DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 –

1. (a) On a
$$g'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x} = \frac{6x^3-6}{x} = \frac{6(x^3-1)}{x}.$$

   (b) On a $x^3 - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$. On en déduit le tableau suivant.

x	0		1		$+\infty$
$6(x^3-1)$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

   (c) On a $g(1) = 2\times 1^3 - 6\ln(1) + 3 = 5$. Or $g(1)$ est le minimum de g donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a
$$g(x) \geq g(1) = 5 > 0.$$
   Ainsi pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $g(x) > 0$.

2. (a) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3\ln(x)}{x^2} = -\infty$. Donc par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\ln(x)}{x^2} = 0$. Donc par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

   (b) On a
$$f(x) - y = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} - 2x = \frac{3\ln(x)}{x^2}.$$
   Et on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\ln(x)}{x^2} = 0$.
   Donc la droite (D) d'équation $y = 2x$ est bien asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ quand $x \to +\infty$.

3. (a) On a
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{\frac{3}{x}\times x^2 - 3\ln(x)\times 2x}{x^4} \\ &= 2 + \frac{3x - 6x\ln(x)}{x^4} \\ &= 2 + \frac{3 - 6\ln(x)}{x^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6\ln(x) + 3}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

(b) On a vu que $g(x) > 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$. On en déduit le tableau suivant.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
g	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

(c) On obtient la courbe suivante.

Exercice 2 –

1. (a) Notons U_k l'évènement "le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathscr{U}_k$", pour $k \in \{1;2\}$. Alors d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= P(U_1 \cap [X_1 = 1]) + P(U_2 \cap [X_1 = 1]) \\ &= P(U_1) \times P_{U_1}(X_1 = 1) + P(U_2) \times P_{U_2}(X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

La variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{5}$.

(b) On a $E(X_1) = p = \frac{2}{5}$ et $V(X_1) = p(1-p) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

2. (a) Puisque $Z = X_1 + X_2$, on a $[X_2 = 0] \cap [Z = 0] = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]$. Alors, d'après la formule des probabilités composées,

$$P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}.$$

(b) Les évènements $[X_2 = 1] \cap [Z = 0]$ et $[X_2 = 0] \cap [Z = 2]$ sont impossibles donc

$$P([X_2 = 1] \cap [Z = 0]) = P([X_2 = 0] \cap [Z = 2]) = 0.$$

Par ailleurs, de la même manière que dans la question précédente, on a

$$P([X_2 = 0] \cap [Z = 1]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25},$$

$$P([X_2 = 1] \cap [Z = 1]) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25},$$

$$P([X_2 = 1] \cap [Z = 2]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau ci-dessous.

	$Z = 0$	$Z = 1$	$Z = 2$
$X_2 = 0$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	0
$X_2 = 1$	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$

3. (a) On détermine la loi de X_2 en faisant la somme des valeurs de chaque ligne dans le tableau précédent. On obtient

x_i	0	1
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{25}$

X_2 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{9}{25}$. On a donc $E(X_2) = p = \frac{9}{25}$ et $V(X_2) = p(1-p) = \frac{9}{25} \times \frac{16}{25} = \frac{144}{625}$.

(b) On a $P(X_1 = 1) = \frac{2}{5}$, $P(X_2 = 1) = \frac{9}{25}$ et $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{6}{25}$, dont on déduit que $P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \neq P(X_1 = 1, X_2 = 1)$. Donc les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(c) On détermine la loi de Z en faisant la somme des valeurs de chaque colonne dans le tableau de la loi du couple (X_2, Z). On obtient

x_i	0	1	2
$P(Z = x_i)$	$\frac{12}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{6}{25}$

(d) On a $E(Z) = \frac{7}{25} + \frac{12}{25} = \frac{19}{25}$. Par ailleurs,

$$E(Z^2) = \frac{7}{25} + \frac{24}{25} = \frac{31}{25}.$$

Donc d'après la formule de König-Huygens,

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{31}{25} - \left(\frac{19}{25}\right)^2 = \frac{31}{25} - \frac{361}{625} = \frac{775}{625} - \frac{361}{625} = \frac{414}{625}.$$

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a

$$P_{X_1=0}(U_1) = \frac{P([X_1 = 0] \cap U_1)}{P(X_1 = 0)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

5. (a) On a

$$E(X_2 Z) = \frac{3}{25} + \frac{12}{25} = \frac{15}{25}.$$

(b) D'après la formule de Huygens, on a

$$\text{Cov}(X_2, Z) = E(X_2 Z) - E(X_2)E(Z) = \frac{15}{25} - \frac{9}{25} \times \frac{19}{25} = \frac{15}{25} - \frac{171}{625} = \frac{375}{625} - \frac{171}{625} = \frac{204}{625}.$$

(c) On a $Z = X_1 + X_2$ donc $X_1 = Z - X_2$. Ainsi

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(Z - X_2, X_2) = \text{Cov}(Z, X_2) - V(X_2) = \frac{204}{625} - \frac{144}{625} = \frac{60}{125}.$$

(d) On a $Z = X_1 + X_2$ donc

$$V(Z) = V(X_1) + V(X_2) + 2\,\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{6}{25} + \frac{144}{625} + 2 \times \frac{60}{625} = \frac{150 + 144 + 120}{625} = \frac{414}{625}.$$

Exercice 3 –

1. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition "$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$".

   Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

   Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 0 & 2(3^n - 2^n) + 3^n \\ 0 & 3 \times 3^n & 3 \times n3^{n-1} + 3^n \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2 \times 3^n - 2^{n+1} + 3^n \\ 0 & 3^{n+1} & n3^n + 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1) \times 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Par principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$ *i.e.,*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_n + 3^n \\ 3b_n + 3^n \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}. \end{aligned}$$

   (b) Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition "$X_n = A^n X_0$".

   Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_3 X_0 = X_0$$

   donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On a
$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$$
donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$ *i.e.,*
$$X_n = A^n X_0.$$

(c) On a
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 3^n - 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}.$$
Donc on a bien
$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$

3. (a) On utilise la méthode de Gauss-Jordan.
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Donc la matrice P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) On a
$$\begin{aligned} PMP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

On a $PMP^{-1} = A$ donc en multipliant à gauche par P^{-1}, on obtient $MP^{-1} = P^{-1}A$. Puis en multipliant à droite par P, on a bien $M = P^{-1}AP$.

(c) Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition "$M^n = P^{-1}A^nP$".

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3$$

donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

On a

$$M^{n+1} = M^n \times M = P^{-1}A^nP \times P^{-1}AP = P^{-1}A^n \times AP = P^{-1}A^{n+1}P.$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$ *i.e.,*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad M^n = P^{-1}A^nP.$$

(d) On a

$$\begin{aligned}
M^n &= P^{-1}A^nP \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n - 3^n - 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & 2^n - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n - 2 \times 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & 2^n - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2^n + 2^n - 2 \times 3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^n + 2^n - 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 4 –

1. (a) On sait d'après le tableau des primitives du cours qu'une primitive de x^n est donnée par $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Donc une primitive de f_1 est donnée par

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= 4\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - x \\
&= x^4 - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - x.
\end{aligned}$$

(b) De la même manière que pour la question précédente, une primitive de f_2 est donnée par

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x.$$

(c) f_3 semble être de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = 2x-1$ et $n = 2$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$u'(x)u(x)^n = 2(2x-1)^2 = 2f_3(x).$$

Donc une primitive de f_3 est donc donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-1)^3}{3} = \frac{(2x-1)^3}{6}.$$

(d) f_4 semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, avec $u(x) = 3x+1$. On a $u'(x) = 3$ donc

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{3}{\sqrt{3x+1}} = 3f_4(x).$$

Donc une primitive de f_4 est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3x+1} = \frac{2\sqrt{3x+1}}{3}.$$

(e) f_5 semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2+1$. On a $u'(x) = 2x$ donc

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 2f_5(x).$$

Donc une primitive de f_5 est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{u} = \frac{-1}{2x^2+2}.$$

(f) f_6 semble être de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = 2x^2-2x+1$ et $n = 3$. On a $u'(x) = 4x-2$ donc

$$u'u^n = (4x-2)(2x^2-2x+1)^3 = f_6(x).$$

Donc une primitive de f_6 est donnée par

$$F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(2x^2-2x+1)^4}{4}.$$

(g) f_7 semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 2x-1$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{2}{(2x-1)^2} = f_7(x).$$

Donc une primitive de f_7 est donnée par

$$F(x) = \frac{-1}{u} = \frac{-1}{2x-1}.$$

(h) f_8 n'est pas une fonction composée. On peut donc utiliser directement le tableau des primitives du cours. On a

$$f_8(x) = 2 \times \frac{1}{x^2}.$$

Donc une primitive de f_8 est donnée par

$$F(x) = 2 \times \frac{-1}{x} = \frac{-2}{x}.$$

(i) Une primitive de f_9 est donnée par

$$\begin{aligned} F(x) &= 4\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x} \\ &= 2x^2 - x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(j) On réécrit f_{10} sous une autre forme pour faire apparaître des fonctions dont on sait calculer une primitive. On a

$$f_{10}(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Donc une primitive de f_{10} est donnée par

$$F(x) = x - \frac{1}{x}.$$

2. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x^2 - 5x + 3)\,\mathrm{d}x &= \left[2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 3 \\ &= \frac{4}{6} - \frac{15}{6} + \frac{18}{6} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x &= \left[4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 \\ &= 1 - 1 + 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(ba) Commençons par trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{(1+3x^2)^2}$. f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + 3x^2$. On a $u'(x) = 6x$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{6x}{(1+x^2)^2} = 6f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{6} \times \frac{-1}{u(x)} = \frac{1}{6} \times \frac{-1}{1+3x^2} = \frac{-1}{6+18x^2}.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{-1}{6+18x^2}\right]_1^2 \\ &= \frac{-1}{78} - \frac{-1}{24} \\ &= \frac{-4}{312} + \frac{13}{312} = \frac{9}{312} = \frac{3}{104} \end{aligned}$$

(c) Commençons par trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}$. f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + x^4$. On a $u'(x) = 4x^3$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} = 4f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{u(x)} = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{1+x^4} = \frac{-1}{4+4x^4}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{-1}{4+4x^4}\right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{8} - \frac{-1}{4} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

(d) Commençons par trouver une primitive de $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$. f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^2 + 1$. On a $u'(t) = 2t$ donc

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} = 2f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(t)} = \sqrt{t^2+1}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t &= \left[\sqrt{t^2+1}\right]_{-1}^1 \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Remarque : La fonction $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est impaire. Il est donc normal d'obtenir $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = 0$.

(e) Commençons par trouver une primitive de $f(t) = \dfrac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}$. f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^4 + 1$. On a $u'(x) = 4t^3$ donc

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}} = f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = 2\sqrt{u(t)} = 2\sqrt{t^4+1}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t &= \left[2\sqrt{t^4+1}\right]_{-1}^{1}\\ &= 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0\end{aligned}$$

(f) On a

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2}\left(x^2-1+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}-x-\frac{1}{2x^2}\right]_{1}^{2}\\ &= \frac{8}{3}-2-\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{3}-1-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{7}{3}-1+\frac{3}{8}\\ &= \frac{56}{24}-\frac{24}{24}+\frac{9}{24}\\ &= \frac{41}{24}\end{aligned}$$

(g) On a

$$\begin{aligned}\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x-2\right)\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{4}\\ &= \left(2\sqrt{4}+\frac{16}{2}-8\right)-\left(2+\frac{1}{2}-2\right)\\ &= 4+8-8-\frac{1}{2}\\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

(h) Commençons par trouver une primitive de $f(x)=(4x-1)^3$. f semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x)=4x-1$. On a $u'(x)=4$ donc

$$u'(x)u(x)^3 = 4(4x-1)^3 = 4f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{u(x)^4}{4}=\frac{(4x-1)^4}{16}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1}(4x-1)^3\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(4x-1)^4}{16}\right]_{-2}^{-1}\\ &= \frac{625}{16}-\frac{6561}{16}\\ &= -\frac{5936}{16}=-371\end{aligned}$$

(i) Commençons par trouver une primitive de $f(x)=x(5x^2+1)^2$. f semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x)=5x^2+1$. On a $u'(x)=10x$ donc

$$u'(x)u(x)^2 = 10x(5x^2+1)^2 = 10f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{10} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{(5x^2+1)^3}{30}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} x(5x^2+1)^2 \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{(5x^2+1)^3}{30}\right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{1}{30} - \frac{216}{30} \\ &= \frac{-215}{30} = -\frac{43}{6}\end{aligned}$$

3. (a) Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & e^{3x} & \quad & u(x) & = & \frac{1}{3}e^{3x} \\ v(x) & = & 2x & & v'(x) & = & 2 \end{array}$$

Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 2xe^{3x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x &= \Big[u(x)v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2x}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{3x} \times 2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}e^3 - \int_0^1 \frac{2}{3}e^{3x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}e^3 - \left[\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 = \frac{2}{3}e^3 - \left(\frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}e^3 + \frac{2}{9}\end{aligned}$$

(b) Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & x^3 & \quad & u(x) & = & \frac{1}{4}x^4 \\ v(x) & = & \ln(x) & & v'(x) & = & \frac{1}{x} \end{array}$$

Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^e x^3 \ln(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^e u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x &= \Big[u(x)v(x)\Big]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^4 \times \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{e^4}{4} - \int_1^e \frac{1}{4}x^3 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{e^4}{4} - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^e = \frac{e^4}{4} - \left(\frac{e^4}{16} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3e^3}{16} + \frac{1}{16}\end{aligned}$$