

## EXERCICES — CHAPITRE 9

**Exercice 1 (★★)** – Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie explicitement.

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n},$<br>2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^2 + 1}{n},$ | 3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n+3},$<br>4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{3^n}{n}.$ |
|--|---|

**Exercice 2 (★)** – Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},$<br>$u_{n+1} = u_n - u_n^2,$<br><br>2. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},$<br>$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{1 + u_n^2},$ | 3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},$<br>$u_{n+1} = u_n + n^2 + 2n + 1,$<br><br>4. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},$<br>$u_{n+1} = u_n + \sqrt{1 + u_n}.$ |
|---|--|

**Exercice 3 (★★)** –

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -n + 4.$ 
  - a) Établir le tableau de variation de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x + 4.$
  - b) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$
2. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $v_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = f(v_n) = -v_n + 4.$ 
  - a) Calculer les six premiers termes de la suite.
  - b) Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}?$

**Exercice 4 (★★★)** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + 3n + 2.$$

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - n - \frac{1}{3}.$

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2$  et  $v_3.$
2. Démontrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.
3. Exprimer le terme  $v_n$  en fonction de  $n.$
4. Exprimer le terme  $u_n$  en fonction de  $n.$

**Exercice 5 (★)** – On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$u_n = \frac{3n+1}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 3.
2. En déduire que la suite est bornée.

**Exercice 6 (★★)** – En factorisant le numérateur par  $2^n$  et le dénominateur par  $3^n$ , étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_n = \frac{2^n + 1}{3^n + 1}.$$

**Exercice 7 (★★)** – Étudier la convergence et calculer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1.$$

**Exercice 8 (★★)** – On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

1. On pose  $v_n = u_n - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}.$  Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.
2. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}.$
3. Étudier la convergence des suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$

**Exercice 9 (★★)** – On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}.$$

1. Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3.$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n, u_n$  est égal à  $\sqrt{1+n}.$
3. Étudier la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$

**Exercice 10** (★ ★ ★) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 16$  et

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = 0.75 \times u_n.$$

1. a) Quelle est la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?  
 b) Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
 c) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. On note  $S_n$  la somme des  $n + 1$  premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

- a) Calculer  $S_4$ .
- b) Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = 64(1 - 0.75^{n+1})$ .
- c) Vers quel réel tend la somme  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

**Exercice 11** (★ ★ ★) – En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3% de son volume d'eau. On remplit ce bassin avec  $90\text{m}^3$  d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine  $2.4\text{m}^3$  d'eau dans le bassin.

On note  $u_n$  le nombre de  $\text{m}^3$  d'eau contenus dans ce bassin au bout de  $n$  semaines.

On a donc  $u_0 = 90$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 0.97 \times u_n + 2.4$ .

1. On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 80$ .  
 a) Démontrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.  
 b) Exprimer le terme  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 80 + 10 \times 0.97^n$ .
2. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Interpréter ce résultat.

**Exercice 12** (★ ★) – On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > n^2$ .
3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 13** (★ ★ ★ ★) – On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = -2$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 6.
2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
3. Que peut-on dire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
4. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n = u_n - 6$  est géométrique.  
 En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
5. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 14** (★ ★ ★) – On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 0.7$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer par récurrence que  $u_n \in ]0, 1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
3. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 15** (★ ★ ★) – Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (1 - x)^3 + x$ .

On définit la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant  $a_{n+1} = g(a_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0 = 0.4$ .

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 < a_n < 1$ .
2. Démontrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
3. La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.