

7 | Intégrales généralisées

I – Rappels d'intégration sur un segment

1 – Primitives

Définition 7.1 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit qu'une fonction F est une **primitive** de la fonction f sur I si F est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 7.2 – Vérifier les assertions suivantes.

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur \mathbb{R} de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
- $G : x \mapsto e^x - 2$ est une primitive sur \mathbb{R} de $g : x \mapsto e^x$.
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H : x \mapsto x^2 + C$, pour tout $C \in \mathbb{R}$, sont des primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
- $H : x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de $h : x \mapsto \ln(x)$.

Remarque 7.3 –

- Comme F est dérivable sur I , la fonction F est en particulier continue sur I .
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f .
C'est pourquoi on parle d'**une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f .

Théorème 7.4

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I .
- Si F est une primitive de f sur I , alors toute autre primitive de f sur I est de la forme $F + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné :
Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 7.5 – Montrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = x^2 - 1$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ qui vérifie $F(1) = 0$.

2 – Primitives usuelles

Pour rechercher des primitives, on utilise les formules connues pour la dérivation et les dérivées usuelles. Les formules suivantes sont valables sur tout intervalle où la fonction est continue. Par ailleurs, C désigne une constante réelle.

Fonction	Primitives
$f(x) = a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$

Fonction	Primitives
$f = u' \times u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u} + C$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} + C$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u) + C$
$f = u' e^u$	$F = e^u + C$

Exemple 7.6 –

- Déterminer les primitives de la fonction f définie par $f(x) = xe^{x^2}$.
- Déterminer les primitives de la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.
- Déterminer les primitives de la fonction h définie par $h(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$.
- Déterminer les primitives de la fonction i définie par $i(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$.

- Déterminer les primitives de la fonction j définie par $j(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$.

- Déterminer les primitives de la fonction k définie par $k(x) = \frac{\ln(x)^2}{x}$.

3 – Intégration sur un segment

Définition 7.7 – Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I . Soit F une primitive de f sur I . On appelle **intégrale de f entre a et b** le nombre réel $F(b) - F(a)$, noté $\int_a^b f(t) dt$:

$$\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 7.8 – Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 7.9 – Calculer chacune des intégrales suivantes.

- $\int_1^3 3t^2 + 2t - 1 dt$
- $\int_1^e \frac{1}{t} dt$
- $\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx$

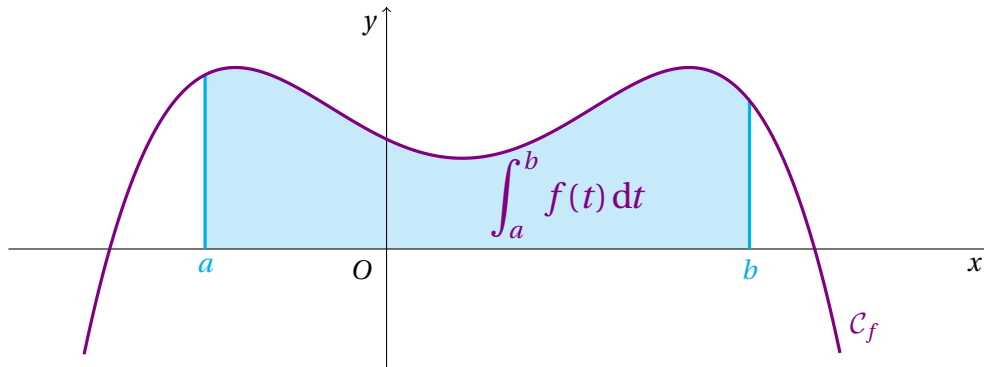
Proposition 7.10

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I . Soit F une primitive de f sur I . Alors

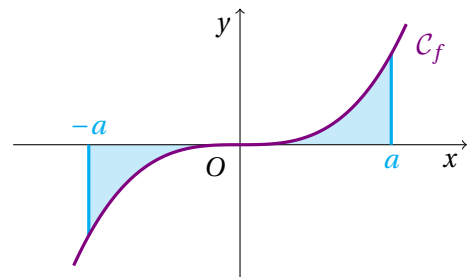
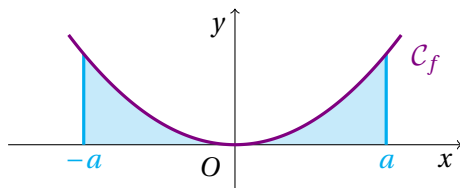
$$\int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$$

Proposition 7.11 – Interprétation géométrique

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f tracée dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Alors $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire de la surface comprise entre \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

**Proposition 7.12**

- Si f est continue et paire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
- Si f est continue et impaire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

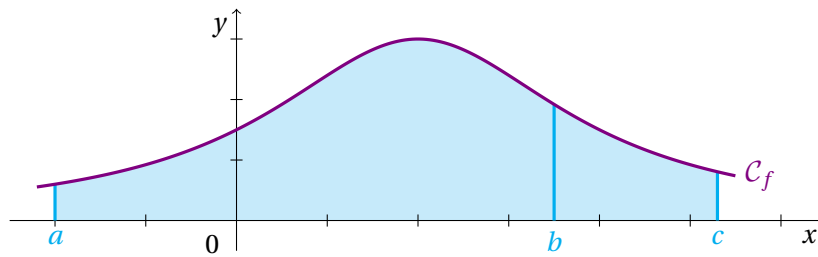
**Exemple 7.13 –**

- $\int_{-1}^1 t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt$
- $\int_{-1}^1 e^{|t|} dt$

Proposition 7.14 – Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a , b et c trois réels de I . Alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

**Proposition 7.15 – Intégration par parties**

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et a et b deux réels de I . Alors

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt.$$

Exemple 7.16 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_0^1 t e^t dt$

2. $I_2 = \int_1^3 \ln(x) dx$

3. $I_3 = \int_1^2 x \ln(x) dx$

II – Intégrales généralisées

1 – Définitions et exemples

Définition 7.17 – Soient a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

- On dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ **converge** si et seulement si l'intégrale $\int_a^M f(t) dt$ admet une limite **finie** lorsque M tend vers $+\infty$.
Alors cette limite est notée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et est appelée **intégrale impropre** de f sur $[a, +\infty[$.
- On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ **diverge** si et seulement si elle ne converge pas.

Exemple 7.18 –

- Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge et calculer sa valeur.
- Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et calculer sa valeur.
- Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.
- Montrer que l'intégrale $\int_4^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}}$ diverge.

Définition 7.19 – Soient b un réel et f une fonction continue sur $] -\infty, b]$.

- On dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ **converge** si et seulement si l'intégrale $\int_m^b f(t) dt$ admet une limite **finie** lorsque m tend vers $-\infty$.
Alors cette limite est notée $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ et est appelée **intégrale impropre** de f sur $] -\infty, b]$.
- On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ **diverge** si et seulement si elle ne converge pas.

Exemple 7.20 –

- Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{-t} dt$ diverge.
- Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^1 e^{2t} dt$ converge et calculer sa valeur.

Définition 7.21 – Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} .

- On dit que l'**intégrale généralisée** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ **converge** lorsque pour un réel c arbitrairement choisi, les intégrales $\int_{-\infty}^c f(t) dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ sont toutes les deux convergentes. Dans ce cas, on note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^c f(t) dt + \int_c^{+\infty} f(t) dt.$$
- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ **diverge**.

Remarque 7.22 –

- Une intégrale impropre n'est pas une intégrale au sens qui était celui du cours de première année : il s'agit en réalité d'une limite. En particulier, il n'est pas possible d'intégrer $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ par parties.
En revanche, on peut faire une intégration par parties sur $\int_a^M f(t) dt$ puis passer à la limite lorsque M tend vers $+\infty$.
- En cas de convergence, la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ ne dépend pas du réel c choisi.

Définition 7.23 – Déterminer la **nature** d'une intégrale impropre consiste à déterminer si cette intégrale impropre est **convergente** ou **divergente**.

Exemple 7.24 – Étudier la nature de l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt.$$

2 – Un critère de convergence

Théorème 7.25

Soient a un réel et f une fonction continue et **positive** sur $[a, +\infty[$. Soit F la fonction définie sur $[a, +\infty[$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Les résultats suivants sont vérifiés :

- La fonction F est croissante et positive sur $[a, +\infty[$.
- L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction F est majorée sur $[a, +\infty[$, *i.e.* s'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad \int_a^x f(t) dt \leq K.$$

Exemple 7.26 – Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

On introduit les fonctions F et G définies sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ et $G(x) = \int_1^x e^{-t} dt$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et la calculer.

2. Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

3. En déduire que la fonction F est majorée sur $[1, +\infty[$.

4. Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

Remarque 7.27 – Le résultat est le même pour les intégrales sur $] -\infty, b]$.

3 – Propriétés

Parmi les propriétés des intégrales définies sur un segment, certaines restent valables après passage à la limite. Voici donc les résultats adaptés au contexte des intégrales généralisées.

Proposition 7.28 – Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent, alors pour tous réels $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$ converge et

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Proposition 7.29 – Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et $c \in [a, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^{+\infty} f(t) dt.$$

Proposition 7.30 – Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge. Alors

- $\int_a^{+\infty} f(t) dt \geq 0$.
- Si f n'est pas identiquement nulle sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt > 0$.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, +\infty[$.

Proposition 7.31 – Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$. On suppose $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq g(t)$ et que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent. Alors

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Remarque 7.32 – Les propriétés ci-dessus restent valables pour les autres intégrales généralisées du type

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$