

EXERCICES — CHAPITRE 7

Intégration sur un segment

Exercice 1 – Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1. $f_1(x) = x^2 - 3x + 7$ | 5. $f_5(x) = (7x + 1)^8$ |
| 2. $f_2(x) = -\frac{3}{x}$ | 6. $f_6(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^4}$ |
| 3. $f_3(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ | 7. $f_7(x) = \frac{1}{x} \ln(x)^2$ |
| 4. $f_4(x) = \frac{1}{x^3}$ | 8. $f_8(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}}$ |

Exercice 2 – On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$.

1. On note α et β les deux racines de la fonction $P : x \mapsto x^2 - 2x - 3$. Déterminer α et β .
2. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = \frac{a}{x - \alpha} + \frac{b}{x - \beta}.$$

3. En déduire une primitive de f sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

Exercice 3 – Calculer les intégrales suivantes.

- | | |
|--|---|
| 1. $I_1 = \int_{-2}^3 x^3 + x - 2 \, dx$ | 4. $I_4 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \, dt$ |
| 2. $I_2 = \int_3^{11} \sqrt{2x + 3} \, dx$ | 5. $I_5 = \int_0^2 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \, dx$ |
| 3. $I_3 = \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5 + 3}} \, dt$ | |

Exercice 4 – Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $I_6 = \int_0^1 t e^{2t} \, dt$ | 3. $I_8 = \int_0^1 (x^2 + 1) e^{3x} \, dx$ |
| 2. $I_7 = \int_1^2 t \ln(t) \, dt$ | 4. $I_9 = \int_1^2 \frac{\ln(1 + t)}{t^2} \, dt$ |

Exercice 5 – L'objectif est de calculer les intégrales $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \, dx$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} \, dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} \, dx$.

1. **Calcul de I .**
Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$.
 - (a) Calculer la dérivée de f .
 - (b) En déduire la valeur de I .
2. **Calcul de J et K .**
 - (a) Sans calculer explicitement les intégrales J et K , vérifier que $J + 2I = K$.
 - (b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
 - (c) En déduire les valeurs de J et K .

Exercice 6 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e \ln(x)^n \, dx$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Calculer I_0 et I_1 .
3. Étudier la monotonie de la suite I_n et montrer qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$.
5. En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 7 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} \, dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{x^n}{1 + x^n} \leq x^n$.
2. Calculer $\int_0^1 x^n \, dx$ puis en déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n + 1}$.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.
4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^n} \, dx = 1$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.

(a) Montrer que $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx$.

(Indication : Penser à une intégration par parties.)

(b) Montrer que

$$\forall t \geq 0, \quad 0 \leq \ln(1 + t) \leq t.$$

(c) En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n \geq 0}$.

Intégrales généralisées

Exercice 8 – Montrer que l'intégrale généralisée suivante converge et déterminer sa valeur :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3} dt.$$

Exercice 9 – Montrer que l'intégrale généralisée suivante diverge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

Exercice 10 – En utilisant une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée suivante converge et déterminer sa valeur :

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

Exercice 11 – Déterminer trois réels a , b et c tels que

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2} dx.$$

Exercice 12 –

1. À l'aide d'une intégration par parties, donner la valeur de l'intégrale $\int_0^A x e^{-x} dx$ puis calculer

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x e^{-x} dx.$$

2. Que peut-on en déduire pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$?

Exercice 13 – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

En séparant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, calculer l'expression

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Exercice 14 – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1 l'intégrale

$$I_A = \int_1^A \frac{2}{x^3} dx.$$

2. Calculer $\lim_{A \rightarrow +\infty} I_A$.

3. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 15 – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

1. Calculer la dérivée de la fonction m définie pour tout réel x positif ou nul par

$$m(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. Soit M un réel strictement positif. On pose

$$I(M) = \int_0^M x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Déduire de la question précédente la valeur de $I(M)$ puis calculer $\lim_{M \rightarrow +\infty} I(M)$.

3. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 16 – extrait d'ECRICOME 2016

On pose $I_0 = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ et pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_1^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

1. Montrer que I_0 est une intégrale convergente, égale à $\frac{1}{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $M > 1$,

$$\int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x} dx.$$

3. En raisonnant par récurrence et à l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel n , l'intégrale I_n converge.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

5. Calculer I_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$.