EXERCICES — CHAPITRE 9

Exercice 1 (⋆) – Le nombre de fautes de farppe dans un cours de mathématiques de 214 pages peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ inconnu, que l'on cherche à estimer. On suppose que l'on dispose d'un échantillon de 20 réalisations $x_1, \dots, x_{20}$ de cette variable X.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
6	1	5	5	7	5	10	8	5	6
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
6	5	3	6	8	9	2	6	7	7

Donner une estimation à 0.01 près du paramètre λ.

Exercice 2 (⋆⋆) – On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, dont la loi commune est donnée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par le tableau suivant :

x	0	1	2
$P(X_k = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \dfrac{3}{4n} \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Calculer $E(S_n)$.
2. Calculer $V(S_n)$.

Exercice 3 (⋆⋆) – Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Exercice 4 (⋆⋆) – On considère une suite de lancers indépendants d'une même pièce équilibrée. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si l'événement "obtenir PILE" est réalisé au i-ième lancer et 0 sinon.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Que représente $\overline{X_n}$?
2. Justifier que pour tout réel strictement positif ε, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right) = 1$.
3. Le résultat précédent est-il conforme à l'intuition ?

Exercice 5 (⋆⋆⋆⋆) – Soient X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X.

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\alpha \in]0,1[$.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$P\left(\left|\overline{X_n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$
3. En appliquant l'inégalité précédente à un ε bien choisi, en déduire que
$$P\left(p \in \left[\overline{X_n} - \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 1 - \alpha.$$
4. Établir le tableau de variation sur $[0,1]$ de la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$.
En déduire que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
5. En déduire un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 6 (⋆ ⋆ ⋆) – [Adapté de BSB 2018 / Ex4]
Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

1. Montrer que les intégrales
$$I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad J = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t$$
sont convergentes et vérifier que $I = \dfrac{1}{a}$, $J = \dfrac{1}{2a^2}$ et $K = \dfrac{1}{3a^3}$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geqslant a, \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$$

2. Montrer en utilisant un des calculs de la question **1.** que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Un fabriquant de téléphone portable veut étudier l'autonomie de ses téléphones. Étant donné un téléphone pris au hasard chargé au maximum, on note X le nombre d'heures écoulées lorsque le téléphone s'éteint. On admet que X est une variable aléatoire de densité f.

3. Montrer en utilisant certains calculs de la question **1.** que X admet une espérance et une variance et vérifier que

$$E(X) = \frac{3a}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{3a^2}{4}.$$

4. On note F la fonction de répartition de X.
   a) Calculer $F(x)$ pour $x < a$.
   b) Justifier que lorsque $x \geqslant a$,
   $$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3.$$
   c) Vérifier que
   $$P(2a \leqslant X \leqslant 4a) = \frac{7}{64} \quad \text{et} \quad P(X \geqslant 2a) = \frac{1}{8}.$$
   Calculer $P_{[X \geqslant 2a]}(X \leqslant 4a)$.
5. On cherche à estimer le paramètre a. Pour cela on allume en même temps n téléphones pris au hasard que l'on a chargés au maximum, n étant un entier naturel non nul. On note pour tout entier i compris entre 1 et n, X_i la durée en heure écoulée lorsque le i-ème téléphone s'éteint. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. On pose $M_n = \frac{2}{3n} \times \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   a) Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
   b) Soit ε un réel strictement positif.
   Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que
   $$P\left(\left|M_n - a\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{a^2}{3n\varepsilon^2}.$$
   c) Soient α un réel de $]0,1[$ et $\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{3\alpha n}}$. Montrer que $[M_n - \varepsilon, M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de a au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 7 (⋆ ⋆ ⋆) – [Adapté d'ESCP 2017 Ex3]

Soient a un réel vérifiant $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité et on suppose que le paramètre a est inconnu.

2. Calculer $E(X)$ et montrer que $V(X) = \frac{4-3a^2}{12}$.
3. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
4. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant toutes la même loi que X. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose
   $$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
   a) On pose $Y_n = 2\overline{X_n}$. Montrer que $E(Y_n) = a$.
   b) Montrer que $V(Y_n) = \frac{4-3a^2}{3n}$.
   c) Soit ε un réel strictement positif. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à Y_n, établir l'inégalité
   $$P\left(\left|Y_n - a\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{4}{3n\varepsilon^2}.$$