DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 – Extrait de BSB 2017 / Ex1

1. Je calcule PQ et QP :

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$

$$QP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

2. Je calcule QA puis multiplie le résultat par P :

$$QA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$QAP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

   J'ai bien montré que $QAP = L$.

3. (a) **Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $QA^nP = L^n$.

   Initialisation : Pour $n = 0$,

$$QA^0P = QIP = QP = I \quad \text{et} \quad L^0 = I.$$

   Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, $QA^nP = L^n$. Alors

$$L^{n+1} = L^n \times L = QA^nP \times QAP = QA^nIAP = QA^{n+1}P.$$

   Donc $QA^{n+1}P = L^{n+1}$. Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad QA^nP = L^n.$$

   (b) Je détermine J puis calcule ses puissances successives :

$$J = L - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   et

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

(c) Pour tout $n \geqslant 3$, d'après la question précédente, $J^n = J^3 \times J^{n-3} = 0_3$. Par ailleurs, les matrices I et J commutent donc je peux appliquer la formule du binôme de Newton à la matrice $L = I + J$:

$$L^n = (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k.$$

Comme tous les termes de cette somme sont nuls dès lors que $k \geqslant 3$, j'obtiens alors

$$L^n = \binom{n}{0} I^n J^0 + \binom{n}{1} I^{n-1} J + \binom{n}{2} I^{n-2} J^2 = I + nJ^1 + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

(d) D'après les résultats obtenus aux questions précédentes, pour $n \geqslant 2$,

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, cette formule me donne les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 & 2\times 0 \times (-1) \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 & 2\times 1\times 0 \\ 0 & 1 & 2\times 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L,$$

donc cette formule reste valable pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

(e) Je sais que $QA^nP = L^n$, donc $PL^nQ = PQA^nPQ = IA^nI = A^n$. Ainsi $A^n = PL^nQ$ et

$$PL^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix}$$

et

$$A^n = PL^nQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à 1. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = 1.$$

(b) Pour $n \geqslant 1$, je calcule le produit AX_n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2 + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

(c) **Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = A^{n-1}X_1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $A^0X_1 = IX_1 = X_1$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $X_n = A^{n-1}X_1$. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^{n-1}X_1 = A^nX_1.$$

Donc $X_{n+1} = A^{n+1-1}X_1$. Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 1$, alors par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = A^{n-1}X_1.$$

(d) Je sais que $\begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = X_n = A^{n-1}X_1$. Donc il me suffit d'opérer ce produit pour déduire les formules de v_n et w_n. Or

$$A^{n-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n-2)+4(n-1) \\ 2(n-1)+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) \\ 2n \end{pmatrix}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = 2n(n-1) \quad \text{et} \quad w_n = 2n.$$

Exercice 2 – Extrait d'ECRICOME 2013 / Ex2

1. (a) Je dérive la fonction g terme à terme :

$$g'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x} = \frac{6x^3-6}{x} = \frac{6(x^3-1)}{x}.$$

(b) Puisque $x \in \mathbb{R}_+^*$, il n'y a pas de valeurs interdites. Alors

$$g'(x) = 0 \iff x^3 - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Donc l'unique solution p est $p = 1$ et j'en déduis le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$6(x^3-1)$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

(c) Puisque $g(1) = 2 \times 1^3 - 6\ln(1) + 3 = 5 > 0$ et que $g(1)$ est le minimum de g, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g(x) \geqslant g(1) = 5 > 0.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad g(x) > 0$.

2. (a) Je calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \\ \text{Par quotient,} \quad &\lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln(x)}{x^2} = -\infty \end{aligned}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

$$\text{Par croissances comparées,}\quad \left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x &=& +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\ln(x)}{x^2} &=& 0 \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(b) Je calcule l'écart entre la courbe et l'asymptote :

$$f(x) - y = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} - 2x = \frac{3\ln(x)}{x^2}.$$

Et grâce à la question précédente, je sais que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\ln(x)}{x^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ quand $x \to +\infty$.

Enfin pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f(x) - y = \dfrac{3\ln(x)}{x^2} > 0$, *i.e.* $\forall x > 1, \quad f(x) > y$.

Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

3. (a) La fonction f est donnée sous la forme $f(x) = 2x + \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = 3\ln(x)$ et $v(x) = x^2$.

Alors $u'(x) = \dfrac{3}{x}$ et $v'(x) = 2x$, puis

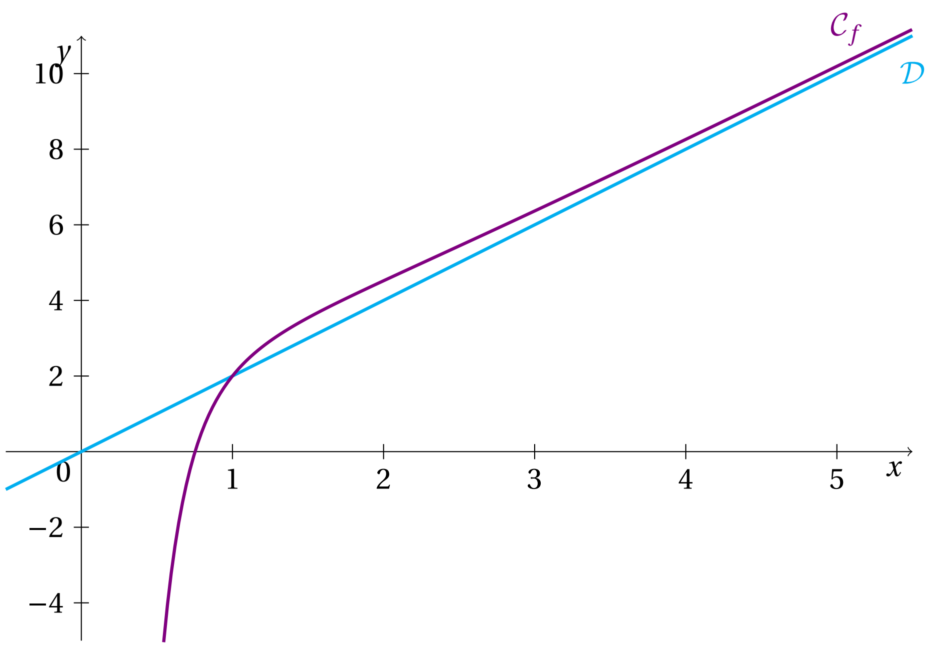
$$f'(x) = 2 + \frac{\frac{3}{x} \times x^2 - 3\ln(x) \times 2x}{\left(x^2\right)^2} = 2 + \frac{3x - 6x\ln(x)}{x^4} = \frac{2x^3 + 3 - 6\ln(x)}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

J'ai bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

(b) Je sais que $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par la question **1.**, donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
J'en déduis le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Voici la représentation graphique de la fonction f.



Exercice 3 – ESCP 2013 / Ex3

1. (a) Je note U_k l'événement "le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_k$", pour $k \in \{1,2\}$. Alors d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_1=1) &= P\big(U_1 \cap [X_1=1]\big) + P\big(U_2 \cap [X_1=1]\big) = P(U_1) \times P_{U_1}(X_1=1) + P(U_2) \times P_{U_2}(X_1=1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Comme les seules valeurs possibles pour la variable aléatoire X_1 sont 0 et 1, alors X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{5}$.

(b) Puisque X_1 suit une loi de Bernoulli,

$$E(X_1) = p = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad V(X_1) = p(1-p) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$$

2. (a) Puisque $Z = X_1 + X_2$, alors $[X_2=0] \cap [Z=0] = [X_1=0] \cap [X_2=0]$. Alors d'après la formule des probabilités composées,

$$P([X_2=0] \cap [Z=0]) = P([X_1=0] \cap [X_2=0]) = P(X_1=0) \times P_{X_1=0}(X_2=0) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}.$$

(b) Les évènements $[X_2=1] \cap [Z=0]$ et $[X_2=0] \cap [Z=2]$ sont impossibles donc

$$P\big([X_2=1] \cap [Z=0]\big) = P\big([X_2=0] \cap [Z=2]\big) = 0.$$

Par ailleurs, de la même manière que dans la question précédente,

$$\begin{aligned} P\big([X_2=0] \cap [Z=1]\big) &= P\big([X_1=1] \cap [X_2=0]\big) = P(X_1=1) \times P_{X_1=1}(X_2=0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}, \\ P\big([X_2=1] \cap [Z=1]\big) &= P\big([X_1=0] \cap [X_2=1]\big) = P(X_1=0) \times P_{X_1=0}(X_2=1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}, \\ P\big([X_2=1] \cap [Z=2]\big) &= P\big([X_1=1] \cap [X_2=1]\big) = P(X_1=1) \times P_{X_1=1}(X_2=1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}. \end{aligned}$$

Je résume cela dans le tableau ci-dessous :

	$Z=0$	$Z=1$	$Z=2$
$X_2=0$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	0
$X_2=1$	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$

3. (a) Je détermine la loi de X_2 en faisant la somme des valeurs de chaque ligne dans le tableau précédent. J'obtiens

x_i	0	1
$P(X_2=x_i)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{25}$

La variable aléatoire X_2 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{9}{25}$. D'où

$$E(X_2) = p = \frac{9}{25} \quad \text{et} \quad V(X_2) = p(1-p) = \frac{9}{25} \times \frac{16}{25} = \frac{144}{625}.$$

(b) Comme $P(X_1 = 1) = \dfrac{2}{5}$, $P(X_2 = 1) = \dfrac{9}{25}$ et $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \dfrac{6}{25}$, j'en déduis que $P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \neq P(X_1 = 1, X_2 = 1)$. Donc les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(c) Je détermine la loi de Z en faisant la somme des valeurs de chaque colonne dans le tableau de la loi du couple (X_2, Z). J'obtiens

x_i	0	1	2
$P(Z = x_i)$	$\dfrac{12}{25}$	$\dfrac{7}{25}$	$\dfrac{6}{25}$

(d) Je calcule l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z.

$$E(Z) = \frac{12}{25} \times 0 + \frac{7}{25} \times 1 + \frac{6}{25} \times 2 = \frac{7+12}{25} = \frac{19}{25}.$$

Par ailleurs, en utilisant le théorème de transfert, je sais que

$$E(Z^2) = \frac{12}{25} \times 0^2 + \frac{7}{25} \times 1^2 + \frac{6}{25} \times 2^2 = \frac{7+24}{25} = \frac{31}{25}.$$

Alors par la formule de König-Huygens, j'obtiens que

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{31}{25} - \left(\frac{19}{25}\right)^2 = \frac{31 \times 25 - 19^2}{25^2} = \frac{775 - 361}{625} = \frac{414}{625}.$$

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{X_1=0}(U_1) = \frac{P\big([X_1 = 0] \cap U_1\big)}{P(X_1 = 0)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité que la boule verte tirée au premier tirage provienne de l'urne $\mathcal{U}_1$ est $\dfrac{1}{3}$.

5. (a) Grâce au tableau de la loi conjointe, je sais que

$$E(X_2 Z) = 1 \times 1 \times \frac{3}{25} + 1 \times 2 \times \frac{6}{25} = \frac{3+12}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

(b) D'après la formule de König-Huygens, je sais que

$$\operatorname{Cov}(X_2, Z) = E(X_2 Z) - E(X_2)E(Z) = \frac{3}{5} - \frac{9}{25} \times \frac{19}{25} = \frac{375 - 171}{625} = \frac{204}{625}.$$

(c) Puisque $Z = X_1 + X_2$, alors $X_1 = Z - X_2$. Ainsi par linéarité à gauche de la covariance,

$$\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \operatorname{Cov}(Z - X_2, X_2) = \operatorname{Cov}(Z, X_2) - V(X_2) = \frac{204}{625} - \frac{144}{625} = \frac{60}{625} = \frac{12}{125}.$$

(d) Puisque $Z = X_1 + X_2$, alors

$$V(Z) = V(X_1) + V(X_2) + 2\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \frac{6}{25} + \frac{144}{625} + 2 \times \frac{12}{125} = \frac{150 + 144 + 120}{625} = \frac{414}{625}.$$