DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1 – [Adapté d'ECRICOME 2013 / Ex1]

1. Je calcule les produits $P \times Q$ et $Q \times P$:

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$Q \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

2. a) Je calcule le produit $Q \times A$ puis $B = QA \times P$.

$$Q \times A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$QA \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ 1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Je sais que $B = QAP$. En multipliant à gauche par P et à droite par Q, j'obtiens que

$$P \times B \times Q = P \times QAP \times Q = \underbrace{PQ}_{=I} \times A \times \underbrace{PQ}_{=I} = I \times A \times I = A.$$

J'ai bien montré que $A = PBQ$.

c) Comme la matrice B est diagonale, alors

$$B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

d) Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 0$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PB^nQ$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $PB^0Q = PIQ = PQ = I$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
D'après ce qui précède, je sais que $A = PBQ$ et, par hypothèse de récurrence,
je sais que $A^n = PB^nQ$. Alors j'en déduis que

$$A^{n+1} = A^n \times A = PB^nQ \times PBQ = PB^nIBQ = PB^nBQ = PB^{n+1}Q.$$

Donc $A^{n+1} = PB^{n+1}Q$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PB^nQ.$$

e) Je sais désormais que $A^n = PB^nQ$ et je connais l'expression des trois matrices P, B^n et Q. J'effectue alors les produits matriciels :

$$P \times B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$PB^n \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+2^n\right) & \frac{1}{2}\left(-1+2^n\right) \\ \frac{1}{2}\left(-1+2^n\right) & \frac{1}{2}\left(1+2^n\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2^n+1}{2} & \frac{2^n-1}{2} \\ \frac{2^n-1}{2} & \frac{2^n+1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. a) Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 0$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad u_n \geqslant 1$.

Initialisation : Pour $n=0$, $\quad u_0 = 2 \quad$ et $\quad 2 \geqslant 1$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que $u_n \geqslant 1$. Je cherche à montrer que $u_{n+1} \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} \geqslant 1 \quad &\iff \quad \frac{3u_n+1}{u_n+3} \geqslant 1 \quad \iff \quad 3u_n+1 \geqslant u_n+3 \quad \text{car } u_n+3 \geqslant 1+3>0 \\ &\iff \quad 2u_n \geqslant 2 \quad \iff \quad u_n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Or $u_n \geqslant 1$ donc $u_{n+1} \geqslant 1$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1.$$

b) Je calcule la différence entre deux termes consécutifs. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+1}{u_n+3} - u_n = \frac{3u_n+1}{u_n+3} - \frac{u_n^2+3u_n}{u_n+3} = \frac{1-u_n^2}{u_n+3}.$$

Or d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 0$, $\quad u_n \geqslant 1$ donc $u_n^2 \geqslant 1$ et $1-u_n^2 \leqslant 0$.
Et comme $u_n+3 \geqslant 0$, alors $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$, *i.e.* $u_{n+1} \geqslant u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

c) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 1, donc selon le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $L \geqslant 1$.

d) Par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$. Alors par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{u_n+3}$, j'obtiens que $L = \dfrac{3L+1}{L+3}$. Alors, comme $L+3 \geqslant 1+3>0$,

$$\begin{aligned} L = \frac{3L+1}{L+3} \quad &\iff \quad L(L+3) = 3L+1 \quad \iff \quad L^2+3L = 3L+1 \\ &\iff \quad L^2-1=0 \quad \iff \quad L=1 \text{ ou } L=-1. \end{aligned}$$

Mais puisque pour tout $n \geqslant 0$, $\quad u_n \geqslant 1$, $\qquad$ alors $L \geqslant 1$ et finalement $L=1$.

4. a) Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 0$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad u_0 = 2 \quad$ et $\quad \dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{2}{1} = 2$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} = \frac{3\frac{a_n}{b_n} + 1}{\frac{a_n}{b_n} + 3} \\
&= \frac{3a_n + b_n}{a_n + 3b_n} \quad \text{en multipliant numérateur et dénominateur par } b_n, \\
&= \frac{\frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n}{\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n} \quad \text{en multipliant numérateur et dénominateur par } \frac{1}{2}, \\
&= \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \quad \text{par définition de } a_n \text{ et } b_n.
\end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

b) Je calcule le produit AU_n dans le but de retrouver U_{n+1} :

$$AU_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

J'ai bien exprimé U_{n+1} en fonction de A et U_n : $\quad U_{n+1} = AU_n$. Alors je peux montrer par récurrence *(non demandée)* que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\quad U_n = A^n U_0$.

c) En injectant les résultats de la question **2.d)** dans la formule obtenue à la question précédente, j'obtiens que

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \times U_0 = \begin{pmatrix} \frac{2^n+1}{2} & \frac{2^n-1}{2} \\ \frac{2^n-1}{2} & \frac{2^n+1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 1 + \frac{2^n-1}{2} \\ 2^n - 1 + \frac{2^n+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 2^{n-1} + \frac{1}{2} \\ 2^n + 2^{n-1} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$u_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n + 2^{n-1} + \frac{1}{2}}{2^n + 2^{n-1} - \frac{1}{2}} = \frac{2^n + 2^{n-1} - \frac{1}{2} + 1}{2^n + 2^{n-1} - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2^n + 2^{n-1} - \frac{1}{2}}.$$

Puis comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n + 2^{n-1} - \frac{1}{2} = +\infty$, alors par quotient, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n + 2^{n-1} - \frac{1}{2}} = 0$.

Et finalement par somme, je retrouve bien

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercice 2 – Adapté d'ECRICOME 2013 / Ex2

1. a) Je dérive la fonction g terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x} = \frac{6x^3 - 6}{x} = \frac{6\left(x^3 - 1\right)}{x}.$$

   b) Puisque $x \in \mathbb{R}_+^*$, il n'y a pas de valeurs interdites. Alors

$$g'(x) = 0 \iff x^3 - 1 = 0 \iff x = 1.$$

   Donc l'unique solution p est $p = 1$ et j'en déduis le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$6\left(x^3-1\right)$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

   c) Puisque $g(1) = 2 \times 1^3 - 6\ln(1) + 3 = 5 > 0$ et que $g(1)$ est le minimum de g, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g(x) \geqslant g(1) = 5 > 0.$$

   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad g(x) > 0$.

2. a) Je calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

   - Par quotient, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$ puis

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln(x)}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

   - Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ puis

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3\ln(x)}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

   b) Je calcule l'écart entre la courbe et l'asymptote :

$$f(x) - y = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} - 2x = \frac{3\ln(x)}{x^2}.$$

   Et grâce à la question précédente, je sais que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln(x)}{x^2} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ quand $x \to +\infty$.

   Enfin pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f(x) - y = \dfrac{3\ln(x)}{x^2} > 0$, *i.e.* $\forall x > 1, \quad f(x) > y$.
   Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

3. a) La fonction f est donnée sous la forme $f(x) = 2x + \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = 3\ln(x)$ et $v(x) = x^2$.
Alors $u'(x) = \dfrac{3}{x}$ et $v'(x) = 2x$, puis

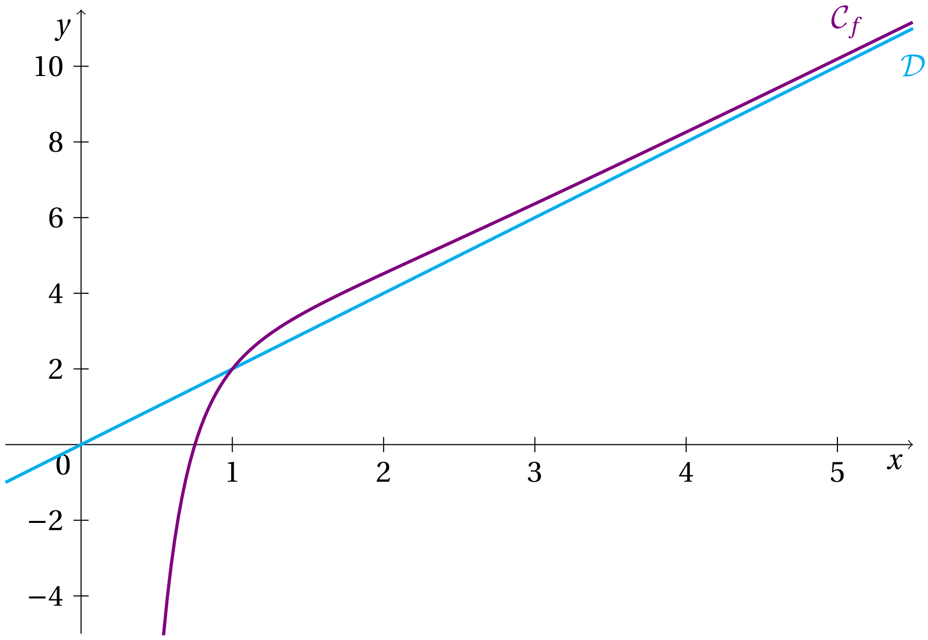
$$f'(x) = 2 + \frac{\frac{3}{x} \times x^2 - 3\ln(x) \times 2x}{\left(x^2\right)^2} = 2 + \frac{3x - 6x\ln(x)}{x^4} = \frac{2x^3 + 3 - 6\ln(x)}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

J'ai bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

b) Je sais que $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par la question **1.**, donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
J'en déduis alors le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

c) Voici la représentation graphique de la fonction f.



4. a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un antécédent $x \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Comme f est aussi strictement croissante, alors cet antécédent est unique et pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $(E_n) : f(x) = 2n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Par définition, $f(x_n) = 2n$. Puis

$$f(1) = 2 \times 1 + \frac{3 \times \ln(1)}{1^2} = 2 + 0 = 2 \quad \text{et} \quad f(n) = 2 \times n + \frac{3 \times \ln(n)}{n^2} = 2n + \frac{3\ln(n)}{n^2},$$

avec $n \geqslant 1$ donc $\ln(n) \geqslant 0$. Finalement

$$2 \leqslant 2n \leqslant 2n + \frac{3\ln(n)}{n^2}, \qquad \textit{i.e.} \quad f(1) \leqslant f(x_n) \leqslant f(n).$$

Par croissance de la fonction f, j'en conclus alors que

$$\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant x_n \leqslant n.$$

c) Soit $n \geqslant 1$. Par définition de x_n,

$$2x_n + \frac{3\ln(x_n)}{x_n^2} = 2n \iff \frac{3\ln(x_n)}{x_n^2} = 2n - 2x_n \iff \frac{3\ln(x_n)}{2nx_n^2} = 1 - \frac{x_n}{n}.$$

d) En me servant de l'encadrement $1 \leqslant x_n \leqslant n$, j'en déduis que $0 = \ln(1) \leqslant \ln(x_n) \leqslant \ln(n)$. Puis

$$0 < 1 \leqslant x_n \iff 0 \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1} = 1 \iff 0 \leqslant \frac{1}{nx_n^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Par produit, j'obtiens bien que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{\ln(x_n)}{nx_n^2} \leqslant \frac{\ln(n)}{n}.$$

e) Par croissances comparées, je sais que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Alors d'après le théorème des gendarmes, grâce à l'encadrement obtenu à la question précédente, j'en déduis que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{nx_n^2} = 0.$$

D'après l'égalité obtenue à la question **4.c)**, $\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{3\ln(x_n)}{2nx_n^2}$. Alors par linéarité,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{3\ln(x_n)}{2nx_n^2} = 1 - \frac{3}{2} \times 0 = 1.$$

Exercice 3 – [Début d'ESCP 2011 / Ex1]

1. a) Je calcule K^2 puis K^3 :

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^3 = K^2 \times K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

b) Comme $K^3 = 0_3$, alors pour tout entier $n \geqslant 3$, $K^n = K^3 \times K^{n-3} = 0_3 \times K^{n-3} = 0_3$.

2. a) Je calcule $I + K$ dans le but de retrouver A :

$$I + K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

J'ai ainsi montré que $A = I + K$.

b) Les matrices I et K commutent puisque la matrice identité commute avec n'importe quelle matrice. Je peux donc appliquer la formule du binôme de Newton à $A = I + K$:

$$A^n = (I+K)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} K^k.$$

Or dans cette somme, tous les termes correspondants à un entier $k \geqslant 3$ sont nuls, d'après la question **1.b)**. Donc pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$A^n = \binom{n}{0} K^0 I^n + \binom{n}{1} K^1 I^{n-1} + \binom{n}{2} K^2 I^{n-2} = I + nK + \frac{n(n-1)}{2} K^2.$$

c) En explicitant les matrices de l'expression précédente, j'obtiens que pour tout $n \geqslant 2$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n+2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Je vérifie pour $n = 0$ et $n = 1$ la véracité de la formule précédente, déjà valable pour $n \geqslant 2$:

- Pour $n = 0$, la formule précédente donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 & 0\times(2\times 0+1) \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0.$$

- Pour $n = 1$, la formule précédente donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 & 1\times(2\times 1+1) \\ 0 & 1 & 2\times 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi la formule trouvée pour $n \geqslant 2$ à la question **2.b)** est aussi valable pour $n = 0$ et $n = 1$. La formule est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 –

1. a) Comme le dé est équilibré, tous les tirages sont équiprobables.
   Ainsi X suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$, *i.e.* $\forall x \in [\![1,6]\!]$, $P(X = x) = \dfrac{1}{6}$.

   b) Comme X suit une loi uniforme, alors

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}.$$

2. Pour obtenir deux fois PILE, il faut lancer la pièce deux fois, donc avoir obtenu un 6 avec le dé. D'où $P(Y = 2) = P\big([Y=2] \cap [X=6]\big)$. Puis par la formule des probabilités composées,

$$P\big([Y=2] \cap [X=6]\big) = P(X=6) \times P_{[X=6]}(Y=2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}.$$

3. a) Si j'obtiens 1, 2, 3, 4 ou 5 avec le dé, alors je ne lance la pièce qu'une seule fois, donc j'ai une chance sur deux d'obtenir une fois PILE et une chance sur deux de n'en obtenir aucun. Ainsi
$$\forall k \in \{1,2,3,4,5\}, \quad P_{[X=k]}(Y=0) = \frac{1}{2}.$$
b) Si j'obtiens un 6 avec le dé, alors je lance la pièce deux fois. Ainsi j'obtiens 0 fois PILE si et seulement si j'obtiens deux fois FACE. Donc
$$P_{[X=6]}(Y=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
D'après la formule des probabilités totales, comme $\{[X=k] \mid 1 \leqslant k \leqslant 6\}$ forme un système complet d'événements,
$$\begin{aligned} P(Y=0) &= \sum_{k=1}^{6} P(X=k) \times P_{[X=k]}(Y=0) \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4} = \frac{11}{24}. \end{aligned}$$
c) Je sais déjà que $P(Y=2) = \frac{1}{24}$ et que $P(Y=0) = \frac{11}{24}$.
Donc il ne me reste plus qu'à déterminer $P(Y=1)$ et
$$P(Y=1) = 1 - P(Y=0) - P(Y=2) = 1 - \frac{1}{24} - \frac{11}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$
Je récapitule cela dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(Y=k)$	$\frac{11}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{1}{24}$

Pour le calcul de l'espérance,
$$E(Y) = 0 \times \frac{11}{24} + 1 \times \frac{12}{24} + 2 \times \frac{1}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}.$$

4. a) Grâce aux probabilités déjà calculées, j'obtiens

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$
$Y=0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
$Y=1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$Y=2$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$

b) Je calcule $E(XY)$ grâce à la loi conjointe :
$$E(XY) = 1 \times 1 \times \frac{1}{12} + \cdots + 1 \times 6 \times \frac{1}{12} + 2 \times 6 \times \frac{1}{24} = \frac{1+2+3+4+5+6+6}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}.$$
J'en déduis alors, d'après la formule de König-Huygens, que
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \times \frac{7}{12} = \frac{54}{24} - \frac{49}{24} = \frac{5}{24}.$$

Exercice 5 –

1. a) Je calcule d'abord $A-I$ puis le produit $A\times(A-I)$: $A-I=\begin{pmatrix}-3&-6&6\\0&-1&0\\-1&-3&2\end{pmatrix}$ et

$$A\times(A-I)=\begin{pmatrix}6-6&12+6-18&-12+12\\0&0&0\\3-3&6+3-9&-6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3.$$

Je calcule désormais $B-I$ puis le produit $B\times(B-I)$: $B-I=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&2&-2\\1&3&-3\end{pmatrix}$ et

$$B\times(B-I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1+3-2&6-6&-6+6\\-1+3-2&6-6&-6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3.$$

b) D'après la question précédente,

$$A(A-I)=0_3 \iff A\times A-A\times I=0 \iff A^2-A=0 \iff A^2=A.$$

De même,

$$B(B-I)=0_3 \iff B\times B-B\times I=0 \iff B^2-B=0 \iff B^2=B.$$

<u>Remarque</u> : Calculer le produit A^2 et remarquer que l'on retrouve bien A permet de vérifier l'égalité, mais ne répond pas à la question "En déduire".

c) Je calcule les produits AB et BA :

$$A\times B=\begin{pmatrix}-6+6&-18+18&12-12\\0&0&0\\-3+3&-9+9&6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3,$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2+2&-6+6&6-6\\-2+2&-6+6&6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3.$$

2. a) En développant, $W^2=\left(A+2B\right)^2=A^2+A\times 2B+2B\times A+\left(2B\right)^2$.
*Mais **ATTENTION**, le produit n'est pas commutatif!*
Comme d'après la question précédente $A^2=A$, $B^2=B$, $AB=0_3$ et $BA=0_3$, je déduis que

$$W^2=A+\left(2B\right)^2=A+4B^2=A+4B.$$

b) Je raisonne par récurrence sur $n\geqslant 1$.
Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $W^n=A+2^nB$.
Initialisation : Pour $n=1$, $W^1=W=A+2B=A+2^1B$ d'après la question précédente.
Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : Soit $n\geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $W^n=A+2^nB$. Alors

$$\begin{aligned}W^{n+1}&=W^n\times W=\left(A+2^nB\right)\times\left(A+2B\right)=A^2+A\times 2B+2^nB\times A+2^nB\times 2B\\&=A+0_3+0_3+2^{n+1}B^2=A+2^{n+1}B.\end{aligned}$$

Donc $W^{n+1}=A+2^{n+1}B$. Finalement P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad W^n=A+2^nB.$$