8 | Réduction des matrices carrées

Dans ce chapitre, toutes les matrices sont **carrées** et $n \in \mathbb{N}^*$ désigne un entier non nul.

I – Matrice diagonalisable

1 – Définition

Définition 8.1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que la matrice A est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **inversible** et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **diagonale** telle que

$$A = PDP^{-1}.$$

Remarque 8.2 –

- On sait que $A = PDP^{-1} \iff P^{-1}AP = D$.
  Je suppose que $A = PDP^{-1}$. Alors $P^{-1} \times A \times P = P^{-1}P \times D \times P^{-1}P = I_n \times D \times I_n = D$.
  Réciproquement si $D = P^{-1}AP$, alors $P \times D \times P^{-1} = PP^{-1} \times A \times PP^{-1} = I_n \times A \times I_n = A$.
- *Diagonaliser* une matrice A revient à déterminer les deux matrices D et P, respectivement diagonale et inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 8.3 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que la matrice A est diagonalisable, en utilisant les matrices P et D.
La matrice D est bien une matrice diagonale. Je montre ensuite que P est inversible et calcule P^{-1}.
Je calcule le déterminant : $\det(P) = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -1 - 1 = -2$.
Comme $\det(P) \neq 0$, alors P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{-2} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Alors il ne me reste plus qu'à vérifier que PDP^{-1} est bien égal à A :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je retrouve bien la matrice A donc $A = PDP^{-1}$, avec P inversible et D diagonale.
J'ai bien montré que la matrice A est diagonalisable.

Proposition 8.4

Soient A une matrice carrée, D une matrice diagonale et P une matrice inversible.

Si $AP = PD$, alors la matrice A est diagonalisable.

Exemple 8.5 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est diagonalisable à l'aide des matrices P et D.
La matrice D est bien une matrice diagonale et la matrice P est bien inversible puisque son déterminant vaut $\det(P) = 1 \times (-1) - 1 \times 3 = -1 - 3 = -4 \neq 0$.

Je calcule alors les produits AP et PD :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $AP = PD$, alors j'ai bien montré que la matrice A est diagonalisable.

Remarque 8.6 – En effet, comme P est supposée inversible, il suffit de multiplier à droite par P^{-1} pour retrouver la formule de la définition. Ainsi on remarque qu'il n'est pas toujours nécessaire de calculer P^{-1} pour montrer qu'une matrice est diagonalisable.

2 – Application au calcul de puissance

Proposition 8.7

Soit A une matrice. On suppose qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Démonstration. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors comme $A = PDP^{-1}$,

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^n\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

□

Remarque 8.8 – Si le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire pour montrer qu'une matrice A est diagonalisable, il est cependant **indispensable** pour obtenir une expression explicite des puissances de A, ce qui est souvent ce que l'on cherche à obtenir.

II – Valeurs propres et vecteurs propres

1 – Définition

Définition 8.9 – Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel.

- On dit que λ est une **valeur propre** de la matrice A si et seulement si

$$\text{il existe } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \textbf{ non nul} \text{ tel que } AX = \lambda X.$$

- La matrice colonne X est alors appelée **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

Exemple 8.10 – On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M et préciser les valeurs propres associées.

La matrice colonne $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est non nulle et

$$M \times V_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-4 \\ -8+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1.$$

Donc V_1 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 1.

La matrice colonne $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nulle et

$$M \times V_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2-5 \\ -5+4-5 \\ 8-8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \times V_2.$$

Donc V_2 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 6.

La matrice colonne $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est non nulle et

$$M \times V_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5 \\ -5+5 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \times V_3.$$

Donc V_3 est un vecteur propre de M pour la valeur propre -2.

Proposition 8.11

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Il n'y a que deux possibilités pour l'ensemble des solutions de l'équation $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- Cet ensemble contient uniquement la matrice colonne nulle, auquel cas λ **n'est pas** valeur propre de A.
- Cet ensemble contient aussi d'autres matrices non nulles, auquel cas λ est valeur de propre de A et n'importe quelle matrice **non nulle** de cet ensemble est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Corollaire 8.12

Un réel λ est une valeur propre d'une matrice A si et seulement si l'équation matricielle $AX = \lambda X$ admet une solution X non nulle.

Exemple 8.13 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. Les réels 2 et 3 sont-ils valeurs propres de A ? Si oui, déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre.

Je commence par 3 et cherche les solutions $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'équation matricielle $AX = 3X$.

$$AX = 3X \iff \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -6y + 6z = 3x \\ -x - 5y + 6z = 3y \\ -x - 8y + 9z = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - 6y + 6z = 0 \\ -x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 8y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - 2y + 2z = 0 \\ -x - 8y + 6z = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow \tfrac{1}{3} L_1$$

Après avoir simplifié chaque équation, je remarque que les deux dernières sont égales.
J'obtiens alors un système à un degré de liberté (3 inconnues pour 2 équations).
Je choisis de fixer une variable, $x = 1$ par exemple, et le système devient

$$\begin{cases} -x - 2y + 2z = 0 \\ -x - 8y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2y + 2z = 1 \\ -8y + 6z = 1 \end{cases}$$

Alors l'opération $L_2 - 3L_1$ me donne

$$\big(-8 - 3 \times (-2)\big)y + \big(6 - 3 \times 2\big)z = 1 - 3 \times 1 \iff -2y = -2 \iff y = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Puis en réinjectant cette valeur de y dans L_1, j'obtiens que

$$-2 \times 1 + 2z = 1 \iff -2 + 2z = 1 \iff 2z = 1 + 2 = 3 \iff z = \frac{3}{2}.$$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ est **une** solution de l'équation $AX = 3X$. Cette solution est non nulle, donc $\lambda = 3$ est une valeur propre de A et X est un vecteur propre associé.

Je raisonne de la même manière pour $AX = 2X$.

$$AX = 2X \iff \begin{cases} -6y + 6z = 2x \\ -x - 5y + 6z = 2y \\ -x - 8y + 9z = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - 6y + 6z = 0 \\ -x - 7y + 6z = 0 \\ -x - 8y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ -x - 7y + 6z = 0 & \\ -y + z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ -2y = 0 \\ z = y \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est **l'unique** solution de l'équation $AX = 2X$.
Donc $\lambda = 2$ n'est pas valeur propre de A.

2 – Polynôme annulateur de A

Définition 8.14 – Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polynôme. On définit le **polynôme matriciel** $P(A)$ comme étant la matrice carrée

$$P(A) = a_d A^d + a_{d-1}A^{d-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

On dit que le polynôme $P(x)$ est un **polynôme annulateur** de la matrice A lorsque le polynôme matriciel $P(A)$ est égal à la matrice nulle 0_n.

Exemple 8.15 – Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Si $P(x) = x^2 + 2x$, alors $P(A) = A^2 + 2A$.
2. Si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, alors $P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A + I_3$.
3. Si $P(x) = -3$, alors $P(A) = -3I_3$.

Remarque 8.16 – On note la présence de la matrice identité comme évaluation du terme constant.

Exemple 8.17 – On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de M.

Je calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, puis la somme, coefficient par coefficient :

$$M^3 + M^2 + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Donc $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ est bien un polynôme annulateur de la matrice M.

Proposition 8.18

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice.

Le polynôme $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de A.

Démonstration.
Je calcule d'abord $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$ puis j'en déduis la somme :

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_3 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(a+d)a & -(a+d)b \\ -(a+d)c & -(a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ab - db \\ ca + dc - ac - dc & cb + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2. \end{aligned}$$

Donc le polynôme $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ est bien un polynôme annulateur de A. □

Exemple 8.19 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Donner un polynôme annulateur de A.

J'applique simplement la formule de la proposition précédente.
Le polynôme $x^2 - (1+4)x + (1\times 4 - 2\times 3) = x^2 - 5x - 2$ est un polynôme annulateur de A.

Théorème 8.20

Soient A une matrice carrée et $P(x)$ un polynôme annulateur de A.

Toute valeur propre λ de A est racine du polynôme $P(x)$.

ATTENTION ! Ce résultat indique **seulement** que les valeurs propres de A sont **nécessairement** des racines du polynôme $P(x)$. Mais il peut aussi y avoir des racines du polynôme $P(x)$ qui **ne sont pas** des valeurs propres de A.

Exemple 8.21 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 - x$ est un polynôme annulateur de A.

   Je calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis la somme, coefficient par coefficient :

   $$A^3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

   Donc $P(x) = x^3 - x$ est bien un polynôme annulateur de la matrice A.

2. En déduire les valeurs propres possibles de A.

   Il me faut trouver les racines du polynôme $P(x)$. Pour cela, je factorise

   $$x^3 - x = x\left(x^2 - 1\right) = x(x-1)(x+1).$$

   Ainsi les racines de $P(x)$, qui sont aussi les valeurs propres **possibles** pour A, sont

   $$0, \qquad 1 \quad \text{et} \quad -1.$$

3. Déterminer lesquelles sont bien des valeurs propres de A.

   Il me faut tester chacune des trois valeurs, donc résoudre les trois systèmes associés aux équations matricielles $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = -X$, d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   $$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & & & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

   $$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & z & = & x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x \\ y & = & x \end{array} \right.$$

   Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = 0$.

   Et comme cette matrice colonne est non nulle, alors 0 est bien valeur propre de A.

$$AX = X \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & & & + & 2z & = & x \\ x & + & y & - & 2z & = & y \\ -x & & & + & z & = & z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3x & + & 2z & = & 0 \\ x & - & 2z & = & 0 \\ -x & & & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = X$.

Et comme cette matrice colonne est non nulle, alors 1 est bien valeur propre de A.

$$AX = -X \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & & & + & 2z & = & -x \\ x & + & y & - & 2z & = & -y \\ -x & & & + & z & = & -z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ -x & & & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = X$.

Et comme cette matrice colonne est non nulle, alors -1 est bien valeur propre de A.

Finalement 0, 1 et -1 sont les trois valeurs propres associées à la matrice A, avec pour vecteurs propres associés

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 8.22 – Comme déjà vu dans le Chapitre 5, avoir une égalité matricielle impliquant des puissances permet de trouver l'inverse d'une matrice. C'est évidemment le cas lorsque l'on connaît un polynôme annulateur. Cette fois encore, l'objectif est de se ramener à une expression de la forme $A \times (\cdots) = I_n$. Alors le facteur entre parenthèses est l'inverse de la matrice A.

Exemple 8.23 – Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, dont $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur, est inversible et donner son inverse.

J'ai déjà montré dans un exemple précédent que le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de la matrice M. En particulier, j'en déduis que

$$M^3 + M^2 + I_3 = 0_3 \iff M^3 + M^2 = -I_3 \iff M \times \left(M^2 + M\right) = -I_3 \iff M \times \left(-M^2 - M\right) = I_3.$$

Donc la matrice M est inversible et $M^{-1} = -M^2 - M$.

Méthode 8.24 – Diagonaliser une matrice
En pratique, les matrices P et D nécessaires à la diagonalisation d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ s'obtiennent grâce aux éléments propres :

- La matrice P contient la juxtaposition des n vecteurs propres de la matrice A.
- La matrice D contient les n valeurs propres de la matrice A sur sa diagonale.

Dans le cas général, il y a plusieurs conditions à vérifier.
Dans le cadre du programme, on se contente de vérifier que pour ces matrices P et D, la matrice A est diagonalisable.

Exemple 8.25 – On reprend l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On introduit alors, selon les éléments propres de la matrice A, les deux matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
J'utilise ici la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \left| \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \right. \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \left| \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \right.$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right) \left| \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \right.$$

À ce moment là, je sais déjà que P est inversible, puisque la matrice obtenue après opérations élémentaires est une matrice triangulaire supérieure, inversible puisque tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Je continue cependant le procédé afin d'obtenir l'inverse de P, comme demandé par l'énoncé (ce qui n'est pas toujours le cas).

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right) \left| \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \right. \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right) \left| \left(\begin{matrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \right.$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \left| \left(\begin{matrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right) \right.$$

Finalement, j'avais déjà établi que la matrice P est inversible et j'obtiens la matrice inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier que $AP = PD$. Conclure.
Il me suffit d'effectuer les deux produits matriciels et de vérifier qu'ils sont égaux.

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 & 0 & -4+2 \\ 1+1-2 & 1 & 2-2 \\ -1+1 & 0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Je conclus alors que la matrice A est diagonalisable car $AP = PD \iff A = PDP^{-1}$, avec D diagonale et P inversible.