1 | Matrices

I – Généralités

Définition 1.1 – Soient n et p dans $\mathbf{N}^*$. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{R}$ tout tableau de nombres de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

avec $a_{i,j} \in \mathbf{R}$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$. Ce sont les **coefficients** de la matrice A. De manière plus compacte, on peut écrire

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}.$$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.

Exemple 1.2 – Voici des exemples de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbf{R}), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}), \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbf{R}).$$

Remarque 1.3 –

- Le premier indice i désigne le numéro de la ligne et le second indice j désigne le numéro de la colonne.
- Deux matrices sont **égales** si et seulement si elles ont le même nombre de lignes et de colonnes **et** les mêmes coefficients :

$$\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq q}} \iff \left\{\begin{array}{l} n = m \\ p = q \\ \forall i \in [\![1;n]\!],\ \forall j \in [\![1;p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j} \end{array}\right..$$

Exemple 1.4 – On donne $E = \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & -2y-4 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
Déterminer x et y pour que les deux matrices E et F soient égales.

On a

$$\begin{aligned}
E = F &\iff \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & -2y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x+3 &= -1 \\ -2y-4 &= 5 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x &= -4 \\ -2y &= 9 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= -2 \\ y &= -\dfrac{9}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Définition 1.5 –

- Une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes est appelée une **matrice carrée**. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes se note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ au lieu de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.
- Une matrice qui n'a qu'une seule colonne est appelée une **matrice colonne**.
- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne est appelée une **matrice ligne**.

Exemple 1.6 –

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 3.
- La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.
- La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Définition 1.7 –

- On appelle **matrice nulle** à n lignes et p colonnes et on note $0_{n,p}$ la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls. Lorsque $n = p$, on écrira simplement 0_n au lieu de $0_{n,n}$.
- On appelle **matrice identité** d'ordre n et on note I_n la matrice carrée dont les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres sont égaux à 0. Autrement dit,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.8 –

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II – Opérations sur les matrices

1 – Multiplication d'une matrice par un réel

Définition 1.9 – Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et pour tout réel λ, on pose

$$\lambda A = \lambda\,(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}.$$

Autrement dit, pour multiplier une matrice par un réel λ, on multiplie tous ses coefficients par λ.

Exemple 1.10 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Calculer $4A$.

$$4A = 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.11 – Pour toute matrice A, la matrice $(-1)A$ est notée $-A$ et s'appelle la **matrice opposée** de la matrice A.

Remarque 1.12 – L'opposée $-A$ d'une matrice A s'obtient donc en remplaçant chaque coefficient de A par son opposé.

Exemple 1.13 – Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{-2} & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $-A$.

$$-A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

2 – Somme de deux matrices

Définition 1.14 – Soient deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ de même taille. On pose

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}.$$

Autrement dit, la somme des matrices A et B est la matrice de même taille que A et B, dont chaque élément est la somme des éléments correspondants de A et B.

ATTENTION ! L'addition de deux matrices n'est possible que si elles ont le même nombre de lignes et de colonnes !

Exemple 1.15 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A+B$.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -1+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}-1 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.16 – De même, on définit la soustraction de deux matrices A et B par $A-B = A+(-1)B = A+(-B)$.

Proposition 1.17

Soient A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et λ et μ des réels. On a

- $A+B = B+A$. On dit que l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est **commutative**.
- $(A+B)+C = A+(B+C)$. On dit que l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est **associative**.
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Exemple 1.18 – On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
Soit X une matrice de taille 2×2 telle que $2X + 3A = B$. Déterminer la matrice X.

Posons $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On cherche à trouver a, b, c et d. On a

$$\begin{aligned}
2X+3A = B &\iff \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2a+3 & 2b-3 \\ 2c-3 & 2d+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2a+3 = 1 \\ 2b-3 = -3 \\ 2c-3 = 1 \\ 2d+3 = 5 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2a = -2 \\ 2b = 0 \\ 2c = 4 \\ 2d = 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Et donc $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 1.19 – Soient x, y et z dans $\mathbf{R}$. Calculer la matrice $x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$.

Déterminer alors l'ensemble des triplets (x,y,z) vérifiant $x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

On a

$$
\begin{aligned}
x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix}x+4y+7z\\2x+5y+8z\\3x+6y+9z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&4y&+&7z&=&0\\ 2x&+&5y&+&8z&=&0\\ 3x&+&6y&+&9z&=&0\end{array}\right. & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&4y&+&7z&=&0\\ &-&3y&-&6z&=&0\\ 3x&+&6y&+&9z&=&0\end{array}\right. & L_3\leftarrow L_3-3L_1\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&4y&+&7z&=&0\\ &-&3y&-&6z&=&0\\ &-&6y&-&12z&=&0\end{array}\right. & L_3\leftarrow L_3-2L_2\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&4y&+&7z&=&0\\ &-&3y&-&6z&=&0\\ &&&&0&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&4y&+&7z&=&0\\ &&&&y&=&-2z\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&z\\ y&=&-2z\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Il y a donc une infinité de solutions. Si on prend par exemple $z=1$, on trouve $x=1$ et $y=-2$.

3 – Multiplication de deux matrices

Définition 1.20 – Soient $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ une matrice quelconque et $B=(b_{i,1})_{1\le i\le p}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ une matrice colonne. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B, la matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ notée $A\times B$ ou AB, définie par

$$AB=(c_{i,1})_{1\le i\le n} \text{ où } c_{i,1}=a_{i,1}b_{1,1}+a_{i,2}b_{2,1}+\cdots+a_{i,p}b_{p,1}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,1}.$$

Autrement dit,

$$\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\cdots&a_{1,p}\\a_{2,1}&a_{2,2}&\cdots&a_{2,p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n,1}&a_{n,2}&\cdots&a_{n,p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1,1}\\b_{2,1}\\\vdots\\b_{p,1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+\cdots+a_{1,p}b_{p,1}\\a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1}+\cdots+a_{2,p}b_{p,1}\\\vdots\\a_{n,1}b_{1,1}+a_{n,2}b_{2,1}+\cdots+a_{n,p}b_{p,1}\end{pmatrix}.$$

Exemple 1.21 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculer AX.

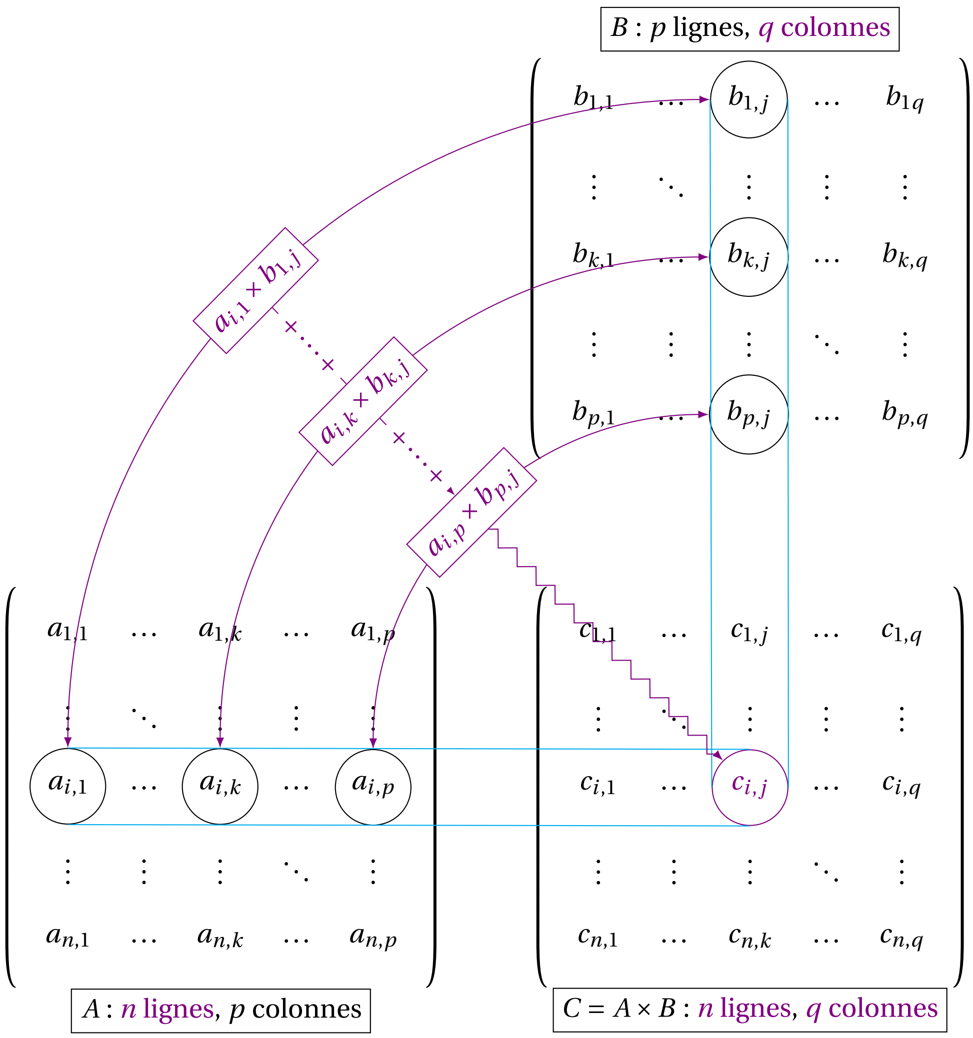
$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Définition 1.22 – Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ deux matrices. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B, la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbf{R})$ notée $A \times B$ ou AB définie par

$$AB = \left(c_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq q}} \text{ où } c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$

ATTENTION ! Pour pouvoir effectuer le produit AB, le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de colonnes de B, sinon le produit n'est pas défini !

Illustration du produit matriciel :



Exemple 1.23 – Calculer les produits matriciels suivants après avoir donner l'ensemble de matrices auquel ils appartiennent.

$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,1}$ et $A=\begin{pmatrix}44\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}$ et $B=\begin{pmatrix}44\\-6\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 6\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}$ et $C=\begin{pmatrix}-4 & 16\\10 & 11\end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\5 & 1\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}$ et $D=\begin{pmatrix}1 & 7\\30 & 6\end{pmatrix}$

$E=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}$ et $E=\begin{pmatrix}2 & 6 & 10\\4 & 12 & 20\\6 & 18 & 30\end{pmatrix}$

$F=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}$ et $F=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$

$G=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}$ et $G=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$H=\begin{pmatrix}2 & -3 & 7\\4 & 1 & -6\\9 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}$ et $H=\begin{pmatrix}2x-3y+7z\\4x+y-6z\\9x+5z\end{pmatrix}$

ATTENTION !

— En général, le produit AB (s'il existe) n'est pas égal au produit BA (s'il existe) : la multiplication matricielle **n'est pas** commutative !

— Un produit de deux matrices peut être égal à la matrice nulle sans qu'aucune de ces deux matrices ne soit égale à la matrice nulle !

Proposition 1.24

— Pour toutes matrices $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $B\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ et $C\in\mathscr{M}_{q,r}(\mathbf{R})$,
$$(AB)C = A(BC).$$
Ainsi, la multiplication matricielle est associative.

— Pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et toute matrice colonne $U\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,
$$AI_n = I_nA = A \text{ et } I_nU = U.$$

— Pour toutes matrices $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $B\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ et $C\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$,
$$A(B+C) = AB + AC.$$

— Pour toutes matrices $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $B\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et $C\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$,
$$(A+B)C = AC + BC.$$

Remarque 1.25 – On pourra retenir que les règles de calcul sont les mêmes qu'avec les réels **si ce n'est que** la commutativité n'est en général pas vraie pour les matrices.

4 – Transposée d'une matrice

Définition 1.26 – Soit $A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. On appelle transposée de A et on note ${}^tA$ la matrice définie par
$${}^tA = \left(a_{j,i}\right)_{\substack{1\le j\le p\\1\le i\le n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R}).$$
Autrement dit, la matrice ${}^tA$ est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A.

Exemple 1.27 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tA$.

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} $$

Proposition 1.28

— Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$,
$$ {}^t\left({}^tA\right) = A. $$

— Pour tout réel λ et toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$,
$$ {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA. $$

— Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$,
$$ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB. $$

— Pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$,
$$ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA. $$

5 – Lien avec les systèmes d'équations linéaires

Proposition 1.29

On considère les matrices

$$ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}). $$

Alors on a l'équivalence

$$ AX = B \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right. . \quad (\star) $$

Autrement dit, le p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est solution du système à n équations et p inconnues $(\star)$ si et seulement si le vecteur X est solution de l'équation matricielle $AX = B$.

Remarque 1.30 – Les matrices permettent donc une écriture beaucoup plus succincte d'un système d'équations linéaires. Par ailleurs, nous verrons dans un autre chapitre des outils matriciels permettant la résolution d'un tel système.

Définition 1.31 – Étant donné un système linéaire à n équations et p inconnues $(\star)$,

$$(\star)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ s'appelle la **matrice associée** au système $(\star)$.

Exemple 1.32 – Réécrire les systèmes suivants sous forme d'une équation matricielle.

Considérons le système linéaire $(\star)$: $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & -4 \end{array}\right.$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors le système $(\star)$ peut se réécrire sous la forme $AX = B$.

Considérons le système linéaire $(\star)$: $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & y & - & 2z & + & t & = & 3 \\ & & & & 4z & - & t & = & 2 \\ & & & & & & 2t & = & -4 \end{array}\right.$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors le système $(\star)$ peut se réécrire sous la forme $AX = B$.

III – Puissance d'une matrice carrée

1 – Définition et premiers exemples

Définition 1.33 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée. On pose

$$A^0 = I_n$$

et pour tout k dans $\mathbf{N}^*$,

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

ATTENTION ! Le calcul de A^2, par exemple, ne consiste pas à élever les éléments de A au carré !

Exemple 1.34 – Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.35

— Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et tous entiers r et s dans $\mathbf{N}$,

$$A^r A^s = A^{r+s}.$$

— Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et tous entiers r et s dans $\mathbf{N}$,

$$(A^r)^s = A^{rs}.$$

ATTENTION ! Puisque la multiplication matricielle n'est pas commutative, les autres règles usuelles sur les puissances dans $\mathbf{R}$ ne sont pas vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Par exemple, en général, $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

Exemple 1.36 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2. Conclure. Les matrices AB et BA sont-elles égales ?

On a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $(AB)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Par ailleurs $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Donc $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On en déduit $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

Par l'absurde, supposons que $AB = BA$. Alors

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = A^2B^2.$$

Absurde. Donc $AB \neq BA$.

Exemple 1.37 – Calculer la puissance n-ième de chacune des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Commençons par calculer A^2 et A^3 puis essayons de conjecturer une formule pour A^n.
On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Il semblerait que l'on ait pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Comme on le verra dans le paragraphe suivant, ce résultat est facilement démontrable par récurrence.

On adopte la même démarche pour calculer B^n.
On a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$. Donc, $B^3 = B^2B = 0_2 \times B = 0_2$.
Ainsi, pour tout $n \geq 2$,

$$B^n = B^2B^{n-2} = 0_2B^{n-2} = 0_2.$$

2 – Cas d'une matrice diagonale

Proposition 1.38

Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors, pour tout k dans $\mathbf{N}$, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} (d_1)^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (d_2)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (d_n)^k \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Démontrons ce résultat dans le cas d'une matrice de taille 3. On procède par récurrence.

Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition « $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix}$ »

Initialisation : Pour $n = 0$, par définition,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$, *i.e.*,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix}.$$

□

Exemple 1.39 – Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la puissance n-ième de $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

Proposition 1.40

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe P et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale telles que $A = PDQ$ et $PQ = QP = I_n$.

Alors, pour tout entier k de $\mathbf{N}$, on a

$$A^k = PD^kQ = P \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix} Q.$$

Démonstration. Notons $\mathscr{P}_k$ la proposition « $A^k = PD^kQ$ » et procédons par récurrence sur k.

Initialisation : Pour $k = 0$, $A^0 = I_n$ et $PD^0Q = PI_nQ = PQ = I_n$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier quelconque dans $\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_k$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

$$A^{k+1} = A^k \times A,$$

et par hypothèse de récurrence, on sait que $A^k = PD^kQ$. Comme $A = PDQ$, on obtient

$$A^{k+1} = PD^kQPDQ = PD^kI_nDQ = PD^kDQ = PD^{k+1}Q,$$

ce qui prouve que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout k dans $\mathbf{N}$, *i.e.*,

$$A^k = PD^kQ.$$

□

3 – Formule du binôme de Newton

Définition 1.41 – Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Proposition 1.42 – Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que A et B commutent (*i.e.*, $AB = BA$).
Alors, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on a

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Remarque 1.43 – La formule du binôme de Newton sert à calculer les puissances d'une matrice à condition que l'on puisse écrire celle-ci comme la somme de deux matrices qui commutent et dont on sait expliciter les puissances. Le cas le plus fréquent est celui pour lequel la matrice considérée est la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice dont les puissances sont nulles à partir d'un certain rang qui commutent.

Exemple 1.44 – On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que $A = D + J$.

$$D + J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Ainsi, on a bien $A = D + J$.

2. Calculer J^2. En déduire J^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Dès lors, pour $n \geq 2$, $J^n = J^2 \times J^{n-2} = 0_2 \times J^{n-2} = 0_2$

3. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

La matrice D étant diagonale, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$A^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J.$$

Les matrices D et J commutent. On peut donc appliquer la formule du bonôme de Newton. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} J^k \\ &= \binom{n}{0} D^n J^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} J^1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} J^k}_{=0_2 \text{ car } J^k = 0_2 \text{ pour } k \geq 2} \\ &= D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J \end{aligned}$$

5. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

On a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\binom{n}{1} = n$ donc

$$\begin{aligned} A^n &= D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$