherche une primitive de $f(x) = \dfrac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}$.

   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$, avec $u(x) = 1+x^4$. Puisque $u'(x) = 4x^3$ alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{4x^3}{\left(1+x^4\right)^2} = 4f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{u(x)}\right) = -\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+x^4} = -\frac{1}{4+4x^4}.$$

   Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4+4x^4}\right]_0^1 = -\frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

3. Je cherche une primitive de $f(t) = \dfrac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}$.

   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, avec $u(t) = t^4+1$. Puisque $u'(t) = 4t^3$ alors

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}} = f(t).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = 2\sqrt{u(t)} = 2\sqrt{t^4+1}.$$

   Ainsi

$$\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t^4+1}\right]_{-1}^1 = 2\sqrt{2}-2\sqrt{2} = 0.$$

4. Il s'agit d'une somme que je peux primitiver terme à terme. Alors

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x-2\right)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^4 = \left(2\sqrt{4}+\frac{16}{2}-8\right)-\left(2+\frac{1}{2}-2\right) = 4+8-8-\frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

5. Je cherche une primitive de $f(x) = x\left(5x^2+1\right)^2$.

   f semble être de la forme $u'\times u^2$, avec $u(x) = 5x^2+1$. Puisque $u'(x) = 10x$ alors

$$u'(x)\times u(x)^2 = 10x\left(5x^2+1\right)^2 = 10f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{10} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{\left(5x^2+1\right)^3}{30}.$$

Ainsi

$$\int_{-1}^{0} x\left(5x^2+1\right)^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{\left(5x^2+1\right)^3}{30}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{30} - \frac{216}{30} = -\frac{215}{30} = -\frac{43}{6}.$$

Exercice 2 – [CB1 / Ex12]

1. Grâce aux valeurs données par l'énoncé,

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0.2.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'évènements, alors

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P\left(A_n \cap A_{n+1}\right) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= 0.7 \times P(A_n) + 0.2 \times P(\overline{A_n}) = 0.7 \times P(A_n) + 0.2 \times \left(1 - P(A_n)\right) \\ &= 0.7P(A_n) + 0.2 - 0.2P(A_n) = 0.5P(A_n) + 0.2 \end{aligned}$$

Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, j'ai bien montré que $\quad p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.

3. a) Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique, j'exprime u_{n+1} en fonction de u_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.4 = 0.5p_n + 0.2 - 0.4 = 0.5(u_n + 0.4) + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n + 0.2 + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n.$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.5. Son premier terme est donné par

$$u_1 = p_1 - 0.4 = 0.2 - 0.4 = -0.2.$$

b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = 0.5$ et de premier terme $u_1 = -0.2$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = u_n + 0.4 = 0.4 - 0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique, de premier terme $u_1 = -0.2 < 0$ et de raison $q = 0.5 \in \left]0,1\right[$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de termes négatifs.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + 0.4$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ partage la même variation que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, elle est donc elle aussi croissante.

5. Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, la limite de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est 0. Alors comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = u_n + 0.4$, j'en déduis que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + 0.4 = 0 + 0.4 = 0.4.$$

Exercice 3 – [adapté de BSB 2012 / Ex3]

1. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{R,\overline{R}\}$ forme un système complet d'événements et que $\dfrac{75}{100}=\dfrac{3}{4}$, alors

$$\begin{aligned} P(J) &= P\big(R\cap J\big)+P\big(\overline{R}\cap J\big)=P(R)\times P_R(J)+P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(J)\\ &= \frac{3}{4}\times 1+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{16}=\frac{13}{16}.\end{aligned}$$

   En effet, si l'élève connaît la réponse, il répond correctement avec probabilité 1, contre une probabilité $\dfrac{1}{4}$ s'il ne connaît pas la réponse et répond donc au hasard.

2. Les vingt questions représentent $n=20$ répétitions d'une expérience de Bernoulli de succès "répondre correctement" et de probabilité $p=\dfrac{13}{16}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire X compte le nombre de succès.
   Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\dfrac{13}{16}$.
   Le support de X est donné par $X(\Omega)=[\![0,20]\!]$ et pour tout $k\in[\![0,20]\!]$,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times\big(1-p\big)^{n-k}=\binom{20}{k}\times\left(\frac{13}{16}\right)^k\times\left(\frac{3}{16}\right)^{20-k}.$$

3. Comme X suit une loi binomiale, alors

$$E(X)=np=20\times\frac{13}{16}=\frac{65}{4}\quad\text{et}\quad V(X)=np(1-p)=\frac{65}{4}\times\frac{3}{16}=\frac{195}{64}.$$

4. a) Par définition de X, il y a X bonnes réponses, rapportant 1 point chacune, et donc $20-X$ mauvaises réponses, rapportant -1 point chacune.
   Ainsi la note finale est donnée par la formule

$$N=1\times X+(-1)\times(20-X)=X-20+X=2X-20.$$

   b) Comme $N=2X-20$, alors par linéarité de l'espérance,

$$E(N)=E\big(2X-20\big)=2E(X)-20=2\times\frac{65}{4}-20=\frac{65-40}{2}=\frac{25}{2}=12.5$$

$$\text{et}\quad V(N)=V\big(2X-20\big)=2^2\times V(X)=4\times\frac{195}{64}=\frac{195}{16}.$$

5. a) Il s'agit cette fois encore de $n=20$ répétitions d'une expérience de Bernoulli de succès "répondre correctement" mais de probabilité $p=\dfrac{3}{4}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire Y compte le nombre de succès.
   Ainsi Y suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\dfrac{3}{4}$.

   b) La note moyenne obtenue par l'élève B correspond à l'espérance de Y, *i.e.*

$$E(Y)=np=20\times\frac{3}{4}=15.$$

   c) En comparant les notes moyennes obtenues par les élèves A et B dans le cas de points négatifs en cas de mauvaises réponses, à savoir 12.5 pour l'élève A et 15 pour l'élève B, il vient naturellement en conclusion que la meilleure stratégie est de ne pas répondre au hasard aux questions pour lesquelles la réponse n'est pas connue.
   C'est donc l'élève B qui possède la meilleure stratégie.

Exercice 4 –

1. La fonction f est une fraction rationnelle : elle est donc définie partout où le dénominateur est non nul. Pour trouver les valeurs interdites, je calcule le discriminant de $2x^2+2x+5$: $\Delta = 2^2 - 4\times 2\times 5 = 4-40 = -36 < 0$.
   Le polynôme n'a donc pas de racine et f n'a pas de valeur interdite. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Il s'agit d'une fraction rationnelle, je ne m'intéresse donc qu'aux termes de plus haut degré. Ainsi
   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+2}{2x^2+2x+5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x} = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+2}{2x^2+2x+5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0^+.$$
   J'en déduis que la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe, à la fois en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 4x+2$ et $v(x) = 2x^2+2x+5$.
   Puisque $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 4x+2$, alors
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{4\times\left(2x^2+2x+5\right)-(4x+2)\times(4x+2)}{\left(2x^2+2x+5\right)^2} \\ &= \frac{8x^2+8x+20-16x^2-16x-4}{\left(2x^2+2x+5\right)^2} = \frac{-8x^2-8x+16}{\left(2x^2+2x+5\right)^2} = \frac{-8\times\left(x^2+x-2\right)}{\left(2x^2+2x+5\right)^2}. \end{aligned}$$
   J'ai montré que pour tout réel $x\in\mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{-8\times\left(x^2+x-2\right)}{\left(2x^2+2x+5\right)^2}$.
4. Je calcule le discriminant de x^2+x-2 : $\quad \Delta = 1^2-4\times1\times(-2) = 1+8 = 9 = 3^2 > 0$.
   Donc le polynôme a deux racines :
   $$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$
   Par ailleurs, un carré étant toujours positif, je sais que $\left(2x^2+2x+5\right)^2 > 0$.
   J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
-8		$-$		$-$		$-$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\left(2x^2+2x+5\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0^-	$\searrow$	$-\dfrac{2}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{2}{3}$	$\searrow$	0^+

   En effet,
   $$f(-2) = \frac{4\times(-2)+2}{2\times(-2)^2+2\times(-2)+2} = \frac{-8+2}{8-4+5} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$
   $$\text{et} \quad f(1) = \frac{4\times1+2}{2\times1^2+2\times1+5} = \frac{4+2}{2+2+5} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

5. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. Ici $a = -\frac{1}{2}$ donc l'équation devient

$$y = f'\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Or

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+5} = \frac{0}{\frac{9}{2}} = 0 \quad \text{et} \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-8\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2\right)}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{8\times\frac{9}{4}}{\frac{81}{4}} = \frac{8}{9}.$$

Finalement l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par

$$y = \frac{8}{9} \times \left(x+\frac{1}{2}\right) + 0, \qquad \textit{i.e.} \quad y = \frac{8}{9}x + \frac{4}{9}.$$

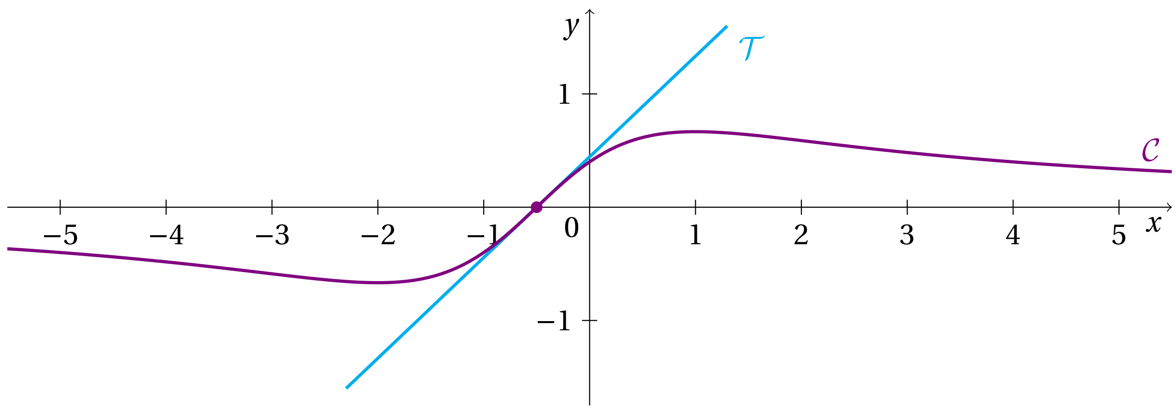
6. Pour connaître la position relative de a courbe à la tangente, j'étudie le signe de l'écart $f(x) - y$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} f(x) - y = \frac{4x+2}{2x^2+2x+5} - \left(\frac{8}{9}x + \frac{4}{9}\right) &= \frac{9\times(4x+2) - (8x+4)\times\left(2x^2+2x+5\right)}{\left(2x^2+2x+5\right)\times 9} \\ &= \frac{2(2x+1)\times\left(9 - 2\times\left(2x^2+2x+5\right)\right)}{9\left(2x^2+2x+5\right)} = \frac{2(2x+1)\times\left(9-4x^2-4x-10\right)}{9\left(2x^2+2x+5\right)} \\ &= \frac{-2(2x+1)\left(4x^2+4x+1\right)}{9\left(2x^2+2x+5\right)} = \frac{-2(2x+1)(2x+1)^2}{9\left(2x^2+2x+5\right)} = \frac{-2(2x+1)^3}{9\left(2x^2+2x+5\right)}. \end{aligned}$$

Dès lors, le signe de $f(x) - y$ ne dépend que de celui de $2x+1$. J'en déduis donc le résultat :

- Sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, $f(x) - y > 0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$.
- Sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f(x) - y < 0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente $\mathcal{T}$.

7. Voici l'allure de la courbe, avec la tangente et les asymptotes.



Exercice 5 – [TD12 / Ex10]

1. Pour la limite en 0, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2-\ln(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Pour la limite en $+\infty$, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 1+\ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 2-\ln(x) = -\infty\end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

2. a) La fonction f est de la forme $u \times v$, avec $u(x) = 1+\ln(x)$ et $v(x) = 2-\ln(x)$.
Puisque $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = -\frac{1}{x}$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \frac{1}{x} \times \big(2-\ln(x)\big) + \left(-\frac{1}{x}\right) \times \big(1+\ln(x)\big) \\ &= \frac{\big(2-\ln(x)\big) - \big(1+\ln(x)\big)}{x} = \frac{1-2\ln(x)}{x}. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x}$.

b) Les variations de la fonction f s'obtiennent en étudiant le signe de $f'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x}$.
Comme $x > 0$, le dénominateur est positif. Je m'intéresse alors au numérateur :

$$1-2\ln(x) \geqslant 0 \iff 1 \geqslant 2\ln(x) \iff \ln\left(x^2\right) \leqslant 1 \iff x^2 \leqslant e \iff x \leqslant \sqrt{e}.$$

J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

$$f\left(\sqrt{e}\right) = \left(1+\ln\left(\sqrt{e}\right)\right)\left(2-\ln\left(\sqrt{e}\right)\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$1-2\ln(x)$		$+$	0	$-$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Le maximum de f vaut donc $\dfrac{9}{4}$ et celui-ci est atteint pour $x = \sqrt{e}$.

3. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. Ici $a = 1$ donc l'équation devient

$$y = f'(1) \times (x-1) + f(1).$$

Or
$$f(1) = \big(1+\ln(1)\big)\big(2-\ln(1)\big) = 1\times 2 = 2 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{1-2\ln(1)}{1} = 1.$$
Finalement l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par
$$y = 1\times(x-1)+2, \qquad \textit{i.e.} \quad y = x+1.$$

4. a) Graphiquement, j'observe qu'il y a deux solutions pour l'équation $f(x) = 2$.
Le tableau de variation me confirme cela : puisque $\frac{9}{4} > 2 = \frac{8}{4}$, alors il existe une première solution sur l'intervalle $]0,\sqrt{e}[$ et une seconde sur l'intervalle $]\sqrt{e},+\infty[$.

b) Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2 en X.
$$\begin{aligned}\big(1+X\big)\big(2-X\big)=2 &\iff 2-X+2X-X^2=2 \iff 2+X-X^2-2=0\\ &\iff X-X^2=0 \iff X(1-X)=0\end{aligned}$$
J'obtiens alors une équation produit nul, qui a deux solutions,
selon que $X=0$ ou $X-1=0$. Ainsi les solutions en X sont 0 et 1.

c) Si je cherche à résoudre $f(x) = \big(1+\ln(x)\big)\big(2-\ln(x)\big) = 2$, alors en particulier, en posant $X = \ln(x)$ et en utilisant la question précédente, j'obtiens que $X = \ln(x)$ doit être égal à 0 ou à 1. Cela m'amène à deux solutions en x :
$$1, \quad \text{puisque } \ln(1) = 0, \qquad \text{et} \qquad e, \quad \text{puisque } \ln(e) = 1.$$
Ainsi l'équation $f(x) = 2$ a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = \{1, e\}$.
Ces deux solutions sont cohérentes avec le graphique puisque $e \approx 2.72$.

Exercice 6 – Partie A

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$ et par croissance de la fonction logarithme, alors
$$\ln\big(x^2+1\big) \geqslant \ln(1) = 0.$$
Donc cette inéquation est vérifiée pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. De manière similaire,
$$f(x) = x \iff x-\ln\big(x^2+1\big) = x \iff \ln\big(x^2+1\big) = 0 \iff x^2+1 = 1 \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$
Finalement $\mathcal{S} = \{0\}$.

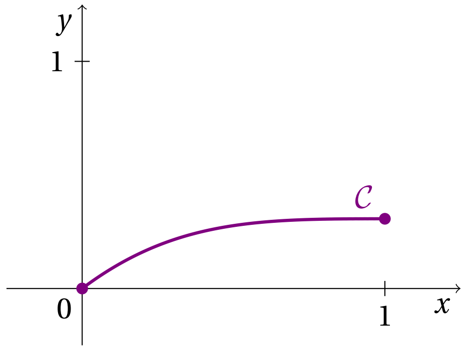
3. a) Pour obtenir les variations de f, j'étudie le signe de sa dérivée.
f est de la forme $f(x) = x-\ln\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = x^2+1$. Comme $u'(x) = 2x$, alors
$$f'(x) = 1-\frac{u'(x)}{u(x)} = 1-\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$
Le dénominateur est positif et le numérateur est un carré donc positif aussi.
Ainsi pour tout $x\in[0,1]$, $f(x) \geqslant 0$ et donc la fonction f est croissante sur $[0,1]$.

b) J'établis le tableau de variation de f, en évaluant la fonction aux bornes de l'intervalle :
$$f(0) = 0-\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1-\ln(2) \approx 1-0.69 = 0.31.$$

x	0	1
f	0 $\nearrow$	$f(1) \approx 0.3$

Alors d'après le tableau de variation, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0, 0.3] \subset [0,1]$.

4. Voici l'allure de la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$:



Partie B

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \in [0,1]$.
Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $1 \in [0,1]$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Alors par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0,1]$.
Et par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Enfin d'après la question **3.b)** de la Partie A, comme $u_n \in [0,1]$, alors
$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1].$$
Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1].$$

2. Pour obtenir les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, j'étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs de la suite. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right) - u_n = -\ln\left(u_n^2 + 1\right).$$
Or j'ai montré à la question **1.** de la Partie A que $\ln(x^2+1) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
i.e. $-\ln(x^2+1) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En particulier, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2+1) \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante d'après la question précédente, et minorée par 0 d'après la question **1.**. Donc par le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. Je note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Alors également $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ et $f(\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$.
En particulier $f(\ell) = \ell$, et d'après la question **2.** de la Partie A, cette équation n'admet qu'une unique solution, ce qui me permet de conclure que
$$\ell = 0.$$