14 Compléments d'intégration

I – Primitive des fonctions logarithme & exponentielle

Les fonctions logarithme et exponentielle étant connues, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les lignes suivantes.

f **est définie sur** I **par**	**une primitive** F **est donnée par**
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\left(\lvert x\rvert\right)$
$f=u'e^u$	$F=e^u$
$f=\dfrac{u'}{u}$	$F=\ln\left(\lvert u\rvert\right)$

Remarque 14.1 – On pourra retenir en particulier que la primitive d'une fonction de la forme $f(x)=e^{ax}$ (avec $a\neq 0$) est donnée par

$$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax}.$$

Exemple 14.2 – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x)=e^{2x}$
   $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}$
2. $f(x)=\dfrac{2}{x}$
   $F(x)=2\ln\lvert x\rvert$
3. $f(x)=e^{3x}-e^{-x}$
   $F(x)=\dfrac{1}{3}e^{3x}+e^{-x}$
4. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$
   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+1$. On a $u'(x)=2x$ donc
   $$\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x}{x^2+1}=2f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x)=\frac{1}{2}\ln\lvert u(x)\rvert=\frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$
5. $f(x)=xe^{x^2}$
   f semble être de la forme $u'e^u$ avec $u(x)=x^2$. On a $u'(x)=2x$ donc
   $$u'(x)e^{u(x)}=2xe^{x^2}=2f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x)=\frac{1}{2}e^{u(x)}=\frac{1}{2}e^{x^2}.$$

II – Formule d'intégration par parties

Proposition 14.3

Soient u et v deux fonctions dérivables et soient a et b deux réels. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 14.4 –

- On peut résumer la formule d'intégration par parties de la manière suivante :

$$\int u'v = \Big[uv\Big] - \int uv'.$$

- La formule d'intégration par parties permet de calculer des intégrales lorsque l'on ne sait pas trouver de primitive de la fonction à intégrer. Il faut alors choisir les fonctions u et v adéquates.
  Pour des intégrales impliquant la fonction exponentielle, on choisira souvent la fonction exponentielle pour la fonction **à intégrer** (*i.e.* u').
  Inversement, pour des intégrales impliquant la fonction logarithme, on choisira la fonction logarithme pour la fonction **à dériver** (*i.e.* v).

Exemple 14.5 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$
   Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(t) & = & e^t & \quad & u(t) & = & e^t \\ v(t) & = & t & & v'(t) & = & 1 \end{array}$$

   Alors d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 1\times e^t\,\mathrm{d}t = e - \Big[e^t\Big]_0^1 = e-(e-1) = 1. \end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$
   Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & x & \quad & u(x) & = & \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) & = & \ln(x) & & v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

   Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - \int_1^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \left(1-\frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

3. $I_3 = \int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$

   Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) &=& 1 & & u(x) &=& x \\ v(x) &=& \ln(x) & & v'(x) &=& \dfrac{1}{x} \end{array}$$

   Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^e u'(x)v(x)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = e - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x \\ &= e - \Big[x\Big]_1^e = e-(e-1) = 1. \end{aligned}$$

III – Intégrales et inégalités

On suppose dans cette partie que $a \leqslant b$.

Proposition 14.6 – Positivité de l'intégrale

- Si f est continue et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Si f est continue et positive sur $[a,b]$ et que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

Remarque 14.7 – En particulier, si f est continue, positive et non-identiquement nulle sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Proposition 14.8 – Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $\forall t \in [a,b], f(t) \leqslant g(t)$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 14.9 – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer u_1.

   On a

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Il nous faut donc trouver une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Cette fonction semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + x^2$. On a $u'(x) = 2x$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{u(x)}\right) = -\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2\left(1+1^2\right)} + \frac{1}{2\left(1+0^2\right)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2} \leqslant x^n.$$

Il est clair que l'on a $0 \leqslant \dfrac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}$. Par ailleurs, on a

$$1 + x^2 \geqslant 1.$$

Donc

$$\left(1+x^2\right)^2 \geqslant 1^2 = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} \leqslant \frac{1}{1} = 1.$$

Donc

$$\frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2} \leqslant x^n \times 1 = x^n.$$

Ainsi, on a bien le résultat demandé.

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$ et

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi on a bien

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.