EXERCICES — CHAPITRE 12

Exercice 1 – Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle considéré.

1. $\ln(x+4) = 2\ln(x+2)$ sur $I =]-2, +\infty[$
2. $\ln(x+3) + \ln(x+1) = \ln(x+13)$ sur $I =]-1, +\infty[$
3. $\ln(3x-1) - \ln x = \ln 2$ sur $I = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$
4. $\ln x = 1$ sur $I =]0, +\infty[$

Exercice 2 – Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle considéré.

1. $\ln(x-2) \leqslant 0$ sur $I =]2, +\infty[$
2. $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geqslant \ln 2$ sur $I = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$
3. $\ln(x-3) \geqslant 1$ sur $I =]3, +\infty[$
4. $\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant 0$ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Exercice 3 – Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x^2)}$
3. $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x^2}$
6. $f(x) = x - \ln(x)$

Exercice 4 – Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0.

1. $f(x) = x - \ln(x)$
2. $f(x) = (x^2+1)\ln(x)$
3. $f(x) = x\ln(x^2)$
4. $f(x) = x\ln(x+1)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(x)$
6. $f(x) = (x^2 - 5x + 6)\ln(x)$

Exercice 5 – Dans chacun des cas suivants, étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$.

- $f(x) = 3x + 2 - \ln x$
- $f(x) = \dfrac{2x + \ln x}{x}$
- $f(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$

Exercice 6 – Donner le domaine de définition et calculer la dérivée $f'(x)$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x - 2 - 2\ln x$
2. $f(x) = x\ln x$
3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
4. $f(x) = x^2 + 1 + 2\ln x$
5. $f(x) = x^2 \ln x$
6. $f(x) = \dfrac{x + 3\ln x}{x}$
7. $f(x) = \ln(x-4)$
8. $f(x) = \ln(1+x^2)$
9. $f(x) = \dfrac{10}{\ln(4x-2)}$

Exercice 7 – Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f.

Exercice 8 –

Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 - \ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de la fonction g.
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie II

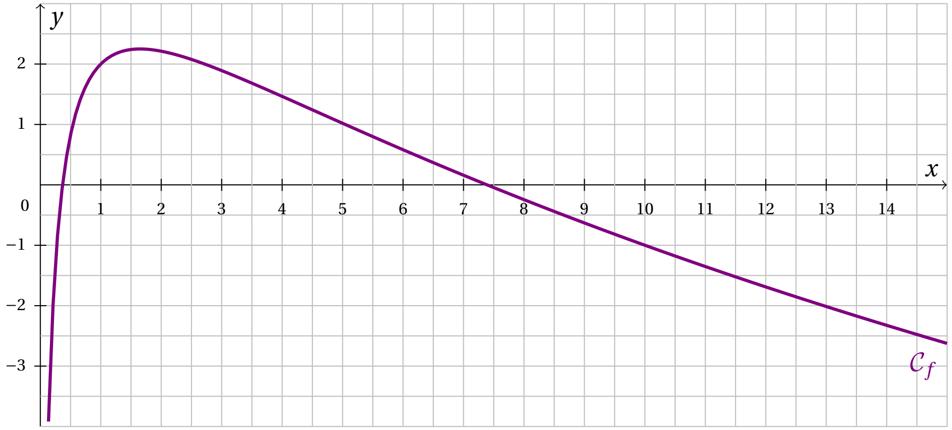
Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x} - \dfrac{x}{2} + 1$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. (a) Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   (b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{x}{2} + 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   (d) Calculer les coordonnées du point A, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de la fonction f.
3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère.

Exercice 9 – Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. (a) Étudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
   (b) La courbe C_f admet-elle des asymptotes ?
2. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Exercice 10 – On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = (1+\ln x)(2-\ln x)$ et dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$.
   (b) Étudier les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
4. (a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
   (b) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $(1+X)(2-X) = 2$.
   (c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 11 (extrait de ECRICOME 2019) **–** Soit g la fonction numérique réelle définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.
3. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ dont on précisera l'équation.
   (b) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.