

DEVOIR MAISON 3

Exercice 1 – Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de 20 questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que

- l'élève A ne connaît que 60% de son cours, c'est-à-dire que, pour chaque question, la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\frac{60}{100}$,
- lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard,
- les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements

- R : "l'élève A connaît la réponse à la première question".
- J : "l'élève A répond juste à la première question".

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(J) = \frac{11}{15}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de X . On donnera les valeurs prises par X et, pour chacune de ces valeurs k , la valeur de $P(X = k)$.
3. Donner $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance de X .
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse.

Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.

- (a) Justifier l'égalité $N = 3X - 40$.
- (b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
 - (a) Déterminer la loi de Y .
 - (b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
 - (c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B, quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note?

Exercice 2 –

1. Calculer une primitive des fonctions suivantes.

(a) $f_1(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

(b) $f_2(x) = x^2 + x - 3$

(c) $f_3(x) = (2x - 1)^2$

(d) $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$

(e) $f_5(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$

(f) $f_6(x) = (4x - 2)(2x^2 - 2x + 1)^3$

(g) $f_7(x) = \frac{2}{(2x - 1)^2}$

(h) $f_8(x) = \frac{2}{x^2}$

(i) $f_9(x) = 4x - 1 + \frac{1}{x^2}$

(j) $f_{10}(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

2. Calculer les intégrales suivantes.

(a) $\int_0^1 (2x^2 - 5x + 3) dx$

(b) $\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx$

(c) $\int_1^2 \frac{x}{(1 + 3x^2)^2} dx$

(d) $\int_0^1 \frac{x^3}{(1 + x^4)^2} dx$

(e) $\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$

(f) $\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4 + 1}} dt$

(g) $\int_1^2 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^3} \right) dx$

(h) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x - 2 \right) dx$

(i) $\int_{-2}^{-1} (4x - 1)^3 dx$

(j) $\int_{-1}^0 x(5x^2 + 1)^2 dx$