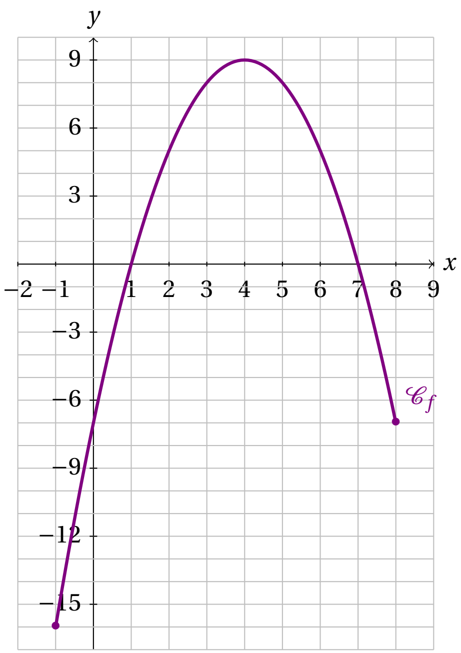
Exercices — Chapitre 3

Images et antécédents

Exercice 1 –

1. Sur la figure ci-dessous, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f. Déterminer graphiquement (aucune justification n'est demandée) :



   (a) l'image de 3 par f,

   (b) $f(9)$ et $f(0)$,

   (c) l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5,

   (d) les éventuels antécédents de -7 par f,

   (e) les solutions de l'équation $f(x) = 0$,

   (f) le tableau de signes de f,

   (g) le tableau de variation de f,

   (h) le maximum de f et pour quelle valeur il est atteint,

   (i) la solution de l'inéquation $f(x) > 5$.

2. Soit g la fonction définie sur $[-1;8]$ par $g(x) = (x-3)^2 - 16$.
   (a) Développer, réduire et ordonner $g(x)$.
   (b) Factoriser $g(x)$.
   (c) Déterminer algébriquement en utilisant la forme de $g(x)$ qui convient le mieux :
      i. l'image de 3 par g,
      ii. x tel que $g(x) = 0$,
      iii. les antécédents de -7 par g.
   (d) Donner un tableau de valeurs de le fonction g pour des valeurs allant de -1 à 8.
   (e) Tracer $\mathscr{C}_g$ sur le graphique ci-dessus.
   (f) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.

Exercice 2 – Déterminer, dans chacun des cas,

1. l'image de -2 ; 0 et 3 par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$,
2. l'image de -3 ; 0 et 1 par la fonction g définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x) = \dfrac{4x+1}{2x-3}$,
3. l'image de -1 ; 0 et 3 par la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = (2x-5)(3x+1)$.

Exercice 3 – Déterminer, dans chacun des cas, si c'est possible,

1. les antécédents de 2 ; -1 et 0 par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -2x$,
2. les antécédents de 2 ; -1 et 0 par la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 5x + 1$,
3. les antécédents de 2 et 0 par la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = 2x^2 + 1$,
4. les antécédents de 2 ; -1 et 0 par la fonction i définie sur $\mathbf{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$ par $i(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$,
5. les antécédents de 5 et 1 par la fonction j définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x + 5$.

Parité, monotonie et bornes

Exercice 4 – Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est paire. Que peut-on en déduire sur sa représentation graphique ?

Exercice 5 – Étudier la parité de la fonction f dans les cas suivants.

1. f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 3x$.
2. f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.
3. f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$.
4. f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$.
5. f définie sur $\mathbf{R} \setminus \{-2;2\}$ par $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$.
6. f définie sur $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.
7. f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 6 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Étudier la parité de f.
2. On admet que f est décroissante sur $[0;+\infty[$. En déduire, d'après la question précédente, le sens de variation de f sur $]-\infty;0]$. Dresser alors le tableau de variation de f sur $\mathbf{R}$.
3. Montrer que pour tout réel x, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Exercice 7 – Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction f, dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-1		0		2		4
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Exercice 8 – Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ dont voici le tableau de variation. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	

1. f est croissante sur $[-1;3]$.
2. f est décroissante sur $[2;+\infty[$.
3. $\forall x \in [0;2]\,,\ f(x) \leq 1$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}_+\,,\ f(x) \leq 3$.
5. $\exists x \in \mathbf{R}_+\,,\ f(x) < 0$.
6. $\exists x \in \mathbf{R}_+\,,\ f(x) = 4$.
7. $f(2) \leq f(3)$.
8. $f(1) \geq f(2)$.

Exercice 9 – f est une fonction définie sur $\mathbf{R}$. Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. Si f est croissante sur $[0;2]$, alors f est croissante sur $[0;1]$.
2. Si $f(0) < f(1)$, alors f est croissante sur $[0;1]$.
3. Si f a un maximum en 1 sur $[0;1]$, alors f est croissante sur $[0;1]$.
4. Si f n'est pas croissante sur $[0;1]$, alors f est décroissante sur $[0;1]$.

Composition de fonctions

Exercice 10 –

1. Donner le domaine de définition ainsi que la forme des fonctions $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ et $g\circ g$ pour les fonctions f et g définies de la façon suivante.
   (a) $f(x) = 2x^2 - x$ et $g(x) = 3x+2$,
   (b) $f(x) = 1 - x^3$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$,
   (c) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ et $g(x) = x^2+2$.
2. Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction $f\circ g\circ h$ pour les fonctions f, g et h définies de la façon suivante.
   (a) $f(x) = x+1$, $g(x) = 2x$ et $h(x) = x-1$,
   (b) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2+2$ et $h(x) = x+3$.
3. Donner le domaine de définition des fonctions h suivantes et les mettre sous la forme $f\circ g$ où f et g sont à définir.
   (a) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$,
   (b) $h(x) = \sqrt{x^2+1}$.
4. Vérifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) Si g est une fonction paire et $h = f\circ g$ alors, h est aussi une fonction paire.
   (b) Si g est une fonction impaire et $h = f\circ g$, alors h est aussi une fonction impaire.

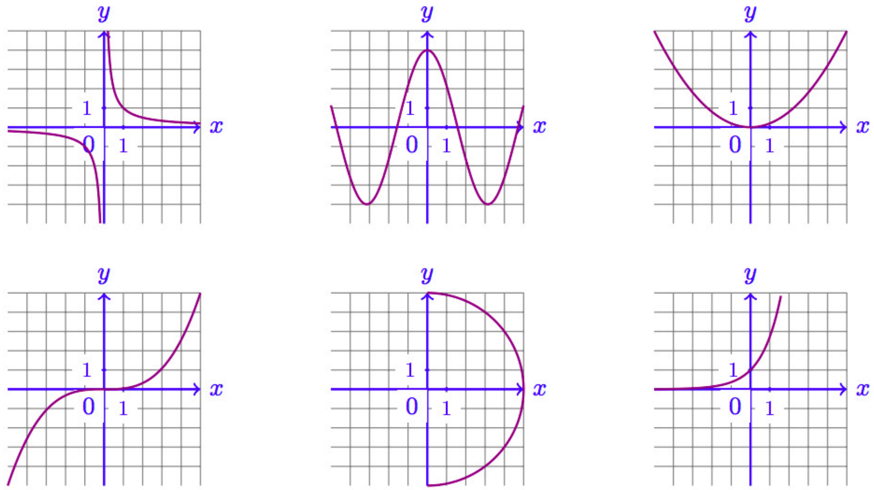
Exercice 11 – Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

1. $x^4 - 5x^2 + 2x + 1$
2. $x + \sqrt{x}$
3. $\dfrac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$
4. $\sqrt{x^2 + 3x - 10}$
5. $\dfrac{x+6}{x^2+5x+1}$
6. $\sqrt{3x-2}$
7. $\dfrac{8x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 6}$
8. $\sqrt{x^2 - 3x - 18}$
9. $\dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$
10. $\sqrt{x+7} + \sqrt{2x^2 - 3x - 9}$
11. $\dfrac{x^2 + 5x - 7}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$
12. $\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4x-1}}$
13. $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$
14. $\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{8-x^3}$
15. $\dfrac{x^2 + 5x - 7}{\sqrt{2x^3 + 3x - 2}}$

Bijection

Exercice 12 – Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -3x+4$ est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 13 – Conjecturer, d'après les graphes, si les fonctions suivantes sont bijectives. On précisera bien les ensembles de départ et d'arrivée.



Exercice 14 – Soit $f : [1;+\infty[\to [0;+\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 15 – On définit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\{-1\} & \to & \mathbf{R}\setminus\{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-x}{1+x} \end{array}$ Déterminer $f \circ f$ et en déduire que f est une bijection de $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ sur $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.