ESCP 2024

Exercice 1 –

1. a)
   b)
2.
3. a)
   b)
4. a)
   b)
   c)
5. a)
   b)
   c)

Exercice 2 –

1. a) Je calcule l'expression $A^2 - 8A$ pour identifier la constante α. Je commence par le produit matriciel $A^2 = A \times A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+1+2 & 3+3+2 & 3+1+4 \\ 3+3+2 & 1+9+2 & 1+3+4 \\ 6+2+8 & 2+6+8 & 2+2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 8A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & -8 & -8 \\ -8 & -24 & -8 \\ -16 & -16 & -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I.$$

Finalement j'obtiens que $A^2 - 8A = \alpha I$ pour $\alpha = -12$.

b) D'après la question précédente,

$$A^2 - 8A = -12I \quad \Longleftrightarrow \quad A\big(A - 8I\big) = -12I \quad \Longleftrightarrow \quad A \times \left(-\frac{1}{12}\big(A - 8I\big)\right) = I.$$

Ainsi la matrice A est inversible est son inverse est donnée par $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{12}\big(8I - A\big)$.

c) Toujours d'après la question **1.a)**, je peux en déduire un polynôme annulateur de la matrice A. Alors les valeurs propres possibles pour la matrice sont parmi les racines de ce polynôme annulateur.
$A^2 - 8A = -12I \iff A^2 - 8A + 12I = 0$ donc $x^2 - 8x + 12$ est un polynôme annulateur de A. Je calcule son discriminant pour obtenir ses racines : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 64 - 48 = 16 > 0$. Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{8-4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+4}{2} = 6.$$

Ainsi les deux valeurs propres possibles pour A sont 2 et 6.

2. a) Je pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ et je résous l'équation $AX = 6X$ grâce au système équivalent :

$$AX = 6X \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & 2 & = & 6x \\ x & + & 3y & + & 2 & = & 6y \\ 2x & + & 2y & + & 8 & = & 12 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3x & + & y & = & -2 \\ x & - & 3y & = & -2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array} \right.$$

En ajoutant les trois équations, j'obtiens $0 = 0$ ce qui signifie que la première équation est une conséquence des deux suivantes. Je m'intéresse alors à la troisième équation, où tous les coefficients sont pairs :

$$2x + 2y = 4 \iff x + y = 2 \iff x = 2 - y.$$

En injectant cette expression de x dans la deuxième équation, j'obtiens alors

$$2 - y - 3y = -2 \iff 4 = 4y \iff y = 1.$$

J'en déduis alors que $x = 2 - 1 = 1$. Je vérifie alors que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est bien une solution du système équivalent à l'équation $AX = 6X$.

b) Je calcule les deux produits matriciels :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-3 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) D'après la question **2.a)**, comme l'équation $AX = 6X$ admet une solution non nulle, alors 6 est bien une valeur propre de la matrice A.
Dans la question **2.b)**, l'énoncé exhibe deux matrices colonnes qui s'avèrent être deux solutions non nulles de l'équation $AX = 2X$. Donc 2 est aussi valeur propre de la matrice A.
Et d'après la question **1.c)**, il ne peut y en avoir d'autres.

3. a) Je calcule le produit matriciel $P \times Q$:

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+2 & 1-3+2 & 1+1-2 \\ 1-1 & 1+3 & 1-1 \\ 2-2 & 2-2 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$$

Finalement j'obtiens que $PQ = 4I$, *i.e.* $P \times \left(\frac{1}{4}Q\right) = I$. Donc la matrice P est inversible et son inverse est donnée par $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$.

b) Je calcule les produits matriciels $A \times P$ et $P \times D$:

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1+2 & 3-1 & 3-1 \\ 1+3+2 & 1-3 & 1-1 \\ 2+2+8 & 2-2 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Je retrouve le même résultat, donc $AP = PD$. Et comme la matrice P est inversible, j'en déduis que $A = PDP^{-1}$, avec D diagonale et P inversible : la matrice A est donc diagonalisable.

c) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$. Or

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

d) La dernière colonne de A^n est le produit de cette matrice avec la matrice colonne $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Et d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad A^n = PD^nP^{-1}$.

Comme la matrice D est diagonale, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad D^n = \begin{pmatrix}6^n & 0 & 0\\0 & 2^n & 0\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$.

Et la dernière colonne de A est donnée par le produit :

$$\begin{aligned}PD^nP^{-1} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6^n & 0 & 0\\0 & 2^n & 0\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -3 & 1\\2 & 2 & -2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6^n & 0 & 0\\0 & 2^n & 0\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6^n\\2^n\\-2\times 2^n\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}6^n + 2^n - 2\times 2^n\\6^n - 2^n\\2\times 6^n + 2\times 2^n\end{pmatrix} = \frac{2^n}{4}\begin{pmatrix}3^n + 1 - 2\\3^n - 1\\2\times 3^n + 2\end{pmatrix} = 2^{n-2}\begin{pmatrix}3^n - 1\\3^n - 1\\2\times\left(3^n + 1\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Je retrouve bien la dernière colonne de la matrice A^n annoncée par l'énoncé.

4. a) La matrice colonne X_1 contient les trois probabilités initiales c_1, p_1 et d_1. Or l'énoncé affirme que le premier jour, Lucile lit un livre de dinosaures. Ainsi $d_1 = 1$ et $c_1 = p_1 = 0$. Finalement

$$X_1 = \begin{pmatrix}c_1\\p_1\\d_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\{C_n, P_n, D_n\}$ forme un système complet d'événements, alors d'après la formule des probabilités totales, et grâce aux probabilités conditionnelles données dans l'énoncé,

$$\begin{aligned}P\big(C_{n+1}\big) &= P\big(C_n \cap C_{n+1}\big) + P\big(P_n \cap C_{n+1}\big) + P\big(D_n \cap C_{n+1}\big)\\ &= P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(C_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(C_{n+1}),\end{aligned}$$

$$\textit{i.e.} \qquad c_{n+1} = c_n \times \frac{1}{2} + p_n \times \frac{1}{6} + d_n \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \big(3c_n + p_n + d_n\big),$$

$$\begin{aligned}P\big(P_{n+1}\big) &= P\big(C_n \cap P_{n+1}\big) + P\big(P_n \cap P_{n+1}\big) + P\big(D_n \cap P_{n+1}\big)\\ &= P(C_n) \times P_{C_n}(P_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(P_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(P_{n+1}),\end{aligned}$$

$$\textit{i.e.} \qquad p_{n+1} = c_n \times \frac{1}{6} + p_n \times \frac{1}{2} + d_n \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \big(c_n + 3p_n + d_n\big),$$

$$\begin{aligned}et \qquad P\big(D_{n+1}\big) &= P\big(C_n \cap D_{n+1}\big) + P\big(P_n \cap D_{n+1}\big) + P\big(D_n \cap D_{n+1}\big)\\ &= P(C_n) \times P_{C_n}(D_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(D_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}),\end{aligned}$$

$$\textit{i.e.} \qquad d_{n+1} = c_n \times \frac{1}{3} + p_n \times \frac{1}{3} + d_n \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \times \big(2c_n + 2p_n + 4d_n\big).$$

Puis en calculant le produit matriciel AX_n, je retrouve bien les expressions obtenues pour c_{n+1}, p_{n+1} et d_{n+1} :

$$\frac{1}{6}AX_n = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 3c_n + p_n + d_n \\ c_n + 3p_n + d_n \\ 2c_n + 2p_n + 4d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ p_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad X_{n+1} = \dfrac{1}{6}AX_n$.

c) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad X_n = \dfrac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\frac{1}{6^{1-1}}A^{1-1}X_1 = \frac{1}{6^0}A^0X_1 = 1 \times I \times X_1 = X_1.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $\quad X_n = \dfrac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1$. Or

$$X_{n+1} = \frac{1}{6}AX_n = \frac{1}{6}A \times \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1 = \frac{1}{6^n}A^nX_1.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1.$$

d) À la question **3.d)**, j'ai calculé la dernière colonne de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit en réalité du produit A^nX_1. Appliqué en $n-1$, j'obtiens alors que $A^{n-1}X_1 = 2^{n-3}\begin{pmatrix} 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 \\ 2 \times \left(3^{n-1} + 1\right) \end{pmatrix}$.

En me limitant au dernier coefficient, j'obtiens alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_n = \frac{1}{6^{n-1}} \times 2^{n-3} \times 2 \times \left(3^{n-1} + 1\right) = \frac{2^{n-2} \times 3^{n-1}}{6^{n-1}} \times \left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

Enfin comme $\dfrac{1}{3^{n-1}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ et que $\dfrac{1}{3} \in \,]-1,1[$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$ et par opérations sur les limites,

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \frac{1}{2} \times (1+0) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 –

Première version

1. a) S'il y a $n = 2N$ boules dans l'urne, il y en a en particulier un nombre pair et exactement la moitié d'entre elles sont numérotées avec un nombre pair, c'est-à-dire N boules : il s'agit de tous les numéros de la forme $2k$ pour k allant de 1 à N.

   b) Pour X, il s'agit d'un tirage équiprobable dans une urne contenant $n = 2N$ boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. Il s'agit d'une loi uniforme sur l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$.
   Pour Y, le support se limite à $\{0, 1\}$ selon la parité du numéro de la seconde boule. Il s'agit d'une loi de Bernoulli et comme il y a autant de numéros pairs que de numéros impairs, le paramètre est $p = \dfrac{1}{2}$. D'après les formules connues pour les espérances et les variances des lois uniformes et de Bernoulli,
$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{2N+1}{2} = N + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{4N^2-1}{12},$$
$$E(Y) = p = \frac{1}{2} \qquad\qquad \text{et} \quad V(X) = p(1-p) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2. Le programme simule bien une loi uniforme pour X et une loi de Bernoulli pour Y, il me suffit alors de renvoyer la somme de X et de Y :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def jeu_1(N):
    n=2*N
    X=rd.randint(1,n+1)
    Y=rd.randint(0,2)
    return X+Y
```

3. À l'issue du premier tirage, la boule tirée est remise dans l'urne. Ainsi le résultat du premier tirage n'influe pas sur la seconde expérience : les deux variables aléatoires X et Y sont bien indépendantes.

4. Les supports respectifs des variables aléatoires sont donnés par $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $Y(\Omega) = \{0, 1\}$. Toutes les valeurs entre 1 et n peuvent être obtenues à l'issue du premier tirage et l'on y ajoute 0 ou 1 à l'issue du second tirage. Ainsi les valeurs prises par la variable aléatoire $X+Y$ sont tous les entiers compris entre 1 et $n+1$, *i.e.* $\big(X+Y\big)(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

5. a) Comme la valeur de X est nécessairement supérieure à 1, alors $X + Y = 1$ si et seulement si $X = 1$ et $Y = 0$. Puis par indépendance des variables aléatoires X et Y,
$$P(X+Y=1) = P(X=1) \times P(Y=0) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}.$$
   De la même manière, comme la valeur de X est nécessairement inférieure à n, alors $X+Y = n+1$ si et seulement si $X = n$ et $Y = 1$. Puis par indépendance des variables aléatoires X et Y,
$$P(X+Y=n+1) = P(X=n) \times P(Y=1) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}.$$

   b) Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Un système complet d'événements est donné par $\big\{[Y=0], [Y=1]\big\}$ et par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= P\big([Y=0] \cap [X+Y=k]\big) + P\big([Y=1] \cap [X+Y=k]\big) \\ &= P\big([Y=0] \cap [X=k]\big) + P\big([Y=1] \cap [X=k-1]\big) \\ &= P(Y=0) \times P(X=k) + P(Y=1) \times P(X=k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

c) D'après les questions précédentes,

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(X+Y=k) = P(X+Y=1) + \sum_{k=2}^{n} P(X+Y=k) + P(X+Y=N+1)$$
$$= \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = 2\times\frac{1}{2n} + (n-1)\times\frac{1}{n} = n\times\frac{1}{n} = 1.$$

6. a) Par linéarité de l'espérance et d'après la question **1.b)**,

$$E\big(X+Y\big) = E(X) + E(Y) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + 1 = N+1.$$

Il s'agit de la valeur moyenne obtenue au jeu sur un grand nombre de répétitions.

b) Le programme calcule la moyenne des résultats obtenus lors de 1000 répétitions du jeu. On exécute `simulation(4)`, ce qui signifie que $N=4$, donc qu'il y a $2\times 4 = 8$ boules dans l'urne.
D'après la question précédente, pour $N=4$, l'espérance vaut $E(X+Y) = N+1 = 4+1 = 5$. `Python` renvoie `4.939`, qui est bien une valeur proche de 5, calculée grâce à 000 réalisations simulées de l'expérience.

Seconde version

1. a) Cette fois, la boule tirée au premier tirage n'est pas remise dans l'urne. Au départ, il y a dans l'urne N boules avec un numéro pair et N boules avec un numéro impair.
Si X est paire, c'est-à-dire que la boule tirée, et donc retirée de l'urne, est paire, alors il reste dans l'urne $2N-1$ boules dont N sont impaires. Ainsi $P_{[X \text{ paire}]}(Y=1) = \dfrac{N}{2N-1}$.
Si X est impaire, c'est-à-dire que la boule tirée, et donc retirée de l'urne, est impaire, alors il reste dans l'urne $2N-1$ boules dont $N-1$ sont impaires. Ainsi $P_{[X \text{ impaire}]}(Y=1) = \dfrac{N-1}{2N-1}$.

b) Comme $\{[X \text{ paire}], [X \text{ impaire}]\}$ forme un système complet d'événements, alors par la formule des probabilités totales,

$$P(Y=1) = P\big([X \text{ paire}]\cap[Y=1]\big) + P\big([X \text{ impaire}]\cap[Y=1]\big)$$
$$= P(X \text{ paire})\times P_{[X \text{ paire}]}(Y=1) + P(X \text{ impaire})\times P_{[X \text{ impaire}]}(Y=1)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{N}{2N-1} + \frac{1}{2}\times\frac{N-1}{2N-1} = \frac{N+N-1}{2(2N-1)} = \frac{1}{2}.$$

c) Comme dans le premier jeu, le support de Y se limite à $\{0,1\}$. La probabilité du succès $P(Y=1)$ est elle aussi inchangée. Donc Y suit toujours une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.

2. a) D'après la formule des probabilités conditionnelles, comme 1 est impair,

$$P\big([X=1]\cap[Y=1]\big) = P(X=1)\times P_{[X=1]}(Y=1) = \frac{1}{2}\times\frac{N-1}{2N-1} = \frac{N-1}{2(2N-1)}.$$

b) Si les variables aléatoires X et Y étaient indépendantes, alors $P\big([X=1]\cap[Y=1]\big)$ serait égale à $P(X=1)\times P(Y=1)$.
Or
$$P(X=1)\times P(Y=1) = \frac{1}{2N}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4N} \neq \frac{N-1}{2(2N-1)} = P\big([X=1]\cap[Y=1]\big).$$

Donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Pour savoir quelle version du jeu permet d'obtenir le plus de points en moyenne, il me faut comparer les espérances. Dans les deux versions, pour le premier tirage rien ne change. Donc l'espérance est identique. Pour le second tirage, l'expérience change puisque la première boule tirée n'est pas remise. Cependant la réponse obtenue à la question **1.c)** me permet de conclure que la loi de Y ne change pas. Donc l'espérance de Y n'est pas modifiée non plus. Par linéarité, l'espérance de la somme $X+Y$ reste inchangée et donc les deux versions du jeu possèdent le même gain moyen : il n'y a pas de version favorable au joueur.

Exercice 4 –

1. a)
   b)
   c) i.
      ii.
      iii.
2.
3.
4. a)
   b)
   c)
   d)
5. a)
   b)
   c)
   d)
6. a)
   b)
7.
8. a)
   b)