NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 11

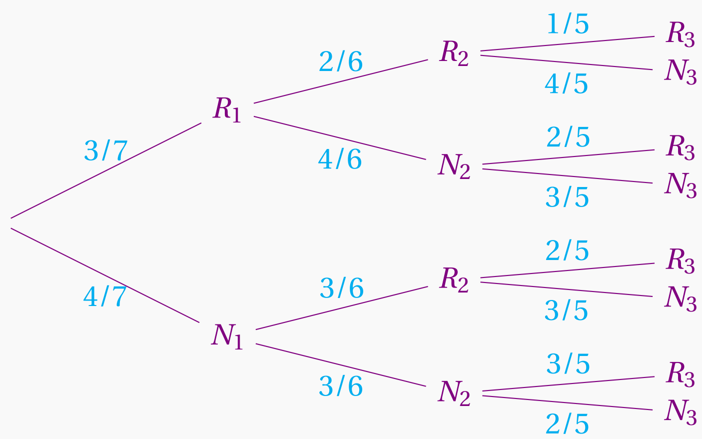
Exercice 1 – Une urne contient trois boules rouges et quatre boules noires. On tire successivement et sans remise trois boules dans cette urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues lors du tirage.

1. Déterminer le support de X.

Solution : Le nombre de boules rouges obtenues est compris entre 0 et 3, puisqu'il y a trois tirages. Donc le support est donné par $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$.

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

Solution : Je note R_k et N_k les événements "la k-ième boule tirée est rouge" et "la k-ième boule tirée est noire". Je peux représenter la situation via l'arbre de probabilité suivant *(mais ce n'est pas une justification)*.



D'après la formule des probabilités composées,

$$P(X=0) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}.$$

Par incompatibilité des événements et avec la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(N_1 \cap N_2 \cap R_3) + P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) + P(R_1 \cap N_2 \cap N_3) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = 3 \times \frac{6}{35} = \frac{18}{35}. \end{aligned}$$

Par incompatibilité des événements et avec la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(N_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap N_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{35}. \end{aligned}$$

Enfin d'après la formule des probabilités composées,

$$P(X=3) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}.$$

Je résume tout cela dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

3. Déterminer l'espérance de X.

Solution : Grâce au tableau de la loi obtenu à la question précédente,

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}.$$

4. Déterminer la variance de X.

Solution : Par le théorème de transfert,

$$E\left(X^2\right) = 0^2 \times \frac{4}{35} + 1^2 \times \frac{18}{35} + 2^2 \times \frac{12}{35} + 3^2 \times \frac{1}{35} = \frac{75}{35} = \frac{15}{7}.$$

Donc d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{15}{7} - \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{105}{49} - \frac{81}{49} = \frac{24}{49}.$$

Exercice 2 – On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir PILE et on note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir PILE.

1. Déterminer le support $X(\Omega)$ de X.

Solution : Le support est donné par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, puisqu'il faut au moins un lancer pour obtenir le premier PILE.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$.

Solution : L'événement $[X = k]$ correspond à l'obtention de FACE lors des $k-1$ premiers lancers et PILE lors du k-ième lancer. La pièce étant équilibrée, la probabilité d'obtenir PILE est égale à la probabilité d'obtenir FACE et vaut $\frac{1}{2}$. Ainsi

$$P(X = k) = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{\text{FACE } k-1 \text{ fois}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{PILE}} = \frac{1}{2^k}.$$

3. Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 1} P(X = k)$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

Solution : Je viens de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$.

Je cherche donc à déterminer la somme de la série $\sum_{k \geqslant 1} P(X = k) = \sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Je reconnais une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$ donc la série converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$