# DEVOIR SURVEILLÉ 4

**Exercice 1 –**

1. On a
$$\int_0^1 (4x^3-3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x = \left[4\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 = 1-1+1+1=2.$$

2. Je commence par trouver une primitive de $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}$.
$f$ semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=1+x^4$. On a $u'(x)=4x^3$ donc
$$\frac{u'(x)}{u(x)^2}=\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}=4f(x).$$
Donc une primitive de $f$ est donnée par
$$F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{-1}{u(x)}=\frac{1}{4}\times\frac{-1}{1+x^4}=\frac{-1}{4+4x^4}.$$
Et donc
$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{-1}{4+4x^4}\right]_0^1=\frac{-1}{8}-\frac{-1}{4}=\frac{1}{8}.$$

3. Je commence par trouver une primitive de $f(t)=\dfrac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}$.
$f$ semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t)=t^4+1$. On a $u'(x)=4t^3$ donc
$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}=\frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}=f(t).$$
Donc une primitive de $f$ est donnée par
$$F(t)=2\sqrt{u(t)}=2\sqrt{t^4+1}.$$
Et donc
$$\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t=\left[2\sqrt{t^4+1}\right]_{-1}^1=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0.$$

4. On a
$$\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x-2\right)\mathrm{d}x=\left[2\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^4=\left(2\sqrt{4}+\frac{16}{2}-8\right)-\left(2+\frac{1}{2}-2\right)=4+8-8-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

5. Je commence par trouver une primitive de $f(x)=x(5x^2+1)^2$.
$f$ semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x)=5x^2+1$. On a $u'(x)=10x$ donc
$$u'(x)u(x)^2=10x(5x^2+1)^2=10f(x).$$
Donc une primitive de $f$ est donnée par
$$F(x)=\frac{1}{10}\times\frac{u(x)^3}{3}=\frac{(5x^2+1)^3}{30}.$$
Et donc
$$\int_{-1}^0 x(5x^2+1)^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(5x^2+1)^3}{30}\right]_{-1}^0=\frac{1}{30}-\frac{216}{30}=\frac{-215}{30}=-\frac{43}{6}.$$

**Exercice 2 –**

1. D'après la formule des probabilités totales, comme $\left\{R, \overline{R}\right\}$ forme un système complet d'évènements,

$$P(J) = P(R\cap J) + P(\overline{R}\cap J) = P(R)\times P_R(J) + P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(J)$$
$$= \frac{3}{4}\times 1 + \left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{4} = \frac{3}{4}+\frac{1}{16} = \frac{13}{16}.$$

En effet, si l'élève connaît la réponse, il va répondre correctement avec une probabilité 1, contre une probabilité $\frac{1}{4}$ s'il répond au hasard.

2. Les 20 questions représentent $n = 20$ répétitions d'une expérience de Bernoulli (succès : "répondre correctement", de probabilité $p = \frac{13}{16}$), identiques et indépendantes. La variable aléatoire $X$ compte le nombre de succès, elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{13}{16}$.
Le support de $X$ est donné par $X(\Omega) = [\![0,20]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,20]\!]$,

$$P(X=k) = \binom{20}{k}\left(\frac{13}{16}\right)^k\left(\frac{3}{16}\right)^{20-k}.$$

3. Comme $X$ suit une loi binomiale, on a

$$E(X) = np = 20\times\frac{13}{16} = \frac{65}{4} \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = \frac{65}{4}\times\frac{3}{16} = \frac{195}{64}.$$

4. (a) D'après l'énoncé, il y a $X$ bonnes réponses, rapportant 1 point chacune, et donc $20-X$ mauvaises réponses, rapportant $-1$ point chacune. Ainsi la note finale devient

$$N = 1\times X + (-1)\times(20-X) = X - 20 + X = 2X-20.$$

   (b) Comme $N = 2X-20$, on a

$$E(N) = E(2X-20) = 2E(X)-20 = 2\times\frac{65}{4}-20 = \frac{65}{2}-\frac{40}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

$$V(N) = V(2X-20) = 2^2V(X) = 4\times\frac{195}{64} = \frac{195}{16}.$$

5. (a) Il s'agit cette fois de $n = 20$ répétitions d'une expérience de Bernoulli (succès : "répondre correctement" de probabilité $p = \frac{3}{4}$), identiques et indépendantes. La variable aléatoire $Y$ compte le nombre de succès, elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{3}{4}$.

   (b) La note moyenne obtenue par l'élève B correspond à l'espérance de $Y$, *i.e.*

$$E(Y) = 20\times\frac{3}{4} = 15.$$

   (c) En comparant les notes moyennes obtenues par les élèves A et B dans le cas de points négatifs en cas de mauvaises réponses (12.5 pour l'élève A et 15 pour l'élève B), il vient naturellement la conclusion que la meilleure stratégie est de ne pas répondre au hasard aux questions pour lesquelles on ne connaît pas la réponse. C'est donc l'élève B qui possède la meilleure stratégie.

**Exercice 3 –**

1. D'après l'énoncé, on a
$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0.2.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme $A_n$ et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'évènements, on a
$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= 0.7P(A_n) + 0.2P(\overline{A_n}) = 0.7P(A_n) + 0.2\big(1 - P(A_n)\big) \\ &= 0.7P(A_n) + 0.2 - 0.2P(A_n) = 0.5P(A_n) + 0.2. \end{aligned}$$
Autrement dit, on a bien $p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.

3. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. On a
$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.4 = 0.5p_n + 0.2 - 0.4 = 0.5(u_n + 0.4) + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n + 0.2 + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n.$$
Donc $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 0.5. Son premier terme est donné par
$$u_1 = p_1 - 0.4 = 0.2 - 0.4 = -0.2.$$
(b) Comme $(u_n)$ est une suite géométrique, on a pour tout entier $n$,
$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0.2 \times 0.5^{n-1}.$$
Alors pour tout entier $n$, on a
$$p_n = u_n + 0.4 = 0.4 - 0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

4. La suite $(u_n)$ est une suite géométrique, de premier terme $u_1 = -0.2$ négatif et de raison $q = 0.5 \in ]0,1[$. Donc la suite $(u_n)$ est une suite croissante à termes négatifs. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_n = u_n + 0.4$, la suite $\big(p_n\big)$ partage la même variation que la suite $(u_n)$, elle est donc croissante.

5. Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, la limite de la suite géométrique $(u_n)$ est 0. Alors, comme $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad p_n = u_n + 0.4$,
$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + 0.4 = 0 + 0.4 = 0.4.$$

**Exercice 4 –**

1. $$\lim_{x\to 0^+} 1 + \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} 2 - \ln(x) = +\infty,$$
donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
$$\lim_{x\to +\infty} 1 + \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} 2 - \ln(x) = -\infty,$$
donc par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. (a) Je dérive $f$. $f$ est de la forme $f = u \times v$, avec $u(x) = 1 + \ln(x)$ et $v(x) = 2 - \ln(x)$. On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x}$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) &= \frac{1}{x} \times \big(2 - \ln(x)\big) - \frac{1}{x} \times \big(1 + \ln(x)\big) \\ &= \frac{\big(2 - \ln(x)\big) - \big(1 + \ln(x)\big)}{x} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x}. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x}.$$

(b) Pour obtenir les variations de $f$, j'étudie le signe de $f'(x)$. Je sais que $x > 0$ et je résous $1 - 2\ln(x) \geqslant 0$.

$$1 - 2\ln(x) \geqslant 0 \iff 1 \geqslant 2\ln(x) \iff \ln(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff x \leqslant e^{\frac{1}{2}}$$

Et comme $\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$, alors $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(2 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{4}$.
J'en déduis alors le tableau de variation suivant.

| $x$ | $0$ | | $e^{\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-2\ln(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $\|\|$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $\dfrac{9}{4}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Le maximum de $f$ vaut $\dfrac{9}{4}$ et il est atteint en $x = e^{\frac{1}{2}}$.

3. L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ en le point d'abscisse $a$ est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = 1$, donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(1) \times (x - 1) + f(1).$$

Or $f(1) = \big(1 + \ln(1)\big)\big(2 - \ln(1)\big) = 1 \times 2 = 2$, et

$$f'(1) = \frac{1 - 2\ln(1)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Alors l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par

$$y = 1 \times (x - 1) + 2 = x - 1 + 2 = x + 1, \quad \textit{i.e.}$$

$$y = x + 1.$$

4. (a) Graphiquement, comme la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe 2 fois la droite horizontale d'équation $y = 2$, j'en déduis que l'équation $f(x) = 2$ admet 2 solutions.

(b) Je résous $(1+X)(2-X)=2$.

$$(1+X)(2-X)=2 \iff 2-X+2X-X^2=2 \iff X-X^2=0 \iff X(1-X)=0$$

$$\iff X=0 \text{ ou } 1-X=0 \iff X=0 \text{ ou } X=1$$

Les deux slutions réelles de cette équation sont 0 et 1.

(c) L'équation $f(x)=2$ correspond à l'équation $(1+X)(2-X)=2$ en ayant remplacé $\ln(x)$ par $X$. Ainsi $f(x)=2$ si et seulement si $\ln(x)$ est une solution de $(1+X)(2-X)=2$, *i.e.* si et seulement si $\ln(x)\in\{0,1\}$. Alors

$$f(x)=2 \iff \ln(x)=0 \text{ ou } \ln(x)=1 \iff x=e^0=1 \text{ ou } x=e^1=e \iff x=1 \text{ ou } x=e.$$

On a donc bien 2 solutions pour l'équation : 1 et $e$. Cela correspond au graphique puisque $e\approx 2.72$.

**Exercice 5 –**

1. (a) Pour prouver la croissance de la fonction $g$, je regarde le signe de sa dérivée. Comme $g(x)=e^x-1+x$, alors $g'(x)=e^x+1$. Et comme une exponentielle est toujours positive, pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$g'(x)=e^x+1>1>0.$$

Sa dérivée étant strictement positive, j'en déduis que la fonction $g$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

(b) $g(0)=e^0-1+0=1-1=0$. La fonction $g$ est croissante et vaut 0 en 0. Je peux donc en déduire son signe, résumé dans le tableau suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

2. (a) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$. Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$, j'en déduis que, par somme,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

(b) La droite $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ si et seulement si la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x+1)=0$. Or $f(x)-(x+1)=-\dfrac{x}{e^x}$ et on a déjà vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$. J'ai bien montré que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x+1)=0$, donc que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

(c) Il me faut réécrire l'expression pour lever l'indétermination.

$$x+1-\frac{x}{e^x}=\frac{x}{e^x}\times\left(e^x+\frac{e^x}{x}-1\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+\dfrac{e^x}{x}-1\right)$. Et comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x}$, par produit,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

3. (a) Je dérive $\frac{x}{e^x}$. C'est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. On a $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$, donc
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}.$$
Alors, par addition,
$$f'(x) = 1 - \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x - 1 + x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}.$$
(b) Pour obtenir le tableau de variation de $f$, j'étudie le signe de sa dérivée. Or je connais déjà le signe de $g(x)$ et je sais qu'une exponentielle est positive. Alors je déduis le tableau suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4. Je dérive $f'$. $f'$ est de la forme $\frac{g}{v}$, avec $g(x) = e^x - 1 + x$ et $v(x) = e^x$. On a $g'(x) = e^x + 1$ et $v(x) = e^x$, donc
$$f''(x) = \frac{g'(x)v(x) - g(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(e^x+1) \times e^x - (e^x - 1 + x) \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{(2-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}.$$
Alors il me suffit d'étudier le signe de $f''(x)$ pour obtenir la convexité de $f$. Comme il s'agit d'une exponentielle, le dénominateur est toujours positif. Et $2 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$, donc la fonction $f$ est convexe sur $]-\infty, 2]$ et concave sur $[2, +\infty[$.

5. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.