ECRICOME 2023

Exercice 1 –

Partie 1

1. Voici la fonction `Python` complétée :

```
import numpy as np

def suite(n,u1):
    u=u1
    for k in range(1,n):
        u=u*5/12+1/3
    return(u)
```

2. a) Je résous l'équation demandée :

$$x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3} \quad \iff \quad x - \frac{5}{12}x = \frac{1}{3} \quad \iff \quad \frac{7}{12}x = \frac{1}{3} \quad \iff \quad x = \frac{1}{3} \times \frac{12}{7} = \frac{4}{7}.$$

b) Soit $n \geqslant 1$. J'exprime v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3} - \ell &= \frac{5}{12} \times \left(v_n + \ell\right) + \frac{1}{3} - \ell \\ = \frac{5}{12}v_n + \frac{5}{12} \times \ell + \frac{1}{3} - \ell &= \frac{5}{12}v_n, \end{aligned}$$

puisque ℓ est une solution de $x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$, *i.e.* $\frac{5}{12} \times \ell + \frac{1}{3} - \ell = 0$.

Ainsi j'ai bien montré que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique, de raison $q = \frac{5}{12}$.

c) Comme la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique, de raison $q = \frac{5}{12}$ et de premier terme v_1, alors son expression explicite est donnée par

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = v_1 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

d) Enfin, comme pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = v_n + \ell$ et que $v_1 = u_1 - \ell$, alors

$$u_n = v_1 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \ell = \left(u_1 - \ell\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \ell = \left(u_1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}.$$

Partie 2

3. a) Je calcule les produits matriciels AX_1 et AX_2 :

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+12 \\ 12+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = 12 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 \times X_1,$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+4 \\ -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \times X_2.$$

b) D'après la question précédente, comme X_1 est une matrice colonne non nulle telle que $AX_1 = 12X_1$, alors 12 est une valeur propre de la matrice A, associée au vecteur propre X_1. De même, comme X_2 est une matrice colonne non nulle telle que $AX_2 = 5X_2$, alors 5 est une valeur propre de la matrice A, associée au vecteur propre X_2.

4. Comme il s'agit d'une matrice carrée de taille 2, je calcule le déterminant de la matrice P :

$$\det(P) = 4 \times 1 - 3 \times (-1) = 4 + 3 = 7 \neq 0.$$

Comme le déterminant est non nul, alors la matrice P est inversible et la matrice inverse est donnée par

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 1 & -(-1) \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = Q.$$

5. J'effectue le produit matriciel PDP^{-1} dans le but de retrouver la matrice A :

$$P \times D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$$

$$PD \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 48+15 & 48-20 \\ 36-15 & 36+20 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = A.$$

Finalement j'ai bien montré que $A = PDP^{-1}$.

6. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_2 \quad \text{et} \quad PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

7. a) Je calcule le produit :

$$P^{-1}X = QX = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

b) Grâce à la question **6.**, je sais que $A^nX = PD^nP^{-1}X$. Je connais $P^{-1}X$ et comme la matrice D est diagonale, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

Finalement je termine le produit matriciel : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n \times P^{-1}X = \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12^n \\ -3 \times 5^n \end{pmatrix}$$

$$A^nX = P \times D^nP^{-1}X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12^n \\ -3 \times 5^n \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \times 12^n + 3 \times 5^n \\ 3 \times 12^n - 3 \times 5^n \end{pmatrix}.$$

Partie 3

8. b_1 correspond à la probabilité qu'il pleuve la premier jour. Or il fait beau le jour 1.
Donc $\quad b_1 = 0$.
Puis comme il faut beau le jour 1, la probabilité qu'il fasse beau le jour 2 est $\frac{3}{4}$.
Ainsi $\quad a_2 = \frac{3}{4} \quad$ et $\quad b_2 = 1 - a_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

9. a) D'après la formule des probabilités totales, comme $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(A_{n+1}) = P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap A_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}).$$

La probabilité qu'il fasse beau le jour $n+1$ s'il fait beau le jour n est $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}$
et la probabilité qu'il fasse beau le jour $n+1$ s'il pleut le jour n est $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
Ainsi j'obtiens bien que

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times \frac{3}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).$$

De la même manière, j'obtiens aussi que

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + P(B_n) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n). \end{aligned}$$

b) Je calcule le produit $M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans le but de retrouver les expressions de a_{n+1} et b_{n+1} :

$$M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \times \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \times \begin{pmatrix} 9a_n + 4b_n \\ 3a_n + 8b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{9a_n + 4b_n}{12} \\ \dfrac{3a_n + 8b_n}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

Finalement j'ai bien montré que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

c) Comme $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements, en particulier les deux événements sont contraires l'un de l'autre et

$$a_n + b_n = P(A_n) + P(B_n) = 1.$$

10. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Et grâce à la question **9.b)**,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Comme $M = \frac{1}{12}A$, alors pour tout $n \geqslant 1$, $M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12^{n-1}}A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12^{n-1}}A^{n-1}X$.
Or cette matrice ayant été calculée dans la partie précédente, j'en déduis que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12^{n-1}} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} \\ 3 \times 12^{n-1} - 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 + 3 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \\ 3 - 3 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

11. a) D'après la question **9.a)**, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n$ et d'après la question **9.c)**, $b_n = 1 - a_n$.
Alors en combinant ces deux équations, j'obtiens bien que

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3} \times (1 - a_n) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)a_n + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}.$$

b) La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ étudiée dans cette partie vérifie bien la définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ étudiée dans la Partie 1, avec $u_1 = a_1 = 1 \in [0,1]$. Alors en me servant du résultat de la question **2.d)** avec $u_1 = 1$, j'obtiens bien que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_n = \left(1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7} = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}.$$

c) Enfin j'obtiens aussi que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$b_n = 1 - a_n = 1 - \left(\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}\right) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

12. Comme $-1 < \frac{5}{12} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} = 0$. Alors par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{3}{7} - 0 = \frac{3}{7}.$$

13. a) Je cherche $P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_9 \cap B_{10}\big)$. Par la formule des probabilités composées, et comme le temps ne dépend que de celui de la veille,

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_9 \cap B_{10}\big) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_8}(A_9) \times P_{A_9}(B_{10})$$
$$= 1 \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \frac{1}{4} = \frac{3^8}{4^9}.$$

b) Je cherche $P\big(B_{10}\big)$. Or

$$P\big(B_{10}\big) = b_{10} = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{10-1} = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{9}.$$

Exercice 2 –

Partie 1

1. Je cherche à savoir pour quelles valeurs de x l'expression $f(x)$ est définie.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'exponentielle e^x est définie et positive.
   - En particulier, $1+e^x > 0$ et comme la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, alors l'expression $f(x) = \ln\left(1+e^x\right)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   J'ai bien montré que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $\ln(u)$, avec $u(x) = 1+e^x$. Comme $u'(x) = e^x$, alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{1+e^x}.$$
   En me servant du fait que pour tout réel x, $e^x > 0$, alors j'obtiens que le quotient $f'(x)$ est strictement positif, donc que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Je calcule la limite en $-\infty$ en décomposant :
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x = 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0 \end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$
   J'en déduis alors que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
4. a) Je raisonne de même pour la limite en $+\infty$:
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty \end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
   b) En factorisant par l'exponentielle e^x, j'obtiens que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \ln\left(1+e^x\right) = \ln\Big(e^x\left(e^{-x}+1\right)\Big) = \ln\left(e^x\right) + \ln\left(e^{-x}+1\right) = x + \ln\left(1+e^{-x}\right).$$
   c) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1+0 = 1$, alors par composition,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) = \lim_{X\to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0.$$
   Comme la limite de la différence est nulle, alors j'en conclus que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

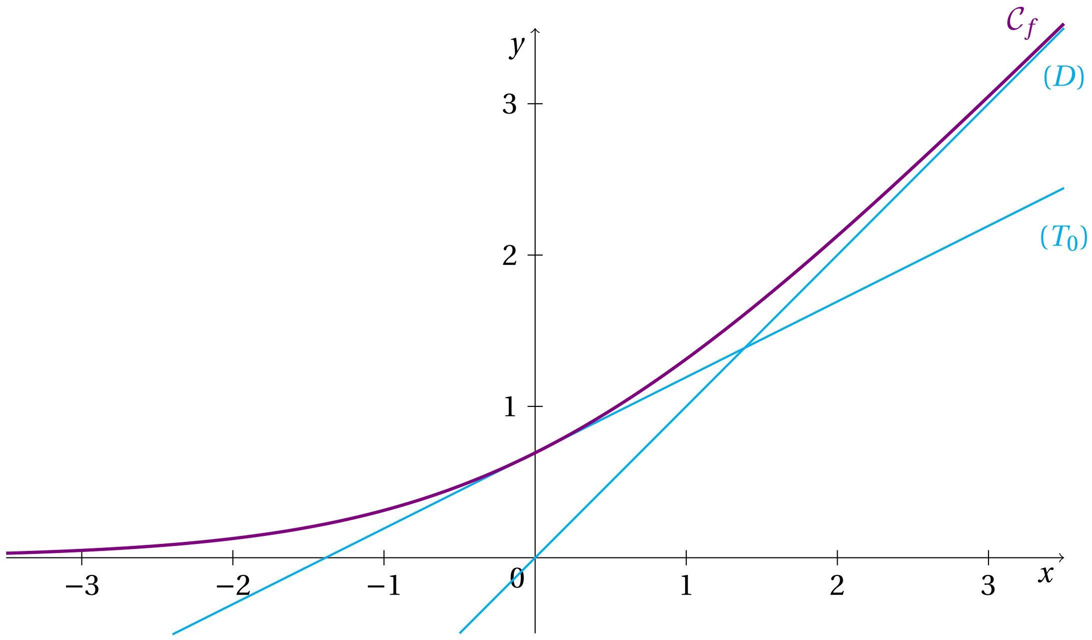
   d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) - x = \ln\left(1+e^{-x}\right)$. Or $\quad e^{-x} > 0 \quad$ donc $\quad 1+e^{-x} > 1$ et par croissance de la fonction ln, j'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = \ln\left(1+e^{-x}\right) > 0$. Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de l'asymptote (D) pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donnée par
$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0).$$
   Or $\quad f(0) = \ln\left(1+e^0\right) = \ln\left(1+1\right) = \ln(2) \qquad$ et $\qquad f'(0) = \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}.$

   Finalement l'équation de la tangente (T_0) est donnée par
$$y = \frac{1}{2} \times x + \ln(2) = \frac{x}{2} + \ln(2).$$

6. a) Je sais déjà que f est strictement croissante, je connais les limites et la valeur en 0.
Voici donc le tableau de variation :

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
 & & & & & +\infty \\
f & & \nearrow & \ln(2) & \nearrow & \\
 & 0 & & & & \\
\hline
\end{array}$$

b) Grâce au tableau de variation, à la tangente en 0 et aux asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$, je peux tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$:



Partie 2

7. a) Déjà, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = \ln\left(1+e^{-nx}\right)$ et $g_{n+1}(x) = \ln\left(1+e^{-(n+1)x}\right)$.
Alors comme les fonctions exponentielle et logarithme sont croissantes,
pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
n+1 \geqslant n &\iff (n+1)x \geqslant nx \iff -(n+1)x \leqslant -nx \\
&\iff e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx} \iff 1+e^{-(n+1)x} \leqslant 1+e^{-nx} \\
&\iff \ln\left(1+e^{-(n+1)x}\right) \leqslant \ln\left(1+e^{-nx}\right) \iff g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x).
\end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si pour tout $x \in [0,1]$, $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$, alors par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 g_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \iff I_{n+1} \leqslant I_n.$$

Ainsi la suite d'intégrales $\left(I_n\right)_{n\geqslant 0}$ est bien décroissante.

c) Par un raisonnement similaire à celui de la question **4.d)**, pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{-nx} > 0 \implies 1+e^{-nx} > 1 \implies g_n(x) = \ln\left(1+e^{-nx}\right) > \ln(1) = 0.$$

Alors par positivité de l'intégrale, j'en déduis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
En particulier la suite $\left(I_n\right)_{n\geqslant 0}$ est minorée par 0.
Comme celle-ci est aussi décroissante, alors le théorème de la limite monotone me permet de déduire que la suite $\left(I_n\right)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

8. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je cherche à calculer $I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\left(1+e^{-nx}\right)\mathrm{d}x$.

Je raisonne par intégration par parties : j'introduis un facteur $v'(x) = 1$ dont une primitive est donnée par $v(x) = x$ et je dérive $g_n(x)$ en utilisant que la dérivée de $\ln(u)$ est donnée par $\dfrac{u'}{u}$. Ainsi $g_n'(x) = \dfrac{-ne^{-nx}}{1+e^{-nx}}$ et d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \Big[xg_n(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x \times g_n'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln\left(1+e^{-nx}\right)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{-nxe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 1 \times \ln\left(1+e^{-n}\right) - 0 \times \ln\left(1+e^{0}\right) - (-n) \times \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln\left(1+e^{-n}\right) + n\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,\mathrm{d}x.$$

J'ai bien montré l'expression souhaitée.

b) J'ai déjà montré à la question **7.c)** que pour tout entier n, $I_n \geqslant 0$.
Aussi, dans cette même question, je montre que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $1+e^{-nx} \geqslant 1$.
Alors $\dfrac{1}{1+e^{-nx}} \leqslant \dfrac{1}{1} = 1$ et par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 xe^{-nx}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad I_n \leqslant \ln\left(1+e^{-n}\right) + n\int_0^1 xe^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je cherche à calculer $\int_0^1 xe^{-nx}\,\mathrm{d}x$. Je pose donc

$$u'(x) = e^{-nx} \qquad \text{et} \qquad v(x) = x$$

de sorte que

$$u(x) = -\frac{e^{-nx}}{n} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 1.$$

Alors par intégration par parties,

$$\int_0^1 xe^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[x \times \left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right)\mathrm{d}x$$
$$= -1 \times \frac{e^{-n}}{n} + 0 \times \frac{e^0}{n} + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-n}}{n} + \left[-\frac{e^{-nx}}{n^2}\right]_0^1$$
$$= -\frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-n}}{n^2} + \frac{e^0}{n^2} = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2}.$$

J'ai bien montré que pour tout entier n non nul, $\int_0^1 xe^{-nx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{-e^{-n}}{n} + \dfrac{1-e^{-n}}{n^2}$.

d) En combinant les résultats des deux questions précédentes, j'obtiens un encadrement de I_n pour tout entier n :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(1+e^{-n}\right) + n \times \left(\frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2}\right) = \ln\left(1+e^{-n}\right) - e^{-n} + \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

Je cherche alors les limites des bornes : comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+e^{-n}\right) = \ln(1) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} -e^{-n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0.$$

Alors par somme, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+e^{-n}\right) - e^{-n} + \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$, et comme $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, alors le théorème des gendarmes me permet de conclure que la suite $\left(I_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge (je le savais déjà) et que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

9. a) Voici une fonction Python permettant d'évaluer la fonction g_n, après importation de la librairie `numpy` :

```
import numpy as np
def gn(n,x):
    return(np.log(1+np.exp(-n*x)))
```

b) Deux tracés sont visibles sur la figure :

- le nuage de points dont les ordonnées sont données par le vecteur `L_y`, contenant les valeurs de nI_n,
- une portion de la droite horizontale d'équation $y = \frac{\pi^2}{12}$.

Je remarque que les points se rapprochent de la portion de droite, ce qui me permet de conjecturer que la suite $\left(nI_n\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente et admet pour limite le réel $\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 3 –

1. Je montre que la fonction f vérifie les trois conditions d'une densité de probabilité :

   - Pour $x < s$, $\quad f(x) = 0 \geqslant 0$ et pour $x \geqslant s$, $\quad f(x) = \dfrac{2s^2}{x^3} \geqslant 0$ car $s > 0$ et $x \geqslant s > 0$.
     Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) \geqslant 0$.
   - Sur $]-\infty, s[$, f est continue car constante
     et sur $[s, +\infty[$, f est continue comme quotient de fonctions continues.
     Donc f admet au plus un point de discontinuité sur $\mathbb{R}$ (en $x = s$).
   - Il me reste à montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
     Je calcule séparément les deux intégrales suivantes :
     - ▷ $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
     - ▷ $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{s}^{+\infty} \frac{2s^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x.$
       Soit $M \geqslant s$. Je calcule l'intégrale de f sur le segment $[s, M]$:
       $$\int_{s}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{M} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_s^M = 2s^2 \times \left(-\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2s^2}\right) = 1 - \frac{s^2}{M^2}.$$
       Puis, comme $\displaystyle\lim_{M \to +\infty} 1 - \frac{s^2}{M^2} = 1 - 0 = 1$, alors j'en déduis que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

     Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et
     $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{s}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.$$

   Finalement, j'ai bien montré que f est une densité de probabilité.

2. Pour déterminer la fonction de répartition, je raisonne à l'aide d'une disjonction de cas pour appliquer la définition : $\quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

   - Si $x < s$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$
   - Si $x \geqslant s$, alors il me faut découper l'intégrale en deux morceaux :
     $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{s} 0\,\mathrm{d}t + \int_{s}^{x} \frac{2s^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = 0 + 1 - \frac{s^2}{x^2} = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2,$$
     en réutilisant le calcul d'intégrale effectué à la question précédente.

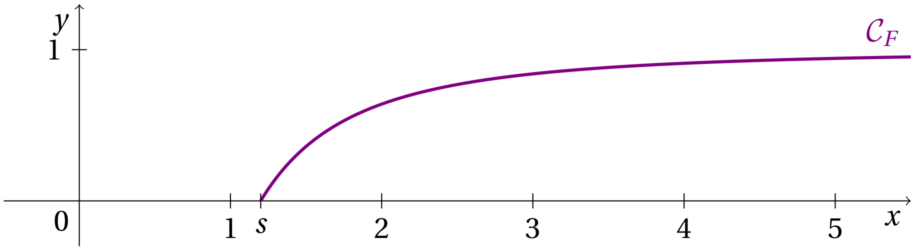
   Ainsi j'ai bien montré que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s, \\ 1 - \left(\dfrac{s}{x}\right)^2 & \text{si } x \geqslant s. \end{cases}$$

3. Pour étudier les variations de la fonction F, il me faut étudier la signe de la dérivée F'.
   Or puisque F est la fonction de répartition, sa dérivée F' est la fonction de densité f.
   Ainsi F est constante sur $]-\infty, s[$ puis strictement croissante sur $[s, +\infty[$.

En particulier, voici le tableau de variation de F sur $[s, +\infty[$:

x	s		$+\infty$
F	0	$\nearrow$	1

L'allure de la courbe représentative de la fonction F :



4. a) D'après la question précédente, F est une fonction strictement croissante sur $[s, +\infty[$. Comme $F(s) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, alors f est bien une bijection de $[s, +\infty[$ vers $[0, 1[$: chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent dans l'ensemble de départ.

   b) Soit $y \in [0, 1[$. Alors

$$0 \leqslant y < 1 \iff 0 < 1 - y \leqslant 1 \iff \frac{1}{1-y} \geqslant 1 \iff \sqrt{\frac{1}{1-y}} \geqslant 1.$$

   Puis en multipliant par $s > 0$, j'obtiens bien que

$$\forall y \in [0, 1[, \quad G(y) \in [s, +\infty[.$$

   c) Soit $y \in [0, 1[$. Comme $G(y) \in [s, +\infty[$, alors je peux lui appliquer la fonction F. J'obtiens alors

$$F\big(G(y)\big) = 1 - \left(\frac{s}{s\sqrt{\frac{1}{1-y}}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-y}}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-y}} = 1 - (1 - y) = y.$$

   J'ai bien montré que la fonction G est la bijection réciproque de la fonction F, *i.e.*

$$\forall y \in [0, 1[, \quad F\big(G(y)\big) = y.$$

5. a) La fonction de répartition d'une loi uniforme sur un intervalle $[a, b[$ est donnée par $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ sur l'intervalle $[a, b[$, $F(x) = 0$ avant et $F(x) = 1$ après. Donc la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1[$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1. \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

b) Soit $x \geqslant s$. Par définition de V puis par croissance de la fonction F,

$$P\big(V \leqslant x\big) = P\big(G(U) \leqslant x\big) = P\Big(F\big(G(U)\big) \leqslant F(x)\Big).$$

Puis, comme U suit une loi uniforme sur $\big[0,1\big[$, U prend ses valeurs dans l'intervalle $\big[0,1\big[$ donc $F\big(G(U)\big) = U$. Et puisque $x \geqslant s$, alors $F(x) \in \big[0,1\big[$.
Donc d'après la formule de la fonction de répartition de U,

$$\forall x \in \big[s,+\infty\big[, \quad P\big(V \leqslant x\big) = P\big(U \leqslant F(x)\big) = F(x).$$

Pour $x < s$, comme $V = G(U)$, que U suit une loi uniforme sur $\big[0,1\big[$
et que $G\Big(\big[0,1\big[\Big) \subset \big[s,+\infty\big[$, alors

$$\forall x \in \big]-\infty,s\big[, \quad P\big(V \leqslant x\big) = 0.$$

c) J'ai déterminé à la question précédente la fonction de répartition de la variable aléatoire V et obtenu la même expression que F, fonction de répartition de S. Comme la fonction de répartition détermine la loi, alors j'en déduis que V suit la même loi que S.

6. Voici la fonction `Python` complétée :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def S(s):
    U=rd.random()
    S=s*sqrt(1/(1-u))
    return(S)
```

7. La variable aléatoire S admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Je calcule séparément les deux intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} x \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
- $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{s}^{+\infty} \frac{2s^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

  Soit $M \geqslant s$. Je calcule l'intégrale sur le segment $\big[s,M\big]$:

$$\int_{s}^{M} x f(x)\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{M} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \left[-\frac{1}{x}\right]_{s}^{M} = 2s^2 \times \left(-\frac{1}{M} + \frac{1}{s}\right) = 2s - \frac{2s^2}{M}.$$

  Puis, comme $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} 2s - \frac{2s^2}{M} = 2s - 0 = 2s$, alors j'en déduis que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $2s$.

Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{s}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 2s = 2s.$$

8. La variable aléatoire S admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Je calcule séparément les deux intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} x^2 \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
- $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{s}^{+\infty} \frac{2s^2}{x}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

  Soit $M \geqslant s$. Je calcule l'intégrale sur le segment $[s, M]$:

  $$\int_{s}^{M} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{M} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \Big[\ln(x)\Big]_{s}^{M} = 2s^2 \times \big(\ln(M) - \ln(s)\big).$$

  Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \ln(M) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \int_{s}^{M} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ et j'en déduis que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge et la variable aléatoire S n'admet pas de variance.

9. Je cherche $P\left(S \geqslant \frac{3}{2}s\right)$.
   En passant par l'événement contraire et par définition de la fonction de répartition,

$$P\left(S \geqslant \frac{3}{2}s\right) = 1 - P\left(S \leqslant \frac{3}{2}s\right) = 1 - F\left(\frac{3}{2}s\right) = 1 - \left(1 - \left(\frac{s}{\frac{3}{2}s}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

10.
11.
12.
13. a)
    b)
    c)