

EXERCICES — CHAPITRE 6

Exercice 1 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n + 4.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Exercice 2 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5 - 4u_n.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Exercice 3 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Exercice 4 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

Exercice 5 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 3$.

Exercice 6 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$.

Exercice 7 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 8 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2.$$

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Exercice 9 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
3. En déduire que, pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

Exercice 10 – Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Exercice 11 – Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 12 – Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 13 – Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 14 –

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2.$$