

# CONCOURS BLANC 1

## Exercice 1 –

$$1. \quad 2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = \frac{4}{2} = 2$$

Donc  $\mathcal{S} = \{2\}$ .

$$2. \quad 4(x-1) + 3(2x-1) = 0 \iff 4x - 4 + 6x - 3 = 0 \iff 10x = 7 \iff x = \frac{7}{10}$$

Donc  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{7}{10} \right\}$ .

$$3. \quad x^2 + 2x + 3 = x(x-1) \iff x^2 + 2x + 3 = x^2 - x \iff 3x + 3 = 0 \iff 3x = -3 \iff x = -1$$

Donc  $\mathcal{S} = \{-1\}$ .

$$4. \quad \text{Je calcule le discriminant : } \Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9 > 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{7-3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+3}{2} = 5.$$

Et  $\mathcal{S} = \{2, 5\}$ .

$$5. \quad 2x(x+1) = -1 \iff 2x^2 + 2x = -1 \iff 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

Je calcule le discriminant :  $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4 < 0$ .

Le polynôme n'admet donc pas de racine. Et  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

$$6. \quad x(x+1) - (4x-1)(x+3) = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 + x - (4x^2 + 12x - x - 3) = x^2 - 2x + 1$$

$$\iff x^2 + x - 4x^2 - 12x + x + 3 - x^2 + 2x - 1 = 0 \iff -4x^2 - 8x + 2 = 0$$

Je calcule le discriminant :  $\Delta = (-8)^2 - 4 \times (-4) \times 2 = 64 + 32 = 96 > 0$ .

Le polynôme admet donc deux racines, et en remarquant que  $\sqrt{96} = \sqrt{16} \times \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$  :

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{96}}{2 \times (-4)} = \frac{8 - 4\sqrt{6}}{-8} = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8 + \sqrt{96}}{-8} = \frac{8 + 4\sqrt{6}}{-8} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1.$$

Et  $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1, \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \right\}$ .

$$7. \quad -2x + 3 > 0 \iff 3 > 2x \iff 2x < 3 \iff x < \frac{3}{2}$$

Donc  $\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right[$ .

$$8. \quad \text{Je calcule le discriminant : } \Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25 - 24 = 1 > 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \frac{-5-1}{-2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+1}{-2} = 2.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant, comme  $a = -1 < 0$  :

$x$	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$-x^2+5x-6$	-	0	+	0	-

Donc  $\mathcal{S} = ]2, 3[$ .

$$9. 2x(x-2) \leq x^2 - 4 \iff 2x^2 - 4x \leq x^2 - 4 \iff x^2 - 4x + 4 \leq 0$$

Je calcule le discriminant :  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$ .

Le polynôme admet donc une unique racine :

$$x_0 = -\frac{-4}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$x^2 - 2x + 4$	+	0	+

Donc  $\mathcal{S} = \{2\}$ .

$$10. \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x-1} = 0 \iff \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} - \frac{2(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 0$$

$$\iff \frac{x-1-2x-6}{(x-1)(x+3)} = 0 \iff \frac{-x-7}{(x-1)(x+3)} = 0$$

Je commence par chercher les valeurs interdites :

$$(x-1)(x+3) = 0 \iff x-1 = 0 \text{ ou } x+3 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -3.$$

Par ailleurs,  $-x-7 = 0 \iff x = -7$ . Or  $-7$  n'est pas valeur interdite. Donc  $\mathcal{S} = \{-7\}$ .

$$11. \frac{x}{2x-4} + \frac{3}{-2x+1} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{2x(-2x+1)}{(2x-4)(-2x+1)} + \frac{6(2x-4)}{(2x-4)(-2x+1)} - \frac{(2x-4)(-2x+1)}{(2x-4)(-2x+1)} \leq 0$$

$$\iff \frac{-4x^2 + 2x + 12x - 24 + 4x^2 - 2x - 8x + 4}{(2x-4)(-2x+1)} \leq 0 \iff \frac{4x-20}{(2x-4)(-2x+1)} \leq 0$$

$$\text{Or } 4x-20 \geq 0 \iff x \geq \frac{20}{4} = 5, \quad 2x-4 \geq 0 \iff x \geq \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad -2x+1 \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$2$	$5$	$+\infty$
$4x - 20$	-	-	-	0	+
$2x - 4$	-	-	0	+	+
$-2x + 1$	+	0	-	-	-
$\frac{4x-20}{(2x-4)(-2x+1)}$	+	-	+	0	-

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left] \frac{1}{2}, 2 \right[ \cup [5, +\infty[.$$

12. Tout d'abord,  $(-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$  donc  $-1$  est une racine du polynôme. J'effectue alors la division euclidienne de  $x^3 - 7x - 6$  par  $x - (-1) = x + 1$  :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^3 \quad \quad \quad - \quad 7x \quad - \quad 6 \\
 - (x^3 + \quad x^2) \\
 \hline
 \quad \quad -x^2 \quad - \quad 7x \quad - \quad 6 \\
 \quad \quad - (-x^2 - \quad x) \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad -6x \quad - \quad 6 \\
 \quad \quad \quad \quad - (-6x - \quad 6) \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x+1 \\
 \hline
 x^2 - x - 6
 \end{array}
 \end{array}$$

Je calcule désormais le discriminant de  $x^2 - x - 6$  :  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$ . Ce polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1-5}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Finalement, j'obtiens donc  $\mathcal{S} = \{-2, -1, 3\}$ .

13. Tout d'abord,  $-2^3 + 2^2 + 22 \times 2 - 40 = -8 + 4 + 44 - 40 = 0$  donc  $2$  est une racine du polynôme. J'effectue alors la division euclidienne de  $-x^3 + x^2 + 22x - 40$  par  $x - 2$  :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 -x^3 \quad + \quad x^2 \quad + \quad 22x \quad - \quad 40 \\
 - (-x^3 + \quad 2x^2) \\
 \hline
 \quad \quad -x^2 \quad + \quad 22x \quad - \quad 40 \\
 \quad \quad - (-x^2 + \quad 2x) \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 20x \quad - \quad 40 \\
 \quad \quad \quad \quad - (20x - \quad 40) \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x-2 \\
 \hline
 -x^2 - x + 20
 \end{array}
 \end{array}$$

Je calcule désormais le discriminant de  $-x^2 - x + 20$  :  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 20 = 1 + 80 = 81 > 0$ . Ce polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \times (-1)} = \frac{1-9}{-2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+9}{-2} = -5.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant pour  $-x^3 + x^2 + 22x - 40 = (x-2)(-x^2 - x + 20)$  :

$x$	$-\infty$	$-5$	$2$	$4$	$+\infty$		
$x-2$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$		
$-x^2-x+20$	$-$	$0$	$+$	$+$	$0$	$-$	
$-x^3+x^2+22x-40$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

Finalement, j'obtiens donc  $\mathcal{S} = ]-\infty, -5[ \cup ]2, 4[$ .

**Exercice 2 –**

1. a) Comme  $P(-1) = -3 - 7 + 7 + 3 = 0$ , le polynôme  $P(x)$  se factorise par  $x - (-1) = x + 1$ .  
Donc il existe un polynôme  $Q(x)$ , de degré  $3 - 1 = 2$ , tel que  $P(x) = (x + 1)Q(x)$ .  
Je détermine ce polynôme  $Q(x)$  en effectuant la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x + 1$  :

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 & - & 7x^2 & - & 7x & + & 3 & x+1 \\
 - (3x^3 & + & 3x^2) & & & & & \hline
 & & -10x^2 & - & 7x & + & 3 & \\
 & & - (-10x^2 & - & 10x) & & & \\
 & & & & 3x & + & 3 & \\
 & & & & - (3x & + & 3) & \\
 & & & & & & 0 & 
 \end{array}$$

Finalement,  $Q(x) = 3x^2 - 10x + 3$  et  $P(x) = (x + 1)(3x^2 - 10x + 3)$ .

- b) Grâce à la factorisation obtenue à la question précédente, il ne me reste plus qu'à traiter le facteur de degré 2. Son discriminant vaut  $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 100 - 36 = 64 > 0$ .  
Ce polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 8}{6} = 3.$$

Finalement l'équation  $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$  admet trois solutions :  $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{3}, 3\right\}$ .

2. a) Afin de déterminer l'ensemble de définition, je cherche les valeurs interdites, qui sont les solutions de l'équation  $3x^2 - 12x + 12 = 0$ . Le discriminant de ce polynôme vaut  $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 144 - 144 = 0$ . Ce polynôme admet donc une unique racine :

$$x_0 = -\frac{-12}{2 \times 3} = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc l'ensemble de définition de  $f$  est  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

- b) J'établis désormais le tableau de signe de  $f(x) = \frac{(x + 1)(3x^2 - 10x + 3)}{3x^2 - 12x + 12}$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{3}$	$2$	$3$	$+\infty$		
$x+1$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$	$+$		
$3x^2-10x+3$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$	
$3x^2-12x+12$	$+$	$+$	$+$	$0$	$+$	$+$		
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) \geq 0$  est donné par

$$\mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty[.$$

**Exercice 3 –**

1. Les fonctions  $f$  et  $g$  sont des fonctions polynomiales donc elles sont définies sur  $\mathbb{R}$ .  
Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty.$$

2. Je calcule  $f(2)$  et  $g(2)$  pour prouver que ces deux valeurs sont égales à 17 :

$$f(2) = 8 + 24 - 10 - 5 = 17 \quad \text{et} \quad g(2) = 8 + 4 + 5 = 17.$$

Donc le point de coordonnées  $(2, 17)$  est bien un point des deux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

3. D'après la question précédente,  $f(2) - g(2) = 17 - 17 = 0$ . Donc 2 est racine du polynôme  $f(x) - g(x)$ . Donc il existe un polynôme  $Q(x)$  de degré  $3 - 1 = 2$  tel que  $f(x) - g(x) = (x - 2)Q(x)$ .  
4. Je détermine ce polynôme  $Q(x)$  par division euclidienne :  $f(x) - g(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$  et

$$\begin{array}{r|l} x^3 & + & 4x^2 & - & 7x & - & 10 & & x - 2 \\ - & (x^3 & - & 2x^2) & & & & & x^2 + 6x + 5 \\ \hline & & 6x^2 & - & 7x & - & 10 & & \\ & & - & (6x^2 & - & 12x) & & & \\ \hline & & & & 5x & - & 10 & & \\ & & & & - & (5x & - & 10) & \\ \hline & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Finalement,  $Q(x) = x^2 + 6x + 5$  et  $f(x) - g(x) = (x - 2)(x^2 + 6x + 5)$ .  
Je cherche désormais le signe de  $Q(x)$  pour en déduire celui de  $f(x) - g(x)$ .  
Son discriminant vaut  $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 5 = 36 - 20 = 16 > 0$ .  
Ce polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-6 - 4}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + 4}{2} = -1.$$

J'établis donc le tableau de signe de  $f(x) - g(x) = (x - 2)(x^2 + 6x + 5)$ .

$x$	$-\infty$		$-5$		$-1$		$2$		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$		$-$	$0$		$+$
$x^2 + 6x + 5$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$			$+$
$f(x) - g(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$		$+$

Ainsi,

- $\mathcal{C}_f$  est en dessous de  $\mathcal{C}_g$  lorsque  $f(x) \leq g(x)$ , i.e. sur  $] -\infty, -5] \cup [-1, 2]$ ,
- $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_g$  lorsque  $f(x) \geq g(x)$ , i.e. sur  $[-5, -1] \cup [2, +\infty[$ .

**Exercice 4 –**

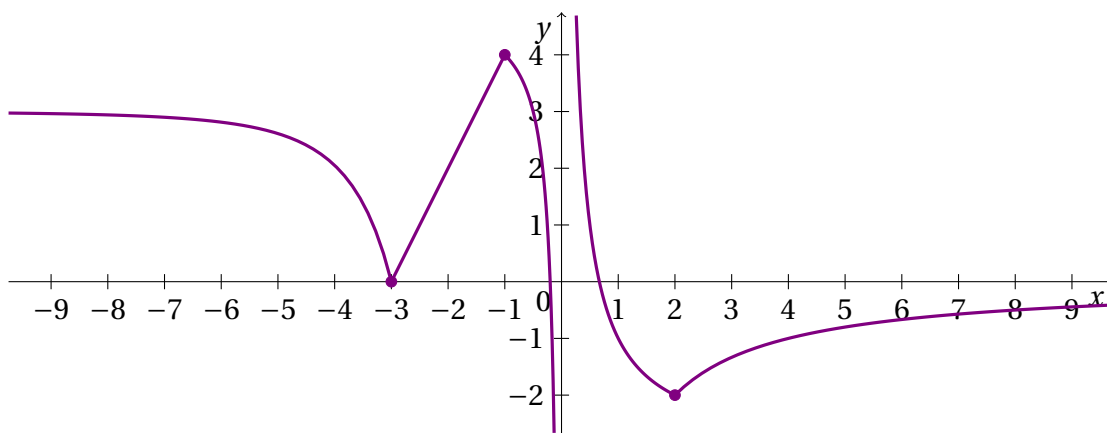
1. a) Par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction  $f$  est le suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$4$	$+\infty$
$f$	$2$ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $2$	

Le tableau de signe de la fonction  $f$  est le suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$3$	$4$	$7$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$-$	$0$	$+$	$-$	$0$	$+$

- b) (i) FAUX L'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions :  $x \approx 3$  et  $x \approx 7$ .  
(ii) FAUX La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 2$ , à la fois en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
(iii) VRAI La fonction  $f$  est croissante sur  $[-2, 2]$  et  $f(2) \approx -1$ .  
(iv) FAUX La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] -2, 4[$  et sur  $]4, +\infty[$ , mais  $f$  n'est même pas définie en 4.
2. a) La courbe suivante correspond au tableau de variation de la fonction  $g$  :



- b) (i) FAUX L'équation  $g(x) = 0$  admet une solution en  $x = -3$  et une autre solution dans l'intervalle  $] -1, 0[$ .  
(ii) VRAI Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ , il y a bien une asymptote verticale d'équation  $x = 0$ .  
(iii) VRAI La fonction  $g$  est croissante sur  $[2, +\infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .  
(iv) FAUX La fonction  $g$  est décroissante sur  $] -\infty, -3]$ , la notation  $[3, 0]$  ne décrit même pas un intervalle.

**Exercice 5 –**

1. Je calcule  $u_1$  et  $u_2$ . À la fin du premier mois, je dois ajouter 1% à la somme à rembourser, i.e.  $100\,000 \times 0.01 = 1\,000$ , et retirer 2000 de mon premier remboursement mensuel.  
Ainsi

$$u_1 = 100\,000 + 1\,000 - 2\,000 = 99\,000.$$

De la même manière, à la fin du deuxième mois, je dois ajouter 1% à la somme à rembourser, *i.e.*  $99\,000 \times 0.01 = 990$ , et retirer 2 000 de mon deuxième remboursement mensuel.

Ainsi

$$u_2 = 99\,000 + 990 - 2\,000 = 97\,990.$$

2. La somme qu'il reste à rembourser à la fin du  $n$ -ième mois d'emprunt est donnée par  $u_n$ . Le taux mensuel étant de 1%, ce montant augmente de 1%. Autrement dit, il est multiplié par 1.01. Après remboursement de 2 000 euros, le montant  $u_{n+1}$  restant à rembourser est donc donné par

$$u_{n+1} = 1.01u_n - 2\,000.$$

3. Pour montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique, j'exprime  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 200\,000 = 1.01u_n - 2\,000 - 200\,000 = 1.01(v_n + 200\,000) - 2\,000 - 200\,000 \\ &= 1.01v_n + 202\,000 - 2\,000 - 200\,000 = 1.01v_n. \end{aligned}$$

Ainsi  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison 1.01. Son premier terme est donné par

$$v_0 = u_0 - 200\,000 = 100\,000 - 200\,000 = -100\,000.$$

4. La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant géométrique de premier terme  $v_0 = -100\,000$  et de raison  $q = 1.01$ , alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = v_0 \times q^n = -100\,000 \times (1.01)^n.$$

Par conséquent, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = v_n + 200\,000 = 200\,000 - 100\,000 \times (1.01)^n.$$

5. Il me suffit de remplacer  $n$  par 69 dans la formule explicite trouvée à la question précédente :

$$u_{69} = 200\,000 - 100\,000 \times (1.01)^{69} \approx 200\,000 - 100\,000 \times 1.99 = 1\,000.$$

6. Grâce à la question précédente, après 69 mois, il ne reste plus qu'environ 1 000 euros à rembourser. Ainsi il faudra donc 70 mois à cette personne pour rembourser son crédit, avec un dernier remboursement d'un montant d'environ 1 000 euros.

### Exercice 6 –

1. Grâce aux valeurs données par l'énoncé, je sais que

$$\begin{aligned} P(S) &= 0.3, & P(\bar{S}) &= 1 - 0.3 = 0.7, & P_S(E) &= 1 - 0.223 = 0.777, \\ P_S(\bar{E}) &= 0.223, & P_{\bar{S}}(E) &= 0.827 & \text{et} & P_{\bar{S}}(\bar{E}) &= 1 - 0.827 = 0.173. \end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(S \cap \bar{E}) = P(S) \times P_{\bar{S}}(\bar{E}) = 0.3 \times 0.223 = 0.0669.$$

Autrement dit, la probabilité que la personne interrogée ait plus de 50 ans et qu'elle travaille à temps partiel est de 0.0669, *i.e.* 6.69%.

3. Je cherche ici  $P(\bar{E})$ . D'après la formule des probabilités totales, comme  $S$  et  $\bar{S}$  forment un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= P(S \cap \bar{E}) + P(\bar{S} \cap \bar{E}) = P(S) \times P_{\bar{S}}(\bar{E}) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(\bar{E}) \\ &= 0.3 \times 0.223 + 0.7 \times 0.173 = 0.0669 + 0.1211 = 0.188. \end{aligned}$$

4. Je cherche ici  $P_{\bar{E}}(S)$ . D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{\bar{E}}(S) = \frac{P(S \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{0.0669}{0.188} = \frac{669}{1880}.$$

**Exercice 7 –** Je raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

**Énoncé :** Je note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $u_n > 0$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,  $u_0 = 2$  et  $2 > 0$ . Ainsi  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 0$ . Je suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et je montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que  $u_n > 0$ . Alors

$$u_{n+1} = 2u_n + 4 > 2 \times 0 + 4 = 4 > 0.$$

Donc  $u_{n+1} > 0$ . Finalement  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour  $n = 0$  et est héréditaire, alors par principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ , i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

**Exercice 8 –**

1. Je raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Énoncé :** Je note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 1$ ,  $\sum_{k=1}^1 2^k = 2^1 = 2$  et  $2 \times (2^1 - 1) = 2 \times 1 = 2$ . Ainsi  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 1$ . Je suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et je montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que  $\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$ . Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = \sum_{k=1}^n 2^k + 2^{n+1} = 2(2^n - 1) + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 2 = 2(2^{n+1} - 1).$$

Donc  $\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = 2(2^{n+1} - 1)$ . Finalement  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour  $n = 1$  et est héréditaire, alors par principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ , i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1).$$

2. Je sais que pour tout  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Alors pour  $q = 2$ , j'obtiens

$$\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

Il me reste alors à retirer le terme correspondant à  $k = 0$ , puis à mettre 2 en facteur :

$$\sum_{k=1}^n 2^k = \left( \sum_{k=0}^n 2^k \right) - 2^0 = (2^{n+1} - 1) - 1 = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1).$$



**Exercice 9 –**

1. Il suffit de remplacer
- $x$
- par
- $-2$
- :

$$\lim_{x \rightarrow -2} 2x^3 - x^2 + 5x + 6 = 2 \times (-8) - 4 + 5 \times (-2) + 6 = -16 - 4 - 10 + 6 = -24.$$

2. Il suffit de remplacer
- $x$
- par
- $-1$
- :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{2x-3} = \frac{-1-2}{-2-3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

3. Je décompose numérateur et dénominateur :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} -2x + 4 = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{-2x+4} = +\infty.$$

4. Je décompose numérateur et dénominateur :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x(x+1) = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-1}{x(x+1)} = -\infty.$$

5. Je décompose chacun des termes de la somme :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x^2} = 0 \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} = 2.$$

6. Je ne garde que la limite du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 5x^2 + 4x - 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty.$$

7. Je ne garde que la limite du quotient des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{-4x^3 + 2x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{-4x} = 0^-.$$

8. Je décompose chacun des facteurs du produit :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2 \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + 1) \times \frac{2x+1}{x+5} = -\infty.$$

9. Je raisonne par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 16 = 16 \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{x} + 16} = \sqrt{16} = 4.$$

10. Je raisonne par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3}{-x+2} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{-3}{-x+2}} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{-3}{-x+2}} - 2 = +\infty$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \sqrt{\frac{-3}{-x+2}} - 2 \right)^3 = +\infty.$$

**Exercice 10 –**

1. a) La fonction  $f$  est une fraction rationnelle, elle est donc définie partout en dehors de ses valeurs interdites. Celles-ci correspondent à une annulation du dénominateur,

$$i.e. \quad 2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = 2.$$

Donc la fonction  $f$  est définie sur  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

- b) Je ne garde que le quotient des termes de plus haut degré en les bornes infinies :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

Je décompose numérateur et dénominateur en la valeur interdite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 4 = 0^- \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 4 = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = +\infty.$$

Graphiquement, cela donne une asymptote verticale d'équation  $x = 2$  (et possiblement deux asymptotes obliques en  $-\infty$  et  $+\infty$  mais il reste encore du travail pour le prouver).

- c) Je remarque que

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = \frac{x(x - 2) + 1}{2x - 4} = \frac{x(x - 2)}{2(x - 2)} + \frac{1}{2x - 4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x - 4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x - 4},$$

ce qui m'amène à poser  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 0$  et  $c = 1$ .

Comme  $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{2x - 4}$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x - 4} = 0$ , j'en déduis que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = \frac{x}{2}$  est bien asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

2. a) La fonction  $f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u(x) = x^2 - 2x + 1$  et  $v(x) = 2x - 4$ .

Comme  $u'(x) = 2x - 2$  et  $v'(x) = 2$ , alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x - 2)(2x - 4) - 2(x^2 - 2x + 1)}{(2x - 4)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 4x + 8 - 2x^2 + 4x - 2}{(2x - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(2x - 4)^2}. \end{aligned}$$

- b) Les variations de  $f$  s'obtiennent grâce au signe de la dérivée  $f'(x)$ .

Je calcule donc le discriminant du numérateur :  $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 64 - 48 = 16 > 0$ .

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 2} = \frac{8 - 4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8 + 4}{4} = 3.$$

Par ailleurs, puisque  $2x - 4 = 0 \iff x = 2$ , je peux déduire le tableau de signe de  $f'(x)$  et par la même occasion, le tableau de variation de  $f$ .

$$\text{Aussi, } f(1) = \frac{1^2 - 2 \times 1 + 1}{2 \times 1 - 4} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \text{et} \quad f(3) = \frac{3^2 - 2 \times 3 + 1}{2 \times 3 - 4} = \frac{4}{2} = 2.$$

$x$	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$2x^2-8x+6$	+	0	-	-	0	+
$(2x-4)^2$	+		+	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	
				</		

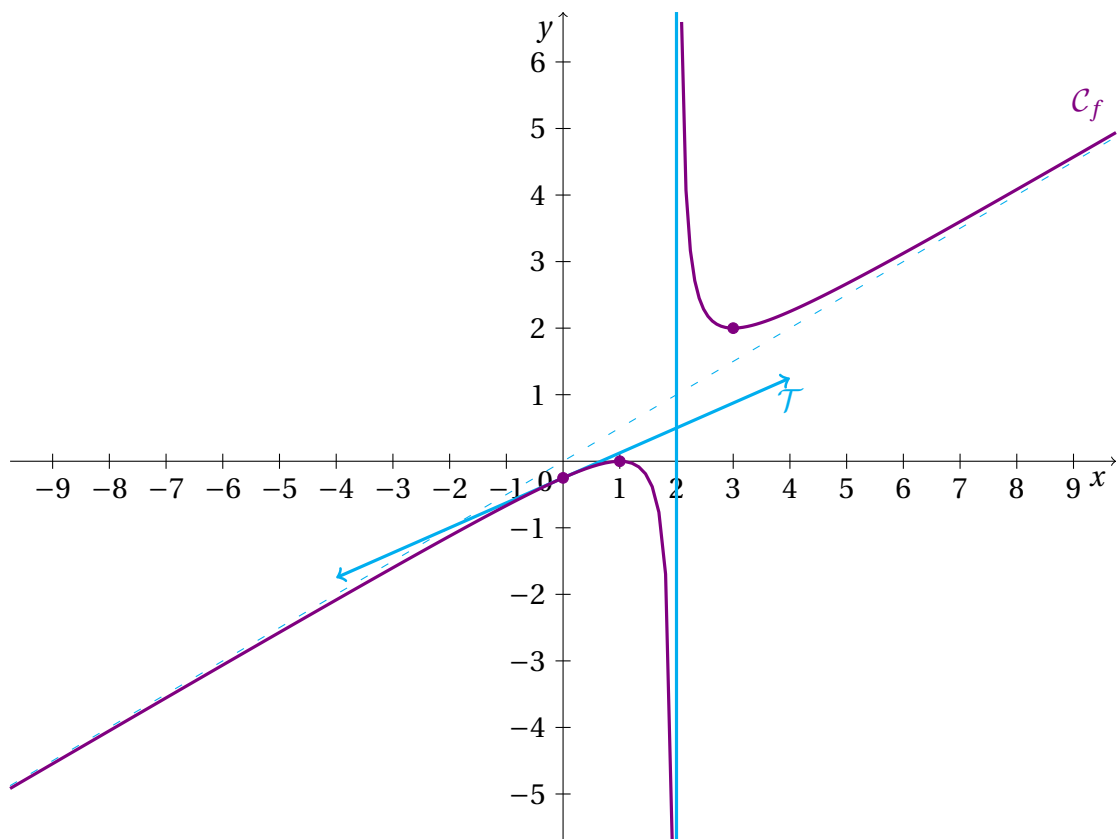
c) Une équation de la tangente est donnée par  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ . Ici  $a = 0$  et

$$f(0) = \frac{0^2 - 2 \times 0 + 1}{2 \times 0 - 4} = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{2 \times 0^2 - 8 \times 0 + 6}{(2 \times 0 - 4)^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Donc une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  au point d'abscisse 0 est donnée par

$$y = \frac{3}{8}(x - 0) - \frac{1}{4}, \quad \text{i.e.} \quad y = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}.$$

3. Je peux désormais tracer l'allure de la courbe en me servant des asymptotes, de la tangente et du tableau de variation :



**Exercice 11 –****Partie A**

1. La fonction  $f$  est une fonction polynomiale, je dérive donc terme à terme et j'obtiens que

$$f'(x) = 2x - 1.$$

Or  $2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}.$

J'en déduis alors le tableau de signe de  $f'(x)$  et le tableau de variation de  $f$ .

Aussi,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0^2 + 1 - 0 = 1$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^2 + 1 - 1 = 1$ .

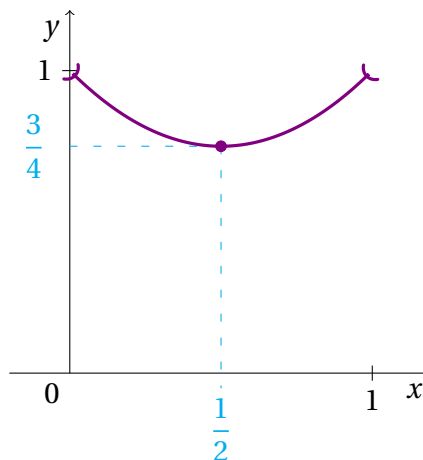
$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$2x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f$	1	$\frac{3}{4}$	1

2. D'après le tableau de variation, la fonction admet un minimum local pour  $x = \frac{1}{2}$  de valeur  $\frac{3}{4}$ .  
Et comme 0 et 1 ne sont pas dans l'ensemble de définition, la fonction n'admet pas de maximum local.
3. D'après le tableau de variation, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$\frac{3}{4} \leq f(x) < 1.$$

En particulier, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $f(x) \in ]0, 1[$ .

4. La fonction  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2, sa courbe suit donc une portion de parabole :



**Partie B**

1. J'évalue la fonction en le terme précédent de la suite. Ainsi

$$u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{7}{9} \quad \text{et} \quad u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81} + 1 - \frac{7}{9} = \frac{67}{81}.$$

2. Je raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

**Énoncé :** Je note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $u_n \in ]0, 1[$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,  $u_0 = \frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{3} \in ]0, 1[$ . Ainsi  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 0$ . Je suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et je montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que  $u_n \in ]0, 1[$ .

D'après la Partie A, je sais que pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $f(x) \in ]0, 1[$ . Alors

$$f(u_n) \in ]0, 1[, \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} \in ]0, 1[.$$

Finalement  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour  $n = 0$  et est héréditaire, alors par principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ , i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in ]0, 1[.$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . J'étudie le signe de  $u_{n+1} - u_n$  :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 - u_n - u_n = u_n^2 + 1 - 2u_n = (u_n - 1)^2 \geq 0.$$

Ainsi  $u_{n+1} \geq u_n$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

4. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante par la question précédente et majorée par 1 par la question d'avant, donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Je note  $\ell$  sa limite. Puisque  $u_{n+1} = u_n^2 + 1 - u_n$ , alors en passant à la limite, j'obtiens que

$$\ell = \ell^2 + 1 - \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\ell - 1)^2 = 0.$$

Donc  $\ell = 1$ . Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

**Exercice 12 –**

1. Grâce aux valeurs données par l'énoncé,

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0.2.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme  $A_n$  et  $\overline{A_n}$  forment un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= 0.7 \times P(A_n) + 0.2 \times P(\overline{A_n}) = 0.7 \times P(A_n) + 0.2 \times (1 - P(A_n)) \\ &= 0.7P(A_n) + 0.2 - 0.2P(A_n) = 0.5P(A_n) + 0.2. \end{aligned}$$

Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, j'ai bien montré que  $p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$ .

3. a) Pour montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique, j'exprime  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.4 = 0.5p_n + 0.2 - 0.4 = 0.5(u_n + 0.4) - 0.2 = 0.5u_n + 0.2 - 0.2 = 0.5u_n.$$

Ainsi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique de raison 0.5. Son premier terme est donné par

$$u_1 = p_1 - 0.4 = 0.2 - 0.4 = -0.2.$$

- b) Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique de raison  $q = 0.5$  et de premier terme  $u_1 = -0.2$ , alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

Par conséquent, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$p_n = u_n + 0.4 = 0.4 - 0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

4. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique, de premier terme  $u_1 = -0.2 < 0$  et de raison  $q = 0.5 \in ]0, 1[$ . Donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite croissante de termes négatifs. Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n = u_n + 0.4$ , la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  partage la même variation que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , elle est donc elle aussi croissante.

5. Comme  $0.5 \in ]-1, 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0.5^{n-1} = 0$  et la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est 0.  
Et par opérations sur les limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0.4 - 0.2 \times 0.5^{n-1} = 0.4 - 0.2 \times 0 = 0.4.$$

**Exercice 13 –**

1. Pour calculer le terme d'indice  $n$ , il suffit d'initialiser le terme  $u_0$  dans une variable  $u$  puis d'utiliser une boucle `for` pour calculer les termes suivants :

```
1. def calculu(n):  
2.     u=10  
3.     for i in range(n):  
4.         u=u/2+1/u  
5.     return(u)
```

Pour afficher les dix premiers termes, il est possible de faire appel à cette fonction dix fois, mais le plus simple reste d'afficher les termes calculés successivement, en ajoutant une ligne `print(u)` à l'intérieur de la boucle `for`.

2. Je reste dans la boucle `while` tant que la distance entre le terme  $v_n$  et la limite  $e$  est plus grande qu'un paramètre  $d$ , *i.e.*  $|e - v_n| > d$ .  
J'importe alors la bibliothèque `numpy` pour la valeur absolue et la constante  $e$ .

```
1. import numpy as np  
2. def distance(d):  
3.     n=1  
4.     v=2  
5.     while np.abs(np.e-v)>d:  
6.         n=n+1  
7.         v=(1+1/n)**n  
8.     return(n)  
9. print(distance(0.001))
```

3. J'utilise encore une boucle `while`, qui s'arrête quand le montant placé dépasse 40 000 euros.  
En sortie, j'affiche le nombre d'itérations qui me donne le nombre d'années à attendre.

```
1. n=0  
2. u=32000  
3. while u<40000:  
4.     n=n+1  
5.     u=u*1.01  
6. print(n)
```