12 | Fonction logarithme néperien

I – Définition et premières propriétés

Définition 12.1 – La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

Proposition 12.2

- La fonction ln est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
- $\ln(1) = 0$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 12.3

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

On peut tirer plusieurs conséquences de cette propriété fondamentale de la fonction ln.

Proposition 12.4

- Pour tout nombre réel strictement positif a, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$,
- Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$,
- Pour tout nombre réel strictement positif a, et pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$,
- Pour tout nombre réel strictement positif a, $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration.

- On a $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a)$. Par ailleurs, $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln(1) = 0$.
  Ainsi, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = 0$ et donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- On raisonne de la même manière pour les trois autres points.

□

Exemple 12.5 – Soient x et $y > 0$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\ln(2x) - \ln(x)$
   $= \ln(2) + \ln(x) - \ln(x) = \ln(2)$
2. $\ln(x^2) - \ln(x)$
   $= 2\ln(x) - \ln(x) = \ln(x)$
3. $\ln(x) - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   $= \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$
4. $2\ln(x^3) + \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$
   $= 6\ln(x) - 3\ln(x) = 3\ln(x)$
5. $\ln(1) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
   $= 0 - \ln(x) - 2\ln(x) = -3\ln(x)$
6. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$
   $= \ln(x) - \ln(y) + \ln(y) - \ln(x) = 0$

II – Étude de la fonction logarithme népérien

1 – Domaine de définition

Proposition 12.6

Le domaine de définition de la fonction logarithme est $D =]0; +\infty[$.

Ainsi, dans le cas d'une fonction de la forme $f = \ln(u)$, le domaine de définition est donné par les solutions de l'inéquation $u(x) > 0$.

Exemple 12.7 – Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2-3x+2)$.
On résout l'inéquation $x^2 - 3x + 2 > 0$. On a $\Delta = 9 - 8 = 1$, il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc $D_f =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$.

2 – Variations

Proposition 12.8

La fonction logarithme népérien est **continue** et **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

Démonstration. La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc continue sur cet intervalle.
La dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. Or si $x > 0$, alors $\dfrac{1}{x} > 0$.
La dérivée de la fonction ln est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. □

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes.

Proposition 12.9

Pour tous réels a et b strictement positifs,

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$
- $\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$

Exemple 12.10 – Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes.

1. $\ln(x+2) = 2\ln(x)$ sur $I =]0;+\infty[$.
   On a $\ln(x+2) = 2\ln(x) \iff \ln(x+2) = \ln(x^2) \iff x+2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0$.
   On calcule alors le discriminant $\Delta = 1+8 = 9$. Il y a donc deux racines
   $$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$
   On ne garde que la solution qui est dans l'intervalle $I =]0;+\infty[$, *i.e.*, $x = 2$.
2. $\ln(2x-3) + \ln(3) = 2\ln(x)$ sur $I = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.
   On a $\ln(2x-3)+\ln(3) = 2\ln(x) \iff \ln((2x-3)\times 3) = \ln(x^2) \iff \ln(6x-9) = \ln(x^2) \iff 6x-9 = x^2 \iff x^2 - 6x + 9 = 0$. On calcule alors le discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$. Donc une seule racine,
   $$x_0 = -\frac{(-6)}{2\times 1} = 3.$$
   De plus, 3 est bien dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ donc l'unique solution de l'équation est $x = 3$.
3. $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12)$ sur $I = \left]\frac{4}{3};+\infty\right[$.
   On a $\ln(x)+\ln(x+2) = \ln(9x-12) \iff \ln(x(x+2)) = \ln(9x-12) \iff \ln(x^2+2x) = \ln(9x-12) \iff x^2 + 2x = 9x - 12 \iff x^2 - 7x + 12 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 49 - 48 = 1$.
   Il y a donc deux racines
   $$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4.$$
   Ces deux racines sont dans l'intervalle $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ donc l'équation considérée admet deux solutions $x = 3$ et $x = 4$.
4. $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2)$ sur $I = \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.
   On a $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2) \iff \ln(3x-1) = \ln(2) + \ln(x) \iff \ln(3x-1) = \ln(2x) \iff 3x - 1 = 2x \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$. Or, 1 est bien dans l'intervalle $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ donc l'équation considérée admet $x = 1$ comme unique solution.

Exemple 12.11 – Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes.

1. $\ln(2x) < \ln(x+7)$ sur $I =]0;+\infty[$.
   On a $\ln(2x) < \ln(x+7) \iff 2x < x+7 \iff x < 7$. Il faut donc que $x < 7$ et que x soit dans l'intervalle $]0;+\infty[$ donc
   $$\mathscr{S} =]0;7[.$$
2. $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geq \ln(2)$ sur $I = \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.
   On a $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geq \ln(2) \iff \ln(3x+1) \geq \ln(2) + \ln(x+1) \iff \ln(3x+1) \geq \ln(2(x+1)) \iff \ln(3x+1) \geq \ln(2x+2) \iff 3x+1 \geq 2x+2 \iff x \geq 1$. Il faut donc que $x \geq 1$ et que x soit dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ donc
   $$\mathscr{S} = [1;+\infty[.$$

En particulier, puisque $\ln(1) = 0$,

Proposition 12.12

Pour tout réel x strictement positif,

- $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$
- $\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$
- $\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$

3 – Limites

Proposition 12.13

La fonction ln a pour limite $+\infty$ en $+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Proposition 12.14

La fonction ln a pour limite $-\infty$ en 0,

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe d'équation $y = \ln x$.

Exemple 12.15 – Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right), \qquad \lim_{x\to 3^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right).$$

- On a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2,$$
et $\lim_{X\to 2} \ln(X) = \ln(2)$. Donc par composition,
$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = \ln(2).$$

- On a
$$\lim_{x\to 3^+} 2x-1 = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 3^+} x-3 = 0^+,$$
donc par quotient,
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = +\infty.$$
Et $\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$, donc par composition
$$\lim_{x\to 3^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = +\infty.$$

- On a

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} 2x-1 = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} x-3 = -\frac{5}{2},$$

donc par quotient,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2x-1}{x-3} = 0^+.$$

Et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$, donc par composition,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = -\infty.$$

4 – Nombre e

D'après les résultats des paragraphes précédents, on a le tableau de variation suivant.

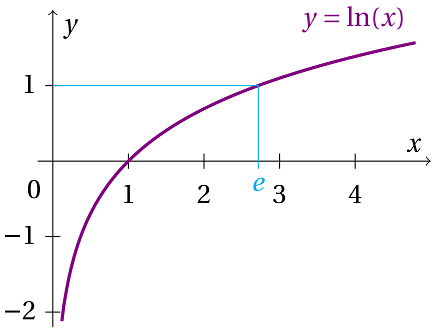
x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc l'allure de la courbe de la fonction logarithme.

Nous observons graphiquement qu'il existe un point unique de la courbe ayant pour ordonnée 1. Son abscisse est voisine de $2,7$.

Au delà de cette observation graphique, l'existence d'un unique antécédent de 1 repose sur la variation de la fonction ln qui est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et qui prend chaque valeur réelle une fois et une seule quand x varie dans $]0;+\infty[$.

Il existe donc un seul réel x tel que $\ln(x) = 1$.



Définition 12.16 – e est le nombre réel défini par l'équation $\ln(e) = 1$.

Remarque 12.17 – On a $e \simeq 2,718$.

5 – Croissance comparée

Étudions désormais quelques limites remarquables, qui font intervenir la fonction logarithme. On étudie ce que l'on appelle des résultats de *croissance comparée*.

Proposition 12.18

Pour tout entier naturel non-nul n, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$$

En particulier, lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Remarque 12.19 – Ces limites sont des **formes indéterminées**. Pour lever de telles formes indéterminées, on applique les résultats de croissance comparée. On retient que les puissances « l'emportent » sur la fonction logarithme.

Exemple 12.20 –

$$\lim_{x\to 0^+} x^3\ln(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^2 - \ln(x) = +\infty$$

III – Étude d'une fonction de la forme $\ln(u)$

Proposition 12.21

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I. La fonction composée $f = \ln\circ u$, définie par

$$\forall x\in I,\quad f(x) = \ln(u(x))$$

est dérivable sur I et on a

$$\forall x\in I,\quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple 12.22 – Soit la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2-3x+2)$. Calculer $f'(x)$.
Posons $u(x) = x^2-3x+2$. On a $u'(x) = 2x-3$. Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}.$$

Exemple 12.23 – Étude de fonction
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2-5x+6)$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   Résolvons l'inéquation $x^2-5x+6>0$. On a $\Delta = 25-24 = 1$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

   On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Et donc

$$D_f =]-\infty;2[\cup]3;+\infty[.$$

2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   On a

$$\lim_{x\to-\infty} x^2-5x+6 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty,$$

   donc par composition,

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2-5x+6) = +\infty.$$

On a
$$\lim_{x\to 2^-} x^2-5x+6 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty,$$
donc par composition,
$$\lim_{x\to 2^-} \ln(x^2-5x+6) = -\infty.$$
On a
$$\lim_{x\to 3^+} x^2-5x+6 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty,$$
donc par composition,
$$\lim_{x\to 3^+} \ln(x^2-5x+6) = -\infty.$$
On a
$$\lim_{x\to +\infty} x^2-5x+6 = \lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty,$$
donc par composition,
$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x^2-5x+6) = +\infty.$$

3. Étudier les variations de la fonction f.
Posons $u(x) = x^2-5x+6$. Alors $u'(x) = 2x-5$. Donc
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}.$$
Étudions maintenant le signe de $2x-5$. On a $2x-5 \geq 0 \iff 2x \geq 5 \iff x \geq \frac{5}{2}$. Grâce au tableau de signe de x^2-5x+6 établi à la question 1, on en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ et ainsi le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5x+6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$						$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$				$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f.