EXERCICES — CHAPITRE 7

Intégration sur un segment

Exercice 1 – Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide.

1. $f_1(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f_2(x) = -\dfrac{3}{x}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3}$
5. $f_5(x) = (7x+1)^8$
6. $f_6(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)^2$
8. $f_8(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 2 – On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

1. On note α et β les deux racines de la fonction $P : x \mapsto x^2 - 2x - 3$. Déterminer α et β.
2. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que
$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}.$$
3. En déduire une primitive de f sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

Exercice 3 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{3} x^3 + x - 2\,dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\,dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\,dt$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$

Exercice 4 – Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $I_6 = \displaystyle\int_{0}^{1} te^{2t}\,dt$
2. $I_7 = \displaystyle\int_{1}^{2} t\ln(t)\,dt$
3. $I_8 = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2+1)e^{3x}\,dx$
4. $I_9 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt$

Exercice 5 – L'objectif est de calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ et $K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$.

1. **Calcul de I.**
Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.
   (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) En déduire la valeur de I.
2. **Calcul de J et K.**
   (a) Sans calculer explicitement les intégrales J et K, vérifier que $J + 2I = K$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
   (c) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 6 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \ln(x)^n\,dx$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Étudier la monotonie de la suite I_n et montrer qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
5. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 7 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$ puis en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
4. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx = 1$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.
   (a) Montrer que $J_n = \ln(2) - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.
   (Indication : Penser à une intégration par parties.)
   (b) Montrer que
$$\forall t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$
   (c) En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$.

Intégrales généralisées

Exercice 8 – Montrer que l'intégrale généralisée suivante converge et déterminer sa valeur :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 – Montrer que l'intégrale généralisée suivante diverge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 10 – En utilisant une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée suivante converge et déterminer sa valeur :

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 11 – Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 12 –

1. À l'aide d'une intégration par parties, donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^A xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ puis calculer
$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A xe^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
2. Que peut-on en déduire pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$?

Exercice 13 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0, \\ e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$

En séparant les cas $x<0$ et $x \geqslant 0$, calculer l'expression

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 14 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1 l'intégrale
$$I_A = \int_1^A \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$
2. Calculer $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} I_A$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 15 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0, \\ xe^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

1. Calculer la dérivée de la fonction m définie pour tout réel x positif ou nul par
$$m(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
2. Soit M un réel strictement positif. On pose
$$I(M) = \int_0^M xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$
Déduire de la question précédente la valeur de $I(M)$ puis calculer $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} I(M)$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 16 – extrait d'ECRICOME 2016

On pose $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_0 est une intégrale convergente, égale à $\dfrac{1}{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $M>1$,
$$\int_1^M x^{n+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
3. En raisonnant par récurrence et à l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n converge.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$
5. Calculer I_n pour $n \in \{1,2,3\}$.