VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

- f est une **densité** si et seulement si
  - ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) \geqslant 0$.
  - ▷ f n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité.
  - ▷ L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
- Je connais la **densité** et je cherche la **fonction de répartition** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Lien entre **fonction de répartition** et **probabilité** :

$$F_X(x) = P\big(X \leqslant x\big).$$

- Je connais la **fonction de répartition** et je cherche la **densité** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F_X'(x) \qquad \textit{(sauf éventuellement en un nombre fini de points).}$$

- Calculs de **probabilités** en connaissant la **fonction de répartition** :

$$P\big(X \leqslant a\big) = F_X(a), \qquad P\big(X \geqslant a\big) = 1 - F_X(a) \quad \text{et} \quad P\big(a \leqslant X \leqslant b\big) = F_X(b) - F_X(a).$$

- Calculs de **probabilités** en connaissant la **densité** :

$$P\big(X \leqslant a\big) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad P\big(X \geqslant a\big) = \int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad P\big(a \leqslant X \leqslant b\big) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Espérance et variance *(sous réserve de convergence)* :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad E\big(X^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2.$$

- Loi **uniforme** sur l'intervalle $\big[a, b\big]$: (*3 morceaux*)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant t \leqslant b, \\ 0 & \text{si } t > b. \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases} \qquad E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- Loi **exponentielle** de paramètre λ : (*2 morceaux*)

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- Loi **normale** : se ramener à la loi normale centrée réduite en utilisant que

$$X \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}\big(m, \sigma^2\big) \iff \frac{X-m}{\sigma} \text{ suit la loi normale centrée réduite } \mathcal{N}\big(0,1\big).$$