

EXERCICES — CHAPITRE 12

Exercice 1 (★) – Soient x et $y > 0$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

- | | |
|--|--|
| $1. \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2x)$ | $4. \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln(x)$ |
| $2. \ln(x^3) - \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ | $5. \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| $3. 2\ln(x^3) - 3\ln(x^2)$ | $6. \ln(2x+2) - \ln(x+1)$ |

Exercice 2 (★★) – Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle considéré.

1. $\ln(x+4) = 2\ln(x+2)$ sur $I =]-2, +\infty[$
2. $\ln(x+3) + \ln(x+1) = \ln(x+13)$ sur $I =]-1, +\infty[$
3. $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2)$ sur $I = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$
4. $\ln(x) = 1$ sur $I =]0, +\infty[$

Exercice 3 (★★) – Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle considéré.

1. $\ln(x-2) \leq 0$ sur $I =]2, +\infty[$
2. $\ln(4x+5) - \ln(x+2) \geq \ln(3)$ sur $I = \left]-\frac{5}{4}, +\infty\right[$
3. $\ln(x-3) \geq 1$ sur $I =]3, +\infty[$
4. $\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq 0$ sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Exercice 4 (★★) – Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$.

- | | | |
|--------------------------------|---|---------------------------------|
| $1. f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ | $3. f(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$ | $5. f(x) = \frac{\ln(2x)}{x^2}$ |
| $2. f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$ | $4. f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ | $6. f(x) = x - \ln(x)$ |

Exercice 5 (★★) – Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| $1. f(x) = x - \ln(x)$ | $4. f(x) = x\ln(x+1)$ |
| $2. f(x) = (x^2 + 1)\ln(x)$ | $5. f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ |
| $3. f(x) = x\ln(x^2)$ | $6. f(x) = (x^2 - 5x + 6)\ln(x)$ |

Exercice 6 (★★) – Dans chacun des cas suivants, étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $1. f(x) = 3x + 2 - \ln(x)$ | $3. f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$ |
| $2. f(x) = \frac{2x + \ln(x)}{x}$ | $4. f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$ |

Exercice 7 (★★★) – Donner le domaine de définition et calculer la dérivée $f'(x)$ des fonctions suivantes.

- | | | |
|------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| $1. f(x) = x - 2 - 2\ln(x)$ | $4. f(x) = x^2 + 1 + 2\ln(x)$ | $7. f(x) = \ln(x-4)$ |
| $2. f(x) = x\ln(x)$ | $5. f(x) = x^2\ln(x)$ | $8. f(x) = \ln(1+x^2)$ |
| $3. f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ | $6. f(x) = \frac{x+3\ln(x)}{x}$ | $9. f(x) = \frac{10}{\ln(4x-2)}$ |

Exercice 8 (★★★) – Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f .
4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f .

Exercice 9 (★★★) – Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

On note C_f sa courbe représentative.

1. (a) Étudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
(b) La courbe C_f admet-elle des asymptotes?
2. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$.
(b) Étudier les variations de la fonction f .
3. Donner une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

Exercice 10 (★★★) –

Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 - \ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe.
En déduire les variations de la fonction g .
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie II

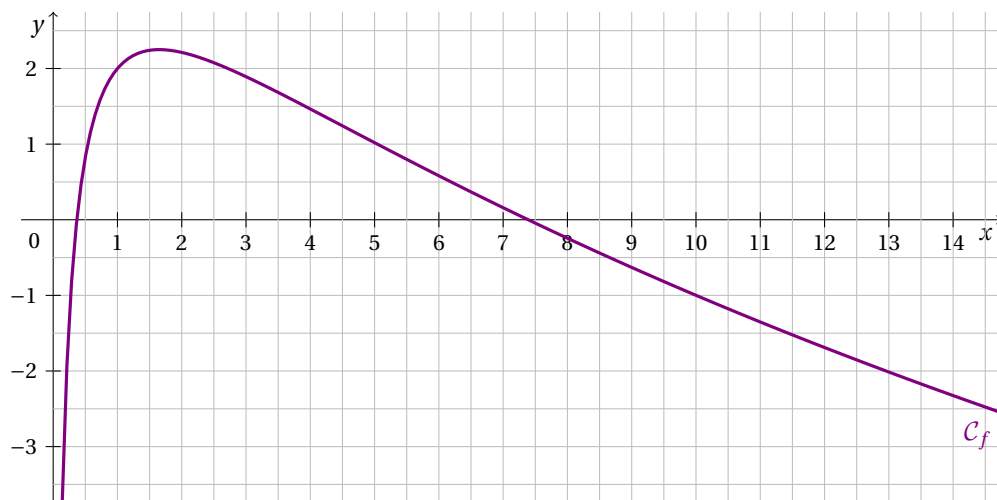
Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x} - \frac{x}{2} + 1.$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

- Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
 - Calculer la limite de f en $+\infty$.
 - Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$.
 - Calculer les coordonnées du point A , intersection de la droite \mathcal{D} et de la courbe \mathcal{C}_f .
- Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
 - En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de la fonction f .
- Tracer la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C}_f dans un repère.

Exercice 11 (*)** – On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle, $f(x) = (1 + \ln(x))(2 - \ln(x))$. La courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée ci-dessous.



- Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x}.$$

- Étudier les variations de f . On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
- Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
- Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
 - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(1 + X)(2 - X) = 2$.
 - En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 12 (*)** – Extrait d'ECRICOME 2019 / Ex2

Soit g la fonction numérique réelle définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
 - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.
- Étudier le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
- Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote oblique \mathcal{D} dont on précisera une équation.
 - Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D} .

Exercice 13 (*)** – Calculer les intégrales suivantes.

$$1. I_1 = \int_1^e \frac{-2}{x} dx$$

$$2. I_2 = \int_1^2 \frac{1}{4x} dx$$

$$3. I_3 = \int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$$

$$4. I_4 = \int_2^e \frac{\ln(x)^2}{x} dx$$