EXERCICES — CHAPITRE 11

Exercice 1 –

1. $\ln(x+4) = 2\ln(x+2) \iff \ln(x+4) = \ln\big((x+2)^2\big) \iff \ln(x+4) = \ln(x^2+4x+4)$
$\iff x+4 = x^2+4x+4 \iff x^2+3x = 0 \iff x(x+3) = 0 \iff x = 0$ ou $x+3 = 0$
$\iff x = 0$ ou $x = -3$
On ne garde que la solution qui est dans l'intervalle $I =]-2,+\infty[$,
$$i.e.\ x = 0.$$

2. $\ln(x+3)+\ln(x+1) = \ln(x+13) \iff \ln\big((x+3)(x+1)\big) = \ln(x+13)$
$\iff \ln(x^2+4x+3) = \ln(x+13) \iff x^2+4x+3 = x+13 \iff x^2+3x-10 = 0$
On calcule alors le discriminant : $\Delta = 9+40 = 49$.
Il y a donc deux racines
$$x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2.$$
On ne garde que la solution qui est dans l'intervalle $I =]-1,+\infty[$,
$$i.e.\ x = 2.$$

3. $\ln(3x-1)-\ln(x) = \ln(2) \iff \ln(3x-1) = \ln(2)+\ln(x) \iff \ln(3x-1) = \ln(2x)$
$\iff 3x-1 = 2x \iff x-1 = 0 \iff x = 1$
De plus, 1 est bien dans l'intervalle $I = \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$, donc l'unique solution de l'équation est
$$x = 1.$$

4. $\ln(x) = 1 \iff \ln(x) = \ln(e) \iff x = e$
De plus, e est bien dans l'intervalle $I =]0,+\infty[$, donc l'unique solution de l'équation est
$$x = e.$$

Exercice 2 –

1. $\ln(x-2) \leqslant 0 \iff \ln(x-2) \leqslant \ln(1) \iff x-2 \leqslant 1 \iff x \leqslant 3$
Il faut donc que $x \leqslant 3$ et que x soit dans l'intervalle $I =]2,+\infty[$, donc
$$\mathcal{S} =]2,3].$$

2. $\ln(3x+1)-\ln(x+1) \geqslant \ln(2) \iff \ln(3x+1) \geqslant \ln(2)+\ln(x+1)$
$\iff \ln(3x+1) \geqslant \ln\big(2(x+1)\big) \iff \ln(3x+1) \geqslant \ln(2x+2) \iff 3x+1 \geqslant 2x+2 \iff x \geqslant 1$
Il faut donc que $x \geqslant 1$ et que x soit dans l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$, donc
$$\mathcal{S} = [1,+\infty[.$$

3. $\ln(x-3) \geqslant 1 \iff \ln(x-3) \geqslant \ln(e) \iff x-3 \geqslant e \iff x \geqslant e+3$
Il faut donc que $x \geqslant e+3$ et que x soit dans l'intervalle $I =]3,+\infty[$, donc
$$\mathcal{S} = [e+3,+\infty[.$$

4. $\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant 0 \iff \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant \ln(1) \iff \frac{2x+1}{x+1} \leqslant 1 \iff 2x+1 \leqslant x+1 \iff x \leqslant 0$
Il faut donc que $x \leqslant 0$ et que x soit dans l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, donc
$$\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{2},0\right].$$

Exercice 3 –

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc par quotient,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0.$$

2. $$\frac{x}{\ln(x^2)} = \frac{x}{2\ln(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{x}{\ln(x)}$$
Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.
Donc par produit,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x^2)} = +\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$.
Donc par composition,
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2-3x+1) = +\infty.$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$.
Donc par composition,
$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0.$$

5. $$x-\ln(x) = x \times \left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)$$
Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit,
$$\lim_{x\to+\infty} x-\ln(x) = +\infty.$$

6.
$$x-\ln(x)=x\times\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=1$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, par produit,
$$\lim_{x\to+\infty} x-\ln(x)=+\infty.$$

Exercice 4 –

1. $\lim\limits_{x\to0^+} x=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$, donc par somme,
$$\lim_{x\to0^+} x-\ln(x)=+\infty.$$

2. $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$, donc par produit,
$$\lim_{x\to0^+}(x^2+1)\ln(x)=-\infty.$$

3.
$$x\ln(x^2)=x\times\big(2\ln(x)\big)=2\times x\ln(x)$$
Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)=0$.
Donc par produit,
$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x^2)=0.$$

4. $\lim\limits_{x\to0^+} x=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+1)=\ln(1)=0$, donc par produit,
$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x+1)=0.$$

5.
$$\frac{1}{x}+\ln(x)=\frac{1}{x}\times\big(1-x\ln(x)\big)$$
Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)=0$, donc $\lim\limits_{x\to0^+}\big(1-x\ln(x)\big)=1$. Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, par produit,
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}+\ln(x)=+\infty.$$

6. $\lim\limits_{x\to0^+} x^2-5x+6=6$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$, donc par produit,
$$\lim_{x\to0^+}(x^2-5x+6)\ln(x)=-\infty.$$

Exercice 5 –

1. $\lim\limits_{x\to0^+} 3x+2=2$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$, donc par somme,
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty.$$
$$3x+2-\ln(x)=x\times\left(3+\frac{2}{x}-\frac{\ln(x)}{x}\right)$$
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=3+0-0=3$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, par produit,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

2. $\lim\limits_{x\to0^+} 2x+\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x=0^+$, donc par quotient,
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty.$$
$$\frac{2x+\ln(x)}{x}=\frac{2x}{x}+\frac{\ln(x)}{x}=2+\frac{\ln(x)}{x}$$
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2=2$, par somme,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2.$$

3. $\lim\limits_{x\to0^+} 2\ln(x)-1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x=0^+$, donc par quotient,
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty.$$
$$\frac{2\ln(x)-1}{x}=\frac{2\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}=2\times\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}$$
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, par somme,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc par somme,
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc par somme,
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Exercice 6 –

1. f est sous la forme d'une somme, donc je dérive terme à terme :
$$f'(x) = 1 + 0 - 2\times\frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{x}.$$
2. f est de la forme $f = u\times v$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$.
On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors
$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$
3. f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$.
On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$. Alors
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$
4. f est sous la forme d'une somme, donc je dérive terme à terme :
$$f'(x) = 2x + 0 + 2\times\frac{1}{x} = 2x + \frac{2}{x} = 2\times\left(x + \frac{1}{x}\right).$$
5. f est de la forme $f = u\times v$, avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$.
On a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors
$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x\times\ln(x) + x^2\times\frac{1}{x} \\ &= 2x\ln(x) + x = x\times\big(2\ln(x)+1\big). \end{aligned}$$
6. f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = x + 3\ln(x)$ et $v(x) = x$.
On a $u'(x) = 1 + \dfrac{3}{x}$ et $v'(x) = 1$. Alors,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)\times x - \big(x + 3\ln(x)\big)\times 1}{x^2} \\ &= \frac{x + 3 - \big(x+3\ln(x)\big)}{x^2} = \frac{3 - 3\ln(x)}{x^2} = 3\times\frac{1-\ln(x)}{x^2}. \end{aligned}$$
7. f est de la forme $f = \ln(u)$, avec $u(x) = x - 4$.
On a $u'(x) = 1$ donc
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x-4}.$$
8. f est de la forme $f = \ln(u)$, avec $u(x) = 1 + x^2$.
On a $u'(x) = 2x$ donc
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{1+x^2}.$$
9. f est de la forme $f = 10\times\dfrac{1}{u}$, avec $u(x) = \ln(4x-2)$.
u est de la forme $u = \ln(v)$, avec $v(x) = 4x - 2$.
On a $v'(x) = 4$ donc
$$u'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{4}{4x-2} = \frac{2\times 2}{2\times(2x-1)} = \frac{2}{2x-1}.$$
Donc
$$f'(x) = 10\times\left(-\frac{u'(x)}{u(x)^2}\right) = -10\times\frac{\frac{2}{2x-1}}{\ln(4x-2)^2} = \frac{-20}{(2x-1)\ln(4x-2)^2}.$$

Exercice 7 –

1.
$$\frac{1}{x} + \ln(x) = \frac{1}{x}\times\big(1 - x\ln(x)\big)$$
Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\big(1 - x\ln(x)\big) = 1$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$, par produit,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \ln(x) = +\infty.$$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x) = +\infty$, donc par somme,
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \ln(x) = +\infty.$$

2. f est sous la forme d'une somme, donc je dérive terme à terme :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} + \frac{x}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

3. Je les obtiens grâce au signe de $f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 9 –

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+$, donc par quotient,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty.$$

Par croissances comparées,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0.$$

(b) Graphiquement, comme f admet une limite infinie en une borne finie, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.
Graphiquement, comme f admet une limite finie en une borne infinie, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe.

2. (a) f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x^2$.

On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$. Alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - \ln(x)\times 2x}{\left(x^2\right)^2}$$
$$= \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x\big(1-2\ln(x)\big)}{x\times x^3} = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$

(b) Je les obtiens grâce au signe de $f'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^3}$. Comme $x > 0$, je sais que $x^3 > 0$. Je m'occupe alors du numérateur :

$$1 - 2\ln(x) \geqslant 0 \iff 1 \geqslant 2\ln(x) \iff 2\ln(x) \leqslant 1 \iff \ln(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Notons $e^{\frac{1}{2}}$ le réel x tel que $\ln(x) = \dfrac{1}{2}$. Je peux désormais remplir le tableau de signe de $f'(x)$, donc le tableau de variation de f.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$1-2\ln(x)$		$+$	0	$-$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

3. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en le point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a)\times(x-a) + f(a)$. Ici $a = 1$, donc l'équation devient

$$y = f'(1)\times(x-1) + f(1).$$

Or

$$f(1) = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{1-2\ln(1)}{1^3} = 1.$$

Donc

$$y = 1\times(x-1) + 0 \iff y = x - 1.$$