7 | Limites et continuité

I – Notions de limite

1 – Illustration

- Soit f la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$
On étudie les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	1	0.25	0.01	0.0001	0	0.0001	0.01	0.25	1

On constate que plus x se rapproche de 0, plus x^2 se rapproche de 0.
On dit que x^2 **tend vers** 0 **lorsque** x **tend vers** 0 et on note
$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

- Soit f la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$
On étudie les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	1	4	100	10000	10000	100	4	1

On constate que plus x se rapproche de 0, plus $\frac{1}{x^2}$ devient "grand".
On dit que $\frac{1}{x^2}$ **tend vers** $+\infty$ **lorsque** x **tend vers** 0 et on note
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

- Soit f la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$
On étudie les valeurs de $f(x)$ lorsque x devient "grand".

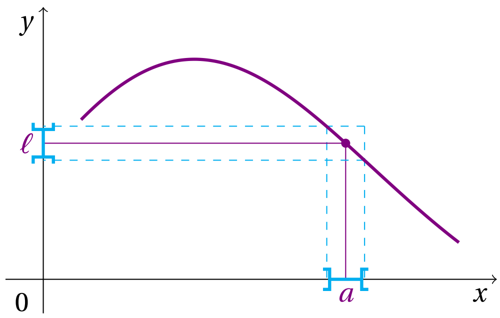
x	1	5	10	100
$f(x)$	1	0.04	0.01	0.0001

On constate que plus x devient "grand", plus $\frac{1}{x^2}$ se rapproche de 0.
On dit que $\frac{1}{x^2}$ **tend vers** 0 **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ et on note
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

2 – Limite finie en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle comprenant un voisinage d'un réel a.
On dit que f **admet** ℓ **pour limite en** a lorsque $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a.
On note alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$



Exemple 7.1 – Soit f la fonction définie sur $]-2,4[$ par $f(x) = x^2 + 3x - 5$. Calculer ces limites.

- $\lim_{x\to 0} f(x) = -5$
- $\lim_{x\to -2} f(x) = -7$
- $\lim_{x\to 4} f(x) = 23$

3 – Limite à gauche et à droite en un point

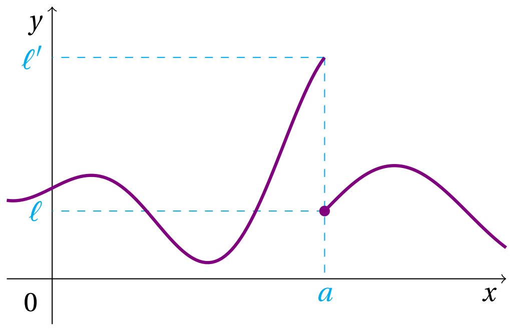
Pour certaines fonctions, il peut être utile de distinguer le comportement en un point a, selon que l'on s'approche de a exclusivement par la gauche, par valeurs inférieures, *i.e.* pour des abscisses $x < a$, ou exclusivement par la droite, par valeurs supérieures, *i.e.* pour des abscisses $x > a$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

- Si lorsque x se rapproche de a par valeurs inférieures, $f(x)$ se rapproche de ℓ, on dit que f admet ℓ pour **limite à gauche** en a et on note

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell.$$

- Si lorsque x se rapproche de a par valeurs supérieures, $f(x)$ se rapproche de ℓ, on dit que f admet ℓ pour **limite à droite** en a et on note

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell.$$



4 – Limite infinie en un point

Une fonction f peut également avoir une limite infinie en un point fini, *i.e.* prendre des valeurs positives ou négatives aussi grande que l'on veut.
Plus précisément, pour une fonction f, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a, si $f(x)$ peut prendre des valeurs **positives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a. On note alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

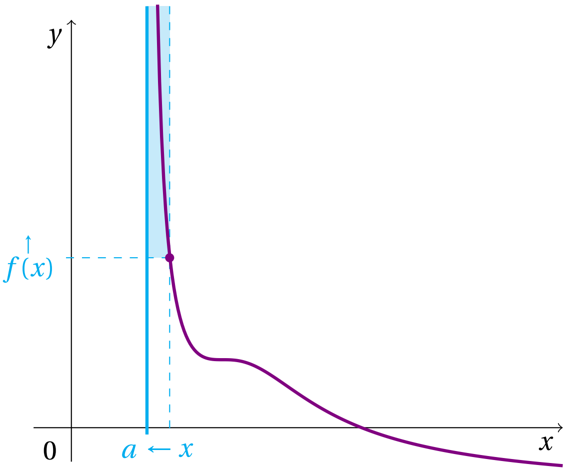
De même, on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a, si $f(x)$ peut prendre des valeurs **négatives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a. On note alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

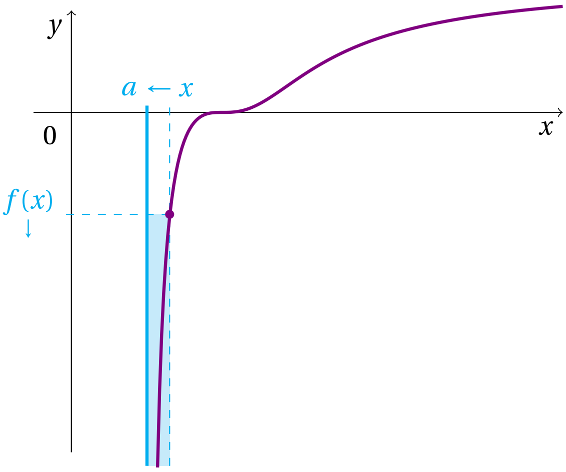
Si la fonction n'est définie qu'à gauche de a (resp. qu'à droite de a), on note de manière similaire

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad (\text{ resp. } \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty).$$

Limite "à droite" de a :

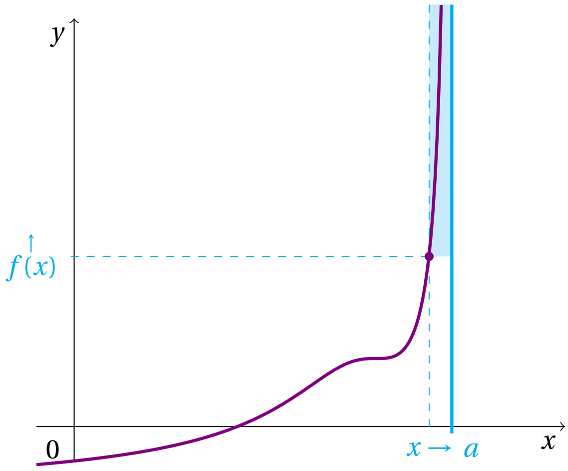


$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

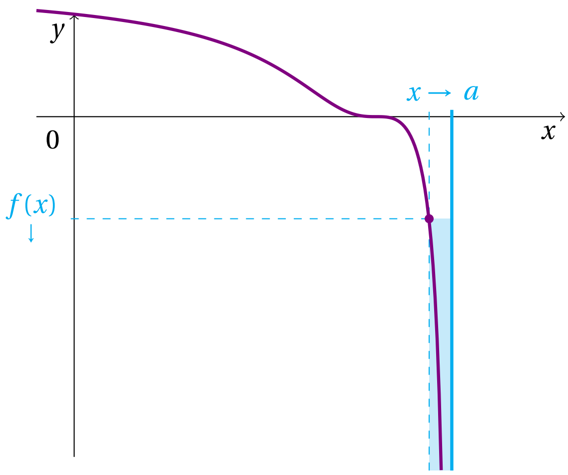


$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Limite "à gauche" de a :



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$



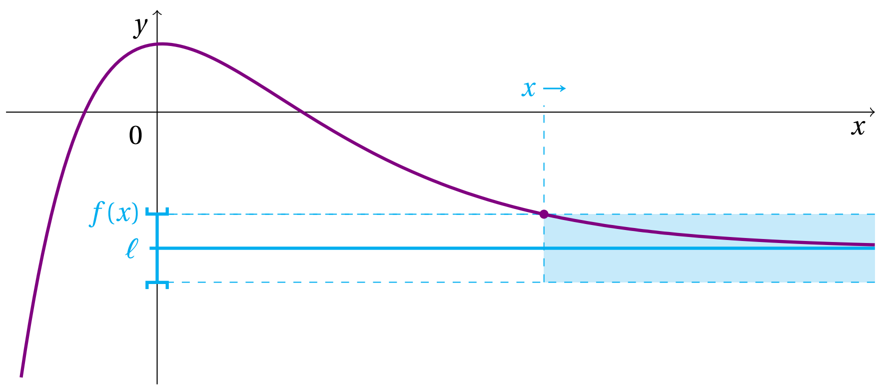
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

5 – Limite finie en l'infini

Lorsqu'une fonction f est définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, on peut s'intéresser au comportement de $f(x)$ lorsque x devient très grand, dans les positifs ou dans les négatifs. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$.
On dit que f **admet** ℓ **pour limite en** $+\infty$ lorsque $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand. On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

Il en va de même pour définir $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

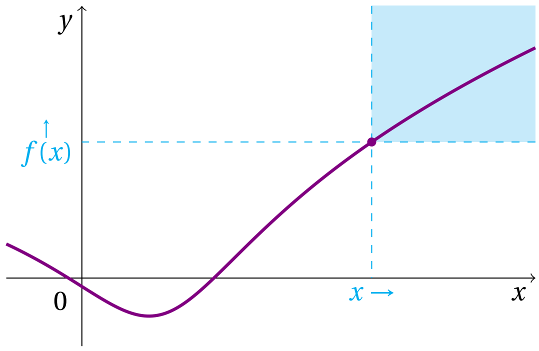


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition de choisir x suffisamment grand.

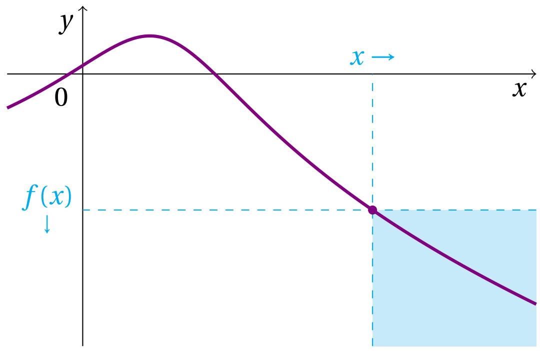
6 – Limite infinie en l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$, où A est un réel quelconque.

1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand. On note
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand. On note
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$



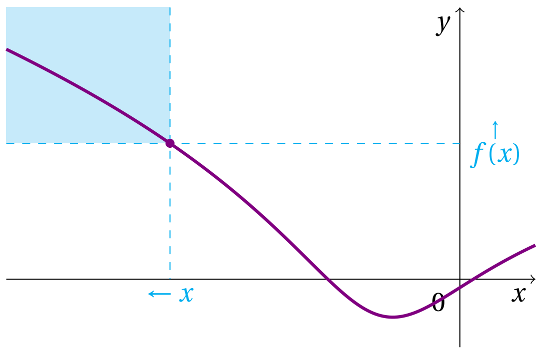
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



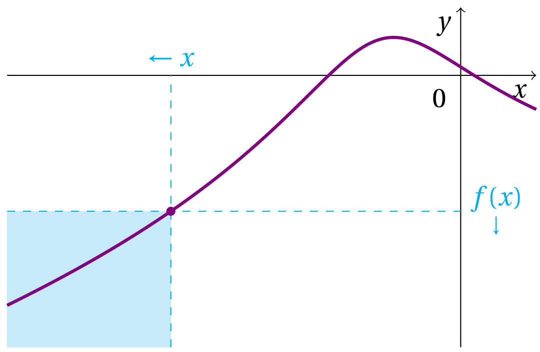
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, A]$, où A est un réel quelconque.

1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x négatif suffisamment grand. On note
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$
2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x négatif suffisamment grand. On note
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$



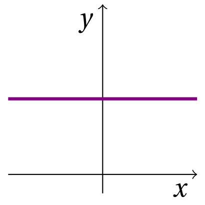
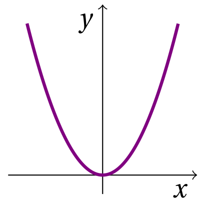
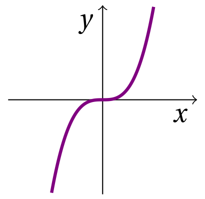
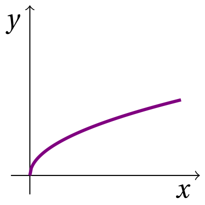
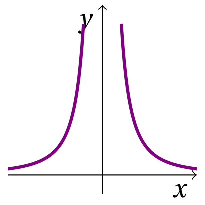
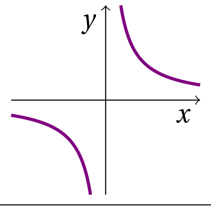
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

II – Calculs de limites

1 – Limites des fonctions usuelles

Fonction	Définie sur	Courbe	Limite en $-\infty$	Limite en 0	Limite en $+\infty$
$x \mapsto c$ $c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		c	c	c
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$ pair	$\mathbb{R}$		$+\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$ impair	$\mathbb{R}$		$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$		*NON DÉFINIE*	0	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ pair	$\mathbb{R}^*$		0^+	$\lim\limits_{x\to 0^-} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} = +\infty$	0^+
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ impair	$\mathbb{R}^*$		0^-	$\lim\limits_{x\to 0^-} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} = +\infty$	0^+

Exemple 7.2 – Calculer les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0^-$

2 – Limite d'une somme de deux fonctions

Ce tableau récapitule l'ensemble des cas possibles pour la limite d'une somme de deux fonctions u et v selon les limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x\to\alpha} u(x)+v(x) =$$

$\lim_{x\to\alpha} u(x)$ \ $\lim_{x\to\alpha} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	***F.I.***
$-\infty$	$-\infty$	***F.I.***	$-\infty$

Exemple 7.3 – Calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x\to+\infty} x^2+\dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+\end{array}\right\}\text{ Par somme, } \lim_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{x} = +\infty.$$

- $\lim_{x\to0^+} 2x-\dfrac{2}{x}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to0^+} 2x = 0^+ \\ \lim_{x\to0^+} -\dfrac{2}{x} = -\infty\end{array}\right\}\text{ Par somme, } \lim_{x\to0^+} 2x-\frac{2}{x} = -\infty.$$

3 – Limite d'un produit de deux fonctions

Ce tableau récapitule l'ensemble des cas possibles pour la limite d'un produit de deux fonctions u et v selon les limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x\to\alpha} u(x)\times v(x) =$$

$\lim_{x\to\alpha} u(x)$ \ $\lim_{x\to\alpha} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\ell\times\ell'$	0	$\pm\infty$
0	0	0	***F.I.***
$\pm\infty$	$\pm\infty$	***F.I.***	$\pm\infty$

Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat entre $+\infty$ et $-\infty$.

Exemple 7.4 – Calculer les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1)\times\dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} 2x+1 = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}\text{ Par produit, }\quad \lim_{x\to 0^+}(2x+1)\times\frac{1}{x} = +\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} (-2x+1)\sqrt{x}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} -2x+1 = -\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x} = +\infty\end{array}\right\}\text{ Par produit, }\quad \lim_{x\to +\infty}(-2x+1)\sqrt{x} = -\infty.$$

4 – Limite d'un quotient de deux fonctions

Ce tableau récapitule l'ensemble des cas possibles pour la limite d'un quotient de deux fonctions u et v selon les limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{u(x)}{v(x)} =$$

$\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)$	$\ell'\in\mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\ell\in\mathbb{R}^*$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	0
0	0	*F.I.*	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*

Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du quotient qui permet de déterminer le résultat entre $+\infty$ et $-\infty$.

Exemple 7.5 – Calculer les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-1}{x-2}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1 = 3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+\end{array}\right\}\text{ Par quotient, }\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{x-2} = +\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{-x+1}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1\\ \lim\limits_{x\to 1^-} -x+1 = 0^+\end{array}\right\}\text{ Par quotient, }\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{-x+1} = +\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^2+1}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to -\infty} 1 = 1\\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^2+1 = +\infty\end{array}\right\}\text{ Par quotient, }\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2+1} = 0^+.$$

- $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x}{x^2-5x+6}$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 3^-} x = 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} x^2-5x+6 = 0^- \end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x}{x^2-5x+6} = -\infty.$$

5 – Composition de limites

Théorème 7.6 – Composition de limites

Soient f et g deux fonctions et a, b et c des valeurs réelles ou $\pm\infty$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et que} \quad \lim_{X\to b} g(X) = c, \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} g\circ f(x) = c.$$

Exemple 7.7 – Calculer les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}+4}$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+4 = 4 \\ \lim\limits_{X\to 4} \sqrt{X} = 2 \end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+4} = 2.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}+x\right)^2$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}+x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} X^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}+x\right)^2 = +\infty.$$

6 – Limites de fonctions polynômes ou rationnelles en $\pm\infty$

Théorème 7.8

La limite d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

Exemple 7.9 – Calculer les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x+3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-5x^2-3 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Théorème 7.10

La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur.

Exemple 7.11 – Calculer les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$

Méthode 7.12 – Lever une indétermination
Il est tout d'abord important de bien connaître toutes les formes indéterminées pour savoir les identifier :

$$"+\infty-\infty", \qquad "\infty\times 0", \qquad "\frac{0}{0}" \quad \text{et} \quad "\frac{\infty}{\infty}".$$

Lorsque l'on rencontre une forme indéterminée, on peut distinguer deux cas :

- Si on doit calculer la limite d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$, alors il suffit de se référer aux théorèmes précédents.
- Sinon, il faut chercher à réécrire la fonction dont on veut calculer la limite, de manière à ne plus avoir de forme indéterminée.

Exemple 7.13 – Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} 1 = \ 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \text{J'obtiens une forme indéterminée du type "}+\infty-\infty\text{".}$$

Je cherche donc à réécrire l'expression $1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. Je mets tout au même dénominateur :

$$1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x-1}{x^2}.$$

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2+x-1=-1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^+ \end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x-1}{x^2}=-\infty.$$

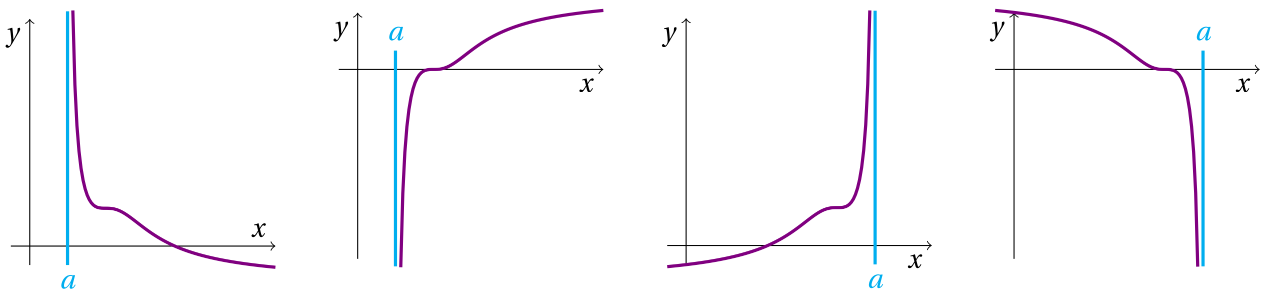
Finalement j'ai montré que

$$\lim_{x\to 0^+} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=-\infty.$$

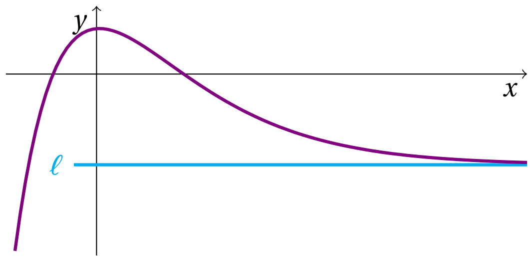
III – Asymptotes et branches infinies

1 – Asymptotes

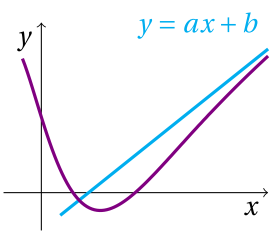
Définition 7.14 – Soit a un réel. Si $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ et/ou que $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$, alors la droite d'équation $x=a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f en a.

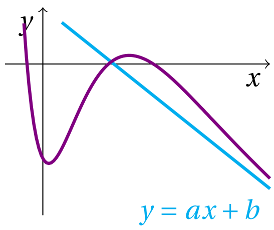


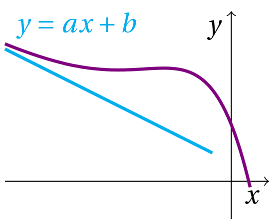
Définition 7.15 – Soit ℓ un réel. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), alors la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

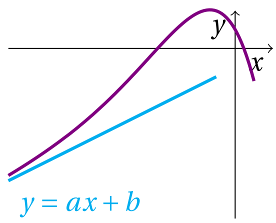


Définition 7.16 – Soient f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$ et $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = ax + b$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$), on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).









Exemple 7.17 – Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{5x-1}{2x+3}$.
Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations de ses éventuelles asymptotes.
Je commence par étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$. D'après le théorème 7.10,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-1}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-1}{2x+3} = \frac{5}{2}.$$

Ainsi la droite d'équation $y = \frac{5}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
J'étudie maintenant les limites en $-\frac{3}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} 5x-1 = -\dfrac{17}{2} \\ \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} 2x+3 = \ 0^- \end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to-\frac{3}{2}^-} \frac{5x-1}{2x+3} = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} 5x-1 = -\dfrac{17}{2} \\ \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} 2x+3 = \ 0^+ \end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{\substack{x\to-\frac{3}{2} \\ x<-\frac{3}{2}}} \frac{5x-1}{2x+3} = -\infty.$$

Ainsi la droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Méthode 7.18 – Montrer qu'une droite est asymptote oblique à une courbe

Pour montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$:

1. On calcule l'écart $f(x) - y$ entre la courbe de la fonction et la droite.
2. On montre que cet écart tend vers 0, *i.e.* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - y = 0$.

Exemple 7.19 – On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+7x+4}{x+3}$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Montrer que la droite d'équation $y = 2x+1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Je commence par calculer l'écart $f(x) - y$.

$$f(x) - y = \frac{2x^2+7x+4}{x+3} - (2x+1) = \frac{2x^2+7x+4}{x+3} - \frac{(2x+1)(x+3)}{x+3} = \frac{2x^2+7x+4}{x+3} - \frac{2x^2+6x+x+3}{x+3}$$
$$= \frac{2x^2+7x+4-2x^2-6x-x-3}{x+3} = \frac{1}{x+3}$$

Puis je calcule la limite de $f(x) - y = \dfrac{1}{x+3}$ lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par quotient, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - y = 0^+.$$

Donc la droite d'équation $y = 2x+1$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Méthode 7.20 – Tracer une courbe à partir du tableau de variation

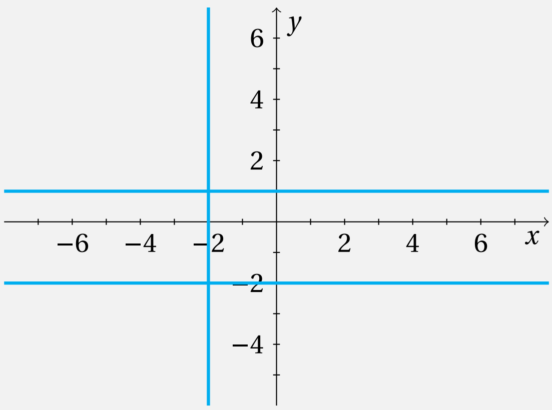
Pour tracer une courbe à partir du tableau de variation :

1. On commence par tracer les asymptotes (verticales, horizontales, obliques).
2. On place les points de la courbe dont on connaît les coordonnées.
3. On trace la courbe en respectant les asymptotes, les variations de la fonction et en passant par les points précédemment placés.

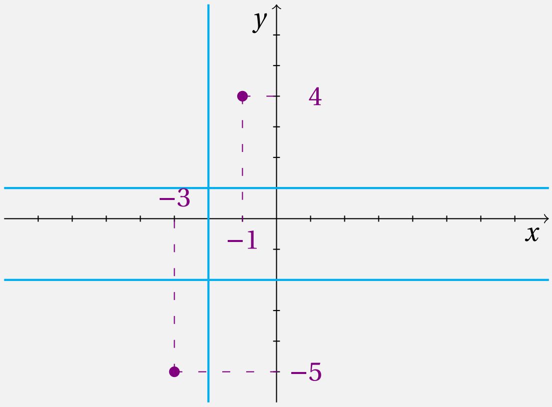
Exemple 7.21 – Tracer la courbe représentative de la fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
f	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

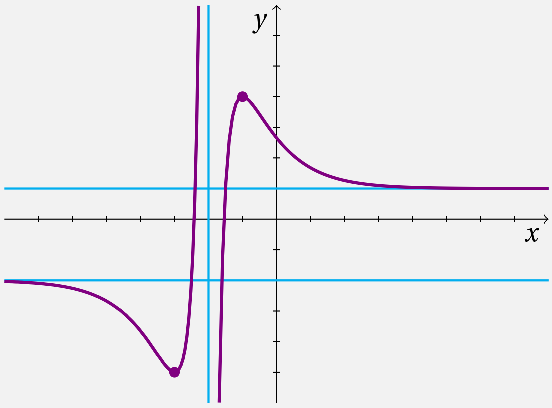
- D'après le tableau de variation, il y a deux asymptotes horizontales : l'une d'équation $y = -2$ en $-\infty$ et l'autre d'équation $y = 1$ en $+\infty$. Par ailleurs, il y a une asymptote verticale d'équation $x = -2$.
  Je commence donc par tracer les droites d'équations $y = -2$, $y = 1$ et $x = -2$.



- Toujours d'après le tableau de variation, la courbe passe par les points de coordonnées $(-3,-5)$ et $(-1,4)$. Je place donc ces points sur le graphique.



- Il ne me reste plus qu'à tracer la courbe, en respectant les asymptotes et les variations, et en passant par les points que je viens de placer.



IV – Continuité

1 – Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Intuitivement, dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou). Mathématiquement, cela se traduit de la manière suivante :

Définition 7.22 – Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I.

- La fonction f est dite **continue** en a lorsque

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

  Sinon f est dite **discontinue** en a.
- f est dite **continue sur l'intervalle** I lorsqu'elle est continue en tout point $a \in I$.

Exemple 7.23 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

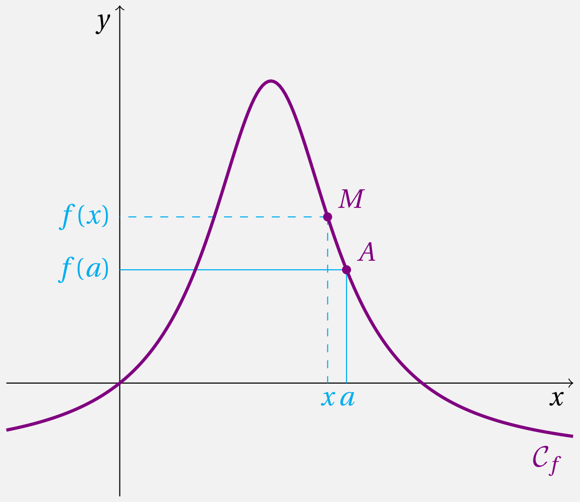
Étudier la continuité de f en 0.

Je calcule les limites

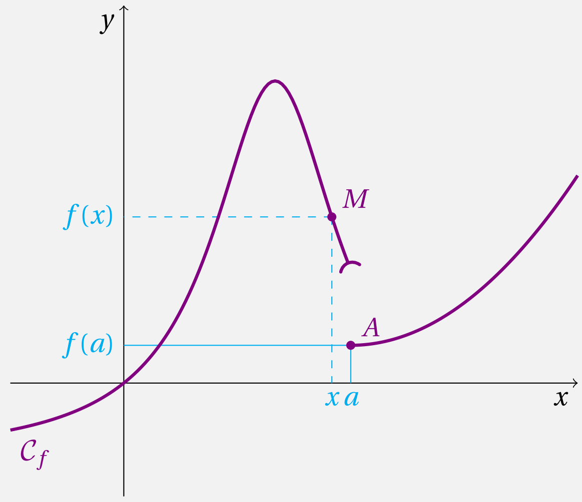
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = -0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$

Ainsi f est bien continue en 0.

Exemple 7.24 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. Pour tout réel x de l'intervalle I, on considère le point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x.



La fonction f est continue.



La fonction f n'est pas continue en a.

Pour tout réel a de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$, pourvu que x soit suffisamment proche de a.

La courbe $\mathcal{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a. Le point M n'est pas proche du point A lorsque x est proche de a.

2 – Opérations sur les fonctions continues

Théorème 7.25

- Si f et g sont deux fonctions continues, alors la somme $f+g$ et le produit fg sont continues. Si de plus, g ne s'annule pas, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est aussi continue.
- Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Théorème 7.26 – Continuité des fonctions de référence

- Une fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- Une fraction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction inverse est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$.