

II – Résolution des systèmes linéaires

1 – Méthode par substitution

Pour les systèmes de deux équations à deux inconnues, on peut résoudre un système en exprimant une inconnue en fonction de l'autre et en remplaçant cette inconnue dans l'autre ligne.

Exemple 15.5 – On considère le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

En utilisant (L_1) , on obtient $x = 1 - y$. Donc, en remplaçant dans (L_2) , cela donne $2(1 - y) - y = 5$, d'où $2 - 2y - y = 5$, i.e., $2 - 3y = 5$. On résout cette équation.

$$2 - 3y = 5 \iff -3y = 5 - 2 \iff -3y = 3 \iff y = \frac{3}{-3} = -1.$$

Et donc, $x = 1 - y = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$.

2 – Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 15.6 – Les opérations suivantes sur les lignes d'un système linéaire (S) sont appelées **opérations élémentaires**.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.
- $L_i \leftarrow aL_i$: remplacement d'une ligne par son produit par un réel non-nul a .
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: remplacement d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.
- $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$: regroupement en une opération des deux opérations précédentes.

Proposition 15.7

Si on transforme un système à l'aide d'une opération élémentaire, on obtient un système équivalent.



ATTENTION ! Il est très important de n'appliquer qu'une opération élémentaire à la fois. Sinon, on peut ne pas obtenir un système équivalent.

Exemple 15.8 –

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - 7y + 11z = 1 \\ -x + 12y - 19z = 2 \\ -3y + 5z = 3 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x - 7y + 11z = 1 \\ 5y - 8z = 3 \\ -3y + 5z = 3 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{aligned}$$

3 – Système triangulaire

Définition 15.9 – Un système triangulaire est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \quad \quad \quad a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad \quad \quad \quad \ddots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Exemple 15.10 – Les systèmes suivants sont des systèmes triangulaires

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ \quad \quad -y = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ \quad -2y + 3z = 3 \\ \quad \quad \quad 2z = 6 \end{cases}$$

La résolution des systèmes triangulaires est très simple. On trouve la dernière inconnue grâce à la dernière équation, puis on trouve les autres inconnues successivement en remontant d'équation en équation.

Exemple 15.11 – Résoudre le système triangulaire (S_2) ci-dessus.

La dernière équation nous permet d'obtenir $z = \frac{6}{2} = 3$.

En remplaçant z dans la deuxième équation, on obtient

$$-2y + 3 \times 3 = 3 \Leftrightarrow -2y + 9 = 3 \Leftrightarrow -2y = -6 \Leftrightarrow y = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Enfin, en remplaçant y et z dans la première équation, on obtient

$$x + 3 - 2 \times 3 = -2 \Leftrightarrow x - 3 = -2 \Leftrightarrow x = -2 + 3 = 1.$$

Ainsi, la solution du système (S_2) est $(1; 3; 3)$.

4 – Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est un procédé algorithmique qui permet de passer d'un système linéaire de n équations à n inconnues quelconque à un système triangulaire équivalent en utilisant uniquement des opérations élémentaires sur les lignes du système.

Exemple 15.12 – On souhaite résoudre le système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \quad \quad -y + 2z = 7 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ \quad x + y - z = -4 \end{cases}$$

Première étape : Il faut que la première ligne contienne la première inconnue (ici x). Si ce n'est pas le cas, on échange la première ligne avec une autre ligne qui contient x (avec, si possible, le coefficient 1 ou -1 pour simplifier les calculs suivants).

Ici, on échange donc les lignes 1 et 3. Le système devient

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ \quad \quad -y + 2z = 7 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

Puis, à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait « disparaître » la première inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, on « nettoie » la première colonne des x .

On commence par supprimer le x dans la deuxième ligne.

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ y + 6z = 9 \\ -y + 2z = 7 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Puis on supprime le x dans la troisième ligne : il n'y a rien à faire ici.

Deuxième étape : Il faut que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici y). Si ce n'est pas le cas, on échange la deuxième ligne avec une autre ligne contenant y (si possible avec le coefficient 1 pour simplifier les calculs suivants), mais **sans utiliser la ligne 1**.

Ici il n'y a rien à faire : la deuxième ligne contient déjà y .

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait « disparaître » la deuxième inconnue dans la troisième ligne. En d'autres termes, on « nettoie » la deuxième colonne des y .

Il suffit ici d'additionner les lignes 2 et 3.

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ y + 6z = 9 \\ 8z = 16 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Troisième étape : On obtient alors un système triangulaire que l'on sait résoudre.

La troisième équation donne $z = \frac{16}{8} = 2$.

En remplaçant z dans la deuxième équation, on a $y + 6 \times 2 = 9$ soit $y + 12 = 9$. Ainsi, $y = 9 - 12 = -3$.

Enfin, en remplaçant y et z dans la première ligne, on obtient : $x - 3 - 2 = -4$ soit $x - 5 = -4$.

D'où $x = -4 + 5 = 1$. Ainsi, l'unique solution du système est

$$\mathcal{S} = \{(1; -3; 2)\}.$$