

12 | Fonction logarithme népérien

I – Définition et premières propriétés

Définition 12.1 – La fonction **logarithme népérien**, notée \ln , est la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 lorsque $x = 1$.

Proposition 12.2

De cette définition résultent trois conclusions immédiates :

- La fonction logarithme népérien est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- La fonction logarithme népérien s'annule lorsque $x = 1$, *i.e.* $\ln(1) = 0$.
- Pour tout réel strictement positif $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 12.3 – Propriété fondamentale du logarithme

Pour tous nombres réels strictement positifs $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

Corollaire 12.4

De cette propriété algébrique fondamentale découlent plusieurs conséquences.

- Pour tout nombre réel strictement positif $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- Pour tous nombres réels strictement positifs $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- Pour tout nombre réel strictement positif $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln(a)$.
- Pour tout nombre réel strictement positif $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

Démonstration.

- Grâce à la proposition précédente, je sais que $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a)$.
Cependant $\frac{1}{a} \times a = 1$ donc $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln(1) = 0$.
Ainsi $\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = 0$ et donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- Je raisonne de la même manière pour les trois autres points.

□

Exemple 12.5 – Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

$$1. \ln(x^2) - \ln(x)$$

$$= 2\ln(x) - \ln(x) = \ln(x)$$

$$2. \ln(2x) - \ln(x)$$

$$= \ln(2) + \ln(x) - \ln(x) = \ln(2)$$

$$3. \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$$

$$4. 2\ln(x^3) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= 6\ln(x) - 3\ln(x) = 3\ln(x)$$

$$5. \ln(1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 0 - \ln(x) - 2\ln(x) = -3\ln(x)$$

$$6. \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \ln(x) - \ln(y) + \ln(y) - \ln(x) = 0$$

II – Étude de la fonction logarithme népérien

1 – Ensemble de définition

Proposition 12.6

La fonction logarithme népérien est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, i.e. sur $]0, +\infty[$, et a ses valeurs dans \mathbb{R} .

Ainsi dans le cas d'une fonction de la forme $f = \ln(u)$, l'ensemble de définition est donné par les solutions de l'inéquation $u(x) > 0$.

Exemple 12.7 – Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

Je cherche pour quelles valeurs de x l'inéquation $x^2 - 3x + 2 > 0$ est vérifiée.

Je calcule le discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 = 1^2 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
x^2-3x+2	+	0	-	0	+

Et donc la fonction f est définie sur $] -\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

2 – Variations

Proposition 12.8

La fonction logarithme népérien est **continue** et **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Démonstration. La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc continue sur cet intervalle.

La dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Or si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$. Donc la dérivée de la fonction est strictement positive et la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. □

Proposition 12.9

Pour tous réels strictement positifs $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b \quad \text{et} \quad \ln(a) > \ln(b) \iff a > b.$$

Exemple 12.10 – Résoudre dans l'intervalle I les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(x+2) = 2\ln(x)$ sur $I =]0, +\infty[$

$$\ln(x+2) = 2\ln(x) \iff \ln(x+2) = \ln(x^2) \iff x+2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0$$

Je calcule alors le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$.

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Je ne garde que la solution qui est dans l'intervalle $I =]0, +\infty[$, i.e. $x = 2$.

2. $\ln(2x-3) + \ln(3) = 2\ln(x)$ sur $I = \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$

$$\ln(2x-3) + \ln(3) = 2\ln(x) \iff \ln((2x-3) \times 3) = \ln(x^2) \iff \ln(6x-9) = \ln(x^2)$$

$$\iff 6x-9 = x^2 \iff x^2 - 6x + 9 = 0$$

Je calcule alors le discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$.

Il y a donc une unique racine :

$$x_0 = -\frac{-6}{2 \times 1} = 3.$$

De plus, 3 est bien dans l'intervalle $\left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$ donc l'unique solution de l'équation est $x = 3$.

3. $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12)$ sur $I = \left] \frac{4}{3}, +\infty \right[$

$$\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12) \iff \ln(x(x+2)) = \ln(9x-12) \iff \ln(x^2+2x) = \ln(9x-12)$$

$$\iff x^2+2x = 9x-12 \iff x^2-7x+12 = 0$$

Je calcule le discriminant : $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1 = 1^2 > 0$.

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Ces deux racines sont dans l'intervalle $\left] \frac{4}{3}, +\infty \right[$ donc l'équation considérée admet deux solutions $x = 3$ et $x = 4$.

4. $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2)$ sur $I = \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$

$$\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2) \iff \ln(3x-1) = \ln(2) + \ln(x) \iff \ln(3x-1) = \ln(2x)$$

$$\iff 3x-1 = 2x \iff x-1 = 0 \iff x = 1$$

Or 1 est bien dans l'intervalle $\left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$ donc l'équation considérée admet $x = 1$ comme unique solution.

5. $\ln(2x) < \ln(x+7)$ sur $I =]0, +\infty[$

$$\ln(2x) < \ln(x+7) \iff 2x < x+7 \iff x < 7$$

Il faut donc que $x < 7$ et que x soit dans l'intervalle $]0, +\infty[$. Finalement $\mathcal{S} =]0, 7[$.

6. $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geq \ln(2)$ sur $I = \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[$

$$\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geq \ln(2) \iff \ln(3x+1) \geq \ln(2) + \ln(x+1) \iff \ln(3x+1) \geq \ln(2(x+1))$$

$$\iff 3x+1 \geq 2x+2 \iff x \geq 1$$

Il faut donc que $x \geq 1$ et que x soit dans l'intervalle $\left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[$. Finalement $\mathcal{S} = [1, +\infty[$.

Corollaire 12.11

En particulier, puisque $\ln(1) = 0$, pour tout réel strictement positif $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x) = 0 \iff x = 1, \quad \ln(x) > 0 \iff x > 1 \quad \text{et} \quad \ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1.$$



ATTENTION ! La fonction logarithme est définie sur \mathbb{R}_+^* mais prend des valeurs négatives !

3– Limites

Proposition 12.12

La fonction logarithme népérien a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

La fonction logarithme népérien a pour limite $-\infty$ en 0^+ , *i.e.*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

Exemple 12.13 – Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$.

- Je calcule la limite du quotient puis la limite de la fonction composée :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \\ \lim_{X \rightarrow 2} \ln(X) = \ln(2) \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = \ln(2).$$

- Je calcule la limite du quotient puis la limite de la fonction composée :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x-1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x-3 = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = +\infty.$$

- Je calcule la limite du quotient puis la limite de la fonction composée :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 2x-1 = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} x-3 = -\frac{5}{2} \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x-1}{x-3} = 0^+.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x-1}{x-3} = 0^+ \\ \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = -\infty.$$

4 – Nombre e

D'après les résultats des paragraphes précédents, la fonction logarithme népérien présente le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
\ln	$-\infty$	0	$+\infty$

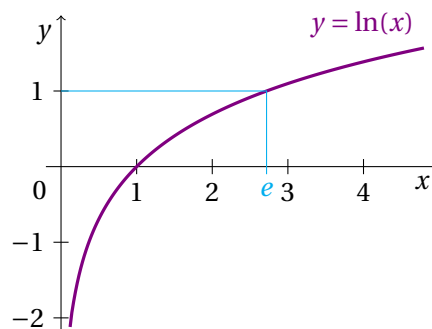
On en déduit donc l'allure de la courbe de la fonction logarithme.

On observe graphiquement qu'il existe un point unique de la courbe qui a pour ordonnée 1.

Son abscisse est voisine de 2.7.

Au-delà de cette observation graphique, l'existence d'un unique antécédent de 1 repose sur la variation de la fonction logarithme népérien qui est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et qui prend chaque valeur réelle une fois et une seule quand x varie dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Il existe donc un et un seul réel x tel que $\ln(x) = 1$.



Définition 12.14 – e est le nombre réel défini par l'équation $\ln(e) = 1$.

Remarque 12.15 – Une valeur approchée (*à connaître*) de e est donnée par $e \approx 2.72$.

5 – Croissances comparées

Il existe aussi quelques limites remarquables, qui font intervenir la fonction logarithme.

On étudie ce que l'on appelle des résultats de *croissances comparées*.

Proposition 12.16

Pour tout entier naturel non nul n ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$$

En particulier lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Remarque 12.17 – Ces limites sont normalement des **formes indéterminées**.

Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de *croissances comparées*.

On retient que les puissances "l'emportent" sur le logarithme.

Exemple 12.18 – Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x)$.

Par *croissances comparées*, et en réécrivant $x^2 - \ln(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty.$$

III – Étude d'une fonction de la forme $\ln(u)$

Proposition 12.19

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I .
La fonction composée $f = \ln \circ u$, définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \ln(u(x))$$

est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple 12.20 – Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$. Calculer $f'(x)$.
La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 2$. Alors $u'(x) = 2x - 3$ et donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}.$$

Exemple 12.21 – Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

La fonction f est définie lorsque $x^2 - 5x + 6 > 0$. Je résous l'inéquation $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 = 1^2 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Et donc la fonction f est définie sur $] -\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Je dois calculer les limites de f en $-\infty, 2^-, 3^+$ et $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 5x + 6) = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 5x + 6 = 0^+ \\ \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(x^2 - 5x + 6) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 5x + 6 = 0^+ \\ \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 5x + 6) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 5x + 6) = +\infty.$$

3. Étudier les variations de la fonction f .


Pour étudier les variations de la fonction f , il faut connaître la dérivée f' puis étudier son signe. La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 - 5x + 6$. Alors $u'(x) = 2x - 5$ et donc

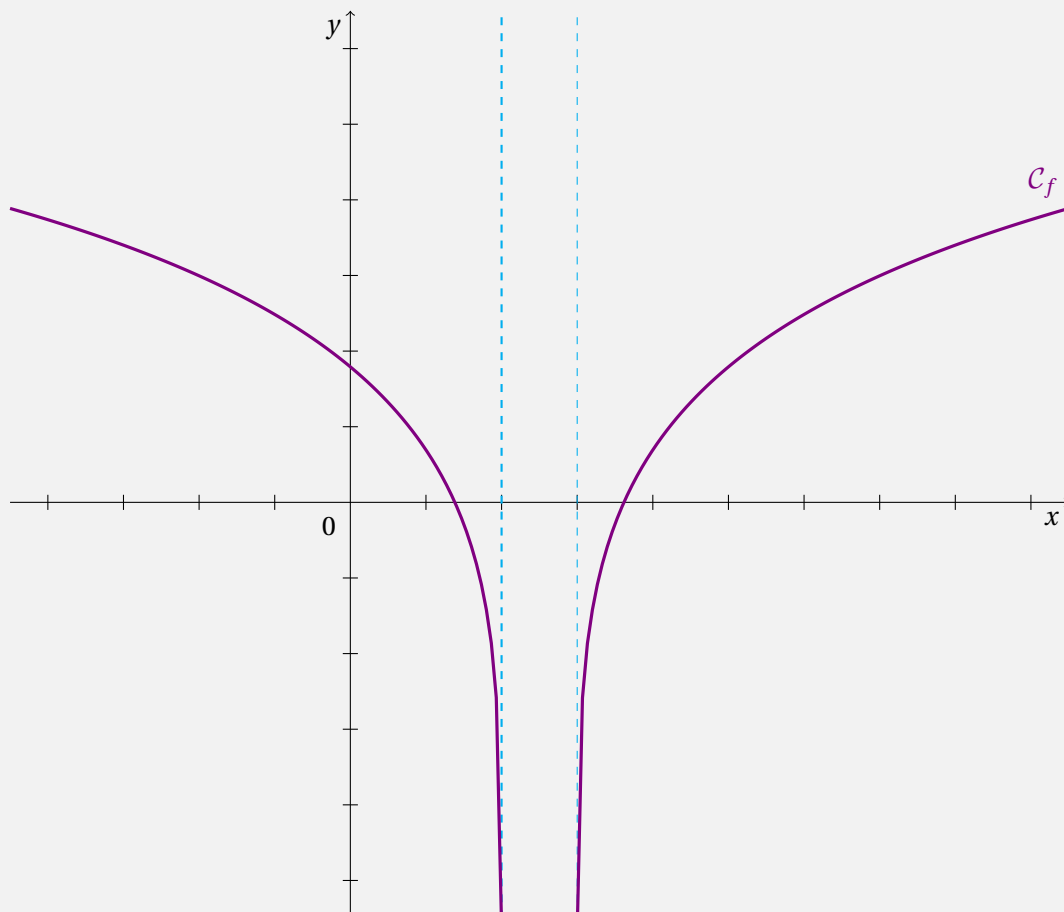
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}.$$

Je connais déjà le signe de $x^2 - 5x + 6$, positif sur tout l'ensemble de définition.

J'étudie maintenant le signe de $2x - 5$: $2x - 5 \geq 0 \iff 2x \geq 5 \iff x \geq \frac{5}{2}$.

J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	2	$\frac{5}{2}$	3	$+\infty$	
$2x-5$	-	-	0	+	+	
x^2-5x+6	+	0	-	-	0	+
$f'(x)$	-				+	
f	$+\infty$  $-\infty$				$-\infty$  $+\infty$	

4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f .

IV – Primitives et fonction logarithme

La fonction logarithme népérien étant désormais connue, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les deux lignes suivantes :

f est définie sur I par	une primitive F est donnée par
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$

Remarque 12.22 – On rappelle qu’une primitive est définie sur un intervalle.

Il suffit donc de regarder le signe de la fonction u sur l’intervalle pour retirer la fonction valeur absolue.

Majoritairement $u(x) > 0$ sur l’intervalle proposé.

Exemple 12.23 – Calculer les primitives des fonctions suivantes sur l’intervalle donné.

1. $f(x) = \frac{2}{3x}$ sur $I =]0, +\infty[$ 2. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ 3. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$

1. La fonction f est de la forme $f = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x}$, donc une primitive est donnée par $F(x) = \frac{2}{3} \times \ln(x)$.
La valeur absolue n’est pas nécessaire ici puisque $x > 0$ sur $I =]0, +\infty[$.

2. La fonction f est la somme de deux fonctions dont je peux calculer une primitive.

En effet, sur $I =]0, +\infty[$, une primitive de $f_1(x) = \frac{1}{x}$ est donnée par $F_1(x) = \ln(x)$

et une primitive de $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$ est donnée par $F_2(x) = \ln(x+1)$.

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \ln(x) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

3. La fonction f semble être de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$. Puisque $u'(x) = 2x$, alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$