EXERCICES — CHAPITRE 7

Intégration sur un segment

Exercice 1 – Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide.

1. $f_1(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f_2(x) = -\dfrac{3}{x}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3}$
5. $f_5(x) = (7x+1)^8$
6. $f_6(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{x}(\ln(x))^2$
8. $f_8(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 2 – On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

1. On note α et β les deux racines de la fonction polynôme $P : x \mapsto x^2 - 2x - 3$. Déterminer α et β.
2. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que
$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}.$$
3. En déduire une primitive de f sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

Exercice 3 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{3} (x^3 + x - 2)\,dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\,dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\,dt$
4. $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$

Exercice 4 – Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $I_6 = \displaystyle\int_0^1 t e^{2t}\,dt$
2. $I_7 = \displaystyle\int_1^2 t\ln(t)\,dt$
3. $I_8 = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)e^{3x}\,dx$
4. $I_9 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt$

Exercice 5 – L'objectif est de calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ et $K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$.

1. **Calcul de I.** Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par
$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right).$$
   (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) En déduire la valeur de I.
2. **Calcul de J et K.**
   (a) Sans calculer explicitement les intégrales J et K, vérifier que $J + 2I = K$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
   (c) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 6 – Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \left(\ln(x)\right)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite I_n et montrer qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
4. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 7 – Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a
$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$ puis en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (I_n).
4. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx = 1$.

5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $J_n = nI_n$.
   (a) Montrer que $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.
   (Indication : Penser à une intégration par parties.)
   (b) Montrer que
   $$\forall t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$
   (c) En déduire la limite de la suite (J_n).

Exercice 8 – Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Calculer J_1.
   (b) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
   (c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$.
2. (a) En intégrant par parties, montrer que
   $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}.$$
   (b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

Intégrales généralisées

Exercice 9 – Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$$

converge et déterminer sa valeur.

Exercice 10 – Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

diverge.

Exercice 11 – En utilisant une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

converge et déterminer sa valeur.

Exercice 12 – Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 13 –

1. À l'aide d'une intégration par parties, donner la valeur de l'intégrale $\int_0^A xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ puis calculer
   $$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A xe^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
2. Que peut-on en déduire pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$?

Exercice 14 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer, pour tout réel A strictement supérieur à 1, l'intégrale
   $$I_A = \int_1^A \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$
2. Calculer $\lim\limits_{A\to+\infty} I_A$.
3. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 15 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

En séparant les cas $x<0$ et $x\geqslant 0$, calculer l'expression

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 16 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ xe^{-x^2} & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de la fonction m définie pour tout réel x positif ou nul par

$$m(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. Soit M un réel strictement positif. On pose

$$I(M)=\int_0^M xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

   Déduire de la question précédente la valeur de $I(M)$.
   Calculer $\lim\limits_{M\to+\infty} I(M)$.

3. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 17 – Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que l'on a $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant 1$.
2. (a) Comparer, pour tout t de $[1;+\infty[$, $\frac{1}{t^2}$ et $\frac{1}{1+t^2}$.
   (b) En déduire que, pour tout x de $[1;+\infty[$, on a $\int_1^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant 1$.
   (c) Que peut-on en déduire ?
3. Conclure.

Exercice 18 – d'après ECRICOME 2016

On pose $I_0=\int_1^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel n non-nul, $I_n=\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_0 est une intégrale convergente, égale à $\frac{1}{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel $M>1$,

$$\int_1^M x^{n+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x=-\frac{M^{n+1}}{e^M}+\frac{1}{e}+\int_1^M (n+1)x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

3. En raisonnant par récurrence et à l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n converge.
4. Montrer que pour tout entier $n\in\mathbf{N}$,

$$I_{n+1}=\frac{1}{e}+(n+1)I_n.$$

5. Calculer I_n pour $n\in\{1;2;3\}$.