# EXERCICES — CHAPITRE 4

**Exercice 1 –** On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = 5\sqrt{n} - 3$ et $v_n = \dfrac{-2}{n+1} + 1$.

1. Calculer les deux premiers termes de chaque suite.
2. Calculer le quinzième terme de chaque suite.

**Exercice 2 –** On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & -u_n^2 + u_n - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 & = & 5 \\ v_{n+1} & = & v_n + \dfrac{2}{n} \end{cases}$$

1. Calculer les quatre premiers termes de ces deux suites.
2. Représenter graphiquement ces quatre premiers termes sur un même graphique.

**Exercice 3 –** Soit $u_n$ la suite définie par $u_n = n^2 - n + 1$.

1. Calculer $u_0$ et $u_{10}$.
2. Exprimer $u_n + 1$ et $u_{n+1}$ en fonction de $n$.

**Exercice 4 –** Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 4$.

1. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2. Calculer $u_{10}$.

**Exercice 5 –** $(u_n)$ désigne une suite arithmétique de raison $r$.

1. On donne $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $r = \dfrac{-1}{4}$. Calculer $u_{13}$.
2. On donne $u_{36} = 86$ et $r = 2$. Calculer $u_0$.
3. On donne $u_2 = 2$ et $u_{15} = 67$. Calculer $r$ et $u_1$.
4. On donne $u_8 = 34$ et $r = 3$. Calculer $u_1$.

**Exercice 6 –** Soit $(u_n)$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2. Calculer $u_5$.

**Exercice 7 –** $(u_n)$ désigne une suite géométrique de raison $q$.

1. On donne $u_1 = 2$ et $q = \dfrac{3}{2}$. Calculer $u_5$.
2. On donne $u_4 = 7$ et $q = \dfrac{1}{3}$. Calculer $u_1$.
3. On donne $u_2 = 4$ et $u_4 = \dfrac{16}{9}$. Calculer $q$.
4. On donne $u_0 = 8$ et $q = \dfrac{1}{2}$. Calculer $u_7$.

**Exercice 8 –** On suppose que chaque année, la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités.

1. On note $P_0 = 25000$ et $P_n$ la production au cours de l'année $(2000 + n)$.
   Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Calculer la production de l'usine en 2005.

**Exercice 9 –** On place un capital $u_0 = 1500$ euros à 4,5% par an avec intérêts simples. On note $u_n$ le capital obtenu au bout de $n$ années.

1. Donner la nature de la suite $(u_n)$ et exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
3. Au bout de combien d'années, le capital initial aura-t-il doublé ?

**Exercice 10 –** On place un capital $u_0 = 3500$ euros à 3% par an avec intérêts composés. On note $u_n$ le capital obtenu au bout de $n$ années.

1. Donner la nature de la suite $(u_n)$ et exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.

**Exercice 11 –** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.
2. La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. On considère la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_n + 1$.
   (a) Calculer $v_0$, $v_1$, $v_2$, $v_3$ et $v_4$.
   (b) Justifier que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   (c) Donner l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
4. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 12 –** La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013.
Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.
On modélise cette situation par une suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et $a_n$ le nombre d'inscrits à la méditahtèque pendant l'année $2013+n$.

1. (a) Calculer $a_1$ et $a_2$.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel $n$, on a la relation $a_{n+1} = 0,8\times a_n + 400$.
2. On pose pour tout entier naturel $n$, $u_n = a_n - 2000$.
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.
   (b) En déduire que le terme général de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est $a_n = 500\times 0,8^n + 2000$.

**Exercice 13 –** Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes.

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12}$
2. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024}$
3. $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots + \frac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2-4+6-8+\cdots+50$
5. $S_5 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+13^2+14^2$
6. $S_6 = 1+8+27+64+125$

**Exercice 14 –** Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole Σ, en faisant disparaître ce symbole.

1. $T_1 = \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2}$
2. $T_2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1}$
3. $T_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{k}$

**Exercice 15 –** Calculer les sommes $S$ et $T$.

$$S = 2+6+18+\cdots+118098 \quad \text{et} \quad T = 2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{59049}.$$

**Exercice 16 –** Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$. Calculer $S_{20}$.

**Exercice 17 –** Une entreprise propose pour recruter un nouvel employé un salaire annuel de 21000 euros avec augmentation annuelle du salaire de 4% tous les ans.
On note $s_n$ le salaire annuel pour l'année $n$. On a donc $s_1 = 21000$.

1. Calculer $s_2$ et $s_3$.
2. Donner la nature de la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et exprimer $s_n$ en fonction de $n$.
3. Justifier que $\sum_{k=1}^{5} s_k = 113743$ (arrondi à l'entier le plus proche).
4. Si cet employé reste 20 ans dans l'entreprise, calculer la somme des salaires perçus durant ces 20 ans. En déduire son salaire annuel moyen sur ces 20 ans.