8 | Variables aléatoires continues

I – Rappels sur la fonction de répartition

Définition 8.1 – Soit X une variable aléatoire. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F_X définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

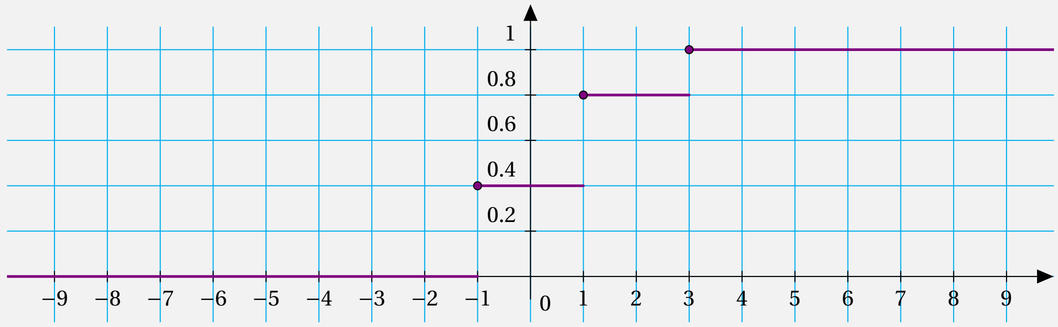
Proposition 8.2

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots$. Alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1, \\ P(X = x_1) + \ldots + P(X = x_k) & \text{si} \quad x_k \leqslant x < x_{k+1}, \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant \max\limits_{i \in \mathbf{N}} x_i. \end{cases}$$

En particulier, F_X est constante sur $[x_k, x_{k+1}[$.

Exemple 8.3 – Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1 on gagne 4€, si on a un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$.



II – Généralités

1 – Notion de variable aléatoire à densité

Définition 8.4 – Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si et seulement s'il existe une fonction f vérifiant les quatre conditions suivantes.

- Pour tout x de $\mathbf{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
- f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels.
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
- Pour tout x de $\mathbf{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Lorsque les conditions précédentes sont vérifiées, f est appelée **densité de** X.

Définition 8.5 – Une fonction f est une **densité de probabilité** (ou plus simplement **densité**) si et seulement si

1. pour tout x de $\mathbf{R}$, $f(x) \geqslant 0$,
2. f est continue par morceaux avec un nombre fini de points de discontinuité,
3. l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exemple 8.6 – On considère la fonction f suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \end{array}.$$

Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

Théorème 8.7

Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X et de densité f, alors, en chaque réel x où f est continue, on a $f(x) = F_X'(x)$.

Théorème 8.8

Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X, alors toute fonction f à valeurs positives qui vérifie $f(x) = F_X'(x)$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points) est une densité de X.

Exemple 8.9 – Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$

On admet que X est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de X.

Remarque 8.10 – Il n'y a pas unicité d'une densité pour une variable à densité donnée. En effet, si f est une densité de X, alors toute fonction g positive, égale à f, sauf en un nombre fini de points, est également une densité de X.

2 – Calculs de probabilités avec des variables aléatoires à densité

Proposition 8.11

Soit X une variable aléatoire à densité, F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X.
Soient a et b deux réels avec $a < b$. On rappelle que $P(X \leqslant a) = F_X(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors

- $P(X < a) = P(X \leqslant a) = F_X(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,\mathrm{d}t$,
- $P(X = a) = 0$,
- $P(X \geqslant a) = P(X > a) = 1 - F_X(a) = \displaystyle\int_{a}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$,
- $P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a) = \displaystyle\int_{a}^{b} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 8.12 –

1. Soit X une variable aléatoire, de fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2, \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si} \quad x \geqslant 2. \end{cases}$$

On admet que X est une variable aléatoire à densité. Calculer $P(X \geqslant 0)$, $P(-1 \leqslant X < 3)$, $P(X < 4)$.

2. Soit X une variable aléatoire à densité, de densité

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0, \\ e^{-t} & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

Calculer $P(X \leqslant 2)$, $P(2 < X \leqslant 3)$ et $P(X \geqslant 1)$.

3 – Espérance d'une variable à densité

Définition 8.13 – Sous réserve de convergence de l'intégrale écrite, l'espérance de X est le réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 8.14 – Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0, \\ e^{-t} & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Proposition 8.15

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance et soient a et b deux réels. Si $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ admet une espérance et

$$E(aX+b) = aE(X) + b.$$

4 – Variance d'une variable aléatoire à densité

Définition 8.16 – Une variable aléatoire X de densité f admet **un moment d'ordre 2** lorsque X^2 admet une espérance. Dans ce cas, on appelle **moment d'ordre 2** de X, le réel

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 8.17 – Si une variable aléatoire X de densité f admet un moment d'ordre 2, alors on appelle **variance** de X, et on note $V(X)$, le réel défini par

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 8.18 – Si X est une variable aléatoire à densité admettant une variance, on appelle **écart-type** de X, le réel positif, noté σ_X, défini par

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Théorème 8.19 – Formule de König-Huygens

Si X est une variable aléatoire à densité possédant une variance, alors on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Méthode 8.20 – Montrer qu'une variable à densité possède une variance et la calculer.

- Si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.
- Si X admet une espérance, il faut regarder si $E(X^2)$ existe.
  - Si non, alors X n'admet pas de variance.
  - Si oui, alors on la calcule en utilisant la formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple 8.21 – Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ e^{-t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$

X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Proposition 8.22

Si X est une variable aléatoire possédant une variance, alors quels que soient les réels a et b, $aX+b$ admet une variance et on a

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

Exemple 8.23 – On reprend la variable aléatoire X de l'exemple précédent, et on note $Y = 3-2X$. Y admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

III – Lois usuelles à densité

1 – Loi uniforme sur un intervalle

Dans ce paragraphe, a et b sont des nombres réels avec $a < b$.

La loi uniforme sur $[a,b]$ est la loi du tirage au hasard d'un nombre dans cet intervalle : la variable X a autant de chance de tomber n'importe où dans l'intervalle $[a,b]$.

Définition 8.24 – On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[a,b]$ lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a,b], \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [a,b]. \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$.

Remarque 8.25 – La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ est bien une densité de probabilité sur l'intervalle $[a,b]$ puisque

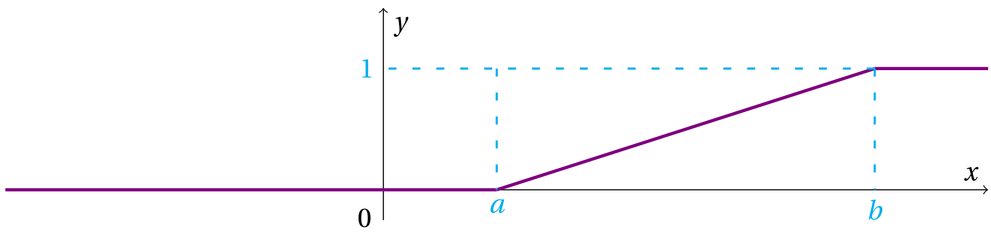
- f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{a,b\}$ et positive,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1.$

Proposition 8.26

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$, alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b], \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$$

Donnons la représentation graphique de F_X :



Proposition 8.27

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemple 8.28 – Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après-vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0.5, 9.5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3. Quel est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

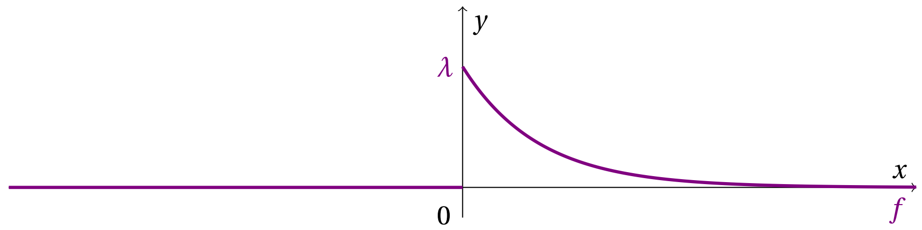
2 – Loi exponentielle

Dans ce paragraphe, λ désigne un nombre réel strictement positif.

Définition 8.29 – On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

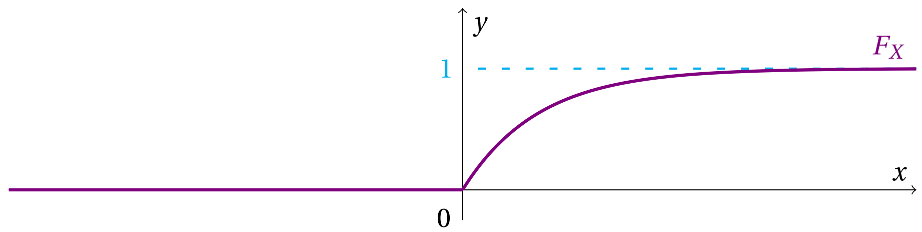


Proposition 8.30

Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Donnons la représentation graphique de F_X :



Proposition 8.31

Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Remarque 8.32 – Les lois exponentielles sont utilisées pour modéliser des "durées de vie".

3 – Loi normale

Dans ce paragraphe, m désigne un nombre réel et σ un réel strictement positif.

Définition 8.33 – On dit que X suit la **loi normale** de paramètres m et σ^2 lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$.

Proposition 8.34

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

4 – Loi normale centrée réduite

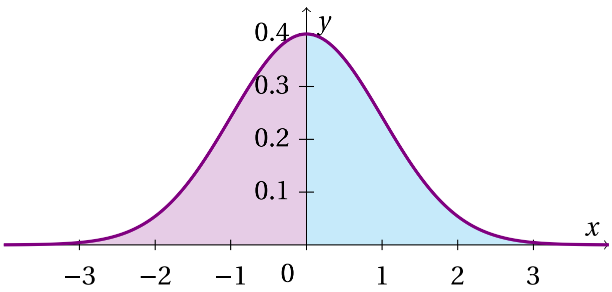
Définition 8.35 – On dit que X suit la **loi normale centrée réduite** lordque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les probabilités $P(X \leqslant 0)$ et $P(X \geqslant 0)$ sont égales.
Comme $P(X \leqslant 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}.$$



Définition 8.36 – La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est la fonction, notée Φ, définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

Théorème 8.37

On a déjà vu que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. Plus généralement, pour tout réel x, on a

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Remarque 8.38 – On ne sait pas expliciter Φ à l'aide des fonctions usuelles.

Proposition 8.39

Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = 0 \quad \text{et} \quad V(X) = 1.$$

Théorème 8.40

Soit X une variable aléatoire. Alors

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(m,\sigma^2) \iff \frac{X-m}{\sigma} \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0,1).$$