EXERCICES — CHAPITRE 11&14

Intégrales et primitives

Exercice 1 – Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide.

1. $f_1(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f_2(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
3. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3}$
4. $f_5(x) = (7x+1)^8$
5. $f_6(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
6. $f_8(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 2 – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$.

1. $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{2}$
2. $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3} + 1$

Exercice 3 – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$.

1. $f(x) = 3x + \dfrac{3}{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

Exercice 4 – Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x - 1$ et $F\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
2. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + \dfrac{1}{2}$ et $F(1) = 0$.
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2} + 1$ et $F(1) = 2$.
4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x^2}$ et $F(1) = -\dfrac{1}{4}$.
5. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $F(1) = 1$.

Exercice 5 – Soit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et $G(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x+1}$. Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

Exercice 6 – Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-4x}{(2x^2+x-1)^2}$.

Montrer que la fonction G définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $G(x) = \dfrac{2x^2}{2x^2+x-1}$ est une primitive de la fonction f.

Exercice 7 – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f.

1. f est définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{3}{(2x-1)^3}$.
2. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x+1)(x^2+2x-3)^3$.
3. f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$.
4. f est définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{4}{(1-2x)^2}$.

Exercice 8 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x + 1\right) dx$,
2. $B = \displaystyle\int_{2}^{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right) dx$.

Exercice 9 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{3} (x^3 + x - 2)\, dx$,
2. $I_2 = \displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\, dx$,
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\, dt$.

Exercice 10 – Montrer que la fonction F définie sur $]1;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_2^3 \frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2}\, dx.$$

Exercice 11 – Montrer que la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = 12x^2(x^3+1)^3$ est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = (x^3+1)^4.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^1 (x^3+1)^4\,dx.$$

Complément d'intégration

Exercice 12 – Calculer les intégrales suivantes

1. $I_1 = \int_0^1 e^{3x}\,dx$
2. $I_2 = \int_1^e \frac{-2}{x}\,dx$
3. $I_3 = \int_{-2}^2 e^x - e^{-x}\,dx$
4. $I_4 = \int_1^2 \frac{1}{4x}\,dx$
5. $I_5 = \int_0^1 e^{2x} + \frac{e^x}{4}\,dx$

Exercice 13 – Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $I_6 = \int_0^1 te^{2t}\,dt$
2. $I_7 = \int_1^2 t\ln(t)\,dt$
3. $I_8 = \int_0^1 (x^2+1)e^{3x}\,dx$
4. $I_9 = \int_1^e x^2\ln(x)\,dx$

Exercice 14 – L'objectif est de calculer les intégrales $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$.

1. **Calcul de I.** Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par
$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).$$
   (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) En déduire la valeur de I.
2. **Calcul de J et K.**
   (a) Sans calculer explicitement les intégrales J et K, vérifier que $J + 2I = K$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
   (c) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 15 – Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n\,dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite I_n et montrer qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
4. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 16 – Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a
$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n.$$
2. Calculer $\int_0^1 x^n\,dx$ puis en déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (I_n).
4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx = 1$.
5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $J_n = nI_n$.
   (a) Montrer que $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.
   (Indication : Penser à une intégration par parties.)
   (b) Montrer que
$$\forall t \geq 0,\quad 0 \leq \ln(1+t) \leq t.$$
   (c) En déduire la limite de la suite (J_n).

Exercice 17 – Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx.$$

1. (a) Calculer J_1.
   (b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
   (c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geq1}$.
2. (a) En intégrant par parties, montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}.$$
   (b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geq1}$.