CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie I : calcul matriciel

1.
$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_3 \Longrightarrow P \times \left(\frac{1}{6}Q\right) = I_3$$

Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{6}Q$.

2.
- En notant $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a : $X_1 \neq 0$ et $MX_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = 5X_1$.
  Ainsi, X_1 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 5.
- En notant $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a : $X_2 \neq 0$ et $MX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2$.
  Ainsi, X_2 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 1.
- En notant $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, on a : $X_3 \neq 0$ et $MX_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2X_3$.
  Ainsi, X_3 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 2.

3. La matrice M étant de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. La matrice P comportant dans ses trois colonnes trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, en notant $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale comportant les valeurs propres correspondantes dans le même ordre, on a donc :

$$M = PDP^{-1} = PD\left(\frac{1}{6}Q\right) = \frac{1}{6}PDQ$$

4. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $M^n = \dfrac{1}{6}PD^nQ$ ».
- Pour $n = 0$, on a $M^0 = I_3$ et également $\dfrac{1}{6}PD^0Q = PI_3P^{-1} = I_3$, ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.
- Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

$$M^{n+1} = M^n \times M = \left(\frac{1}{6}PD^nQ\right)\left(\frac{1}{6}PDQ\right) = \frac{1}{6}PD^n\left(\frac{1}{6}QP\right)DQ = \frac{1}{6}PD^{n+1}Q$$

  et ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

5. La matrice D étant diagonale, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

   Calculer la première colonne de M^n revient à multiplier à droite par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En écrivant donc le produit, et en calculant successivement de droite à gauche les produits de matrices :

$$\begin{aligned} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n \\ 9 \\ -2^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

1. L'athlète démarrant son entrainement par la natation au jour 0, on a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$. Suivant les règles de l'entraînement, au jour 1, on a alors $a_1 = 1/5$, $b_1 = 1/5$, $c_1 = 3/5$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La famille (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements, et avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + 0 \times c_n \end{aligned}$$

   De même, on calcule $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$:

$$b_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n$$

   et

$$c_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{3}{5}a_n + 0 \times b_n + \frac{4}{5}c_n$$

3. On a donc :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + 0 \times c_n \\ \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \\ \frac{3}{5}a_n + 0 \times b_n + \frac{4}{5}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

   En notant $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}M$, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
4. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

   - Pour $n = 0$, on a bien $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^0}M^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   - Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait montré que : $Y_n = \frac{1}{5^n}M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Alors :

$$Y_{n+1} = AY_n = \left(\frac{1}{5}M\right) \frac{1}{5^n}M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n+1}}M^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Comme $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ correspond à la première colonne de M^n, on a d'après I.5 :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6.5^n} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que :

$$a_n = \frac{5^n - 2^{n+2} + 9}{6 \times 5^n} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + 9\left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

$$b_n = \frac{2(5^n - 2^n)}{6 \times 5^n} = \frac{1}{3} - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n,$$

$$c_n = \frac{3(5^n + 2^{n+1}) - 9}{6 \times 5^n} = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

6. Comme $-1 < 1/5 < 1$ et $-1 < 2/5 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$. On en déduit finalement que :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 2

Partie I : tirages dans une urne

1. (a) On reconnaît ici une épreuve succès/échec qui se répète dans des conditions identiques et indépendantes, la probabilité du succès étant à chaque épreuve de $1/4$ (un succès étant de tirer la boule noire). La variable X comptant le nombre de succès sur les 400 épreuves suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}\left(400, \frac{1}{4}\right)$.

   On a donc $X(\Omega) = [\![0, 400]\!]$ et : $\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}$.

   (b) L'espérance de X est alors $400 \times \frac{1}{4} = 100$ et la variance est $400 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 75$.

2. (a) On est toujours dans le cadre d'une répétition d'épreuves succès/échec identiques et indépendantes, la probabilité du succès étant à chaque épreuve de $1/4$ (un succès étant de tirer la boule noire). La variable Y déterminant le rang d'apparition du premier succès suit donc une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right)$.

   On a donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)$.

   (b) L'espérance de Y est alors $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ et la variance est $\frac{\frac{3}{4}}{(\frac{1}{4})^2} = 12$.

3. (a) Si on tire les boules sans remise, Z ne peut prendre que les valeurs $1, 2, 3, 4$:

$$\boxed{Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}}$$

Notonrs B_k (respectivement N_k) « le k-ième tirage donne une boule blanche (resp. noire) ».

- $P(Z = 1) = P(N_1) = \dfrac{1}{4}$.
- $P(Z = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$
- $P(Z = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(N_3) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
- et nécessairement $P(Z = 4) = 1 - P(Z = 1) - P(Z = 2) - P(Z = 3) = \dfrac{1}{4}$.

Ainsi Z suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

(b) L'espérance de Z est donc $\dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$ et la variance est $\dfrac{4^2-1}{12} = \dfrac{5}{4}$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

1. Sur les deux tirages effectués on peut avoir tiré 0, 1 ou 2 fois la boule noire. Ainsi $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
2. Notons F l'événement « la pièce donne Face »et $\overline{F}$ l'événement « la pièce donne Pile ». Alors :

$$P(T = 0) = P(F)P_F(B_1 \cap B_2) + P(\overline{F})P_{\overline{F}}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{32}$$

$$P(T = 2) = P(F)P_F(N_1 \cap N_2) + P(\overline{F})P_{\overline{F}}(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{32}$$

On en déduit que :

$$P(T = 1) = 1 - P(T = 0) - P(T = 2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

3. $E(T) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} kP(T = k) = P(T = 1) + 2P(T = 2) = \frac{7}{16} + 2\frac{5}{32} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Si T suivait une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, on aurait alors nécessairement $n = 2$ (vu $T(\Omega)$), $E(T) = 2p$, donc $p = \dfrac{3}{8}$. Mais alors on devrait avoir $P(T = 2) = p^2$, ce qui n'est pas le cas ici. Donc T ne suit pas une loi binomiale.

4. Remarquons que si F se réalise, alors la loi de T est binomiale de paramètres $(2, 1/2)$. On a donc par exemple :

$$P_F(T = 1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

Donc :

$$P_{[T=1]}(F) = \frac{P(F)P_F(T = 1)}{P(T = 1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{4}{7}$$

et donc on en déduit que $P_{[T=1]}(\overline{F}) = 1 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7}$.

Finalement, si $[T = 1]$ est réalisé, il est plus probable d'avoir obtenu Face avec la pièce.

5.
```
T = 0
if  grand(1,1,"uin",1,2) == 1 then
  for k = 1 : 2
    if grand(1,1,"uin",1,4)<2 then
      T = T+1
    end
  end
else
  for k = 1 : 2
    if grand(1,1,"uin",1,4)<3 then
      T = T+1
    end
  end
end
disp(T,"Une simulation de T donne :")
```

EXERCICE 3

Partie I : étude d'une fonction

1. Pour tout réel x, $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. De plus, sur $]0, +\infty[$ le dénominateur ne s'annulant pas, $f(x)$ a bien un sens pour tout $x > 0$.

$$\boxed{D_f =]0, +\infty[}$$

2. Pour tout réel $x > 0$, on a $x^3 \geqslant 0$ donc :

$$f(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{4\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 1$$

3. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0^+$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Par ailleurs, par croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4\ln(x)}{x^3} = 0$.
La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

4. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ f'(x) = \frac{4\frac{1}{x}x^3 - 4\ln(x)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{4x^2(1 - 3\ln(x))}{x^6}$$

Le signe de f' dépend donc du signe de $1 - 3\ln(x)$:

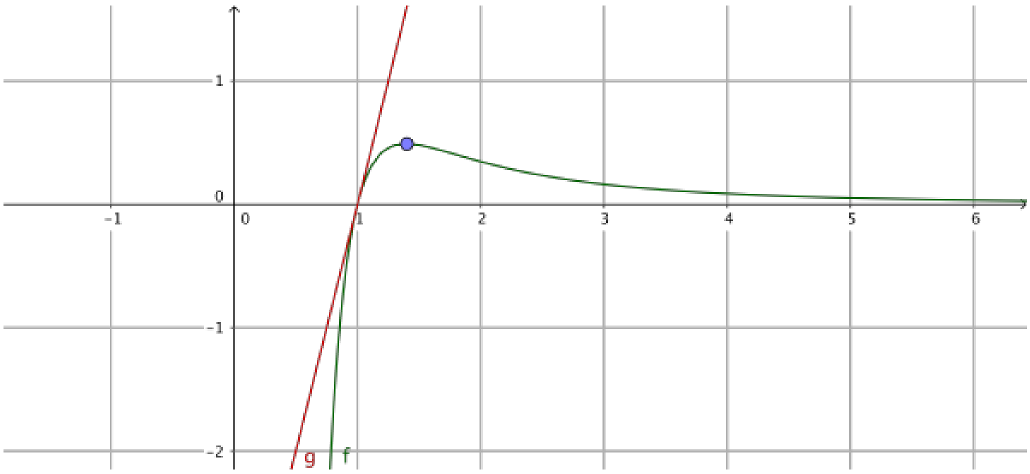
$$1 - 3\ln(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow 3\ln(x) \leqslant 1 \Longleftrightarrow \ln(x) \leqslant \frac{1}{3} \Longleftrightarrow x \leqslant e^{1/3}$$

La fonction f est donc croissante sur $]0, e^{1/3}[$ puis décroissante sur $]e^{1/3}, +\infty[$.
La fonction f admet donc un maximum (global) en $e^{1/3}$, qui vaut : $f(e^{1/3}) = \frac{4}{3e}$.
La fonction f admettant $-\infty$ comme limite en 0^+, elle n'est pas minorée et n'admet donc pas de minimum.

5. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet comme équation :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1), \quad \text{i.e. } \boxed{y = 4x - 4}$$

6.



Partie II : étude d'une variable aléatoire à densité

1. Soit $A \geqslant 1$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \dfrac{4}{x^3} \end{cases}, \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{-2}{x^2} \end{cases}$$

On a alors en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3}dx = \left[-\frac{2\ln(x)}{x^2}\right]_1^A + \int_1^A \left(\frac{2}{x^3}\right)dx = \frac{-2\ln(A)}{A^2} + \left[\frac{-1}{x^2}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}$$

2. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ car f est continue sur $[1, +\infty[$ et on a bien $f(1) = 0$.
La fonction h est positive sur $\mathbb{R}$ puisque, pour $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 0$.
De plus, en utilisant les croissances comparées :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}\right) = 1$$

Ainsi, h est bien une densité de probabilité.

3. (a) Pour $x < 1$, $F(x) = 0$.
Pour $x \geqslant 1$, en reprenant le calcul de la question 1,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)dt = \int_1^x f(t)dt = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x^2}$$

(b)

```
1  function calcul=F(x)
2          if x < 1 then
3                  calcul = 0
4          else
5                  calcul = 1 - 1/(x^2)-2*log(x)/(x^2)
6          end
7  endfunction
8
9  for i=1:300, a(i)=-2+7*i/300; b(i)=F(a(i));
10 end
11 plot(a,b)
```

(c) L'exécution des lignes 9 à 11 permet de tracer la fonction F sur l'intervalle $[-2;5]$.

4. Soit $A \geqslant 1$. On a :

$$\int_1^A xh(x)dx = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^2}dx$$

En faisant une intégration par parties, comme dans la question 1, en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \dfrac{4}{x^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{-4}{x} \end{cases}$$

on obtient :

$$\int_1^A xh(x)dx = \left[\frac{-4\ln(x)}{x}\right]_1^A + \int_1^A \frac{4}{x^2}dx = \frac{-4\ln(A)}{A} + \left[-\frac{4}{x}\right]_1^A = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A}$$

Par croissances comparées, on en déduit donc que : $\displaystyle\int_1^A xh(x)dx \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 4.$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx = \int_1^{+\infty} xh(x)dx$ converge.

La variable X admet donc bien une espérance et on a :$E(X) = 4$.

5. La variable X admet une variance si et seulement si $E(X^2)$ existe, c'est-à-dire si $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2h(x)dx$ converge.

Or,

$$\int_1^A x^2h(x)dx = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x}dx = \left[2(\ln x)^2\right]_1^A = 2(\ln(A))^2 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2h(x)dx$ est donc divergente, X^2 n'admet pas d'espérance, et donc X n'a pas de variance.

6. Pour $A > 1$, on a :

$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{P([X > A] \cap [X > 2A])}{P(X > A)} = \frac{P(X > 2A)}{P(X > A)} = \frac{1 - F(2A)}{1 - F(A)} = \frac{\frac{1}{(2A)^2} + \frac{2\ln(2A)}{(2A)^2}}{\frac{1}{A^2} + \frac{2\ln(A)}{A^2}} = \frac{1 + 2\ln(2A)}{4 + 8\ln(A)}$$

Enfin, on a :

$$\lim_{A\to+\infty} P_{[X>A]}(X > 2A) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1 + 2\ln(2) + 2\ln(A)}{4 + 8\ln(A)} = \lim_{A\to+\infty} \frac{2\ln(A)\left(\dfrac{1}{2\ln(A)} + \dfrac{\ln(2)}{\ln(A)} + 1\right)}{8\ln(A)\left(\dfrac{1}{2\ln(A)} + 1\right)} = \frac{1}{4}$$