DEVOIR SURVEILLÉ 4

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.
Tout calcul doit être accompagné d'une phrase l'expliquant !

Ce sujet comporte 3 pages et est constitué de 5 exercices. Bon courage !

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x - 2\right)\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{-1}^0 x(5x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 – Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de 20 questions. Pour chaque question, il y a quatre réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que

- l'élève A ne connaît que 75% de son cours, c'est-à-dire que, pour chaque question, la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\frac{75}{100}$,
- lorsqu'il ne connait pas une réponse à une question, il répond au hasard,
- les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les évènements

- R : "l'élève A connaît la réponse à la première question".
- J : "l'élève A répond correctement à la première question".

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(J) = \frac{13}{16}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de X. On donnera les valeurs prises par X et, pour chacune de ces valeurs k, la valeur de $P(X = k)$.
3. Donner $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance de X.
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer un point par réponse fausse.
   Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.

(a) Justifier l'égalité $N = 2X - 20$.

(b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 75% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
   (c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B, quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note?

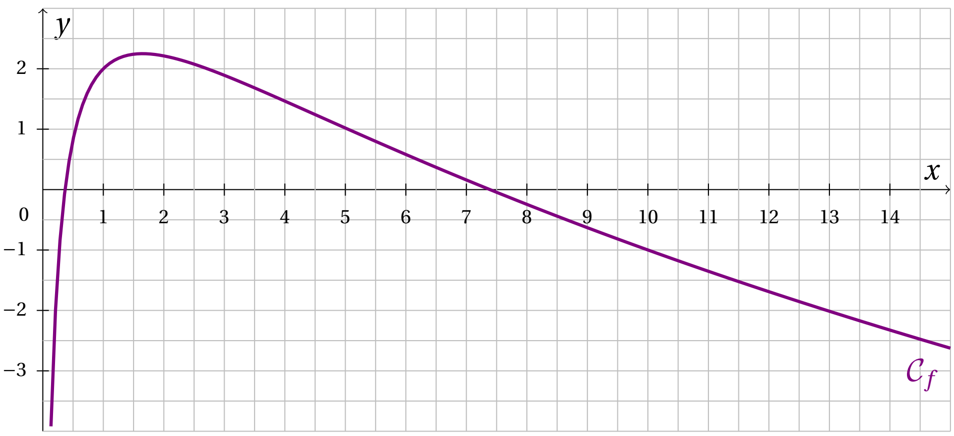
Exercice 3 – Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : *Approfondissement* ou *Ouverture culturelle*. Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés. La première semaine, 20% des élèves de la classe ont choisi *Approfondissement* et tous les autres ont choisi *Ouverture culturelle*. On admet que

- 20% des élèves ayant choisi *Ouverture culturelle* une certaine semaine s'inscrivent en *Approfondissement* la semaine suivante,
- 30% des élèves ayant choisi *Approfondissement* une certaine semaine s'inscrivent en *Ouverture culturelle* la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe. Pour tout entier naturel n non-nul, on note A_n l'évènement "l'élève a choisi *Approfondissement* la n-ième semaine" et p_n la probabilité de l'évènement A_n. On a alors $p_1 = 0.2$.

1. Donner les valeurs de $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$, $\quad p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non-nul par $u_n = p_n - 0.4$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0.5 et préciser la valeur de son premier terme u_1.
   (b) En déduire pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$ l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de p_n en fonction de n.
4. Étudier le sens de variation de la suite (p_n).
5. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 4 – On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = (1 + \ln(x))(2 - \ln(x))$ et dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$.
   (b) Étudier les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
4. (a) Déterminer à l'aide du graphique **et en expliquant** le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
   (b) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $(1+X)(2-X) = 2$.
   (c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 5 – Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$g(x) = e^x - 1 + x.$$

1. (a) Montrer que g est croissante sur $\mathbf{R}$.
   (b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

2. (a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   (c) Justifier que
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$
3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}.$$
   (b) Dresser le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites calculées à la question 2.
4. Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel x, la relation
   $$f''(x) = \frac{2-x}{e^x}.$$
   Étudier la convexité de f.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.