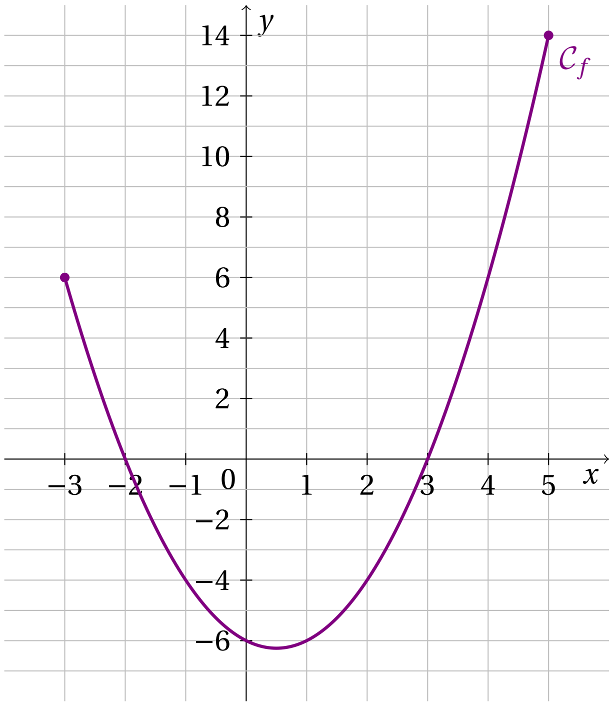
NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 9

Exercice 1 – Soit f la fonction dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.

Déterminer graphiquement :

1. $f(-1)$,
2. l'image de -2 par f,
3. les éventuels antécédents de -6 par f,
4. les éventuels antécédents de 8 par f,
5. les éventuels antécédents de -7 par f,
6. l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 4,
7. les solutions de l'équation $f(x) = 6$,
8. le maximum de f et pour quelle valeur il est atteint,
9. la solution de l'inéquation $f(x) \leqslant 6$.



Solution : Graphiquement, j'obtiens les réponses suivantes :

1. $f(-1) = -4$,
2. l'image de -2 par f est 0,
3. les antécédents de -6 par f sont 0 et 1,
4. l'antécédent de 8 par f est 4.2,
5. -7 n'a pas d'antécédent par f,
6. l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 4 est 6,
7. les solutions de l'équation $f(x) = 6$ sont -3 et 4,
8. le maximum de f est 14 et il est atteint pour $x = 5$,
9. l'inéquation $f(x) \leqslant 6$ est vérifiée sur l'intervalle $[-3, 4]$.

Exercice 2 – Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ dont voici le tableau de variation.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier brièvement.

1. f est croissante sur $[4,+\infty[$,
2. f est décroissante sur $[0,+\infty[$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) > 0$,
4. $\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) < 0$,
5. $\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = 2$,
6. $f(4) \leqslant f(5)$.

x	0		4		$+\infty$
f	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Solution :

1. VRAI, le tableau de variation présente une flèche ascendante sur l'intervalle $[4,+\infty[$.
2. FAUX, puisque f est croissante sur l'intervalle $[4,+\infty[$.
3. FAUX, car $4 \in \mathbb{R}_+$ et $f(4) = 0$.
4. FAUX, le tableau affirme que le minimum de f est 0, donc il n'existe pas de réel ayant une image strictement négative.
5. VRAI, comme $f(0) = 3$ et $f(4) = 0$, il y a forcément un réel $x \in [0,4]$ tel que $f(x) = 2$.
6. VRAI, comme f est croissante sur $[4,5]$, on sait que $f(4) \leqslant f(5)$.

Exercice 3 – Étudier la parité des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^3 + x$,
2. $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x^2}$,
3. $f(x) = x^5 + \dfrac{1}{x} - x^3$,
4. $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 2}$.

Solution :

1. f est une fonction polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x),$$
donc la fonction f est impaire.
2. f est la somme d'une fonction polynomiale et d'une fraction rationelle dont la seule valeur interdite est 0. Elle est donc définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0.
$$f(-x) = (-x)^4 + \frac{1}{(-x)^2} = x^4 + \frac{1}{x^2} = f(x),$$
donc la fonction f est paire.
3. f est la somme d'une fonction polynomiale et d'une fraction rationelle dont la seule valeur interdite est 0. Elle est donc définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0.
$$f(-x) = (-x)^5 + \frac{1}{-x} - (-x)^3 = -x^5 - \frac{1}{x} + x^3 = -\left(x^5 + \frac{1}{x} - x^3\right) = -f(x),$$
donc la fonction f est impaire.
4. Je remarque que $f(1) = \sqrt{0} = 0$ et que $f(-1)$ n'est pas définie (il faudrait prendre la racine carrée de -2, impossible). Donc l'ensemble de définition de f n'est pas symétrique par rapport à 0 et f ne peut être ni paire ni impaire.