NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 30

Exercice 1 – Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{4-3x}{e^x}$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Solution : Pour la limite en $-\infty$, j'utilise les résultats classiques :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} 4-3x = \lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \quad 0 \end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{4-3x}{e^x} = +\infty.$$

Pour la limite en $+\infty$, je dois réécrire la fonction sous une forme plus adaptée aux croissances comparées :

$$f(x) = \frac{4-3x}{e^x} = \frac{4}{e^x} - 3 \times \frac{x}{e^x}.$$

Puis par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ alors par somme,

puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{e^x} = 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{e^x} - 3 \times \frac{x}{e^x} = 0.$$

2. a) Montrer que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (3x-7) \times e^{-x}$.

Solution : La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 4-3x$ et $v(x) = e^x$.
Puisque $u'(x) = -3$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{-3 \times e^x - (4-3x) \times e^x}{\left(e^x\right)^2} \\ &= \frac{\left(-3-4+3x\right) \times e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{3x-7}{e^x} = \left(3x-7\right) \times e^{-x}. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (3x-7) \times e^{-x}$.

b) Étudier les variations de la fonction f.

Solution : J'étudie le signe de la dérivée de f.
Je sais que l'exponentielle est toujours positive et

$$3x-7 \geqslant 0 \iff 3x \geqslant 7 \iff x = \frac{7}{3}.$$

J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$3x-7$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-3}{e^{\frac{7}{3}}}$	$\nearrow$	0

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Solution : L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation devient

$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0).$$

Or

$$f(0) = \frac{4-3\times 0}{e^0} = 4 \quad \text{et} \quad f'(0) = (3\times 0 - 7)e^{-0} = -7.$$

Finalement l'équation de la tangente est donnée par

$$y = -7\times(x-0)+4, \qquad i.e. \quad y = -7x+4.$$

4. Tracer l'allure de la courbe de f ainsi que la tangente déterminée à la question précédente.

Solution :