

2 Familles de variables aléatoires

Dans tout ce chapitre Ω désigne un univers fini. Ainsi, les variables aléatoires réelles considérées ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

I – Couples de variables aléatoires finies

1 – Loi d'un couple de variables aléatoires

Définition 2.1 – On appelle **couple de variables aléatoires**, tout couple (X, Y) où X et Y désignent deux variables aléatoires définies sur un même espace.

Exemple 2.2 –

1. On lance deux d  s équilibrés à 6 faces (l'un est bleu, l'autre blanc). On appelle X (respectivement Y) le numéro obtenu avec le dé bleu (respectivement blanc). Comme X et Y sont des variables aléatoires, alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires.
2. On lance les mêmes dès que dans l'exemple précédent. Cette fois, on appelle X le plus petit des deux numéros obtenus et Y le plus grand numéro obtenu (si les numéros sont égaux, X et Y prennent la valeur commune). Comme X et Y sont des variables aléatoires, alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires.

Définition 2.3 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On appelle **loi conjointe** du couple (X, Y) la donnée des probabilités $P([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Méthode 2.4 – Déterminer la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires

- On donne les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ des valeurs prises par X et Y .
- On calcule toutes les probabilités $P([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

On résume souvent les résultats sous la forme d'un tableau.

Exemple 2.5 – Donner la loi conjointe des couples (X, Y) pour les deux exemples ci-dessus.

1. Pour tous k et l appartenant à $\llbracket 1; 6 \rrbracket$, on a $P([X = k] \cap [Y = l]) = \frac{1}{36}$.

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
$Y = 1$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$Y = 2$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$Y = 3$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$Y = 4$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$Y = 5$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$Y = 6$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. Tout d'abord, il est clair que X ne peut être plus grand que Y . Ainsi, si $k > l$, alors $P([X = k] \cap [Y = l]) = 0$.

Par ailleurs, notons A le résultat du dé bleu et B le résultat du dé blanc. Pour $k < l$, on a :

$$P([X = k] \cap [Y = l]) = P([A = k] \cap [B = l]) + P([A = l] \cap [B = k]) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Enfin, si $k = l$, alors $P([X = k] \cap [Y = l]) = \frac{1}{36}$. On en déduit le tableau de la loi conjointe.

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
$Y = 1$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
$Y = 2$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
$Y = 3$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
$Y = 4$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0
$Y = 5$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0
$Y = 6$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Remarque 2.6 –

- On abrège souvent "loi conjointe du couple" en "loi du couple".
- On note parfois $P([X = x], [Y = y])$ au lieu de $P([X = x] \cap [Y = y])$, ou plus simplement $P(X = x, Y = y)$.

2 – Lois marginales

Définition 2.7 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. La loi de X est appelée **première loi marginale** du couple, et celle de Y est appelée **deuxième loi marginale** du couple.

Proposition 2.8

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . On a les résultats suivants.

- Pour tout réel $x \in X(\Omega)$, on a

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

- Pour tout réel $y \in Y(\Omega)$, on a

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$



Méthode 2.9 – Déterminer les lois marginales avec la loi du couple

Une fois que l'on a déterminé la loi du couple, on peut déterminer les lois marginales. La loi de X s'écrit par exemple

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

Lorsque la loi d'un couple (X, Y) est donnée sous la forme d'un tableau à double entrée, on obtient les lois de X et de Y en sommant les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne, selon les cas.

Exemple 2.10 – Déterminer les lois marginales des variables aléatoires X et Y pour les deux exemples ci-dessus.

1. Pour obtenir la loi de X , on fait la somme de chacune des colonnes. On obtient

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Pour obtenir la loi de Y , on fait la somme de chacune des lignes. On obtient

y_i	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Pour obtenir la loi de X , on fait la somme de chacune des colonnes. On obtient

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{6}$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

Pour obtenir la loi de Y , on fait la somme de chacune des lignes. On obtient

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(Y = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

Remarque 2.11 – On ne peut en revanche pas obtenir, en général, la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des lois de X et Y .

3 – Lois conditionnelles

Définition 2.12 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.

Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, on appelle loi de X **conditionnellement à l'évènement** $[Y = y]$ la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$, de

$$P_{[Y=y]}([X = x]) = \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P(Y = y)}.$$

Remarque 2.13 –

- On dit aussi "loi conditionnelle de X sachant que $[Y = y]$ est réalisé", ou plus simplement "loi de X sachant $[Y = y]$ ".
- On définit de manière similaire la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.

Exemple 2.14 – Dans les deux exemples ci-dessus, on a $P(Y = 1) \neq 0$. Déterminer alors la loi conditionnelle de X sachant $[Y = 1]$ dans les deux cas.

1. On a vu que $P(Y = 1) = \frac{1}{6}$ et que pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, $P([X = k] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{36}$. On a donc, pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$,

$$P_{[Y=1]}([X = k]) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{6},$$

ce que l'on peut résumer par le tableau suivant.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_{[Y=1]}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. On a vu que $P(Y = 1) = \frac{1}{36}$ et que pour tout $k \in \llbracket 2; 6 \rrbracket$, $P([X = k] \cap [Y = 1]) = 0$. On a donc, pour tout $k \in \llbracket 2; 6 \rrbracket$,

$$P_{[Y=1]}([X = k]) = \frac{0}{\frac{1}{36}} = 0.$$

Par ailleurs, $P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{36}$ donc

$$P_{[Y=1]}([X = 1]) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{36}} = 1.$$

Tout ceci se résume par le tableau suivant.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_{[Y=1]}(X = x_i)$	1	0	0	0	0	0

Proposition 2.15 – Loi marginale et loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Si l'on connaît la loi marginale de Y , ainsi que la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$, alors la loi de X est déterminé par

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y) P_{[Y=y]}(X = x).$$

Exemple 2.16 – On a calculé la loi conditionnelle de X sachant $[Y = 1]$. Si on calculait les lois conditionnelles de X sachant $[Y = 2]$, $[Y = 3]$, etc., dans les deux exemples précédents, alors on pourrait retrouver la loi marginale de X grâce à la proposition ci-dessus.

4 – Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 2.17 – On dit que deux variables aléatoires finies X et Y sont **indépendantes** lorsque

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Remarque 2.18 – Ainsi, **dans le cas de deux variables aléatoires indépendantes**, on peut déterminer la loi du couple (X, Y) à partir des lois de X et de Y .

Exemple 2.19 – Tester l'indépendance des variables aléatoires X et Y pour les exemples précédents.

1. Au vu du tableau de la loi conjointe et des tableaux des lois marginales, il est clair que l'on a pour tout k et l appartenant à $\llbracket 1; 6 \rrbracket$,

$$P([X = k] \cap [Y = l]) = P([X = k]) \times P([Y = l]).$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

2. On a

$$P([X = 2] \cap [Y = 1]) = 0$$

mais

$$P([X = 2]) = \frac{9}{36} \quad \text{et} \quad P([Y = 1]) = \frac{1}{36}.$$

Donc

$$P([X = 2] \cap [Y = 1]) \neq P([X = 2]) \times P([Y = 1]),$$

ce qui montre que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition 2.20

Si l'une des deux variables aléatoires X ou Y est constante, alors X et Y sont indépendantes.

II – Espérance

1 – Espérance d'une somme

Proposition 2.21

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . On a l'égalité

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Exemple 2.22 – Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 9 \rrbracket$ et Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(8, \frac{1}{4}\right)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Puisque X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 9 \rrbracket$, on a $E(X) = \frac{9+1}{2} = 5$. Par ailleurs, puisque Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(8, \frac{1}{4}\right)$, on a $E(Y) = 8 \times \frac{1}{4} = 2$. Ainsi,

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 5 + 2 = 7.$$

Proposition 2.23 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω et a et b deux réels. On a l'égalité

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Exemple 2.24 – Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 12 \rrbracket$ et Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(7, \frac{1}{3}\right)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Z = 2X - Y$.

On a $E(X) = \frac{12+1}{2} = \frac{13}{2}$ et $E(Y) = 7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Ainsi,

$$E(Z) = 2E(X) - E(Y) = 2 \times \frac{13}{2} - \frac{7}{3} = 13 - \frac{7}{3} = \frac{39}{3} - \frac{7}{3} = \frac{32}{3}.$$

2– Espérance d'un produit

Proposition 2.25

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . On a l'égalité

$$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y).$$

Exemple 2.26 –

- Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs d'une boule, avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus grand des deux numéros obtenus. Compléter les tableaux suivants, donnant les lois des couples (X_1, X_2) et (X_1, Y) .

	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$	$X_2 = 4$		$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$
$X_1 = 1$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$X_1 = 1$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X_1 = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$X_1 = 2$	0	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X_1 = 3$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$X_1 = 3$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X_1 = 4$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$X_1 = 4$	0	0	0	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

En déduire $E(X_1 X_2)$ et $E(X_1 Y)$.

$$\begin{aligned}
 E(X_1 X_2) &= 1 \times 1 \times \frac{1}{16} + 1 \times 2 \times \frac{1}{16} + \dots + 4 \times 4 \times \frac{1}{16} \\
 &= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 2 + 4 + 6 + 8 + 3 + 6 + 9 + 12 + 4 + 8 + 12 + 16}{16} \\
 &= \frac{100}{16} = \frac{25}{4}. \\
 E(X_1 Y) &= 1 \times 1 \times \frac{1}{16} + 1 \times 2 \times \frac{1}{16} + \dots + 4 \times 4 \times \frac{4}{16} \\
 &= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 6 + 8 + 27 + 12 + 64}{16} \\
 &= \frac{135}{16}.
 \end{aligned}$$

- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires finies tel que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; 2 \rrbracket^2, \quad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{i}{4} & \text{si } i = j \\ \frac{1}{4} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Calculer $E(XY)$.

Récapitulons la loi de (X, Y) dans un tableau.

	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$X = 2$	0	$\frac{1}{2}$

On a donc

$$E(XY) = 1 \times 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times 1 \times 0 + 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1+2+8}{4} = \frac{11}{4}.$$

Proposition 2.27

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**. On a l'égalité

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Exemple 2.28 – On reprend l'exemple ci-dessus : un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs d'une boule, avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer les lois marginales de X_1 , X_2 et Y .

Grâce aux tableaux des lois conjointes de (X_1, X_2) et de (X_1, Y) , on obtient les tableaux des lois marginales de X_1 , X_2 et Y .

x_i	1	2	3	4
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

x_i	1	2	3	4
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

y_i	1	2	3	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

2. En déduire les valeurs de $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(Y)$.

On a donc

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

$$E(X_2) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{7}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}.$$

3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes? Et les variables X_1 et Y ?

Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes. En effet, on peut facilement vérifier que pour tout k et l dans $\llbracket 1; 4 \rrbracket$, on a

$$P([X_1 = k] \cap [X_2 = l]) = P([X_1 = k]) \times P([X_2 = l]).$$

Par ailleurs, on a vu que

$$E(X_1 Y) = \frac{135}{16} \neq E(X_1) \times E(Y) = \frac{5}{2} \times \frac{25}{8} = \frac{125}{16}.$$

Donc les variables X_1 et Y ne sont pas indépendantes.



ATTENTION! L'égalité $E(XY) = E(X)E(Y)$ peut être vérifiée sans que les variables aléatoires X et Y ne soient indépendantes.

III – Covariance, corrélation linéaire

1 – Covariance de deux variables aléatoires

Définition 2.29 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On appelle **covariance de X et Y** , le réel, noté $\text{Cov}(X, Y)$, défini par

$$\text{Cov}(XY) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Théorème 2.30 – Formule de Huygens

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On a

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Démonstration. On développe le produit à l'intérieur de l'espérance.

$$\begin{aligned} E((X - E(X))(Y - E(Y))) &= E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

□



Méthode 2.31 – Calculer directement une covariance

Pour calculer la covariance de deux variables aléatoires X et Y ,

1. on calcule $E(XY)$, $E(X)$ et $E(Y)$,
2. on applique la formule de Huygens.

Exemple 2.32 – On reprend les deux exemples de l'exemple 2.26.

1. Calculer $\text{Cov}(X_1, X_2)$ et $\text{Cov}(X_1, Y)$.

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{25}{4} - \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = 0.$$

$$\text{Cov}(X_1, Y) = E(X_1 Y) - E(X_1)E(Y) = \frac{135}{16} - \frac{5}{2} \times \frac{25}{8} = \frac{135}{16} - \frac{125}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

2. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

À partir du tableau de la loi conjointe, on en déduit les lois marginales de X et Y .

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

x_i	1	2
$P(Y = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

On en déduit que

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad E(Y) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4}.$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{11}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{22}{8} - \frac{21}{8} = \frac{1}{8}.$$

Proposition 2.33 – Propriétés de la covariance

- La covariance est symétrique.

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$$

- La covariance d'une variable aléatoire avec elle-même est sa variance.

$$\text{Cov}(X, X) = V(X)$$

- Si a est un réel, alors

$$\text{Cov}(X, a) = 0.$$

Proposition 2.34 – Linéarité à gauche et à droite de la covariance

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\text{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\text{Cov}(X_1, Y) + b\text{Cov}(X_2, Y),$$

$$\text{Cov}(X, aY_1 + bY_2) = a\text{Cov}(X, Y_1) + b\text{Cov}(X, Y_2).$$

Proposition 2.35

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes**, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Remarque 2.36 –

- C'est une conséquence directe de la Proposition 2.27.
- La réciproque est fausse. On peut avoir $\text{Cov}(X, Y) = 0$ sans que X et Y ne soient indépendantes.

2 – Variance d'une somme**Proposition 2.37**

Soient X et Y deux variables aléatoires. On a

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

**Méthode 2.38 – Calculer la variance d'une somme**

Il y a deux options.

- Si on connaît la loi de la somme $X + Y$, on peut utiliser la **formule de König-Huygens** :

$$V(X + Y) = E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2.$$

- Si on ne connaît pas la loi de la somme $X + Y$, on utilise la formule précédente :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Exemple 2.39 – On reprend les deux exemples de l'exemple 2.26.

- Calculer $V(X_1 + X_2)$ et $V(X_1 + Y)$.

On a

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2).$$

On connaît déjà $\text{Cov}(X_1, X_2)$. Il nous reste à calculer $V(X_1)$ et $V(X_2)$. D'après la formule de König-Huygens,

$$V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 \quad \text{et} \quad V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2.$$

Il nous reste donc à calculer $E(X_1^2)$ et $E(X_2^2)$. Or on a

$$E(X_1^2) = E(X_2^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + \dots + 4^2 \times \frac{1}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}.$$

Ainsi, $V(X_1) = V(X_2) = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. Et donc,

$$V(X_1 + X_2) = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + 2 \times 0 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

De même, pour calculer $V(X_1 + Y)$, il nous faut calculer $V(Y)$. Pour cela, on commence par calculer $E(Y^2)$.

$$E(Y^2) = 1^2 \times \frac{1}{16} + 2^2 \times \frac{3}{16} + 3^2 \times \frac{5}{16} + 4^2 \times \frac{7}{16} = \frac{170}{16} = \frac{85}{8}.$$

Alors, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{85}{8} - \left(\frac{25}{8}\right)^2 = \frac{55}{64}.$$

Et donc

$$V(X_1 + Y) = \frac{5}{4} + \frac{55}{64} + 2 \times \frac{5}{8} = \frac{215}{64}.$$

2. Calculer $V(X + Y)$.

On a

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad E(Y^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{3}{4} = \frac{13}{4}.$$

Alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{13}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}.$$

Et donc

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{11}{16}.$$

Remarque 2.40 – À noter que l'on peut également calculer la covariance de X et Y à l'aide de $V(X + Y)$, $V(X)$ et de $V(Y)$ puisque

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{V(X + Y) - V(X) - V(Y)}{2}.$$

Proposition 2.41

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires **indépendantes**. Alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

3 – Coefficient de corrélation linéaire

Proposition 2.42

On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y , le réel, noté $\rho(X, Y)$, défini par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}.$$

Exemple 2.43 – On reprend les deux exemples de l'exemple 2.26.

1. Calculer $\rho(X_1, X_2)$ et $\rho(X_1, Y)$.

On a

$$\begin{aligned}\rho(X_1, X_2) &= \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{5}{4}} \times \sqrt{\frac{5}{4}}} = 0, \\ \rho(X_1, Y) &= \frac{\text{Cov}(X_1, Y)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{5}{8}}{\sqrt{\frac{5}{4}} \times \sqrt{\frac{55}{64}}} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{5\sqrt{11}}{16}} = \frac{5}{8} \times \frac{16}{5\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}}.\end{aligned}$$

2. Calculer $\rho(X, Y)$.

On a

$$\rho(X, Y) = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{16}}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Proposition 2.44

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors

$$|\rho(X, Y)| \leq 1.$$

Remarque 2.45 – Le coefficient de corrélation mesure la dépendance linéaire entre deux variables.

- S'il est égal à 1 ou -1 , X et Y sont corrélées linéairement.
- S'il est égal à 0, X et Y sont dites non-corrélées.

IV – Suites de variables aléatoires discrètes finies

1 – Indépendance d'une famille de variables aléatoires

Définition 2.46 – Soit $n \geq 2$ un entier. Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur Ω . On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont **mutuellement indépendantes** lorsque pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,

$$P([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n).$$

Définition 2.47 – Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω . On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout m de \mathbf{N}^* , les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_m sont mutuellement indépendantes.

Exemple 2.48 – On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir "PILE". Pour tout n de \mathbf{N}^* , on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si on a obtenu "PILE" au n -ième lancer et égale à 0 sinon. Alors, la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

2– Espérance et variance d'une famille de variables aléatoires

Théorème 2.49

Soit $n \geq 2$ un entier. Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur Ω . On a l'égalité

$$E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n E(X_k).$$

Autrement dit,

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

Exemple 2.50 – On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, dont la loi (commune) est donnée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par :

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Calculer $E(S_n)$.

Commençons par calculer $E(X_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$$E(X_k) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Et donc

$$E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{5}{3} = \frac{5n}{3}.$$

Théorème 2.51

Soit $n \geq 2$ un entier. Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires **indépendantes** définies sur Ω . On a l'égalité

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

Autrement dit,

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n).$$

Exemple 2.52 – On reprend l'exemple précédent. Calculer $V(S_n)$.

Commençons par calculer $V(X_k)$. Pour cela, il nous faut calculer $E(X_k^2)$.

$$E(X_k^2) = 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Donc, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

Ainsi, puisque les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes, on a

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{9} = \frac{2n}{9}.$$