DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 –

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$
2. $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{8}{12} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$
3. $C = \frac{1+\frac{5}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \frac{7}{12}} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{6}{30} - \frac{35}{30}} = \frac{11}{6} \times \left(-\frac{30}{29}\right) = -\frac{55}{29}$
4. $D = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \div \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{20} \div \frac{9}{4} = \frac{1}{120} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{270}$

Exercice 2 –

1. $2x - 3 = 4 \iff 2x = 7 \iff x = \frac{7}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.
2. $x - \frac{1}{2} = 2x - 1 \iff -x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
3. $2x - 4 < 3x + 5 \iff -x < 9 \iff x > -9$ donc $\mathcal{S} = \left]-9, +\infty\right[$.
4. Je calcule le discriminant : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 27 = 144 - 108 = 36 = 6^2 > 0$.
   Le polynôme admet donc deux racines :
   $$x_1 = \frac{12-6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12+6}{2} = 9.$$
   Donc $\mathcal{S} = \{3, 9\}$.
5. Je calcule le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 10 = 9 + 40 = 49 = 7^2 > 0$.
   Le polynôme admet donc deux racines :
   $$x_1 = \frac{-3-7}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+7}{-2} = -2.$$
   J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$-x^2+3x+10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi $\mathcal{S} = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]5, +\infty\right[$.
6. $x(x-2) = -1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$.
   J'ai reconnu l'identité remarquable. Ainsi $\mathcal{S} = \{1\}$.
7. $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x+1} \iff \frac{2(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+3)} = 0 \iff \frac{2x+2-x-3}{(x+1)(x+3)} = 0 \iff \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} = 0$
   Or $(x+1)(x+3) = 0 \iff x+1 = 0$ ou $x+3 = 0 \iff x = -1$ ou $x = -3$
   donc les valeurs interdites sont $x = -1$ et $x = -3$. Par ailleurs $x - 1 = 0 \iff x = 1$.
   Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

8. $x-3=0 \iff x=3$ donc il y a une valeur interdite : $x=3$.
Par ailleurs le discriminant de x^2-5x+6 vaut $\Delta=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1>0$.
Le polynôme admet donc deux racines :
$$x_1=\frac{5-1}{2}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+1}{2}=3.$$
Comme 3 est valeur interdite, finalement $\mathcal{S}=\{2\}$.

9. $\dfrac{x}{x+1}\leqslant\dfrac{3}{2x-3} \iff \dfrac{x}{x+1}-\dfrac{3}{2x-3}\leqslant 0 \iff \dfrac{x(2x-3)-3(x+1)}{(x+1)(2x-3)}\leqslant 0 \iff \dfrac{2x^2-6x-3}{(x+1)(2x-3)}\leqslant 0$
Je calcule le discriminant de $2x^2-6x-3$: $\Delta=(-6)^2-4\times2\times(-3)=36+24=60>0$.
Le polynôme admet donc deux racines :
$$x_1=\frac{6-\sqrt{60}}{4}=\frac{3-\sqrt{15}}{2}\approx-0.4 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{6+\sqrt{60}}{4}=\frac{3+\sqrt{15}}{2}\approx3.4,$$
car $\sqrt{60}=2\sqrt{15}$ et $\sqrt{15}\approx3.9$. J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3-\sqrt{15}}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3+\sqrt{15}}{2}$		$+\infty$
$2x^2-6x-3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x^2-6x-3}{(x+1)(2x-3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Finalement $\mathcal{S}=\left]-1,\dfrac{3-\sqrt{15}}{2}\right]\cup\left]\dfrac{3}{2},\dfrac{3+\sqrt{15}}{2}\right]$.

10. Je cherche une racine évidente du polynôme $P(x)=x^3-9x^2+11x+21$.
Et $P(-1)=(-1)^3-9\times(-1)^2+11\times(-1)+21=-1-9-11+21=0$.
Donc -1 est une racine de $P(x)$ et $P(x)$ est un multiple de $x-(-1)=x+1$.
J'effectue donc la division euclidienne de $x^3-9x^2+11x+21$ par $x+1$.
$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^3 & - & 9x^2 & + & 11x & + & 21 & x+1 \\ \cline{9-9}
- & (x^3 & + & x^2) & & & & & x^2-10x+21 \\ \cline{2-8}
 & & - & 10x^2 & + & 11x & + & 21 & \\
 & - & (- & 10x^2 & - & 10x) & & & \\ \cline{3-8}
 & & & & & 21x & + & 21 & \\
 & & & & - & (21x & + & 21) & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$
Finalement $P(x)=(x+1)\left(x^2-10x+21\right)$. Puis je calcule le discriminant de $x^2-10x+21$:
$\Delta=(-10)^2-4\times1\times21=100-84=16=4^2>0$. Le polynôme admet donc deux racines :
$$x_1=\frac{10-4}{2}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{10+4}{2}=7.$$
En conclusion, les solutions de l'équation de degré 3 sont données par
$$\mathcal{S}=\{-1,3,7\}.$$

Exercice 3 –

1. a) Je calcule l'image de $-\dfrac{3}{2}$:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{3}-\frac{9}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{9}{4}=\frac{-\frac{27}{8}}{3}+\frac{27}{8}+\frac{9}{4}=-\frac{9}{8}+\frac{27}{8}+\frac{18}{8}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}.$$

b) Graphiquement, j'établis le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
f		↗	$\dfrac{9}{2}$	↘	0	↗	

c) Je développe la forme factorisée donnée par l'énoncé pour retrouver $f(x)$:

$$\frac{(x+3)(2x-3)^2}{12}=\frac{(x+3)\left(4x^2-12x+9\right)}{12}=\frac{4x^3-27x+27}{12}=\frac{x^3}{3}-\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}=f(x).$$

J'ai bien montré que pour tout réel x, $\quad f(x)=\dfrac{(x+3)(2x-3)^2}{12}$.

d) Comme $12>0$, il me suffit d'étudier le signe de $(x+3)(2x-3)^2$.
Or un carré est toujours positif donc $(2x-3)^2\geqslant 0$. $\quad$ Et $x+3\geqslant 0 \iff x\geqslant -3$.
J'en déduis le tableau de signe suivant pour $f(x)$:

x	$-\infty$		-3		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

2. Pour résoudre l'équation $g(x)=0$, je commence par calculer le discriminant :
$\Delta=1^2-4\times\dfrac{2}{3}\times(-3)=1+8=9=3^2>0$. $\quad$ Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1=\frac{-1-3}{\frac{4}{3}}=-3 \quad\text{et}\quad \frac{-1+3}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}.$$

Donc $\mathcal{S}=\left\{-3,\dfrac{3}{2}\right\}$.

3. Pour étudier la position des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, il faut étudier le signe de $f(x)-g(x)$.
D'après la question précédente, $\quad g(x)=\dfrac{2}{3}(x+3)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{(x+3)(2x-3)}{3}$. $\quad$ Ainsi

$$f(x)-g(x)=\frac{(x+3)(2x-3)}{3}\times\left(\frac{2x-3}{4}-1\right)=\frac{(x+3)(2x-3)}{3}\times\frac{2x-7}{4}=\frac{(x+3)(2x-3)(2x-7)}{12}.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement

- sur $]-\infty,-3]$ et sur $\left[\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right]$, $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$,
- sur $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{7}{2},+\infty\right[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.