

INTERRO DE RENTRÉE

Exercice 1 – Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $4x - 5 = -2x + 3$
2. $x + 4 \leq -2x + 5$
3. $2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 3x - 18$
4. $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 < 0$
5. $\frac{2x+3}{x-1} + \frac{1}{x} = 0$

Exercice 2 – Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x$
5. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) + 4x - 1$

Exercice 3 – Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 2$
2. $f(x) = (4x - 1)\ln(x)$
3. $f(x) = e^{2x+3} + 1$
4. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
5. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

Exercice 4 – Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^5}$ et \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{1 - 5\ln(x)}{x^6}$. En déduire le tableau de variation de f .
3. Donner l'équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Sur un même graphique, tracer la courbe \mathcal{C} ainsi que la tangente \mathcal{T} .

Exercice 5 – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2 - x)e^x$ et \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = (1 - x)e^x$. En déduire le tableau de variation de f .
3. Donner l'équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Calculer $f''(x)$ puis étudier la convexité de la fonction f .
La courbe \mathcal{C} admet-elle un point d'inflexion?
5. Sur un même graphique, tracer la courbe \mathcal{C} ainsi que la tangente \mathcal{T} .

Exercice 6 – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ et \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 e^x$.
b) Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
3. a) Calculer $f''(x)$.
b) Étudier la convexité de f .
c) Calculer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe \mathcal{C} .
4. Sur un même graphique, tracer la courbe \mathcal{C} ainsi que la tangente \mathcal{T} .

Exercice 7 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x - 4) dx$
2. $\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$
3. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$
4. $\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 4x - 1 \right) dx$
5. $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3}{x^4+3} dx$

Exercice 8 – Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = (1-x)^3 + x$.

1. a) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f .
b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{4}{10}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 9 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 8500$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1.02u_n - 250$.

1. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12500$.
a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b) Exprimer v_n en fonction de n .
c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
2. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 10 – D'après une enquête sur l'emploi en France, 52% des personnes qui exercent un emploi sont des hommes, 15% des hommes qui exercent un emploi ne sont pas des salariés et 91.6% des femmes qui exercent un emploi sont salariées.

1. On interroge au hasard une personne ayant un emploi. On note H l'événement "la personne est un homme", F l'événement "la personne est une femme" et S l'événement "la personne exerce un emploi salarié".
a) Donner les valeurs des probabilités $P(F)$, $P(H)$, $P_H(S)$, $P_H(\bar{S})$, $P_F(S)$, $P_F(\bar{S})$.
b) Calculer $P(F \cap S)$. Interpréter le résultat.
c) Calculer la probabilité qu'une personne exerce un emploi salarié.
d) La personne interrogée exerce un emploi salarié.
Quelle est la probabilité que ce soit un homme?
2. Selon cette étude, 30% des femmes qui ont un emploi travaillent à temps partiel. On choisit au hasard 40 femmes qui ont un emploi et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de femmes qui travaillent à temps partiel.
a) Quelle est la loi suivie par X ? Donner le support $X(\Omega)$ et une formule permettant de calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
b) Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat.
c) Déterminer la probabilité que dans ce groupe, il y ait exactement 12 femmes qui travaillent à temps partiel.

Exercice 11 – On considère une urne contenant trois boules rouges, deux boules vertes et une boule bleue. On tire deux boules successivement et sans remise. On note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner le support $X(\Omega)$ de X et calculer la loi de X .
2. Calculer l'espérance et la variance de X .
3. Donner l'expression de la fonction de répartition F_X et sa représentation graphique.