

## EXERCICES — CHAPITRE 12

**Exercice 1 (★)** – Soient  $x$  et  $y > 0$ . Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

- |  |  |
|--|--|
| $1. \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2x)$               | $4. \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln(x)$  |
| $2. \ln(x^3) - \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ | $5. \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| $3. 2\ln(x^3) - 3\ln(x^2)$                               | $6. \ln(2x+2) - \ln(x+1)$  |

**Exercice 2 (★★)** – Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle considéré.

1.  $\ln(x+4) = 2\ln(x+2)$  sur  $I = ]-2, +\infty[$
2.  $\ln(x+3) + \ln(x+1) = \ln(x+13)$  sur  $I = ]-1, +\infty[$
3.  $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2)$  sur  $I = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$
4.  $\ln(x) = 1$  sur  $I = ]0, +\infty[$

**Exercice 3 (★★)** – Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle considéré.

1.  $\ln(x-2) \leq 0$  sur  $I = ]2, +\infty[$
2.  $\ln(4x+5) - \ln(x+2) \geq \ln(3)$  sur  $I = \left]-\frac{5}{4}, +\infty\right[$
3.  $\ln(x-3) \geq 1$  sur  $I = ]3, +\infty[$
4.  $\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq 0$  sur  $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

**Exercice 4 (★★)** – Déterminer les limites des fonctions suivantes en  $+\infty$ .

- |                                |   |                                 |
|--------------------------------|---|---------------------------------|
| $1. f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$   | $3. f(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$               | $5. f(x) = \frac{\ln(2x)}{x^2}$ |
| $2. f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$ | $4. f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ | $6. f(x) = x - \ln(x)$          |

**Exercice 5 (★★)** – Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0.

- |                              |                                   |
|------------------------------|-----------------------------------|
| $1. f(x) = x - \ln(x)$       | $4. f(x) = x \ln(x+1)$            |
| $2. f(x) = (x^2 + 1) \ln(x)$ | $5. f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$  |
| $3. f(x) = x \ln(x^2)$       | $6. f(x) = (x^2 - 5x + 6) \ln(x)$ |

**Exercice 6 (★★)** – Dans chacun des cas suivants, étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$ .

- |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $1. f(x) = 3x + 2 - \ln(x)$       | $3. f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$ |
| $2. f(x) = \frac{2x + \ln(x)}{x}$ | $4. f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$  |

**Exercice 7 (★★★)** – Donner le domaine de définition et calculer la dérivée  $f'(x)$  des fonctions suivantes.

- |                              |                                   |                                  |
|------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| $1. f(x) = x - 2 - 2\ln(x)$  | $4. f(x) = x^2 + 1 + 2\ln(x)$     | $7. f(x) = \ln(x-4)$             |
| $2. f(x) = x \ln(x)$         | $5. f(x) = x^2 \ln(x)$            | $8. f(x) = \ln(1+x^2)$           |
| $3. f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ | $6. f(x) = \frac{x + 3\ln(x)}{x}$ | $9. f(x) = \frac{10}{\ln(4x-2)}$ |

**Exercice 8 (★★★)** – Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ .

1. Étudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ . Calculer  $f'(x)$ .
3. Étudier les variations de  $f$ .
4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction  $f$ .

**Exercice 9 (★★★)** – Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ .

On note  $C_f$  sa courbe représentative.

1. a) Étudier les limites de  $f$  aux bornes de son intervalle de définition.  
b) La courbe  $C_f$  admet-elle des asymptotes?
2. a) Montrer que  $f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$ .  
b) Étudier les variations de la fonction  $f$ .
3. Donner une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse 1.

**Exercice 10 (★★★)** –

### Partie I

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 1 - x^2 - \ln(x)$ .

1. Calculer la dérivée de la fonction  $g$  et étudier son signe.  
En déduire les variations de la fonction  $g$ .
2. Calculer  $g(1)$ . En déduire le signe de  $g(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

**Partie II**

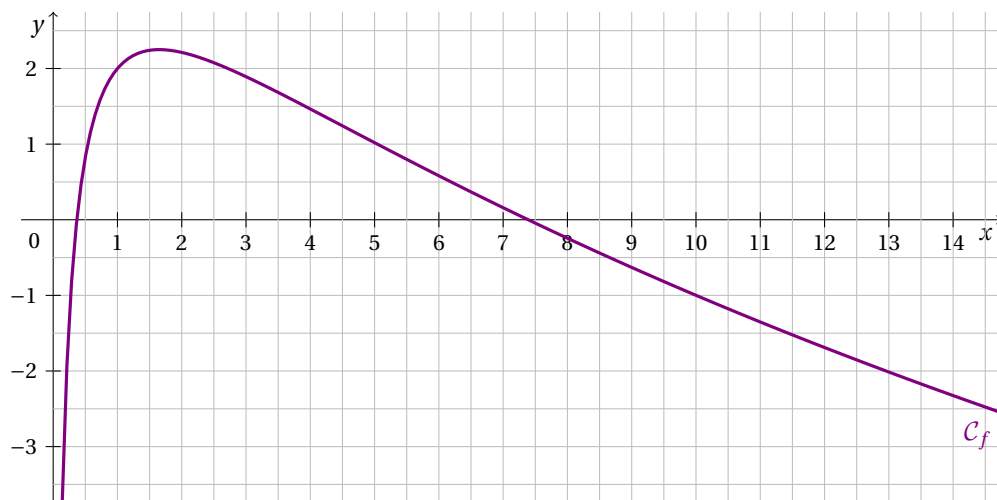
Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x} - \frac{x}{2} + 1.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) Calculer la limite de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.  
b) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
c) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -\frac{x}{2} + 1$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .  
d) Calculer les coordonnées du point  $A$ , intersection de la droite  $\mathcal{D}$  et de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
2. a) Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ .  
b) En déduire le signe de  $f'(x)$  puis les variations de la fonction  $f$ .
3. Tracer la droite  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  dans un repère.

**Exercice 11** (★ ★ ★) – On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  telle que pour tout réel  $x$  de cet intervalle,  $f(x) = (1 + \ln(x))(2 - \ln(x))$ .  
La courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est donnée ci-dessous.



1. Calculer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. a) On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ . Calculer  $f'(x)$  et vérifier que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0, +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x}.$$

- b) Étudier les variations de  $f$ . On précisera la valeur exacte du maximum de  $f$  et la valeur exacte de  $x$  pour laquelle il est atteint.
3. Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
4. a) Donner le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 2$ .  
b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(1 + X)(2 - X) = 2$ .  
c) En déduire les solutions de l'équation  $f(x) = 2$ .

**Exercice 12** (★ ★ ★) – **Extrait d'ECRICOME 2019 / Ex2**

Soit  $g$  la fonction numérique réelle définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer la limite de  $g$  en 0 et interpréter graphiquement le résultat.  
b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ . En déduire la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de  $g$  sur  $]0, +\infty[$  et dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote oblique  $\mathcal{D}$  dont on précisera une équation.  
b) Étudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 13** (★ ★ ★) – Calculer les intégrales suivantes.

$$1. I_1 = \int_1^e \frac{-2}{x} dx$$

$$2. I_2 = \int_1^2 \frac{1}{4x} dx$$

$$3. I_3 = \int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$$

$$4. I_4 = \int_2^e \frac{\ln(x)^2}{x} dx$$