6 | Raisonnement par récurrence

I – Principe du raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un principe de démonstration visant à établir une propriété portant sur tous les entiers naturels.

Théorème 6.1 – Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie.

alors la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Métaphoriquement, on peut se représenter le principe du raisonnement par récurrence comme une ligne infinie de dominos qu'il s'agirait de faire tomber. Si l'on est capable de faire tomber le premier domino (*i.e.* que l'étape d'**initialisation** est vérifiée) et que la chute d'un domino fait tomber le suivant (*i.e.* que l'étape d'**hérédité** est vérifiée), alors tous les dominos vont tomber.

On illustre désormais ce nouveau mode de raisonnement sur un exemple, afin d'en fixer les règles de rédaction (passages surlignés), auxquelles il est **TRÈS VIVEMENT** recommandé de se conformer !

Exemple 6.2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \geqslant 0$.
On souhaite montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 3$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant 3$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 4$ et $4 \geqslant 3$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
Or par hypothèse de récurrence $u_n \geqslant 3$, donc

$$u_{n+1} = 2u_n - 3 \geqslant 2 \times 3 - 3 = 3.$$

Donc $u_{n+1} \geqslant 3$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 3.$$

Exemple 6.3 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2^{n+1} + 1$.

II – Propriété vraie pour $n \geqslant n_0$

Certaines propriétés dépendant d'un entier naturel n ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, l'étape d'initialisation ne porte plus sur $\mathcal{P}_0$ (ce qui n'aurait *a priori* aucun sens) mais sur $\mathcal{P}_{n_0}$, premier rang à partir duquel la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. Le principe du raisonnement reste ensuite le même.

Exemple 6.4 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $\quad u_1 = \dfrac{1}{2} \quad$ et $\quad 1 - \dfrac{1}{1+1} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Or par hypothèse de récurrence $\quad u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, $\quad$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1+1}$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exemple 6.5 – Démontrer que pour tout $n \geqslant 6$, $\quad (n+2)^2 \leqslant 2^n$.

III – Récurrences comportant des sommes

Proposition 6.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1}.$$

Remarque 6.7 –

- Évidemment, la somme peut débuter à n'importe quel rang :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}, \qquad \sum_{k=2}^{n+1} u_k = \sum_{k=2}^{n} u_k + u_{n+1}, \qquad \text{etc.}$$

- Cette proposition permet de démontrer un grand nombre de formules portant sur le signe Σ, à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exemple 6.8 – Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\displaystyle\frac{0\times(0+1)}{2} = 0$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1) \times \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 6.9 – Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$