CONCOURS BLANC 4 — ESCP

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage!

On suppose que la librairie `numpy` de `Python` est importée grâce à la commande `import numpy as np` et que la librairie `numpy.random` de `Python` est importée grâce à la commande `import numpy.random as rd`.

Exercice 1 –
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I, puis déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
2. a) Quelles sont les valeurs propres possibles de A?
   b) Utiliser le polynôme annulateur trouvé pour montrer que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et I.
3. On considère les vecteurs $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer les produits AU, AV et AW et en déduire que les valeurs propres possibles de A trouvées à la question **2.a)** sont effectivement valeurs propres de A.
   b) On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $AQ = QD$.
   c) On donne $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer QR puis en déduire que Q est inversible et exprimer Q^{-1} en fonction de R.
   d) En déduire que A est diagonalisable.
4. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $A^n = QD^nQ^{-1}$.
   b) Vérifier que la première ligne de la matrice A^n est $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}$.

5. Un jeton se déplace sur les trois sommets numérotés 1, 2, 3 d'un triangle selon la règle suivante : s'il est sur un sommet, il se déplace de façon équiprobable sur l'un des deux autres. Au départ, le jeton se trouve sur le sommet 1. On pose $X_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le jeton après le n-ième déplacement.

    a) Donner la loi de X_1 puis vérifier que la loi de X_2 est donnée par

    $$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}, \qquad P(X_2 = 2) = \frac{1}{4}, \qquad P(X_2 = 3) = \frac{1}{4}.$$

    b) On considère la matrice à une ligne et trois colonnes $L_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, utiliser la formule des probabilités totales pour établir la relation :

    $$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3).$$

    c) Donner sans démonstration les égalités analogues concernant $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$, puis en déduire la matrice carrée B, proportionnelle à A, telle que

    $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \quad L_{n+1} = L_n B.$$

    d) Vérifier que la relation précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

    e) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $L_n = L_0 B^n$.

    f) En déduire, grâce à la question **4.b)**, la loi de X_n pour tout entier naturel n.

Exercice 2 –

1. Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0, \\ 4x\left(1 - x^2\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

    Vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire X de densité f et on note F_X sa fonction de répartition.

2. a) Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.

    b) Montrer que X possède une variance et vérifier qu'elle est égale à $\dfrac{11}{225}$.

3. Montrer que l'on a $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left(1 - x^2\right)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

4. Soient U et V deux variables aléatoires à densité, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $M = \min(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, on a $P(M > x) = P(U > x)P(V > x)$. On admet que M est une variable aléatoire à densité et on note F_M sa fonction de répartition.

    a) En notant G la fonction de répartition commune à U et V, rappeler l'expression de $G(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x > 1$.

    b) En déduire, pour tout réel x, les expressions de $P(M > x)$ et de $F_M(x)$ en fonction de $G(x)$.

    c) Donner enfin explicitement $F_M(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x > 1$.

5. On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = \sqrt{M}$ et on note F_Z sa fonction de répartition.
   a) Déterminer $F_Z(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x > 1$.
   b) En déduire que X et Z suivent la même loi.
   c) Compléter le script `Python` suivant qui simule la variable M à la ligne 3, afin qu'il simule la variable X à la ligne 4.

```
1.  U=rd.random()
2.  V=rd.random()
3.  M=np.min(U,V)
4.  X=......
```

Exercice 3 –

On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et suivant la même loi donnée par

$$P(X=0) = \frac{1}{4}, \qquad P(X=1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(X=2) = \frac{1}{2}.$$

On a donc également

$$P(Y=0) = \frac{1}{4}, \qquad P(Y=1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(Y=2) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S = X + Y$ et $T = XY$ et on admet que S et T sont des variables aléatoires.

1. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par S, puis déterminer la loi de S.
   b) En déduire que l'espérance de S est égale à $\frac{5}{2}$.
   c) Retrouver ce résultat en utilisant la relation qui définit S.
2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T.
   b) Vérifier que $P(T=0) = \frac{7}{16}$, puis déterminer la loi de T.
   c) En déduire que l'espérance de T est égale à $\frac{25}{16}$.
   d) Retrouver ce résultat en utilisant la relation qui définit T.
3. Déterminer la loi du couple (S, T) puis retrouver les lois de S et de T.
4. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?
5. Vérifier que $E(ST) = \frac{45}{8}$, puis calculer $\mathrm{Cov}(S, T)$.

Exercice 4 –
On pose $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}.$$

1. a) Montrer que l'on définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs. On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n, le réel u_n est bien défini et strictement positif.

   b) Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

```
def suite(n):
    u=1/2
    for k in range(2,n+1):
        u=......
    return u
```

2. Donner la valeur de u_2, puis vérifier que $u_3 = \dfrac{1}{12}$.

3. a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}.$$

   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

4. Pour tout entier naturel k non nul, on pose $\quad v_k = \dfrac{1}{u_k}$.

   a) Établir l'égalité

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad v_{k+1} - v_k = 2(k+1).$$

   b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique ? Justifier.

   c) Par sommation de l'égalité obtenue à la question **4.a)**, établir la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = n(n+1).$$

   d) En déduire explicitement u_n en fonction de n puis retrouver la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5. a) Déterminer les constantes a et b pour lesquelles, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}.$$

   b) Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 1, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$.

   c) En déduire que la série de terme général u_n converge et donner sa somme.

6. a) Expliquer pourquoi on peut maintenant considérer une variable aléatoire X dont la loi est donnée par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = u_n.$$

   b) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

   c) En déduire l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geqslant \ln(N+2) - \ln(2).$$

   d) Montrer alors que X ne possède pas d'espérance.