

DEVOIR MAISON 3

Exercice 1 – Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

- L'élève A ne connaît que 60% de son cours, c'est-à-dire que pour chaque question, la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\frac{60}{100}$.
- Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.
- Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements

- R : "l'élève A connaît la réponse à la première question",
- J : "l'élève A répond juste (*'juste' comme 'correct', pas 'uniquement'*) à la première question".

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(J) = \frac{11}{15}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de X . On donnera les valeurs prises par X et, pour chacune de ces valeurs k , la valeur de $P(X = k)$.
3. Donner $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance de X .
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse.

Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.

- a) Justifier l'égalité $N = 3X - 40$.
- b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
 - a) Déterminer la loi de Y .
 - b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
 - c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B, quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note?

Exercice 2 –**Partie A**

1. Justifier que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, d'inconnue réelle x , n'admet aucune solution.

On considère alors la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f .
On remarquera en particulier que f est croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$.
4. a) Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
b) Montrer que pour tout réel x de $[-1, +\infty[$, on a $f(x) \leq x$.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.
5. Tracer l'allure de \mathcal{C}_f et \mathcal{T} dans un repère orthonormé.
On soignera en particulier la position de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{T} .

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1 + u_n + u_n^2}.$$

1. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et préciser sa limite.
4. Recopier et compléter le script du programme Python suivant, pour qu'il affiche le plus petit entier naturel non nul n tel que $u_n \leq 1/1000$.

```
def f(x):  
    return x/(1+x+x**2)  
u=.....  
n=.....  
while u..... :  
    u=.....  
    n=.....  
print(.....)
```

Partie C

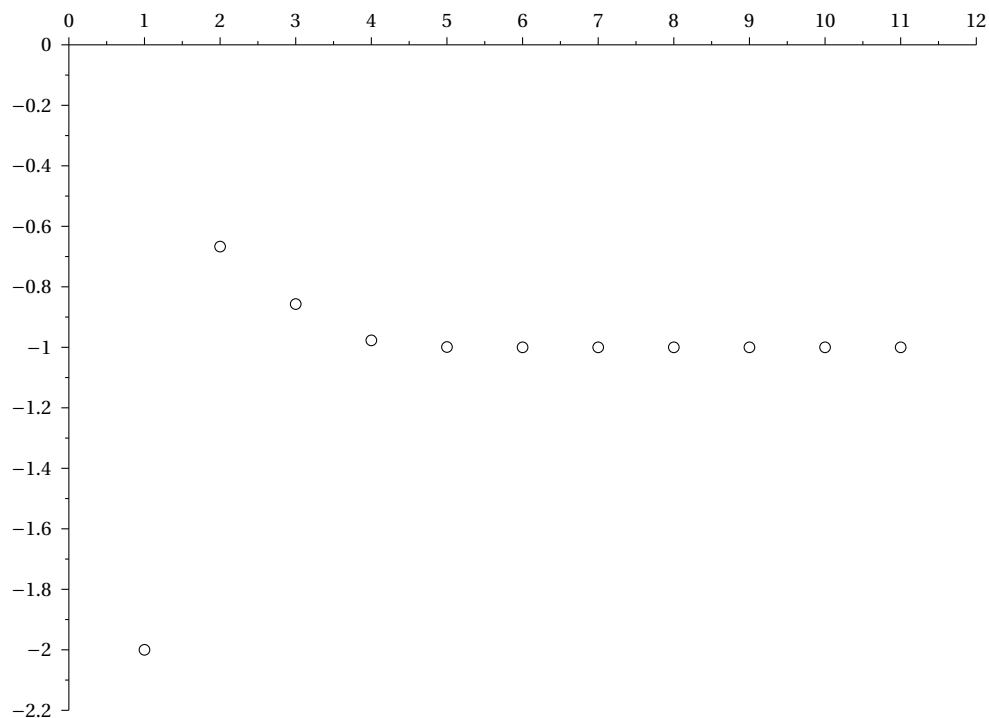
On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1 + v_n + v_n^2}.$$

1. En utilisant la question 3. de la Partie A, démontrer par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad -1 \leq v_n \leq 0.$$

2. En utilisant la question 4. de la Partie A, montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
 3. En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 4. À l'aide de Python, on trace les premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient la figure ci-dessous. Conjecturer alors la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.



5. a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$, d'inconnue réelle x .
 b) Montrer par l'absurde que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \neq -1.$$