15 Systèmes linéaires

I – Définition et exemples

Définition 15.1 – On appelle **système linéaire** de n **équations** à p **inconnues** $x_1, \dots, x_p$ tout système (S) de la forme

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i désignent des réels supposés connus.
La i-ème équation du système (S) est notée L_i et s'appelle la i-ème **ligne** du système (S).
Résoudre le système (S), c'est déterminer tous les p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant les n équations du système. Si tous les b_i sont nuls, on dit que le système (S) est **homogène**.

Exemple 15.2 –

- Le système suivant est un système de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & -4 \end{array} \right.$$

  Le couple $(-1, 3)$ en est une solution car
- Le système suivant est un système **homogène** de trois équations à trois inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 5z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right.$$

  On note que le triplet $(0, 0, 0)$ est solution évidente, mais il peut y en avoir d'autres.
- Le système suivant est un système de trois équations à deux inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 5y & = & -2 \\ 3x & + & y & = & 0 \\ -x & + & 2y & = & 1 \end{array} \right.$$

Remarque 15.3 –

- Il ne faut pas croire qu'un système linéaire admet **toujours** une **unique** solution ! En effet, certains systèmes linéaires admettent une infinité de solutions et d'autres n'admettent aucune solution.
- En pratique, on rencontre principalement des systèmes de deux équations à deux inconnues ou bien des systèmes de trois équations à trois inconnues.

Définition 15.4 – On dit que deux systèmes (S) et (S') sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

II – Résolution des systèmes linéaires

1 – Méthode par substitution

Pour les systèmes de deux équations à deux inconnues, on peut résoudre un système en exprimant une inconnue en fonction de l'autre, puis en remplaçant cette inconnue dans l'autre ligne.

Exemple 15.5 – Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

2 – Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 15.6 – Les opérations suivantes sur les lignes d'un système linéaire (S) sont appelées **opérations élémentaires**.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.
- $L_i \leftarrow aL_i$: remplacement d'une ligne par son produit par un réel **non nul** a.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: remplacement d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.
- $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$: regroupement en une opération des deux opérations précédentes.

Proposition 15.7

Si on transforme un système à l'aide d'<u>**UNE**</u> opération élémentaire, on obtient un système équivalent.

ATTENTION ! Il est très important de n'appliquer qu'<u>**UNE**</u> opération élémentaire à la fois. Sinon on peut ne pas obtenir un système équivalent.

Exemple 15.8 –

$$\begin{cases} x - 7y + 11z = 1 \\ -x + 12y - 19z = 2 \\ -3y + 5z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 7y + 11z = 1 \\ 5y - 8z = 3 \\ -3y + 5z = 3 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

3 – Système triangulaire

Définition 15.9 – Un système triangulaire est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

Le terme **système échelonné** est aussi utilisé pour parler d'un système triangulaire.

Exemple 15.10 – Les systèmes suivants sont des systèmes triangulaires :

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 0 \\ & & -y & = & 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ & & -2y & + & 3z & = & 3 \\ & & & & 2z & = & 6 \end{cases}$$

La résolution des systèmes triangulaires est plutôt simple. On trouve la dernière inconnue grâce à la dernière équation, puis on trouve les autres inconnues successivement en remontant d'équation en équation.

Exemple 15.11 – Résoudre le second système triangulaire ci-dessus.

4 – Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est un procédé algorithmique qui permet de passer d'un système linéaire de n équations à n inconnues quelconque à un système triangulaire équivalent en utilisant uniquement des opérations élémentaires sur les lignes du système.

Exemple 15.12 – Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} & & -y & + & 2z & = & 7 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & -4 \end{cases}$$

Première étape : Il faut que la première ligne contienne la première inconnue (ici x).
Si ce n'est pas le cas, j'échange la première ligne avec une autre ligne qui contient x
(avec si possible le coefficient 1 ou -1 pour simplifier les calculs suivants).

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, je fais "disparaître" la première inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, je "nettoie" la première colonne des x.

Deuxième étape : Il faut que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici y).
Si ce n'est pas le cas, j'échange la deuxième ligne avec une autre ligne contenant y
(avec si possible le coefficient 1 pour simplifier les calculs), **mais sans utiliser la ligne** L_1.

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, je fais "disparaître" la deuxième inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, je "nettoie" la deuxième colonne des y.

Troisième étape : J'obtiens alors un système triangulaire que je sais résoudre.