4 | Suites réelles

I – Notion de suite réelle

Intuitivement, une suite réelle est une liste infinie de nombres réels. Par exemple, la suite des puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc. On peut noter une telle liste de nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ (lire « u indice n »). u_0 désigne alors le premier terme de la suite (dans notre exemple, $u_0 = 1$), u_1 le deuxième terme (ici $u_1 = 2$), et ainsi de suite. u_n désigne le $(n+1)$-ième terme de la suite.

Définition 4.1 –

- Une **suite réelle** est une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

  On note cette suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou encore plus simplement (u_n).
- u_n est appelé le **terme général** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exemple 4.2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - 1$.

- Le premier terme est $u_0 = 0^2 - 1 = -1$,
- Le deuxième terme est $u_1 = 1^2 - 1 = 0$,
- Le troisième terme est $u_2 = 2^2 - 1 = 3$,
- Le terme de rang n est $u_n = n^2 - 1$.

Remarque 4.3 –

- À la notation habituelle des fonctions $u(n)$, on préfère donc la notation indicée u_n.
- Il est possible que la suite ne commence pas au rang 0 et que les termes u_n ne soient définis que pour $n \geq 1$ ou de manière générale pour $n \geq n_0$, où n_0 est un entier quelconque. Dans ce cas, on notera $(u_n)_{n\geq 1}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Définition 4.4 – Définition d'une suite. Une suite réelle peut être définie de deux façons différentes.

- Explicitement : une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie **explicitement** lorsque l'expression de son terme général u_n est donnée par une formule qui ne dépend que de n. Auquel cas, on peut calculer directement n'importe quel terme de cette suite.
- Par une relation de récurrence : une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie **par une relation de récurrence** lorsque l'on donne le premier terme de la suite et une formule (appelée relation de récurrence) qui permet de calculer un terme en fonction du précédent :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Exemple 4.5 –

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. Calculer u_7.

$$u_7 = 2 \times 7^2 - 3 \times 7 + 1 = 78.$$

- Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = -2v_n + 3$. Calculer v_4.
  - $v_1 = -2v_0 + 3 = -2 \times 3 + 3 = -6 + 3 = -3$,
  - $v_2 = -2v_1 + 3 = -2 \times (-3) + 3 = 6 + 3 = 9$,
  - $v_3 = -2v_2 + 3 = -2 \times 9 + 3 = -15$,
  - $v_4 = -2v_3 + 3 = -2 \times (-15) + 3 = 30 + 3 = 33$.

Remarque 4.6 – Quand une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par récurrence, le calcul d'un terme nécéssite *a priori* le calcul successif de **tous** les termes précédents. Par exemple, pour calculer u_{100}, il est nécessaire de calculer les 100 termes précédents. Cela peut se révéler très fastidieux en pratique et on essaie donc, lorsque c'est possible, de déterminer une formule explicite donnant directement le terme u_n en fonction de n.

II – Suite arithmétique

1 – Définition

Définition 4.7 – Soit (u_n) une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r appelé **raison** tel que

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad u_{n+1}=u_n+r.$$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1} \end{tikzcd}$$

Exemple 4.8 –

1. Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. On dépose chaque année 10 euros.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ le montant sur le compte de l'année n.
   On a $u_{n+1}=u_n+10$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 10.
2. Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. On dépense chaque année 7 euros.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ le montant sur le compte de l'année n.
   On a $u_{n+1}=u_n-7$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison -7.

Remarque 4.9 – Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique, il suffit de montrer que $u_{n+1}-u_n$ est égale à une constante qui ne dépend pas de n (cette constante est la raison r).

Exemple 4.10 – Déterminer si les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suivantes sont arithmétiques.

1. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=2n+1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 2(n+1)+1-(2n+1)\\ &= 2n+2+1-2n-1=2 \end{aligned}$$

   Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.

2. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=n^2+1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (n+1)^2+1-(n^2+1)\\ &= n^2+2n+1+1-n^2-1\\ &= 2n+1 \end{aligned}$$

   Donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

2 – Expression explicite

Proposition 4.11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = u_0 + nr.$$

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rr, bend right, "+2r"'] \arrow[rrr, bend right, "+3r"'] \arrow[rrrrr, bend right, "+nr"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 & \cdots & u_n
\end{tikzcd}$$

Remarque 4.12 – On a également, pour des suites dont l'indice débute à $n = 1$,

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = u_1 + (n-1)r,$$

et plus généralement,

$$\forall p \geq 0, \quad \forall n \geq p, \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$

Exemple 4.13 –

1. On reprend le premier exemple de l'exemple 4.8. Calculer le montant sur le compte au bout de 10 ans.
   La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme $u_0 = 100$ donc, pour tout n, on a
   $$u_n = u_0 + nr = 100 + 10n.$$
   On cherche le montant au bout de 10 ans, *i.e.*, u_{10} et $u_{10} = 100 + 10 \times 10 = 200$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -7$. Calculer u_5 et u_{100}.
   On a $u_n = u_0 + nr = -7 + 5n$. Donc
   $$u_5 = -7 + 5 \times 5 = 18 \quad \text{et} \quad u_{100} = -7 + 5 \times 100 = 493.$$

III – Suite géométrique

1 – Définition

Définition 4.14 – Soit (u_n) une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **géométrique** s'il existe un réel q appelé **raison** tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n.$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Exemple 4.15 –

1. Soit un compte sur lequel il y a 100 euros et qui rapporte chaque année 3% d'intérêts.
   Soit u_n le montant sur le compte à l'année n.
   On a $u_{n+1} = 1,03u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $1,03$.
2. Les réserves de pétroles en Alberta diminuent chaque année de 10% et les réserves initiales étaient de 10^{11}L. Soit u_n le nombre de litres lors de l'année n.
   On a $u_{n+1} = 0,9u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $0,9$.

Remarque 4.16 – Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique, il suffit de montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (sous réserve que $u_n \neq 0$) est égal à une constante qui ne dépend pas de n (cette constante est la raison q).

Exemple 4.17 – Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour $n \geq 0$.
La suite (u_n) est-elle géométrique ?
On a $u_0 = 2$, $u_1 = 2u_0 - 3 = 1$ et $u_2 = 2u_1 - 3 = -1$. Ainsi, $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{u_2}{u_1} = -1$.
Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2 – Expression explicite

Proposition 4.18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rr, bend right, "\times q^2"'] \arrow[rrr, bend right, "\times q^3"'] \arrow[rrrrr, bend right, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 & \cdots & u_n
\end{tikzcd}$$

Remarque 4.19 – On a également, pour des suites dont l'indice débute à $n = 1$,

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = u_1 \times q^{n-1},$$

et plus généralement,

$$\forall p \geq 0, \quad \forall n \geq p, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Exemple 4.20 –

1. On reprend le premier exemple de l'exemple 4.15. Calculer le montant sur le compte au bout de 10 ans.
   La suite (u_n) est géométrique de raison $1,03$ et de premier terme $u_0 = 100$, donc pour tout n,

   $$u_n = u_0 \times q^n = 100 \times (1,03)^n.$$

   Et donc

   $$u_{10} = 100 \times (1,03)^{10} \simeq 134.$$

   Il y aura donc environ 134€ sur le compte au bout de 10 ans.

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 1024$. Calculer u_{10}.

   On a $u_n = u_0 \times q^n = 1024 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1024}{2^n}$, donc
$$u_{10} = \frac{1024}{2^{10}} = \frac{1024}{1024} = 1.$$

IV – Suite arithmético-géométrique

1 – Définition

Définition 4.21 – Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque 4.22 –

- Si $a = 1$, alors
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b.$$
  Autrement dit, (u_n) est une suite arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, alors
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = au_n.$$
  Autrement dit, (u_n) est une suite géométrique de raison a.

Exemple 4.23 – On veut placer 100 euros sur un compte rémunéré à 5%. Mais chaque année, la banque réclame 3 euros de frais. On note u_n le montant sur le compte au bout de n années.
On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+1} = 1,05u_n - 3.$$
Donc la suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

2 – Expression explicite

Méthode 4.24 – Trouver l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de la forme
$$u_{n+1} = au_n + b.$$
Pour exprimer u_n en fonction de n, on procède selon les étapes suivantes.

1. On cherche le point fixe α, tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. On pose $v_n = u_n - \alpha$ et on montre que v_n est géométrique de raison a.
3. On exprime v_n puis u_n en fonction de n.

Exemple 4.25 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Exprimer u_n en fonction de n.

1. On commence par chercher le point fixe.

$$\alpha = 3\alpha - 8 \iff -2\alpha = -8 \iff \alpha = \frac{-8}{-2} = 4.$$

2. On pose $v_n = u_n - 4$. Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison 3. On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 3u_n - 8 - 4 = 3(v_n + 4) - 12 = 3v_n + 12 - 12 = 3v_n.$$

Donc (v_n) est bien une suite géométrique de raison 3.

3. Le premier terme de v_n est $v_0 = u_0 - 4 = 2 - 4 = -2$.
Ainsi, puisque v_n est géométrique de raison 3, on a pour tout n,

$$v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 3^n.$$

On en déduit que, pour tout n,

$$u_n = v_n + 4 = -2 \times 3^n + 4.$$

V – Symbole sommatoire et calculs de sommes

1 – Symbole sommatoire Σ

Le symbole Σ va nous permettre d'écrire des sommes de manière compacte.

Définition 4.26 – Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des réels. La somme des n réels $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ se note $\sum_{i=1}^{n} u_i$. Autrement dit, on a, par définition, l'égalité suivante.

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Exemple 4.27 –

- $\sum_{k=1}^{7} k = 1+2+3+4+5+6+7 = 28$
- $\sum_{k=1}^{6} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 1+4+9+16+25+36 = 91$
- $\sum_{j=0}^{5} 2j+1 = (2\times0+1)+(2\times1+1)+(2\times2+1)+(2\times3+1)+(2\times4+1)+(2\times5+1) = 1+3+5+7+9+11 = 36$
- $\sum_{p=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} = n$

Remarque 4.28 –

- L'avantage de cette notation est de supprimer les points de suspension. Certes, il faut un peu de temps pour maîtriser cette nouvelle notation, mais une fois maîtrisée, elle s'avère bien plus pratique et plus rigoureuse que la notation avec les points de suspension.
- Comme on peut le voir sur les exemples ci-dessus, une somme peut commencer à 0, à 1, mais aussi à n'importe quel entier naturel.

- Le choix de la lettre qui apparait en indice n'importe pas. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{p=1}^{100} p^2 = \sum_{a=1}^{100} a^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2.$$

Proposition 4.29 – Linéarité de la somme

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques et λ un réel. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k + v_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Démonstration.
On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k + v_k &= u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \cdots + u_n + v_n \\ &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n + v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k.\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k &= \lambda u_0 + \lambda u_1 + \cdots + \lambda u_n \\ &= \lambda (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k.\end{aligned}$$

□

2 – Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème 4.30 – Somme des n premiers entiers naturels

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Corollaire 4.31 – Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Comme (u_n) est une suite arithmétique, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_0 + kr) &= \left(\sum_{k=0}^{n} u_0\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} kr\right) \\ &= (n+1) \times u_0 + r \times \sum_{k=0}^{n} k = (n+1) \times u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

□

Exemple 4.32 –

1. Calculer $\sum_{k=1}^{100} k$.

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \times 101}{2} = 5050.$$

2. Calculer $S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 58 + 61 + 64$.
On reconnait les termes d'une suite arithétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$. Le dernier terme de cette somme est $u_n = 64$. Cherchons la valeur de n. On sait que

$$u_n = u_0 + nr = 1 + 3n.$$

On a donc $1 + 3n = 64 \iff 3n = 63 \iff n = \frac{63}{3} = 21$. Ainsi

$$S = \sum_{k=0}^{21} u_k = (21+1) \times 1 + 3 \times \frac{21(21+1)}{2} = 22 + 3 \times 21 \times 11 = 22 + 63 \times 11 = 22 + 693 = 715.$$

3 – Somme des termes d'une suite géométrique

Théorème 4.33 – Somme de n premières puissances

Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier $n \geq 1$, on a

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Corollaire 4.34 – Somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration. Comme (u_n) est une suite géométrique, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_0 \times q^k) = u_0 \times \left(\sum_{k=0}^{n} q^k \right) = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

□

Exemple 4.35 –

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

2. Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 1024 + 2048$.

$$S = \sum_{k=0}^{11} 2^k = \frac{1 - 2^{11+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{12}}{-1} = -(1 - 4096) = 4095.$$