

9 | Compléments sur les suites

I – Propriétés éventuelles d'une suite

1 – Suites monotones

Définition 9.1 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1},$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1},$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1},$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1},$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).



Méthode 9.2 – Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante

Pour établir qu'une suite est monotone, on peut :

1. Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. En effet, on sait que

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0,$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

2. Comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 **lorsque tous les termes sont strictement positifs**.
En effet, on sait que

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$

Exemple 9.3 –

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ est strictement croissante.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{2^n}{n+1}$ est strictement croissante.



Méthode 9.4 – Variations des suites usuelles

• Cas des suites arithmétiques.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r . Alors

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r.$$

La monotonie de la suite dépend donc du signe de r :

- ▷ Si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- ▷ Si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.	Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• Cas des suites géométriques.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Alors

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n \times (q - 1).$$

La monotonie de la suite dépend des signes de u_0 , de q^n et de $(q - 1)$.

1. Si $q < 0$, alors q^n est positif lorsque n est pair et négatif lorsque n est impair, donc la suite n'est pas monotone. On parle de suite *alternée*.
2. Si $q > 0$, alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon les cas :
 - ▷ Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est croissante (les termes grandissent, dans le positif).
 - ▷ Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite est décroissante (les termes rapetissent, dans le positif).
 - ▷ Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite est décroissante (les termes grandissent, dans le négatif).
 - ▷ Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, la suite est croissante (les termes rapetissent, dans le négatif).

$u_0 > 0$		$u_0 < 0$	
$q > 1$	$0 < q < 1$	$q > 1$	$0 < q < 1$

Exemple 9.5 – Déterminer le sens de variation des suites suivantes, définies par la donnée d'un terme initial et d'une relation de récurrence.

1. $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4.$

2. $v_1 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 5v_n.$

2 – Suite majorée/minorée/bornée

Définition 9.6 – Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et m et M deux réels. On dit que

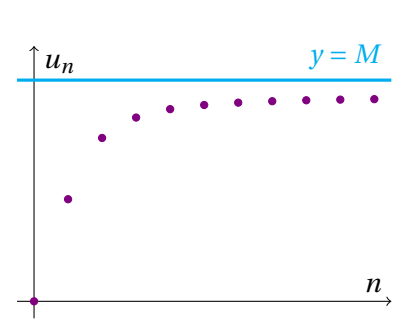
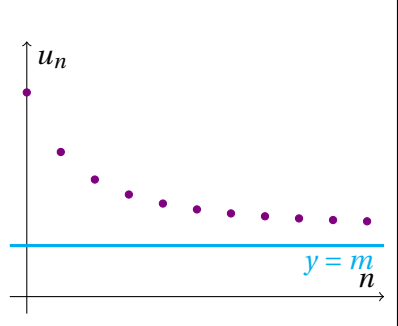
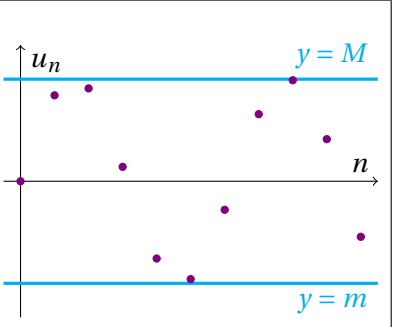
• $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** par M lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

• $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée** par m lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m.$$

Enfin la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée **et** minorée.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.	La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.	La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
		



Méthode 9.7 – Montrer qu'une suite est majorée/minorée/bornée

Pour montrer qu'une suite est majorée, on opère de la même façon que pour une fonction : on étudie le signe de $u_n - M$ pour tout n et on montre que $u_n - M \leq 0$.

De la même manière, on étudie le signe de $u_n - m$ pour tout n et on montre que $u_n - m \geq 0$ pour prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par m .

Exemple 9.8 – Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n^2}{n^2 + 1}$ est majorée par 3.

II – Limite d'une suite réelle

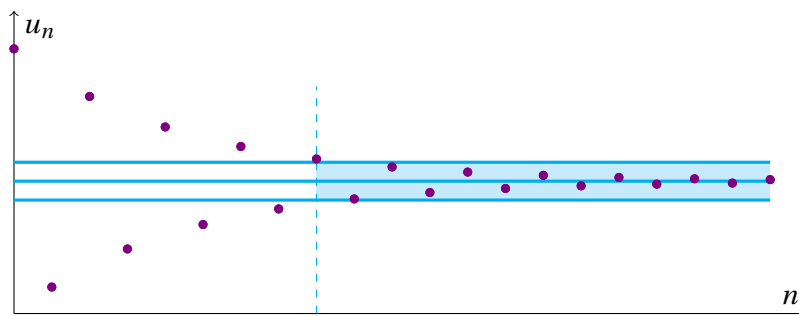
1 – Limite finie

Définition 9.9 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie sur \mathbb{N} et ℓ un réel.

1. Dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour **limite** le réel ℓ signifie que le terme u_n devient arbitrairement proche du réel ℓ pourvu que n soit suffisamment grand. On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite **convergente**.



Graphiquement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang. La distance entre les termes de la suite et sa limite tend à s'annuler, ce qui se traduit par le résultat suivant.

Proposition 9.10

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \ell = 0$.

Exemple 9.11 – Montrer que la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ tend vers 1 en $+\infty$.

2 – Limite infinie

Définition 9.12 –

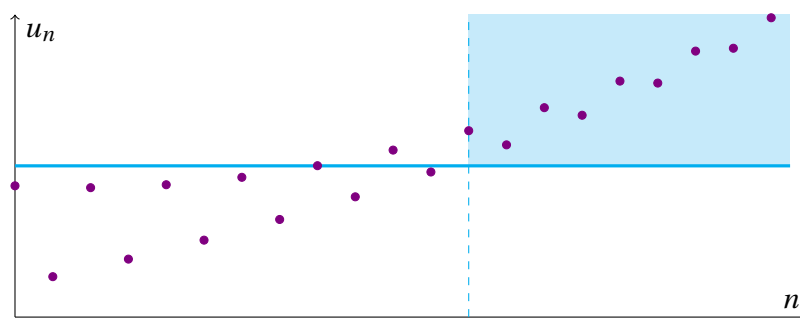
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **admet une limite** égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si le terme u_n prend des valeurs **positives** arbitrairement grandes, pourvu que n soit suffisamment grand. On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **admet une limite** égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si le terme u_n prend des valeurs **négatives** arbitrairement grandes, pourvu que n soit suffisamment grand. On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

- Une suite qui admet une limite infinie est dite **divergente**.



Graphiquement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

Exemple 9.13 – Montrer que la suite définie $\forall n \geq 0$ par $u_n = \frac{n^2}{n+1}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Remarque 9.14 –

- Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 . Elle n'admet donc pas de limite. On parle là aussi de suite **divergente**.
- En revanche, si une suite converge vers un réel ℓ ou diverge vers $\pm\infty$, alors cette limite est **unique**.
- Tous les résultats concernant les opérations sur les limites vus au Chapitre 7 concernant les fonctions restent valables pour les suites.

Proposition 9.15

Le tableau suivant donne la limite de q^n , si celle-ci existe, en fonction des valeurs de q :

	$q > 1$	$q = 1$	$q \in]-1, 1[$	$q \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite



Méthode 9.16 – Limites des suites usuelles

• **Cas des suites arithmétiques.**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r . Alors

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{et} \quad u_n = u_0 + n \times r.$$

La limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dépend donc du signe de r .

1. Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

• **Cas des suites géométriques.**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Alors

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{et} \quad u_n = u_0 \times q^n.$$

L'existence d'une limite pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dépend donc de la valeur de q .

1. Si $q < -1$, alors la suite est alternée et n'admet pas de limite.
2. Si $-1 < q < 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
3. Si $q > 1$, alors la suite est monotone donc elle admet une limite qui dépend cette fois du signe de u_0 :
 - ▷ Si $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 - ▷ Si $u_0 < 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Les graphiques de la Méthode 9.4 montrent les différentes limites possibles dans le cas où $q > 0$.

Exemple 9.17 – Déterminer les limites des suites suivantes, définies par récurrence.

1. $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4$.

2. $v_1 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 5v_n$.

III – Passage à la limite et relation d'ordre

1 – Théorèmes de majoration/minoration

Théorème 9.18

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

- Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge aussi et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

- Si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge aussi et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Exemple 9.19 – Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (2 + (-1)^n) n$.

2 – Théorème d'encadrement

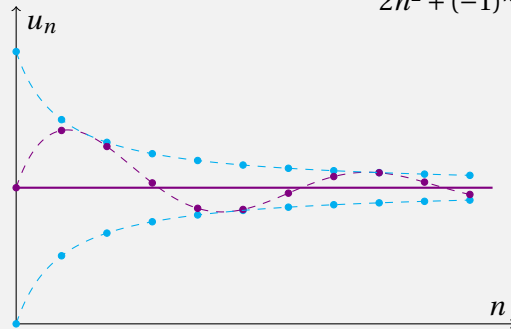
Théorème 9.20 – Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

Exemple 9.21 – Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{2n^2 + (-1)^n}$.



(Le graphe n'est pas celui de la suite (u_n) mais est plus visuel.)

3 – Fonctions monotones

Théorème 9.22 – Théorème de la limite monotone

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Corollaire 9.23

En conséquence du théorème de limite monotone,

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante qui n'est pas majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui n'est pas minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Méthode 9.24 – Étudier la convergence d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier la convergence d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$:

1. On commence par étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en utilisant la Méthode 9.2.
2. On montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée ou minorée en utilisant la Méthode 9.7.
3. On applique le théorème de la limite monotone (Théorème 9.22) :
 - Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors elle converge.
 - Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors elle converge.
4. Enfin, pour déterminer la limite ℓ , on utilise le fait que $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ pour obtenir une équation du type $f(\ell) = \ell$ que l'on résout ensuite pour trouver ℓ .

Les différentes étapes de cette étude sont le plus souvent guidées par les questions de l'énoncé.



Exemple 9.25 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Déterminer sa limite ℓ .