

EXERCICES — CHAPITRE 3

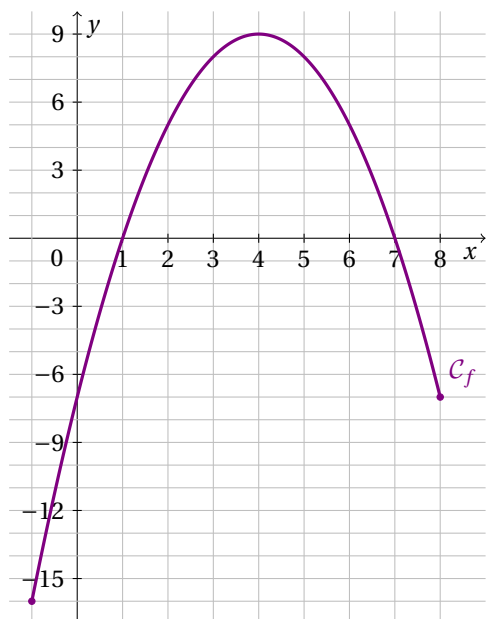
Exercice 1 (★) – Déterminer, dans chacun des cas,

1. l'image de $-2, 0$ et 3 par la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$,
2. l'image de $-3, 0$ et 1 par la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x) = \frac{4x+1}{2x-3}$,
3. l'image de $-1, 0$ et 3 par la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (2x-5)(3x+1)$.

Exercice 2 (★★) – Déterminer, dans chacun des cas, et s'ils existent,

1. les antécédents de $2, -1$ et 0 par la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x$,
2. les antécédents de $2, -1$ et 0 par la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 5x + 1$,
3. les antécédents de 2 et 0 par la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2x^2 + 1$,
4. les antécédents de $2, -1$ et 0 par la fonction j définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ par $j(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$,
5. les antécédents de 5 et 1 par la fonction k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = x^2 + 5x + 5$.

Exercice 3 (★) – Sur la figure ci-dessous, on donne la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f . Déterminer graphiquement (aucune justification n'est demandée),



1. l'image de 3 par f ,
2. $f(8)$ et $f(0)$,
3. l'ordonnée du point de \mathcal{C}_f ayant pour abscisse 5 ,
4. les éventuels antécédents de -7 par f ,
5. les solutions de l'équation $f(x) = 0$,
6. le tableau de signe de f ,
7. le tableau de variation de f ,
8. le maximum de f et pour quelle valeur il est atteint,
9. les solutions de l'inéquation $f(x) > 5$.

Exercice 4 (★) – Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x$ 2. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + x$ 3. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 2x$ 4. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. f déf. sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ par $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$ 6. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ 7. f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ |
|--|--|

Exercice 5 (★★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Étudier la parité de f .
2. On admet que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
En déduire, grâce à la question précédente, le sens de variation de f sur $] -\infty, 0]$.
Dresser alors le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .
3. En déduire que pour tout réel x , $0 \leq f(x) \leq 1$.

Exercice 6 (★) – Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction f , dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-3	0	2	4
f	3	0	1	-1

Exercice 7 (★★) – Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ , dont le tableau de variation est donné ci-dessous. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

x	0	2	$+\infty$
f	-1	3	

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. f est croissante sur $[-1, 3]$ 2. f est décroissante sur $[2, +\infty[$ 3. $f(2) \leq f(3)$ 4. $f(1) \geq f(2)$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\forall x \in [0, 2], f(x) \leq 1$ 6. $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq 3$ 7. $\exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) < 0$ 8. $\exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 4$ |
|---|---|

Exercice 8 (★★) – Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Pour chacune des implications suivantes, dire si celle-ci est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. Si f est croissante sur $[0, 2]$, alors f est croissante sur $[0, 1]$.
2. Si $f(0) < f(1)$, alors f est croissante sur $[0, 1]$.
3. Si f a un maximum en 1 sur $[0, 1]$, alors f est croissante sur $[0, 1]$.
4. Si f n'est pas croissante sur $[0, 1]$, alors f est décroissante sur $[0, 1]$.

Exercice 9 (★★) – Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{3+2x^3}$. Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

Exercice 10 (★★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

Montrer que la fonction f est majorée par 2. En déduire que f est bornée.

Exercice 11 (★★) –

1. Donner le domaine de définition ainsi que l'expression des fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$ pour les fonctions f et g définies ci-dessous.

$$(a) \quad f(x) = 2x^2 - x \quad \text{et} \quad g(x) = 3x + 2, \quad (c) \quad f(x) = \sqrt{2x+3} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 2.$$

$$(b) \quad f(x) = 1 - x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x},$$

2. Donner le domaine de définition des fonctions h suivantes et les mettre sous la forme d'une composée $f \circ g$, où les fonctions f et g sont à définir.

$$(a) \quad h(x) = \frac{x^2}{x^2+4},$$

$$(b) \quad h(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Exercice 12 (★★★) – Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

$$1. \quad a(x) = x^4 - 5x^2 + 2x + 1$$

$$6. \quad f(x) = \sqrt{3x-2}$$

$$10. \quad k(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{2x^2-3x-9}$$

$$2. \quad b(x) = x + \sqrt{x}$$

$$7. \quad g(x) = \frac{8x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 6}$$

$$11. \quad l(x) = \frac{x^2 + 5x - 7}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$$

$$3. \quad c(x) = \frac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$$

$$8. \quad h(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 18}$$

$$12. \quad m(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$$

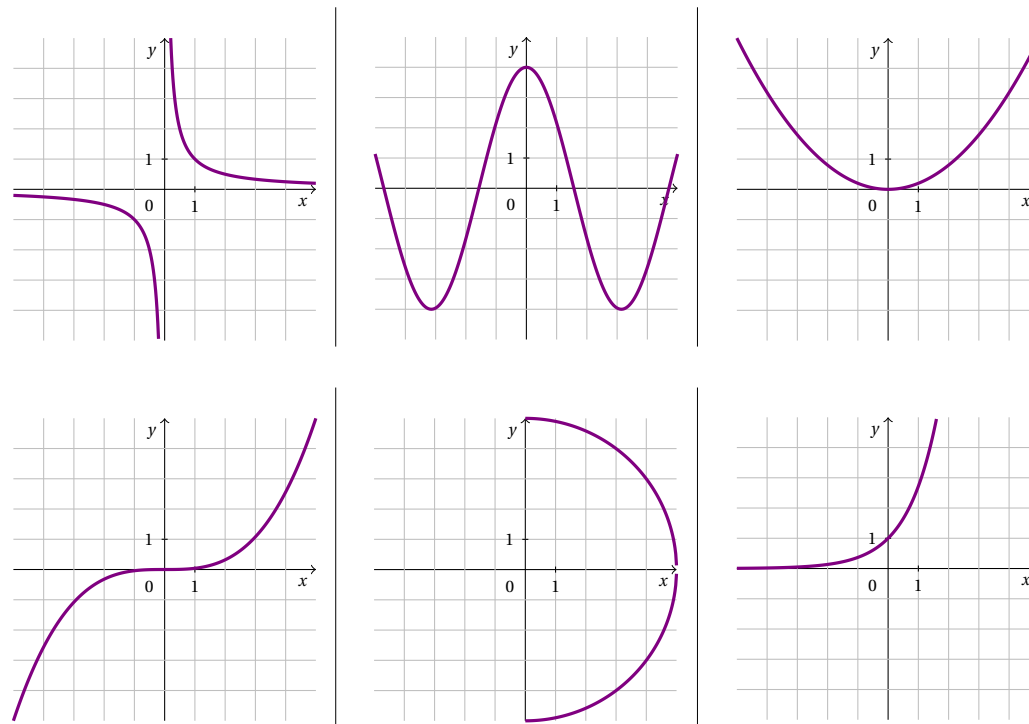
$$4. \quad d(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$$

$$5. \quad e(x) = \frac{x+6}{x^2+5x+1}$$

$$9. \quad j(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

Exercice 13 (★★) – Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x + 4$ est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 14 (★) – Conjecturer, d'après les graphes, si les fonctions suivantes sont bijectives. On précisera bien les ensembles de départ et d'arrivée.



Exercice 15 (★★) – Soit f la fonction $f: \begin{matrix} [1, +\infty[& \rightarrow & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 - 1 \end{matrix}$. f est-elle bijective?