NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 24

Exercice 1 – On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$
et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0.4$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \in \left]0,1\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Je préfère utiliser l'expression équivalente $0 < u_n < 1$ à la place de $u_n \in \left]0,1\right[$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $0 < u_n < 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0.4$ et $0 < 0.4 < 1$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que $0 < u_n < 1$, alors comme la fonction $g(x) = x^3$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$,

$$0 < u_n < 1 \iff g(0) < g(u_n) < g(1) \iff 0^3 = 0 < u_{n+1} < 1 = 1^3.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Solution : Je calcule la différence entre deux termes consécutifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n^3 - u_n = u_n\left(u_n^2 - 1\right) = u_n(u_n + 1)(u_n - 1) < 0,$$

puisque j'ai montré que $0 < u_n < 1$ donc $u_n > 0$, $u_n + 1 > 1 > 0$ et $u_n - 1 < 0$.
Finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ *i.e.* $u_{n+1} < u_n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien strictement décroissante.

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Solution : En combinant les deux questions précédentes, je sais que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est minorée par 0. Donc grâce au théorème de la limite monotone, j'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Je note ℓ sa limite, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
Puisque $u_{n+1} = u_n^3$, en faisant tendre n vers l'infini et en passant à la limite, j'obtiens

$$\ell = \ell^3 \iff \ell^3 - \ell = 0 \iff \ell\left(\ell+1\right)\left(\ell-1\right) = 0 \iff \ell \in \left\{-1, 0, 1\right\}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0,1\right[$, alors ℓ ne peut pas être égal à -1.
Aussi $u_0 = 0.4$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc ℓ ne peut pas valoir 1.
Alors j'en conclus que

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$