Exercices — Chapitre 3

Exercice 1 (⋆⋆) – Déterminer la nature des séries suivantes et préciser leur somme en cas de convergence.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 2^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 0.01$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{3}{2}\right)^n$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{3^n}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{3^n}+\frac{3}{4^n}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{5^n}$
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{-1}{3^n}$
12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{4^{n+2}}$
13. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{3}{4^n}$
14. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$
15. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{7^{n+1}}$

Exercice 2 (⋆⋆⋆) –

1. Le but de cette question est de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ converge et de déterminer sa somme.
   a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = 1-\frac{1}{n+1}.$$
   c) Conclure.
2. À l'aide d'un raisonnement similaire à celui effectué dans la question **1.**, démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa somme.

   <u>Indication</u> : Commencer par vérifier qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall n\in\mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1}+\frac{b}{n+2}.$$
3. À l'aide d'un raisonnement similaire à celui effectué dans la question **2.**, démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa somme.

   <u>Indication</u> : Commencer par vérifier qu'il existe trois réels a, b et c tels que $\forall n\in\mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2}.$$

Exercice 3 (⋆⋆⋆) –

1. a) Montrer que pour tout $k\geqslant 2$, $\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln(k-1)-\ln(k)$.
   b) En déduire que pour tout $n\geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\ln(n)$ puis donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.
2. a) Montrer que pour tout $k\geqslant 2$, $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \dfrac{1}{\ln(k)}-\dfrac{1}{\ln(k+1)}$.
   b) En déduire que pour tout $n\geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(n+1)}$ puis donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$.
3. a) Montrer que pour tout $k\geqslant 2$, $\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1)-\ln(k)+\ln(k+1)-\ln(k)$.
   b) En déduire que pour tout $n\geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(2)$ puis donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 4 (⋆⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie pour tout $n\geqslant 2$ par
$$u_n = \frac{n}{n^2-1}.$$

1. Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge. *(<u>Rappel</u> : la série harmonique* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge.)*

Exercice 5 **(⋆ ⋆ ⋆) –** Pour tout $n \geqslant 3$, on pose $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k \ln(k)}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$,
$$0 \leqslant \frac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \frac{5}{4^n}.$$
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$,
$$0 \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k \ln(k)} \leqslant \frac{5}{48}\left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right).$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geqslant 3}$ est majorée.
4. Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n \geqslant 3}$.
5. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ converge et que
$$0 \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{5}{4^k \ln(k)} \leqslant \frac{5}{48}.$$

Exercice 6 **(⋆ ⋆ ⋆) –** Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Vérifier que pour tout $k \geqslant 2$,
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est majorée.
4. Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$.
5. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que
$$\frac{3}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant 2.$$

Exercice 7 **(⋆ ⋆ ⋆) –** On considère la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note S_n sa somme partielle d'indice n.

1. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$
Indication : Multiplier par l'expression conjuguée $\sqrt{k+1} + \sqrt{k}$.
2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n+1} - 1 \leqslant S_n.$$
3. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?

Exercice 8 **(⋆ ⋆ ⋆) –** Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{4k^3}{3k^4 - 1}$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $\quad \frac{4k^3}{3k^4 - 1} \geqslant \frac{4}{3k}$.
2. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{4n^3}{3n^4 - 1}$ est divergente.