DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 – BSB 2019 / Ex2

1. Pour calculer la limite en $-\infty$, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x = 1\end{array}\right\}\text{ Par quotient,}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

J'en déduis que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote horizontale, au voisinage de $-\infty$, d'équation $y = 0$.

2. (a) Je pars de l'expression $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ et je multiplie numérateur et dénominateur par e^x pour obtenir l'expression de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1\times e^x}{(1+e^{-x})\times e^x} = \frac{e^x}{e^x+e^0} = \frac{e^x}{1+e^x} = f(x).$$

J'ai bien montré que $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(b) Grâce à cette nouvelle expression, je calcule la limite de f en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1+0 = 1\end{array}\right\}\text{ Par quotient,}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$

J'en déduis alors que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f admet une seconde asymptote horizontale, au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = 1$.

3. (a) La fonction f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1+e^x$.
Puisque $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x\times\left(1+e^x\right)-e^x\times e^x}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

J'ai bien montré que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

(b) Les variations de la fonction f s'obtiennent en étudiant le signe de $f'(x)$. Ici, le signe est immédiat puisque le dénominateur est un carré et le numérateur est une exponentielle. Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad f'(x) > 0 \quad$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0 $\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$ 1

(c) L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation devient

$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0).$$

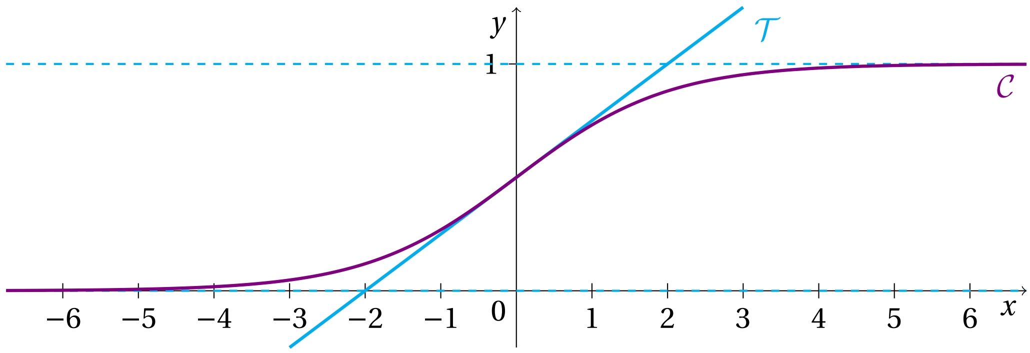
Or

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{e^0}{\left(1+e^0\right)^2} = \frac{1}{\left(1+1\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

Donc l'équation devient

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

4. Je sais que la convexité de f s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde $f''(x)$. Comme $f''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $(1+e^x) > 0$, j'en déduis que le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $(1-e^x)$. Or $1 - e^x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant e^x \iff 0 \geqslant x$, donc j'en déduis que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ puis concave sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   Le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est point d'inflexion : la tangente en ce point, calculée précédemment, traverse la courbe en ce point.
5. La courbe admet deux asymptotes horizontales, je connais l'équation de la tangente à la courbe en 0. Je suis donc capable de tracer l'allure de la courbe.



Exercice 2 – BSB 2019 / Ex3

1. Si la pièce amène FACE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_2$ et donc la boule tirée est rouge avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi $P_F(R_1) = \frac{1}{2}$.
   Au contraire, si la pièce amène PILE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_1$ et la boule tirée est rouge avec une probabilité 1. Autrement dit $P_{\overline{F}}(R_1) = 1$.
   Alors d'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer une boule rouge est donnée par

$$\begin{aligned} P(R_1) &= P(F \cap R_1) + P(\overline{F} \cap R_1) = P(F) \times P_F(R_1) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(R_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2. (a) Si la pièce amène FACE, alors les tirages s'effectuent dans l'urne $\mathcal{U}_2$. D'après la formule des probabilités composées,

$$P_F(R_1 \cap R_2) = P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(R_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

De même,
$$P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2) = P_{\overline{F}}(R_1) \times P_{\overline{F} \cap R_1}(R_2) = 1 \times 1 = 1.$$
Alors en appliquant la formule des probabilités totales, comme $\{F, \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer deux boules rouges de suite est donnée par
$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= P(F) \times P_F(R_1 \cap R_2) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

(b) Je cherche ici $P_{R_1 \cap R_2}(\overline{F})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,
$$P_{R_1 \cap R_2}(\overline{F}) = \frac{P(\overline{F} \cap R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{7} = \frac{6}{7}.$$
Si les deux boules tirées sont rouges, la probabilité que la pièce ait amené PILE est de $\dfrac{6}{7}$.

3. (a) Si une boule blanche est tirée au premier tirage, alors je sais qu'il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y = 1$. Si au contraire une boule rouge est tirée, il peut s'agir de l'urne $\mathcal{U}_1$ ou de $\mathcal{U}_2$ et il faut donc faire au moins un autre tirage.
Si ce deuxième tirage donne une boule blanche, alors encore une fois, je sais qu'il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y = 2$. Si au contraire une boule rouge est tirée, alors il peut encore s'agir de l'urne $\mathcal{U}_1$ ou de $\mathcal{U}_2$. Il faut donc refaire un troisième tirage pour déterminer dans quelle urne l'on se trouve.
Au troisième tirage, si une boule blanche est tirée, alors il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$. Cependant, si une boule rouge est tirée alors ce ne peut être que l'urne $\mathcal{U}_1$ puisque seule l'urne $\mathcal{U}_1$ contient plus de 2 boules rouges.
Ainsi j'ai bien montré que $Y(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

(b) Comme expliqué à la question précédente, l'événement $[Y = 1]$ ne se réalise que lorsqu'une boule blanche est tirée au premier tirage. Ceci n'est possible que si la boule a été tirée dans l'urne $\mathcal{U}_2$ et donc que la pièce a amené FACE.
Ainsi j'ai bien montré que
$$[Y = 1] = F \cap B_1.$$
Alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,
$$P(Y = 1) = P(F \cap B_1) = P(F) \times P_F(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

(c) Par un raisonnement similaire à la question précédente, je peux montrer que
$$[Y = 2] = F \cap R_1 \cap B_2.$$
Alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,
$$P(Y = 2) = P(F \cap R_1 \cap B_2) = P(F) \times P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

(d) Par complémentarité, j'obtiens que
$$P(Y = 3) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

(e) Je connais désormais la loi de Y donc je peux facilement calculer son espérance :
$$E(Y) = 1 \times P(Y = 1) + 2 \times P(Y = 2) + 3 \times P(Y = 3) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{7}{4} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exercice 3 – ESCP 2015 / Ex2

1. (a) Pour cette question, $a = b = -1$, donc la matrice M est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Cette matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si $1 \times (-1) - 1 \times (-1) \neq 0$.
Or $1 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 - (-1) = 0$, donc la matrice M n'est pas inversible.

   (b) Je commence par calculer M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Puisque M^2 est la matrice nulle, alors pour tout $n \geqslant 2$,

$$M^n = M^2 \times M^{n-2} = 0_2 \times M^{n-2} = 0_2.$$

2. (a) Pour cette question, $b = a$, donc la matrice M est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$.
Cette matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si $1 \times a - 1 \times a \neq 0$.
Or $1 \times a - 1 \times a = a - a = 0$, donc la matrice M n'est pas inversible.

   (b) Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 2$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n = (1+a)^{n-1} M$.

Initialisation : Pour $n = 2$, je calcule M^2 et vérifie que $M^2 = (1+a) \times M = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix}$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix} = (1+a) \times M.$$

Ainsi $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $M^n = (1+a)^{n-1} M$. Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = (1+a)^{n-1} M \times M = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^{n-1} \times (1+a) M = (1+a)^n M.$$

Donc $M^{n+1} = (1+a)^n M$. Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 2$, alors par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$, *i.e.*

$$\forall n \geqslant 2, \quad M^n = (1+a)^{n-1} M.$$

3. Dans le cas général, la matrice M est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et cette matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si

$$1 \times b - 1 \times a \neq 0 \iff b - a \neq 0 \iff a \neq b.$$

4. (a) Je cherche à exprimer la probabilité de l'événement $[X = Y]$. Les deux variables aléatoires doivent êtres égales mais peuvent prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi

$$[X = Y] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \text{ et } Y(\omega) = k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*\}.$$

i.e.

$$[X = Y] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \text{ et } Y(\omega) = k\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \big([X = k] \cap [Y = k]\big).$$

Alors, par incompatibilité des événements puis par indépendances des variables aléatoires X et Y, j'obtiens que les probabilités concernées vérifient

$$P\big([X=Y]\big)=\sum_{k=1}^{+\infty} P\big([X=k]\cap[Y=k]\big)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\times P(Y=k).$$

Ainsi j'ai bien montré que $P(X=Y)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\times P(Y=k)$.

(b) Afin d'établir la convergence de cette somme, je passe par la somme partielle.
Pour $N\in\mathbb{N}^*$, je fixe $S_N=\sum_{k=1}^{N} p^2q^{2k-2}$. Alors

$$S_N=\sum_{k=1}^{N} p^2q^{2k-2}=p^2\times\sum_{k=1}^{N}\left(q^2\right)^{k-1}=p^2\times\sum_{n=0}^{N-1}\left(q^2\right)^{n}\qquad\text{en posant } n=k-1.$$

Je reconnais alors la somme partielle d'une série géométrique de raison q^2.
Puisque $q=1-p$ avec $0<p<1$, alors $0<q<1$ et par conséquent $0<q^2<1$.
Donc la série géométrique est convergente et admet pour somme $\frac{1}{1-q^2}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2q^{2k-2}=\lim_{N\to+\infty} S_N=p^2\times\frac{1}{1-q^2}=\frac{(1-q)^2}{1-q^2}=\frac{(1-q)^2}{(1+q)(1-q)}=\frac{1-q}{1+q}.$$

(c) L'événement A est l'événement contraire de $[X=Y]$ puisque d'après la question **3.**, la matrice N n'est inversible que lorsque les deux variables aléatoires X et Y prennent des valeurs différentes. Donc

$$P(A)=1-P\big(X=Y\big).$$

Mais comme X et Y suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre p, alors pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\quad P(X=k)=P(Y=k)=p\times(1-p)^{k-1}=p\times q^{k-1}$. Donc

$$P(A)=1-\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\times P(Y=k)=1-\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}\times pq^{k-1}=1-\sum_{k=1}^{+\infty} p^2q^{2k-2}.$$

Alors grâce au résultat de la question précédente, j'en déduis que

$$P(A)=1-\frac{1-q}{1+q}=\frac{1+q}{1+q}-\frac{1-q}{1+q}=\frac{1+q-(1-q)}{1+q}=\frac{2q}{1+q}.$$

5. (a) Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ et tout entier $n\in\mathbb{N}$, la formule du binôme de Newton me donne

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times x^k\times 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Puis en appliquant cette formule à l'entier $2n\in\mathbb{N}$, j'obtiens

$$(x+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\times x^k\times 1^{2n-k}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k.$$

(b) Comme rappelé par l'énoncé, je sais que $(x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n$, c'est-à-dire d'après la question précédente, en modifiant les variables de sommation pour plus de clarté,

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right).$$

Ces deux quantités sont deux polynômes de degré $2n$. Cette égalité implique donc $2n+1$ égalités des coefficients de degré k pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$.

En particulier pour $k=n$, le coefficient à gauche vaut $\binom{2n}{n}$ tandis que le coefficient de droite est la somme de tous les produits $\binom{n}{i}\binom{n}{j}$ pour les valeurs de i et de j entre 0 et n telles que $i+j=n$. Ainsi en posant $k=i$, alors $j=n-k$ et j'obtiens bien la formule :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

(c) Dans la question **4.a)**, je n'ai pas utilisé les lois des variables aléatoires, donc la formule est toujours vraie dans ce cas précis. Cette fois en revanche, X et Y suivent toutes deux une loi binomiale de paramètres n et $p=\frac{1}{2}$ donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P(X=k) = P(Y=k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \times \binom{n}{k}.$$

Donc

$$P\big(X=Y\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{n}{k}\binom{n}{k}.$$

Or puisque par symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, alors d'après la question précédente,

$$P\big(X=Y\big) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

(d) Pour les mêmes raisons que dans la question **4.c)**, $\quad P(A) = 1 - P\big(X=Y\big) \quad$ et donc

$$P(A) = 1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$