ESCP 2021

Exercice 1 –

1. (a) Je calcule J^2.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2J.$$

J'ai bien montré que

$$J^3 = 2J.$$

(b) Comme $J^3 = 2J$, en notant O la matrice nulle d'ordre 3, j'ai que $J^3 - 2J = O$. Ainsi le polynôme $X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice J. Les valeurs propres possibles pour J sont donc parmi les racines de ce polynôme annulateur. Or

$$X^3 - 2X = 0 \iff X\left(X^2 - 2\right) = 0 \iff X\left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right) = 0.$$

Il s'agit d'une équation produit-nul, donc l'un des facteurs au moins doit être nul, *i.e.*

$$X = 0 \quad \text{ou} \quad X - \sqrt{2} = 0 \quad \text{ou} \quad X + \sqrt{2} = 0$$

$$\iff \quad X = 0 \quad \text{ou} \quad X = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad X = -\sqrt{2}.$$

Les valeurs propres possibles pour J sont donc $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

(c) On a

$$J \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non-nul solution de $JX = -\sqrt{2}X$, alors c'est un vecteur propre de J, associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

On a

$$J \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non-nul solution de $JX = 0X$, alors c'est un vecteur propre de J, associé à la valeur propre 0.

On a

$$J \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non-nul solution de $JX = \sqrt{2}X$, alors c'est un vecteur propre de J, associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.
Ainsi les trois colonnes de P sont bien des vecteurs propres de J.

(d) D_1 est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de la matrice J et P est la juxtaposition des 3 vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Donc, comme les trois valeurs propres de J sont distinctes, je peux en déduire que la matrice J est diagonalisable, *i.e.* que le matrice P est inversible et que $J = PD_1P^{-1}$.
En particulier, après multiplication à droite par P, on obtient

$$JP = PD_1.$$

J'ai bien montré que

$$JP = PD_1 \text{ et que } J \text{ est diagonalisable.}$$

(e) On a vu à la question précédente que $J = PD_1P^{-1}$ et $JP = PD_1$. Alors

$$J^2P = J \times JP = PD_1P^{-1} \times PD_1 = PD_1ID_1 = PD_1D_1 = PD_1^2.$$

J'ai bien montré que

$$J^2P = PD_1^2.$$

2. (a) Je calcule $J^2 - I$ pour retrouver K. J'ai déjà calculé J^2 précédemment.

$$J^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K.$$

J'ai bien montré que

$$K = J^2 - I.$$

(b) Je calcule $aI + bJ + cK$ pour a, b et c trois réels et je cherche à retrouver A.

$$aI + bJ + cK = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Pour retrouver $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, il me suffit de prendre $a = c = 1$ et $b = 2$.
J'ai montré que

$$A = I + 2J + K.$$

(c) J'ai montré aux deux questions précédentes que $A = I + 2J + K$ et $K = J^2 - I$. Alors en combinant ces deux équations, j'obtiens

$$A = I + 2J + J^2 - I = 2J + J^2.$$

En outre, je sais déjà que $JP = PD_1$ et que $J^2P = PD_1^2$. Alors

$$AP = \left(2J + J^2\right)P = 2JP + J^2P = 2PD_1 + PD_1^2 = P\left(2D_1 + D_1^2\right).$$

Les matrices D_1 et D_1^2 sont des matrices diagonales, donc la matrice $D_2 = 2D_1 + D_1^2$ est aussi diagonale, et

$$D_2 = 2D_1 + D_1^2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(-\sqrt{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\sqrt{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

J'ai montré que

$$AP = PD_2, \qquad \text{pour } D_2 = \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. (a) Voici le script complété.

```
n=input('entrez une valeur pour n:')
A=[1 2 1;2 2 2;1 2 1]
B=A∧n
disp(B)
```

(b) Je remarque que seul le coefficient central diffère entre les deux propositions. Or, comme $A^5 = A^3 \times A^2$, je sais que le coefficient central de A^5 vaut $40 \times 8 + 56 \times 12 + 40 \times 8$. Sans calcul, je sais que le chiffre des unités de ce nombre est 2 car 40×8 est un multiple de 10 et que $6 \times 2 = 12$. J'en déduis donc que la bonne valeur pour A^5 est B_1.

Exercice 2 –

1. (a) Comme la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle de paramètre λ, je sais que sa densité est donnée par la fonction

$$f_Z(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi je déduis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(b) Comme la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle de paramètre λ, je sais que

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(c) Je remarque tout d'abord que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)\,\mathrm{d}x = E(Z)$ puis aussi que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\,\mathrm{d}x = E\left(Z^2\right)$. D'après la formule de König-Huygens, je sais que $V(Z) = E\left(Z^2\right) - E(Z)^2$. Donc $E\left(Z^2\right) = V(Z) + E(Z)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} + \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{2}{\lambda^2}$.
En regroupant tous mes résultats, j'ai montré que

$$\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}.$$

2. (a) Par définition, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si la limite $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie. Or, pour tout $A \geqslant 0$, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 pxe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= (1-p)\times\int_0^A \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \lambda p\times\int_0^A \lambda xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, d'après les questions précédentes, les deux intégrales $\int_0^A \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^A \lambda xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ admettent une limite lorsque A tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= (1-p)\times\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \lambda p\times\int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= (1-p)\times 1 + \lambda p\times\frac{1}{\lambda} = 1-p+p = 1.\end{aligned}$$

J'ai montré que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

(b) La fonction f est définie en deux morceaux. Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, $f(x)=0$ donc la fonction f est continue car constante. Sur $[0,+\infty[$, $f(x)=\lambda(1-p)e^{-\lambda x}+\lambda^2 pxe^{-\lambda x}$ donc la fonction f est continue comme somme de fonctions continues. Finalement, la fonction f est continue par morceaux, avec un unique point de discontinuité en $x=0$.

Aussi, sur l'intervalle $]-\infty,0[$, $f(x)=0\geqslant 0$ donc la fonction f est positive. Et sur $[0,+\infty[$, $f(x)=\lambda(1-p)e^{-\lambda x}+\lambda^2 pxe^{-\lambda x}\geqslant 0$ car toutes les valeurs impliquées sont positives : les exponentielles, λ, p et $1-p$. Donc la fonction f est positive sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Enfin il me reste à montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. Je décompose, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je sais que $\int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0 car la fonction dans l'intégrale est nulle.
Et $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1 par la question précédente.
En résumé, la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, positive sur $\mathbf{R}$ et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0+1 = 1,$$

donc je peux en conclure que f est une densité de probabilité.

(c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Or, sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} x\times 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x\times f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{0}^{+\infty} \lambda(1-p)xe^{-\lambda x} + \lambda^2 p x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\\
&= (1-p)\times\int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \lambda p\times\int_{0}^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Et comme les deux intégrales impliquées convergent (on a trouvé leurs valeurs plus tôt dans l'exercice), j'en déduis que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc que la variable aléatoire X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= (1-p)\times\int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \lambda p\times\int_{0}^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\\
&= (1-p)\times\frac{1}{\lambda} + \lambda p\times\frac{2}{\lambda^2} = \frac{1-p}{\lambda} + \frac{2p}{\lambda} = \frac{1+p}{\lambda}.
\end{aligned}$$

L'espérance de Z vaut $\dfrac{1+p}{\lambda}$.

3. (a) Soit $x \geqslant 0$. Je cherche à calculer $\displaystyle\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. Je pose $u(t)=t$ et $v'(x)=e^{-\lambda t}$.

Alors $u'(x)=1$ et $v(x) = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$, puis par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\
\iff\quad &\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x 1\times\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\mathrm{d}t\\
&\qquad = -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{0}{\lambda}e^{-\lambda\times 0} + \int_0^x \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\\
&\qquad = -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\right]_0^x\\
&\qquad = -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda\times 0}\\
&\qquad = -\left(\frac{\lambda x}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}\\
&\qquad = -\frac{1+\lambda x}{\lambda^2}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}\\
&\qquad = \frac{1}{\lambda^2}\Big(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x}\Big).
\end{aligned}$$

J'ai bien montré que $\forall x \geqslant 0$,

$$\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}\Big(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x}\Big).$$

(b) La fonction de répartition F de X est donnée par $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Je raisonne par disjonction de cas :

si $x<0$, $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t=0$,
si $x\geqslant 0$, $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Or

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \lambda(1-p)e^{-\lambda t}+\lambda^2 p t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda(1-p)\times\int_0^x e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t+\lambda^2 p\times\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda(1-p)\times\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x+\lambda^2 p\times\frac{1}{\lambda^2}\left(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x}\right) \\
&= \lambda(1-p)\times\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\times 0}\right)+p\times\left(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x}\right) \\
&= (1-p)\times\left(1-e^{-\lambda x}\right)+p\times\left(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x}\right) \\
&= (1-p)-(1-p)e^{-\lambda x}+p-(p+\lambda p x)e^{-\lambda x} \\
&= 1-(1+\lambda p x)e^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$

J'ai montré que pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0, \\ 1-(1+\lambda p x)e^{-\lambda x} & \text{si } x\geqslant 0. \end{cases}$$

Exercice 3 –

1. (a) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0^+$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=0^+$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+$, par produit, on a aussi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}}=0^+.$$

Comme la limite à droite de f en 0 est égale à $f(0)$, je peux conclure que la fonction f est contiue à droite en 0.

(b) On a $\dfrac{f(x)}{x}=e^{-\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=0^+$ d'après la question précédente. Donc

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0^+.$$

Or on peut remarquer que comme $f(0)=0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est le taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et x. Alors comme sa limite lorsque x tend vers 0^+ vaut 0, en particulier la limite est finie, donc la fonction f est dérivable à droite en 0 et

$$f'_d(0)=0.$$

2. (a) La fonction f est de la forme $f=u\times v$, avec $u(x)=x$ et $v(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.
Alors $u'(x)=1$ et pour v', je remarque que v est de la forme $v=e^w$, avec $w(x)=-\dfrac{1}{x}$.

Alors $w'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.
Ainsi
$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}} + x \times \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$
J'ai montré que
$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

(b) Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x} \geqslant 0$ et $1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 1 > 0$. Comme une exponentielle est toujours strictement positive, j'en déduis que
$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad f'(x) > 0.$$
Je conclus alors directement que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.

(c) Je cherche la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0^-$ et $\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit, on a aussi
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$$
Je peux ainsi dresser le tableau de variation de f :

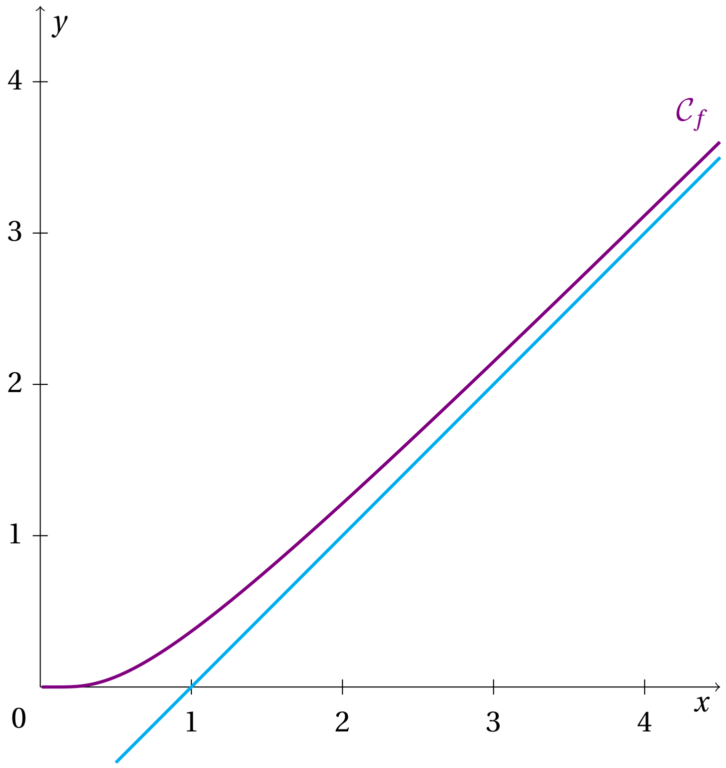
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

(d) Je cherche la dérivée seconde de f, *i.e.* la dérivée de f'.
La fonction f' est de la forme $f' = u \times v$, avec $u(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.
Alors $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$. Et
$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -\frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}.$$
J'ai bien montré que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,
$$f''(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}.$$
Comme pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x^3} > 0$ et $e^{-\frac{1}{x}} > 0$, j'en déduis que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad f''(x) > 0$.
Donc f est convexe sur $\mathbf{R}_+$.

3. (a) Je reconnais la limite du taux d'accroissement $\dfrac{e^{-u} - e^{-0}}{u - 0}$. Lorsque u tend vers 0^+, ce taux d'accroissement tend vers le nombre dérivé à droite de la fonction $u \mapsto e^{-u}$ en 0. Comme sa dérivée est $u \mapsto -e^{-u}$, on obtient que
$$\lim_{u\to0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} = -e^{-0} = -1.$$

(b) On a $f(x)-(x-1)=xe^{-\frac{1}{x}}-(x-1)=xe^{-\frac{1}{x}}-x+1$. Comme je veux utiliser le résultat de la question précédente, je pose $u=\dfrac{1}{x}$ afin d'obtenir e^{-u}. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0^+$.
Et
$$\frac{e^{-u}-1}{u}=\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=xe^{-\frac{1}{x}}-x=f(x)-(x-1)-1.$$
Ainsi, on peut conclure que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{u\to0^+}\frac{e^{-u}-1}{u}+1=-1+1=0.$$

(c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$, graphiquement, la courbe représentative de la fonction f se rapprochera infiniment près de la droite d'équation $y=x-1$: cette droite est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.
Voici l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$:



4. (a) Notons P_n la propriété $u_n>0$.

Initialisation : Pour $n=0$,
$$u_0=1 \quad \text{et} \quad 1>0.$$
Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.
$$u_{n+1}=f(u_n)>f(0)=0, \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante.}$$
Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\geqslant 0$, *i.e.*
$$\forall n\in\mathbf{N}, \quad u_n>0.$$

(b) Pour trouver le sens de varition de la suite (u_n), je cherche le signe de l'expression $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, pour $n \in \mathbf{N}$.

$$f(u_n) - u_n = u_n e^{-\frac{1}{u_n}} - u_n = u_n \left(e^{-\frac{1}{u_n}} - 1\right).$$

Je sais que le premier facteur u_n est positif. Et comme $u_n > 0$, $-\dfrac{1}{u_n} < 0$ et $e^{-\frac{1}{u_n}} < e^0 = 1$. Donc le second facteur $\left(e^{-\frac{1}{u_n}} - 1\right)$ est lui négatif. Ainsi on a

$$f(u_n) - u_n \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

J'ai bien montré que la suite (u_n) est décroissante.

(c) La suite (u_n) est décroissante donc monotone et minorée par 0 puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par le théorème de convergence monotone, j'en déduis que la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.
En passant à la limite dans la formule $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que $f(\ell) = \ell$, *i.e.*

$$0 = f(\ell) - \ell = \ell\left(e^{-\frac{1}{\ell}} - 1\right).$$

Il s'agit d'une équation produit-nul, donc l'un des deux facteurs doit être nul.
Or $e^{-\frac{1}{\ell}} - 1 = 0 \iff e^{-\frac{1}{\ell}} = 1 = e^0 \iff -\dfrac{1}{\ell} = 0$, ce qui est impossible.
Donc nécessairement, $\ell = 0$.
J'ai montré que la limite de la suite (u_n) est 0.

(d) Voici le script complété.

```
n=0
u=1
while u>0.001
  u=u*exp(-1/u)
  n=n+1
end
disp(n)
```

5. (a) Notons P_n la propriété $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1})$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad -\ln(u_1) = -\ln\left(1 \times e^{-\frac{1}{1}}\right) = -\ln\left(e^{-1}\right) = -(-1) = 1.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{n+1}} = -\ln(u_{n+1}) + \frac{1}{u_{n+1}}$$

et

$$\begin{aligned} -\ln(u_{n+2}) &= -\ln\left(u_{n+1} \times e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}\right) = -\ln(u_{n+1}) - \ln\left(e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}\right) \\ &= -\ln(u_{n+1}) - \left(-\frac{1}{u_{n+1}}\right) = -\ln(u_{n+1}) + \frac{1}{u_{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc
$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+2}).$$
Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1}).$$

(b) La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$.

Pour connaître sa nature, il faut regarder la limite de la suite des sommes partielles. Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1}).$$
Alors
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \lim_{n\to+\infty} -\ln(u_{n+1}) = +\infty,$$
puisque $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0^+$ et que $\lim_{X\to 0^+} -\ln(X) = +\infty$.

J'ai donc montré que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 –

1. (a) Je commence par calculer $P(X_1 = 2)$. L'évènement $[X_1 = 2]$ correspond à une situation où il y a deux boules noires dans l'urne U_1. Cela implique forcément que j'ai tiré deux boules noires dans l'urne U_0. Alors, comme j'ai deux boules noires parmi quatre boules au premier tirage, puis une boule noire parmi trois boules au second, la probabilité de cet évènement est
$$P(X_1 = 2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
Pour l'évènement $[X_1 = 0]$, il s'agit de la situation où il n'y a pas de boule noire dans l'urne U_1. Cela implique forcément que j'ai tiré deux boules blanches dans l'urne U_0. Alors, comme j'ai deux boules blanches parmi quatre boules au premier tirage, puis une boule blanche parmi trois boules au second, la probabilité de cet évènement est
$$P(X_1 = 0) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
Comme 0, 1 et 2 sont les trois seules valeurs possibles pour la variable aléatoire X_1, j'en déduis que
$$P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$
J'ai bien montré que
$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 2) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}.$$

(b) Je calcule l'espérance de X_1.

$$E(X_1) = 0 \times P(X_1 = 0) + 1 \times P(X_1 = 1) + 2 \times P(X_1 = 2) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

L'espérance de X_1 vaut $\frac{4}{3}$.

2. L'évènement $[X_n = 2]$ correspond à une situation où il y a deux boules noires dans l'urne U_n. Cela implique forcément que j'ai tiré deux boules noires dans chacune des précédentes urnes $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}$. Alors

$$[X_n = 2] = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}.$$

Mais à chaque étape du protocole, il s'agit de tirer deux boules noires dans une urne composée de deux boules blanches et deux boules noires, similaire à l'urne U_0. Il s'agit alors de n répétitions indépendantes de ce tirage, dont la probabilité de succès est $P(X_1 = 2) = \frac{1}{6}$ d'après la question précédente. On en déduit alors que

$$P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

3. (a) D'après la formule des probabilités totales, comme $\{[X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\}$ forme un système complet d'évènements, je sais que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) \times P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1) \times P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) \\ + P(X_n = 2) \times P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1). \end{aligned}$$

Or $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = 0$ car il s'agit de piocher une boule noire dans une urne n'en contenant pas.

Et $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ car il s'agit de piocher l'unique boule noire ou bien au premier tirage (une chance sur quatre) ou bien au second, après un premier échec, (une chance sur trois).

Enfin $P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ car il s'agit de piocher une des deux boules noires au premier tirage (deux chances sur quatre) puis une boule blanche (deux chances sur trois), ou inversement.

Donc

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) \times 0 + P(X_n = 1) \times \frac{1}{2} + P(X_n = 2) \times \frac{2}{3}.$$

J'ai bien montré que

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{2}{3} P(X_n = 2).$$

(b) Notons P_n la propriété $P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^1 = 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Donc la propriété P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{2}{3}P(X_n=2) = \frac{1}{2}\times\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\times\frac{1}{6} \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_1 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad P(X_n=1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

(c) Comme $\{[X_n=0],[X_n=1],[X_n=2]\}$ forme un système complet d'évènements, je sais que

$$\begin{aligned}
P(X_n=0) &= 1-P(X_n=1)-P(X_n=2) = 1-\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)-\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= 1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n = 1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n.
\end{aligned}$$

J'ai montré que

$$P(X_n=0) = 1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Je calcule l'espérance de X_n.

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= 0\times P(X_n=0)+1\times P(X_n=1)+2\times P(X_n=2) \\
&= 0\times\left(1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^n + 1\times\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)+2\times\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

L'espérance de X_n vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Il s'agit d'une suite géométrique, de raison $\frac{1}{2} \in \,]0,1[$, donc qui converge vers 0.

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = 0,$$

ce qui signifie qu'en répétant infiniment ce protocole, le nombre de boules noires présentes dans l'urne deviendra nul.