ECRICOME 2021

Exercice 1 –

1. (a)

$$M-I=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad M+3I=\begin{pmatrix}5&-2&1\\2&0&2\\-1&2&3\end{pmatrix},$$

donc

$$(M-I)(M+3I)=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5&-2&1\\2&0&2\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(b) Comme $(M-I)(M+3I)=O_3$, j'en déduis que le polynôme

$$P(X)=(X-1)(X+3)=X^2+2X-3$$

est un polynôme annulateur de la matrice M.

(c) Les valeurs propres possibles pour la matrice M sont les racines du polynôme annulateur. Or $X^2+2X-3=0 \iff (X-1)(X+3)=0 \iff X=1$ ou $X=-3$. Donc comme X^2+2X-3 est un polynôme annulateur de M et que ses racines sont -3 et 1, les valeurs propres possibles pour M sont

$$-3 \quad \text{et} \quad 1.$$

2. (a) D'après la question 1a, je sais que $P(M)=(M-I)(M+3I)=O_3$, *i.e.* $M^2+2M-3I=O_3$. J'en déduis donc que

$$M^2=3I-2M.$$

(b) Notons P_n la propriété $M^n=u_nM+v_nI$.

Initialisation : Pour $n=0$,

$$M^0=I \quad \text{et} \quad u_0M+v_0I=0\times M+1\times I=I.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbf{N}$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$\begin{aligned}M^{n+1}&=M^n\times M=(u_nM+v_nI)\times M=u_nM^2+v_nM=u_n(3I-2M)+v_nM\\&=3u_nI-2u_nM+v_nM=(-2u_n+v_n)M+3u_nI=u_{n+1}M+v_{n+1}M.\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad M^n=u_nM+v_nI.$$

3. (a) D'après les formules de l'énoncé, $\begin{pmatrix}-2u_n+v_n\\3u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix}=A\times\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$. Ainsi, en posant

$$A=\begin{pmatrix}-2&1\\3&0\end{pmatrix},$$

on obtient bien l'égalité souhaitée.

(b) Notons P_n la propriété $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \times A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Voici les deux scripts complétés.

```
 // Script 1
n=input('n= ')
A=[-2,1;3,0]
C=[0;1]
C=(A∧n)*C
disp(C)
```

```
 // Script 2
n=input('n= ')
A=[-2,1;3,0]
C=[0;1]
for k=1:n
    C=A*C
end
disp(C)
```

4. (a) On a

$$A \times V_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = V_1.$$

Comme V_1 est un vecteur non-nul qui vérifie $AV_1 = 1V_1$, alors V_1 est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 1.

On a

$$A \times V_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3V_2.$$

Comme V_2 est un vecteur non-nul qui vérifie $AV_2 = -3V_2$, alors V_2 est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre -3.

(b) Je calcule le déterminant de Q :

$$1 \times (-1) - 3 \times 1 = -1 - 3 = -4.$$

Comme ce déterminant est non-nul, je sais que Q est inversible et

$$Q^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice A possède deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. De plus, la matrice Q est construite comme juxtaposition des deux vecteurs propres de A. Donc en construisant D comme la matrice diaginale composée des deux valeurs propres 1 et -3, *i.e.*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

on obtient que $A = QDQ^{-1}$ donc que

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}QDQ^{-1}Q = IDI = D.$$

(d) Notons P_n la propriété $D^n = Q^{-1}A^nQ$. On a établi à la question précédente $A = QDQ^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$D^0 = I \quad \text{et} \quad QA^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$A^{n+1} = A^n \times A = QD^nQ^{-1} \times QDQ^{-1} = QD^nIDQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad D^n = Q^{-1}A^nQ.$$

(e) Comme D est une matrice diagonale, je sais que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Alors comme $A^n = QD^nQ^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \times \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n \\ 3 & -(-3)^n \end{pmatrix} \times \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1-3\times(-3)^n & -1+(-3)^n \\ -3+3\times(-3)^n & -3-(-3)^n \end{pmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(f) D'après la question 3b, on a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En connaissant désormais la formule explicite de A^n, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{-1}{4} \times \big(-1+(-3)^n\big) = \frac{1-(-3)^n}{4}, \\ v_n &= \frac{-1}{4} \times \big(-3-(-3)^n\big) = \frac{3+(-3)^n}{4}. \end{aligned}$$

5. (a) D'après la question 2b, on a $M^n = u_n M + v_n I$.
En connaissant désormais les formules explicites de u_n et v_n, on obtient

$$M^n = \frac{1-(-3)^n}{4} \times M + \frac{3+(-3)^n}{4} \times I = \frac{1-(-3)^n}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3+(-3)^n}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1-(-3)^n}{4} + \frac{3+(-3)^n}{4} & -2 \times \frac{1-(-3)^n}{4} & \frac{1-(-3)^n}{4} \\ 2 \times \frac{1-(-3)^n}{4} & -3 \times \frac{1-(-3)^n}{4} + \frac{3+(-3)^n}{4} & 2 \times \frac{1-(-3)^n}{4} \\ -\frac{1-(-3)^n}{4} & 2 \times \frac{1-(-3)^n}{4} & \frac{3+(-3)^n}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5-(-3)^n}{4} & \frac{(-3)^n-1}{2} & \frac{1-(-3)^n}{4} \\ \frac{1-(-3)^n}{2} & (-3)^n & \frac{1-(-3)^n}{2} \\ \frac{(-3)^n-1}{4} & \frac{1-(-3)^n}{2} & \frac{3+(-3)^n}{4} \end{pmatrix}$$

(b) Après exécution d'un des deux scripts de la question 3c, `C(1)` et `C(2)` contiennent respectivement les valeurs de u_n et v_n. Ainsi le résultat rendu par ce nouveau script sera la puissance n-ième de la matrice M, ie M^n.

Exercice 2 –

1. (a) Grâce aux croissances comparées, je sais que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Graphiquement, j'en déduis que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

(b) La fonction f est donnée sous la forme d'un quotient $f = \dfrac{u}{v}$,
avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$. On a alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, puis

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Comme un carré est toujours positif, pour tout $x \geqslant 1$, le dénominateur de $f'(x)$ est toujours positif, donc son signe est donné par celui du numérateur, *i.e.* $1 - \ln(x)$.

(c) Je résous $1 - \ln(x) \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \ln(x) \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant e^1 = e$. Je peux donc désormais déduire le tableau de variation de f grâce au tableau de signe de f'.
$f(1) = \dfrac{\ln(1)}{1} = 0$ et $f(e) = \dfrac{\ln(e)}{e} = \dfrac{1}{e}$.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. (a) Je dérive de nouveau f' pour obtenir f''. La fonction f' est donnée sous la forme d'un quotient $f' = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 1 - \ln(x)$ et $v(x) = x^2$. On a alors $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$, puis

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - \big(1 - \ln(x)\big) \times 2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{-x - 2x + 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}.$$

(b) Pour étudier la convexité de f, j'étudie le signe de $f''(x)$. Pour commencer, je remarque que comme $x \geqslant 1$, le dénominateur x^3 est toujours positif. Alors le signe de $f''(x)$ me sera donné par celui de $3 - 2\ln(x)$.

Je résous $3 - 2\ln(x) \geqslant 0 \iff 3 \geqslant 2\ln(x) \iff \ln(x) \leqslant \dfrac{3}{2} \iff x \leqslant e^{\frac{3}{2}}$. Je peux alors en déduire que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[1, e^{\frac{3}{2}}\right]$, car $f''(x)$ y est positif, puis concave sur l'intervalle $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$.

(c) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion lorsque la convexité de la fonction change, c'est-à-dire en le point d'abscisse $x = e^{\frac{3}{2}}$. Donc le point $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$ est point d'inflexion à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. (a) M étant sur la courbe représentative de la fonction f, j'en déduis que ses coordonnées sont $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$ (je reconnais le point d'inflexion). Or

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}.$$

(b) L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en le point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = e^{\frac{3}{2}}$, donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \times \left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + f\left(e^{\frac{3}{2}}\right).$$

Or $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$ et

$$f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1 - \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{e^{2 \times \frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{e^3} = -\frac{1}{2e^3}.$$

Alors l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times \left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{2e^3} + \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2e^3} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{2e^3} + \frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui se ramène à

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times x + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

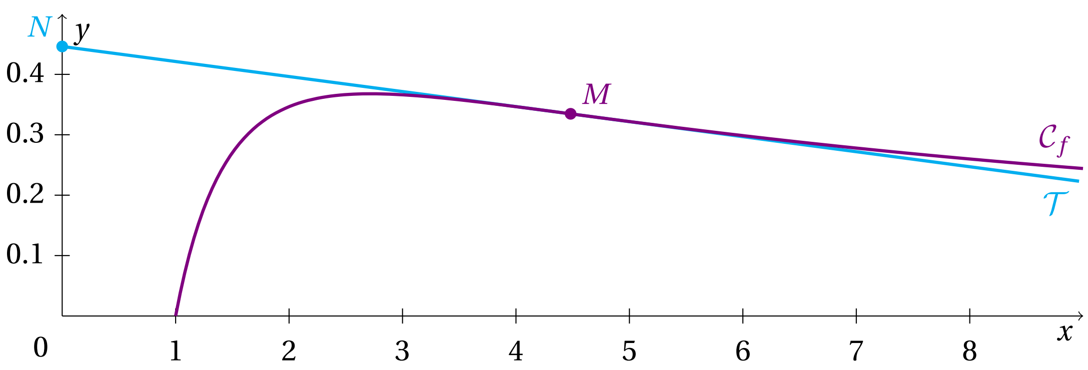
(c) L'axe des ordonnées correspond à l'ensemble des points (x, y) dont l'abscisse vaut $x = 0$. Comme les points de la tangente $(\mathcal{T})$ vérifient l'équation $y = -\frac{1}{2e^3} \times x + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$, je peux trouver quelle est l'ordonnée du point d'abscisse $x = 0$ sur la tangente $(\mathcal{T})$:

$$y = -\frac{1}{2e^3} \times 0 + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi le point d'intersection N de la tangente $(\mathcal{T})$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $\left(0, \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

(d) Comme M est le point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$, je sais par définition que la tangente est en-dessous de la courbe sur l'intervalle $\left[1, e^{\frac{3}{2}}\right]$, là où f est convexe, puis au-dessus de la courbe sur l'intervalle $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$, là où f est concave.

4. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente $\mathcal{T}$.



5. (a) Soit $A \geqslant 1$. Je cherche à calculer $I(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. Je commence par chercher une primitive à $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Je remarque que f est de la forme $f = u' \times u$, avec $u(x) = \ln(x)$ puisqu'alors $u'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi une primitive de f est donnée par $F(x) = \frac{u(x)^2}{2} = \frac{\ln(x)^2}{2}$. Donc

$$I(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} = \frac{\ln(A)^2}{2}.$$

(b) Par définition, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si la limite $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ existe et est finie. Or $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = I(A) = \frac{\ln(A)^2}{2}$, donc sa limite lorsque A tend vers $+\infty$ existe et vaut $+\infty$.
De là, on déduit que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge vers $+\infty$.

6. (a) Soit $A \geqslant 1$. Je cherche à calculer $J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Je pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$.

Alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$, puis par intégraation par parties,

$$\begin{aligned}
&\int_1^A u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^A - \int_1^A u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
\iff\quad &\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&\qquad = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{\ln(1)}{1} + \int_1^A \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = -\frac{\ln(A)}{A} - 0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A \\
&\qquad = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + \frac{1}{1}
\end{aligned}$$

J'ai bien montré que $J(A) = \dfrac{-\ln(A)}{A} - \dfrac{1}{A} + 1$.

(b) Par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\ln(A)}{A} = 0$. Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{A} = 0$ aussi, j'en déduis, par somme, que

$$\lim_{A\to+\infty} J(A) = -0 - 0 + 1 = 1.$$

7. (a) La fonction g est définie en deux morceaux. Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, $g(x) = 0$ donc la fonction g est continue car constante. Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ donc la fonction g est continue comme quotient de fonctions continues. Il ne me reste plus qu'à étudier la continuité en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0$$

Comme la limite à gauche de g en 1 est égale à la limite à droite de g en 1, on en déduit que la fonction g est continue en 1, donc en conclusion, sur $\mathbf{R}$ tout entier.

(b) On a déjà vu à la question précédente que la fonction g est continue sur $\mathbf{R}$.
Aussi, sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, $g(x) = 0 \geqslant 0$ donc la fonction g est positive.
Et sur l'intervalle $[1, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2} \geqslant 0$ car $x^2 > 0$ et $\ln(x) \geqslant 1$ dès lors que $x \geqslant 1$.
Donc la fonction g est positive sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Enfin il me reste à montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.
Je décompose, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Je sais que $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0 car la fonction dans l'intégrale est nulle.
Et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est la limite de $J(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.
Donc cette intégrale converge et vaut 1 par la question 6b.
En résumé, la fonction g est continue sur $\mathbf{R}$, positive sur $\mathbf{R}$ et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1,$$

donc je peux en conclure que g est une densité de probabilité.

(c) Voici le script complété.

```
1 function y=g(x)
2   if x>=1 then
3     y=log(x)/(x∧2)
4   else
5     y=0
6   end
7 endfunction
8 x=linspace(-4,8,100)
9 plot(x,g)
```

(d) L'exécution des lignes 8 et 9 du script précédent permet de tracer une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $[-4,8]$.

8. (a) La fonction de répartition G de X est donnée par $G(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.
Je raisonne par disjonction de cas :
si $x < 1$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$,
si $x \geqslant 1$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = J(x) = \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1$.
J'ai bien montré que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

(b) Je cherche $P\big([X > e^2]\big)$.

$$P\big([X > e^2]\big) = 1 - P\big([X \leqslant e^2]\big) = 1 - G\big(e^2\big) = 1 - \left(1 - \frac{1}{e^2} - \frac{\ln(e^2)}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} = \frac{3}{e^2}.$$

Je cherche $P_{[X>e]}\big([X > e^2]\big)$. Par la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[X>e]}\big([X > e^2]\big) = \frac{P\big([X > e] \cap [X > e^2]\big)}{P\big([X > e]\big)} = \frac{P\big([X > e^2]\big)}{P\big([X > e]\big)}.$$

J'ai besoin de $P\big([X > e]\big) = 1 - P\big([X \leqslant e]\big) = 1 - G(e) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{e} - \dfrac{\ln(e)}{e}\right) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e} = \dfrac{2}{e}$.
Donc

$$P_{[X>e]}\big([X > e^2]\big) = \frac{\frac{3}{e^2}}{\frac{2}{e}} = \frac{3}{e^2} \times \frac{e}{2} = \frac{3}{2e}.$$

(c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Or $xg(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et on a montré à la question 5b que l'intégrale de cette focntion diverge entre 1 et $+\infty$.
Donc la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.

Exercice 3 –

Partie A

1. (a) La variable aléatoire X est à valeurs entières. Donc à l'évènement $[X > n-1]$ correspond toutes les valeurs entières strictement supérieures à $n-1$, *i.e.* n, $n+1$ et toutes les valeurs entières supérieures. En mettant en avant la valeur n, on peut alors décomposer l'évènement $[X > n-1]$ en les évènements $[X = n]$ et $[X > n]$, à qui correspond toutes les valeurs strictement supérieures à n. J'ai bien montré que pour tout entier n,

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n].$$

(b) Par la relation obtenue à la question précédente, je sais que

$$P\big([X > n-1]\big) = P\big([X = n] \cup [X > n]\big) = P\big([X = n]\big) + P\big([X > n]\big)$$

puisque les deux évènements sont indépendants. Comme $u_n = P\big([X > n]\big)$, alors de même $u_{n-1} = P\big([X > n-1]\big)$ et l'équation précédente se réécrit $u_{n-1} = P\big([X = n]\big) + u_n$, *i.e.* pour tout entier n,

$$u_{n-1} - u_n = P\big([X = n]\big).$$

2. (a) Je suis cette fois en présence de probabilités conditionnelles, sachant que l'évènement $[X > n-1]$ est vérifié. Trivialement, $P_{[X>n-1]}\big([X > n-1]\big) = 1$, et par un raisonnement similaire à celui de la question 1b,

$$1 = P_{[X>n-1]}\big([X = n] \cup [X > n]\big) = P_{[X>n-1]}\big([X = n]\big) + P_{[X>n-1]}\big([X > n]\big).$$

Autrement dit,

$$P_{[X>n-1]}\big([X > n]\big) = 1 - P_{[X>n-1]}\big([X = n]\big).$$

(b) L'énoncé nous donne $P_{[X>n-1]}\big([X = n]\big) = \dfrac{2}{5}$.

Donc la formule de la question précédente se réécrit $P_{[X>n-1]}\big([X > n]\big) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$.
Puis, par la formule des probabilités composées, j'obtiens

$$u_n = P\big([X > n]\big) = P\big([X > n-1]\big) \times P_{[X>n-1]}\big([X > n]\big) = u_{n-1} \times \frac{3}{5}.$$

J'ai bien montré que pour tout entier n,

$$u_n = \frac{3}{5} u_{n-1}.$$

(c) Grâce à la question précédente, je reconnais en (u_n) une suite géométrique, de raison $\dfrac{3}{5}$ et de premier terme $u_0 = 1$. Alors la formule explicite de la suite (u_n) est donné par

$$u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

3. (a) Grâce à la question 1b, je sais que pour tout entier n,

$$P\big([X = n]\big) = u_{n-1} - u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \frac{2}{5}.$$

J'ai bien montré que pour tout entier n,

$$P\big([X = n]\big) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

(b) On a $P\big([X=n]\big) = p\big(1-p\big)^{n-1}$ pour $p=\dfrac{2}{5}$. Je reconnais là la formule donnant les probabilités d'une loi géométrique de paramètre $p=\dfrac{2}{5}$.

(c) Comme la variable aléatoire X suit une loi géométrique, je sais que

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{3}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \times \frac{5^2}{2^2} = \frac{3\times 5}{4} = \frac{15}{4}.$$

Partie B

4. (a) Voici le script complété.

```
function X=geom()
    X = 1
    while rand() > 2/5
        X = X + 1
    end
endfunction
```

(b) Voici le script complété.

```
function Z=simulZ()
    X1=geom()
    X2=geom()
    if X1>X2 then
        Z=X1
    else
        Z=X2
    end
endfunction
```

5. Soit n un entier naturel. Comme X_1 suit la même loi géométrique que X et que je sais calculer la somme des premiers termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} P\big([X_1 \leqslant n]\big) &= \sum_{k=1}^{n} P\big([X_1=k]\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} = \frac{2}{5} \times \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^k\right) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{2}{5}} = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^n. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout entier n,

$$P\big([X_1 \leqslant n]\big) = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

6. (a) La variable aléatoire Z est égale à la durée de vie de l'appareil, qui elle-même correspond à la durée de vie maximale des deux composants. Ainsi la durée de vie de l'appareil est inférieure ou égale à n si et seulement si les durées de vie des deux compsants sont elle-mêmes inférieures ou égales à n, *i.e.*

$$[Z \leqslant n] = \big[\max(X_1, X_2) \leqslant n\big] = [X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n].$$

(b) Grâce à la relation établie à la question précédente, et comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont identiques et indépendantes, j'en déduis que

$$P\big([Z \leqslant n]\big) = P\big([X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n]\big) = P\big([X_1 \leqslant n]\big) \times P\big([X_2 \leqslant n]\big) = P\big([X_1 \leqslant n]\big)^2.$$

Ainsi, grâce au résultat de la question 5,

$$P\big([Z \leqslant n]\big) = \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^2 = 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{9}{25}\right)^n.$$

(c) Pour les mêmes raisons que celles utilisées dans la question 1, on peut établir l'égalité $[Z \leqslant n] = [Z = n] \cup [Z \leqslant n-1]$, et donc

$$P\big([Z = n]\big) = P\big([Z \leqslant n]\big) - P\big([Z \leqslant n-1]\big).$$

Alors, avec les valeurs de la question précédente, j'obtiens

$$\begin{aligned}
P\big([Z = n]\big) &= P\big([Z \leqslant n]\big) - P\big([Z \leqslant n-1]\big) \\
&= \left(1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{9}{25}\right)^n\right) - \left(1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\right) \\
&= \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{9}{25}\right) \times \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} = \frac{2}{5} \times 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \times \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout entier n,

$$P\big([Z = n]\big) = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

7. Les deux séries $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{9}{25}\right)^n$ sont des séries géométriques, de raisons respectivement $\frac{3}{5}$ et $\frac{9}{25}$. Dans les deux cas, comme les raisons sont strictement comprises entre 0 et 1, les séries sont convergentes. Or pour tout $K \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{K} P\big([Z = n]\big) &= \sum_{n=1}^{K} \left(\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\right) = \frac{4}{5}\sum_{n=1}^{K}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\sum_{n=1}^{K}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{K-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} - \frac{16}{25}\sum_{n=0}^{K-1}\left(\frac{9}{25}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

Et par convergence des séries géométriques citées précédemment, toutes les sommes partielles écrites ici convergent et on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} P\big([Z = n]\big) &= \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} - \frac{16}{25}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{25}\right)^{n} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{1 - \frac{9}{25}} \\
&= \frac{4}{5} \times \frac{1}{\frac{2}{5}} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} - \frac{16}{25} \times \frac{25}{16} = 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout entier n,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\big([Z = n]\big) = 1.$$

8. (a) Je sais, d'après la question 6c, que

$$P\big([Z=n]\big) = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

Comme X_1 suit la même loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{2}{5}$ que X, alors, par la question 3a, $P\big([X_1 = n]\big) = \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$. De la même manière, si Y suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{16}{25}$, alors $P\big([Y=n]\big) = p \times (1-p)^{n-1} = \dfrac{16}{25}\left(\dfrac{9}{25}\right)^{n-1}$.
En rassemblant les morceaux puis en muipliant par n, j'obtiens que

$$\begin{aligned} & P\big([Z=n]\big) = 2 \times P\big([X_1=n]\big) - P\big([Y=n]\big) \\ \iff \quad & nP\big([Z=n]\big) = 2nP\big([X_1=n]\big) - nP\big([Y=n]\big) \end{aligned}$$

(b) La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} nP\big([Z=n]\big)$ converge. Or pour tout $K \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{K} nP\big([Z=n]\big) &= \sum_{n=1}^{K}\Big(2nP\big([X_1=n]\big) - nP\big([Y=n]\big)\Big) \\ &= 2 \times \left(\sum_{n=1}^{K} nP\big([X_1=n]\big)\right) - \left(\sum_{n=1}^{K} nP\big([Y=n]\big)\right) \end{aligned}$$

Et comme les variables aléatoires X_1 et Y suivent des lois géométriques, elles admettent toutes les deux des espérances, ce qui nous permet d'établir la convergence des deux sommes partielles ici présentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP\big([X_1=n]\big) \text{ existe et vaut } E(X_1) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nP\big([Y=n]\big) \text{ existe et vaut } E(Y).$$

J'en déduis donc que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} nP\big([Z=n]\big)$ converge, *i.e.* que la variable aléatoire Z admet un espérance et que

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP\big([Z=n]\big) = 2E(X_1) - E(Y) = 2 \times \frac{1}{\frac{2}{5}} - \frac{1}{\frac{16}{25}} = 2 \times \frac{5}{2} - \frac{25}{16} = \frac{80-25}{16} = \frac{55}{16}.$$

J'ai montré que

$$E(Z) = \frac{55}{16}.$$