INTERRO DE COURS 5

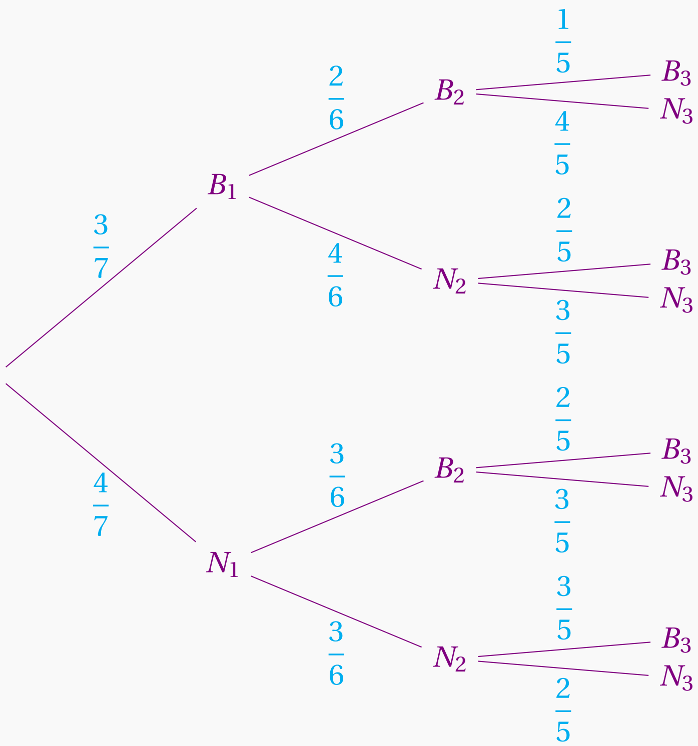
Exercice 1 – Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement et sans remise 3 boules dans cette urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors du tirage.

1. Déterminer le support de X.

Solution : On a $X(\Omega) = [\![0;3]\!]$.

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

Solution : On peut représenter la situation via l'arbre de probabilité suivant.



Notons B_k et N_k les évènements "la k-ième boule tirée est blanche" et "la k-ième boule tirée est noire". D'après la formule des probabilités composées, on a

$$P(X=0) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}.$$

D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap N_3) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35} + \frac{6}{35} + \frac{6}{35} = \frac{18}{35}. \end{aligned}$$

D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(N_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{35} + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} = \frac{12}{35}. \end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule des probabilités composées, on a

$$P(X=3)=P(B_1\cap B_2\cap B_3)=P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)\times P_{B_1\cap B_2}(B_3)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{35}.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

3. Déterminer l'espérance de X.

Solution : On a donc

$$E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{45}{35}=\frac{9}{7}.$$

4. Déterminer la variance de X.

Solution : On a

$$E(X^2)=0^2\times\frac{4}{35}+1^2\times\frac{18}{35}+2^2\times\frac{12}{35}+3^2\times\frac{1}{35}=\frac{75}{35}=\frac{15}{7}.$$

Donc, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{15}{7}-\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{107}{49}-\frac{81}{49}=\frac{26}{49}.$$

Exercice 2 – On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir PILE. On note X le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir PILE.

1. Déterminer le support $X(\Omega)$ de X.

Solution : On a $X(\Omega)=\mathbf{N}^*$ (il faut au moins un lancer pour obtenir le premier PILE).

2. Montrer que pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, on a

$$P(X=k)=\frac{1}{2^k}.$$

Solution : On a $[X=k]$ si et seulement si on a obtenu FACE lors des $k-1$ premiers lancers et PILE lors du k-ième lancer. La pièce étant équilibrée, la probabilité d'obtenir PILE est égale à la probabilité d'obtenir FACE, et vaut $\frac{1}{2}$. Ainsi

$$P(X=k)=\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}}_{\text{FACE } k-1 \text{ fois}}\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{PILE}}=\frac{1}{2^k}.$$

3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}P(X=n)$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=1.$$

Solution : On vient de voir que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a $P(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$. Calculons la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} P(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2^0} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1
\end{aligned}$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$ donc la série converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$