NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 19

Exercice 1 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Solution : Je vérifie les trois conditions de la définition d'une densité :

- Pour $x < 0$, $f(x) = 0 \geqslant 0$ et pour $x \geqslant 0$, $f(x) = e^{-x} > 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est continue sur $]-\infty, 0]$ car constante et continue sur $]0, +\infty[$ comme exponentielle. Donc f admet au plus un point de discontinuité en 0.
- Il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.
  - ▷ Déjà, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
  - ▷ Puis j'étudie la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
    Je fixe $M \geqslant 0$. Alors
    $$\int_0^M e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^M = -e^{-M} - \left(-e^{-0}\right) = 1 - e^{-M}.$$
    Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} 1 - e^{-M} = 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

  Je conclus avec la relation de Chasles : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.$$

La fonction f vérifie les trois conditions donc f est bien une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire admettant X pour densité.

Solution : Étant donnée l'expression de f, je distingue deux cas selon les valeurs de x :

- Si $x < 0$, alors $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$
- Si $x \geqslant 0$, alors $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}.$

Finalement j'ai montré que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Calculer $P(X \leqslant 2)$, $\quad P(0 < X \leqslant 1)$ et $P(X > \ln(2))$.

Solution : En utilisant la fonction de répartition, j'obtiens que
$$P(X \leqslant 2) = F_X(2) = 1 - e^{-2},$$
$$P(0 < X \leqslant 1) = F_X(1) - F_X(0) = 1 - e^{-1} - 0 = 1 - e^{-1},$$
$$P(X > \ln(2)) = 1 - F_X(\ln(2)) = 1 - \left(1 - e^{-\ln(2)}\right) = e^{-\ln(2)} = \frac{1}{e^{\ln(2)}} = \frac{1}{2}.$$