14 | Compléments d'intégration

I – Primitive des fonctions logarithme & exponentielle

Les fonctions logarithme et exponentielle étant connues, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les lignes suivantes.

f **est définie sur** I **par**	**une primitive** F **est donnée par**
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\left(\lvert x\rvert\right)$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln\left(\lvert u\rvert\right)$

Remarque 14.1 – On pourra retenir en particulier que la primitive d'une fonction de la forme $f(x) = e^{ax}$ (avec $a \neq 0$) est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax}.$$

Exemple 14.2 – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{2x}$
   $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{x}$
   $F(x) = 2\ln|x|$
3. $f(x) = e^{3x} - e^{-x}$
   $F(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x} + e^{-x}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+1$. On a $u'(x) = 2x$ donc
   $$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1} = 2f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{2}\ln|u(x)| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$
5. $f(x) = xe^{x^2}$
   f semble être de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$. On a $u'(x) = 2x$ donc
   $$u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2} = 2f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

II – Formule d'intégration par parties

Proposition 14.3

Soient u et v deux fonctions dérivables et soient a et b deux réels. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

Remarque 14.4 –

- On peut résumer la formule d'intégration par parties de la manière suivante :
$$\int u'v = \Big[uv\Big] - \int uv'.$$
- La formule d'intégration par parties permet de calculer des intégrales lorsque l'on ne sait pas trouver de primitive de la fonction à intégrer. Il faut alors choisir les fonctions u et v adéquates.
  Pour des intégrales impliquant la fonction exponentielle, on choisira souvent la fonction exponentielle pour la fonction **à intégrer** (*i.e.*, u').
  Inversement, pour des intégrales impliquant la fonction logarithme, on choisira la fonction logarithme pour la fonction **à dériver** (*i.e.*, v).

Exemple 14.5 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 te^t\,dt$
   Posons
$$\begin{array}{rclcrcl} u'(t) & = & e^t & \quad & u(t) & = & e^t \\ v(t) & = & t & & v'(t) & = & 1 \end{array}$$
   Alors d'après la formule d'intégration par parties,
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,dt \\ &= \Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 1\times e^t\,dt = e - \Big[e^t\Big]_0^1 = e-(e-1) = 1. \end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,dx$
   Posons
$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & x & \quad & u(x) & = & \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) & = & \ln(x) & & v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \end{array}$$
   Alors par intégration par parties,
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 u'(x)v(x)\,dt = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,dx = 2\ln(2) - \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx \\ &= 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \left(1-\frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

3. $I_3 = \int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$
   Posons
   $$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & 1 & & u(x) & = & x \\ v(x) & = & \ln(x) & & v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \end{array}$$
   Alors par intégration par parties,
   $$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^e u'(x)v(x)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = e - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x \\ &= e - \Big[x\Big]_1^e = e-(e-1) = 1. \end{aligned}$$

III – Intégrales et inégalités

On suppose dans cette partie que $a \leqslant b$.

Proposition 14.6 – Positivité de l'intégrale

- Si f est continue et positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Si f est continue et positive sur $[a;b]$ et que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a;b]$.

Remarque 14.7 – En particulier, si f est continue, positive et non-identiquement nulle sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Proposition 14.8 – Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que $\forall t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t)$. Alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 14.9 – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par
$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer u_1.
   On a
   $$u_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   Il nous faut donc trouver une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Cette fonction semble être

de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + x^2$. On a $u'(x) = 2x$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{u(x)}\right) = -\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2\left(1+1^2\right)} + \frac{1}{2\left(1+0^2\right)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2} \leqslant x^n.$$

Il est clair que l'on a $0 \leqslant \dfrac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}$. Par ailleurs, on a

$$1 + x^2 \geqslant 1.$$

Donc

$$\left(1+x^2\right)^2 \geqslant 1^2 = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} \leqslant \frac{1}{1} = 1.$$

Donc

$$\frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2} \leqslant x^n \times 1 = x^n.$$

Ainsi, on a bien le résultat demandé.

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$ et

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi on a bien

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.