NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 22

Exercice 1 – On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M et préciser les valeurs propres associées.

Solution : Tout d'abord V_1, V_2 et V_3 sont bien des vecteur non nuls. Par ailleurs,

$$MV_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ -2+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times V_1$$

Donc V_1 est un vecteur propre de M et 1 est la valeur propre associée.

$$MV_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 \\ 12-6 \\ -8+6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \times V_2$$

Donc V_2 est un vecteur propre de M et 2 est la valeur propre associée.

$$MV_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-2 \\ 6+6 \\ -4-6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} = -4 \times V_3$$

Donc V_3 est un vecteur propre de M et -4 est la valeur propre associée.

Exercice 2 – On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
Le réel 6 est-il valeur propre de A?
Si oui, déterminer un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

Solution : Je résous le système $AX = 6X$ où je pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Cela me donne

$$\begin{aligned}
AX = 6X \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & z & = & 6x \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 6y \\ x & + & y & + & 3z & = & 6z \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ -3x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ & & 4y & - & 8z & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1
\end{aligned}$$

J'obtiens alors un système à un degré de liberté. Je choisis $z = 1$ (par exemple).
Alors $4y - 8 = 0$ donc $y = 2$. Et $x + y - 3z = 0$ devient $x - 1 = 0$ *i.e.* $x = 1$.

J'ai trouvé une solution non nulle donc 6 est bien une valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.