Concours Blanc 4 — ESCP

Exercice 1 –

1. a) Je calcule J^2 puis J^3 :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2J.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$J^3 = 2J.$$

b) Je sais que $J^3 = 2J$ donc $J^3 - 2J = 0_3$, matrice nulle d'ordre 3. Ainsi le polynôme $X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice J. Les valeurs propres possibles pour J sont donc parmi les racines de ce polynôme. Or

$$X^3 - 2X = 0 \iff X\left(X^2 - 2\right) = 0 \iff X\left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right) = 0.$$

Il s'agit d'une équation produit nul, donc l'un des facteurs au moins doit être nul, *i.e.*

$$\begin{aligned} & X = 0 \quad \text{ou} \quad X - \sqrt{2} = 0 \quad \text{ou} \quad X + \sqrt{2} = 0 \\ \iff & X = 0 \quad \text{ou} \quad X = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad X = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres possibles pour J sont donc $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

c) Je calcule les produits entre J et les colonnes de P :

$$J \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul, solution de $JX = -\sqrt{2}X$,

alors il s'agit d'un vecteur propre de J, associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.
De même

$$J \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul, solution de $JX = 0X$,

alors il s'agit d'un vecteur propre de J, associé à la valeur propre 0.
Et

$$J \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul, solution de $JX = \sqrt{2}X$,

alors il s'agit d'un vecteur propre de J, associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.
Finalement les trois colonnes de P sont bien des vecteurs propres de J.

d) Je calcule JP et PD_1 :

$$JP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1+1 & -1+1 & 1+1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et

$$PD_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $JP = PD_1$.
Pour montrer que J est diagonalisable, comme la matrice D est diagonale, il ne reste plus qu'à montrer que la matrice P est inversible.
Je raisonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2} L_1} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \sqrt{2} L_2} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice obtenue est triangulaire supérieure, avec tous ses pivots non nuls donc elle est inversible. Alors j'en déduis que la matrice P est inversible.
Dès lors, en multipliant à droite par P^{-1} l'équation $JP = PD_1$, j'obtiens que $J = PD_1P^{-1}$, donc que J est diagonalisable.

e) D'après la question précédente, je sais que $J = PD_1P^{-1}$ et $JP = PD_1$. Alors

$$J^2P = J \times JP = PD_1P^{-1} \times PD_1 = PD_1ID_1 = PD_1D_1 = PD_1^2.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$J^2P = PD_1^2.$$

2. a) Je calcule $J^2 - I$ pour retrouver K. J'ai déjà calculé J^2 précédemment. Ainsi

$$J^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K.$$

J'ai bien montré que

$$K = J^2 - I.$$

b) Je calcule $aI + bJ + cK$ pour a, b et c trois réels et je cherche à retrouver A :

$$aI + bJ + cK = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Pour retrouver $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, il me suffit de choisir $a = c = 1$ et $b = 2$.
Pour ces valeurs, alors j'obtiens bien que

$$A = aI + bJ + cK, \qquad \textit{i.e.} \quad A = I + 2J + K.$$

c) J'ai montré aux deux questions précédentes que $A = I + 2J + K$ et que $K = J^2 - I$.
Alors en combinant ces deux équations, j'obtiens

$$A = I + 2J + J^2 - I = 2J + J^2.$$

En outre, je sais déjà que $JP = PD_1$ et que $J^2P = PD_1^2$. Alors

$$AP = \left(2J + J^2\right)P = 2JP + J^2P = 2PD_1 + PD_1^2 = P\left(2D_1 + D_1^2\right).$$

Comme la matrice D_1 est diagonale, alors la matrice D_1^2 est aussi diagonale
et finalement la matrice $D_2 = 2D_1 + D_1^2$ est encore diagonale. En particulier,

$$D_2 = 2D_1 + D_1^2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(-\sqrt{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\sqrt{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai montré que

$$AP = PD_2 \qquad \text{pour } D_2 = \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. a) Voici le script complété.

```
import numpy as np
def puissanceA(n):
    A=np.array([[1,2,1],[2,2,2],[1,2,1]])
    B=np.eye(3)
    for k in range(n):
        B=np.dot(A,B)
    return B
```

b) Je remarque que dans A^2 et A^3, le coefficient central est égal au double du coefficient présent dans chaque coin de la matrice : $12 = 6 \times 2$ et $56 = 28 \times 2$.
Les coefficients dans les coins sont égaux dans les deux propositions, donc le coefficient central en est le double : $656 \times 2 = 1312$.
J'en déduis donc que la bonne valeur pour A^5 est la matrice B_1.

Exercice 2 –

1. a) Comme la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle de paramètre λ, je sais que sa densité est donnée par la fonction

$$f_Z(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi j'en déduis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

b) Comme la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle de paramètre λ, je sais que

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

c) Je remarque tout d'abord que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)\,\mathrm{d}x = E(Z)$ puis aussi que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\,\mathrm{d}x = E\big(Z^2\big)$. D'après la formule de König-Huygens, je sais que $V(Z) = E\big(Z^2\big) - E(Z)^2$. Donc $E\big(Z^2\big) = V(Z) + E(Z)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} + \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{2}{\lambda^2}$.
En regroupant tous ces résultats, j'ai montré que

$$\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}.$$

2. a) Par définition, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si la limite $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie. Or pour tout $A \geqslant 0$, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A \Big(\lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x}\Big)\,\mathrm{d}x = (1-p)\times\int_0^A \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \lambda p \times \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

D'après les questions précédentes, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^A \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ convergent, *i.e.* admettent une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
Alors par linéarité, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= (1-p)\times\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \lambda p \times \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= (1-p)\times 1 + \lambda p \times \frac{1}{\lambda} = 1 - p + p = 1.\end{aligned}$$

J'ai ainsi montré que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

b) La fonction f est définie en deux morceaux.

- Si $x < 0$, $f(x) = 0 \geqslant 0$ et si $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x} \geqslant 0$ car toutes les valeurs impliquées sont positives : les exponentielles, λ, p et $1-p$.
  Donc la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.
- Sur l'intervalle $\big]-\infty, 0\big[$, $f(x) = 0$ donc la fonction f est continue car constante.
  Sur $\big[0, +\infty\big[$, $f(x) = \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x}$ donc la fonction f est continue comme somme de fonctions continues.
  Finalement, la fonction f admet au plus un point de discontinuité en $x = 0$.

- Enfin il reste à montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. Je sais que $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0 car la fonction sous l'intégrale est nulle. Aussi, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1 d'après la question précédente. Alors par la relation de Chasles, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0+1 = 1.$$

Des trois points précédents, je conclus que f est une densité de probabilité.

c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Or sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} x\times 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x\times\left(\lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 pxe^{-\lambda x}\right)\mathrm{d}x \\ &= (1-p)\times\int_{0}^{+\infty}\lambda xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \lambda p\times\int_{0}^{+\infty}\lambda x^2e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Et comme les deux intégrales impliquées convergent (leurs valeurs ont été déterminées plus tôt dans l'exercice), j'en déduis que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc que la variable aléatoire X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = (1-p)\times\int_{0}^{+\infty}\lambda xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \lambda p\times\int_{0}^{+\infty}\lambda x^2e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= (1-p)\times\frac{1}{\lambda} + \lambda p\times\frac{2}{\lambda^2} = \frac{1-p}{\lambda} + \frac{2p}{\lambda} = \frac{1+p}{\lambda}.\end{aligned}$$

Ainsi l'espérance de X vaut $E(X) = \dfrac{1+p}{\lambda}$.

3. a) Soit $x \geqslant 0$. Je cherche à calculer $\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. Je pose donc

$$u'(t) = e^{-\lambda t} \qquad \text{et} \qquad v(t) = t$$

et alors

$$u(t) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = 1.$$

Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x 1\times\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{0}{\lambda}e^{-\lambda\times 0} + \int_0^x \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda\times 0} \\ &= -\left(\frac{\lambda x}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1+\lambda x}{\lambda^2}e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda^2}\left(1-\left(1+\lambda x\right)e^{-\lambda x}\right).\end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que $\forall x \geqslant 0$,

$$\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}\left(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x}\right).$$

b) La fonction de répartition F de X est donnée par $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Je raisonne par disjonction de cas :

- Si $x < 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Si $x \geqslant 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Or

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \left(\lambda(1-p)e^{-\lambda t} + \lambda^2 p t e^{-\lambda t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \lambda(1-p) \times \int_0^x e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t + \lambda^2 p \times \int_0^x t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda(1-p) \times \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x + \lambda^2 p \times \frac{1}{\lambda^2}\left(1-\left(1+\lambda x\right)e^{-\lambda x}\right) \\
&= \lambda(1-p) \times \left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda \times 0}\right) + p \times \left(1-\left(1+\lambda x\right)e^{-\lambda x}\right) \\
&= (1-p) \times \left(1-e^{-\lambda x}\right) + p - \left(p+\lambda p x\right)e^{-\lambda x} \\
&= (1-p) - (1-p)e^{-\lambda x} + p - \left(p+\lambda p x\right)e^{-\lambda x} \\
&= 1 - \left(1+\lambda p x\right)e^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$

Finalement j'ai montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1-\left(1+\lambda p x\right)e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Exercice 3 –

1. a) En regardant facteur par facteur :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to -\infty} e^X = \ 0^+\end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0^+.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0^+\end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = 0^+.$$

Comme la limite à droite de f en 0 est égale à $f(0)$, alors la fonction f est continue à droite en 0.

b) Tout d'abord $\dfrac{f(x)}{x} = e^{-\frac{1}{x}}$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0^+$ d'après la question précédente.
Donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0^+.$$

Je remarque aussi que comme $f(0) = 0$, alors $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et x. Et comme sa limite lorsque x tend vers 0^+ vaut 0, en particulier la limite est finie, donc la fonction f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = 0.$$

2. a) La fonction f est de la forme $f = u \times v$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Alors $u'(x) = 1$ et pour v', je remarque que v est de la forme $v = e^w$ avec $w(x) = -\dfrac{1}{x}$. Puisque $w'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, alors $v'(x) = w'(x) \times e^{w(x)} = \dfrac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}}$. Ainsi

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}} + x \times \frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Et j'ai montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x} \geqslant 0$ et $1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 1 > 0$.
Comme une exponentielle est toujours strictement positive, j'en déduis que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) > 0.$$

J'en conclus alors directement que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) Je cherche la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0^- \\ \lim\limits_{X\to 0} e^X = \ 1\end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \ 1\end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Je peux ainsi dresser le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) Je cherche cette fois la dérivée seconde de f, *i.e.* la dérivée de f'.
La fonction f' est de la forme $f' = u \times v$, avec $u(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.
Puisque $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$, alors

$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -\frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3} \times e^{-\frac{1}{x}}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} \times e^{-\frac{1}{x}}.$$

Comme pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x^3} > 0$ et $e^{-\frac{1}{x}} > 0$, j'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) > 0$.
Donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

3. a) Je reconnais la limite du taux d'accroissement $\dfrac{e^{-u} - e^{-0}}{u - 0}$. Lorsque u tend vers 0^+, ce taux d'accroissement tend vers le nombre dérivé à droite de la fonction $h(u) = e^{-u}$ en 0. Comme sa dérivée est $h'(u) = -e^{-u}$, alors

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} = -e^{-0} = -1.$$

b) Tout d'abord, $f(x) - (x-1) = xe^{-\frac{1}{x}} - (x-1) = xe^{-\frac{1}{x}} - x + 1$. Comme je veux utiliser le résultat de la question précédente, je pose $u = \dfrac{1}{x}$ afin d'obtenir e^{-u}.
Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$. Et

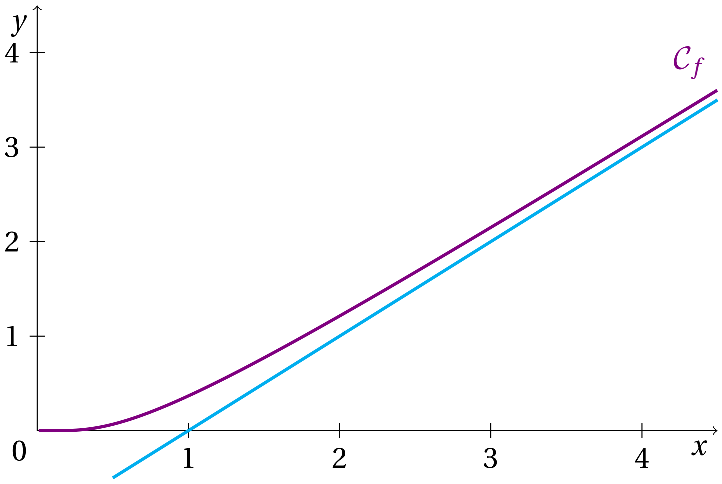
$$\frac{e^{-u} - 1}{u} = \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = xe^{-\frac{1}{x}} - x = f(x) - (x-1) - 1.$$

Ainsi je peux conclure que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{u \to 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

c) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = 0$, la courbe représentative de la fonction f se rapprochera infiniment près de la droite d'équation $y = x - 1$: cette droite est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

Voici l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$:



4. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n > 0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad 1 > 0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$u_{n+1} = f(u_n) > f(0) = 0, \quad \text{car } u_n > 0 \text{ et que } f \text{ est strictement croissante.}$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

b) Pour trouver le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, j'étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n \times e^{-\frac{1}{u_n}} - u_n = u_n\left(e^{-\frac{1}{u_n}} - 1\right).$$

Je sais que le premier facteur u_n est positif.

Et puisque $u_n > 0$, alors $-\dfrac{1}{u_n} < 0$ et $e^{-\frac{1}{u_n}} < e^0 = 1$. Donc le second facteur $\left(e^{-\frac{1}{u_n}} - 1\right)$ est lui négatif. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(u_n) - u_n \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Et j'ai bien montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc monotone et minorée par 0 puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors par le théorème de la limite monotone, j'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, vers une limite $\ell \geqslant 0$.

En passant à la limite dans la formule $u_{n+1} = f(u_n)$, j'obtiens que $\ell = f(\ell)$, *i.e.*

$$f(\ell) - \ell = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell\left(e^{-\frac{1}{\ell}} - 1\right) = 0.$$

Il s'agit d'une équation produit nul, donc l'un des deux facteurs doit être nul.

Or $e^{-\frac{1}{\ell}} - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{\ell}} = 1 = e^0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\dfrac{1}{\ell} = 0,$ ce qui est impossible.

Donc nécessairement $\ell = 0$.

J'ai ainsi montré que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par $\ell = 0$.

d) Voici le script complété.

```
import numpy as np
n=0
u=1
while u>0.001:
    u=u*np.exp(-1/u)
    n=n+1
print(n)
```

5. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln\left(u_{n+1}\right)$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad -\ln\left(u_1\right) = -\ln\left(1 \times e^{-\frac{1}{1}}\right) = -\ln\left(e^{-1}\right) = -(-1) = 1.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{n+1}} = -\ln\left(u_{n+1}\right) + \frac{1}{u_{n+1}}$$

et

$$\begin{aligned} -\ln\left(u_{n+2}\right) &= -\ln\left(u_{n+1} \times e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}\right) = -\ln\left(u_{n+1}\right) - \ln\left(e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}\right) \\ &= -\ln\left(u_{n+1}\right) - \left(-\frac{1}{u_{n+1}}\right) = -\ln\left(u_{n+1}\right) + \frac{1}{u_{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k} = -\ln\left(u_{n+2}\right).$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln\left(u_{n+1}\right).$$

b) La série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ est $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{u_n}$. Pour connaître sa nature, il faut regarder la limite de la suite des sommes partielles. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln\left(u_{n+1}\right).$$

Alors puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0^+$ et que $\displaystyle\lim_{X\to 0^+} -\ln(X) = +\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \lim_{n\to+\infty} -\ln\left(u_{n+1}\right) = +\infty.$$

J'ai donc montré que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 –

1. a) Je commence par calculer $P(X_1=2)$. L'événement $[X_1=2]$ correspond à une situation où il y a deux boules noires dans l'urne U_1. Cela implique forcément que deux boules noires ont été tirées dans l'urne U_0.
Comme il y a deux boules noires parmi quatre boules au premier tirage, puis une boule noire parmi trois boules au second, la probabilité de cet événement est donnée par

$$P(X_1=2)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Pour l'événement $[X_1=0]$, il s'agit de la situation où il n'y a aucune boule noire dans l'urne U_1. Cela implique donc que deux boules blanches ont été tirées dans l'urne U_0.
Comme il y a deux boules blanches parmi quatre boules au premier tirage, puis une boule blanche parmi trois boules au second, la probabilité de cet événement est

$$P(X_1=0)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Comme 0, 1 et 2 sont les trois seules valeurs possibles pour la variable aléatoire X_1,
j'en déduis par complémentarité que

$$P(X_1=1)=1-P(X_1=0)-P(X_1=2)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$P(X_1=1)=\frac{2}{3}\quad\text{et}\quad P(X_1=2)=P(X_1=0)=\frac{1}{6}.$$

b) Je connais la loi de la variable aléatoire X_1 donc je peux calculer l'espérance de X_1 :

$$E(X_1)=0\times P(X_1=0)+1\times P(X_1=1)+2\times P(X_1=2)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

Alors l'espérance de X_1 vaut $E(X_1)=1$.

2. L'événement $[X_n=2]$ correspond à une situation où il y a deux boules noires dans l'urne U_n. Cela implique forcément que deux boules noires ont été tirées dans chacune des précédentes urnes $U_0,U_1,\dots,U_{n-1}$. Alors

$$[X_n=2]=A_0\cap A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}.$$

À chaque étape du protocole, il s'agit de tirer deux boules noires dans une urne composée de deux boules blanches et deux boules noires, donc similaire à l'urne U_0.
Il s'agit alors de n répétitions identiques et indépendantes du premier tirage, dont la probabilité de succès est $P(X_1=2)=\dfrac{1}{6}$ d'après la question précédente. J'en déduis alors que

$$P(X_n=2)=\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

3. a) D'après la formule des probabilités totales, comme $\big\{[X_n=0],[X_n=1],[X_n=2]\big\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(X_{n+1}=1)=\sum_{i=0}^{2}P\big([X_n=i]\cap[X_{n+1}=1]\big)=\sum_{i=0}^{2}P(X_n=i)\times P_{[X_n=i]}\big(X_{n+1}=1\big).$$

Or $P_{[X_n=0]}\big(X_{n+1}=1\big)=0$ car il s'agit de piocher une boule noire dans une urne n'en contenant pas.
Et $P_{[X_n=1]}\big(X_{n+1}=1\big)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$ car il s'agit de piocher l'unique boule noire ou bien au premier tirage (une chance sur quatre) ou bien au second, après un premier échec (une chance sur trois).
Enfin $P_{[X_n=2]}\big(X_{n+1}=1\big)=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ car il s'agit de piocher une des deux boules noires au premier tirage (deux chances sur quatre) puis une boule blanche (deux chances sur trois) ou inversement.
Finalement

$$P\big(X_{n+1}=1\big)=P(X_n=0)\times 0+P(X_n=1)\times\frac{1}{2}+P(X_n=2)\times\frac{2}{3}.$$

Et j'ai bien montré que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$P\big(X_{n+1}=1\big)=\frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{2}{3}P(X_n=2).$$

b) Je raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $P(X_n=1)=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n=1$,

$$P(X_1=1)=\frac{2}{3}\quad\text{et}\quad 2\left(\frac{1}{2}\right)^1-2\left(\frac{1}{6}\right)^1=2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{6}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors d'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}P\big(X_{n+1}=1\big)&=\frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{2}{3}P(X_n=2)=\frac{1}{2}\times\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\\&=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-2\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\\&=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n=1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P(X_n=1)=2\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

c) Comme $\big\{[X_n=0],[X_n=1],[X_n=2]\big\}$ forme un système complet d'événements, alors par complémentarité

$$\begin{aligned}P(X_n=0)&=1-P(X_n=1)-P(X_n=2)=1-\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)-\left(\frac{1}{6}\right)^n\\&=1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n.\end{aligned}$$

Ainsi j'ai montré que

$$P(X_n=0)=1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Je connais la loi de la variable aléatoire X_n donc je peux calculer l'espérance de X_n :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 0 \times P(X_n = 0) + 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) \\ &= 0 \times \left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right) + 1 \times \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) + 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi l'espérance de X_n vaut $\quad E(X_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Comme il s'agit d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in \left]0, 1\right[$, elle converge vers 0.
J'en déduis donc que

$$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = 0,$$

ce qui signifie qu'en répétant infiniment ce protocole, le nombre de boules noires présentes dans l'urne deviendra nul.