DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 –

1.
$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$
$$QP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

2.
$$\begin{aligned} QAP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L. \end{aligned}$$

On a $QAP = L$. Donc, $PLQ = PQAPQ = I_3AI_3 = A$. Ainsi, on a bien $A = PLQ$.

3. (a) Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $A^n = PL^nQ$ ».

Initialisation : Pour n=0,
$$A^0 = I \quad \text{et} \quad PL^0Q = PIQ = PQ = I$$
donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On a
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PL^nQ \times PLQ \\ &= PL^nILQ \\ &= PL^{n+1}Q \end{aligned}$$
donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$, *i.e.,*
$$A^n = PL^nQ.$$

(b) On a
$$J = L - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

(c) Pour tout $n \geq 3$, on a $J^n = J^3 \times J^{n-3} = O_3$. Par ailleurs, les matrices I et J commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned} L^n &= (J+I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} J^0 I^n + \binom{n}{1} J^1 I^{n-1} + \binom{n}{2} J^2 I^{n-2} \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2. \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} L^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(e) Alors

$$\begin{aligned} A^n &= PL^nQ \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. (a) La suite (u_n) est une suite constante égale à 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$u_n = 1.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2 + w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

(c) Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $X_n = A^n X_0$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 X_0 = I X_0 = X_0$$

donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans **N**. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A \times A^n X_0 \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans **N**, *i.e.,*

$$X_n = A^n X_0.$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= X_n = A^n X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) + 4n \\ 2n + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n+1) \\ 2(n+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2 –

1. (a) Le dé étant équilibré, tous les tirages sont équiprobables. Ainsi, X suit une loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$.

   (b) On a $E(X) = \dfrac{6+1}{2} = \dfrac{7}{2}$ et $V(X) = \dfrac{6^2-1}{12} = \dfrac{35}{12}$.

2. Pour obtenir 2 fois PILE, il faut lancer la pièce deux fois et donc avoir obtenu un 6 avec le dé. On a donc bien $P(Y=2) = P([Y=2] \cap [X=6])$. Par ailleurs,

$$P([Y=2] \cap [X=6]) = P(X=6) \times P_{[X=6]}(Y=2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

3. (a) Si l'on a obtenu $1, 2, 3, 4$ ou 5 avec le dé, alors on ne lance la pièce qu'une seule fois et donc on a une chance sur deux d'obtenir un PILE et une chance sur deux de n'en obtenir aucun. Ainsi

$$\forall k \in \{1;2;3;4;5\}, \quad P_{[X=k]}(Y=0) = \frac{1}{2}$$

(b) Si on a obtenu un 6 avec le dé, alors on lance la pièce deux fois. Ainsi, on obtient 0 PILE si et seulement si on obtient 2 fois FACE. On a donc

$$P_{[X=6]}(Y=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P_{[X=1]}(Y=0) \times P(X=1) + P_{[X=2]}(Y=0) \times P(X=2) + P_{[X=3]}(Y=0) \times P(X=3) \\
&\quad + P_{[X=4]}(Y=0) \times P(X=4) + P_{[X=5]}(Y=0) \times P(X=5) + P_{[X=6]}(Y=0) \times P(X=6) \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{11}{24}
\end{aligned}$$

(c) On a déjà vu que $P(Y=2) = \frac{1}{24}$ et que $P(Y=0) = \frac{11}{24}$. Donc

$$P(Y=1) = 1 - P(Y=0) - P(Y=2) = 1 - \frac{1}{24} - \frac{11}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant.

k	0	1	2
$P(Y=k)$	$\frac{11}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{1}{24}$

Et on a donc

$$E(Y) = 0 \times \frac{11}{24} + 1 \times \frac{12}{24} + 2 \times \frac{1}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}.$$

4. (a) On a

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$
$Y=0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
$Y=1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$Y=2$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$

(b) Commençons par calculer $E(XY)$.

$$\begin{aligned}
E(XY) &= 0 \times 1 \times \frac{1}{12} + 0 \times 2 \times \frac{1}{12} + \cdots + 2 \times 6 \times \frac{1}{24} \\
&= \frac{1+2+3+4+5+6+6}{12} \\
&= \frac{27}{12}
\end{aligned}$$

On en déduit, d'après la formule de Huygens,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{27}{12} - \frac{7}{2} \times \frac{7}{12} = \frac{54}{24} - \frac{49}{24} = \frac{5}{24}.$$

Exercice 3 –

1. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a
$$g'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2-4}{x}.$$
Or, pour $x>0$, on a $2x^2-4 \geq 0 \iff 2x^2 \geq 4 \iff x^2 \geq 2 \iff x \geq \sqrt{2}$. On en déduit le tableau de signe de $g'(x)$, ainsi que le tableau de variation de g.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$2x^2-4$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$2\big(1-\ln(2)\big)$	$\nearrow$	

En effet,
$$g\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4\ln\left(\sqrt{2}\right) = 2 - 2\ln(2) = 2\big(1-\ln(2)\big).$$
D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction g admet bien un minimum en $\sqrt{2}$ égal à $2\big(1-\ln(2)\big)$.

2. On a $2(1-\ln(2)) \simeq 2\times(1-0,7) = 2\times 0,3 = 0,6 > 0$. Le minimum de g est donc strictement positif donc pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $g(x)>0$.

3. On a
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln(x) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par quotient}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+\ln(x)}{x} = -\infty\end{array} \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{4} = 0\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{4}+\dfrac{1+\ln(x)}{x} = -\infty.\end{array}$$
Ainsi
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$
La courbe $\mathscr{C}$ admet donc une asymptote verticale en 0.

4. On a :
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to +\infty} 1+\ln(x) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x & = & +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par croissance comparée}\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+\ln(x)}{x} = 0^+\end{array} \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{4} = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{4}+\dfrac{1+\ln(x)}{x} = +\infty.\end{array}$$
Ainsi
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

5. On a
$$f(x)-y=\frac{x}{4}+\frac{1+\ln(x)}{x}-\frac{x}{4}=\frac{1+\ln(x)}{x}.$$
Et on a vu à la question précédente que
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln(x)}{x}=0.$$
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=0$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=\frac{x}{4}$ est bien asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
6. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, il nous faut étudier le signe de $f(x)-y$. On a vu à la question précédente que
$$f(x)-y=\frac{1+\ln(x)}{x}.$$
On a
$$1+\ln(x)\geq 0 \iff \ln(x)\geq -1 \iff x\geq e^{-1}=\frac{1}{e}.$$
On en déduit le tableau de signe suivant.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$1+\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

Ainsi,
- sur $]0;\frac{1}{e}]$, $\mathscr{C}$ est en-dessous de $\mathscr{D}$,
- sur $[\frac{1}{e};+\infty[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$.

En particulier, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ se coupent en un point A,
dont l'abscisse est $\frac{1}{e}$ et l'ordonnée est $\frac{\frac{1}{e}}{4}=\frac{1}{4e}$.
7. Posons $u(x)=1+\ln(x)$ et $v(x)=x$. On a $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=1$. Ainsi, pour tout $x>0$, on a
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{4}+\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}\\&=\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln(x))\times 1}{x^2}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1-1-\ln(x)}{x^2}\\&=\frac{1}{4}-\frac{\ln(x)}{x^2}\\&=\frac{x^2-4\ln(x)}{4x^2}\\&=\frac{g(x)}{4x^2}\end{aligned}$$
Or, on a déjà étudié le signe de g à la question **2**. On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ ainsi que le tableau de variations de f.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

8. (a) Posons $u(x) = x^2 - 4\ln(x)$ et $v(x) = 4x^2$. On a $u'(x) = 2x - \dfrac{4}{x}$ et $v'(x) = 8x$. On en déduit

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\left(2x - \frac{4}{x}\right) \times 4x^2 - \left(x^2 - 4\ln(x)\right) \times 8x}{(4x^2)^2} \\ &= \frac{8x^3 - 16x - 8x^3 + 32x\ln(x)}{16x^4} \\ &= \frac{32x\ln(x) - 16x}{16x^4} \\ &= \frac{16x(2\ln(x) - 1)}{16x^4} \\ &= \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}. \end{aligned}$$

(b) On a

$$2\ln(x) - 1 \geq 0 \iff 2\ln(x) \geq 1 \iff \ln(x) \geq \frac{1}{2} \iff x \geq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
x^3		$+$		$+$	
$2\ln(x) - 1$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi,

- f est concave sur $]0; \sqrt{e}]$.
- f est convexe sur $[\sqrt{e}; +\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}$ possède donc un point d'inflexion dont l'abscisse est $\sqrt{e}$ et l'ordonnée $f(\sqrt{e})$.

9. On obtient l'allure de courbe suivante.