4 Suites réelles

I – Notion de suite réelle

Intuitivement, une suite réelle est une liste infinie de nombres réels. Par exemple, la suite des puissances de 2 : "$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$". On peut noter une telle liste de nombres "$u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$" (lire "$u$ indice n"). u_0 désigne alors le premier terme de la suite (dans notre exemple, $u_0 = 1$), u_1 le deuxième terme (ici $u_1 = 2$) et ainsi de suite. u_n désigne donc le $(n+1)$-ième terme de la suite.

Définition 4.1 –

- Une **suite réelle** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$,

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}.$$

  On note cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou encore plus simplement (u_n).
- Le réel u_n est appelé le **terme général** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 4.2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - 1$.

- Le premier terme est
- Le deuxième terme est
- Le troisième terme est
- Le n-ième terme est

Remarque 4.3 –

- À la notation habituelle des fonctions $u(n)$, on préfère donc la notation indicée u_n.
- Il est possible que la suite ne commence pas au rang 0 ou que les termes u_n ne soient définis que pour $n \geqslant 1$ ou de manière générale pour $n \geqslant n_0$, où n_0 est un entier quelconque.
  Dans ce cas, on note $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ou $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Définition 4.4 – Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être définie de deux façons différentes :

- **explicitement**, lorsque l'expression de son terme général u_n est donnée par une formule qui ne dépend **que** de n, auquel cas on peut calculer directement n'importe quel terme de cette suite,
- **par une relation de récurrence**, lorsque l'on donne le premier terme de la suite et une formule (la *relation de récurrence*) qui permet de calculer un terme en fonction du précédent :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 4.5 –

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. Calculer u_7.
- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -2v_n + 3$. Calculer v_4.

Remarque 4.6 – Quand une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence, le calcul d'un terme nécessite *a priori* le calcul successif de **tous** les termes précédents. Par exemple, pour calculer u_{100}, il est nécessaire de calculer les 100 termes précédents. Cela peut se révéler très fastidieux en pratique et on essaie donc, lorsque c'est possible, de déterminer une formule explicite donnant **directement** le terme u_n en fonction de n.

II – Suite arithmétique

1 – Définition

Définition 4.7 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r appelé **raison** tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \quad \cdots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Exemple 4.8 – Déterminer si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont arithmétiques.

- Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. On dépose chaque année 10 euros.
  Soit u_n le montant sur le compte à l'année n.

- Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. On dépense chaque année 7 euros.
  Soit u_n le montant sur le compte à l'année n.

Remarque 4.9 – Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, il suffit de montrer que la différence entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est une constante qui ne dépend pas de n (il s'agit de la raison r).

Exemple 4.10 – Déterminer si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont arithmétiques.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2n + 1$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n^2 + 1$.

2 – Expression explicite

Proposition 4.11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr.$$

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rr, bend right, "+2r"'] \arrow[rrr, bend right, "+3r"'] \arrow[rrrrr, bend right, "+nr"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 & \cdots & u_n
\end{tikzcd}$$

Remarque 4.12 – Pour des suites dont l'indice débute à $n = 1$, l'expression devient

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = u_1 + (n-1)r,$$

et plus généralement,

$$\forall p \geqslant 0, \quad \forall n \geqslant p, \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$

Exemple 4.13 –

- Dans le premier cas de l'exemple 4.8, calculer le montant sur le compte au bout de 10 ans.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -7$. Calculer u_5 et u_{100}.

III – Suite géométrique

1 – Définition

Définition 4.14 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** s'il existe un réel q aussi appelé **raison** tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n.$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Exemple 4.15 – Déterminer si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont géométriques.

- Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. Il rapporte chaque année 3% d'intérêts.
  Soit u_n le montant sur le compte à l'année n.

- Les réserves de pétrole en Alberta diminuent chaque année de 10% et les réserves initiales étaient de 10^{11}L. Soit u_n le nombre de litres lors de l'année n.

Remarque 4.16 – Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, il suffit de montrer que le quotient entre deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (sous réserve que $u_n \neq 0$) est une constante qui ne dépend pas de n (il s'agit de la raison q).

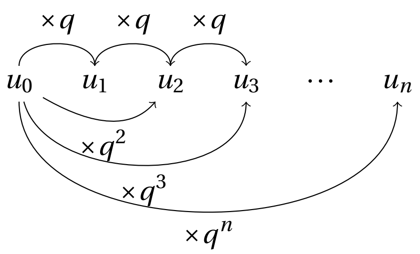
Exemple 4.17 – La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour $n \geqslant 0$ est-elle géométrique ?

2 – Expression explicite

Proposition 4.18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$



Remarque 4.19 – Pour des suites dont l'indice débute à $n = 1$, l'expression devient

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = u_1 \times q^{n-1},$$

et plus généralement,

$$\forall p \geqslant 0, \quad \forall n \geqslant p, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Exemple 4.20 –

- Dans le premier cas de l'exemple 4.15, calculer le montant sur le compte au bout de 10 ans.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 1024$. Calculer u_{10}.

IV – Suite arithmético-géométrique

1 – Définition

Définition 4.21 – Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque 4.22 –

- Si $a = 1$, alors on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b.$$
Autrement dit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, alors on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n.$$
Autrement dit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.

Exemple 4.23 – On veut placer 100 euros sur un compte rémunéré à 5%. Chaque année, la banque réclame 3 euros de frais. On note u_n le montant sur le compte au bout de n années.

2 – Expression explicite

Méthode 4.24 – Trouver la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de la forme $\quad u_{n+1} = au_n + b$.
Pour exprimer u_n en fonction de n, on procède selon les étapes suivantes :

1. On cherche le point fixe, c'est-à-dire l'unique réel α tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. On introduit une suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $v_n = u_n - \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.
3. On exprime pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le terme v_n en fonction de n puis on en déduit le terme u_n en fonction de n.

Exemple 4.25 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V – Symbole sommatoire et calculs de sommes

1 – Symbole sommatoire Σ

Le symbole Σ permet d'écrire des sommes de manière compacte.

Définition 4.26 – Soient n un entier et $u_1, u_2, \dots, u_n$ des réels.
La somme des n réels $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ se note $\sum_{i=1}^{n} u_i$. Autrement dit,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Exemple 4.27 – Calculer les sommes suivantes.

- $\sum_{k=1}^{7} k$
- $\sum_{k=1}^{6} k^2$
- $\sum_{j=0}^{5} 2j+1$
- $\sum_{p=1}^{n} 1$

Remarque 4.28 –

- L'avantage de cette notation est de supprimer les points de suspension. Certes, il faut un peu de temps pour maîtriser cette nouvelle notation, mais une fois maîtrisée, elle s'avère bien plus pratique et plus rigoureuse que la notation avec les points de suspension.
- Comme on peut le voir sur les exemples ci-dessus, une somme peut commencer à 0, à 1, mais aussi à n'importe quel entier naturel.
- Le choix de la lettre qui apparaît en indice n'importe pas. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{p=1}^{100} p^2 = \sum_{a=1}^{100} a^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2.$$

Proposition 4.29 – Linéarité de la somme

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques et λ un réel. Alors

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k)=\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}v_k\right)\quad\text{et}\quad\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k)=\lambda\times\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right).$$

Démonstration.

□

2 – Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème 4.30 – Somme des n premiers entiers naturels

Pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Corollaire 4.31 – Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\sum_{k=0}^{n}u_k=(n+1)\times u_0+r\times\frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration.

□

Exemple 4.32 –

- Calculer $\sum\limits_{k=1}^{100}k$.

- Calculer $S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 58 + 61 + 64$.

3 – Somme des termes d'une suite géométrique

Théorème 4.33 – Somme des n premières puissances d'un entier

Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Corollaire 4.34 – Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration.

□

Exemple 4.35 –

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

- Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 1024 + 2048$.