CONCOURS BLANC 4 — BSB

Exercice 1 –

1. Pour vérifier que la matrice M est idempotente, je calcule M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = M.$$

J'ai bien montré que $M^2 = M$, *i.e.* M est idempotente.

2. a) Comme la matrice M est idempotente, par définition $M^2 = M$.
D'où, en notant 0_n la matrice nulle d'ordre n,

$$M^2 - M = 0_n.$$

J'en déduis que le polynôme $X^2 - X$ est bien un polynôme annulateur de la matrice M.

b) Les valeurs propres de M sont nécessairement parmi les racines du polynôme annulateur. Je cherche donc les racines de $X^2 - X$, polynôme annulateur de la matrice M :

$$X^2 - X = 0 \iff X(X-1) = 0 \iff X = 0 \text{ ou } X - 1 = 0 \iff X = 0 \text{ ou } X = 1.$$

Donc les valeurs propres possibles pour la matrice M sont 0 et 1.

c) Pour vérifier que la matrice $N = I_n - M$ est idempotente, je calcule N^2 :

$$N^2 = \left(I_n - M\right)^2 = \left(I_n - M\right) \times \left(I_n - M\right) = I_n \times I_n - I_n \times M - M \times I_n + M \times M = I_n - M - M + M^2.$$

Or M est idempotente donc $M^2 = M$, *i.e.*

$$N^2 = I_n - 2M + M = I_n - M = N.$$

Ainsi j'ai bien montré que $N^2 = N$, *i.e.* N est idempotente.

3. a) Pour vérifier que la matrice C est idempotente, je calcule C^2 :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = C.$$

J'ai bien montré que $C^2 = C$, *i.e.* C est idempotente.

En outre, grâce à la question **2.**, comme la matrice C est idempotente,
j'en déduis que la matrice $D = I_2 - C$ est elle aussi idempotente.

Je calcule CD et DC. Comme C est idempotente,

$$CD = C \times \left(I_2 - C\right) = C \times I_2 - C \times C = C - C^2 = C - C = 0_2.$$

De la même manière, $DC = C - C^2 = 0_2$.

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $B^n = 2^n C + D$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$B^0 = I_2 \quad \text{et} \quad 2^0 C + D = C + D = C + I_2 - C = I_2.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$B^{n+1} = B^n \times B = \left(2^n C + D\right) \times \left(2C + D\right) = 2^{n+1} C^2 + 2^n CD + 2DC + D^2.$$

Or par idempotence $C^2 = C$ et $D^2 = D$, puis grâce aux calculs de la question précédente, $CD = DC = 0_2$. Donc

$$B^{n+1} = 2^{n+1} C + D.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = 2^n C + D.$$

Alors je peux déterminer la formule explicite de B^n :

$$B^n = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ -2 \times 2^n + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}.$$

J'ai ainsi montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}.$$

c) Je calcule P^2 :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Comme $P^2 = I_2$, j'en déduis que la matrice P est inversible et que son inverse est $P^{-1} = P$.

d) Je calcule le produit AP avant de multiplier par P^{-1} :

$$AP = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & 1 \\ 6-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3-5 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je calcule aussi B pour vérifier que $P^{-1}AP = B$:

$$B = 2C + D = 2C + I_2 - C = C + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré que $P^{-1}AP = B$.

e) Comme $P^{-1}AP = B$, j'en déduis que

$$P \times P^{-1}AP \times P^{-1} = PBP^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A = PBP^{-1}.$$

Alors je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PB^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_2 \quad \text{et} \quad PB^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PB^nP^{-1} \times PBP^{-1} = PB^nI_2BP^{-1} = PB^nBP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PB^nP^{-1}.$$

f) Grâce à la question précédente, je sais que $A^n = PB^nP^{-1}$.
Et je connais les coefficients de la matrice B^n par la question **3.b)**.
Alors

$$PB^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+1}-1+2^{n+1}-2 & 2^n-1+2^n-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+2}-3 & 2^{n+1}-3 \end{pmatrix}$$

et

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1+2^n-1 & -2^n+1 \\ 2^{n+2}-3+2^{n+1}-3 & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+1)\times 2^n-2 & -2^n+1 \\ (2^2+2)\times 2^n-6 & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 3\times 2^n-2 & -2^n+1 \\ 6\times 2^n-6 & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2^n-2 & -2^n+1 \\ 6\times\left(2^n-1\right) & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 –

1. J'étudie le signe de x^2+x+1 pour $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Comme le discriminant est strictement négatif, le polynôme n'admet pas de racine et son signe est constant. Comme $a = 1 > 0$, j'en déduis que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2+x+1 > 0.$$

2. Je sais que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
Alors comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, j'en déduis par composition que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Je calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, en remplaçant x par $-\frac{1}{2}$ dans l'expression de $f(x)$:
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= \ln(3) - \ln(4) = \ln(3) - \ln\left(2^2\right) = \ln(3) - 2\ln(2).$$
Ainsi j'ai bien montré que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2)$.

4. a) La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2+x+1$.
Puisque $u'(x) = 2x+1$, alors
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

   b) J'obtiens les variations de f en étudiant le signe de $f'(x)$. Je sais que le dénominateur est strictement positif d'après la question **1**. Je cherche le signe du numérateur :
$$2x+1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -1 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}.$$
Je peux donc déduire le tableau de variation de f grâce au tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)-2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. a) Je résous $f(x) = 0$:
$$f(x) = 0 \iff \ln(x^2+x+1) = 0 \iff x^2+x+1 = e^0 = 1 \iff x^2+x = 0$$
$$\iff x(x+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1.$$
J'ai bien montré que les deux seules solutions de $f(x) = 0$ sont -1 et 0.

b) L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en le point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

Or $f(0) = 0$ puisque 0 est solution de $f(x) = 0$ et $f'(0) = \frac{2 \times 0 + 1}{0^2 + 0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$.
Donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = 1 \times (x - 0) + 0, \qquad \textit{i.e.} \quad y = x.$$

De la même manière, pour $a = -1$, l'équation de la tangente devient

$$y = f'(-1) \times \big(x - (-1)\big) + f(-1).$$

Or $f(-1) = 0$ puisque -1 est solution de $f(x) = 0$ et $f'(-1) = \frac{-2+1}{1-1+1} = \frac{-1}{1} = -1$.
Donc la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation

$$y = -1 \times (x + 1) + 0, \qquad \textit{i.e.} \quad y = -x - 1.$$

6. a) Je dérive de nouveau f' pour obtenir f''. La fonction f' est donnée sous la forme d'un quotient $f' = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x^2+x+1$. Puisque $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x+1$, alors

$$f''(x) = \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{2x^2+2x+2-(4x^2+4x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$f''(x) = \frac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

b) Pour étudier la convexité de f, j'étudie le signe de $f''(x)$. Pour commencer, je remarque que le dénominateur est toujours positif. Alors le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $-2x^2 - 2x + 1$. Je cherche donc le signe de ce polynôme de degré 2.
Son discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 4 + 8 = 12 > 0$.
Il y a donc deux racines et comme $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, alors

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{12}}{2 \times (-2)} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{12}}{2 \times (-2)} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Je déduis alors le tableau de signe de $-2x^2 - 2x + 1$, qui est aussi celui de $f''(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Je peux alors déduire que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$ car $f''(x)$ y est positif et concave sur les intervalles $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right]$ et $\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.
Cela m'amène bien à deux points d'inflexions, points où la convexité change,
le premier d'abscisse $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et le second d'abscisse $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

7. a) Le fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante (d'après la question **4.b)**) sur l'intervalle $[0,+\infty[$. J'ai aussi montré que $f(0)=0$ et que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$. Ainsi comme $1 \in [0,+\infty[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, je peux déduire qu'il existe une unique solution, notée α, de l'équation $f(x)=1$.

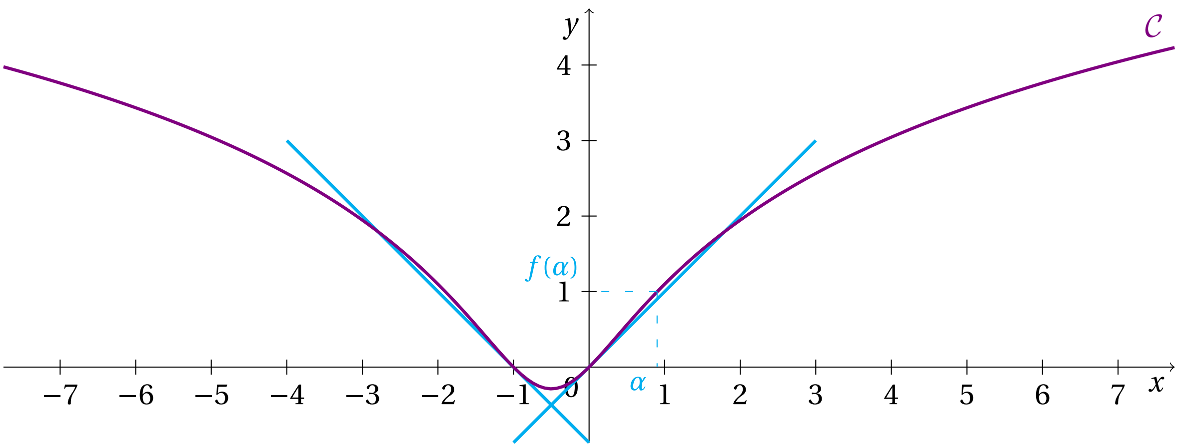
   b) Je calcule $f(0)$ et $f(1)$: $f(0)=0$ et $f(1)=\ln(1+1+1)=\ln(3)\approx 1.1$.
   Comme $f(\alpha)=1$, que $f(0)\leqslant 1 \leqslant f(1)$ et que f est croissante, j'en déduis que $0\leqslant \alpha \leqslant 1$.
   J'ai bien montré que
$$\alpha \in [0,1].$$

   c) Comme α est solution de $f(x)=1$, je sais que $\ln\left(\alpha^2+\alpha+1\right)=1$. Alors
$$f(-1-\alpha)=\ln\left((-1-\alpha)^2+(-1-\alpha)+1\right)=\ln\left(\alpha^2+2\alpha+1-1-\alpha+1\right)=\ln\left(\alpha^2+\alpha+1\right)=1.$$
   Ainsi j'ai bien montré que
$$f(-1-\alpha)=1.$$

   d) Voici le script complété.

```
import numpy as np
def f(x):
    y=np.log(x**2+x+1)
    return y
a=0
b=1
while b-a>10**(-3):
    c=(a+b)/2
    if f(c)<1:
        a=c
    else:
        b=c
print(c)
```

8. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de ses tangentes.



Exercice 3 –

1. a) La probabilité a_2 est la probabilité de l'événement A_2, à savoir que le joueur tire vers la cible A. Or s'il tire de nouveau vers la cible A, c'est qu'il n'a pas réussi à atteindre le secteur 1 la première fois. Comme il n'y a que deux secteurs sur la cible A, alors

$$a_2 = P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

De la même manière, b_2 est la probabilité de l'événement B_2, à savoir que le joueur tire vers la cible B. Or s'il tire cette fois vers la cible B, c'est qu'il a réussi à atteindre le secteur 1 la première fois sur la cible A. Comme il n'y a que deux secteurs sur cette cible, alors

$$b_2 = P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

b) Le deuxième lancer ne pouvant se faire que sur l'une des deux cibles A ou B, $\{A_2, B_2\}$ forme un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} b_3 = P(B_3) &= P\big(A_2 \cap B_3\big) + P\big(B_2 \cap B_3\big) = P(A_2) \times P_{A_2}(B_3) + P(B_2) \times P_{B_2}(B_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$b_3 = \frac{5}{8}.$$

2. Je raisonne de manière similaire à la question précédente.
Si le joueur effectue un $(n+1)$-ième lancer, alors le n-ième lancer a été tiré ou bien sur la cible A, ou bien sur la cible B. Donc $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap A_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times 0 = \frac{1}{2} a_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P\big(A_n \cap B_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap B_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n + \frac{1}{2} a_n.$$

3. a) Voici le script complété.

```
def calcul(n):
    a=1
    b=0
    for k in range(1,n):
        b=a/2+b*3/4
        a=a/2
    return a,b
```

b) Si les lignes 4. et 5. se retrouvent échangées, la variable `a` est mise à jour en premier et contient la valeur a_i au moment de mettre à jour la variable `b` par la valeur b_i.
C'est un problème puisque b_i dépend de a_{i-1} et non pas de a_i.

4. Je sais que $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$ donc la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
Son premier terme est $a_1 = 1$ et je peux donner sa forme explicite : pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

5. a) Comme $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$, je sais que

$$v_1 = 2^{1-1}b_1 + 2 = 1 \times b_1 + 2 = 1 \times 0 + 2 = 2.$$

Aussi pour tout $n \geqslant 1$, en me servant des questions précédentes et du fait que

$$v_n = 2^{n-1}b_n + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad v_n - 2 = 2^{n-1}b_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = b_n,$$

alors je peux montrer que

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2^{n+1-1}b_{n+1} + 2 = 2^n\left(\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n\right) + 2 \\ &= \frac{3 \times 2^n}{4}b_n + \frac{2^n}{2}a_n + 2 = \frac{3 \times 2^n}{4} \times \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} + \frac{2^n}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \\ &= \frac{3 \times 2 \times (v_n - 2)}{4} + \frac{2}{2} + 2 = \frac{3(v_n - 2)}{2} + 1 + 2 \\ &= \frac{3}{2}v_n - 3 + 3 = \frac{3}{2}v_n. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$v_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n.$$

b) Je reconnais en $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une suite géométrique, de raison $q = \dfrac{3}{2}$ et de premier terme $v_1 = 2$. Je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

c) Grâce aux questions précédentes, je sais que $b_n = \dfrac{v_n - 2}{2^{n-1}}$ et $v_n = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$.
Alors il me suffit de combiner ces deux expressions pour obtenir que pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^{n-1}} \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}} = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

J'ai ainsi bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

6. Voici le script complété.

```
import numpy.random as rd
cible='a'
n=1
while cible!='c':
    n=n+1
    if cible=='a':
        secteur=rd.randint(1,3)
        if secteur==1:
            cible='b'
    else:
        secteur=rd.randint(1,5)
        if secteur==1:
            cible='c'
print(n)
```

7. a) Si le joueur se décourage au bout de deux lancers, la seule façon pour que celui-ci gagne un lot est qu'il arrive à la cible C en deux lancers, c'est-à-dire qu'il atteigne le secteur 1 de la cible A au premier lancer, puis le secteur 1 de la cible B au deuxième lancer.
La probabilité ainsi obtenue est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
J'ai bien montré que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot est de $\frac{1}{8}$.

b) Les 20 joueurs représentent $n = 20$ répétitions d'une même épreuve de Bernoulli de succès "Le joueur gagne un lot", de probabilité $p = \frac{1}{8}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire Y compte le nombre de succès.
La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{8}$.
Le support de Y est donné par $Y(\Omega) = [\![0,20]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,20]\!]$,

$$P(Y=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{20}{k} \times \frac{1}{8^k} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{20-k}.$$

c) Comme Y suit une loi binomiale, alors

$$E(Y) = np = 20 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = np(1-p) = \frac{5}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{16}.$$

d) La variable aléatoire Y compte le nombre de succès des joueurs, qui coûtent au forain 5€ de lot mais lui rapporte trois fois 1€ par fléchette lancée, soit un gain algébrique de -2€. Cela laisse $(20 - Y)$ échecs qui eux rapportent au forain 2€. En additionnant tout cela, le gain total du forain est donné par

$$G = -2 \times Y + 2 \times (20 - Y) = 2(20 - Y) - 2Y.$$

Finalement, le gain moyen du forain correspond à l'espérance de G, *i.e.* par linéarité,

$$E(G) = E\big(2(20-Y) - 2Y\big) = 2\big(20 - E(Y)\big) - 2E(Y) = 2\left(20 - \frac{5}{2}\right) - 2 \times \frac{5}{2} = 40 - 5 - 5 = 30.$$

Le forain gagne donc en moyenne 30€ pour 20 joueurs.

Exercice 4 –

1. a) La fonction f est définie en deux morceaux. Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, $f(t)=0\geqslant 0$ donc la fonction f est positive. Et sur l'intervalle $[0,+\infty[$, $f(t)=e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}$. Comme $t\geqslant 0$, alors $-t\leqslant \dfrac{t}{2}$ et par croissance de la fonction exponentielle $e^{-t}\leqslant e^{-\frac{t}{2}}$, donc $f(t)\geqslant 0$.
   Finalement la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.

   b) Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, $f(t)=0$ donc la fonction f est continue car constante.
   Sur l'intervalle $[0,+\infty[$, $f(t)=e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}$ donc la fonction f est continue comme somme de fonctions continues. Il ne me reste plus qu'à étudier la continuité en $t=0$:

$$\lim_{t\to 0^-} f(t)=\lim_{t\to 0^-} 0=0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}=e^{-\frac{0}{2}}-e^{-0}=1-1=0.$$

   Comme la limite à gauche de f en 0 est égale à la limite à droite de f en 0,
   j'en déduis que la fonction f est continue en 0.
   En conclusion, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

   c) Par définition, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la limite $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-at}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.
   Soit $X\geqslant 0$. Je cherche à calculer $\displaystyle\int_0^X e^{-at}\,\mathrm{d}t$. Je commence par remarquer qu'une primitive de $g(t)=e^{-at}$ est donnée par $G(t)=-\dfrac{1}{a}e^{-at}$. Donc

$$\int_0^X e^{-at}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^X=-\frac{1}{a}e^{-aX}+\frac{1}{a}e^{-a\times 0}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}e^{-aX}.$$

   Il me reste à étudier la limite de cette quantité lorsque X tend vers $+\infty$. Comme $a>0$,

$$\lim_{X\to+\infty} -aX=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty} e^{-aX}=0.$$

   Je peux alors déduire que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-at}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\times 0=\frac{1}{a}$,
   ce qui indique que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}.$$

   d) Je sais déjà que f est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Il me reste à montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Je décompose, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   Je sais que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0 car la fonction sous l'intégrale est nulle.
   Grâce à la question précédente, appliquée pour $a=1$ et $a=\dfrac{1}{2}$, je sais aussi que les deux intégrales suivantes convergent et je connais leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1}=1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

Donc par linéarité, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 2-1=1.$$

Finalement la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0+1=1.$$

Donc je peux conclure que f est une densité de probabilité.

2. a) La fonction de répartition F de X est donnée par $\quad F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

   Alors pour $x<0$, $\quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$

   b) Pour $x \geqslant 0$, $\quad$ la fonction de répartition devient

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^{x} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} e^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[-2e^{-\frac{t}{2}}\Big]_0^x - \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = -2e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{0}{2}} + e^{-x} - e^{-0}\\ &= -2e^{-\frac{x}{2}} + 2 + e^{-x} - 1 = -2e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x} + 1\end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout $x \geqslant 0$,

$$F(x) = 1 - 2e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x}.$$

3. a) Comme la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre a,
   je sais qu'une densité est donnée par

$$f_Y(t) = \begin{cases} ae^{-at} & \text{si } t \geqslant 0,\\ 0 & \text{si } t<0.\end{cases}$$

Aussi son espérance est donnée par

$$E(Y) = \frac{1}{a}.$$

   b) D'après la définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité, je sais que

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tae^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

En combinant les deux précédentes équations, j'obtiens que

$$\int_0^{+\infty} tae^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}.$$

Alors en divisant des deux côtés par a non nul, j'obtiens que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_0^{+\infty} te^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}.$$

c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} t\times 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} t\times f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}} - te^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{0}^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Et comme les deux intégrales impliquées convergent (il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente en $a=1$ et $a=\dfrac{1}{2}$), j'en déduis que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge et donc que la variable aléatoire X admet une espérance.
De plus

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{1^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{1} = 4-1=3.$$

J'ai bien montré que l'espérance de X vaut $E(X)=3$.