CONCOURS BLANC 3

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 5 exercices. Bon courage!

Exercice 1 –

Partie I.

On considère les matrices

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et on pose $A = \Delta + N$.

1. Calculer N^2 puis en déduire N^k où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
2. (a) Calculer PQ et QP.
   (b) Vérifier que $Q\Delta P = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) Exprimer Δ en fonction de P, D et Q.
   (d) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n = PD^nQ$.
   (e) Exprimer Δ^n sous forme d'un tableau de nombres.
3. (a) Vérifier que $\Delta N = N\Delta$.
   (b) En utilisant la formule du binôme de Newton pour les matrices, exprimer A^n en fonction de Δ, N et n.
   (c) En déduire l'expression de A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

Partie II.

Dans cette partie, nous allons étudier les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

1. (a) En utilisant la définition de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer directement la valeur de z_n.
   (b) Écrire alors x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n.

2. On introduit alors la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $r_n = x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.
   (a) Établir que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et préciser sa raison.
   (b) En déduire l'expression de $x_n + y_n$ en fonction de n.
3. On introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = 2x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.
   (a) Prouver que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.
   (b) En déduire l'expression de $2x_n + y_n$ en fonction de n.
4. En utilisant les questions **2.** et **3.**, déterminer x_n et y_n en fonction de n.

Partie III.

On souhaite faire le lien entre les deux parties précédentes. Pour cela, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

En remarquant que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ et en utilisant les résultats de la partie **I.**, retrouver les expressions en fonction de n de x_n, y_n et z_n.

Exercice 2 – On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. On cherche à déterminer une matrice $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que $PQ = QP = I_2$.
   (a) Montrer que déterminer la matrice Q telle que $PQ = I_2$ revient à résoudre les systèmes
   $$S_1 : \begin{cases} a + b = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_2 : \begin{cases} c + d = 0 \\ c - 2d = 1 \end{cases}$$
   (b) Résoudre les systèmes S_1 et S_2.
   (c) Vérifier que la matrice Q trouvée vérifie $PQ = QP = I_2$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PD^nQ$.
   (a) Calculer D^n pour tout entier naturel n.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës A, B et C. À l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné, la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C, alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n+1$,
- si à un instant n donné, la mouche est dans la pièce B, alors elle y reste à l'instant $n+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, sinon elle va de façon équiprobable dans la pièce A ou dans la pièce C.

Pour tout entier naturel n, on définit l'évènement A_n : "la mouche est dans la pièce A à l'instant n". On définit de même les évènements B_n et C_n. Enfin on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces évènements.

3. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$.

5. (a) Justifier que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $U_n = A^n U_0$.
   (c) Déduire de la question **2.** que pour tout entier naturel n, on a

$$b_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n et c_n en fonction de n.

Exercice 3 – Les deux parties sont indépendantes.

Partie I.

1. Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$.
   (a) Montrer que le polynôme $P(x)$ peut se factoriser sous la forme $P(x) = (x+1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.
   (b) Déterminer alors les solutions de l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.
2. On considère la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 12x + 12}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Partie II.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x - 5 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^2 + 2x + 5.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g.

1. Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g ainsi que leurs limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que le point A de coordonnées $(2,17)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.
3. En déduire qu'il existe un polynôme $R(x)$ de degré 2 tel que $f(x) - g(x) = (x-2)R(x)$.
4. Étudier alors le signe de $f(x) - g(x)$ et en déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 4 – Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1. Comparer $f(-x)$ avec $f(x)$. Comment se traduit graphiquement ce résultat pour la courbe représentative de la fonction f ?

2. Montrer que la dérivée $f'(x)$ est du même signe que $(1-x^2)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x. Vérifier le résultat en le confrontant aux valeurs de $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
4. Dresser le tableau de variation de f. On n'oubliera pas de le compléter par les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, après avoir calculé celles-ci de façon claire.
5. Montrer que la dérivée seconde de f vaut $f''(x) = \dfrac{4(x^3-3x)}{(x^2+1)^3}$.
6. Dresser un tableau de signe permettant de déterminer le signe de $\varphi(x) = x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$.
7. Déduire des questions **5.** et **6.** un tableau indiquant dans quel domaine la fonction f est convexe et dans quel domaine elle est concave. Déterminer les trois points d'inflexion de la courbe représentative de f.
8. Tracer soigneusement la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, d'unité 2cm, en tenant compte des questions **1.**, **4.** et **7.**. On utilisera la valeur approchée $\sqrt{3} \approx 1.73$ (soit 3.46cm).
9. Calculer la dérivée de $F(x) = \ln(x^2+1)$. En déduire, en unités d'aire puis en centimètres carrés, l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe (Ox) des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \sqrt{3}$.

Exercice 5 – Une entreprise fabrique des appareils électriques en grande quantité.

Partie I - Probabilités conditionnelles

On admet que 5% des appareils présentent un défaut. On contrôle les appareils d'un lot. Ce contrôle refuse 90% des appareils avec défaut et accepte 80% des appareils sans défaut. On prélève au hasard dans le lot.
On considère les évènements suivants

- D : "l'appareil a un défaut",
- A : "l'appareil est accepté à l'issue du contrôle".

1. Donner la valeur des probabilités et probabilités conditionnelles suivantes
$$P(D), \qquad P(\overline{D}), \qquad P_D(\overline{A}), \qquad P_D(A) \quad \text{et} \quad P_{\overline{D}}(A).$$
2. Calculer à 0.001 près les probabilités suivantes :
$$P(A \cap D) \quad \text{et} \quad P(A \cap \overline{D}).$$
3. Déduire de ce qui précède la probabilité $P(A)$ à 0.001 près.
4. Calculer à 0.001 près la probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle.

Partie II - Loi binomiale

On prélève au hasard 10 appareils électriques d'une livraison pour vérification. La livraison étant suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise des appareils. On rappelle que 5% des appareils présentent un défaut.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils **sans défaut** de ce prélèvement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Préciser $X(\Omega)$ et pour tout $k \in X(\Omega)$, donner la valeur de $P(X = k)$.
2. Donner la probabilité que dans un tel prélèvement, tous les appareils soient sans défaut.
3. Donner la probabilité que dans un tel prélèvement, au moins un appareil ait un défaut.