

## EXERCICES — CHAPITRE 6

**Exercice 1** (★★) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 5u_n + 4.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .

**Exercice 2** (★★) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = -3$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 5 - 4u_n.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (-4)^{n+1} + 1$ .

**Exercice 3** (★★) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 1$ .

**Exercice 4** (★★) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 4$ .

**Exercice 5** (★★) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq 3$ .

**Exercice 6** (★★) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^n + n + 1$ .

**Exercice 7** (★★) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .

**Exercice 8** (★★) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 1$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2.$$

1. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .

**Exercice 9** (★★★) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Montrer que pour tout  $n \geq 4$ ,  $u_n \geq 0$ .
3. En déduire que pour tout  $n \geq 5$ ,  $u_n \geq n - 3$ .

**Exercice 10** (★★★) – Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$2^n > n.$$

**Exercice 11** (★★) – Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

**Exercice 12** (★★★) – Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

**Exercice 13** (★★) – Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

**Exercice 14** (★★★) –

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2.$$