INTERRO DE COURS 8

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_0^1 e^{2x} - e^{-3x}\,\mathrm{d}x$

Solution :

$$I_1 = \int_0^1 e^{2x} - e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^{-3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^{-3} - \frac{5}{6}$$

2. $I_2 = \int_{-1}^1 x^2 - 2x + 1\,\mathrm{d}x$

Solution :

$$I_2 = \int_{-1}^1 x^2 - 2x + 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 1\right) = \frac{1}{3} - 1 + 1 + \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{8}{3}$$

3. $I_3 = \int_1^3 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution : On commence par chercher une primitive de $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. f semble être de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = 1 + x^2$. On a $u'(x) = 2x$ et donc $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{1+x^2} = 2f(x)$. Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$

$$I_3 = \int_1^3 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_1^3 = \frac{1}{2}\ln(10) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(5) = \ln(\sqrt{5})$$

4. $I_4 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$

Solution : On commence par chercher une primitive de $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. f semble être de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(t) = 1 + t^2$. On a $u'(t) = 2t$ et donc $\frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = f(t)$. Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = \sqrt{1+t^2}.$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$$

Exercice 2 –

1. Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1, l'intégrale $I_A = \displaystyle\int_1^A \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

> **Solution :**
> $$I_A = \int_1^A \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int_1^A 3x^{-4}\,\mathrm{d}x = \left[3\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^A = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^3}$$

2. Calculer $\lim\limits_{A \to +\infty} I_A$.

> **Solution :**
> $$\lim_{A \to +\infty} 1 - \frac{1}{A^3} = 1$$

3. Que peut-on en déduire ?

> **Solution :** On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.