EXERCICES — CHAPITRE 2

Exercice 1 (⋆) – Parmi la liste de nombres $\left\{0, 1, \frac{3}{2}, 4\right\}$, lesquels sont solutions des équations suivantes ?

1. $-x+1=0$
2. $3x+4=6x-8$
3. $x(2x-3)=0$

Exercice 2 (⋆) – Résoudre les équations suivantes.

1. $x-9=-4$
2. $-x+5=12$
3. $3x=-24$
4. $3.7x=0$
5. $\frac{1}{4}x=16$
6. $5x-9=3x+4$
7. $x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$
8. $\frac{3x}{4}=\frac{2}{3}$
9. $\frac{4}{5}x+4=-\frac{2}{3}$

Exercice 3 (⋆⋆) – Développer chaque membre, puis résoudre les équations obtenues.

1. $4x-5(3-2x)=4-(2x-7)$
2. $9x-3(4-3x)=2-\big(35-3(4-2x)\big)$
3. $7-3(4-2x)-5\big(2-3(x-5)\big)=4-3(x-4)$
4. $4(x-2)-3\big(6-2(3-4x)\big)+3(7-2x)=0$

Exercice 4 (⋆⋆) – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $2x+3>0$
2. $3-5x\leqslant 0$
3. $2x-1\geqslant -2x+3$
4. $x-2<2x+1$

Exercice 5 (⋆⋆) – Déterminer les solutions des équations suivantes.

1. $x^2-2x+1=0$
2. $x^2-1=0$
3. $x^2+1=0$
4. $4x^2+8x-5=0$
5. $3x^2+x+6=0$
6. $\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}=0$
7. $2x^2-x-4=x^2+8$
8. $x(x-1)=-2(3x+7)$

Exercice 6 (⋆⋆) – Étudier le signe des expressions suivantes.

1. x^2-2x+1
2. x^2-1
3. x^2+1
4. $3x^2-5x+2$
5. $2x^2+x+3$
6. $-x^2+4$

Exercice 7 (⋆⋆) – Résoudre les inéquations suivantes.

1. $x^2-2x+1>0$
2. $-3x^2+5x-2\leqslant 0$
3. $x^2-4x-4\geqslant 0$
4. $-2x^2+5x\leqslant 2$
5. $3x^2\geqslant 2x-1$
6. $x(2x-5)\geqslant x-6$
7. $\frac{-x^2}{3}+\frac{x}{3}\leqslant -1$
8. $4x^2-2x+14>3x^2+4x+5$
9. $4(x-1)>x(3x-4)$

Exercice 8 (⋆⋆⋆) – En effectuant le changement de variable $X=x^2$, résoudre les équations suivantes.

1. $x^4-13x^2+36=0$
2. $x^4-5x^2+4=0$
3. $9x^4-85x^2+196=0$
4. $x^4-x^2-2=0$
5. $x^2+\frac{1}{x^2}-6=0$

Exercice 9 (⋆⋆⋆⋆) – Soit m un nombre réel. On considère l'équation $4x^2+(m-1)x+1=0$.

1. Cette équation admet-elle une solution lorsque $m=1$?
2. Déterminer m pour que cette équation admette une unique solution. Déterminer cette solution.
3. Préciser les cas, en fonction de m, où cette équation admet deux solutions distinctes, et où cette équation n'admet aucune solution.

Exercice 10 (⋆⋆) – Soit $P(x)$ le polynôme défini par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P(x)=x^3-7x^2+11x-2.$$

1. Déterminer une racine évidente du polynôme $P(x)$.
2. En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$.

Exercice 11 (⋆⋆) – Soit $P(x)$ le polynôme défini par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4.$$

1. Déterminer une racine évidente du polynôme $P(x)$.
2. En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$.

Exercice 12 (⋆⋆⋆) – Factoriser au maximum les polynômes suivants.

1. $P(x)=x^3+7x^2+7x-15$
2. $Q(x)=6x^3+7x^2-x-2$
3. $R(x)=x^3-2x^2-11x+12$
4. $S(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$
5. $T(x)=-x^3+x^2+16x+20$
6. $U(x)=x^5-2x^4+5x^3-8x^2+4x$
7. $V(x)=6x^3+5x^2-2x-1$

Exercice 13 (⋆⋆) – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2x^3-3x^2+5x-4=0.$$

Exercice 14 (⋆⋆⋆) – Soit $f(x)$ le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b à déterminer tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + ax + b).$$
2. En déduire les racines de $f(x)$.

Exercice 15 (⋆⋆⋆⋆) – Soit $f(x)$ le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 + 12x^3 + 18x^2 - 140x - 147.$$

1. Vérifier que -1 et 3 sont des racines de $f(x)$. En déduire qu'il existe un polynôme $h(x)$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)(x-3)h(x).$$
2. Déterminer $h(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 16 (⋆) – Résoudre les équations suivantes.

1. $(x-1)(x+2) = 0$
2. $(2x+4)(3x-1) = 0$
3. $(2+x)(2-3x) = 0$
4. $-3(x-1) = 0$
5. $(x+1)(3x-4)(2x-3) = 0$
6. $\sqrt{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0$

Exercice 17 (⋆⋆) – Factoriser, puis résoudre les équations suivantes.

1. $(5x-2)(x+7) + (5x-2)^2 = 0$
2. $-2(3x-5) + (x+7)(3x-5) = 0$
3. $(2x+3)^2 - (x+5)(2x+3) = 0$
4. $(3x-2)^2 - 81 = 0$

Exercice 18 (⋆⋆) – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $(x-1)(-2x+4) \geqslant 0$
2. $(2x-1)(x+3) < 0$
3. $(x-1)(x^2 - 10x + 21) \geqslant 0$
4. $(-3x-1)(x^2 - 2x + 1) < 0$

Exercice 19 (⋆⋆⋆) – Résoudre les équations suivantes.

1. $\dfrac{7}{x+1} = \dfrac{2}{x}$
2. $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{4}{x^2-4}$
3. $\dfrac{-2x-1}{x+1} = \dfrac{2x-3}{1-x}$
4. $\dfrac{3}{x} = \dfrac{x-1}{x+1}$
5. $2x = \dfrac{3x-5}{x-2}$
6. $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{1}{4}$

Exercice 20 (⋆⋆) – Soit $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$. Montrer que $f(x) \geqslant 8$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 21 (⋆⋆) – Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{2x+3}{-x+1} \leqslant 0$
2. $\dfrac{x^2-6x+8}{-x+3} \geqslant 0$