

EXERCICES — CHAPITRE 11

Exercice 1 (★) – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f .

- | | | |
|---------------------------------|---|---|
| 1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$ | 4. $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$ | 7. $f(x) = 3x + \frac{3}{x^2}$ |
| 2. $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ | 5. $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$ | 8. $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$ |
| 3. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ | 6. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 1$ | 9. $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ |

Exercice 2 (★★) – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f .

- | | |
|--|---|
| 1. $f(x) = (7x + 1)^8 \text{ sur } \mathbb{R}$ | 5. $f(x) = \frac{3}{(2x - 1)^3} \text{ sur } \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ |
| 2. $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^4} \text{ sur } \mathbb{R}$ | 6. $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2} \text{ sur }]1, +\infty[$ |
| 3. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} \text{ sur }]-1, +\infty[$ | 7. $f(x) = \frac{4}{(1 - 2x)^2} \text{ sur } \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ |
| 4. $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 3)^3 \text{ sur } \mathbb{R}$ | |

Exercice 3 (★★) – Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. $f(x) = x^2 - 5x - 1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
2. $f(x) = 3x^2 - 5x + \frac{1}{2} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F(1) = 0$
3. $f(x) = x - \frac{1}{x^2} + 1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } F(1) = 2$
4. $f(x) = x^3 + \frac{2}{x^2} \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } F(1) = -\frac{1}{4}$
5. $f(x) = 2x^3 - 1 - \frac{1}{x^2} \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } F(1) = 1$

Exercice 4 (★★) – Soient F et G les fonctions définies sur $I =]-1, +\infty[$ par

$$F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \quad \text{et} \quad G(x) = x - 2 + \frac{1}{x + 1}.$$

Montrer que F et G sont deux primitives sur I d'une même fonction f que l'on précisera.

Exercice 5 (★★) – Soit f la fonction définie sur $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(2x^2 + x - 1)^2}$.

Montrer que la fonction G définie sur $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ par $G(x) = \frac{2x^2}{2x^2 + x - 1}$ est une primitive de la fonction f .

Exercice 6 (★★★) – Calculer les intégrales suivantes.

- | | |
|---|---|
| 1. $I_1 = \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 1) dx$ | 4. $I_4 = \int_0^1 (2x + 3)^3 dx$ |
| 2. $I_2 = \int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1 \right) dx$ | 5. $I_5 = \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5 + 3}} dt$ |
| 3. $I_3 = \int_{-2}^3 (x^3 + x - 2) dx$ | 6. $I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(2 + x^2)^2} dx$ |

Exercice 7 (★★★) – Soient a un réel et f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Vérifier que $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$.

Exercice 8 (★★) – Montrer que la fonction F définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$

est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2}$.

En déduire la valeur de

$$\int_2^3 \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2} dx.$$

Exercice 9 (★★) – Montrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (x^3 + 1)^4$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 12x^2(x^3 + 1)^3$.

En déduire la valeur de

$$\int_0^1 12x^2(x^3 + 1)^3 dx.$$