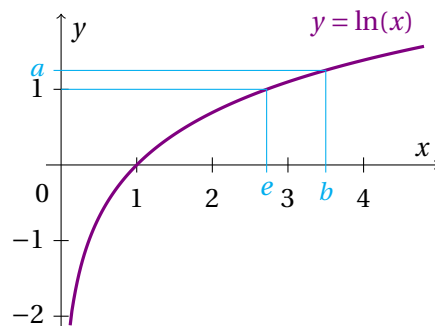


# 13 | Fonction exponentielle

## I – Définition et premières propriétés

Nous pouvons généraliser la démarche qui nous a permis d'introduire dans le chapitre pr  c  dent le nombre  $e$ . Il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre réel  $a$  quelconque : il existe un unique nombre réel  $b$  tel que  $\ln(b) = a$ .

Ainsi, pour  $a = 1$ , on trouve  $b = e$ . Pour  $a = 2$ , on trouve  $b = e^2$ . Pour  $a = 3$ , on trouve  $b = e^3$ . Pour  $a = -1$ , on trouve  $b = e^{-1}$ . Et pour  $a = n$ , où  $n$  est un entier relatif, on trouve  $b = e^n$ .



**Définition 13.1** – Le nombre  $b$  tel que  $\ln(b) = a$  est appelé **exponentielle de  $a$**  et est noté  $e^a$ .

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée  $\exp$ , définie sur  $\mathbf{R}$  et prenant ses valeurs dans  $]0; +\infty[$ . Pour des raisons évidentes, nous noterons le plus souvent  $\exp(x) = e^x$ .

$$]0; +\infty[ \xrightarrow{\ln} \mathbf{R} \quad \text{et en sens inverse} \quad ]0; +\infty[ \xleftarrow{\exp} \mathbf{R}.$$

### Proposition 13.2

- Pour tout réel  $x \in \mathbf{R}$ ,  $e^x > 0$ .
- Pour tout réel  $x \in \mathbf{R}$  et pour tout réel  $y > 0$ ,  $y = e^x \iff x = \ln(y)$ .
- Pour tout réel  $x \in \mathbf{R}$ ,  $\ln(e^x) = x$ .
- Pour tout réel  $x > 0$ ,  $e^{\ln(x)} = x$ .

**Remarque 13.3** – On a

$$\ln(1) = 0 \iff e^0 = 1.$$

**Exemple 13.4** – Résoudre dans  $\mathbf{R}$  les équations suivantes.

- |  |  |
|--|--|
| • $e^x = 1$<br>$e^x = 1 \iff x = \ln(1) \iff x = 0.$   | • $\ln(x) = 2$<br>$\ln(x) = 2 \iff x = e^2.$   |
| • $e^{2t-1} = 1$<br>$e^{2t-1} = 1 \iff 2t - 1 = \ln(1) = 0$<br>$\iff 2t = 1 \iff t = \frac{1}{2}.$ | • $\ln(3x) = \frac{1}{2}$<br>$\ln(3x) = \frac{1}{2} \iff 3x = e^{\frac{1}{2}} \iff x = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}.$ |

**Proposition 13.5**

Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Comme pour la fonction logarithme népérien, on peut tirer plusieurs conséquences de cette propriété fondamentale de la fonction exponentielle.

**Proposition 13.6**

- Pour tout réel  $a \in \mathbf{R}$ ,  $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ .
- Pour tous réels  $a$  et  $b$  dans  $\mathbf{R}$ ,  $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ .
- Pour tout réel  $a \in \mathbf{R}$  et pour tout entier relatif  $n \in \mathbf{N}$ ,  $e^{na} = (e^a)^n$ .

*Démonstration.*

- $e^a \times e^{-a} = e^0 = 1$  donc  $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ .
- $e^{a-b} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \frac{1}{e^b} = \frac{e^a}{e^b}$ .
- $e^{na} = \exp\left(\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{e^a \times e^a \times \dots \times e^a}_{n \text{ fois}} = (e^a)^n$ .

□

**Exemple 13.7** – Soient  $x$  et  $y$  deux réels. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

$$1. \frac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x.$$

$$4. (e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2 = e^{6x} \times e^{-2x} = e^{6x-2x} = e^{4x}.$$

$$2. \frac{(e^x)^2}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x.$$

$$5. e^0 \times e^{-x} \times (e^x)^2 = 1 \times e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x.$$

$$3. \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{x+x} = e^{2x}.$$

$$6. \frac{e^x}{e^y} \times e^{y-x} = e^{x-y} \times e^{y-x} = e^{x-y+y-x} = e^0 = 1.$$

## II – Étude de la fonction exponentielle

### 1 – Dérivée et sens de variation

**Proposition 13.8**

La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et  $(\exp(x))' = \exp(x)$ .

*Démonstration.* On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \ln(\exp(x))$ .

On a  $f'(x) = \frac{(\exp(x))'}{\exp(x)}$ . Mais on sait par ailleurs que  $\ln(\exp(x)) = x$  et donc que  $f(x) = x$ . Donc on a également  $f'(x) = 1$ . Ainsi

$$1 = \frac{(\exp(x))'}{\exp(x)} \text{ et donc } (\exp(x))' = \exp(x).$$

□

**Proposition 13.9**

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ .

*Démonstration.* Pour tout réel  $x$ , on a  $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$ .

Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ . □

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes.

**Proposition 13.10**

Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

- $e^a = e^b$  si et seulement si  $a = b$ ,
- $e^a > e^b$  si et seulement si  $a > b$ .

**Exemple 13.11** – Résoudre dans  $\mathbf{R}$  les équations et inéquations suivantes.

1.  $\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$

$$\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1} \iff e^{5x+2} = e^{2x^2-1} \iff 5x+2 = 2x^2-1 \iff 2x^2-5x+1 = 0.$$

On calcule le discriminant  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 25 - 8 = 17$ . Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}.$$

2.  $e^{x^2+x-1} = 1$

$$e^{x^2+x-1} = 1 \iff e^{x^2+x-1} = e^0 \iff x^2 + x - 1 = 0.$$

On calcule le discriminant  $\Delta = 1 + 4 = 5$ . Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

3.  $e^{2x} \leq e^x$

$$e^{2x} \leq e^x \iff 2x \leq x \iff x \leq 0.$$

Donc  $\mathcal{S} = ]-\infty; 0]$ .

4.  $e^{2x} e^{x^2} < 1$

$$e^{2x} e^{x^2} < 1 \iff e^{2x+x^2} < e^0 \iff 2x + x^2 < 0.$$

Les racines de ce polynôme de degré 2 sont 0 et -2. On en déduit le tableau de signe suivant.

| $x$        | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |   |
|------------|-----------|------|-----|-----------|---|
| $x^2 + 2x$ | +         | 0    | -   | 0         | + |

Et donc  $\mathcal{S} = ]-2; 0[$ .

## 2– Limites

### Proposition 13.12

La fonction exponentielle a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

### Proposition 13.13

La fonction exponentielle a pour limite 0 en  $-\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe d'équation  $y = e^x$  en  $-\infty$ .

**Exemple 13.14** – Calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1$ . Donc par composition,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

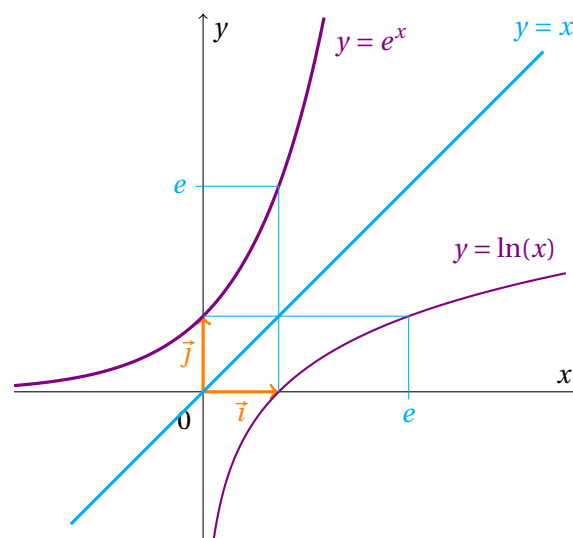
On a  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ . Donc par composition,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ . Donc par composition,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ .

## 3– Courbe représentative

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en  $-\infty$ .
- La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ .



## 4 – Croissance comparée

### Proposition 13.15

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

En particulier, lorsque  $n = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

**Remarque 13.16** – Ces limites sont normalement des formes indéterminées. Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de croissance comparée.

On retient que l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances de  $x$ .

**Exemple 13.17** –

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty.$$

## III – Étude d'une fonction de la forme $\exp(u)$

### Proposition 13.18

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , alors la fonction composée  $f = e^u$  est dérivable sur  $I$  et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = u'(x) e^{u(x)}.$$

On note en abrégé

$$(e^u)' = u' e^u.$$

**Exemple 13.19** – Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = e^{x^3 - 4x^2 + 2x - 3}$ . Calculer  $f'(x)$ .

Posons  $u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$ . On a  $u'(x) = 3x^2 - 8x + 2$ . Donc

$$f'(x) = u'(x) e^{u(x)} = (3x^2 - 8x + 2) e^{x^3 - 4x^2 + 2x - 3}.$$

**Exemple 13.20** – Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25}$ .

1. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0,$$

donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty,$$

donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25} = +\infty.$$

2. Étudier les variations de la fonction  $f$ .

Posons  $u(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25$ . Alors  $u'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$ . Donc

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 6(x^2 - 5x + 6)e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25}.$$

Une exponentielle est toujours positive. Il ne nous reste donc qu'à étudier le signe de  $x^2 - 5x + 6$ . On a  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$ . Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

On en déduit le tableau de signe de  $f'(x)$  et ainsi le tableau de variation de  $f$ .

| $x$                           | $-\infty$ | $2$  |     | $3$ |     | $+\infty$ |
|-------------------------------|-----------|--|-----|-----|-----|-----------|
| $6(x^2 - 5x + 6)$             |           | $+$  | $0$ | $-$ | $0$ | $+$       |
| $e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25}$ |           | $+$  |     | $+$ |     | $+$       |
| $f'(x)$                       |           | $+$  | $0$ | $-$ | $0$ | $+$       |
| $f$                           |           | <div><div><div><math>0</math></div><div><math>e^3</math></div><div><math>e^2</math></div><div><math>+\infty</math></div></div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div></div></div></div></div></div> |     |     |     |           |