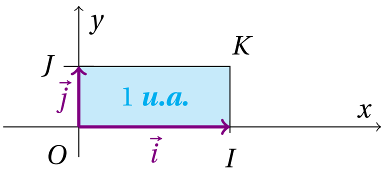
11 | Intégrales et primitives

I – Intégrale et aire

1 – Unité d'aire

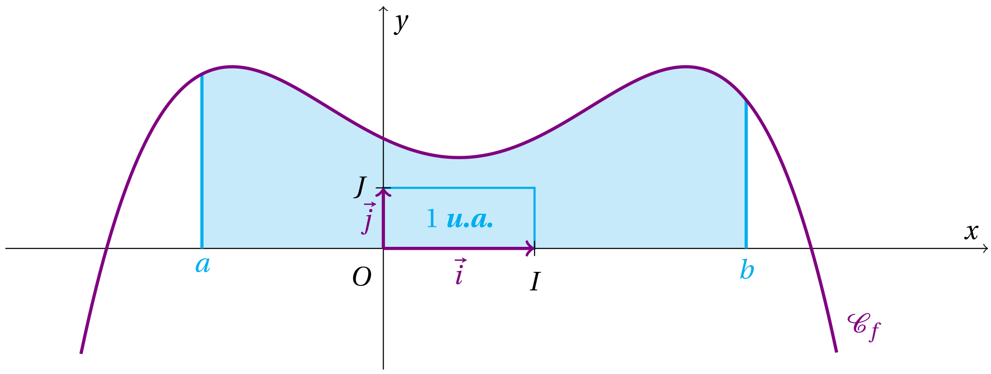
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée *u.a.*, est l'aire du rectangle unitaire $OIJK$ avec $I(0;1)$, $J(1;0)$ et $K(1;1)$.



2 – Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 11.1 – Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Ce nombre est noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



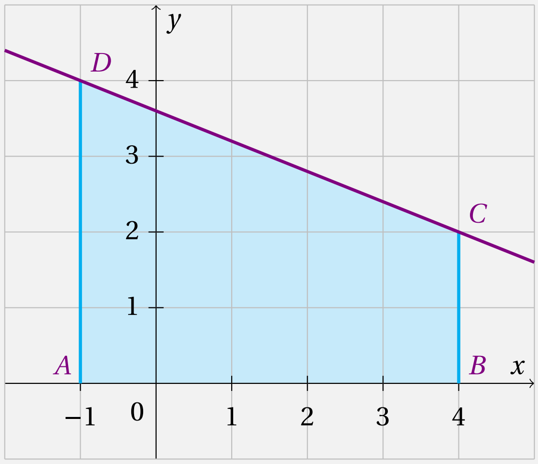
Remarque 11.2 –

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit "intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$".
- Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- La variable x est dite "muette", elle n'intervient pas dans le résultat. C'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

Exemple 11.3 – Calculer $\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x+3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$. L'intégrale $\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

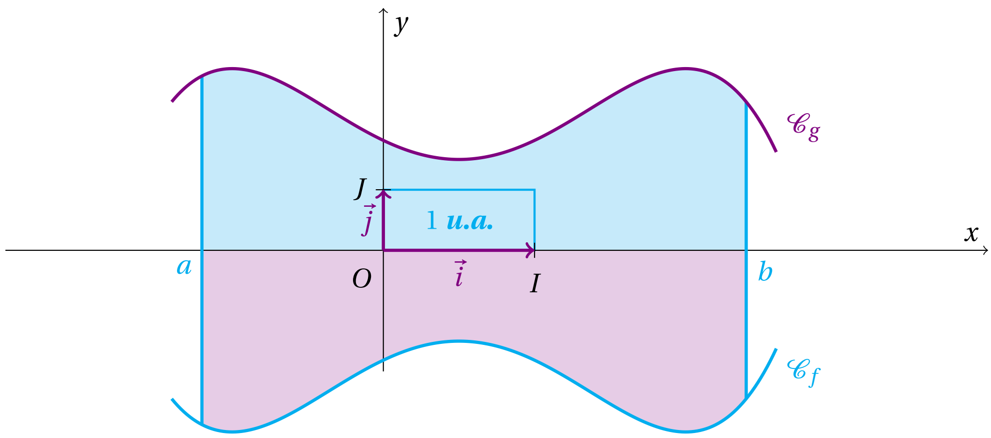
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x &= \frac{(AD+BC)\times AB}{2}\\ &= \frac{(4+2)\times 5}{2}\\ &= 15.\end{aligned}$$



3 – Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_g$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Définition 11.4 – Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathscr{A}.$$

4 – Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 11.5

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

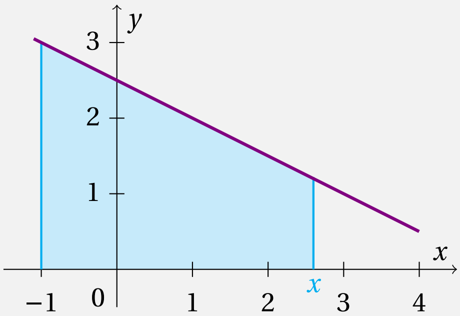
Exemple 11.6 – Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ est égale à l'aire du trapèze colorié. On a donc

$$F(x) = \frac{\big(3 + (-0,5x + 2,5)\big) \times (x+1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}.$$

La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et

$$F'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x).$$



II – Primitives

1 – Définition

Définition 11.7 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive de la fonction f sur I** si F est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 11.8 –

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbf{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = 3x^3 + 6x = f(x)$.
- $G : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbf{R}$ de $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $G'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$.
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H = x \mapsto x^2 + c$, $c \in \mathbf{R}$ sont des primitives sur $\mathbf{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x = f(x)$.

Remarque 11.9 –

- Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle **d'une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.

Théorème 11.10

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est la forme $F + c$ où c est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné. Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbf{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 11.11 – La fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $F(1) = 0$.
En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = 2x = f(x)$ et $F(1) = 1^2 - 1 = 0$.

2 – Primitives des fonctions usuelles

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants.

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

f **est définie sur** I **par**	**une primitive** F **est donnée par**	**validité**
$f(x) = a \qquad (a \in \mathbf{R})$	$F(x) = ax$	sur $\mathbf{R}$
$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbf{N})$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbf{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \qquad (n > 2 \text{ entier})$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0;+\infty[$

Exemple 11.12 – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2$
   $F(x) = 3 \times \dfrac{1}{3}x^3 + C = x^3 + C$
2. $f(x) = x + \dfrac{3}{2}$
   $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x + C$
3. $f(x) = (2x+1)(x-3)$
   Tout d'abord, développons $f(x) = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$.
   Ainsi une primitive est donnée par $F(x) = 2 \times \dfrac{1}{3}x^3 - 5 \times \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + C = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 3x + C$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
   $F(x) = -\dfrac{1}{x} + C$
5. $f(x) = x^2 + 3x + \dfrac{1}{x^2}$
   $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{x} + C$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$
   $F(x) = -\dfrac{1}{4x^4} + C$
7. $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2\sqrt{x} + C$
8. $f(x) = \dfrac{6x^2 - 8x + 2}{5}$
   $F(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{5} + C$
9. $f(x) = -\dfrac{6}{x^4}$
   $F(x) = -\dfrac{6}{3x^3} = -\dfrac{2}{x^3} + C$

3 – Primitive des fonctions composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Conditions	**fonction f**	**une primitive F est donnée par**
$n \in \mathbf{N}$, $n > 0$	$f = u' \times u^n$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f = \dfrac{u'}{u^2}$	$F = -\dfrac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I et $n > 1$	$f = \dfrac{u'}{u^n}$	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$

Exemple 11.13 – Calculer des primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x+1)^2$
   f semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = 2x+1$. On a $u'(x) = 2$ donc
   $$u'(x)u(x)^2 = 2(2x+1)^2 = 2f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{1}{6}(2x+1)^3.$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$
   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x+1$. On a $u'(x) = 1$ donc
   $$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x+1}.$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(1-3x)^2}$
   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1-3x$. On a $u'(x) = -3$ donc
   $$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} = -3f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{-3} \times \left(-\frac{1}{u(x)}\right) = \frac{1}{-3} \times \left(-\frac{1}{1-3x}\right) = \frac{1}{3(1-3x)}.$$

4. $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$
   f semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = x^2-x+1$. On a $u'(x) = 2x-1$ donc
   $$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)(x^2-x+1)^3 = f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2-x+1)^4}{4}.$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x+2$. On a $u'(x) = 1$ donc

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x+2}.$$

III – Intégrale d'une fonction continue

1 – Définition

Définition 11.14 – Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I. L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Remarque 11.15 –

- La différence $F(b) - F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$. Ainsi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 11.16 –

- $\displaystyle\int_1^3 3t^2 + 2t - 1\,\mathrm{d}t = \Big[t^3 + t^2 - t\Big]_1^3 = \left(3^3 + 3^2 - 3\right) - \left(1^3 + 1^2 - 1\right) = 33 - 1 = 32.$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Proposition 11.17

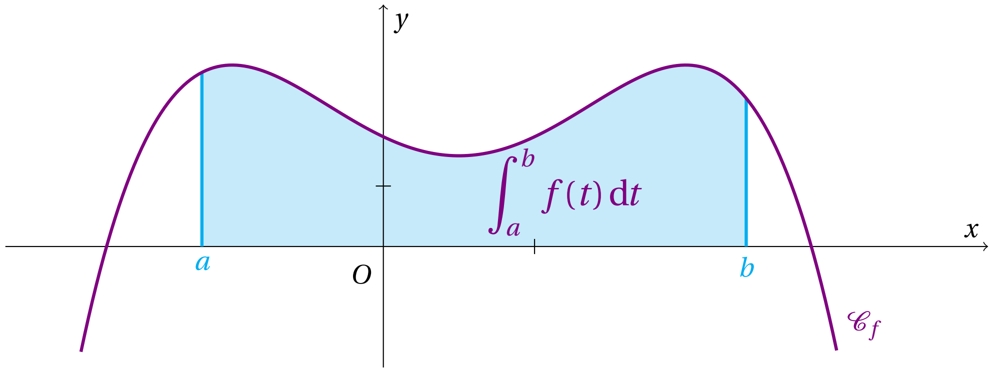
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I. Soit F une primitive de f sur I. On a alors

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 – Premières propriétés

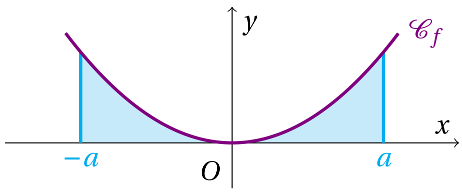
Proposition 11.18

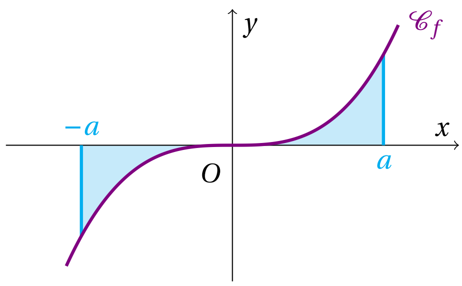
Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Proposition 11.19

- Si f est continue et paire sur $[-a;a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si f est continue et impaire sur $[-a;a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.





Exemple 11.20 –

- $\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0.$
- $\int_{-1}^{1} t^2+|t|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^2+|t|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^2+t\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3}.$

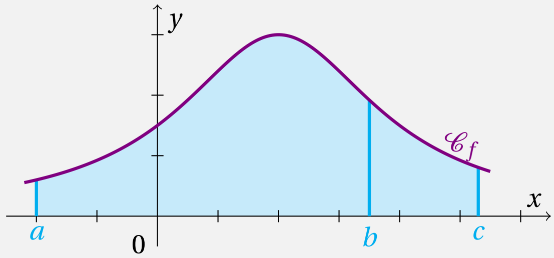
Proposition 11.21 – Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I. Alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 11.22 – Interprétation graphique
Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=c$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=b$ et $x=c$.



Proposition 11.23 – Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel λ, on a

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 11.24 – Soit a un réel et f la fonction définie sur $[-1;1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Vérifier que $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Par la relation de Chasles, on a

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Puis, par linéarité,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^0 \frac{1-a}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1+a}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1-a}{2}\int_{-1}^0 1\,\mathrm{d}x + \frac{1+a}{2}\int_0^1 1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-a}{2}\Big[x\Big]_{-1}^0 + \frac{1+a}{2}\Big[x\Big]_0^1 = \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1.\end{aligned}$$

14 | Complément d'intégration

I – Primitive des fonctions logarithme & exponentielle

Les fonctions logarithme et exponentielle étant connues, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les lignes suivantes.

f **est définie sur** I **par**	**une primitive** F **est donnée par**
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\left(\lvert x\rvert\right)$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln\left(\lvert u\rvert\right)$

Remarque 14.1 – On pourra retenir en particulier que la primitive d'une fonction de la forme $f(x) = e^{ax}$ (avec $a \neq 0$) est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax}.$$

Exemple 14.2 – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{2x}$
   $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

2. $f(x) = \dfrac{2}{x}$
   $F(x) = 2\ln|x|$

3. $f(x) = e^{3x} - e^{-x}$
   $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + e^{-x}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$. On a $u'(x) = 2x$ donc

   $$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1} = 2f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

   $$F(x) = \frac{1}{2}\ln|u(x)| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

5. $f(x) = xe^{x^2}$
   f semble être de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$. On a $u'(x) = 2x$ donc

   $$u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2} = 2f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

   $$F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

II – Formule d'intégration par parties

Proposition 14.3

Soient u et v deux fonctions dérivables et soient a et b deux réels. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

Remarque 14.4 –

- On peut résumer la formule d'intégration par parties de la manière suivante :

$$\int u'v = \Big[uv\Big] - \int uv'.$$

- La formule d'intégration par parties permet de calculer des intégrales lorsque l'on ne sait pas trouver de primitive de la fonction à intégrer. Il faut alors choisir les fonctions u et v adéquates.
  Pour des intégrales impliquant la fonction exponentielle, on choisira souvent la fonction exponentielle pour la fonction **à intégrer** (*i.e.*, u').
  Inversement, pour des intégrales impliquant la fonction logarithme, on choisira la fonction logarithme pour la fonction **à dériver** (*i.e.*, v).

Exemple 14.5 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 te^t\,dt$
   Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(t) & = & e^t & \quad & u(t) & = & e^t \\ v(t) & = & t & & v'(t) & = & 1 \end{array}$$

   Alors d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,dt \\ &= \Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 1\times e^t\,dt = e - \Big[e^t\Big]_0^1 = e-(e-1) = 1. \end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,dx$
   Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & x & \quad & u(x) & = & \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) & = & \ln(x) & & v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

   Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 u'(x)v(x)\,dt = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,dx = 2\ln(2) - \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx \\ &= 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \left(1-\frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

3. $I_3 = \int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$

   Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & 1 & & u(x) & = & x \\ v(x) & = & \ln(x) & & v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

   Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^e u'(x)v(x)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e x\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = e - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x \\ &= e - \Big[x\Big]_1^e = e-(e-1) = 1. \end{aligned}$$

III – Intégrales et inégalités

On suppose dans cette partie que $a \leq b$.

Proposition 14.6 – Positivité de l'intégrale

- Si f est continue et positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
- Si f est continue et positive sur $[a;b]$ et que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a;b]$.

Remarque 14.7 – En particulier, si f est continue, positive et non-identiquement nulle sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Proposition 14.8 – Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que $\forall t \in [a;b], f(t) \leq g(t)$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 14.9 – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer u_1.

   On a

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Il nous faut donc trouver une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Cette fonction semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=1+x^2$. On a $u'(x)=2x$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2}=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{u(x)}\right)=-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}u_1=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x&=\left[-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right]_0^1\\&=-\frac{1}{2\left(1+1^2\right)}+\frac{1}{2\left(1+0^2\right)}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $x\in[0;1]$ et pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on a

$$0\leq\frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}\leq x^n.$$

Il est clair que l'on a $0\leq\dfrac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}$. Par ailleurs, on a

$$1+x^2\geq 1.$$

Donc

$$\left(1+x^2\right)^2\geq 1^2=1.$$

Donc

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\leq\frac{1}{1}=1.$$

Donc

$$\frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}\leq x^n\times 1=x^n.$$

Ainsi, on a bien le résultat demandé.

3. En déduire que

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad 0\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x\leq\int_0^1\frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x\leq\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=0$ et

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{0}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Ainsi on a bien

$$0\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}.$$

4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}0=0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.