4 Variables aléatoires discrètes

I – Généralités sur les variables aléatoires

1 – Espace probabilisé

Étant donné une expérience aléatoire, pour calculer des probabilités :

1. On commence par déterminer l'univers Ω de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire. Cet ensemble peut être **fini** ou **infini**.
   - Si l'expérience consiste à lancer un dé à 6 faces et à observer le numéro obtenu, alors $\Omega = [\![1,6]\!]$.
   - Si l'expérience consiste à lancer une pièce jusqu'à l'obtention du premier PILE, alors $\Omega = \mathbb{N}^*$.
   - Si l'expérience consiste à observer la durée de vie d'une ampoule (en minutes), alors $\Omega = \mathbb{R}_+$.
   - etc.
2. On détermine ensuite une probabilité sur Ω, c'est-à-dire une application P qui à un évènement de Ω (*i.e.* un sous-ensemble de Ω) associe un réel, compris entre 0 et 1, qui mesure le "degré de vraisemblance" de cet évènement.

On débute par rappeler quelques propriétés, vues en première année dans le cas d'un univers fini, et qui restent vraies dans le cas d'un univers infini.

Proposition 4.1

Soient Ω un espace probabilisé et A et B deux évènements. Les résultats suivants sont vérifiés :

- $P(\Omega) = 1$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
- Si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- Si A et B sont incompatibles (*i.e.* $A \cap B = \emptyset$), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple 4.2 – Tout au long de ce chapitre, on s'appuie sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. Une urne contient une boule verte, deux boules jaunes et trois boules rouges, toutes indiscernables au toucher. Pour jouer une partie, on doit miser 2€. On tire au hasard une boule. Si on tire une boule verte, on gagne 7€, si on tire une boule jaune, on reçoit 3€ et rien si on tire une boule rouge. On note X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-2, 1, 5\}$.
2. On lance un dé équilibré et on note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un 6. X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, puisqu'il faut au moins un lancer pour obtenir un 6.

2 – Évènements associés à une variable aléatoire

Définition 4.3 – Soit X une variable aléatoire sur Ω et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des issues de l'univers dont l'image par la variable aléatoire est x.
De la même manière, on définit

$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}, \qquad [X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$

$$[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}, \qquad [X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}.$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors on note

$$\left[x \leqslant X \leqslant y\right] = \left\{\omega \in \Omega \mid x \leqslant X(\omega) \leqslant y\right\}.$$

Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbb{R}$, on note

$$\left[X \in I\right] = \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\right\}.$$

Exemple 4.4 – Calculer $P\big([X = 1]\big)$ et $P\big([X \leqslant 2]\big)$ dans les deux exemples de l'exemple 4.2.

1.

2.

Proposition 4.5

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Alors $\left\{[X = x] \mid x \in X(\Omega)\right\}$, l'ensemble des événements $[X = x]$ pour tous les x du support $X(\Omega)$, forme un système complet d'évènements. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P\big([X = x]\big) = 1.$$

Remarque 4.6 –

- Lorsque le support $X(\Omega)$ est fini, la somme précédente est une somme finie. En effet, dans ce cas le support se réécrit $X(\Omega) = \left\{x_1, x_2, \dots, x_n\right\}$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} P\big([X = x_k]\big) = 1.$$

- Lorsque le support $X(\Omega)$ est dénombrable, la somme précédente est la somme d'une série convergente. En effet, dans ce cas le support se réécrit $X(\Omega) = \left\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$, et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\big([X = x_k]\big) = 1.$$

Remarque 4.7 – Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P\big([X=x]\big)$ en $P(X=x)$ et de même pour les autres ensembles.

Exemple 4.8 – On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1. Un système complet d'évènements est donné par
2. Un système complet d'évènements est donné par

II – Variables aléatoires discrètes

1 – Définition

Définition 4.9 – Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé Ω. On dit que :

- X est une **variable aléatoire discrète** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble discret.
- X est une **variable aléatoire discrète finie** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble fini.
- X est une **variable aléatoire discrète infinie** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable. (Dans ce chapitre, le terme *dénombrable* implique *infini*.)

Exemple 4.10 – On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1.
2.

2 – Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.11 – Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi** de la variable aléatoire X la donnée de toutes les probabilités $P(X=x)$ pour tous les réels du support $x \in X(\Omega)$.

Méthode 4.12 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

1. On détermine le support $X(\Omega)$, *i.e.* l'ensemble des valeurs prises par X.
2. On calcule les probabilités $P(X=x)$ pour tous les $x \in X(\Omega)$.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec sur la première ligne l'ensemble des valeurs prises par X et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

Exemple 4.13 – On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1.

2.

3 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.14 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X et on note F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Les valeurs de la fonction de répartition sont des probabilités donc **toujours** comprises entre 0 et 1.

Proposition 4.15

Soit X une variable aléatoire discrète. On note le support $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots$.
Alors

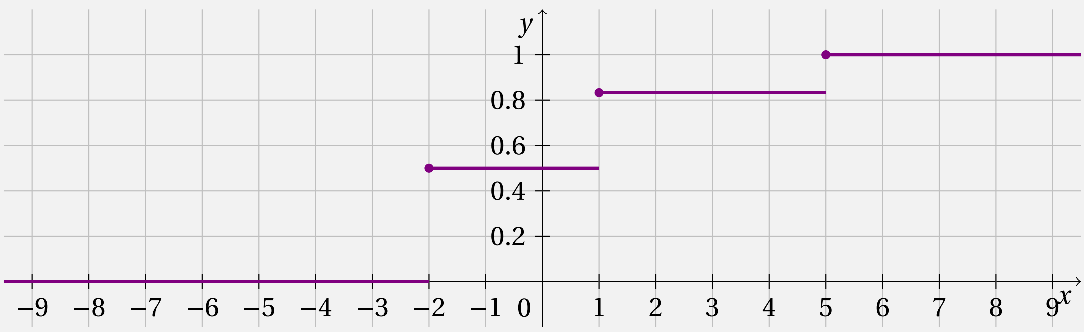
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1, \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) & \text{si } x_k \leqslant x < x_{k+1}, \\ 1 & \text{si } x \geqslant \max\limits_{i \in \mathbb{N}} x_n. \end{cases}$$

En particulier F_X est constante sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$.

Exemple 4.16 – Calculer la fonction de répartition de X dans les deux exemples de l'exemple 4.2.

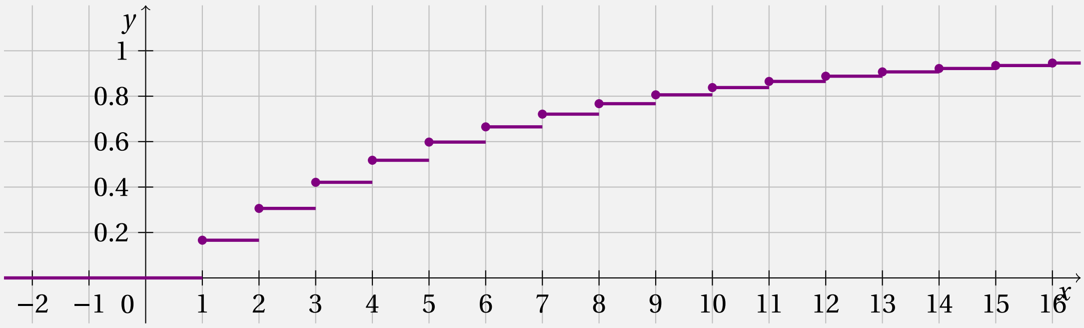
1.

Et voici le tracé de la fonction de répartition.



2.

Et voici le tracé de la fonction de répartition.



Proposition 4.17

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé Ω. On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, *i.e.* que toutes les valeurs prises par X sont entières. Alors

$$\forall k \in X(\Omega), \quad P(X=k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Remarque 4.18 – La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X. En effet, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

III – Moments d'une variable aléatoire discrète

1 – Espérance

Définition 4.19 – Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω.

- Si X est une variable aléatoire discrète **finie**, avec pour support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors X admet une **espérance**, notée $E(X)$ et définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

- Si X est une variable aléatoire discrète **infinie**, avec pour support $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, et que la série de terme général $x_n P(x_n)$ est **absolument** convergente, alors on dit que X admet une **espérance**, notée $E(X)$ et définie par

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X = x_k).$$

Remarque 4.20 – Il est important de retenir que l'espérance correspond à une notion de moyenne : $E(X)$ est la valeur que peut prendre X "en moyenne".

Exemple 4.21 – Montrer que la variable aléatoire X du premier exemple de l'exemple 4.2 admet une espérance et la calculer.

Remarque 4.22 – On peut montrer *(hors-programme)* que la série $\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6}$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}=6.$$

Autrement dit, la variable aléatoire X du second exemple de l'exemple 4.2 admet une espérance et $E(X)=6$.

Proposition 4.23 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur Ω qui admettent une espérance. Soient a et b deux réels. Alors $X+Y$ et $aX+b$ admettent une espérance et

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX+b)=aE(X)+b.$$

Exemple 4.24 – On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit g la fonction définie par $g(x)=2x+3$ et $Y=g(X)=2X+3$. Déterminer l'espérance de Y.

Théorème 4.25 – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω. On note le support $X(\Omega)=\{x_i \mid i\in I\}$ avec $I\subset\mathbb{N}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $g(x_n)P(X=x_n)$ est **absolument** convergente. Dans ce cas, on a alors

$$E\big(g(X)\big)=\sum_{i\in I} g(x_i)P(X=x_i).$$

Remarque 4.26 –

- Si X est une variable aléatoire discrète finie, alors I est un ensemble fini, donc l'espérance de $g(X)$ existe et la somme intervenant dans sa définition est une somme finie.
- Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.

Exemple 4.27 – On considère la variable X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

k	-3	-1	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

Calculer $E\left(X^2\right)$ et $E\left(X^3\right)$.

2 – Variance

Définition 4.28 – Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω.

- Si X est une variable aléatoire discrète **finie**, avec pour support $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$, alors X admet une **variance**, notée $V(X)$ et définie par

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2 P(X=x_i).$$

- Si X est une variable aléatoire discrète **infinie**, avec pour support $X(\Omega)=\{x_k \mid k\in\mathbb{N}\}$, et que la série de terme général $\left(x_n-E(X)\right)^2 P(X=x_n)$ est **absolument** convergente, alors on dit que X admet une **variance**, notée $V(X)$ et définie par

$$V(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(x_k-E(X)\right)^2 P(X=x_k).$$

Remarque 4.29 –

- La série étant à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.
- Sous réserve d'existence, on a $V(X)=E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$.
- La variance, si elle existe, est un réel **positif** ou **nul**.
- La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Théorème 4.30 – Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω. La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si la variable aléatoire X^2 admet une espérance. Dans ce cas

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2.$$

Méthode 4.31 – Répondre à la question "X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer."

1. Si X n'admet pas d'espérance, alors X n'admet pas de variance.
2. Si X admet une espérance, il faut regarder si $E\left(X^2\right)$ existe (grâce au théorème de transfert).
   - Si non, alors X n'admet pas de variance.
   - Si oui, alors on peut la calculer grâce à la formule de König-Huygens :

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2.$$

Exemple 4.32 – Montrer que la variable aléatoire X du premier exemple de l'exemple 4.2 admet une variance et la calculer.

Remarque 4.33 – On peut montrer *(hors-programme)* que la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6}$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}=66.$$

Autrement dit, le carré de la variable aléatoire X du second exemple de l'exemple 4.2 admet une espérance et $E\left(X^2\right)=66$. Alors X admet une variance et

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=66-36=30.$$

Proposition 4.34

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance et soient a et b deux réels. Alors

$$V(aX+b)=a^2V(X).$$

En particulier

$$V(X+b)=V(X).$$

Remarque 4.35 – Contrairement à l'espérance, la variance **N'**est **PAS** linéaire.

Exemple 4.36 – On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y=2X+3$.
Calculer la variance de la variable aléatoire X puis celle de Y.

Définition 4.37 – Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance.
On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}.$$

IV – Lois discrètes finies usuelles

1 – Loi uniforme

Définition 4.38 – Soit un couple d'entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a<b$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![a,b]\!]$ lorsque son support est $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$ et que chaque valeur a la même probabilité d'arriver :

$$\forall k \in [\![a,b]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{n},$$

avec n le nombre de valeurs dans l'intervalle $[\![a,b]\!]$, *i.e.* $n = b-a+1$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Exemple 4.39 – Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.
   Alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$ car $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\forall k \in [\![1,6]\!], \quad P(X=k) = \dfrac{1}{6}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on note X le numéro obtenu.
   Alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ car $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad P(X=k) = \dfrac{1}{n}$.

Proposition 4.40

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,n]\!]$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont données par

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Proposition 4.41

Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a<b$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a,b]\!]$.
Alors la variable aléatoire $X-a+1$ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,b-a+1]\!]$ et l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

où $n = b-a+1$ est le nombre de valeurs.

2 – Loi de Bernoulli

Définition 4.42 – Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0,1[$ lorsqu'il n'y a que deux issues possibles $X(\Omega) = \{0,1\}$ et que

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Une **épreuve** de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : une que l'on qualifie de "succès", de probabilité p, et l'autre que l'on qualifie d'"échec", de probabilité $1-p$.
On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un "succès", la variable aléatoire prend la valeur $X=1$, sinon elle prend la valeur $X=0$.

Exemple 4.43 – On lance une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est PILE et 0 sinon. Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

Proposition 4.44

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont données par

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

3 – Loi binomiale

Définition 4.45 – Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ lorsque son support est $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

On répète n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes. La probabilité d'obtenir un "succès" lors de la réalisation d'une épreuve est p. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus une fois que les n épreuves ont été réalisées suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple 4.46 – On lance 10 fois de suite un dé non truqué et on note X le nombre de numéros obtenus inférieurs ou égaux à 2. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.

Proposition 4.47

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont données par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

V – Lois discrètes infinies usuelles

1 – Loi géométrique

Définition 4.48 – Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque son support est $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 4.49 – On lance indéfiniment un dé non truqué. On note X le rang du lancer qui donne le nombre 1 pour la première fois. Alors X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

Remarque 4.50 –

- Cet exemple est typique de la loi géométrique dont le modèle est le suivant :
  1. On réalise une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
  2. On note X le rang de l'épreuve qui a amené le premier succès. X est considéré comme "le temps d'attente du premier succès".
- On a bien $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)=1$.

Proposition 4.51

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont données par

$$E(X)=\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X)=\frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple 4.52 – On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant sept boules noires et trois boules rouges et on note Y le rang de la première boule rouge.
Reconnaître la loi de Y puis déterminer l'espérance et la variance de Y.

2 – Loi de Poisson

Définition 4.53 – Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ lorsque son support est $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque 4.54 –

- La loi de Poisson est parfois appelée **loi des évènements rares**. Elle sert par exemple à modéliser :
  - ▷ le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps donné,
  - ▷ le nombre de véhicules franchissant un poste de péage dans un intervalle de temps donné,
  - ▷ le nombre de fautes de frappe dans les pages d'un cours de maths, etc.
- On a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)=1$.

Proposition 4.55

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont données par

$$E(X)=\lambda \quad \text{et} \quad V(X)=\lambda.$$