NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 27

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(2x^2-5x+3\right)\mathrm{d}x$

Solution :

$$\int_0^1 \left(2x^2-5x+3\right)\mathrm{d}x = \left[2\times\frac{x^3}{3}-5\times\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{5}{2}+3-0 = \frac{4}{6}-\frac{15}{6}+\frac{18}{6}=\frac{7}{6}$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}\mathrm{d}x$

Solution : Je cherche une primitive de $f(x)=\dfrac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}$.

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=1+x^4$. Puisque $u'(x)=4x^3$ alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2}=\frac{4x^3}{\left(1+x^4\right)^2}=4f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x)=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{u(x)}\right)=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+x^4}=-\frac{1}{4+4x^4}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{4+4x^4}\right]_0^1=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\mathrm{d}t$

Solution : Je cherche une primitive de $f(t)=\dfrac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}$.

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t)=t^4+1$. Puisque $u'(x)=4t^3$ alors

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}=\frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}=f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t)=2\sqrt{u(t)}=2\sqrt{t^4+1}.$$

Ainsi

$$\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\mathrm{d}t=\left[2\sqrt{t^4+1}\right]_{-1}^1=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0$$

4. $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x - 2\right) \mathrm{d}x$

Solution :

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x - 2\right) \mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^4 = \left(2\sqrt{4} + \frac{16}{2} - 8\right) - \left(2 + \frac{1}{2} - 2\right) = 4 + 8 - 8 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

5. $\displaystyle\int_{-1}^0 x\left(5x^2+1\right)^2 \mathrm{d}x$

Solution : Je cherche une primitive de $f(x) = x\left(5x^2+1\right)^2$.
f semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = 5x^2+1$. Puisque $u'(x) = 10x$ alors

$$u'(x)u(x)^2 = 10x\left(5x^2+1\right)^2 = 10f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{10} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{\left(5x^2+1\right)^3}{30}.$$

Ainsi

$$\int_{-1}^0 x\left(5x^2+1\right)^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{\left(5x^2+1\right)^3}{30}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{30} - \frac{216}{30} = -\frac{215}{30} = -\frac{43}{6}$$

Exercice 2 – Simplifier au maximum les nombres suivants.

1. $\ln(8) - 3\ln(2) + \ln(9)$

Solution :

$$\ln(8) - 3\ln(2) + \ln(9) = \ln\left(2^3\right) - 3\ln(2) + \ln\left(3^2\right) = 3\ln(2) - 3\ln(2) + 2\ln(3) = 2\ln(3)$$

2. $\dfrac{4\ln(9) + 5\ln(27)}{\ln(3)}$

Solution :

$$\frac{4\ln(9) + 5\ln(27)}{\ln(3)} = \frac{4 \times 2\ln(3) + 5 \times 3\ln(3)}{\ln(3)} = \frac{\left(8+15\right)\ln(3)}{\ln(3)} = 23$$

3. $\ln(8) - 3\ln(16)$

Solution :

$$\ln(8) - 3\ln(16) = 3\ln(2) - 3 \times 4\ln(2) = \left(3 - 12\right)\ln(2) = -9\ln(2)$$