

DEVOIR SURVEILLÉ 3

Exercice 1 – [ESCP 2015 / Ex2]

1. a) Pour cette question, $a = b = -1$ donc la matrice M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Une matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Or $\det(M) = 1 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 - (-1) = 0$ donc la matrice M n'est pas inversible.

- b) Je commence par calculer M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Puisque M^2 est la matrice nulle, alors pour tout $n \geq 2$,

$$M^n = M^2 \times M^{n-2} = 0_2 \times M^{n-2} = 0_2.$$

2. a) Pour cette question, $a = b$ donc la matrice M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

Une matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Or $\det(M) = 1 \times a - 1 \times a = a - a = 0$ donc la matrice M n'est pas inversible.

- b) Je raisonne par récurrence sur $n \geq 2$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $M^n = (1+a)^{n-1} M$.

Initialisation : Pour $n = 2$, je calcule M^2 et vérifie que $M^2 = (1+a) \times M = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix}$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix} = (1+a) \times M.$$

Ainsi \mathcal{P}_2 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 2$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $M^n = (1+a)^{n-1} M$. Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = (1+a)^{n-1} M \times M = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^{n-1} (1+a) M = (1+a)^n M.$$

Donc $M^{n+1} = (1+a)^n M$. Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 2$, *i.e.*

$$\forall n \geq 2, \quad M^n = (1+a)^{n-1} M.$$

3. Dans le cas général, la matrice M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et cette matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si

$$\det(M) \neq 0 \iff 1 \times b - 1 \times a \neq 0 \iff b - a \neq 0 \iff a \neq b.$$

4. a) Je cherche à exprimer la probabilité de l'événement $[X = Y]$. Les deux variables aléatoires doivent être égales mais peuvent prendre n'importe quelle valeur dans \mathbb{N}^* . Ainsi

$$[X = Y] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \text{ et } Y(\omega) = k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*\}.$$

i.e.

$$[X = Y] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \text{ et } Y(\omega) = k\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} ([X = k] \cap [Y = k]).$$

Alors par incompatibilité des événements puis par indépendance des variables aléatoires X et Y , j'obtiens que les probabilités concernées vérifient

$$P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k).$$

Ainsi j'ai bien montré que $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k)$.

- b) Afin d'établir la convergence de cette somme, je passe par la somme partielle.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, je fixe $S_n = \sum_{k=1}^n p^2 q^{2k-2}$. Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^n p^2 q^{2k-2} = p^2 \times \sum_{k=1}^n (q^2)^{k-1} = p^2 \times \sum_{j=0}^{n-1} (q^2)^j \quad \text{en posant } j = k - 1.$$

Je reconnais alors la somme partielle d'une série géométrique de raison q^2 .

Puisque $q = 1 - p$ avec $0 < p < 1$, alors $0 < q < 1$ et par conséquent $0 < q^2 < 1$.

Donc la série géométrique est convergente et admet pour somme $\sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j = \frac{1}{1 - q^2}$.

Alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = p^2 \times \frac{1}{1 - q^2} = \frac{(1 - q)^2}{1 - q^2} = \frac{(1 - q)(1 - q)}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{1 - q}{1 + q}.$$

- c) L'événement A est l'événement contraire de $[X = Y]$ puisque d'après la question 3., la matrice N n'est inversible que lorsque les deux variables aléatoires X et Y prennent des valeurs différentes. Donc

$$P(A) = 1 - P(X = Y).$$

Mais comme X et Y suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre p , alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = P(Y = k) = p \times (1 - p)^{k-1} = p \times q^{k-1}$.

Donc

$$P(A) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{k-1} \times p q^{k-1} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}.$$

Alors grâce au résultat de la question précédente, j'en déduis que

$$P(A) = 1 - \frac{1 - q}{1 + q} = \frac{1 + q}{1 + q} - \frac{1 - q}{1 + q} = \frac{1 + q - (1 - q)}{1 + q} = \frac{2q}{1 + q}.$$

5. a) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme de Newton me donne

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times x^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Puis en appliquant cette formule à l'entier $2n \in \mathbb{N}$, j'obtiens

$$(x + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \times x^k \times 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

- b) Comme rappelé par l'énoncé, je sais que $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, c'est-à-dire d'après la question précédente, en modifiant les variables de sommation pour plus de clarté,

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right).$$

Ces deux quantités sont deux polynômes de degré $2n$. Cette égalité implique donc $2n+1$ égalités des coefficients de degré k pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

En particulier pour $k = n$, le coefficient à gauche vaut $\binom{2n}{n}$ tandis que le coefficient de droite est la somme de tous les produits $\binom{n}{i} \binom{n}{j}$ pour les valeurs de i et de j entre 0 et n telles que $i + j = n$. Ainsi en posant $i = k$, alors $j = n - k$ et j'obtiens bien la formule :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

- c) Dans la question **4.a)**, je n'ai pas utilisé les lois des variables aléatoires, donc la formule est toujours vraie dans ce cas précis. Cette fois en revanche, X et Y suivent toutes deux une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$ donc pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(X = k) = P(Y = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \times \binom{n}{k}.$$

Donc

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n}{k} \binom{n}{k}.$$

Et puisque par symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, alors d'après la question précédente,

$$P(X = Y) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

- d) Pour les mêmes raisons que dans la question **4.c)**, $P(A) = 1 - P(X = Y)$ et donc

$$P(A) = 1 - \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Exercice 2 – [ESCP 2015 / Ex4]

1. En remplaçant n par 0 puis par 1 dans la définition de X_n , j'obtiens

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. a) Je calcule le produit AX_n pour tout $n \in \mathbb{N}$: comme $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

alors

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

J'ai bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 X_0 = IX_0 = X_0$. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

3. a) Je calcule les produits PQ et QP :

$$PQ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16-4-8 & -16+4+12 & 4-4 \\ 16-8-8 & -16+8+12 & 4-4 \\ 16-16 & -16+16 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I,$$

$$QP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16-16+4 & 16-32+16 & 64-64 \\ -4+4 & -4+8 & -16+16 \\ -2+3-1 & -2+6-4 & -8+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I.$$

b) Je calcule les produits PT et AP :

$$PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2+4 \\ 2 & 2 & 4+4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8-5+1 & 8-10+4 & 32-20 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

J'ai ainsi montré que $AP = PT$. Alors en multipliant à droite par Q et comme $PQ = I$, j'obtiens bien que $APQ = PTQ$, *i.e.* $A = PTQ$.

Je raisonne alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $A^n = PT^nQ$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad PT^0Q = PIQ = PQ = I.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PT^nQ \times PTQ = PT^n \times TQ = PT^{n+1}Q.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nQ.$$

4. a) Je commence par déterminer l'expression de la matrice N avant d'en calculer les puissances successives :

$$N = T - D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^2 = N \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Et donc pour tout entier $k \geq 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3$.

- b) Je calcule les produits DN et ND :

$$D \times N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N \times D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $DN = ND$ et ainsi, d'après la formule du binôme de Newton,

$$T^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} = D^n + nND^{n-1}.$$

En effet, tous les autres termes de la somme sont nuls puisque la matrice N y est élevée à une puissance $k \geq 2$. Et comme la matrice D est diagonale, alors

$$D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 T^n &= D^n + nND^{n-1} = D^n + n \times ND \times D^{n-2} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

c) Je calcule PT^n avant de multiplier le résultat par Q pour obtenir $A^n = PT^nQ$:

$$\begin{aligned}
 P \times T^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \\
 PT^n \times Q &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \begin{pmatrix} 16 \times 2^n - 4 - 2(2n+4) & -16 \times 2^n + 4 + 3(2n+4) & 4 \times 2^n - (2n+4) \\ 16 \times 2^n - 8 - 2(4n+4) & -16 \times 2^n + 8 + 3(4n+4) & 4 \times 2^n - (4n+4) \\ 16 \times 2^n - 16 - 16n & -16 \times 2^n + 16 + 24n & 4 \times 2^n - 8n \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 & -2^{n+3} + 3n + 8 & 2^{n+1} - n - 2 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 & -2^{n+3} + 6n + 10 & 2^{n+1} - 2n - 2 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 & -2^{n+3} + 12n + 8 & 2^{n+1} - 4n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi, j'ai montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 & -2^{n+3} + 3n + 8 & 2^{n+1} - n - 2 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 & -2^{n+3} + 6n + 10 & 2^{n+1} - 2n - 2 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 & -2^{n+3} + 12n + 8 & 2^{n+1} - 4n \end{pmatrix}.$$

5. a) D'après la question **2.b)**, je sais que $X_n = A^n X_0$ et que son dernier coefficient est u_n .
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 X_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 & -2^{n+3} + 3n + 8 & 2^{n+1} - n - 2 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 & -2^{n+3} + 6n + 10 & 2^{n+1} - 2n - 2 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 & -2^{n+3} + 12n + 8 & 2^{n+1} - 4n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^{n+2} - n - 3 \\ 2^{n+2} - 2n - 4 \\ 2^{n+2} - 4n - 4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En particulier,

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (2^{n+2} - 4n - 4) = \frac{2^{n+2} - 4n - 4}{2^n}.$$

- b) Je réécris l'expression de u_n afin d'en calculer aisément la limite :

$$u_n = \frac{2^{n+2} - 4n - 4}{2^n} = 4 - 4 \times \frac{n}{2^n} - 4 \times \frac{1}{2^n}.$$

Enfin, comme par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, et par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$,
alors par somme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4.$$

Exercice 3 – [ESCP 2016 / Ex2]

1. Voici la fonction complétée.

```

1. import numpy as np
2. def calculu(n):
3.     u=1
4.     for k in range(n):
5.         u=np.log(1+u**2)
6.     return u

```

2. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $0 \leq u_n \leq 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq 1 \leq 1.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $0 \leq u_n \leq 1$. Donc par croissance de la fonction carré sur l'intervalle $[0, 1]$, $0 = 0^2 \leq u_n^2 \leq 1^2 = 1$ et $1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2$.

Enfin par croissance de la fonction \ln sur l'intervalle $[1, 2]$, alors $\ln 1 \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln 2$.

Comme $\ln 1 = 0$ et $\ln 2 \approx 0.7 \leq 1$, alors $0 \leq \ln(1 + u_n^2) \leq 1$, i.e. $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

3. a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$ et de la forme $f(x) = \ln(u(x)) - x$, avec $u(x) = 1 + x^2$. Donc pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x - 1 - x^2}{1+x^2} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0,$$

puisque $1 + x^2 \geq 1 > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$. De plus, $f'(x)$ ne s'annule qu'en une seule valeur : $x = 1$. Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Sachant que $f(0) = \ln(1 + 0^2) - 0 = \ln 1 = 0$ et $f(1) = \ln(1 + 1^2) - 1 = \ln 2 - 1$, alors j'obtiens le tableau suivant :

x	0	1
$f'(x)$		0
f	0	$\ln 2 - 1$

Puisque la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$ et que $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq 0$.

- b) Je calcule la différence entre deux termes consécutifs pour déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n^2) - u_n = f(u_n).$$

Or d'après les questions précédentes, je sais que $u_n \in [0, 1]$ et par conséquent, $f(u_n) \leq 0$.
Finalement $u_{n+1} - u_n \leq 0 \iff u_{n+1} \leq u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- c) J'ai montré à la question 2. que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, en particulier minorée par 0. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi décroissante, alors je peux déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge grâce au théorème de la limite monotone.
4. a) Pour tout réel $x \geq 0$, je pose $g(x) = \ln(1 + x) - x$.
La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leq 0.$$

Par conséquent, la fonction g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et puisque $g(0) = 0$, alors pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq 0$. Autrement dit pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) = \ln(1 + x) - x \leq 0 \iff \ln(1 + x) \leq x.$$

- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité obtenue à la question précédente à $x = u_n^2 \geq 0$, j'obtiens que

$$\ln(1 + u_n^2) \leq u_n^2, \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} \leq u_n^2.$$

- c) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $u_n \leq (\ln 2)^n$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$u_1 = \ln(1 + 1^2) = \ln 2 \quad \text{et} \quad \ln 2 \leq (\ln 2)^1.$$

Ainsi \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $u_n \leq (\ln 2)^n$. Alors d'après la question 4.b),

$$u_{n+1} \leq u_n^2 \leq \left((\ln 2)^n\right)^2 = (\ln 2)^{2n} \leq (\ln 2)^{n+1},$$

la dernière inégalité découlant de $0 \leq \ln 2 \leq 1$ et $n \geq 1 \implies 2n \geq n+1$.

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 1$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq (\ln 2)^n.$$

- d) En combinant les inégalités obtenues précédemment, je sais que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n.$$

Puisque $\ln 2 \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$. Alors par théorème d'encadrement, j'en déduis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

e) Il s'agit d'un algorithme de seuil : celui-ci calcule les termes successifs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jusqu'à ce qu'un terme u_n soit inférieur à 0.001. Alors il affiche le rang de ce terme.

Ici comme le résultat affiché est 6, j'en conclus que $u_5 \geq 0.001$ et que $u_6 < 0.001$.

5. En me servant de l'inégalité obtenue à la question 4.c), qui est aussi vérifiée pour $n = 0$ puisque $u_0 = 1 \leq 1 = (\ln 2)^0$, et en passant à la somme j'obtiens alors la somme des premiers termes d'une suite géométrique que je sais calculer. Soit $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\ln 2)^k = \frac{1 - (\ln 2)^{n-1+1}}{1 - \ln 2} = \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2}.$$

Exercice 4 – [ESCP 2016 / Ex4]

1. À chaque instant, la puce effectue un saut d'une, de deux ou de trois unités vers la droite. Donc le support de A_1 , position après le premier saut, est donné par

$$A_1(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket.$$

D'après l'énoncé, comme elle part du point d'abscisse 0 à l'instant 0, la puce se trouve au point d'abscisse 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, i.e. $P(A_1 = 1) = \frac{1}{2}$, au point d'abscisse 2 avec probabilité $\frac{1}{4}$, i.e. $P(A_1 = 2) = \frac{1}{4}$ et au point d'abscisse 3 avec probabilité $\frac{1}{4}$, i.e. $P(A_1 = 3) = \frac{1}{4}$.

Je récapitule la loi de la variable aléatoire A_1 dans le tableau suivant :

k	1	2	3
$P(A_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Alors en me servant de la loi de A_1 , je calcule son espérance :

$$E(A_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{2+2+3}{4} = \frac{7}{4}.$$

Pour calculer la variance, je commence par calculer $E(A_1^2)$ à l'aide du théorème de transfert :

$$E(A_1^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{2+4+9}{4} = \frac{15}{4}.$$

Puis d'après la formule de König-Huygens,

$$V(A_1) = E(A_1^2) - E(A_1)^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{60}{16} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}.$$

2. a) À chaque saut, la puce se déplace d'un nombre d'unités compris entre 1 et 3. Après deux sauts, elle s'est donc déplacée d'au moins $1 + 1 = 2$ unités et d'au plus $3 + 3 = 6$ unités. Toutes les valeurs intermédiaires sont aussi atteignables, donc le support de A_2 , position après le deuxième saut, est donné par

$$A_2(\Omega) = \llbracket 2, 6 \rrbracket.$$

Pour calculer les probabilités, je décompose selon chacun des deux sauts, en notant le nombre d'unités sautées par la puce à chaque saut :

$$[A_2 = 2] = \{(1, 1)\}, \quad [A_2 = 3] = \{(1, 2), (2, 1)\}, \quad [A_2 = 4] = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\},$$

$$[A_2 = 5] = \{(2, 3), (3, 2)\} \quad \text{et} \quad [A_2 = 6] = \{(3, 3)\}.$$

Puis comme les sauts sont indépendants,

$$\begin{aligned}
 P(A_2 = 2) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\
 P(A_2 = 3) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \\
 P(A_2 = 4) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}, \\
 P(A_2 = 5) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}, \\
 P(A_2 = 6) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

Je récapitule la loi de la variable aléatoire A_2 dans le tableau suivant :

k	2	3	4	5	6
$P(A_2 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

b) En me servant de la loi de A_2 , je calcule son espérance :

$$E(A_2) = 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{5}{16} + 5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{16} = \frac{4 + 6 + 10 + 5 + 3}{8} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}.$$

3. a) La variable aléatoire Z_2 compte le nombre de fois où la puce saute de trois unités lors des deux premiers sauts. Donc le support de Z_2 est donné par $\{0, 1, 2\}$.

Grâce au détail des sauts établi à la question 2.a), je peux aisément calculer les probabilités de la loi du couple (A_2, Z_2) .

$$\begin{aligned}
 P(A_2 = 2, Z_2 = 0) &= P(A_2) = \frac{1}{4}, & P(A_2 = 2, Z_2 = 1) &= 0, & P(A_2 = 2, Z_2 = 2) &= 0, \\
 P(A_2 = 3, Z_2 = 0) &= P(A_3) = \frac{1}{4}, & P(A_2 = 3, Z_2 = 1) &= 0, & P(A_2 = 3, Z_2 = 2) &= 0, \\
 P(A_2 = 4, Z_2 = 0) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}, & P(A_2 = 4, Z_2 = 1) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, & P(A_2 = 4, Z_2 = 2) &= 0, \\
 P(A_2 = 5, Z_2 = 0) &= 0, & P(A_2 = 5, Z_2 = 1) &= P(A_5) = \frac{1}{8}, & P(A_2 = 5, Z_2 = 2) &= 0, \\
 P(A_2 = 6, Z_2 = 0) &= 0, & P(A_2 = 6, Z_2 = 1) &= 0, & P(A_2 = 6, Z_2 = 2) &= P(A_6) = \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

Je récapitule la loi du couple (A_2, Z_2) dans le tableau suivant :

	$A_2 = 2$	$A_2 = 3$	$A_2 = 4$	$A_2 = 5$	$A_2 = 6$
$Z_2 = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	0
$Z_2 = 1$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
$Z_2 = 2$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$

La loi de Z_2 s'obtient en additionnant les probabilités figurant sur chaque ligne du tableau ci-dessus :

$$P(Z_2 = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}, \quad P(Z_2 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad P(Z_2 = 2) = \frac{1}{16}.$$

Je récapitule alors la loi de la variable aléatoire Z_2 dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(Z_2 = k)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

En me servant de la loi de Z_2 , je calcule son espérance :

$$E(Z_2) = 0 \times \frac{9}{16} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{16} = \frac{3+1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

- b) Pour calculer la covariance $\text{Cov}(A_2, Z_2)$, je commence par calculer l'espérance du produit $E(A_2 Z_2)$, en me servant de la loi du couple (A_2, Z_2) :

$$E(A_2 Z_2) = 1 \times 4 \times \frac{1}{4} + 1 \times 5 \times \frac{1}{8} + 2 \times 6 \times \frac{1}{16} = \frac{8+5+6}{8} = \frac{19}{8}.$$

Puis d'après la formule de König-Huygens, comme $E(A_2) = \frac{7}{2}$ et $E(Z_2) = \frac{1}{2}$,

$$\text{Cov}(A_2, Z_2) = E(A_2 Z_2) - E(A_2) \times E(Z_2) = \frac{19}{8} - \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{19 - 2 \times 7}{8} = \frac{5}{8}.$$

Si A_2 et Z_2 étaient indépendantes, alors la covariance serait nulle. Or ce n'est pas le cas. Donc les variables aléatoires A_2 et Z_2 ne sont pas indépendantes.

4. Le programme suivant simule les 100 premiers déplacements de la puce :

```

1. import numpy as np
2. import numpy.random as rd
3. A=np.zeros(100)
4. for k in range(100):
5.     t=rd.randint(1,5)
6.     if t<=2:
7.         A[k]=1
8.     if t==3:
9.         A[k]=2
10.    if t==4:
11.        A[k]=3
12.    print(A)
```

En effet, à chaque tour de boucle, la variable t prend pour valeur un nombre entier choisi au hasard entre 1 et 4. Ce nombre est inférieur ou égal à 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$, il est égal à 3 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et il est égal à 4 avec probabilité $\frac{1}{4}$.

La variable $A[k]$, correspondant au nombre d'unités dont la puce se déplace au tour k , vaut alors 1, 2 ou 3 selon la valeur de t , avec les probabilités adéquates.

5. Il s'agit de n répétitions, identiques et indépendantes, de l'épreuve de Bernoulli de succès "la puce se déplace d'une unité vers la droite", de probabilité $p = \frac{1}{2}$. Comme la variable aléatoire X_n compte le nombre de succès, alors elle suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.

De la même manière, Y_n compte le nombre de succès "la puce se déplace de deux unités vers la droite", de probabilité $p = \frac{1}{4}$, lors de ces mêmes répétitions.

Donc Y_n suit une loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{4}$.

Et Z_n compte le nombre de succès "la puce se déplace de trois unités vers la droite", de probabilité $p = \frac{1}{4}$, lors de ces mêmes répétitions.

Donc Z_n suit une loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{4}$.

Enfin, à chaque instant, la probabilité que la puce se déplace d'une ou deux unités vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ainsi la somme $X_n + Y_n$ compte le nombre de succès "la puce se déplace d'une ou deux unités vers la droite", de probabilité $p = \frac{3}{4}$, lors de ces mêmes répétitions.

Donc $X_n + Y_n$ suit une loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{3}{4}$.

6. a) À chaque instant, la puce se déplace forcément d'une, de deux ou de trois unités, donc la somme $X_n + Y_n + Z_n$ est égale au nombre total de déplacements à l'issue des n sauts,

$$i.e. \quad X_n + Y_n + Z_n = n.$$

Grâce à cette identité, j'obtiens que $X_n + Y_n = n - Z_n$ et donc, par linéarité à droite de la covariance, que

$$\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n) = \text{Cov}(Z_n, n - Z_n) = \text{Cov}(Z_n, n) - \text{Cov}(Z_n, Z_n) = 0 - V(Z_n) = -V(Z_n).$$

Comme Z_n suit une loi binomiale, alors $V(Z_n) = np(1-p) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}$ et donc

$$\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n) = -\frac{3n}{16}.$$

- b) Je sais que $V(X_n + Y_n) = V(X_n) + V(Y_n) + 2\text{Cov}(X_n, Y_n)$. Et comme X_n , Y_n et $X_n + Y_n$ suivent des lois binomiales, alors

$$V(X_n) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}, \quad V(Y_n) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{16} \quad \text{et} \quad V(X_n + Y_n) = n \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3n}{16}.$$

Finalement, j'obtiens que

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = \frac{V(X_n + Y_n) - V(X_n) - V(Y_n)}{2} = \frac{\frac{3n}{16} - \frac{n}{4} - \frac{3n}{16}}{2} = -\frac{n}{8}.$$

- c) Je connais désormais toutes les valeurs impliquées dans la formule du coefficient de corrélation linéaire. Il me suffit alors de remplacer :

$$\rho(X_n, Y_n) = \frac{\text{Cov}(X_n, Y_n)}{\sqrt{V(X_n) \times V(Y_n)}} = \frac{-\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{n}{4} \times \frac{3n}{16}}} = \frac{-\frac{n}{8}}{\frac{n\sqrt{3}}{2 \times 4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7. a) Comme X_n compte le nombre de sauts d'une unité, Y_n , le nombre de sauts de deux unités et Z_n , le nombre de sauts de trois unités, alors A_n , abscisse du point occupé par la puce après n sauts, vérifie

$$A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n.$$

Et donc par linéarité de l'espérance,

$$E(A_n) = E(X_n) + 2 \times E(Y_n) + 3 \times E(Z_n) = \frac{n}{2} + 2 \times \frac{n}{4} + 3 \times \frac{n}{4} = \frac{(2+2+3) \times n}{4} = \frac{7n}{4}.$$

b) J'ai montré à la question **6.a)** que $X_n + Y_n + Z_n = n$, i.e. $Z_n = n - X_n - Y_n$. Donc

$$A_n = X_n + 2 \times Y_n + 3 \times (n - X_n - Y_n) = X_n + 2Y_n + 3n - 3X_n - 3Y_n = 3n - 2X_n - Y_n.$$

Alors d'après les propriétés de la variance,

$$\begin{aligned} V(A_n) &= V(3n - (2X_n + Y_n)) = (-1)^2 V(2X_n + Y_n) = V(2X_n) + V(Y_n) + 2\text{Cov}(2X_n, Y_n) \\ &= 2^2 V(X_n) + V(Y_n) + 2 \times 2\text{Cov}(X_n, Y_n) = 4V(X_n) + V(Y_n) + 4\text{Cov}(X_n, Y_n). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les résultats de la question **6.b)**,

$$V(A_n) = 4 \times \frac{n}{4} + \frac{3n}{16} + 4 \times \left(-\frac{n}{8}\right) = n + \frac{3n}{16} - \frac{n}{2} = \frac{3n}{16} + \frac{8n}{16} = \frac{11n}{16}.$$

Par un raisonnement similaire,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(A_n, X_n) &= \text{Cov}(3n - 2X_n - Y_n, X_n) = \text{Cov}(3n, X_n) - 2\text{Cov}(X_n, X_n) - \text{Cov}(Y_n, X_n) \\ &= 0 - 2V(X_n) - \text{Cov}(X_n, Y_n) = -2 \times \frac{n}{4} + \frac{n}{8} = -\frac{3n}{8}. \end{aligned}$$

8. Le tableau A contient le nombre d'unités sautées par la puce à chacune de ses 100 premiers sauts. Par construction, le tableau y contient alors les abscisses de chaque point occupé par la puce lors de ses 100 premiers sauts. L'exécution du programme Python crée donc une ligne brisée représentant le déplacement de la puce lors des 100 premiers sauts. L'abscisse de chacun des 100 points est le numéro k du saut et l'ordonnée est l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue du k -ème saut.