

# 8 | Dérivabilité et étude de fonctions

## I – Dérivée en un point

### 1 – Nombre dérivé

**Définition 8.1** – Soient  $f$  une fonction définie sur intervalle  $I$  et  $a \in I$  un réel. La fonction  $f$  est dite **dérivable en  $a$**  si le taux d'accroissement  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  admet une limite **finie** lorsque  $x$  tend vers  $a$ . Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$  et est notée  $f'(a)$  :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

#### Exemple 8.2 –

- Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  est dérivable en 1.
- Plus généralement, montrer que la fonction  $f$  est dérivable en tout  $a \in \mathbb{R}$ .
- Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est dérivable en tout  $a \in \mathbb{R}^*$ .

#### Remarque 8.3 –

- En posant  $h = x - a$  et sous réserve d'existence, on peut également écrire que

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- En pratique, on utilise la définition seulement pour montrer la dérivabilité aux "*points à problèmes*". En dehors de ces points, on justifie la dérivabilité à l'aide des propriétés de la Section II.

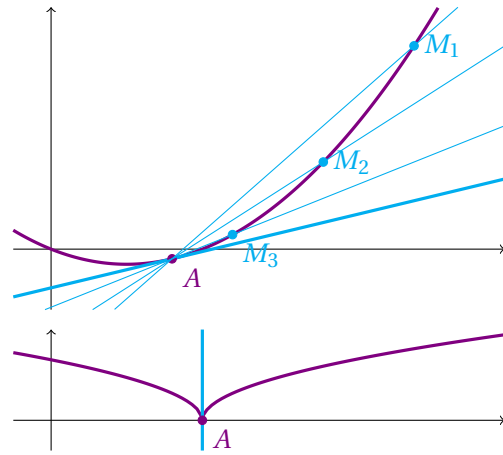
### 2 – Interprétation géométrique

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . On note  $A$  le point de coordonnées  $(a, f(a))$  et  $M$  le point de coordonnées  $(x, f(x))$  pour  $x \in I$ .

Alors le taux d'accroissement  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  correspond au coefficient directeur de la droite  $(AM)$ .

- Si  $f$  est dérivable en  $a$ , ce coefficient directeur tend vers  $f'(a)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ . Par ailleurs, la droite  $(AM)$  tend vers une position limite qui est la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $A$ . Le nombre dérivé  $f'(a)$  est alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $A$ .
- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, alors la courbe représentative de  $f$  possède en  $A$  une tangente verticale d'équation  $x = a$ .

On résume cela dans la proposition suivante :



#### Proposition 8.4

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

- Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  au point d'abscisse  $a$ . L'équation de cette tangente est donnée par

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

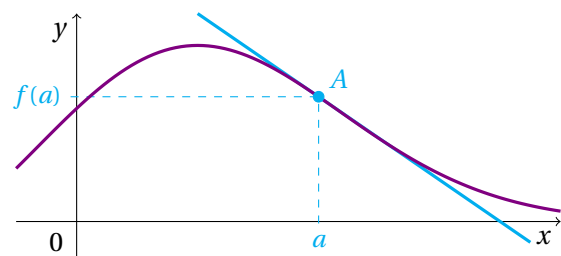
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ , alors  $f$  n'est pas dérivable en  $a$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $a$ .

#### Exemple 8.5 –

- Puisque la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  est dérivable en  $a = 1$ , de dérivée  $f'(1) = 2$ , alors la courbe représentative de  $f$  admet au point  $A$  de coordonnées  $(1, 1)$  une tangente d'équation
- Au contraire, la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{|x|}$  n'est pas dérivable en  $0$  et la courbe représentative de  $f$  admet une tangente verticale au point de coordonnées  $(0, 0)$ .

### 3 – Approximation affine

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , dérivable en  $a$ ,  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative et  $A$  le point de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $a$ . Au voisinage de  $a$ , la tangente en  $A$  ressemble beaucoup à la courbe  $\mathcal{C}_f$ . On dit que la tangente est une **approximation affine** de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage du point d'abscisse  $a$ .



#### Théorème 8.6

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . On suppose que  $f$  est dérivable en  $a$ . Alors pour  $h$  proche de  $0$ , une valeur approchée de  $f(a + h)$  est donnée par

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a).$$

**Exemple 8.7** – Calculer une valeur approchée de  $\sqrt{1.02}$ .

### Corollaire 8.8

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  
 $f$  est continue en  $a$ .

**Remarque 8.9** – La réciproque n'est pas vraie : une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

## II – Fonction dérivée

**Définition 8.10** – Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est **dérivable sur  $I$** , si  $f$  est dérivable en tout point  $x \in I$ . Alors la fonction

$$f' : \begin{array}{lcl} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \quad \text{avec} \quad \forall a \in I, \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est appelée la **fonction dérivée** de la fonction  $f$ .

### Exemple 8.11 –

- La fonction carrée est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction inverse est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .
- La fonction  $\sqrt{\cdot}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

### 1 – Dérivée des fonctions usuelles

Le tableau suivant indique les dérivées des fonctions usuelles.

( $k \in \mathbb{R}$  est une constante et  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier positif non nul)

| $f$ est <b>définie</b> sur | $f(x)$          | $f'(x)$               | $f$ est <b>dérivable</b> sur |
|----------------------------|-----------------|-----------------------|------------------------------|
| $\mathbb{R}$               | $k$             | 0                     | $\mathbb{R}$                 |
| $\mathbb{R}$               | $x$             | 1                     | $\mathbb{R}$                 |
| $\mathbb{R}$               | $x^n$           | $nx^{n-1}$            | $\mathbb{R}$                 |
| $\mathbb{R}^*$             | $\frac{1}{x}$   | $-\frac{1}{x^2}$      | $\mathbb{R}^*$               |
| $\mathbb{R}^*$             | $\frac{1}{x^n}$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$  | $\mathbb{R}^*$               |
| $]0, +\infty[$             | $\sqrt{x}$      | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0, +\infty[$               |

**Remarque 8.12** – Seule la fonction racine carrée n'est pas dérivable sur son ensemble de définition : en effet, elle est définie en 0 mais n'y est pas dérivable.

## 2 – Opérations sur les fonctions dérivables

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ .

| Opération                            | Dérivée   |
|--------------------------------------|---|
| Somme                                | $(u + v)' = u' + v'$                                |
| Multiplication par une constante $k$ | $(ku)' = k \times u'$                               |
| Produit                              | $(uv)' = u'v + uv'$                                 |
| Quotient                             | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| Composition                          | $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$             |

**Remarque 8.13** – La formule de dérivation de la composition de deux fonctions permet de déterminer de nombreuses autres formules de dérivation.

| Fonction           | Dérivée                                       |
|--------------------|---|
| $u^n$ pour $n > 0$ | $(u^n)' = nu'u^{n-1}$                         |
| $\sqrt{u}$         | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$          |
| $\frac{1}{u}$      | $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ |

### Proposition 8.14

- Une fonction polynomiale est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- Une fraction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.



### Méthode 8.15 – Calculer la dérivée d'une fonction

Pour calculer la dérivée d'une fonction  $f$  :

1. On commence par repérer sous quelle forme est donnée la fonction  $f$ .  
Est-ce une somme de fonctions usuelles  $u + v$ ? Un produit  $u \times v$ ? Un quotient  $\frac{u}{v}$ ?
2. On identifie les différentes fonctions  $u$  et  $v$  puis on calcule les dérivées  $u'$  et  $v'$ .
3. On applique la formule adéquate pour obtenir la dérivée  $f'$ .

**Exemple 8.16** – Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

- $f(x) = 2x^2 - x + 5$
- $g(x) = (x + 3)\sqrt{x}$

- $h(x) = \frac{2x-5}{x^2+3}$

- $i(x) = \frac{1}{2x^2+3}$

- $j(x) = \sqrt{x^2+1}$

**Remarque 8.17** – Il est très important de prendre l’habitude de toujours **simplifier** au maximum les calculs de dérivées. Cela facilite ensuite l’étude de son signe. Il faut notamment penser à **factoriser au maximum** et à **regrouper les différents termes** (fractions à mettre au même dénominateur).

### 3 – Dérivées successives

**Exemple 8.18** – Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ .

La fonction  $f$  est dérivable et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

La fonction  $f'$  est dérivable et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

La fonction  $f''$  est dérivable et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

**Définition 8.19** – Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- On dit que  $f$  est **deux fois dérivable** si  $f$  et  $f'$  sont dérivables. Dans ce cas, on note  $f''$  ou  $f^{(2)}$  la dérivée de  $f'$ .
- Plus généralement, on dit que  $f$  est  **$n$  fois dérivable** ( $n \geq 1$ ) si pour tout entier  $1 \leq p \leq n-1$ ,  $f^{(p)}$  est dérivable. On note alors  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ .



**ATTENTION !** La notation  $f^{(p)}$  n’a rien à voir avec la notion de puissance!

**Exemple 8.20** – Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

## III – Application à l'étude des variations d'une fonction

### 1 – Monotonie et signe de la dérivée

#### Théorème 8.21

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ . Alors

$$f \text{ est constante sur } I \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$



**ATTENTION !** Le résultat est faux si  $I$  n'est pas un intervalle. Ainsi la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = -1$  si  $x < 0$  et  $f(x) = 1$  si  $x > 0$ , vérifie  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  mais  $f$  n'est pas constante.

#### Théorème 8.22

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .

- La fonction  $f$  est croissante (resp. décroissante) sur  $I$  si et seulement si  $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$  (resp.  $f'(x) \leq 0$ ).
- La fonction  $f$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est strictement positive (resp. strictement négative) sur  $I$  **sauf éventuellement en un nombre fini de points** où  $f'$  peut s'annuler.

**Exemple 8.23** – Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$ .



#### Méthode 8.24 – Étudier les variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction :

1. On justifie que la fonction est bien dérivable.
2. On calcule la dérivée de la fonction.
3. On étudie le signe de la dérivée.
4. On en déduit les variations de la fonction.

**Exemple 8.25** – Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$ .

**Remarque 8.26** – On prend par ailleurs l'habitude de compléter les tableaux de variation par les limites de  $f$  aux bornes de l'intervalle et par les valeurs de  $f(x)$  en les abscisses où  $f$  change de variation.

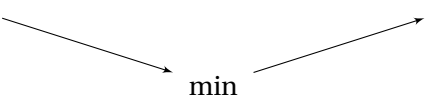
## 2 – Extrema locaux

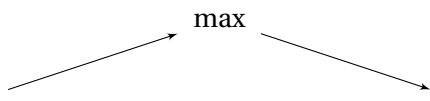
On rappelle qu'un **extremum** est un *maximum* ou un *minimum*.

### Théorème 8.27

Soient  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a$  un réel appartenant à  $I$ .

- Si  $f$  admet un extremum local en  $a$ , alors  $f'(a) = 0$ .
- Si la dérivée  $f'$  s'annule en  $a$  **en changeant de signe**, alors  $f$  admet un extremum local en  $a$ .

|         |   |     |           |
|---------|---|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$   | $a$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$   | $0$ | $+$       |
| $f$     |  |     |           |

|         |  |     |           |
|---------|--|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$  | $a$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$  | $0$ | $-$       |
| $f$     |  |     |           |

**Exemple 8.28** – Donner les extrema de la fonction précédente  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 3 – Représentation graphique

Grâce à la méthode du chapitre précédent, qui permet de tracer l'allure d'une courbe à partir du tableau de variation de la fonction, l'étude de la fonction  $f$  permet donc de connaître l'allure de la courbe. Parfois, le tracé d'une tangente en un point peut aider à obtenir un tracé plus précis.



#### Méthode 8.29 – Calculer l'équation de la tangente en un point

Pour calculer l'équation de la tangente en un point  $A$ , d'abscisse  $a$  :

1. Si ce n'est pas déjà fait, on calcule l'expression de la dérivée  $f'(x)$ .
2. On calcule ensuite les images  $f(a)$  et  $f'(a)$ .
3. On utilise la formule de la Proposition 8.4 :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

**Exemple 8.30** – On considère à nouveau la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$ . Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse 0.

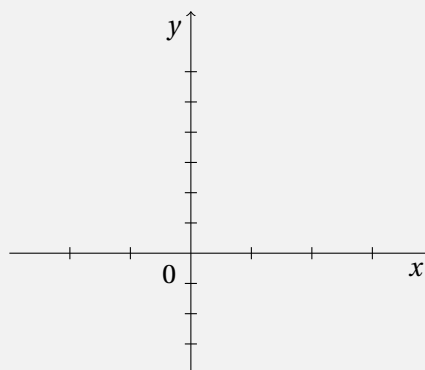
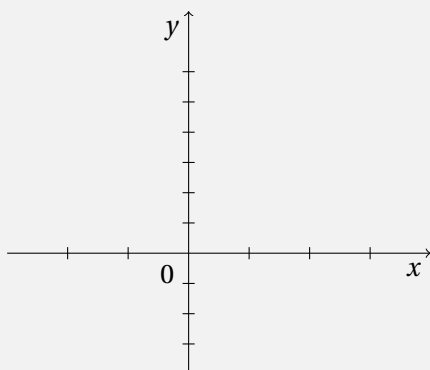


#### Méthode 8.31 – Tracer une droite lorsque l'on en connaît l'équation

Pour tracer une droite à partir de son équation  $y = ax + b$ , il suffit de déterminer les coordonnées de deux points appartenant à cette droite. Pour cela, on remplace successivement  $x$  dans l'équation par deux valeurs  $x_1$  et  $x_2$  puis on calcule les ordonnées correspondantes  $y_1$  et  $y_2$ . On obtient ainsi les coordonnées de deux points  $A(x_1, y_1)$  et  $B(x_2, y_2)$  appartenant à la droite. On place alors ces deux points dans un repère et on trace la droite passant par ces deux points.

**Exemple 8.32** – Tracer dans un repère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 2x + 1$ .

- Je place les deux points  $A(-2, -3)$  et  $B(3, 7)$ .
- Je trace la droite passant par les deux points.





#### 4 – Exemple : étude d'une fonction

**Exemple 8.33** – Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 - \frac{4x-3}{x^2+1}$ .

1. Calculer  $f'(x)$ .

2. Étudier les variations de la fonction  $f$ .

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .

