NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 16

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes à l'aide des primitives usuelles.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^3 - 3x^2 + 4x - 5\,\mathrm{d}x$

Solution :

$$I_1 = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 4x - 5\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 5x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 2 - 5 = -\frac{15}{4}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^2 (6x+3)^3\,\mathrm{d}x$

Solution : Je pose $f_2(x) = (6x+3)^3$. f_2 semble être de la forme $u'u^3$, avec $u(x) = 6x+3$. Puisque $u'(x) = 6$, alors $u'(x)u(x)^3 = 6(6x+3)^3 = 6 \times f_2(x)$.

Ainsi une primitive de f_2 est donnée par $F_2(x) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{u(x)^4}{4} = \dfrac{(6x+3)^4}{24}$. Donc

$$I_2 = \int_0^2 (6x+3)^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(6x+3)^4}{24}\right]_0^2 = \frac{15^4}{24} - \frac{3^4}{24} = \frac{3^4}{24}\left(5^2+1\right)\left(5+1\right)\left(5-1\right) = 2\times 3^4 \times 13 = 2106.$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^3 \frac{4}{\sqrt{3x+7}}\,\mathrm{d}x$

Solution : Je pose $f_3(x) = \dfrac{4}{\sqrt{3x+7}}$. f_3 semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, avec $u(x) = 3x+7$.

Puisque $u'(x) = 3$, alors $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \dfrac{3}{\sqrt{3x+7}} = \dfrac{3}{4} \times f_3(x)$.

Ainsi une primitive de f_3 est donnée par $F_3(x) = \dfrac{4}{3} \times 2\sqrt{u(x)} = \dfrac{8}{3}\sqrt{3x+7}$. Donc

$$I_3 = \int_1^3 \frac{4}{\sqrt{3x+7}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{8}{3} \times \sqrt{3x+7}\right]_1^3 = \frac{8}{3}\sqrt{16} - \frac{8}{3}\sqrt{10} = \frac{8}{3}\left(4 - \sqrt{10}\right).$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

Solution : Je pose $f_4(x) = \dfrac{4x+2}{x^2+x+1}$. f_4 semble de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u(x) = x^2+x+1$.

Puisque $u'(x) = 2x+1$, alors $\dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{2} \times f_4(x)$.

Ainsi une primitive de f_4 est donnée par $F_4(x) = 2\ln\left(|x^2+x+1|\right)$. Donc

$$I_4 = \int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \left[2\ln\left(|x^2+x+1|\right)\right]_2^4 = 2\ln(21) - 2\ln(7) = 2\ln\left(\frac{21}{7}\right) = 2\ln(3).$$

Exercice 2 – Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1. $I_5 = \int_0^2 te^t \, dt$

Solution :
Je pose
$$u'(t) = e^t \quad \text{et} \quad v(t) = t.$$
Alors
$$u(t) = e^t \quad \text{et} \quad v'(t) = 1.$$
Et par intégration par parties,
$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^2 u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^2 - \int_0^2 u(t)v'(t)\,dt \\ &= \Big[te^t\Big]_0^2 - \int_0^2 1 \times e^t \, dt = 2e^2 - \Big[e^t\Big]_0^2 = 2e^2 - \big(e^2 - 1\big) = e^2 + 1. \end{aligned}$$

2. $I_6 = \int_1^e t \ln(t) \, dt$

Solution :
Je pose
$$u'(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(t).$$
Alors
$$u(t) = \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{1}{t}.$$
Et par intégration par parties,
$$\begin{aligned} I_6 &= \int_1^e u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_1^e - \int_1^e u(t)v'(t)\,dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t}\,dt = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \int_1^e \frac{t}{2}\,dt \\ &= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}. \end{aligned}$$