DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 –

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$
2. $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{8}{12} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$
3. $C = \frac{1 + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \frac{7}{12}} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{12}{60} - \frac{70}{60}} = \frac{11}{6} \times \frac{-60}{58} = -\frac{110}{58} = -\frac{55}{29}$
4. $D = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \div \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{20} \div \frac{9}{4} = \frac{1}{120} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{270}$

Exercice 2 –

1. $2x - 3 = 4 \iff 2x = 7 \iff x = \frac{7}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.
2. $x - \frac{1}{2} = 2x - 1 \iff -x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
3. $2x - 4 < 3x + 5 \iff -x < 9 \iff x > -9$ donc $\mathcal{S} =]-9, +\infty[$.
4. Je calcule le discriminant $\Delta = 144 - 108 = 36$. Il y a donc deux racines
$$x_1 = \frac{12 - 6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12 + 6}{2} = 9.$$
Donc $\mathcal{S} = \{3, 9\}$.
5. Je calcule le discriminant $\Delta = 9 + 40 = 49$. Il y a donc deux racines
$$x_1 = \frac{-3 - 7}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + 7}{-2} = -2.$$
J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$-x^2+3x+10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$.
6. $x(x - 2) = -1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 - 4 = 0$.
Il y a donc une seule racine
$$x_0 = \frac{2}{2} = 1.$$
Ainsi $\mathcal{S} = \{1\}$.

7. $\dfrac{2}{x+3} = \dfrac{1}{x+1} \iff \dfrac{2(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+3)} = 0 \iff \dfrac{2x+2-x-3}{(x+1)(x+3)} = 0 \iff \dfrac{x-1}{(x+1)(x+3)} = 0$
Or $(x+1)(x+3) = 0 \iff x+1 = 0$ ou $x+3 = 0 \iff x = -1$ ou $x = -3$, donc les valeurs interdites sont $x = -1$ et $x = -3$. Par ailleurs $x - 1 = 0 \iff x = 1$. Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

8. $x - 3 = 0 \iff x = 3$ donc il y a une valeur interdite : $x = 3$. Par ailleurs le discriminant de $x^2 - 5x + 6$ vaut $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Comme 3 est valeur interdite, finalement $\mathcal{S} = \{2\}$.

9. $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{2}{2x-3} \iff \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2}{2x-3} \leqslant 0 \iff \dfrac{x(2x-3)-2(x+1)}{(x+1)(2x-3)} \leqslant 0 \iff \dfrac{2x^2-5x-2}{(x+1)(2x-3)} \leqslant 0$
Je calcule le discriminant de $2x^2 - 2x - 5$: $\Delta = 25 + 16 = 41$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{41}}{4} \approx -0.3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{41}}{4} \approx 2.8.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		x_1		$\frac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
$2x^2-2x-5$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x^2-5x-2}{(x+1)(2x-3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S} = \left]-1, x_1\right] \cup \left]\frac{3}{2}, x_2\right]$.

10. Je cherche une racine évidente au polynôme $P(x) = x^3 - 9x^2 + 11x + 21$.
Et $P(-1) = (-1)^3 - 9 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) + 21 = -1 - 9 - 11 + 21 = 0$.
Donc j'effectue donc la division euclidienne de $x^3 - 9x^2 + 11x + 21$ par $x + 1$.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & - & 9X^2 & + & 11X & + & 21 & X+1 \\ \cline{9-9}
- & \big(X^3 & + & X^2\big) & & & & & X^2-10X+1 \\ \cline{2-8}
 & & - & 10X^2 & + & 11X & + & 21 & \\
 & - & \big(- & 10X^2 & - & 10X\big) & & & \\ \cline{3-8}
 & & & & & 21X & + & 21 & \\
 & & & & - & \big(21X & + & 21\big) & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Finalement $P(x) = (x+1)(x^2 - 10x + 21)$.
Puis je calcule le discriminant de $x^2 - 10x + 21$: $\Delta = 100 - 84 = 16$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+4}{2} = 7.$$

En conclusion, $\mathcal{S} = \{-1, 3, 7\}$.

Exercice 3 –

1. (a) Comme $P(-1) = -3-7+7+3 = 0$, le polynôme $P(x)$ se factorise par $x-(-1) = x+1$.
Donc il existe un polynôme $Q(x)$, de degré $3-1=2$, tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$.
Je détermine ce polynôme $Q(x)$ en effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 3X^3 & - & 7X^2 & - & 7X & + & 3 & X+1 \\
\cline{9-9}
- & (3X^3 & + & 3X^2) & & & & & 3X^2-10X+3 \\
\cline{2-8}
 & & - & 10X^2 & - & 7X & + & 3 & \\
 & - & (- & 10X^2 & - & 10X) & & & \\
\cline{3-8}
 & & & & & 3X & + & 3 & \\
 & & & & - & (3X & + & 3) & \\
\cline{6-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Finalement $P(x) = (x+1)(3x^2-10x+3)$.

(b) Il me reste à traiter le polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 100-36 = 64 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3.$$

Donc l'équation $3x^3-7x^2-7x+3=0$ a trois solutions : $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{3}, 3\right\}$.

2. (a) Je détermine les valeurs interdites : ce sont les solutions de l'équation $3x^2-12x+12=0$.
Le discriminant vaut $\Delta = 144-144 = 0$. Il y a donc une unique racine

$$x_0 = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(b) J'établis le tableau de signe de la fraction rationnelle $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x^2-10x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2-12x+12$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Et donc l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ a pour solutions : $\quad \mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty[$.

Exercice 4 –

1. (a) $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{3} - \frac{9}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4} = \frac{-\frac{27}{8}}{3} + \frac{27}{8} + \frac{9}{4} = -\frac{9}{8} + \frac{27}{8} + \frac{18}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$.

(b) Graphiquement, j'établis le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

(c) Je développe la forme factorisée donée par l'énoncé pour retrouver $f(x)$:

$$\frac{(x+3)(2x-3)^2}{12}=\frac{(x+3)(4x^2-12x+9)}{12}=\frac{4x^3-27x+27}{12}=\frac{x^3}{3}-\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}=f(x).$$

J'ai bien montré que pour tout réel x, $\quad f(x)=\dfrac{(x+3)(2x-3)^2}{12}$.

(d) Comme $12>0$, il me suffit d'étudier le signe de $(x+3)(2x-3)^2$. Or un carré est toujours positif donc $(2x-3)^2 \geqslant 0$. Par ailleurs $x+3=0 \iff x=-3$.
J'en déduis le tableau de signe suivant pour $f(x)$:

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

2. Pour résoudre l'équation $g(x)=0$, je commence par calculer le discriminant :
$\Delta=1^2-4\times\dfrac{2}{3}\times(-3)=1+8=9=3^2>0$. Il y a donc deux racines

$$x_1=\frac{-1-3}{\frac{4}{3}}=-3 \quad \text{et} \quad \frac{-1+3}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}.$$

Donc $\mathcal{S}=\left\{-3,\dfrac{3}{2}\right\}$.

3. Pour étudier la position des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, il me faut étudier le signe de $f(x)-g(x)$.
D'après la question précédente, $\quad g(x)=\dfrac{2}{3}(x+3)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{(x+3)(2x-3)}{3}$. $\quad$ Ainsi

$$f(x)-g(x)=\frac{(x+3)(2x-3)}{3}\times\left(\frac{2x-3}{4}-1\right)=\frac{(x+3)(2x-3)}{3}\times\frac{2x-7}{4}=\frac{(x+3)(2x-3)(2x-7)}{12}.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi sur $]-\infty,-3]$ et sur $\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2}\right]$, $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ alors que sur $\left[-3,\dfrac{3}{2}\right]$ et sur $\left[\dfrac{7}{2},+\infty\right[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.