INTERRO DE COURS 6

Exercice 1 – Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20% des stylos avec défaut.
On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'évènement "le stylo présente un défaut" et A l'évènement "le stylo est accepté".

1. (a) Donner les valeurs de

$$P(D), \qquad P(\overline{D}), \qquad P_D(A), \qquad P_D(\overline{A}), \qquad P_{\overline{D}}(A) \quad \text{et} \quad P_{\overline{D}}(\overline{A}).$$

> **Solution :** On a
>
> $$P(D) = 0,1; \quad P(\overline{D}) = 0,9; \quad P_D(A) = 0,2; \quad P_D(\overline{A}) = 0,8, \quad P_{\overline{D}}(A) = 1 \text{ et } P_{\overline{D}}(\overline{A}) = 0.$$

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle est de $0,92$.

> **Solution :** D'après la formule des probabilités totales,
>
> $$P(A) = P(D) \times P_D(A) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(A) = 0,1 \times 0,2 + 0,9 \times 1 = 0,92.$$

   (c) Montrer que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0,022$ à $0,001$ près.

> **Solution :** D'après la formule des probabilités conditionnelles,
>
> $$P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0,1 \times 0,2}{0,92} \simeq 0,022.$$

2. Après le contrôle, on prélève dix stylos. On suppose que le stock de stylos est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X le nombre de stylos acceptés au contrôle.

   (a) Donner la loi de X. Préciser $X(\Omega)$ ainsi que la formule donnant $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

> **Solution :** X compte le nombre de succès (*i.e.,* le stylo est accepté au contrôle) lors de 10 expériences successives, identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale, de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$.
> On a $X(\Omega) = [\![0;10]\!]$, et pour tout $k \in X(\Omega)$,
>
> $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{k} \times 0,92^k \times 0,08^{10-k}.$$

   (b) Calculer la probabilité que tous les stylos soient acceptés au contrôle.
   (*On ne demande pas de calculer cette probabilité de manière approchée.*)

Solution : On a

$$P(X=10) = \binom{10}{10} \times 0,92^{10} \times 0,08^{0} = 0,92^{10}.$$

(c) Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat.

Solution : On a

$$E(X) = np = 10 \times 0,92 = 9,2.$$

Ainsi, plus de 9 stylos, en moyenne, sont acceptés au contrôle.

(d) Calculer $V(X)$.

Solution : On a

$$V(X) = np(1-p) = 10 \times 0,92 \times 0,08 = 9,2 \times 0,08 = 0,736.$$