CONCOURS BLANC 3

Exercice 1 – ECRICOME 2011 / Ex2

Partie I.

1. Je calcule N^2 :
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$
Et donc pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3$.

2. (a) Je calcule PQ et QP :
$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 & 0 \\ -2+2 & -1+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$
$$QP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 2-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

   (b) Je calcule $Q\Delta$ puis multiplie le résultat par P :
$$Q\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3+2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$Q\Delta P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0 & 4-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

   (c) D'après la question précédente, je sais que $Q\Delta P = D$. En multipliant à gauche par P, j'obtiens $PQ\Delta P = PD$. Or $PQ = I_3$ donc $I_3\Delta P = PD$, *i.e.* $\Delta P = PD$. Je multiplie maintenant à droite par Q, cela me donne $\Delta PQ = PDQ$. Or $PQ = I_3$ donc $\Delta I_3 = PDQ$, *i.e.* $\Delta = PDQ$.

   (d) **Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\Delta^n = PD^nQ$.

   Initialisation : Pour $n = 0$,
$$\Delta^0 = I_3 \quad \text{et} \quad D^0Q = PI_3Q = PQ = I_3,$$
   donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, $\Delta^n = PD^nQ$. Alors
$$\Delta^{n+1} = \Delta^n \times \Delta = PD^nQ \times PDQ = PD^nI_3DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q.$$
   Donc $\Delta^{n+1} = PD^{n+1}Q$. Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n = PD^nQ.$$

(e) La matrice D étant diagonale, alors $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Or d'après la question précédente, $\Delta^n = PD^nQ$. Donc

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta^n = PD^nQ = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Je calcule ΔN et $N\Delta$:

$$\Delta N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3+2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $\Delta N = N\Delta$.

(b) Les matrices Δ et N commutent d'après la question précédente donc je peux appliquer la formule du binôme de Newton à la matrice $A = \Delta + N$:

$$A^n = (\Delta + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k}.$$

Or d'après la question **1.**, pour tout $k \geqslant 2$, le terme de la somme est nul puisque $N^k = 0_3$. Ainsi,

$$A^n = \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}.$$

(c) Grâce à la formule précédente et à l'expression de Δ^n en fonction de n, j'obtiens que

$$A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n-1 & 2^{n-1}-1 & 0 \\ -2^n+2 & -2^{n-1}+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or grâce à la question **2.a)**, je remarque que $N\Delta = N$, donc $N\Delta^{n-1} = N$ et

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n$ donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad z_n = z_0 = 1$.
   (b) En remplaçant z_n par 1 dans les expressions de l'énoncé, j'obtiens que
$$x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = -2x_n + 2.$$
2. (a) J'exprime $r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$ dans le but d'obtenir une expression de la forme $r_n + r$.
$$r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = 3x_n + y_n - 1 - 2x_n + 2 = x_n + y_n + 1 = r_n + 1$$
Ainsi j'ai bien montré que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.
   (b) Puisque la suite est arithmétique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$r_n = r_0 + 1 \times n, \quad \textit{i.e.} \quad x_n + y_n = x_0 + y_0 + n = n + 2.$$
3. (a) J'exprime $s_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1}$ dans le but d'obtenir une expression de la forme $q \times s_n$.
$$s_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2 \times (3x_n + y_n - 1) - 2x_n + 2 = 4x_n + 2y_n = 2 \times (2x_n + y_n) = 2s_n$$
Ainsi j'ai bien montré que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.
   (b) Puisque la suite est géométrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$s_n = s_0 \times q^n, \quad \textit{i.e.} \quad 2x_n + y_n = (2x_0 + y_0) \times 2^n = 3 \times 2^n.$$
4. Grâce aux expressions des suites auxiliaires $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, je remarque que
$$s_n - r_n = 2x_n + y_n - x_n - y_n = x_n \quad \text{et} \quad 2r_n - s_n = 2(x_n + y_n) - 2x_n - y_n = 2x_n + 2y_n - 2x_n - y_n = y_n.$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x_n = s_n - r_n = 3 \times 2^n - n - 2 \quad \text{et} \quad y_n = 2r_n - s_n = 2n + 4 - 3 \times 2^n.$$

Partie III.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,
$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + y_n - z_n \\ -2x_n + 2z_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = AX_n.$$
Puis j'utilise un raisonnement par récurrence pour montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0 \quad$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $X_n = A^n X_0$. Alors
$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$
Donc $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$. Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n=0$, alors par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

Finalement,

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}+2^n-n-2 \\ -2^{n+1}-2^n+2n+4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2^n-n-2 \\ -3\times 2^n+2n+4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Et je retrouve bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = 3\times 2^n - n - 2, \qquad y_n = -3\times 2^n + 2n + 4 \quad \text{et} \quad z_n = 1.$$

Exercice 2 – BSB 2015 / Ex1

1. (a) Je cherche à déterminer la matrice Q telle que $PQ = I_2$. J'exprime PQ en fonction des coefficients de Q :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a-2b & c-2d \end{pmatrix}.$$

Alors $PQ = I_2$ si et seulement si $a+b = 2c-d = 1$ et $c+d = 2a-b = 0$.
Trouver de tels coefficients revient bien en effet à résoudre les systèmes

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 1 \\ a & - & 2b & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad S_2 : \left\{ \begin{array}{ccccc} c & + & d & = & 0 \\ c & - & 2d & = & 1 \end{array} \right.$$

(b) En soustrayant la deuxième équation à la première dans les deux systèmes, j'obtiens

$$b+2b = 1-0 \iff 3b = 1 \iff b = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad d+2d = 0-1 \iff 3d = -1 \iff d = -\frac{1}{3}.$$

Puis en remplaçant la variable par sa valeur dans la première équation, j'aboutis à

$$a + \frac{1}{3} = 1 \iff a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad c - \frac{1}{3} = 0 \iff c = \frac{1}{3}.$$

Finalement, j'obtiens pour matrice Q :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Je calcule PQ et QP avec la matrice Q trouvée précédemment :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+1 & 1-1 \\ 2-2 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

$$QP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+1 & 2-2 \\ 1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

J'ai bien vérifié que $PQ = QP = I_2$.

2. (a) La matrice D est diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Comme $A^n = PD^nQ$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix},$$

puis

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Or comme $-2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = (-1)\times 2\times\dfrac{(-1)^n}{2^n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$,
j'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Les évènements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}).$$

Or d'après l'énoncé,

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0, \qquad P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P_{C_n}(A_{n+1}) = 0,$$

d'où

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

De même, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales,

$$P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}).$$

Et d'après l'énoncé,

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = 1, \qquad P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_{C_n}(B_{n+1}) = 1,$$

d'où

$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n.$$

Enfin, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales,

$$P(C_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}).$$

Et d'après l'énoncé,

$$P_{A_n}(C_{n+1}) = 1, \qquad P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_{C_n}(C_{n+1}) = 1,$$

d'où

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède,

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n.$$

5. (a) À l'instant 0, la mouche se trouve dans la pièce B donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$. D'après la question **3.**, $b_1 = a_0 + \dfrac{1}{2}b_0 + c_0 = \dfrac{1}{2}$.
Par conséquent, $U_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors d'après la question précédente,

$$AU_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

J'ai bien montré que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(b) **Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $U_n = A^n U_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0 \quad$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $U_n = A^n U_0$. Alors

$$U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0.$$

Donc $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$. Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente ainsi que la question **2.**,

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = U_n = A^n U_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$b_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

(d) J'ai déjà traité le cas $n = 0$ à la question **5.a)** : $a_0 = c_0 = 0$.
Et pour $n \geqslant 1$, cette fois d'après la question **3.**,

$$a_n = c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} = \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Exercice 3 –

Partie I.

1. (a) Comme $P(-1) = -3 - 7 + 7 + 3 = 0$, le polynôme $P(x)$ se factorise par $x - (-1) = x + 1$.
Donc il existe un polynôme $Q(x)$, de degré $3 - 1 = 2$, tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$.
Je détermine ce polynôme $Q(x)$ en effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$.

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
 & 3X^3 & - & 7X^2 & - & 7X & + & 3 & X+1 \\ \cline{9-9}
- & \left(3X^3\right. & + & \left.3X^2\right) & & & & & 3X^2-10X+3 \\ \cline{2-8}
 & & - & 10X^2 & - & 7X & + & 3 & \\
 & - & \left(-\right. & 10X^2 & - & \left.10X\right) & & & \\ \cline{3-8}
 & & & & & 3X & + & 3 & \\
 & & & & - & \left(3X\right. & + & \left.3\right) & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Finalement $P(x) = (x+1)(3x^2 - 10x + 3)$.

(b) Il me reste à traiter le polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 100 - 36 = 64 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3.$$

Donc l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$ a trois solutions : $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{3}, 3\right\}$.

2. (a) Je détermine les valeurs interdites : ce sont les solutions de l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 144 - 144 = 0$. Il y a donc une unique racine

$$x_0 = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(b) J'établis le tableau de signe de la fraction rationnelle $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x^2-10x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2-12x+12$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Et donc l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ a pour solutions : $\mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty[$.

Partie II.

1. Les fonctions f et g sont des fonctions polynomiales donc $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$. Par ailleurs,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty.$$

2. Je calcule $f(2)$ et $g(2)$ pour prouver que ces deux valeurs sont égales à 17.

$$f(2) = 8 + 24 - 10 - 5 = 17 \quad \text{et} \quad g(2) = 8 + 4 + 5 = 17.$$

Donc le point de coordonnées $(2, 17)$ est bien un point des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3. D'après la question précédente, $f(2)-g(2) = 17-17 = 0$. Donc 2 est racine du polynôme $f(x)-g(x)$. Donc il existe un polynôme $R(x)$ de degré $3-1=2$ tel que $f(x)-g(x) = (x-2)Q(x)$.
4. Je détermine ce polynôme $Q(x)$ par division euclidienne. $f(x)-g(x) = x^3+4x^2-7x-10$ et

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & + & 4X^2 & - & 7X & - & 10 & X-2 \\
\cline{9-9}
- & \big(X^3 & - & 2X^2\big) & & & & & X^2+6X+5 \\
\cline{2-8}
 & & & 6X^2 & - & 7X & - & 10 & \\
 & & - & \big(6X^2 & - & 12X\big) & & & \\
\cline{4-8}
 & & & & & 5X & - & 10 & \\
 & & & & - & \big(5X & - & 10\big) & \\
\cline{6-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Finalement $f(x)-g(x) = (x-2)(x^2+6x+5)$.
Je cherche le signe du facteur de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 36-20 = 16 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-6-4}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6+4}{2} = -1.$$

J'établis donc le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+6x+5		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi
- $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x) \leqslant g(x)$, *i.e.* sur $]-\infty,-5] \cup [-1,2]$,
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x) \geqslant g(x)$, *i.e.* sur $[-5,-1] \cup [2,+\infty[$.

Exercice 4 – ESLSCA 2011 / Ex2

1. J'exprime $f(-x)$ en fonction de $f(x)$:

$$f(-x) = \frac{2\times(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f(x).$$

Comme la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, j'en déduis que la fonction f est impaire. Graphiquement, la courbe représentative de la fonction f présente une symétrie centrale par rapport à l'origine du repère.

2. La fonction f est donnée sous la forme d'un quotient $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = x^2+1$.
Alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$, puis

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Comme $2>0$ et $\left(x^2+1\right)>0$, j'ai bien montré que le signe de $f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{\left(x^2+1\right)^2}$ est donné par celui de $\left(1-x^2\right)$.

3. Puisque $1-x^2 \geqslant 0 \iff x^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x \leqslant 1$, j'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\dfrac{2}{\left(x^2+1\right)^2}$		$+$		$+$		$+$	
$\left(1-x^2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Je calcule également $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$ pour vérifier le signe de $f'(x)$:

$$f'(-2)=\frac{-2\times(-2)^2+2}{\left((-2)^2+1\right)^2}=\frac{-8+2}{(4+1)^2}=-\frac{6}{25}<0$$

$$f'(0)=\frac{-2\times 0^2+2}{\left(0^2+1\right)^2}=\frac{0+2}{(0+1)^2}=2>0$$

$$f'(2)=\frac{-2\times 2^2+2}{\left(2^2+1\right)^2}=\frac{-8+2}{(4+1)^2}=-\frac{6}{25}<0$$

Les signes de ces trois valeurs coïncident bien avec mon tableau de signe.

4. J'étudie les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Comme il s'agit d'une fraction rationnelle,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0^+.$$

Aussi,

$$f(-1)=\frac{2\times(-1)}{(-1)^2+1}=\frac{-2}{2}=-1 \quad \text{et} \quad f(1)=\frac{2\times 1}{1^2+1}=\frac{2}{2}=1.$$

Alors grâce au tableau de signe établi à la question précédente, j'obtiens le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5. La fonction f' est de la forme d'un quotient $f'=\dfrac{u}{v}$, avec $u(x)=-2x^2+2$ et $v(x)=\left(x^2+1\right)^2$. Alors $u'(x)=-4x$ et $v'(x)=2\times 2x\times\left(x^2+1\right)=4x\left(x^2+1\right)$, puis

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4x\times\left(x^2+1\right)^2-(-2x^2+2)\times 4x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{\left(x^2+1\right)\left(-4x(x^2+1)-(-2x^2+2)\times 4x\right)}{\left(x^2+1\right)^4} \\ &= \frac{-4x^3-4x+8x^3-8x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{4x^3-12x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{4\left(x^3-3x\right)}{\left(x^2+1\right)^3}. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que $f''(x) = \dfrac{4\left(x^3-3x\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$.

6. J'établis le tableau de signe de $\varphi(x) = x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

7. Pour étudier la convexité de la fonction f, j'ai besoin de connaître le signe de la dérivée seconde $f''(x)$. Or je remarque que $\varphi(x) = x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) = x\left(x^2-3\right) = x^3-3x$.
De cela, je peux en déduire le tableau de signe de $f''(x)$, puisque $4>0$ et $x^2+1>0$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\dfrac{4}{\left(x^2+1\right)^3}$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$\left(x^3-3x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

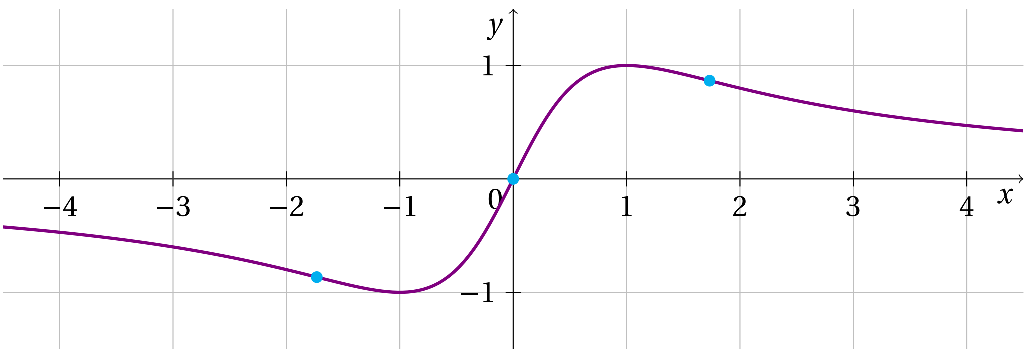
Ainsi

- la fonction f est convexe lorsque $f''(x) \geqslant 0$, *i.e.* sur $\left[-\sqrt{3},0\right]$ et sur $\left[\sqrt{3},+\infty\right[$,
- la fonction f est concave lorsque $f''(x) \leqslant 0$, *i.e.* sur $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right]$ et sur $\left[0,\sqrt{3}\right]$.

Les trois points d'inflexion de la courbe sont les points d'abscisses $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$, *i.e.*

$$\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad (0,0) \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

8. Voici la représentation graphique de la fonction f.



9. La fonction F est de la forme $F = \ln(u)$, avec $u(x) = x^2 + 1$. Alors $u'(x) = 2x$ et donc
$$F'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1} = f(x).$$
L'aire décrite par l'énoncé se trouve alors être égale à l'intégrale de la fonction f entre les bornes 0 et $\sqrt{3}$. Ainsi
$$\mathcal{A} = \int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^{\sqrt{3}} = F\left(\sqrt{3}\right) - F(0) = \ln\left(\sqrt{3}^2+1\right) - \ln\left(0^2+1\right) = \ln(4) - \ln(1) = 2\ln(2).$$
Alors l'aire vaut $2\ln(2)$ unités d'aire, et comme chaque unité d'aire vaut 4 centimètres carrés, cela fait une aire de $8\ln(2)$ centimètres carrés.

Exercice 5 – Extrait d'ECRICOME 2013 / Ex3

Partie I - Probabilités conditionnelles

1. D'après l'énoncé, je sais que
$$P(D) = 0.05, \qquad P(\overline{D}) = 1 - 0.05 = 0.95,$$
$$P_D(\overline{A}) = 0.9, \qquad P_D(A) = 1 - 0.9 = 0.1 \quad \text{et} \quad P_{\overline{D}}(A) = 0.8.$$
2. D'après la formule des probabilités composées,
$$P(A \cap D) = P(D) \times P_D(A) = 0.05 \times 0.1 = 0.005.$$
De même,
$$P(A \cap \overline{D}) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(A) = 0.95 \times 0.8 = 0.76.$$
3. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{D, \overline{D}\}$ forme un système complet d'événements,
$$P(A) = P(A \cap D) + P(A \cap \overline{D}) = 0.005 + 0.76 = 0.765.$$
4. Je cherche à déterminer $P_A(D)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,
$$P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0.005}{0.765} \approx 0.007.$$

Partie II - Loi binomiale

1. Il s'agit de la répétition de 10 expériences de Bernoulli, de succès "l'appareil est sans défaut", de probabilité $p = 0.95$, répétitions identiques et indépendantes. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.95$. Le support vaut $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$, et pour tout $k \in X(\Omega)$,
$$P(X = k) = \binom{10}{k} (0.95)^k (0.05)^{10-k}.$$
2. Je cherche à déterminer $P(X = 10)$. La probabilité que tous les appareils soient sans défaut est donc
$$P(X = 10) = \binom{10}{10} (0.95)^{10} (0.05)^0 = 0.95^{10}.$$
3. Je cherche à déterminer $P(X \leqslant 9)$ La probabilité qu'au moins un appareil ait un défaut est donc
$$P(X \leqslant 9) = 1 - P(X = 10) = 1 - (0.95)^{10}.$$