ESCP 2023

Exercice 1 –

1. Je commence par calculer le carré de la matrice A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I.$$

J'ai montré que $A^2 = A+2I$. Alors $A^2 - A - 2I = 0_3$, matrice nulle d'ordre 3, ce qui signifie que le polynôme $x^2 - x - 2$, qui est bien de degré 2, est un polynôme annulateur de la matrice A.

2. a) Les valeurs propres possibles pour la matrice A sont parmi les racines d'un polynôme annulateur. Il me suffit donc de trouver les racines du polynôme $x^2 - x - 2$.
Je calcule son discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$.
Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ainsi les deux valeurs propres possibles pour la matrice A sont -1 et 2.

b) En me servant du polynôme annulateur,

$$A^2 - A - 2I = 0_3 \iff A^2 - A = 2I \iff A \times (A - I) = 2I \iff A \times \left(\frac{1}{2}(A-I)\right) = I.$$

Grâce à cette équation, j'en déduis que la matrice A est inversible
et que son inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I).$$

3. a) Je calcule les trois produits matriciels demandés :

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2U,$$

$$AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -V,$$

$$AW = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -W.$$

Comme U est une matrice colonne non nulle telle que $AU = 2U$, alors 2 est effectivement valeur propre de A, associée au vecteur propre $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
De même, comme V est une matrice colonne non nulle telle que $AV = -V$, alors -1 est effectivement valeur propre de A, associée au vecteur propre $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Enfin pour les mêmes raisons, W est un autre vecteur propre associé à la valeur propre -1.

b) Je calcule puis compare les deux produits matriciels. Comme les colonnes de Q sont les vecteurs propres de la matrice A, alors je connais déjà les colonnes de la matrice AQ :

$$A \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q \times D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi j'ai bien vérifié l'égalité matricielle $AQ = QD$.

c) Je calcule le produit matriciel QR :

$$Q \times R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1-1 & 1-1 \\ 1+1-2 & 1+2 & 1-1 \\ 1-2+1 & 1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I.$$

Comme $Q \times R = 3I$, alors la matrice Q est inversible et son inverse est donnée par

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} R.$$

d) Comme la matrice Q est inversible, alors l'équation $AQ = QD$ se réécrit $A = QDQ^{-1}$, où la matrice D est diagonale et la matrice Q est inversible. Il s'agit de la définition d'une matrice diagonalisable. Donc la matrice A est bien diagonalisable.

4. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = QD^nQ^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $A^n = QD^nQ^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = QD^nQ^{-1} \times QDQ^{-1} = QD^nIDQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = QD^nQ^{-1}.$$

b) J'ai montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = QD^nQ^{-1}$.
Or je connais Q et Q^{-1} et comme D est une matrice diagonale, alors

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice A^n, il me suffit de calculer le produit $A^n = QD^nQ^{-1}$. Ici, seule la première ligne est demandée.

$$Q \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^n = QD^n \times Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n + (-1)^n & 2^n + (-1)^n - 2 \times (-1)^n & 2^n - 2 \times (-1)^n + (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2 \times (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Je retrouve la formule annoncée par l'énoncé pour la première ligne de la matrice A^n.

5. a) À l'instant 0, le jeton se trouve sur le sommet 1 et il se déplace de façon équiprobable sur l'un des deux autres sommets. Ainsi le jeton quitte le sommet 1 et a une chance sur deux d'arriver sur les sommets 2 et 3 :

$$P(X_1 = 1) = 0, \qquad P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 3) = \frac{1}{2}.$$

Alors comme $\{[X_1 = 2], [X_1 = 3]\}$ forme un système complet d'événements, en utilisant la formule des probabilités totales et le fait que le jeton a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'aller sur chacun des autres sommets, j'obtiens bien les formules annoncées par l'énoncé :

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$P(X_2 = 2) = P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 2) + P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$P(X_2 = 3) = P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 3) + P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{4}.$$

b) Je reprends un raisonnement similaire. Pour $n \geqslant 2$, $\{[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3]\}$ forme un système complet d'événements et pour tout $(i, j) \in [\![1,3]\!]^2$, les probabilités conditionnelles sont données par

$$P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Alors d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{i=1}^{3} P(X_n = i) \times P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = 1) \\ &= P(X_n = 1) \times 0 + P(X_n = 2) \times \frac{1}{2} + P(X_n = 3) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3) \end{aligned}$$

c) De la même manière, je peux démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 3) \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2).$$

Alors en posant B la matrice égale à $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A,$
j'obtiens bien que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} L_n \times B &= \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P(X_n = 2) + P(X_n = 3) & P(X_n = 1) + P(X_n = 3) & P(X_n = 1) + P(X_n = 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) & P(X_{n+1} = 2) & P(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = L_{n+1}. \end{aligned}$$

d) Je vérifie que $L_0 \times B$ soit bien égale à L_1, puis que $L_1 \times B$ soit bien égale à L_2 :

$$L_0 \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = L_1$$

$$L_1 \times B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = L_2$$

Ainsi l'égalité $L_{n+1} = L_n B$ est vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

e) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad L_n = L_0 B^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad L_0 B^0 = L_0 \times I = L_0$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $\quad L_n = L_0 B^n$.
Et grâce à la question précédente, $\quad L_{n+1} = L_n B$. Alors directement

$$L_{n+1} = L_n B = L_0 B^n \times B = L_0 B^{n+1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 B^n.$$

f) La loi de X_n est donnée par les trois coefficients de la matrice L_n.
D'après la question **5.e)**, $\quad L_n = L_0 B^n$. D'après la question **5.c)**, $\quad B = \frac{1}{2} A$.
Donc

$$L_n = L_0 \times \left(\frac{1}{2} A\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times L_0 A^n.$$

En utilisant la question **4.b)**, comme $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$L_0 \times A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2 \times (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Et finalement, en multipliant par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$L_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n est donnée par

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad P(X_1 = 2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad P(X_1 = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercice 2 –

1.
2. a)
   b)
3.
4. a)
   b)
   c)
5. a)
   b)
   c)

Exercice 3 –

1. a)

   b)

   c)

2. a)

   b)

   c)

   d)

3.

4.

5.

Exercice 4 –

1. a)

   b)

2.

3. a)

   b)

4. a)

   b)

   c)

   d)

5. a)

   b)

   c)

6. a)

   b)

   c)

   d)