DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 – *Il s'agit de réaliser la suite d'un exercice dont les deux premières questions ont déjà été posées au premier devoir surveillé, avec plus ou moins de réussite selon les copies. Les questions **3.**, **4.** et **5.** sont indépendantes les unes des autres et peuvent se faire sans avoir réussi les précédentes.*

Soient A, J, K et I les quatre matrices carrées d'ordre 3 définies par

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad K=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer K^2 et K^3.
   b) Déterminer K^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.
2. a) Exprimer A en fonction de I et K.
   b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, A^n en fonction des matrices I, K, K^2 et de n.
   c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression explicite de la matrice A^n en fonction de n.
   d) Vérifier que le résultat trouvé est encore valable pour $n=0$ et $n=1$.
3. Montrer que A est inversible. On note A^{-1} la matrice inverse de A.
4. *Une première façon de calculer* A^{-1}.
   a) Calculer J^2 et pour tout entier k supérieur ou égal à 3, calculer J^k.
   b) Exprimer A en fonction de I, J et J^2.
   c) Calculer $\left(I+2J+3J^2\right)\left(I-2J+J^2\right)$.
   d) En déduire la matrice A^{-1}.
5. *Une deuxième façon de calculer* A^{-1}.
   a) Calculer les matrices A^2 et A^3.
   b) Quelle est la matrice A^3-3A^2+3A?
   c) En déduire l'écriture de A^{-1} en fonction de I, A et A^2.
   d) Vérifier que ce dernier résultat est cohérent avec celui établi à la question **4.d)**.

Exercice 2 – On considère deux urnes notées respectivement $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. On suppose que :

- l'urne $\mathcal{U}$ contient deux boules noires et deux boules blanches,
- l'urne $\mathcal{V}$ contient deux boules noires, deux boules blanches et deux boules vertes.

1. On considère l'expérience suivante $(\mathcal{E})$: "On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne $\mathcal{U}$, on note leur couleur, puis on les remet dans l'urne $\mathcal{U}$".
   a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On répète n fois l'expérience $(\mathcal{E})$ et on note N la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu deux boules de même couleur lors de ces n tirages dans l'urne $\mathcal{U}$.

b) Donner la loi de N en explicitant $P(N=k)$ pour k appartenant aux valeurs prises par N.

c) Préciser la valeur de l'espérance $E(N)$ de N ainsi que sa variance $V(N)$.

d) Quelle est la probabilité que sur ces n tirages, on ait obtenu au moins une fois deux boules de même couleur ?

2. On considère une autre expérience $(\mathcal{F})$: "On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne $\mathcal{U}$. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne $\mathcal{U}$. Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne $\mathcal{U}$ puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne $\mathcal{U}$ soit vide".

   On note X le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne $\mathcal{U}$ soit vide. On désigne par A l'événement : "au premier tirage dans l'urne $\mathcal{U}$, les deux boules sont de même couleur"
   et on note a sa probabilité, c'est-à-dire $a = P(A)$.

   a) Calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.

   b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad P(X=n) = a(1-a)^{n-2}$.

   c) Établir que la variable $Z = X-1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

   d) Donner l'espérance et la variance de Z puis l'espérance et la variance de X.

3. On considère deux réels r, s distincts et non nuls ainsi qu'un réel λ.
   On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par

$$u_2 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = \lambda r^{n-2} + s u_n.$$

   Montrer par récurrence que

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{\lambda}{r-s}\left(r^{n-2} - s^{n-2}\right).$$

4. On considère une nouvelle expérience $(\mathcal{G})$: "On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne $\mathcal{V}$. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne $\mathcal{V}$. Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne $\mathcal{V}$ puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne $\mathcal{V}$ soit vide".

   On note Y le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne $\mathcal{V}$ soit vide. On désigne par B l'événement : "au premier tirage dans l'urne $\mathcal{V}$, les deux boules sont de même couleur"
   et on note b sa probabilité, c'est-à-dire $b = P(B)$.

   a) Calculer la probabilité b.

   b) Calculer $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$.

   c) À l'aide du système complet d'événements $\left(B, \overline{B}\right)$, démontrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$P(Y=n+1) = bP(X=n) + (1-b)P(Y=n).$$

   d) À l'aide de la question **3.**, montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(Y=n) = \frac{ab}{b-a}\left((1-a)^{n-2} - (1-b)^{n-2}\right).$$

   e) Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(Y=n)$.

Exercice 3 –

Partie I.

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x).$$

1. Étudier le sens de variation de g et vérifier que g admet un minimum sur $]0,+\infty[$ égal à $2\big(1-\ln(2)\big)$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

3. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
6. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.
   On montrera en particulier que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en un point A dont on calculera les coordonnées.
7. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
8. a) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, on a $f''(x) = \dfrac{2\ln(x)-1}{x^3}$.
   b) Étudier la convexité de f. La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle des points d'inflexion ?
9. On donne
   $$\frac{1}{e} \approx 0.4, \qquad \sqrt{e} \approx 1.6, \qquad f\big(\sqrt{e}\big) \approx 1.3 \quad \text{et} \quad f'\big(\sqrt{e}\big) \approx 0.1.$$
   Représenter la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ dans un même repère orthonormé.

Partie II.

1. Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par
   $$u(x) = \big(\ln(x)\big)^2.$$
2. En déduire que $\displaystyle\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^2+11}{8}$.
3. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{e^2+11} f(x) & \text{si } x \in [1,e], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   est une densité de probabilité.
4. Soit X une variable admettant h comme densité.
   a) En utilisant une intégration par parties, montrer que
   $$\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$
   b) Montrer enfin que X admet une espérance et la déterminer.

Les questions grisées ne seront à votre portée qu'après avoir traité le Chapitre 7. Mais cela vous donne déjà une idée de pourquoi l'on fait cela. Et il sera toujours temps d'y revenir dans quelques semaines.