

5 Matrices inversibles

Dans ce chapitre, toutes les matrices sont **carr  es** et $n \in \mathbb{N}^*$ désigne un entier non nul.

I – Matrices inversibles

Définition 5.1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carr  e.

On dit que A **inversible** si et seulement s’il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A \times B = I_n \quad \text{et} \quad B \times A = I_n.$$

Lorsqu’une telle matrice B existe, elle est appel  e **inverse** de A et est not  e A^{-1} .

Remarque 5.2 –

- La notion de matrice inversible n’a de sens **QUE** pour des matrices carr  es.
- Une matrice inversible admet une unique matrice inverse.

Exemple 5.3 – Vérifier les assertions suivantes.

1. La matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. La matrice carr  e nulle 0_n n’est pas inversible.

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n’est pas la matrice nulle mais elle n’est pas inversible pour autant.

Proposition 5.4

Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées de même taille.

Si $P \times Q = I_n$, alors P et Q sont inversibles et

$$P^{-1} = Q \quad \text{et} \quad Q^{-1} = P.$$

En particulier, si $P \times Q = I_n$, alors $Q \times P = I_n$.

Exemple 5.5 – Calculer le produit PQ et vérifier que les matrices P et Q sont inversibles.

- On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

- On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Corollaire 5.6

Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées de même taille et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ un réel **non nul**.

Si $P \times Q = \lambda \times I_n$, alors P et Q sont inversibles et

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda} \times Q \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{\lambda} \times P.$$

Exemple 5.7 – Déterminer les inverses des matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

**Méthode 5.8 – Vérifier qu'une matrice est inversible**

En mathématiques, il est toujours plus facile de vérifier un résultat que de le montrer directement. C'est par exemple le cas pour montrer qu'une matrice est inversible.

Ainsi, si l'énoncé donne un candidat pour l'inverse, alors il suffit de multiplier, obtenir la matrice identité et l'inversibilité de la matrice est démontrée.

Il existe trois cas de figures simples où l'énoncé montre la voie :

1. **L'inverse est donnée directement.** Dans ce premier cas, on calcule le produit, on obtient la matrice identité et la Proposition 5.4 permet de conclure.
2. **On demande de calculer le produit de deux matrices.** Cette fois encore, on calcule le produit et deux cas de figure peuvent se présenter :
 - On obtient la matrice identité, possiblement à un facteur multiplicatif près : on conclut grâce au Corollaire 5.6 (sans oublier le facteur multiplicatif).
 - Le produit est nul : la matrice n'est pas inversible.
3. **On demande de vérifier une égalité matricielle impliquant des puissances de la matrice A .** On calcule l'expression demandée et le résultat doit permettre d'aboutir, après simplification, à une expression de la forme

$$A \times (\dots) = I_n.$$

Alors la matrice A est inversible et l'inverse de A est donnée par le facteur entre parenthèses.

Exemple 5.9 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = A + 2I_3$.

En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Proposition 5.10 – Cas d’une matrice diagonale

Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.

La matrice diagonale D est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux d_i sont **tous** inversibles, *i.e.* **tous** non nuls. Dans ce cas, la matrice inverse est donnée par

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.11 – Donner l’inverse de la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 5.12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire, supérieure ou inférieure.

La matrice A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Exemple 5.13 – Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles?

Proposition 5.14

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trois matrices carrées de même taille.

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A est inversible, alors A est **simplifiable** à gauche et à droite, c’est-à-dire que

$$AB = AC \implies B = C \quad \text{et} \quad BA = CA \implies B = C.$$

Proposition 5.15 – Cas d’une matrice de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2. On appelle **déterminant** de la matrice A le réel :

$$\det(A) = ad - bc.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul : $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas, la matrice inverse de A est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

□

Exemple 5.16 – Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles?

Si oui, préciser leur inverse.

II – Calcul effectif de l'inverse d'une matrice

1 – Calcul de l'inverse par la résolution d'un système

Théorème 5.17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice A est inversible si et seulement si pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution.

**Méthode 5.18 – Montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse**

On fixe deux matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis on résout le système $AX = Y$ avec les outils mis en place en première année. Alors on peut savoir si une matrice est inversible et le cas échéant, calculer son inverse :

- Si le système admet une unique solution X , c'est-à-dire que X s'écrit de façon unique en fonction de Y , comme $X = BY$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
- Sinon la matrice n'est pas inversible.

Exemple 5.19 – Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

2 – Calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss

Théorème 5.20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice A est inversible si et seulement si une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A transforme la matrice A en une matrice B inversible.

Dès lors, en transformant la matrice A en la matrice identité à l'aide d'opérations sur les lignes et en effectuant simultanément les mêmes opérations sur la matrice identité, alors on obtient l'inverse de la matrice A .



Méthode 5.21 – Méthode du Pivot de Gauss

En pratique, la méthode précédente revient à transformer la matrice A en la matrice identité à l'aide d'opérations élémentaires. L'utilisation d'un système linéaire n'est pas requise.

1. On commence par transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure par la méthode du pivot de Gauss, ce qui permet de savoir si A est inversible ou non.
2. Le cas échéant, on transforme alors la matrice triangulaire en une matrice diagonale puis en la matrice identité.

Alors en effectuant exactement les mêmes opérations, dans le même ordre, à la matrice identité I_n , on obtient, sous réserve d'existence, la matrice inverse A^{-1} .

Exemple 5.22 – Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.