7 | Intégrales généralisées

I – Rappels d'intégration sur un segment

1 – Primitives

Définition 7.1 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive de la fonction f sur I** si F est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 7.2 –

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbf{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\quad F'(x) = 3x^3 + 6x = f(x)$.
- $G : x \mapsto e^x - 2$ est une primitive sur $\mathbf{R}$ de $g : x \mapsto e^x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\quad G'(x) = e^x = g(x)$.
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2+1$, mais aussi $H = x \mapsto x^2+C$, pour $C \in \mathbf{R}$ sont des primitives sur $\mathbf{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\quad F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x = f(x)$.
- $H : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de $h : x \mapsto \ln(x)$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\quad H'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = h(x)$.

Remarque 7.3 –

- Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle d'**une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.

Théorème 7.4

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est la forme $F + c$ où c est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné : pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbf{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 7.5 – La fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $F(1) = 0$. En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = 2x = f(x)$ et $F(1) = 1^2 - 1 = 0$.

2 – Primitives usuelles

Pour rechercher des primitives, on utilise les formules connues pour la dérivation et les dérivées connues. Les formules suivantes sont valables sur tout intervalle où la fonction est continue. Par ailleurs, C désigne une constante réelle.

fonction	primitives
$f(x) = a \in \mathbf{R}$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\|x\| + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$

fonction	primitives
$f = u' \times u^n$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$f = -\dfrac{u'}{u^2}$	$F = \dfrac{1}{u} + C$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} + C$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln\|u\| + C$
$f = u'e^u$	$F = e^u + C$

Exemple 7.6 –

- Déterminer les primitives de la fonction f définie par $f(x) = xe^{x^2}$.
  f semble être de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$. Or
  $$u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2} = 2f(x),$$
  donc les primitives de f sont les fonctions de la forme
  $$F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

- Déterminer les primitives de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.
  g semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$. Or
  $$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = g(x),$$
  donc les primitives de g sont les fonctions de la forme
  $$G(x) = \frac{1}{u(x)} + C = \frac{1}{x^2+x+1} + C.$$

- Déterminer les primitives de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$.
  h semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{2x} - 1$. Or
  $$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2e^{2x}}{1e^{2x}-1} = h(x),$$
  donc les primitives de h sont les fonctions de la forme
  $$H(x) = \ln|u(x)| + C = \ln\left|e^{2x} - 1\right| + C.$$

- Déterminer les primitives de la fonction i définie par $i(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$.
  i semble être de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 1 + \ln(x)$. Or
  $$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{1+\ln(x)}} = \frac{1}{2x\sqrt{1+\ln(x)}} = \frac{1}{2}i(x),$$
  donc les primitives de i sont les fonctions de la forme
  $$I(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{1+\ln(x)}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction j définir par $j(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$.
  j semble être de la forme $u'u^n$ avec $u(x)=x^2+2x+3$ et $n=-4$. Or
  $$u'(x)u(x)^{-4}=(2x+2)(x^2+2x+3)^{-4}=\frac{(2x+2)}{(x^2+2x+3)^4}=2\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}=2j(x),$$
  donc les primitives de j sont les fonctions de la forme
  $$J(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}u(x)^{n+1}+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3}(x^2+2x+1)^{-3}+C=\frac{1}{6(x^2+2x+3)^3}+C.$$

- Déterminer les primitives de la fonction k définie par $k(x)=\dfrac{\ln(x)^2}{x}$.
  k semble être de la forme $u'u^n$ avec $u(x)=\ln(x)$ et $n=2$. Or
  $$u'(x)u(x)^2=\frac{1}{x}\cdot\ln(x)^2=\frac{\ln(x)^2}{x}=k(x),$$
  donc les primitives de k sont les fonctions de la forme
  $$K(x)=\frac{1}{n+1}u(x)^{n+1}=\frac{1}{3}\ln(x)^3.$$

3 – Intégration sur un segment

Définition 7.7 – Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I. On appelle **intégrale de f entre a et b** le nombre réel $F(b)-F(a)$, noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$:
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\Big[F(t)\Big]_a^b=F(b)-F(a).$$

Remarque 7.8 – Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 7.9 –

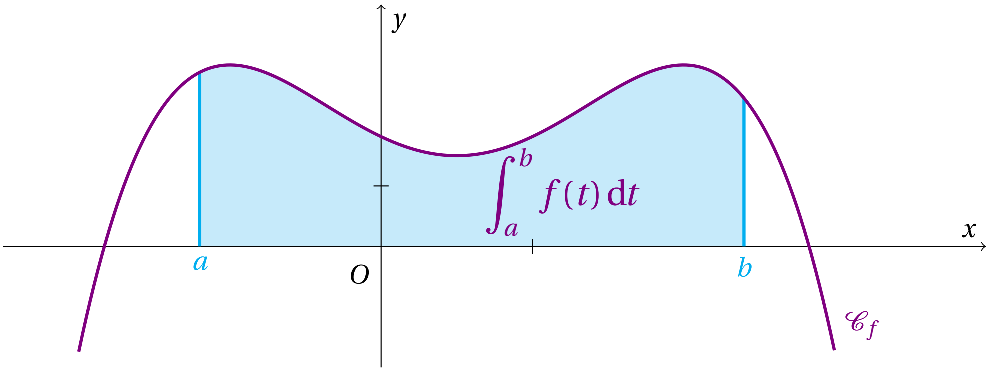
- $\displaystyle\int_1^3 3t^2+2t-1\,\mathrm{d}t=\Big[t^3+t^2-t\Big]_1^3=\big(3^3+3^2-3\big)-\big(1^3+1^2-1\big)=33-1=32.$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\Big[\ln(t)\Big]_1^e=\ln(e)-\ln(1)=1.$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(e^x-e^{-x}\right)\mathrm{d}x=\Big[e^x+e^{-x}\Big]_{-1}^1=e+e^{-1}-e^{-1}-e=0.$

Proposition 7.10

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I. Soit F une primitive de f sur I. On a alors
$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0 \quad\text{et}\quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

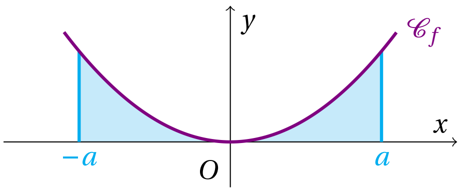
Proposition 7.11 – Interprétation géométrique

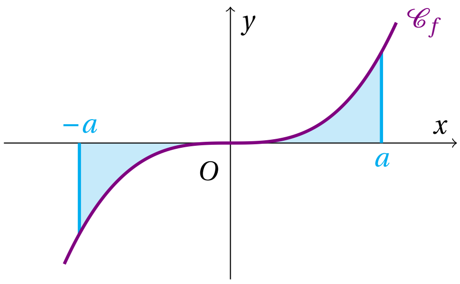
Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Proposition 7.12

- Si f est continue et paire sur $[-a; a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si f est continue et impaire sur $[-a; a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.





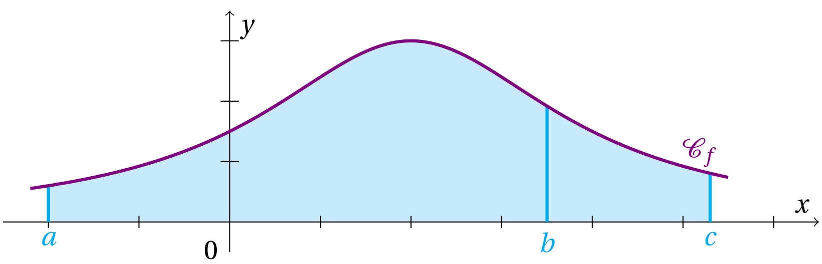
Exemple 7.13 –

- $\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0$ car la fonction $t \mapsto t^3\sqrt{t^2+1}$ est impaire sur $[-1, 1]$.
- $\int_{-1}^{1} e^{|t|}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 e^{|t|}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = 2\left[e^t\right]_0^1 = 2(e-1)$.

Proposition 7.14 – Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I. Alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Proposition 7.15 – Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soient a et b dans I. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 7.16 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$

   Posons

   $$\begin{array}{ll} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{array}$$

   Alors d'après la formule d'intégration par parties,

   $$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 1\times e^t\,\mathrm{d}t = e - \Big[e^t\Big]_0^1 = e-(e-1) = 1. \end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_1^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x$

   Posons

   $$\begin{array}{ll} u'(x) = 1 & u(x) = x \\ v(x) = \ln(x) & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

   Alors par intégration par parties,

   $$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^3 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^3 - \int_1^3 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x\ln(x)\Big]_1^3 - \int_1^3 x\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 3\ln(3) - \int_1^3 1\,\mathrm{d}x \\ &= 3\ln(3) - \Big[x\Big]_1^3 = 3\ln(3)-(3-1) = 3\ln(3)-2. \end{aligned}$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$

   Posons

   $$\begin{array}{ll} u'(x) = x & u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) = \ln(x) & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

   Alors par intégration par parties,

   $$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - \int_1^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \left(1-\frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

II – Intégrales généralisées

1 – Définitions et exemples

Définition 7.17 – Soit a un réel et soit f une fonction continue sur $[a;+\infty[$.

- On dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si l'intégrale $\int_a^{M} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque M tend vers $+\infty$.
  Lorsque c'est le cas, cette limite est notée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et est appelée **intégrale impropre** de f sur $[a;+\infty[$.
- On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge** si et seulement si elle ne converge pas.

Exemple 7.18 –

- Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
  Pour tout M de $[2;+\infty[$, on a
  $$\int_2^{M} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^M = \frac{1}{2} - \frac{1}{M}.$$
  Or $\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{M} = \frac{1}{2}$, donc l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et
  $$\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
- Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
  Pour tout M de $[0;+\infty[$, on a
  $$\int_0^{M} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^M = 1 - e^{-M}.$$
  Or $\lim_{M\to+\infty} 1 - e^{-M} = 1$, donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et
  $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$
- Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge.
  Pour tout M de $[1;+\infty[$, on a
  $$\int_1^{M} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left[\ln(x)\right]_1^M = \ln(M) - \ln(1) = \ln(M).$$
  Or $lim_{M\to+\infty} \ln(M) = +\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge.
- Montrer que l'intégrale $\int_4^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$ diverge.
  Pour tout M de $[4;+\infty[$, on a
  $$\int_4^{M} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \left[2\sqrt{u}\right]_4^M = 2\sqrt{M} - 2\sqrt{4} = 2\sqrt{M} - 4.$$
  Or $\lim_{M\to+\infty} 2\sqrt{M} - 4 = +\infty$, donc l'intégrale $\int_4^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$ diverge.

Définition 7.19 – Soit b un réel et soit f une fonction continue sur $]-\infty;b]$.

- On dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si l'intégrale $\int_{m}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque m tend vers $-\infty$.

  Lorsque c'est le cas, cette limite est notée $\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et est appelée **intégrale impropre** de f sur $]-\infty;b]$.
- On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge** si et seulement si elle ne converge pas.

Exemple 7.20 –

- Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

  Pour tout m de $]-\infty;0]$, on a

$$\int_{m}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_{m}^{0} = e^{-m}-1.$$

  Or $\lim_{m\to-\infty} e^{-m} = +\infty$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
- Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{1} e^{2t}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

  Pour tout m de $]-\infty;1]$, on a

$$\int_{m}^{1} e^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_{m}^{1} = \frac{1}{2}e^{2}-\frac{1}{2}e^{2m}.$$

  Or $\lim_{m\to-\infty} \frac{1}{2}e^{2}-\frac{1}{2}e^{2m} = \frac{1}{2}e^{2}$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{1} e^{2t}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{2}.$$

Définition 7.21 – Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

- On dit que l'**intégrale généralisée** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** lorsque pour un réel c arbitrairement choisi, les intégrales $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont toutes les deux convergentes. Dans ce cas, on note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

Remarque 7.22 –

- Une intégrale impropre n'est pas une intégrale au sens qui était celui du cours de première année : il s'agit cette fois d'une limite. En particulier, on ne peut pas intégrer $\int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par parties. En revanche, on peut faire une intégration par parties sur $\int_{a}^{M} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis passer à la limite lorsque M tend vers $+\infty$.
- En cas de convergence, la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du réel c choisi.

Définition 7.23 – Déterminer la **nature** d'une intégrale impropre consiste à déterminer si cette intégrale impropre est **convergente** ou **divergente**.

Exemple 7.24 – Étudier la nature de l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt.$$

Commençons par trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^3} = e^t(1+e^t)^{-3}.$$

f semble être de la forme $u'u^n$ avec $u(t) = 1+e^t$ et $n = -3$. Or

$$u'(t)u(t)^{-3} = e^t(1+e^t)^{-3} = f(t),$$

donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = \frac{u(t)^{n+1}}{n+1} = -\frac{u(t)^{-2}}{2} = -\frac{1}{2(1+e^t)^2}.$$

On peut maintenant étudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$.

Pour cela, on étudie la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ et $\int_{-\infty}^0 f(t)\, dt$.

Soit $M \in [0;+\infty[$. On a

$$\int_0^M \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt = \left[\frac{-1}{2(1+e^t)^2}\right]_0^M = \frac{1}{2(1+e^0)^2} - \frac{1}{2(1+e^M)^2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2(1+e^M)^2}.$$

Or $\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{8} - \frac{1}{2(1+e^M)^2} = \frac{1}{8}$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt = \frac{1}{8}.$$

Soit maintenant $m \in]-\infty;0]$. On a

$$\int_m^0 \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt = \left[\frac{-1}{2(1+e^t)^2}\right]_m^0 = \frac{1}{2(1+e^m)^2} - \frac{1}{2(1+e^0)^2} = \frac{1}{2(1+e^m)^2} - \frac{1}{8}.$$

Or $\lim_{m\to-\infty} \frac{1}{2(1+e^m)^2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2(1+0)^2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}.$$

Ainsi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt = \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\, dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

2 – Un critère de convergence

Théorème 7.25

Soit a un réel et f une fonction continue et **positive** sur $[a;+\infty[$. Soit F la fonction définie sur $[a;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On a les résultats suivants.

- La fonction F est croissante et positive sur $[a;+\infty[$.
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction F est majorée sur $[a;+\infty[)$. Autrement dit,

$$\exists K>0,\quad \forall x\in[a;+\infty[,\quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant K.$$

Exemple 7.26 – Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On introduit les fonctions F et G définies sur $[1;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x)=\displaystyle\int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
   Soit $M\geqslant 1$. On a
   $$\int_1^M e^{-t}\,\mathrm{d}t=\Big[-e^{-t}\Big]_1^M=e^{-1}-e^{-M}.$$
   Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} e^{-1}-e^{-M}=e^{-1}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et
   $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t=e^{-1}.$$

2. Montrer que, pour tout t de $[1;+\infty[$, on a $e^{-t^2}\leqslant e^{-t}$.
   Pour tout $t\geqslant 1$, on a $t^2\geqslant t$ donc $-t^2\leqslant -t$. Alors, par croissance de la fonction exponentielle,
   $$e^{-t^2}\leqslant e^{-t}.$$

3. En déduire que la fonction F est majorée sur $[1;+\infty[$.
   D'après la question précédente et par croissance de l'intégrale, on a, pour tout $x\geqslant 1$,
   $$\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
   Autrement dit, pour tout $x\geqslant 1$, $F(x)\leqslant G(x)$. Or la fonction $t\mapsto e^{-t}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$. Le théorème ci-dessus s'applique donc et la fonction G est donc croissante.
   Par ailleurs, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, la fonction G est majorée. Et grâce à l'inégalité ci-dessus, la fonction F est également majorée sur $[1;+\infty[$.

4. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
   La fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$. Le théorème ci-dessus s'applique donc. D'après la question précédente, la fonction F est majorée et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque 7.27 – Le résultat est le même pour les intégrales sur $]-\infty;b]$.

3 – Propriétés

Parmi les propriétés des intégrales définies sur un segment, certaines restent valables après passage à la limite. Voici donc les résultats adaptés au contexte des intégrales généralisées.

Proposition 7.28 – Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;+\infty[$. Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors pour tout λ et μ dans $\mathbf{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 7.29 – Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a;+\infty[$ et soit $c\in[a;+\infty[$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 7.30 – Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a;+\infty[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$,
- si f n'est pas identiquement nulle sur $[a;+\infty[$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t > 0$,
- si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors f est identiquement nulle sur $[a;+\infty[$.

Proposition 7.31 – Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;+\infty[$. On suppose que pour tout t dans $[a;+\infty[$, on a $f(t)\leqslant g(t)$ et que les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 7.32 – Les propriétés ci-dessus restent valables pour les intégrales généralisées du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.