

EXERCICES — CHAPITRE 13

Exercice 1 (★★) – Simplifier les écritures suivantes.

- | | |
|--|---|
| 1. $(e^x)^2 - \frac{1}{e^{-2x}}$
2. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
3. $e^{-x} \left(e^{2x} - \frac{1}{e^x} \right)$
4. $\frac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}$ | 5. $\frac{(e^{x+2})^2}{e^{2x-1}}$
6. $\ln(e^{2x+1} \times e^{2-x})$
7. $\frac{e^{2x+\ln(2)}}{e^{-x}}$
8. $\frac{e^{x+\ln(8)}}{e^{x-\ln(2)}}$ |
|--|---|

Exercice 2 (★★) – Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

- | | |
|--|---|
| 1. $e^{x^2+2x-3} = 1$
2. $\frac{e^{x^2-3}}{e^{2x+1}} = e^{-3x+8}$
3. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$ | 4. $\ln(e^{x+1}) = e^{x+1} + x$
5. $e^{\ln(x^2+1)} - \ln(e^{1-x^2}) = \frac{1}{2}$
6. $\ln(e^{-x}) + e^{-\ln(x)} = 0$ |
|--|---|

Exercice 3 (★★) – Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| 1. $e^{\frac{1}{x}} \geq e$ | 2. $e^{x^2-10x+21} \geq 1$ |
|-----------------------------|----------------------------|

Exercice 4 (★★) – Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$.

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $f(x) = e^{2x} - 1$
2. $f(x) = xe^x - 2$
3. $f(x) = 4 - 2x + e^x$
4. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ | 5. $f(x) = e^{-x}$
6. $f(x) = \frac{1}{x} + 1 - 3e^x$
7. $f(x) = \frac{e^x + 1}{x^2 - x}$
8. $f(x) = \exp\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$ | 9. $f(x) = e^{x^2-3x+1}$
10. $f(x) = (1-2x)e^x$
11. $f(x) = x + 1 + xe^x$
12. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ |
|---|--|---|

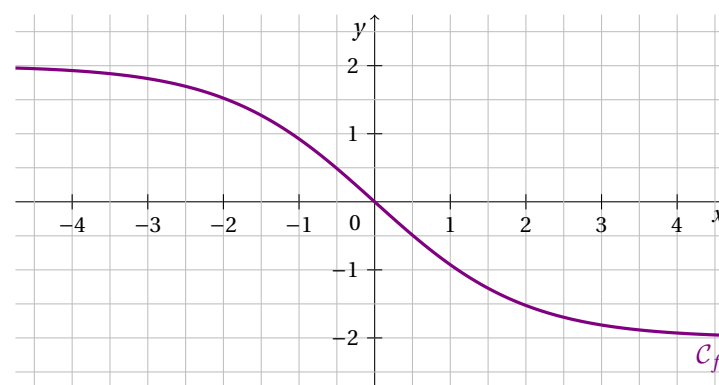
Exercice 5 (★★★) – Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0.

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x}$ | 2. $f(x) = \frac{2x}{e^x - 1}$ | 3. $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$ |
|----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|

Exercice 6 (★★) – Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2} - (e^x)^2$
2. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{1-x}}$
3. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x^2} \times e^{x^2-2x+1}$

Exercice 7 (★★★) – On a tracé ci-dessous, la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4}{1+e^x} - 2$.



1. a) Calculer $f(-\ln(7))$ et $f(\ln(3))$.
b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$.
2. La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes?
3. a) On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
b) Étudier les variations de la fonction f .
4. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\ln(3)$.

Exercice 8 (★★★) – Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de f .
3. En déduire que pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq 2$.

Exercice 9 (★ ★ ★) – Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$.

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x , $f'(x) = (2x-5) \times e^{-x}$.
b) Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

Exercice 10 (★ ★ ★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (4-x)e^x - 2$.

1. a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes?
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
b) Étudier les variations de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
4. Tracer les asymptotes, la tangente \mathcal{T} et la courbe \mathcal{C}_f .

Indication numérique : $e^2 \approx 7.4$ et $e^3 \approx 20.1$

Exercice 11 (★ ★ ★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f .
2. Montrer que $f(x) = \frac{4}{1+e^{-x}}$, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.
3. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variation.
4. On appelle \mathcal{T} la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de \mathcal{T} .
5. Soit d la fonction définie sur \mathbb{R} par $d(x) = f(x) - (x+2)$.
a) Vérifier que $d'(x) = \frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ et en déduire les variations de d .
b) Calculer $d(0)$ puis étudier le signe de $d(x)$.
c) En déduire la position relative de \mathcal{C}_f et de \mathcal{T} .
6. Tracer les asymptotes trouvées à la question 2., la tangente en 0 et la courbe \mathcal{C}_f .

Exercice 12 (★ ★ ★) – [BSB 2012 / Ex2]

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = e^x - 1 + x.$$

1. a) Montrer que g est croissante sur \mathbb{R} .
b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x , le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}.$$

On note \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

2. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.
c) Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
3. a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , la relation

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}.$$

- b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites calculées à la question 2..
4. Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} .

Exercice 13 (★ ★ ★) – Calculer les intégrales suivantes.

- | | |
|--|--|
| 1. $I_1 = \int_0^1 e^{3x} dx$ | 3. $I_3 = \int_0^1 e^{2x} + \frac{e^x}{4} dx$ |
| 2. $I_2 = \int_{-2}^2 e^x - e^{-x} dx$ | 4. $I_4 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ |