NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 4

Exercice 1 – On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A = B + 3I_2$.

Solution : Je calcule la somme, coefficient par coefficient :

$$B + 3I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

2. Calculer B^2. En déduire B^n pour tout entier $n \geqslant 2$.

Solution : Je calcule le produit matriciel $B^2 = B \times B$:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

J'obtiens la matrice nulle. Alors pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$B^n = B^2 \times B^{n-2} = 0_2 \times B^{n-2} = 0_2.$$

3. En appliquant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$A^n = 3^n I_2 + n3^{n-1} B.$$

Solution : Comme $A = B + 3I_2$ et que les matrices B et $3I_2$ commutent (en effet, un multiple de l'identité commute avec n'importe quelle matrice), alors j'applique la formule du binôme de Newton à la matrice $A = B + 3I_2$.
J'obtiens donc que pour tout $n \geqslant 2$,

$$A^n = \left(B + 3I_2\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \times \left(3I_2\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k.$$

En particulier, d'après la question précédente, je sais que $B^k = 0_2$ pour tout $k \geqslant 2$. Donc tous les termes de la somme pour $k \geqslant 2$ deviennent nuls. Ainsi pour tout $n \geqslant 2$,

$$A^n = \binom{n}{0} \times 3^n \times B^0 + \binom{n}{1} \times 3^{n-1} \times B + 0_3 = 1 \times 3^n \times I_2 + n \times 3^{n-1} \times B.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = 3^n I_2 + n3^{n-1} B$.

4. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 2$.

Solution : Je n'ai plus qu'à remplacer les matrices I_2 et B par leurs expressions pour obtenir A^n :

$$A^n = 3^n I_2 + n3^{n-1}B = 3^n \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5n \times 3^{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 5n \times 3^{n-1} & 3^n \end{pmatrix}.$$