EXERCICES — CHAPITRE 11

Exercice 1 –

1. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = x^2 - 3x + 7$$
$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 7 \times x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x$$

2. Ce n'est pas une forme usuelle donc je simplifie pour obtenir une somme.

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}$$

3. Je reconnais une forme usuelle que je préfère écrire $f(x) = x^{-3}$.

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$
$$F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

4. f semble être de la forme $u' \times u^8$ avec $u(x) = 7x+1$.
   On a $u'(x) = 7$ donc
$$u'(x) \times u(x)^8 = 7 \times (7x+1)^8 = 7f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
$$F(x) = \frac{1}{7} \times \frac{u(x)^9}{9} = \frac{1}{63} \times (7x+1)^9.$$

5. f semble être de la forme $\frac{u'}{u^4}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$.
   On a $u'(x) = 2x+1$ donc
$$\frac{u'(x)}{u(x)^4} = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4} = f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
$$F(x) = -\frac{1}{3u(x)^3} = -\frac{1}{3\left(x^2+x+1\right)^3}.$$

6. f semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^3+1$.
   On a $u'(x) = 3x^2$ donc
$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}} = 3f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
$$F(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u(x)} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}.$$

Exercice 2 –

1. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$$
$$F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \times x = x^3 + \frac{1}{2}x$$

2. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$$
$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 4 \times \frac{x^2}{2} + \sqrt{2} \times x = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \sqrt{2}x$$

3. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 1$$
$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{x^2}{2} + 1 \times x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + x$$

Exercice 3 –

1. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = 3x + \frac{3}{x^2}$$
$$F(x) = 3 \times \frac{x^2}{2} + 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{x}$$

2. Ce n'est pas une forme usuelle donc je simplifie pour obtenir une somme.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2} = x - 2 + \frac{1}{x^2}$$
$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2 \times x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{x}$$

3. Ce n'est pas une forme usuelle donc je simplifie pour obtenir une somme.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$
$$F(x) = x - 2\times 2\sqrt{x} = x - 4\sqrt{x}$$

Exercice 4 – Cette fois, on ne me demande pas <u>une</u> primitive mais <u>la</u> primitive vérifiant une condition supplémentaire. Il faudra donc trouver l'ensemble des primitives, puis exhiber celle qui satisfait la condition souhaitée.

1. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 5\times\frac{x^2}{2} - 1\times x + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + C = -\frac{1}{24} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + C$$

Ainsi $F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \iff C = \frac{2}{3}$ et

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{2}{3}.$$

2. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = 3\times\frac{x^3}{3} - 5\times\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\times x + C = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F(1) = 1^3 - \frac{5}{2}\times 1^2 + \frac{1}{2}\times 1 + C = 1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + C = C - 1$$

Ainsi $F(1) = 0 \iff C = 1$ et

$$F(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

3. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \left(-\frac{1}{x}\right) + 1\times x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + x + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F(1) = \frac{1}{2}\times 1^2 + \frac{1}{1} + 1 + C = \frac{1}{2} + 2 + C$$

Ainsi $F(1) = 2 \iff C = -\frac{1}{2}$ et

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{2}.$$

4. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\times\left(-\frac{1}{x}\right) + C = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{x} + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F(1) = \frac{1}{4}\times 1^4 - \frac{2}{1} + C = -\frac{7}{4} + C$$

Ainsi $F(1) = -\frac{1}{4} \iff C = \frac{3}{2}$ et

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}.$$

5. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = 2\times\frac{x^4}{4} - 1\times x - \left(-\frac{1}{x}\right) + C = \frac{1}{2}x^4 - x + \frac{1}{x} + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F(1) = \frac{1}{2}\times 1^4 - 1 + \frac{1}{1} + C = \frac{1}{2} + C$$

Ainsi $F(1) = 1 \iff C = \frac{1}{2}$ et

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 5 – Dire que F et G sont deux primitives d'une même fonction f signifie qu'elles ont toutes les deux pour dérivée f. Il me suffit donc de dériver F et G puis de remarquer que $F' = G'$. Ce sera alors ma fonction f.

On a $F = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(x) = x + 1$.

Alors $u'(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = 1$, et $F' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, *i.e.*

$$F'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2},$$

donc

$$F'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

$G(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x+1}$ est une somme que je dérive terme à terme.

$$G'(x) = 1 - 0 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

On a bien montré que $F' = G'$, donc que F et G sont bien deux primitives de la même fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

Exercice 6 – Plutôt que de montrer que G est une primitive de f, je préfère montrer que f est la dérivée de G *(c'est équivalent et bien plus facile)*.

On a $G = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x^2$ et $v(x) = 2x^2 + x - 1$.

Alors $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 4x + 1$, et $G' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, *i.e.*

$$G'(x) = \frac{4x\times(2x^2+x-1) - 2x^2\times(4x+1)}{(2x^2+x-1)^2} = \frac{4x\times(x-1) - 2x^2}{(2x^2+x-1)^2},$$

donc

$$G'(x) = \frac{2x^2-4x}{(2x^2+x-1)^2} = f(x).$$

On a bien montré que $G' = f$, *i.e.* f est la dérivée de G, *i.e.* G est une primitive de f.

Exercice 7 –

1. f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^3}$ avec $u(x) = 2x - 1$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^3} = \frac{2}{(2x-1)^3} = \frac{2}{3}\times f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{3}{2}\times\frac{-1}{2u(x)^2} = -\frac{3}{4(2x-1)^2}.$$

2. f semble être de la forme $u' \times u^3$ avec $u(x) = x^2 + 2x - 3$. On a $u'(x) = 2x + 2$ donc

$$u'(x)\times u(x)^3 = (2x+2)\times(x^2+2x-3)^3 = 2f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}\times\frac{u(x)^4}{4} = \frac{1}{8}\times\left(x^2+2x-3\right)^4.$$

3. f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 - 1$. On a $u'(x) = 2x$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{(x^2-1)^2} = 2f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}\times\frac{-1}{u(x)} = -\frac{1}{2\left(x^2-1\right)}.$$

4. f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 - 2x$. On a $u'(x) = -2$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-2}{(1-2x)^2} = -\frac{1}{2}\times f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -2\times\frac{-1}{u(x)} = \frac{2}{1-2x}.$$

Exercice 8 –

1. Une primitive de la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est donnée par

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 3\times\frac{x^2}{2} + 1\times x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x.$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(x^2-3x+1)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{3}2^3 - \frac{3}{2}2^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 + (-1)\right)\\ &= \left(\frac{8}{3} - 6 + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 1\right) = 3 - 3 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2. Une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{x^2} - 1$ est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} - 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) - 1 \times x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{x} - x.$$

$$\begin{aligned}\int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right) \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{x} - x\right]_2^6 = \left(\frac{1}{6}6^3 + \frac{2}{6} - 6\right) - \left(\frac{1}{6}2^3 + \frac{2}{2} - 2\right)\\ &= \left(36 + \frac{1}{3} - 6\right) - \left(\frac{4}{3} + 1 - 2\right) = 31 - 1 = 30\end{aligned}$$

Exercice 9 –

1. Une primitive de la fonction $f(x) = x^3 + x - 2$ est donnée par

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2 \times x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 (x^3 + x - 2)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-2}^3 = \left(\frac{1}{4}3^4 + \frac{1}{2}3^2 - 2 \times 3\right) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 2 \times 2\right)\\ &= \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} - 6\right) - (4 + 2 + 4) = \frac{99}{4} - 16 = \frac{35}{4}\end{aligned}$$

2. Il faut trouver une primitive à $f(x) = \sqrt{2x+3} = (2x+3)^{\frac{1}{2}}$.
f semble être de la forme $u' \times u^{\frac{1}{2}}$ avec $u(x) = 2x + 3$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$u'(x) \times u(x)^{\frac{1}{2}} = 2 \times (2x+3)^{\frac{1}{2}} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \times (2x+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}.$$

$$\begin{aligned}\int_3^{11} \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}\right]_3^{11} = \left(\frac{2 \times 11 + 3}{3}\sqrt{2 \times 11 + 3}\right) - \left(\frac{2 \times 3 + 3}{3}\sqrt{2 \times 3 + 3}\right)\\ &= \frac{25}{3} \times 5 - \frac{9}{3} \times 3 = \frac{125 - 27}{3} = \frac{98}{3}\end{aligned}$$

3. Il faut trouver une primitive à $f(t) = \dfrac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}$.
f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^5 + 3$. On a $u'(t) = 5t^4$ donc

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{5t^4}{\sqrt{t^5+3}} = 5f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = \frac{1}{5} \times 2\sqrt{u(t)} = \frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{5}\sqrt{1^5+3}\right) - \left(\frac{2}{5}\sqrt{0^5+3}\right)\\ &= \frac{2}{5} \times 2 - \frac{2}{5} \times \sqrt{3} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

Exercice 10 – Je préfère montrer que f est la dérivée de F.
On a $F = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = x^2 + 3x - 1$ et $v(x) = x - 1$.
Alors $u'(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = 1$, et $F' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, *i.e.*

$$F'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x-1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 + x - 3 - x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2},$$

donc

$$F'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = f(x).$$

Donc une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$ est donnée par $F(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$.

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}\right]_2^3 = \left(\frac{3^2 + 3 \times 3 - 1}{3 - 1}\right) - \left(\frac{2^2 + 3 \times 2 - 1}{2 - 1}\right)\\ &= \frac{17}{2} - 9 = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 11 – Je préfère montrer que f est la dérivée de F.
On a $F = u^4$, avec $u(x) = x^3 + 1$. Alors $u'(x) = 3x^2$ et $F' = 4u'u^3$, *i.e.*

$$F'(x) = 4 \times 3x^2 \times (x^3 + 1)^3 = f(x).$$

Donc une primitive de $f(x) = 12x^2(x^3+1)^3$ est $F(x) = (x^3+1)^4$.

$$\int_0^1 12x^2(x^3+1)^3\,\mathrm{d}x = \left[\,(x^3+1)^4\,\right]_0^1 = \left(1^3+1\right)^4 - \left(0^3+1\right)^4 = 16 - 1 = 15$$