# 10 Variables aléatoires réelles

## I – Généralités sur les variables aléatoires

### 1 – Définitions et exemples

Il arrive souvent qu'à chaque résultat d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers $\Omega$ (l'ensemble des résultats possibles) dans $\mathbf{R}$. On peut par exemple considérer le gain obtenu à l'issu d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.

**Définition 10.1 –** Une **variable aléatoire** $X$ est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
On appelle **support** de $X$, et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par $X$.

**Exemple 10.2 –** Tout au long de ce chapitre, on s'appuiera sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1, on gagne 4€, si on a un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note $X$ le gain (algébrique). $X$ est une variable aléatoire et

$$X(\Omega) =$$

2. On lance deux dés équilibrés et on note $X$ la somme des deux résultats obtenus. $X$ est une variable aléatoire et

$$X(\Omega) =$$

### 2 – Évènements associés à une variable aléatoire

**Définition 10.3 –** Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$ et $x \in \mathbf{R}$. On note

$$\begin{aligned}
[X = x] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}, \\
[X < x] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\}, \\
[X \leqslant x] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\}, \\
[X > x] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) > x\}, \\
[X \geqslant x] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant x\}.
\end{aligned}$$

Si $x$ et $y$ sont deux réels tels que $x < y$ alors on note

$$\left[x \leqslant X \leqslant y\right] = \left\{\omega \in \Omega, x \leqslant X(\omega) \leqslant y\right\}.$$

Plus généralement, si $I$ désigne une partie de $\mathbf{R}$, on note

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}.$$

**Exemple 10.4 –** Calculer $P([X = 3])$ et $P([X \leqslant 2])$ dans les deux exemples de l'exemple 10.2.

1.

2.

**Proposition 10.5**

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$. Alors l'ensemble

$$\{[X=x],\, x\in X(\Omega)\}$$

forme un système complet d'évènements. En particulier, on a

$$\sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\big)=1.$$

**Exemple 10.6 –** On reprend les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. Un système complet d'évènements est
2. Un système complet d'évènements est

**Remarque 10.7 –** Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P([X=x])$ en $P(X=x)$, et de même pour les autres ensembles.

## 3 – Loi d'une variable aléatoire finie

**Définition 10.8 –** Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$. On appelle **loi** de la variable aléatoire $X$, la donnée des $P(X=x)$ pour tout réel $x$.

**Méthode 10.9 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie**

- On donne l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par $X$.
- On calcule $P(X=x)$ pour tout $x\in X(\Omega)$.

On résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec, sur la 1ère ligne, les valeurs prises par $X$, et sur la 2ème ligne les probabilités correspondantes.

**Exemple 10.10 –** On reprend les deux exemples de l'exemple 10.2.

1.

2.

**Remarque 10.11 –** On n'oubliera pas de vérifier **à chaque fois** que la somme des probabilités inscrites dans le tableau fait 1.

## 4 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire

**Définition 10.12 –** Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire $X$ et on note $F_X$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) \in [0,1]$$

**Proposition 10.13**

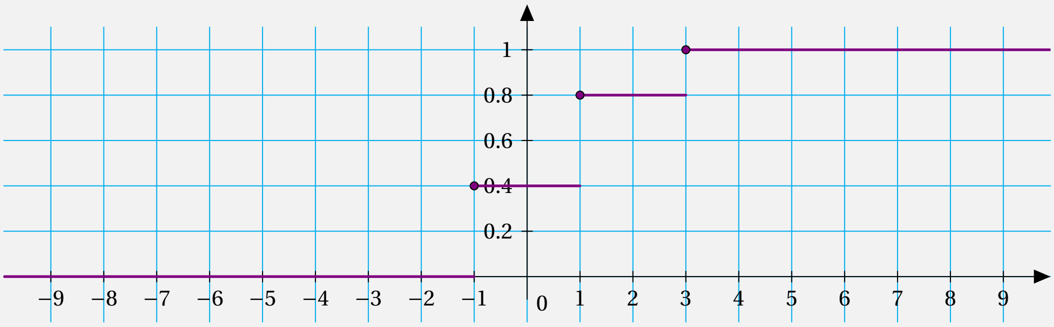
Soit $X$ une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1, \\ P(X = x_1) + \cdots + P(X = x_k) & \text{si } x_k \leqslant x < x_{k+1}, \\ 1 & \text{si } x_n \leqslant x. \end{cases}$$

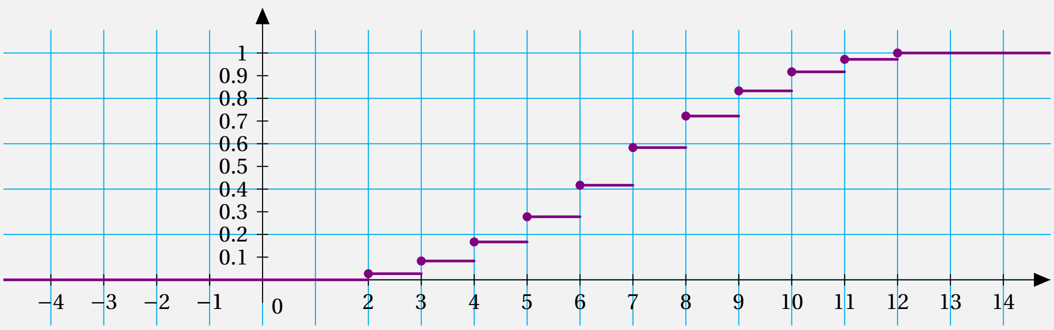
En particulier, $F_X$ est constante sur $[x_k, x_{k+1}[$.

**Exemple 10.14 –** Calculer la fonction de répartition de $X$ dans les deux exemples de l'exemple 10.2.

1.




2.




**Proposition 10.15**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ détermine parfaitement la loi de $X$. Autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

# II – Moments d'une variable aléatoire finie

## 1 – Espérance

**Définition 10.16 –** Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$ qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$.

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_k$ |

On appelle **espérance mathématique** de $X$ le réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p(X = x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_k \times p_k.$$

**Remarque 10.17 –**

- L'espérance $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs $x_i$ affectées des fréquences $p_i$.
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $E(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois. Le signe de $E(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre. Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est **équitable**.

**Exemple 10.18 –** Calculer $E(X)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 10.2.

1.

2.

**Proposition 10.19 – Linéarité de l'espérance**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires finies définies sur $\Omega$. Soit $a$ et $b \in \mathbf{R}$. Alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b.$$

**Exemple 10.20 –** On lance un dé non-truqué et on note $X$ le numéro obtenu. Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = 2x + 3$ et $Y = g(X) = 2X + 3$. Déterminer l'espérance de $Y$.

**Théorème 10.21 – Théorème de transfert**

Soit $X$ une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit $g$ une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$. Alors l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i).$$

**Exemple 10.22 –** On considère la fonction $g(x) = x^2$. Calculer $E\big(g(X)\big)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 10.2.

1.

2.

**Remarque 10.23 –** Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$ : il suffit de connaître la loi de $X$.

## 2 – Variance

**Définition 10.24 –** Soit $X$ une variable aléatoire finie.

- On appelle **variance** de $X$ le réel, noté $V(X)$, défini par

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - E(X)\big)^2 P(X = x_i).$$

- On appelle **écart-type** de $X$ et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Remarque 10.25 –** La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

**Théorème 10.26 – Formule de König-Huygens**

Soit $X$ une variable aléatoire finie. On a

$$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2.$$

**Méthode 10.27 – Calculer la variance d'une variable aléatoire**

- On calcule $E\big(X^2\big)$ grâce au théorème de transfert.
- Puis on utilise la formule de König-Huygens

$$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2.$$

**Exemple 10.28 –** Calculer $V(X)$ pour les deux exemples de l'exemple 10.2.

1.

2.

**Proposition 10.29**

Soit $X$ une variable aléatoire finie et soient $a$ et $b$ deux réels. Alors

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

En particulier,

$$V(X+b) = V(X).$$

**Remarque 10.30 –** Contrairement à l'espérance, la variance **n'**est **pas** linéaire.

**Exemple 10.31 –** On lance un dé non-truqué et on note $X$ le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$. Calculer la variance de $X$ puis celle de $Y$.

# III – Lois usuelles

## 1 – Loi uniforme

**Définition 10.32 –** Soit $(a,b)\in\mathbf{Z}^2$ avec $a<b$. Une variable aléatoire $X$ suit une **loi uniforme** sur $[\![a,b]\!]$ lorsque $X(\Omega)=[\![a,b]\!]$ et que

$$\forall k\in[\![a,b]\!],\quad P(X=k)=\frac{1}{b-a+1}.$$

On note $X\hookrightarrow\mathcal{U}\left([\![a,b]\!]\right)$.

**Exemple 10.33 –** Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non-truqué et on note $X$ le numéro obtenu.
   On a $X\hookrightarrow\mathcal{U}\left([\![1,6]\!]\right)$ car $X(\Omega)=[\![1,6]\!]$ et pour tout $k\in[\![1,6]\!]$, $P(X=k)=\frac{1}{6}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et on note $X$ le numéro obtenu. On a $X\hookrightarrow\mathcal{U}\left([\![1,n]\!]\right)$ car $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $P(X=k)=\frac{1}{n}$.

**Proposition 10.34**

Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Si $X\hookrightarrow\mathcal{U}\left([\![1,n]\!]\right)$, alors l'espérance et la variance de $X$ sont données par

$$E(X)=\frac{n+1}{2}\quad\text{et}\quad V(X)=\frac{n^2-1}{12}.$$

**Proposition 10.35**

Soit $(a,b)\in\mathbf{Z}^2$ avec $a<b$. Si $X\hookrightarrow\mathcal{U}\left([\![a,b]\!]\right)$ alors $X-a+1\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,b-a+1]\!])$ et donc

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\quad\text{et}\quad V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

## 2 – Loi de Bernoulli

**Définition 10.36 –** Une variable aléatoire $X$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p\in]0,1[$ lorsqu'il n'y a que deux issues possibles $X(\Omega)=\{0,1\}$ et

$$P(X=1)=p\quad\text{et}\quad P(X=0)=1-p.$$

On note $X\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$.

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : une que l'on qualifie de "succès", de probabilité $p$, et l'autre que l'on qualifie "d'échec", de probabilité $1-p$. On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un "succès", la variable aléatoire prend la valeur $X=1$, et sinon $X=0$.

**Exemple 10.37 –** On lance une pièce équilibré et on note $X$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est *Pile* et 0 sinon. Alors $X\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Proposition 10.38**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$. Alors l'espérance et la variance de $X$ sont données par

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

## 3 – Loi binomiale

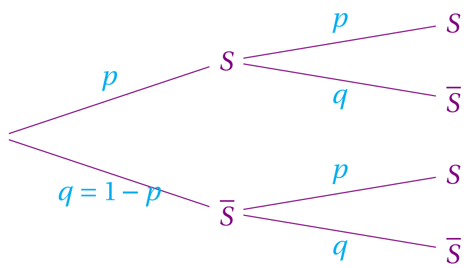
**Définition 10.39 –** L'expérience aléatoire qui consiste à répéter $n$ fois une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$ de manière indépendante est appelée un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$.
La variable aléatoire $X$ égale au nombre de succès obtenus au cours des $n$ épreuves de ce schéma de Bernoulli suit une **loi binomiale** de paramètres $n$ et $p$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

**Exemple 10.40 –** On lance 10 fois de suite une pièce équilibrée et on note $X$ le nombre de *Pile* obtenus. On a alors $X \hookrightarrow$

Dans le cas où $n = 2$ ou 3, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.

1. Cas $n = 2$

   On répète deux épreuves de Bernoulli de paramètre $p$, successivement et de façon indépendante.




   Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de succès. $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$ de paramètres $n = 2$ et $p$.

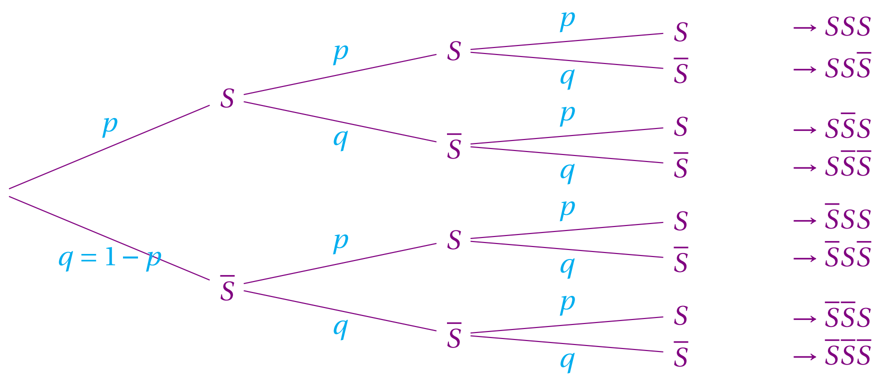
| Nombre de succès $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $q^2$ | $2 \times p \times q$ | $p^2$ |

2. Cas $n = 3$

   On répète trois épreuves de Bernoulli de paramètre $p$, successivement et de façon indépendante.
   L'expérience comporte $2^3 = 8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres

$$\left\{SSS, SS\overline{S}, S\overline{S}S, \overline{S}SS, S\overline{S}\overline{S}, \overline{S}S\overline{S}, \overline{S}\overline{S}S, \overline{S}\overline{S}\overline{S}\right\}.$$

   Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ égale au nombre de succès, on dresse un arbre et on compte le nombre d'issues contenant $k$ succès.



La variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3,p)$ de paramètres $n=3$ et $p$.

| Nombre de succès $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $q^3$ | $3\times p\times q^2$ | $3\times p^2\times q$ | $p^3$ |

**Définition 10.41 –** Soit $n$ un entier naturel non-nul et $k$ un entier tel que $0\leqslant k\leqslant n$.
Si on représente par un arbre une série de $n$ épreuves de Bernoulli, le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins réalisant $k$ succès parmi $n$ épreuves répétées.

**Remarque 10.42 –**

- Un seul chemin permet d'obtenir 0 succès ou $n$ succès consécutifs, donc $\binom{n}{0}=1$ et $\binom{n}{n}=1$.
- Il y a $n$ chemins différents qui permettent d'obtenir un seul succès. Ainsi $\binom{n}{1}=n$.

**Proposition 10.43**

Pour tout entier $n\geqslant 1$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots\big(n-(k+1)\big)}{k!}.$$

**Proposition 10.44**

Pour tout $n\in\mathbf{N}$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a

- <u>relation de symétrie des coefficients</u> :
$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}.$$
- <u>formule du triangle de Pascal</u> :
$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

**Remarque 10.45 –** La formule du triangle de Pascal permet de déterminer les coefficients binomiaux de proche en proche.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

**Exemple 10.46 –** Calculer les coefficients binomiaux suivants.

- $\binom{4}{2}$
- $\binom{5}{2}$
- $\binom{11}{1}$
- $\binom{3}{0}$

**Proposition 10.47**

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n$ et $p$.
Alors pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ où } q = 1-p.$$

**Proposition 10.48**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in ]0,1[$.
Alors l'espérance et la variance de $X$ sont données par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

**Exemple 10.49 –** Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients choisissent l'option *Livraison Express*. On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons. On note $X$ la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention *Livraison Express*.

1. Déterminer la loi de $X$ en justifiant soigneusement.

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et interpréter le résultat.

## 4 – Formule du binôme de Newton

**Théorème 10.50 – Formule du binôme de Newton**

Soient $a$ et $b$ dans $\mathbf{R}$ et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Exemple 10.51 –** $(2+x)^3$