

# 10 | Variables aléatoires réelles

## I – Généralités sur les variables aléatoires

### 1 – Définitions et exemples

Quand on étudie une probabilité, l'univers  $\Omega$  (l'ensemble des résultats possibles) n'est pas forcément composé d'objets mathématiques : par exemple  $\{\text{PILE}, \text{FACE}\}$ . Dans ce cas, à chaque issue, on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . On peut par exemple considérer le gain obtenu à l'issue d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.

**Définition 10.1** – Une **variable aléatoire**  $X$  est une application  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ .  
On appelle **support** de  $X$  et on note  $X(\Omega)$  l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .

**Exemple 10.2** – Tout au long de ce chapitre, on s'appuie sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées :

1. Un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on tire le numéro 1 on gagne 4€, si on tire un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note  $X$  le gain (algébrique).

$X$  est une variable aléatoire et son support est donné par

$$X(\Omega) = \{-1, 1, 3\}.$$

2. On lance deux dés équilibrés et on note  $X$  la somme des deux résultats obtenus.

$X$  est une variable aléatoire et son support est donné par

$$X(\Omega) = [2, 12] \quad (\text{La somme fait au minimum 2 et au maximum 12.})$$

### 2 – Événements associés à une variable aléatoire

**Définition 10.3** – Soient  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  et  $x \in \mathbb{R}$  un réel. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des issues de l'univers dont l'image par la variable aléatoire  $X$  est  $x$ .  
De la même manière, on définit

$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\},$$

$$[X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$

$$[X \geq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\},$$

$$[X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}.$$

Si  $x$  et  $y$  sont deux réels tels que  $x < y$ , alors on note

$$[x \leq X \leq y] = \{\omega \in \Omega \mid x \leq X(\omega) \leq y\}.$$

Plus généralement, si  $I$  désigne une partie de  $\mathbb{R}$ , on note

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}.$$

**Exemple 10.4** – Calculer  $P([X = 3])$  et  $P([X \leq 2])$  dans les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. Je gagne 3€ dans le cas où j'obtiens le tirage 1. Ainsi

$$P(X = 3) = P(\{1\}) = \frac{1}{5}.$$

Par ailleurs, je gagne moins de 2€ dans le cas où j'obtiens n'importe quel tirage différent de 1. Autrement dit, si j'obtiens un 2, un 3, un 4 ou un 5. Ainsi

$$P(X \leq 2) = P(\{2, 3, 4, 5\}) = \frac{4}{5}.$$

2. La somme des deux dés vaut 3 si j'obtiens (1, 2) ou (2, 1) avec les deux dés. Puisqu'il y a au total 36 issues possibles lorsque je lance les deux dés (tous les tirages (1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6, 6)), alors

$$P(X = 3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Par ailleurs, la somme des deux dés est inférieure ou égale à 2 seulement lorsque j'obtiens (1, 1) avec les deux dés. Ainsi

$$P(X \leq 2) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}.$$

### Proposition 10.5

Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ . Alors  $\{[X = x] \mid x \in X(\Omega)\}$ , ensemble des événements  $[X = x]$  pour toutes les valeurs  $x$  du support  $X(\Omega)$ , forme un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x]) = 1.$$

**Exemple 10.6** – Donner un système complet d'événements pour chacun des deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. Un système complet d'événements est donné par  $\{[X = -1], [X = 1], [X = 3]\}$ .
2. Un système complet d'événements est donné par  $\{[X = 2], [X = 3], [X = 4], \dots, [X = 12]\}$ .

**Remarque 10.7** – Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation  $P([X = x])$  en  $P(X = x)$  et il en est de même pour les autres ensembles.

## 3 – Loi d'une variable aléatoire finie

**Définition 10.8** – Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . On appelle **loi** de la variable aléatoire  $X$  la donnée de toutes les probabilités  $P(X = x)$  pour tous les réels  $x \in X(\Omega)$ .

### Méthode 10.9 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

1. On détermine le support  $X(\Omega)$ , *i.e.* l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .
2. On calcule la probabilité  $P(X = x)$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ .

On résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec sur la première ligne l'ensemble des valeurs prises par  $X$  et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.



**Exemple 10.10** – Déterminer la loi de  $X$  dans les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. Pour déterminer la loi de la variable aléatoire  $X$ , je dois calculer les probabilités de tous les éléments du support. Alors en calculant le nombre d'issues favorables, j'obtiens que

$$P(X = -1) = \frac{2}{5}, \quad P(X = 1) = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad P(X = 3) = \frac{1}{5}.$$

Je résume cela dans le tableau suivant :

| $x$        | -1            | 1             | 3             |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| $P(X = x)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

2. De la même manière, je calcule les onze probabilités

$$P(X = 2) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}, \quad P(X = 3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36},$$

$$P(X = 4) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36}, \quad \text{etc.}$$

Finalement j'obtiens le tableau suivant :

| $x$        | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

**Remarque 10.11** – On n'oublie pas de vérifier à **chaque fois** que la somme des probabilités inscrites dans le tableau fait 1.

## 4 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire

**Définition 10.12** – Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ . On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire  $X$  et on note  $F_X$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Les valeurs prises par  $F_X$  sont des probabilités donc **toujours** comprises entre 0 et 1.

### Proposition 10.13

Soit  $X$  une variable aléatoire finie. On note le support  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1, \\ P(X = x_1) & \text{si } x_1 \leq x < x_2, \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) & \text{si } x_2 \leq x < x_3, \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_k) & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1}, \quad (\text{pour } 3 \leq k \leq n-1) \\ 1 & \text{si } x_n \leq x. \end{cases}$$

En particulier  $F_X$  est constante sur chaque intervalle  $[x_k, x_{k+1}[$ , c'est-à-dire entre deux valeurs consécutives du support.

**Exemple 10.14** – Calculer la fonction de répartition de  $X$  dans les deux exemples de l'Exemple 10.2.

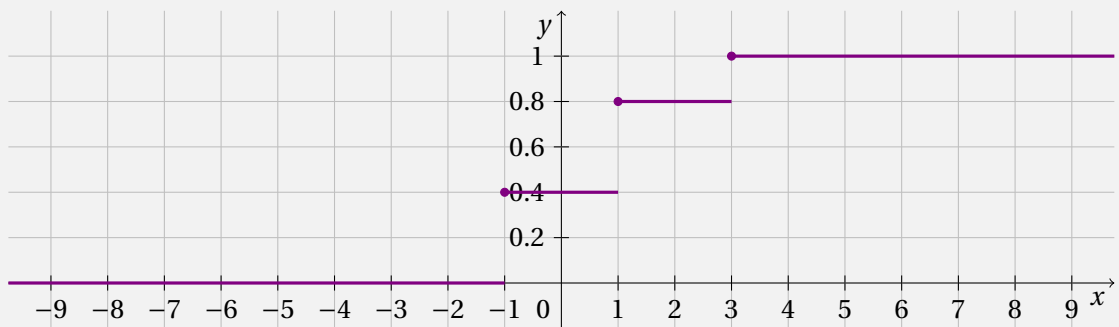
1. Je sais que le support vaut  $X(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ . Alors

- lorsque  $x < -1$ ,  $F_X(x) = 0$ ,
- lorsque  $-1 \leq x < 1$ ,  $F_X(x) = P(X = -1) = \frac{2}{5}$ ,
- lorsque  $1 \leq x < 3$ ,  $F_X(x) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ ,
- lorsque  $x \geq 3$ ,  $F_X(x) = 1$ .

Je résume ceci par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{2}{5} & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ \frac{4}{5} & \text{si } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Et voici le tracé de la fonction de répartition :



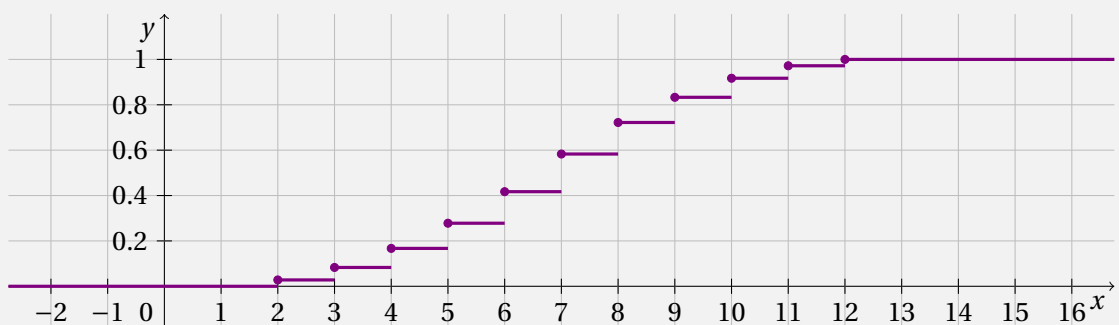
2. Je sais que le support vaut  $X(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$ . Alors

- lorsque  $x < 2$ ,  $F_X(x) = 0$ ,
- lorsque  $2 \leq x < 3$ ,  $F_X(x) = P(X = 2) = \frac{1}{36}$ ,
- lorsque  $3 \leq x < 4$ ,  $F_X(x) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$ ,
- lorsque  $4 \leq x < 5$ ,  $F_X(x) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$ ,
- etc.

Je résume ceci par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \frac{1}{36} & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ \frac{3}{36} & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ \text{etc.} & \\ \frac{35}{36} & \text{si } 11 \leq x < 12, \\ 1 & \text{si } x \geq 12. \end{cases}$$

Et voici le tracé de la fonction de répartition :



**Proposition 10.15**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  détermine parfaitement la loi de  $X$ . Autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

## II – Moments d'une variable aléatoire finie

### 1 – Espérance

**Définition 10.16** – Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$  dont le support est noté  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . La loi de  $X$  est donnée par le tableau suivant :

|              |       |       |         |       |
|--------------|-------|-------|---------|-------|
| $x_i$        | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

On appelle **espérance** de  $X$  le réel, noté  $E(X)$ , défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n.$$

**Remarque 10.17** –

- L'espérance  $E(X)$  correspond à la **moyenne** des valeurs  $x_i$  affectées des fréquences  $p_i$ .
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance  $E(X)$  est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois. Le signe de  $E(X)$  permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre. Si  $E(X) = 0$ , on dit que le jeu est **équitable**.

**Exemple 10.18** – Calculer l'espérance de  $X$  pour chacun des deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. En utilisant la loi donnée précédemment,  $E(X) = (-1) \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ .
2. En utilisant la loi donnée précédemment,

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + \dots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7.$$

**Proposition 10.19 – Linéarité de l'espérance**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires finies définies sur  $\Omega$  et  $a$  et  $b$  deux réels. Alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b.$$

**Exemple 10.20** – On lance un dé non truqué et on note  $X$  le numéro obtenu.

Soient  $g$  la fonction définie par  $g(x) = 2x + 3$  et  $Y = g(X) = 2X + 3$ . Déterminer l'espérance de  $Y$ .

Le support de  $X$  est donné par  $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$  et comme le dé est non truqué, il s'agit d'une situation d'équiprobabilité. Ainsi  $\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ ,  $P(X = k) = \frac{1}{6}$  et

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 k P(X = k) = \sum_{k=1}^6 k \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

J'en déduis par linéarité que

$$E(Y) = E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 2 \times \frac{7}{2} + 3 = 7 + 3 = 10.$$

**Théorème 10.21 – Théorème de transfert**

Soit  $X$  une variable aléatoire finie. On note le support  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Soit  $g$  une application de  $X(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors l'espérance de  $g(X)$  est donnée par

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^n g(x_i) P(X = x_i).$$

**Exemple 10.22** – On considère la fonction  $g(x) = x^2$ . Calculer  $E(g(X))$  pour chacun des deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. D'après le théorème de transfert et la loi de  $X$  calculée précédemment,

$$E(g(X)) = E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{2}{5} + 1^2 \times \frac{2}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} = \frac{2+2+9}{5} = \frac{13}{5}.$$

2. D'après le théorème de transfert et la loi de  $X$  calculée précédemment,

$$E(g(X)) = E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + \dots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}.$$

**Remarque 10.23** –

- Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de  $g(X)$ , il est inutile de déterminer la loi de  $g(X)$  : il suffit de connaître la loi de  $X$ .
- Ce théorème est principalement utilisé pour calculer  $E(X^2)$ , l'espérance du carré d'une variable aléatoire, quantité nécessaire au calcul de la variance de  $X$  en utilisant la formule de König-Huygens.

**2 – Variance**

**Définition 10.24** – Soit  $X$  une variable aléatoire finie.

- On appelle **variance** de  $X$  le réel, noté  $V(X)$ , défini par

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i).$$

- On appelle **écart-type** de  $X$  et on note  $\sigma(X)$  le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Remarque 10.25** – La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

**Théorème 10.26 – Formule de König-Huygens**

Soit  $X$  une variable aléatoire finie. Alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

**Méthode 10.27 – Calculer la variance d'une variable aléatoire**

1. On calcule  $E(X^2)$  grâce au théorème de transfert.
2. Puis on utilise la formule de König-Huygens :  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

**Exemple 10.28** – Calculer la variance  $V(X)$  pour les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. J'ai déjà calculé  $E(X^2)$  dans la partie précédente et trouvé que  $E(X^2) = \frac{13}{5}$ .

Par ailleurs  $E(X) = \frac{3}{5}$ , donc  $E(X)^2 = \frac{9}{25}$ . Alors d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{13}{5} - \frac{9}{25} = \frac{65}{25} - \frac{9}{25} = \frac{56}{25}.$$

2. J'ai déjà calculé  $E(X^2)$  dans la partie précédente et trouvé que  $E(X^2) = \frac{329}{6}$ .

Par ailleurs  $E(X) = 7$ , donc  $E(X)^2 = 49$ . Alors d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{329}{6} - \frac{294}{6} = \frac{35}{6}.$$

**Proposition 10.29**

Soient  $X$  une variable aléatoire finie et  $a$  et  $b$  deux réels. Alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

En particulier

$$V(X + b) = V(X).$$

**Remarque 10.30** – Contrairement à l'espérance, la variance n'est PAS linéaire.

**Exemple 10.31** – On lance un dé non truqué et on note  $X$  le numéro obtenu. Soit  $Y = 2X + 3$ . Calculer la variance de la variable aléatoire  $X$  puis celle de  $Y$ .

Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité et  $\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ ,  $P(X = k) = \frac{1}{6}$ .

J'ai déjà calculé l'espérance et trouvé que  $E(X) = \frac{7}{2}$ .

En appliquant le théorème de transfert, je trouve

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^6 k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^6 k^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} = \frac{91}{6}.$$

Alors d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}.$$

Enfin d'après la Proposition 10.29,

$$V(Y) = V(2X + 3) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}.$$

**Remarque 10.32** – Lorsqu'une variable aléatoire admet une espérance nulle, on parle de variable **centrée**. Si en plus, son écart-type vaut 1, alors on parle de variable **centrée réduite**.

## III – Lois usuelles

### 1 – Loi uniforme

**Définition 10.33** – Soit un couple d'entiers  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  avec  $a < b$ . Une variable aléatoire  $X$  suit une **loi uniforme** sur  $\llbracket a, b \rrbracket$  lorsque son support vaut  $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$  et que chaque valeur a la même probabilité d'arriver :

$$\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n},$$

avec  $n$  le nombre de valeurs dans l'intervalle  $\llbracket a, b \rrbracket$ , i.e.  $n = b - a + 1$ . On note  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ .

**Exemple 10.34** – Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non truqué et on note  $X$  le numéro obtenu.

Alors  $X$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ , i.e.  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ , car  $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$

$$\text{et pour tout } k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{6}.$$

2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et on note  $X$  le numéro obtenu.

Alors  $X$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , i.e.  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ , car  $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{et pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

#### Proposition 10.35

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Alors l'espérance et la variance de  $X$  sont données par

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

#### Proposition 10.36

Soient  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  avec  $a < b$  et  $X$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $\llbracket a, b \rrbracket$ .

Alors la variable aléatoire  $X - a + 1$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $\llbracket 1, b - a + 1 \rrbracket$  et l'espérance et la variance de  $X$  sont données par

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

où  $n = b - a + 1$  est le nombre de valeurs.

### 2 – Loi de Bernoulli

**Définition 10.37** – Une variable aléatoire  $X$  suit une **loi de Bernoulli** de paramètre  $p \in ]0, 1[$  lorsqu'il n'y a que deux issues possibles, i.e.  $X(\Omega) = \{0, 1\}$ , et que

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .



Une **épreuve** de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : l'une que l'on qualifie de "succès", de probabilité  $p$ , et l'autre que l'on qualifie d'"échec", de probabilité  $1 - p$ . On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un "succès", la variable aléatoire prend la valeur  $X = 1$ , sinon elle prend la valeur  $X = 0$ .

**Exemple 10.38** – On lance une pièce équilibrée et on note  $X$  la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est PILE et 0 sinon.

Alors  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{2}$ , i.e.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

### Proposition 10.39

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Alors l'espérance et la variance de  $X$  sont données par

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p).$$

**Remarque 10.40** – Lorsque  $p = 1$ , i.e. que le support est restreint à un unique élément, on parle alors de **loi certaine**. Les lois certaines sont caractérisées par une variance nulle.

## 3 – Loi binomiale

**Définition 10.41** – L'expérience aléatoire qui consiste à **répéter**  $n$  fois une **épreuve de Bernoulli** de paramètre  $p$ , à l'**identique** et de **manière indépendante**, est appelée un **schéma de Bernoulli** de paramètres  $n$  et  $p$ .

La variable aléatoire  $X$  égale au nombre de succès obtenus au cours des  $n$  épreuves de ce schéma de Bernoulli suit une **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$ . On note  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

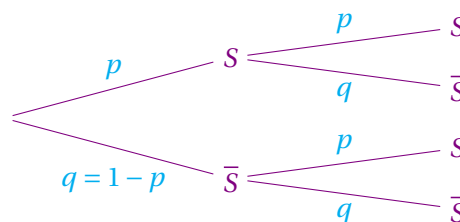
**Exemple 10.42** – On lance dix fois de suite une pièce équilibrée et on note  $X$  le nombre de PILE obtenus.

Alors  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = \frac{1}{2}$ , i.e.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$ .

Dans les cas où  $n = 2$  ou  $n = 3$ , on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.

#### 1. Cas $n = 2$

On répète deux épreuves de Bernoulli de paramètre  $p$ , successivement et de manière indépendante.



La variable aléatoire  $X$ , égale au nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres  $n = 2$  et  $p$ .

| Nombre de succès $k$ | 0     | 1                     | 2     |
|----------------------|-------|-----------------------|-------|
| $P(X = k)$           | $q^2$ | $2 \times p \times q$ | $p^2$ |

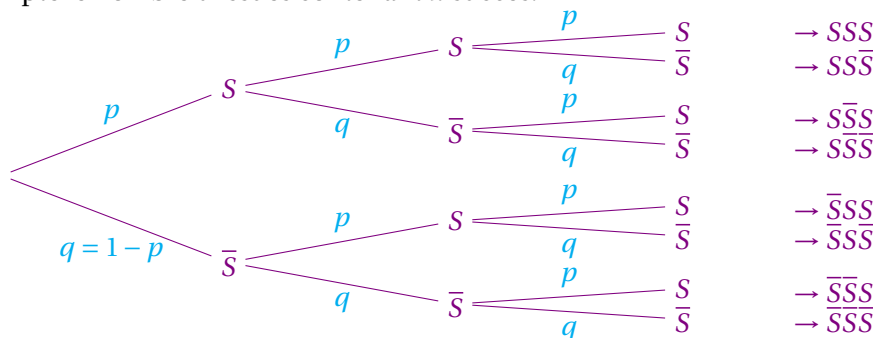
#### 2. Cas $n = 3$

On répète trois épreuves de Bernoulli de paramètre  $p$ , successivement et de façon indépendante.

L'expérience comporte  $2^3 = 8$  issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{SSS, SSS, S\bar{S}\bar{S}, \bar{S}SS, S\bar{S}\bar{S}, \bar{S}S\bar{S}, \bar{S}\bar{S}S, \bar{S}\bar{S}\bar{S}\}.$$

Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ , égale au nombre de succès, on dresse un arbre et on compte le nombre d'issues contenant  $k$  succès.



La variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p$ .

| Nombre de succès $k$ | 0     | 1                       | 2                       | 3     |
|----------------------|-------|-------------------------|-------------------------|-------|
| $P(X = k)$           | $q^3$ | $3 \times p \times q^2$ | $3 \times p^2 \times q$ | $p^3$ |

**Définition 10.43** – Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq n$ .

Si on représente par un arbre une série de  $n$  épreuves de Bernoulli, le coefficient binomial, noté  $\binom{n}{k}$ , est le nombre de chemins réalisant  $k$  succès parmi  $n$  épreuves répétées.

**Remarque 10.44** –

- Un seul chemin permet d'obtenir 0 succès ou  $n$  succès consécutifs, donc  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .
- Il y a  $n$  chemins différents qui permettent d'obtenir un seul succès. Ainsi  $\binom{n}{1} = n$ .

**Proposition 10.45**

Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

**Corollaire 10.46**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les trois valeurs principales à retenir pour les coefficients binomiaux sont les suivantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pour les coefficients suivants, il suffit de rajouter des facteurs au numérateur (en retirant 1 à chaque fois au précédent) et au dénominateur (en ajoutant 1 à chaque fois au précédent).

**Proposition 10.47**

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

- Relation de symétrie des coefficients :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

- Formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

**Remarque 10.48** – La formule du triangle de Pascal permet de déterminer les coefficients binomiaux de proche en proche.

**Exemple 10.49** – Calculer les coefficients binomiaux suivants.

$$\bullet \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

$$\bullet \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$\bullet \binom{11}{1} = 11$$

$$\bullet \binom{3}{0} = 1$$

### Proposition 10.50

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  de paramètres  $n$  et  $p$ . Alors le support de  $X$  vaut  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , la probabilité d'obtenir  $k$  succès est donnée par

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

### Proposition 10.51

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ . Alors l'espérance et la variance de  $X$  sont données par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

**Exemple 10.52** – Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients choisissent l'option *Livraison Express*. On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons.

On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de bons portant la mention *Livraison Express*.

1. Déterminer la loi de  $X$  en justifiant soigneusement.

$X$  compte le nombre de réalisations de l'événement succès "le bon de commande comprend la mention *Livraison Express*" de probabilité 0.4 lors de la répétition de 30 expériences identiques et indépendantes. Donc  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 30$  et  $p = 0.4$ .

2. Calculer l'espérance  $E(X)$  et interpréter le résultat.

Puisque  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 30$  et  $p = 0.4$ , alors

$$E(X) = n \times p = 30 \times 0.4 = 12.$$

Cela signifie que sur un grand nombre de prélèvements de 30 bons se trouvent en moyenne 12 bons de commande avec la mention *Livraison Express*.

## 4 – Formule du binôme de Newton

### Théorème 10.53 – Formule du binôme de Newton

Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $\mathbb{R}$  et  $n$  un entier de  $\mathbb{N}$ . Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Exemple 10.54** – Développer  $(2+x)^3$  à l'aide du binôme de Newton.

$$(2+x)^3 = 1 \times 2^0 \times x^3 + 3 \times 2 \times x^2 + 3 \times 2^2 \times x + 1 \times 2^3 \times x^0 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$