# 4 | Variables aléatoires discrètes

## I – Généralités sur les variables aléatoires

### 1 – Espace probabilisé

Étant donné une expérience aléatoire, pour calculer des probabilités,

1. On commence par déterminer l'univers $\Omega$ de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire. Cet ensemble peut être **fini** ou **infini**.
   - Si l'expérience consiste à lancer un dé à 6 faces et à observer le numéro obtenu, alors $\Omega = [\![1;6]\!]$.
   - Si l'expérience consiste à lancer une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, alors $\Omega = \mathbf{N}^*$.
   - Si l'expérience consiste à observer la durée de vie d'une ampoule (en minutes), alors $\Omega = \mathbf{R}_+$.
   - etc.
2. On détermine ensuite une probabilité sur $\Omega$, c'est-à-dire une application $P$ qui à un évènement de $\Omega$ (*i.e.*, un sous-ensemble) associe un réel, compris entre 0 et 1, qui mesure le « degré de vraisemblance » de cet évènement.

Commençons par rappeler quelques propriétés, vues en première année dans le cas d'un univers fini, et qui restent vraies dans le cas d'un univers infini.

**Proposition 4.1**

Soient $\Omega$ un espace probabilisé et $A$, $B$ deux évènements. On a les résultats suivants.

- $P(\Omega) = 1$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
- Si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- Si $A$ et $B$ sont incompatibles (*i.e.*, $A \cap B = \emptyset$), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

**Exemple 4.2 –** Tout au long de ce chapitre, on s'appuiera sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1, on gagne 4 €, si on a un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note $X$ le gain (algébrique). $X$ est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}$.
2. On lance un dé équilibré et on note $X$ le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir 6. $X$ est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ (il faut au moins un lancer pour obtenir 6).

## 2 – Évènements associés à une variable aléatoire

**Définition 4.3 –** Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$ et $x \in \mathbf{R}$. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\},$$
$$[X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}, \qquad [X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\},$$
$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}, \qquad [X \geq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\}.$$

Si $x$ et $y$ sont deux réels tels que $x < y$, alors on note

$$\left[x \leq X \leq y\right] = \{\omega \in \Omega \mid x \leq X(\omega) \leq y\}.$$

Plus généralement, si $I$ désigne une partie de $\mathbf{R}$, on note

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}.$$

**Exemple 4.4 –** Calculer $P([X = 1])$ et $P([X \leq 2])$ dans les deux exemples de l'exemple 4.2.

**Proposition 4.5**

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$. Alors l'ensemble

$$\left\{[X = x] \mid x \in X(\Omega)\right\}$$

forme un système complet d'évènements. En particulier, on a

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x]) = 1.$$

**Remarque 4.6 –**

- Lorsque $X(\Omega)$ est fini, la somme précédente est une somme finie. En effet, dans ce cas,
$$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\},$$
et donc
$$\sum_{k=1}^{n} P([X = x_k]) = 1.$$
- Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable, la somme précédente est la somme d'une série convergente. En effet,
$$X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbf{N}\},$$
et donc
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P([X = x_k]) = 1.$$
- Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P([X = x])$ en $P(X = x)$, et de même pour tous les autres ensembles.

**Exemple 4.7 –** On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1. Un système complet d'évènements est donné par
2. Un système complet d'évènements est donné par

# II – Variables aléatoires discrètes

## 1 – Définition

**Définition 4.8 –** Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$. On dit que

- $X$ est une **variable aléatoire discrète** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble discret, *i.e.*, fini ou dénombrable.
- $X$ est une **variable aléatoire discrète finie** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble fini.
- $X$ est une **variable aléatoire discrète infinie** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

**Exemple 4.9 –** On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1.
2.

## 2 – Loi d'une variable aléatoire discrète

**Définition 4.10 –** Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$. On appelle **loi** de la variable aléatoire $X$ la donnée des $P(X = x)$ pour tout réel $x$ du support $X(\Omega)$.

**Méthode 4.11 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète**

1. On donne l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ des valeurs prises par $X$.
2. On calcule $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec, sur la 1ère ligne les valeurs prises par $X$, et sur la 2ème ligne les probabilités correspondantes.

**Exemple 4.12 –** On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1.

2.

## 3 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

**Définition 4.13 –** Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire $X$, et on note $F_X$, la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & P(X \leq x) \end{array}$$

**Proposition 4.14**

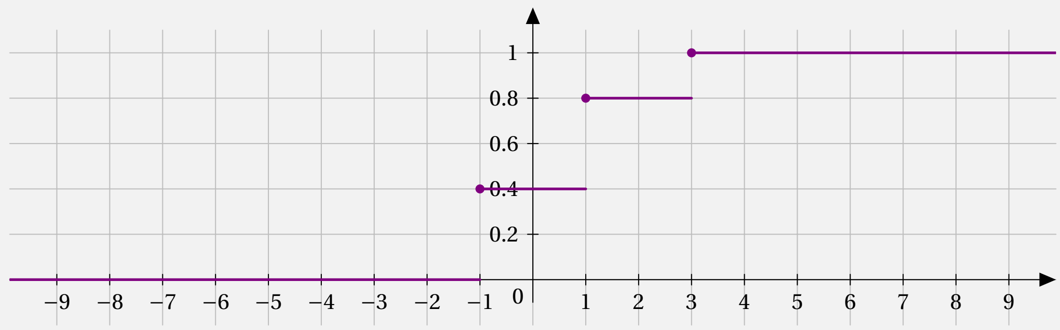
Soit $X$ une variable aléatoire discrète définie sur $\Omega$. On note $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots$. Alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1, \\ P(X = x_1) + \cdots + P(X = x_k) & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 1 & \text{si } x \geq \max\limits_{i \in \mathbf{N}} x_i. \end{cases}$$

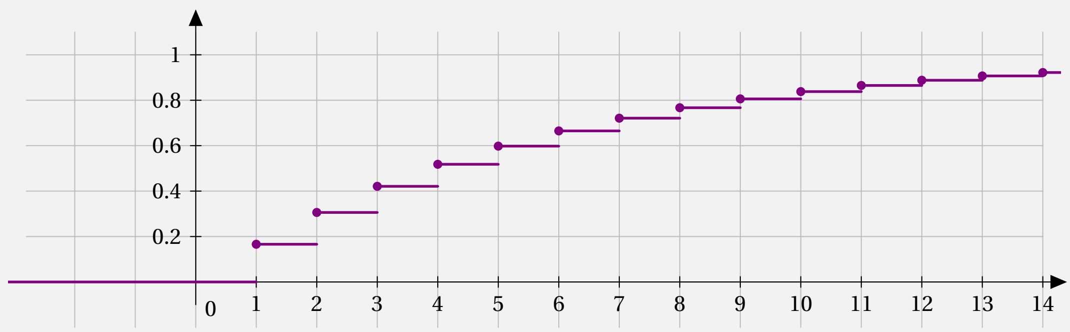
En particulier, $F_X$ est constante sur $[x_k; x_{k+1}[$.

**Exemple 4.15 –** On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1.




2.




**Proposition 4.16**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $\Omega$. On suppose que $X(\Omega) \subseteq \mathbf{Z}$. Alors

$$\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

**Remarque 4.17 –** La fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ détermine parfaitement la loi de $X$. En effet, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

# III – Moments d'une variable aléatoire discrète

## 1 – Espérance

**Définition 4.18 –** Soit $X$ une variable aléatoire discrète définie sur $\Omega$.

- Si $X$ est une variable aléatoire discrète finie, avec $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$, alors $X$ admet une **espérance**, notée $E(X)$, définie par
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$
- Si $X$ est une variable aléatoire discrète infinie, avec $X(\Omega)\{x_k; k \in \mathbf{N}\}$, et que la série de terme général $x_n P(x_n)$ est **absolument** convergente, alors on dit que $X$ admet une **espérance**, notée $E(X)$, et définie par
$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X = x_k).$$

**Remarque 4.19 –** L'espérance s'interprète comme une moyenne.

**Exemple 4.20 –** Montrer que la variable aléatoire $X$, du premier exemple de l'exemple 4.2, admet une espérance et la calculer.

**Remarque 4.21 –** On peut montrer *(hors-programme)* que la série $\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$ converge et que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = 6.$$
Autrement dit, la variable aléatoire $X$ du second exemple de l'exemple 4.2 admet une espérance et $E(X) = 6$.

**Proposition 4.22**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes définies sur $\Omega$ et admettant une espérance.
Soient $a$ et $b$ deux réels. Alors, $X + Y$ et $aX + b$ admettent une espérance et
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b.$$

**Exemple 4.23 –** On lance un dé non-truqué et on note $X$ le numéro obtenu. Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = 2x + 3$ et $Y = g(X) = 2X + 3$. Calculer $E(Y)$.

**Théorème 4.24 – Théorème de transfert**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $\Omega$. On note $X(\Omega) = \{x_i ; i \in I\}$ avec $I \subseteq \mathbf{N}$. Soit $g$ une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$. Alors, la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $g(x_n)P(X = x_n)$ est **absolument** convergente. Dans ce cas, on a alors

$$E(g(X)) = \sum_{i\in I} g(x_i)P(X = x_i).$$

**Remarque 4.25 –**

- Si $X$ est une variable aléatoire discrète finie, alors $I$ est fini, donc l'espérance de $g(X)$ existe et la somme intervenant dans sa définition est une somme finie.
- Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$ : il suffit de connaître la loi de $X$.

**Exemple 4.26 –** On considère la variable $X$ dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

| $k$ | $-3$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

Calculer $E\left(X^2\right)$ et $E\left(X^3\right)$.

## 2 – Variance

**Définition 4.27 –** Soit $X$ une variable aléatoire discrète définie sur $\Omega$.

- Si $X$ est une variable aléatoire discrète finie avec $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$, alors $X$ admet une **variance**, notée $V(X)$, et définie par
$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 P(X = x_i).$$
- Si $X$ est une variable aléatoire discrète infinie, avec $X(\Omega) = \{x_k ; k \in \mathbf{N}\}$ et que la série de terme général $\left(x_n - E(X)\right)^2 P(X = x_n)$ est **absolument** convergente, alors on dit que $X$ admet une **variance**, notée $V(X)$ et définie par
$$V(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x_k - E(X)\right)^2 P(X = x_k).$$

**Remarque 4.28 –**

- La série $\sum_{n\geq 0} \left(x_n - E(X)\right)^2 P(X = x_n)$ étant à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.
- Sous réserve d'existence, on a $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$.
- La variance, si elle existe, est un réel **positif ou nul**.
- La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

**Théorème 4.29 – Formule de König-Huygens**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète définie sur $\Omega$. $X$ admet une variance si et seulement si la variable aléatoire $X^2$ admet une espérance. Dans ce cas,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

**Méthode 4.30 – Répondre à la question « $X$ admet-elle une variance? Si oui, la calculer. »**

1. Si $X$ n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.
2. Si $X$ admet une espérance, il faut regarder si $E\left(X^2\right)$ existe (grâce au théorème de transfert).
   - Si non, alors $X$ n'admet pas de variance.
   - Si oui, alors on peut la calculer en utilisant la formule de König-Huygens

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

**Exemple 4.31 –** Montrer que la variable aléatoire $X$, du premier exemple de l'exemple 4.2, admet une variance et la calculer.

**Remarque 4.32 –** On peut montrer *(hors-programme)* que la série $\sum_{n\geq 1} n^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = 66.$$

Autrement dit, le carré de la variable aléatoire $X$ du second exemple de l'exemple 4.2 admet une espérance et $E\left(X^2\right) = 66$. Alors, $X$ admet une variance et

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 66 - 36 = 30.$$

**Proposition 4.33**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète admettant une variance et soient $a$ et $b$ dans $\mathbf{R}$. Alors

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

En particulier,

$$V(X+b) = V(X).$$

**Remarque 4.34 –** Contrairement à l'espérance, la variance n'est pas linéaire.

**Exemple 4.35 –** On lance un dé non-truqué et on note $X$ le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$. Calculer la variance de $X$ puis celle de $Y$.

**Définition 4.36 –** Soit $X$ une variable aléatoire discrète admettant une variance. On appelle **écart-type** de $X$ et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

# IV – Lois discrètes finies usuelles

## 1 – Loi uniforme

**Définition 4.37 –** Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a < b$. Une variable aléatoire $X$ suit une **loi uniforme** sur $[\![a;b]\!]$ lorsque $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et que

$$\forall k \in [\![a;b]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![a;b]\!]\right)$.

**Exemple 4.38 –** Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non-truqué et on note $X$ le numéro obtenu. On a $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;6]\!]\right)$ car $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;6]\!]$, $P(X=k) = \dfrac{1}{6}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$, et on note $X$ le numéro obtenu. On a $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$ car $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(X=k) = \dfrac{1}{n}$.

**Proposition 4.39**

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$ alors $X$ admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

**Proposition 4.40**

Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a < b$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\llbracket a;b\rrbracket\right)$ alors $X - a + 1 \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1; b-a+1\rrbracket)$ et donc

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

## 2 – Loi de Bernoulli

**Définition 4.41 –** Une variable aléatoire $X$ suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in ]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = \{0;1\}$ et

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : une que l'on qualifie de « succès », de probabilité $p$, et l'autre que l'on qualifie « d'échec », de probabilité $1-p$. On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un « succès », la variable aléatoire prend la valeur $X = 1$, et sinon $X = 0$.

**Exemple 4.42 –** On lance une pièce équilibrée et on note $X$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est « Pile » et 0 sinon. Alors, $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Proposition 4.43**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0;1[$. Alors $X$ admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

## 3 – Loi binomiale

**Définition 4.44 –** Une variable aléatoire $X$ suit une **loi binomiale de paramètres** $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in ]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = \llbracket 0;n\rrbracket$ et que

$$\forall k \in \llbracket 0;n\rrbracket, \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

On répète $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La probabilité d'obtenir un « succès » lors de la réalisation d'une épreuve est $p$. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus une fois que les $n$ épreuves ont été réalisées suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

**Exemple 4.45 –** On lance 10 fois de suite un dé non-truqué, et on note $X$ le nombre de numéros obtenus inférieurs ou égaux à 2. Alors, $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$.

**Remarque 4.46 –** La loi de Bernoulli est le cas particulier de la loi binomiale avec $n = 1$.

**Proposition 4.47**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in ]0;1[$. Alors $X$ admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

# V – Lois discrètes infinies usuelles

## 1 – Loi géométrique

**Définition 4.48 –** Une variable aléatoire $X$ suit une **loi géométrique de paramètre** $p \in ]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

**Exemple 4.49 –** On lance indéfiniment un dé non-truqué. On note $X$ le rang du lancer qui donne le nombre 1 pour la première fois. Alors, $X$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{6}$.

**Remarque 4.50 –**

- Cet exemple est typique de la loi géométrique dont le modèle est le suivant :
  1. On réalise une succession d'épreuves indépendantes de Bernoulli de même paramètre $p$.
  2. On note $X$ le rang de l'épreuve qui a amené le premier succès. $X$ est considéré comme « le temps d'attente du premier succès ».
- On a bien $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

**Proposition 4.51**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in ]0;1[$. Alors $X$ admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**Exemple 4.52 –** On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant 7 boules noires et 3 boules rouges et on note $Y$ le rang de la première boule rouge. Reconnaître la loi de $Y$ puis déterminer l'espérance et la variance de $Y$.

## 2 – Loi de Poisson

**Définition 4.53 –** Soit $\lambda$ un réel strictement positif. Une variable aléatoire $X$ suit une **loi de Poisson de paramètre** $\lambda$ lorsque $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

**Remarque 4.54 –**

- La loi de Poisson est parfois appelée **loi des évènements rares**. Elle sert par exemple à modéliser :
  - — le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps donné,
  - — le nombre de véhicules franchissant un poste de péage dans un intervalle de temps donné,
  - — le nombre de clients se présentant dans un magasin dans un intervalle de temps donné,
  - — le nombre de fautes de frappe dans les pages d'un cours de maths, etc.
- On a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

**Proposition 4.55**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors $X$ admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$