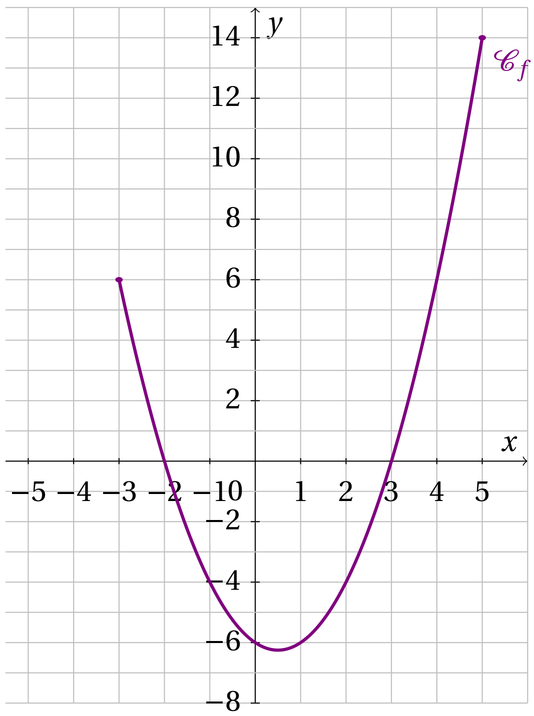
INTERRO DE COURS 4

Exercice 1 – Soit f la fonction dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement :

1. $f(-1)$,
2. l'image de -2 par f,
3. les éventuels antécédents de -6 par f,
4. les éventuels antécédents de 8 par f,
5. les éventuels antécédents de -7 par f,
6. l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 4,
7. les solutions de l'équation $f(x) = 6$,
8. le maximum de f et pour quelle valeur il est atteint,
9. la solution de l'inéquation $f(x) \leq 6$.

Solution : Graphiquement, on obtient que les réponses sont

$$-4; \quad 0; \quad 0 \text{ et } 1; \quad 4.2; \quad \emptyset; \quad 6; \quad -3 \text{ et } 4; \quad 14, \text{ atteint en } x = 5; \quad [-3;4].$$

Exercice 2 – Étudier la parité des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^3 + x$,
2. $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x^2}$,
3. $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 2}$,
4. $f(x) = x^5 + \dfrac{1}{x} - x^3$.

Solution :

1. f est une fonction polynomiale donc définie sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}$ est bien symétrique par rapport à 0.
$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$$
donc la fonction f est impaire.
2. f est une somme de fonction polynomiale et de fraction rationelle dont la seule valeur interdite est 0. Elle est donc définie sur $\mathbf{R}^*$ et $\mathbf{R}^*$ est bien symétrique par rapport à 0.
$$f(-x) = (-x)^4 + \frac{1}{(-x)^2} = x^4 + \frac{1}{x^2} = f(x)$$
donc la fonction f est paire.

3. On a $f(1) = \sqrt{0} = 0$ et $f(-1)$ qui n'est pas définie (il nous faudrait prendre la racine carrée de -2, impossible). Donc l'ensemble de défnition de f n'est pas symétrique par rapport à 0, elle ne peut être ni paire ni impaire.
4. f est une somme de fonctions polynomiales et de fraction rationelle dont la seule valeur interdite est 0. Elle est donc définie sur $\mathbf{R}^*$ et $\mathbf{R}^*$ est bien symétrique par rapport à 0.
$$f(-x) = (-x)^5 + \frac{1}{-x} - (-x)^3 = -x^5 - \frac{1}{x} + x^3 = -\left(x^5 + \frac{1}{x} - x^3\right) = -f(x)$$
donc la fonction f est impaire.

Exercice 3 – Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ dont voici le tableau de variation.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement.

1. f est croissante sur $[4; +\infty[$,
2. f est décroissante sur $[0; +\infty[$,
3. $\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) > 0$,
4. $\exists x \in \mathbf{R}_+, f(x) < 0$,
5. $\exists x \in \mathbf{R}_+, f(x) = 2$,
6. $f(4) \leq f(5)$.

x	0		4		$+\infty$
f	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Solution :

1. Vrai, le tableau de variation présente une flèche ascendante sur l'intervalle $[4; +\infty[$.
2. Faux, puisque f est croissante sur l'intervalle $[4; +\infty[$.
3. Faux, car $4 \in \mathbf{R}_+$ et $f(4) = 0$.
4. Faux, le tableau affirme que le minimum de f est 0, donc il n'existe pas de réel ayant une image strictement négative.
5. Vrai, comme $f(0) = 3$ et $f(4) = 0$, il y a nécessairement un réel $x \in [0; 4]$ tel que $f(x) = 2$.
6. Vrai, comme f est croissante sur $[4; 5]$, on sait que $f(4) \leq f(5)$.