Devoir Surveillé 4

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 8 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(2x^2-5x+3\right)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x-2\right)\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{-1}^0 x\left(5x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$

Exercice 2 –

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\left(x^3+1\right)^4$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x)=12x^2\left(x^3+1\right)^3$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 12x^2\left(x^3+1\right)^3\mathrm{d}x$.

Exercice 3 –

1. Justifier que l'équation $x^2+x+1=0$, d'inconnue réelle x, n'admet aucune solution.

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f.
4. a) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   b) Montrer que pour tout réel x de $\left[-1,+\infty\right[$, on a $f(x)\leqslant x$.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.
5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ dans un repère orthonormé.
   On soignera en particulier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}$.

Exercice 4 – On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x^2+5x+4}{2x+4}$$

et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition. Interpréter graphiquement. *(Vous devriez avoir quatre limites.)*
3. a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x+4}$.

   b) En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que la dérivée de f est donnée par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f'(x) = \dfrac{4\left(x^2+4x+3\right)}{\left(2x+4\right)^2}$.
5. En déduire le tableau de variation complet de f.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi que ses asymptotes dans un repère orthonormé.

Exercice 5 – Une entreprise fabrique des appareils électriques en grande quantité.

Partie I – Probabilités conditionnelles

On admet que 5% des appareils présentent un défaut.
On contrôle les appareils d'un lot. Ce contrôle refuse 90% des appareils avec défaut et accepte 80% des appareils sans défaut. On prélève au hasard dans le lot.
On considère les événements suivants :

- D : "l'appareil a un défaut",
- A : "l'appareil est accepté à l'issue du contrôle".

1. Donner la valeur des probabilités et probabilités conditionnelles suivantes :

$$P(D), \qquad P(\overline{D}), \qquad P_D(\overline{A}), \qquad P_D(A) \quad \text{et} \quad P_{\overline{D}}(A).$$

2. Calculer à 0.001 près les probabilités suivantes : $P\left(A \cap D\right)$ et $P\left(A \cap \overline{D}\right)$.
3. Déduire de ce qui précède la probabilité $P(A)$ à 0.001 près.
4. Calculer à 0.001 près la probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle.

Partie II – Loi binomiale

On prélève au hasard 10 appareils électriques d'une livraison pour vérification. La livraison étant suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise des appareils. On rappelle que 5% des appareils présentent un défaut.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils ***sans défaut*** de ce prélèvement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   Préciser $X(\Omega)$ et pour tout $k \in X(\Omega)$, donner la valeur de $P(X = k)$.
2. Donner la probabilité que dans un tel prélèvement, tous les appareils soient sans défaut.
3. Donner la probabilité que dans un tel prélèvement, au moins un appareil ait un défaut.

Exercice 6 – Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a quatre réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

- L'élève A ne connaît que 75% de son cours, c'est-à-dire que pour chaque question, la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\frac{75}{100}$.
- Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.
- Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements

- R : "l'élève A connaît la réponse à la première question",
- J : "l'élève A répond correctement à la première question".

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(J) = \frac{13}{16}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de X. On donnera les valeurs prises par X et, pour chacune de ces valeurs k, la valeur de $P(X = k)$.
3. Donner $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance de X.
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer un point par réponse fausse.
   Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.
   a) Justifier l'égalité $N = 2X - 20$.
   b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 75% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
   c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B, quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note ?

Exercice 7 – Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : *Approfondissement* ou *Ouverture culturelle*. Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés. La première semaine, 20% des élèves de la classe ont choisi *Approfondissement* et tous les autres ont choisi *Ouverture culturelle*. On admet que

- 20% des élèves ayant choisi *Ouverture culturelle* une certaine semaine s'inscrivent en *Approfondissement* la semaine suivante,
- 30% des élèves ayant choisi *Approfondissement* une certaine semaine s'inscrivent en *Ouverture culturelle* la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe. Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : "l'élève a choisi *Approfondissement* la n-ième semaine" et p_n la probabilité de l'événement A_n. On a alors $p_1 = 0.2$.

1. Donner les valeurs de $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0.4$.
   a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.5 et préciser la valeur de son premier terme u_1.
   b) En déduire pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de p_n en fonction de n.
4. Étudier le sens de variation de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8 – On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$
et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0.4$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \in \left]0, 1\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.