

EXERCICES — CHAPITRE 3

Exercice 1 – Déterminer la nature des séries suivantes et préciser leur somme en cas de convergence.

- | | | |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ | 8. $\sum_{n \geq 0} \frac{5}{3^n}$ | 15. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{7^{n+1}}$ |
| 2. $\sum_{n \geq 1} 2^n$ | 9. $\sum_{n \geq 0} \frac{5}{3^n} + \frac{3}{4^n}$ | 16. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ |
| 3. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ | 10. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{5^n}$ | 17. $\sum_{n \geq 0} \frac{-5^{n+1}}{n!}$ |
| 4. $\sum_{n \geq 0} n$ | 11. $\sum_{n \geq 0} \frac{-1}{3^n}$ | 18. $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n!}$ |
| 5. $\sum_{n \geq 0} 0.01$ | 12. $\sum_{n \geq 0} \frac{5}{4^{n+2}}$ | 19. $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^n n!}$ |
| 6. $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ | 13. $\sum_{n \geq 2} \frac{3}{4^n}$ | 20. $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)!}$ |
| 7. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$ | 14. $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$ | |

Exercice 2 –

1. Le but de cette question est de montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge et de déterminer sa somme.

(a) Calculer $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ et $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(c) Conclure.

2. À l'aide d'un raisonnement similaire à celui effectué dans la question 1., démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa somme.

Indication : Commencer par vérifier qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}.$$

3. À l'aide d'un raisonnement similaire à celui effectué dans la question 1., démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa somme.

Indication : Commencer par vérifier qu'il existe trois réels a, b et c tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

Exercice 3 – En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes.

$$1. \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \left| \quad 2. \sum_{n \geq 2} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} \quad \right| \quad 3. \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 4 – Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite définie pour tout $n \geq 2$ par

$$u_n = \frac{n}{n^2 - 1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge. (Rappel : la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.)

Exercice 5 – Pour tout $n \geq 3$, on pose $S_n = \sum_{k=3}^n \frac{5}{4^k \ln(k)}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$,

$$0 \leq \frac{5}{4^n \ln(n)} \leq \frac{5}{4^n}.$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 3$,

$$0 \leq \sum_{k=3}^n \frac{5}{4^k \ln(k)} \leq \frac{5}{48} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right).$$

3. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 3}$ est majorée.

4. Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n \geq 3}$.

5. En déduire que la série $\sum_{n \geq 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ converge et que

$$0 \leq \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{5}{4^k \ln(k)} \leq \frac{5}{48}.$$

Exercice 6 – Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Vérifier que pour tout $k \geq 2$, on a l'encadrement

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a l'encadrement

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

3. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est majorée.

4. Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

5. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que

$$\frac{3}{2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Exercice 7 – On considère la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note S_n sa n -ième somme partielle.

1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Indication : Multiplier par l'expression conjuguée $\sqrt{k+1} + \sqrt{k}$.

2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n+1} - 1 \leq S_n.$$

3. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente?

Exercice 8 – Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{4k^3}{3k^4 - 1}$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\frac{4k^3}{3k^4 - 1} \geq \frac{4}{3k}$.

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{4n^3}{3n^4 - 1}$ est divergente.

Exercice 9 – Le but de cet exercice est de prouver que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

1. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- (a) Soit k un élément de \mathbb{N}^* . Justifier que l'on a

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

- (b) En déduire par intégration que pour tout k de \mathbb{N}^* , on a

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

- (c) En déduire par sommation que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leq S_n.$$

- (d) Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ne converge pas absolument.

2. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. Calculer $\sum_{k=1}^n (-t)^{k-1}$.

- (b) En déduire que l'on a pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$T_n = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

- (c) Montrer à l'aide du théorème des gendarmes que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0.$$

- (d) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right) = 0.$$

- (e) Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que sa somme est donnée par

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$