DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 –

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$
2. $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{8}{12} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$
3. $C = \dfrac{1+\frac{5}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \frac{7}{12}} = \dfrac{\frac{11}{6}}{\frac{12}{60} - \frac{70}{60}} = \frac{11}{6} \times \frac{-60}{58} = -\frac{110}{58} = -\frac{55}{29}$
4. $D = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \div \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{20} \div \frac{9}{4} = \frac{1}{120} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{270}$

Exercice 2 –

1. $2x - 3 = 4 \iff 2x = 7 \iff x = \frac{7}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.
2. $x - \frac{1}{2} = 2x - 1 \iff -x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
3. $2x - 4 < 3x + 5 \iff -x < 9 \iff x > -9$ donc $\mathcal{S} =]-9, +\infty[$.
4. Je calcule le discriminant $\Delta = 144 - 108 = 36$. Il y a donc deux racines
$$x_1 = \frac{12-6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12+6}{2} = 9.$$
Donc $\mathcal{S} = \{3, 9\}$.
5. Je calcule le discriminant $\Delta = 9 + 40 = 49$. Il y a donc deux racines
$$x_1 = \frac{-3-7}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+7}{-2} = -2.$$
J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$-x^2+3x+10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$.
6. $x(x-2) = -1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 - 4 = 0$.
Il y a donc une seule racine
$$x_0 = \frac{2}{2} = 1.$$
Ainsi $\mathcal{S} = \{1\}$.

7. $\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{1}{x+1} \iff \dfrac{2(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+3)}=0 \iff \dfrac{2x+2-x-3}{(x+1)(x+3)}=0 \iff \dfrac{x-1}{(x+1)(x+3)}=0$
Or $(x+1)(x+3)=0 \iff x+1=0$ ou $x+3=0 \iff x=-1$ ou $x=-3$, donc les valeurs interdites sont $x=-1$ et $x=-3$. Par ailleurs $x-1=0 \iff x=1$. Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites donc $\mathcal{S}=\{1\}$.
8. $x-3=0 \iff x=3$ donc il y a une valeur interdite : $x=3$. Par ailleurs le discriminant de x^2-5x+6 vaut $\Delta=25-24=1$. Il y a donc deux racines
$$x_1=\frac{5-1}{2}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+1}{2}=3.$$
Comme 3 est valeur interdite, finalement $\mathcal{S}=\{2\}$.
9. $\dfrac{x}{x+1}\leqslant\dfrac{2}{2x-3} \iff \dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{2x-3}\leqslant 0 \iff \dfrac{x(2x-3)-2(x+1)}{(x+1)(2x-3)}\leqslant 0 \iff \dfrac{2x^2-5x-2}{(x+1)(2x-3)}\leqslant 0$
Je calcule le discriminant de $2x^2-2x-5$: $\Delta=25+16=41$. Il y a donc deux racines
$$x_1=\frac{5-\sqrt{41}}{4}\approx-0.3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+\sqrt{41}}{4}\approx 2.8.$$
J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		x_1		$\frac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
$2x^2-2x-5$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x^2-5x-2}{(x+1)(2x-3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S}=\left]-1,x_1\right]\cup\left]\dfrac{3}{2},x_2\right]$.
10. Je cherche une racine évidente au polynôme $P(x)=x^3-9x^2+11x+21$.
Et $P(-1)=(-1)^3-9\times(-1)^2+11\times(-1)+21=-1-9-11+21=0$.
Donc j'effectue donc la division euclidienne de $x^3-9x^2+11x+21$ par $x+1$.
$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & - & 9X^2 & + & 11X & + & 21 & X+1 \\
- & (X^3 & + & X^2) & & & & & X^2-10X+1 \\ \hline
 & & - & 10X^2 & + & 11X & + & 21 & \\
 & - & (- & 10X^2 & - & 10X) & & & \\ \hline
 & & & & & 21X & + & 21 & \\
 & & & & - & (21X & + & 21) & \\ \hline
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$
Finalement $P(x)=(x+1)(x^2-10x+21)$.
Puis je calcule le discriminant de $x^2-10x+21$: $\Delta=100-84=16$. Il y a donc deux racines
$$x_1=\frac{10-4}{2}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{10+4}{2}=7.$$
En conclusion, $\mathcal{S}=\{-1,3,7\}$.

Exercice 3 –

Partie I.

1. (a) Comme $P(-1) = -3-7+7+3 = 0$, le polynôme $P(x)$ se factorise par $x-(-1) = x+1$.
Donc il existe un polynôme $Q(x)$, de degré $3-1 = 2$, tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$.
Je détermine ce polynôme $Q(x)$ en effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 3X^3 & - & 7X^2 & - & 7X & + & 3 & X+1 \\ \cline{9-9}
- & \big(3X^3 & + & 3X^2\big) & & & & & 3X^2-10X+3 \\ \cline{2-8}
 & & - & 10X^2 & - & 7X & + & 3 & \\
 & - & \big(- & 10X^2 & - & 10X\big) & & & \\ \cline{3-8}
 & & & & & 3X & + & 3 & \\
 & & & & - & \big(3X & + & 3\big) & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Finalement $P(x) = (x+1)(3x^2-10x+3)$.

(b) Il me reste à traiter le polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 100-36 = 64 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3.$$

Donc l'équation $3x^3-7x^2-7x+3 = 0$ a trois solutions : $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{3}, 3\right\}$.

2. (a) Je détermine les valeurs interdites : ce sont les solutions de l'équation $3x^2-12x+12 = 0$.
Le discriminant vaut $\Delta = 144-144 = 0$. Il y a donc une unique racine

$$x_0 = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

(b) J'établis le tableau de signe de la fraction rationnelle $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x^2-10x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2-12x+12$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Et donc l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ a pour solutions : $\mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty[$.

Partie II.

1. Les fonctions f et g sont des fonctions polynomiales donc $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$. Par ailleurs,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty.$$

2. Je calcule $f(2)$ et $g(2)$ pour prouver que ces deux valeurs sont égales à 17.

$$f(2) = 8+24-10-5 = 17 \quad \text{et} \quad g(2) = 8+4+5 = 17.$$

Donc le point de coordonnées $(2,17)$ est bien un point des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3. D'après la question précédente, $f(2)-g(2) = 17-17 = 0$. Donc 2 est racine du polynôme $f(x)-g(x)$. Donc il existe un polynôme $R(x)$ de degré $3-1=2$ tel que $f(x)-g(x) = (x-2)Q(x)$.

4. Je détermine ce polynôme $Q(x)$ par division euclidienne. $f(x)-g(x) = x^3+4x^2-7x-10$ et

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & X^3 & + & 4X^2 & - & 7X & - & 10 & & X-2 \\ \cline{10-10}
- & \big(X^3 & - & 2X^2\big) & & & & & & X^2+6X+5 \\ \cline{2-8}
 & & & 6X^2 & - & 7X & - & 10 & & \\
 & & - & \big(6X^2 & - & 12X\big) & & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & & 5X & - & 10 & & \\
 & & & & - & \big(5X & - & 10\big) & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Finalement $f(x)-g(x) = (x-2)(x^2+6x+5)$.
Je cherche le signe du facteur de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 36-20 = 16 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-6-4}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6+4}{2} = -1.$$

J'établis donc le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+6x+5		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi

- $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x) \leqslant g(x)$, *i.e.* sur $]-\infty,-5] \cup [-1,2]$,
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x) \geqslant g(x)$, *i.e.* sur $[-5,-1] \cup [2,+\infty[$.

Exercice 4 –

1. (a) $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{3} - \dfrac{9}{4} \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{9}{4} = \dfrac{-\frac{27}{8}}{3} + \dfrac{27}{8} + \dfrac{9}{4} = -\dfrac{9}{8} + \dfrac{27}{8} + \dfrac{18}{8} = \dfrac{36}{8} = \dfrac{9}{2}.$

   (b) Graphiquement, j'établis le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

(c) Je développe la forme factorisée donée par l'énoncé pour retrouver $f(x)$:

$$\frac{(x+3)(2x-3)^2}{12} = \frac{(x+3)(4x^2-12x+9)}{12} = \frac{4x^3-27x+27}{12} = \frac{x^3}{3} - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4} = f(x).$$

J'ai bien montré que pour tout réel x, $\quad f(x) = \dfrac{(x+3)(2x-3)^2}{12}$.

(d) Comme $12 > 0$, il me suffit d'étudier le signe de $(x+3)(2x-3)^2$. Or un carré est toujours positif donc $(2x-3)^2 \geqslant 0$. Par ailleurs $x+3=0 \iff x=-3$.
J'en déduis le tableau de signe suivant pour $f(x)$:

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

2. Pour résoudre l'équation $g(x)=0$, je commence par calculer le discriminant :
$\Delta = 1^2 - 4 \times \dfrac{2}{3} \times (-3) = 1+8 = 9 = 3^2 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-1-3}{\frac{4}{3}} = -3 \quad \text{et} \quad \frac{-1+3}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-3, \dfrac{3}{2}\right\}$.

3. Pour étudier la position des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, il me faut étudier le signe de $f(x)-g(x)$.
D'après la question précédente,

$$g(x) = \frac{2}{3}(x+3)\left(x-\frac{3}{2}\right) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3}.$$

Ainsi

$$f(x)-g(x) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \times \left(\frac{2x-3}{4} - 1\right) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \times \frac{2x-7}{4} = \frac{(x+3)(2x-3)(2x-7)}{12}.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi

- sur $]-\infty, -3]$ et sur $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$, $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$,
- sur $\left[-3, \dfrac{3}{2}\right]$ et sur $\left[\dfrac{7}{2}, +\infty\right[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.