Exercices — Chapitre 1

Sommes et produits de matrices, transposée

Exercice 1 – On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}$.

Calculer $A+B$, $2A-B$, AB et BA.

Exercice 2 – On considère la matrice $X=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices $X-2I_3$, $-(X-2I_3)$, I_3-2X et $4(I_3-X)$.

Exercice 3 – On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}4&8\\1&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&9\\1&1\end{pmatrix}$.

Calculer et comparer $A^2+2AB+B^2$ et $(A+B)^2$.

Exercice 4 – Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible, et dans ce cas, donner la dimension de la matrice produit. Lorsque c'est impossible, expliquer pourquoi.

1. $\begin{pmatrix}2&5\\3&6\\4&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&5\\4&6\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}-1&4&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-1&6\\2&4&-2\\3&5&3\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\3&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&5\\3&6\\4&1\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}2&5\\4&6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&5\\3&6\\4&7\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}2&5&0\\3&6&3\\4&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\3&5\end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix}1&0&5\\2&-1&6\\3&4&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&7&8\\0&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$

Exercice 5 – Calculer les produits suivants.

1. $\begin{pmatrix}-2&-1\\0&1\\2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}1&5\\2&6\\3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\3&4\end{pmatrix}$

Exercice 6 – On considère la matrice A définie par $A=\begin{pmatrix}x&1\\2&3\end{pmatrix}$ où x est un réel.

Déterminer x pour que $A^2=\begin{pmatrix}6&1\\2&11\end{pmatrix}$.

Exercice 7 – Soit A la matrice $A=\begin{pmatrix}3&7&5\\1&-1&4\\2&1&8\end{pmatrix}$.

Soient E_1, E_2 et E_3 les matrices définies par

$$E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad E_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

1. Calculer AE_1, AE_2 et AE_3.
2. Calculer ${}^tE_1A$, ${}^tE_2A$ et ${}^tE_3A$.

Exercice 8 – Soit A la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&-2&1\end{pmatrix}$.

Calculer $A\,{}^tA$ puis ${}^tAA$.

Systèmes linéaires

Exercice 9 –

1. On considère 3 réels x, y et z et les matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&3&-2\\-4&5&-1\\-2&0&3\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad U=\begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix}.$$

À quel système d'équations l'égalité matricielle $AX=U$ est-elle équivalente ?

2. On considère le système (S) suivant.

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcr}2x&-&y&+&3z&=&-1\\-5x&+&y&&&=&3\\x&+&y&-&z&=&4\end{array}\right.$$

À quelle égalité matricielle le système (S) est-il équivalent ?

3. On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&1\\0&3&5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-7&5&-1\\15&-10&2\\-9&6&-1\end{pmatrix}$.

   (a) Calculer AB.

(b) Montrer que, pour toutes matrices U et V de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on a l'équivalence

$$AU = V \Longleftrightarrow U = BV$$

(***Indication :*** *Raisonner par double implication.*)

(c) Résoudre le système (T) suivant.

$$(T) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ & & 3y & + & 5z & = & 3 \end{array} \right.$$

Exercice 10 – Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

1. $AX = B$ avec $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $AX = B$ avec $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. $AX = 3X$ avec $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Puissance d'une matrice carrée

Exercice 11 – Dans chacun des cas suivants, calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 12 – On considère les matrices $\quad A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad B = A - 2I_3$.

1. Calculer B et B^2.
2. Rappeler la formule du binôme de Newton.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} B.$$

Problèmes

Exercice 13 – On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & 4u_n & - & v_n \\ v_{n+1} & = & u_n & + & 2v_n \end{array} \right.$$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que A s'écrit sous la forme $A = 3I_2 + J$, où J est une matrice à déterminer.
3. Vérifier que $J^2 = 0$, puis à l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire l'expression de A^n pour tout n dans $\mathbf{N}$.
4. Montrer que, pour tout n dans $\mathbf{N}$,
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$
5. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 14 – Partie I : Calcul matriciel

On considère les trois matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QMQ.$$

1. Calculer $Q \times Q$.
2. Calculer D. (On vérifiera que D est une matrice diagonale.)
   Justifier que $M = QDQ$.
3. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad M^n = QD^nQ$.
4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

Partie II : Étude d'une expérience

On dispose de deux pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir Pile en lançant l'une des deux pièces vaut $\frac{1}{2}$.
On effectue des lancers selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les deux pièces,
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.
On considère, pour tout entier naturel n non nul, les évènements

- A_n : « Obtenir 0 fois Pile à l'étape n »,
- B_n : « Obtenir 1 fois Pile à l'étape n »,
- C_n : « Obtenir 2 fois Pile à l'étape n »,

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Soit n un entier naturel non nul. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1})$.
   (*Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.*)
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n \end{cases}$$

4. (a) Vérifier que

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$

   où la matrice M est celle définie dans la partie **I**.

   (b) Démontrer par récurrence que

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) En déduire que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathrm{P}(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}, \qquad \mathrm{P}(B_n) = \frac{2}{2^n} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(C_n) = \frac{1}{4^n}.$$

   (b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.