

# ECRICOME 2019

## Exercice 1 –

1. Je calcule les trois produits  $AU$ ,  $AV$  et  $AW$  :

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-4 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = U$$

Et comme  $U$  est une matrice colonne non nulle, alors  $U$  est bien un vecteur propre de  $A$ , associé à la valeur propre 1.

$$AV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V$$

Et comme  $V$  est une matrice colonne non nulle, alors  $V$  est bien un vecteur propre de  $A$ , associé à la valeur propre 2.

$$AW = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3W$$

Et comme  $W$  est une matrice colonne non nulle, alors  $W$  est bien un vecteur propre de  $A$ , associé à la valeur propre 3.

2. Je calcule  $P^2$  :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2+2 & 1 & 0 \\ 1-2+1 & -1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Comme  $P^2 = I_3$ , en particulier  $P \times P = I_3$ . Donc  $P$  est inversible et  $P^{-1} = P$ .

3. (a) La matrice  $P$  est le juxtaposition des trois vecteurs propres  $U$ ,  $V$  et  $W$  de la matrice  $A$ , associés aux valeurs 1, 2 et 3. Comme les trois valeurs propres sont distinctes, je sais

qu'en notant  $D$  la matrice diagonale formée des trois valeurs propres  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,

alors  $A = PDP^{-1}$ . En particulier, pour cette matrice  $D$ ,

$$A = PDP^{-1} \iff P^{-1}AP = P^{-1}PDP^{-1}P = I_3DI_3 = D \iff D = P^{-1}AP.$$

- (b) Je raisonne par récurrence sur  $n$ , en gardant à l'esprit que  $P = P^{-1}$ .

**  nonc   :** Je note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $A^n = PD^nP$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,  $A^0 = I_3$  et  $PD^0P = PI_3P = P^2 = I_3$ . Ainsi  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 0$ . Je suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et je montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que  $A^n = PD^nP$ . Alors,

puisque  $D = P^{-1}AP = PAP \iff PDP = P^2AP^2 = I_3AI_3 = A$  i.e.  $A = PDP$ ,

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP \times PDP = PD^nP^2DP = PD^nI_3DP = PD^nDP = PD^{n+1}P.$$

Finalement  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie pour  $n = 0$ , alors par principe de récurrence, la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ , i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^n P.$$

- (c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Je calcule la matrice  $A^n$  en utilisant la formule précédente :  $A^n = PD^n P$ . Comme la matrice  $D$  est diagonale, je peux calculer sa puissance directement :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$A^n = PD^n \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 + 2 \times 2^n & 2^n & 0 \\ 1 - 2 \times 2^n + 3^n & -2^n + 3^n & 3^n \end{pmatrix}.$$

Je retrouve bien l'expression souhaitée pour la matrice  $A^n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n & 0 \\ 3^n - 2^{n+1} + 1 & 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}$$

## Partie B

1. (a) Les probabilités  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$  font intervenir le nombre de formules choisies après réception d'un unique bon. Il ne peut y avoir qu'une seule formule. Donc

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0 \quad \text{et} \quad c_1 = 0.$$

- (b) Après réception du deuxième bon, il n'est pas possible que trois formules aient été choisies. Donc  $c_2 = 0$ . Peu importe la formule choisie par le premier client, la probabilité que le deuxième choisisse la même est  $\frac{1}{3}$ . Donc  $a_2 = \frac{1}{3}$ . Par conséquent,

le dernier choix correspond à deux formules choisies et  $b_2 = 1 - c_2 - a_2 = 1 - 0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .

- (c) Je raisonne par disjonction de cas en fonction de l'  v  nement réalisé :

- Si  $A_k$  est réalisé, alors les  $k$  premiers clients ont tous choisi la même formule. Le  $k(+1)$ -ième client a une chance sur trois de choisir la même. S'il choisit une des deux autres, alors deux formules auront été choisies et il est impossible que les trois formules soient choisies. Donc

$$P_{A_k}(A_{k+1}) = \frac{1}{3}, \quad P_{A_k}(B_{k+1}) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P_{A_k}(C_{k+1}) = 0.$$

- Si  $B_k$  est réalisé, alors les  $k$  premiers clients ont tous choisi parmi deux formules. Le  $k(+1)$ -ième client a deux chances sur trois d'en choisir une des deux. S'il choisit la dernière, alors les trois formules auront été choisies et il est impossible que seule une formule ait été choisie. Donc

$$P_{B_k}(A_{k+1}) = 0, \quad P_{B_k}(B_{k+1}) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P_{B_k}(C_{k+1}) = \frac{1}{3}.$$

- Si  $C_k$  est réalisé, alors les  $k$  premiers clients ont déjà choisi l'ensemble des trois formules. Il est impossible qu'une seule ou deux formules seulement soient choisies. Donc

$$P_{C_k}(A_{k+1}) = 0, \quad P_{C_k}(B_{k+1}) = 0 \quad \text{et} \quad P_{C_k}(C_{k+1}) = 1.$$

2. (a) D'après la formule de probabilités totales, comme pour tout entier  $k \geq 0$ ,  $\{A_k, B_k, C_k\}$  forme un système complet d'  v  nements, alors

$$\begin{aligned} & \bullet \quad P(A_{k+1}) = P(A_k) \times P_{A_k}(A_{k+1}) + P(B_k) \times P_{B_k}(A_{k+1}) + P(C_k) \times P_{C_k}(A_{k+1}) \\ \iff & \quad a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k, \\ & \bullet \quad P(B_{k+1}) = P(A_k) \times P_{A_k}(B_{k+1}) + P(B_k) \times P_{B_k}(B_{k+1}) + P(C_k) \times P_{C_k}(B_{k+1}) \\ \iff & \quad b_{k+1} = \frac{2}{3}a_k + \frac{2}{3}b_k, \\ & \bullet \quad P(C_{k+1}) = P(A_k) \times P_{A_k}(C_{k+1}) + P(B_k) \times P_{B_k}(C_{k+1}) + P(C_k) \times P_{C_k}(C_{k+1}) \\ \iff & \quad c_{k+1} = \frac{1}{3}b_k + c_k. \end{aligned}$$

En particulier, en mettant  $\frac{1}{3}$  en facteur, j'obtiens que

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}.$$

- (b) Je raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**  nonc   :** Je note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 1$ ,  $M^{1-1} = I_3$  et  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ . Ainsi  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 1$ . Je suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et je montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ . Alors

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Finalement  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie pour  $n = 1$ , alors par principe de récurrence, la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ , i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Je sais que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad M^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}} A^{n-1} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi grâce à l'expression de  $A^n$  exhibée en Partie A, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$M^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 2 & 2^{n-1} & 0 \\ 3^{n-1} - 2^n + 1 & 3^{n-1} - 2^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 2 & 2^{n-1} & 0 \\ 3^{n-1} - 2^n + 1 & 3^{n-1} - 2^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2^n - 2 \\ 3^{n-1} - 2^n + 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, je retrouve bien les égalités souhaitées pour les probabilités  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  :

$$a_n = \frac{1}{3^{n-1}}, \quad b_n = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}} = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}.$$

- (b) Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n-1} = +\infty$ , alors par quotient,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$ .

Par croissances comparées, comme  $2 < 3$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} = 0$ .

De même,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} = 1 - 0 = 1$ .

Cela signifie que pour un nombre de clients très élevé, la probabilité que les trois formules soient choisies s'approche de 1. C'était en effet prévisible.

- (c) Le programme calcule les termes consécutifs de la suite  $(c_n)_{n \geq 1}$ . La sortie de boucle correspond à une probabilité supérieure à 0.95. Je peux donc déduire qu'à partir de 11 clients, la probabilité que les trois formules soient choisies dépasse 95%.

## Exercice 2 –

1. (a) Je commence par calculer la limite de la fonction logarithme composée :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} 2x - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty.$$

J'en déduis que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 0$ .

- (b) Puisqu'il s'agit d'une fraction rationnelle et d'une limite infinie, je sais que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = \ln(1) = 0.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0 \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

2. Pour étudier les variations de la fonction  $g$ , il me faut étudier le signe de la dérivée  $g'$ .

Donc je dérive  $g$  :  $g$  est de la forme  $g(x) = 2x - 1 + \ln(u(x))$  avec  $u(x) = \frac{x}{x+1}$ .

En remarquant que  $u(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ , j'obtiens que  $u'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ .

Ainsi la dérivée  $g'$  est donnée par

$$g'(x) = 2 + \frac{u'(x)}{u(x)} = 2 + \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x(x+1)}.$$

Il s'agit de la somme de deux termes strictement positifs pour tout  $x > 0$ . Je n'ai donc pas besoin de factoriser pour étudier le signe : je sais déjà que  $g'(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ .

J'en déduis donc que la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

Voici son tableau de variation :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g$	$-\infty$	$+\infty$

3. (a) Gr  ce à la forme de la fonction  $g$ , je subodore que l'équation de l'asymptote oblique ( $\mathcal{D}$ ) est donnée par  $y = 2x - 1$ .

Pour le montrer, il me suffit de calculer l'écart entre la droite et la courbe et de vérifier que celui-ci tend bien vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . L'écart est donnée par

$$g(x) - y = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - (2x - 1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Et j'ai déjà montré à la question 1.b) que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ .

Ainsi la droite ( $\mathcal{D}$ ) d'équation  $y = 2x - 1$  est bien asymptote à la courbe ( $\mathcal{C}$ ).

- (b) Pour connaître la position relative de ( $\mathcal{C}$ ) par rapport à ( $\mathcal{D}$ ), j'étudie le signe de l'écart  $g(x) - y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ . Comme  $x$  est strictement positif, alors

$$0 < \frac{x}{x+1} < 1 \iff \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < \ln(1) = 0 \iff g(x) - y < 0 \iff g(x) < y.$$

Donc la courbe ( $\mathcal{C}$ ) est en dessous de l'asymptote ( $\mathcal{D}$ ) sur tout l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

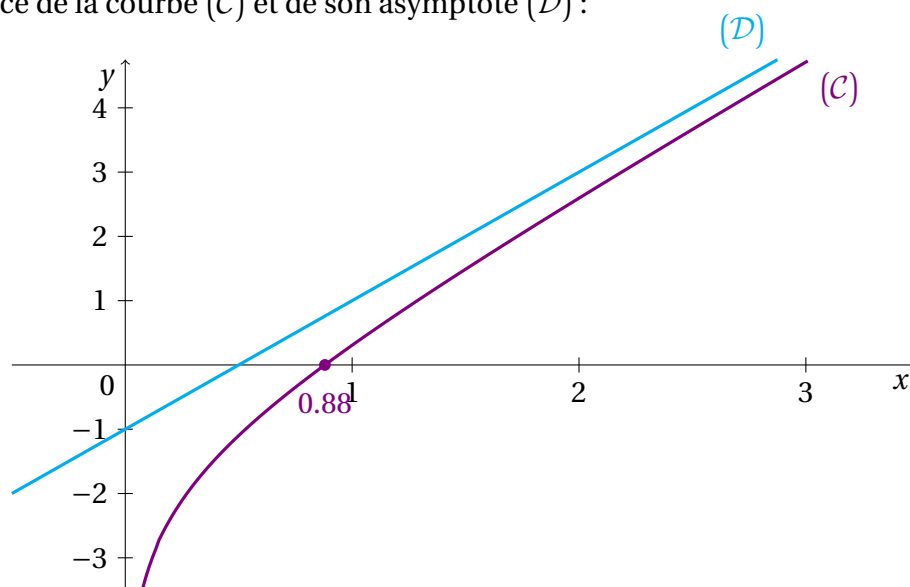
4. (a) La fonction  $g$  est continue car dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Comme je connais les limites  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , alors le théorème des valeurs int  rmediaires me permet de conclure que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Comme  $g$  est aussi strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , cette solution est unique.
- (b) Je complète l'algorithme de dichotomie :    chaque passage dans la boucle, je calcule le milieu de l'intervalle  $[a, b]$  et cherche dans quelle moitié se situe  $\alpha$ .

```

function y=g(x)
    y=2*x-1+log(x/(x+1))
endfunction
a=input('Entrer la valeur de a :')
b=input('Entrer la valeur de b :')
while b-a>0.01
    m=(a+b)/2
    if g(a)*g(m)<=0 then
        b=m
    else
        a=m
    end
end
disp(m)

```

5. Voici le tracé de la courbe (C) et de son asymptote (D) :



6. (a) Avant tout autre chose, je remarque que la fonction dans l'intégrale se simplifie. En effet,

$$(2x-1) - g(x) = -\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Je calcule l'intégrale  $\int_1^2 -\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$  en utilisant une intégration par parties.

Je pose

$$\begin{aligned} u'(x) &= -1 & u(x) &= -x \\ v(x) &= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) & v'(x) &= \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^2 -\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx &= \left[-x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 -x \frac{1}{x(x+1)} dx \\ &= -2 \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx \\ &= -2(\ln(2) - \ln(3)) - \ln(2) + \left[\ln(|x+1|)\right]_1^2 \\ &= -3\ln(2) + 2\ln(3) + (\ln(3) - \ln(2)) = 3\ln(3) - 4\ln(2) \end{aligned}$$

J'obtiens bien l'expression souhaitée.

- (b) L'interprétation graphique de cette intégrale est que l'aire du domaine situé entre la courbe  $(\mathcal{C})$ , la droite  $(\mathcal{D})$  et les droites verticales d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$  est égale à  $3\ln(3) - 4\ln(2)$  unités d'aire.
7. (a) Le vecteur ligne  $S$  contient les sommes cumulées des termes du vecteur ligne  $u$ . Comme  $u$  représente les 50 premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ , il y a dans  $S$  les 50 premiers termes de la suite  $\left(S_n = \sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \geq 1}$ . Le nuage de points de  $S$  tracé se rapprochant de plus en plus de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien, j'en déduis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

- (b) Pour les mêmes raisons que précédemment, je remarque que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n = (2n-1) - g(n) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ . Ainsi par télescopage,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

Finalement, je retrouve bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

### Exercice 3 –

1. (a) La fonction  $f$  est continue sur  $] -\infty, 2[$  car constante et sur  $[2, +\infty[$  comme fonction composée de fonctions continues. L'éventuel point de discontinuité se situe donc au point d'abscisse 2. Or

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = e^0 = 1.$$

Comme la limite à gauche de 2 ne coïncide pas avec la limite à droite de 2, la fonction  $f$  n'est pas continue au point d'abscisse 2. *A fortiori*,  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ .

- (b) La fonction  $f$  n'étant pas continue en 2 d'après la question précédente, elle ne peut donc pas y être dérivable : la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 2.
- (c) Pour étudier les variations de la fonction  $f$ , il me faut étudier le signe de la dérivée  $f'$ . Donc je dérive  $f$  : sur l'intervalle  $[2, +\infty[$ ,  $f$  est de la forme  $f = e^u$  avec  $u(x) = 2 - x$ . Comme  $u'(x) = -1$ , alors pour tout  $x \in [2, +\infty[$ ,

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -e^{2-x} < 0.$$

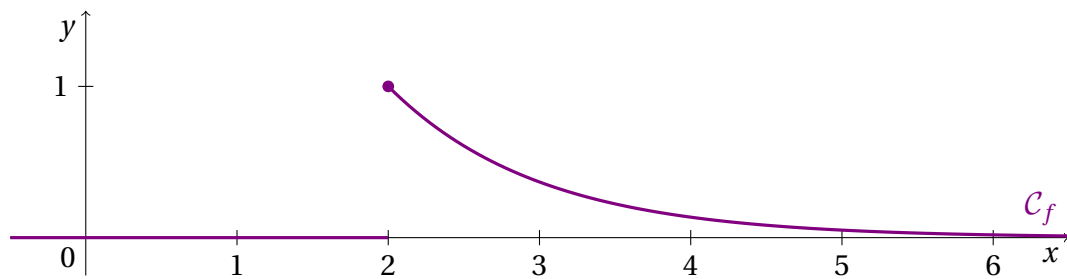
J'en déduis donc que la fonction  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]2, +\infty[$ .

- (d) Je calcule la limite par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - x = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0.$$

J'en déduis que la courbe représentative de la fonction  $f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  au voisinage de  $+\infty$ , c'est-à-dire que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en  $+\infty$ .

- (e) Voici le tracé de la courbe  $\mathcal{C}_f$  :



2. (a) Soit  $A > 0$ . Je calcule l'intégrale  $\int_a^A f(x) dx$  avant de faire tendre  $A$  vers  $+\infty$ .

$$\int_a^A f(x) dx = \int_a^A e^{a-x} dx = \left[ -e^{a-x} \right]_a^A = -e^{a-A} + e^{a-a} = 1 - e^{a-A}.$$

Et comme  $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{a-A} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ , alors l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge et vaut

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - e^{a-A} = 1 - 0 = 0.$$

- (b) • Pour  $x < a$ ,  $f(x) = 0 \geq 0$  et pour  $x \geq a$ ,  $f(x) = e^{a-x} \geq 0$ . Donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ .  
 • La fonction  $f$  est continue sur  $] -\infty, a[$  car constante et elle est continue sur  $[a, +\infty[$  comme composée de fonctions continues.  
 Donc  $f$  admet au plus un point de discontinuité.

- Il reste à montrer que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge et vaut 1.

Or  $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_{-\infty}^a 0 dx$  converge et vaut 0 et d'après la question précédente,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge et vaut 1.

Alors par la relation de Chasles, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = 0 + 1 = 1.$$

Selon les trois points précédents,  $f$  décrit bien une densité de probabilité.

3. (a) Je distingue les cas  $x < a$  et  $x \geq a$  :

- Si  $x < a$ , alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

- Si  $x \geq a$ , alors grâce au calcul de la question 2.a),

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x e^{a-t} dt = 1 - e^{a-x}.$$

Finalement, j'ai bien montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - e^{a-x} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

- (b) Je cherche à résoudre  $F_X(x) = \frac{1}{2}$ . Nécessairement,  $x \geq a$  et l'équation devient

$$1 - e^{a-x} = \frac{1}{2} \iff e^{a-x} = \frac{1}{2} \iff a - x = -\ln(2) \iff x = a + \ln(2).$$



(c) D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[X \geq a+1]}(X \geq a+2) = \frac{P([X \geq a+1] \cap [X \geq a+2])}{P(X \geq a+1)} = \frac{P(X \geq a+2)}{P(X \geq a+1)}.$$

Or  $P(X \geq a+2) = 1 - F_X(a+2) = 1 - (1 - e^{a-(a+2)}) = e^{-2}$  et  $P(X \geq a+1) = e^{-1}$ .  
Donc

$$P_{[X \geq a+1]}(X \geq a+2) = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

4. (a) Par définition de la fonction de répartition, pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X - a \leq y) = P(X \leq a + y) = F_X(a + y).$$

- Si  $a + y < a$ , i.e.  $y < 0$ , alors  $F_Y(y) = 0$ .
- Si  $a + y \geq a$ , i.e.  $y \geq 0$ , alors  $F_Y(y) = 1 - e^{a-(a+y)} = 1 - e^{-y}$ .

Finalement, j'obtiens que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

(b) La fonction de répartition obtenue à la question précédente est celle d'une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$ . Comme la fonction de répartition détermine la loi, alors  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre 1.

(c) Comme  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$ , alors

$$E(Y) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1}{1^2} = 1.$$

Alors comme  $Y = X - a \iff X = Y + a$ , par linéarité pour l'espérance,

$$E(X) = E(Y + a) = E(Y) + a = 1 + a \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y + a) = V(Y) = 1.$$

5. (a) Je calcule l'espérance de  $S_n$ . Par linéarité,

$$E(S_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - 1)\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k - 1) = E(X) - 1 = a.$$

Ainsi j'ai bien montré que  $S_n$  est un estimateur sans biais de  $a$ .

(b) Calculer le risque quadratique de  $S_n$  noté  $r(S_n)$ , et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(S_n)$ .

(c) Comme l'estimateur  $S_n$  est sans biais, alors le risque quadratique est donné par  $r(S_n) = V(S_n)$ . Je calcule donc  $V(S_n)$ . Comme les variables  $X_1 - 1, X_2 - 1, \dots, X_n - 1$  sont mutuellement indépendantes, alors

$$V(S_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - 1)\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k - 1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X) = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}.$$

En particulier,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . En particulier,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

(d) Le vecteur ligne  $Y$  doit contenir 50 coefficients donnant chacun une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

$S$  se calcule en prenant la moyenne des coefficients du vecteur  $X$  auxquels 1 a été retiré. Voici le code complété :

```
a=input('Entrer la valeur de a :')
Y=grand(1,50,'exp',1)
X=Y+a
S=mean(X-1)
```