DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 –

1. On a
$$P(-1) = (-1)^3 - 21 \times (-1) - 20 = -1 + 21 - 20 = 0.$$

2. D'après la question précédente, -1 est racine de P donc il existe Q tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$. Pour déterminer Q, on effectue la division euclidienne de P par $x+1$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & & & - & 21x & - & 20 & x+1 \\
\cline{8-8}
x^3 & + & x^2 & & & & & x^2 - x - 20 \\
\cline{1-7}
 & - & x^2 & - & 21x & - & 20 & \\
 & - & x^2 & - & x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & - & 20x & - & 20 & \\
 & & & - & 20x & - & 20 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $P(x) = (x+1)(x^2 - x - 20)$.

3. Calculons le discriminant de Q. On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times -20 = 81$. Q admet donc deux racines
$$x_1 = \frac{1-9}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+9}{2} = 5.$$
On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-4		-1		5		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-20		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc $\mathscr{S} = [-4;-1] \cup [5;+\infty[$.

4. On a $f = \sqrt{P}$ donc le domaine de définition de f est donné par l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geq 0$. Donc d'après la question précédente,
$$D_f = [-4;-1] \cup [5;+\infty[.$$

5. g est de la forme $g = h + f$ avec $h(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 14}$ et f la fonction étudiée à la question précédente. On a donc $D_g = D_h \cap D_f$. On a déjà déterminé D_f à la question précédente, il nous reste à déterminer D_h. Pour cela, il nous faut résoudre l'inéquation $x^2 - 5x - 14 \geq 0$. On commence par calculer le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 25 + 56 = 81$. Il y a donc deux racines
$$x_1 = \frac{5-9}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+9}{2} = 7.$$
On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$x^2-5x-14$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc $D_h =]-\infty;-2] \cup [7;+\infty[$.
Ainsi
$$D_g = [-4;-2] \cup [7;+\infty[.$$

Exercice 2 –

1. Le nombre d'arbres en milliers d'unités au cours de l'année $2010+n$ est donnée par u_n. Ce nombre diminue de 5% chaque année, autrement dit, il est multiplié par $0,95$. Par ailleurs, 3000 nouveaux arbres sont plantés chaque année. D'où
$$u_{n+1} = 0,95u_n + 3000.$$

2. (a) On a
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 60 - u_{n+1} \\ &= 60 - (0,95u_n + 3) \\ &= 60 - 0,95u_n - 3 \\ &= 60 - 0,95(60 - v_n) - 3 \\ &= 60 - 57 + 0,95v_n - 3 \\ &= 0,95v_n \end{aligned}$$
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$.

   (b) On a
$$v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10.$$

   (c) La suite (v_n) étant géométrique, on a
$$v_n = v_0 \times q^n = 10 \times (0,95)^n.$$

   (d) On a
$$u_n = 60 - v_n = 60 - 10 \times (0,95)^n.$$

3. Le nombre d'arbres de la forêt (en milliers) en 2020 correspond à u_{10}. On a
$$u_{10} = 60 - 10 \times (0,95)^{10} \approx 60 - 10 \times 0,60 = 54.$$
Il y aura donc environ 54 000 arbres dans cette forêt en 2020.

Exercice 3 – Notons les évènements :

- B_k : "la k-ième boule tirée est blanche",
- N_k : "la k-ième boule tirée est noire",
- R_k : "la k-ième boule tirée est rouge".

1. D'après la formule des probabilités composées, on a
$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

2. N_1, R_1 et B_1 forment un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(N_2) &= P(R_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap N_2)\\ &= P(R_1)P_{R_1}(N_2) + P(N_1)P_{N_1}(N_2) + P(B_1)P_{B_1}(N_2)\\ &= \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{2}{9}\times\frac{3}{8}\\ &= \frac{24}{72}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3. D'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$P_{N_2}(N_1) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)}.$$

Or d'après la question 1, $P(N_1 \cap N_2) = \dfrac{1}{12}$ et d'après la question 2, $P(N_2) = \dfrac{1}{3}$. Alors

$$P_{N_2}(N_1) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12}\times\frac{3}{1} = \frac{1}{4}.$$

De même, on a

$$P_{N_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\times\frac{3}{1} = \frac{1}{2}.$$

Et donc

$$P_{N_2}(B_1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Il y a donc plus de chances pour que la première boule tirée ait été rouge.

Exercice 4 –

1. D'après l'énoncé, on a

$$P(S) = 0,6 \qquad P(\overline{S}) = 1-0,6 = 0,4 \qquad P_S(A) = 0,2 \qquad P_S(B) = 0,45$$

$$P_S(C) = 1-0,2-0,45 = 0,35 \qquad P_{\overline{S}}(B) = 0,55 \quad \text{et} \quad P(A) = 0,18.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(B) = P(S\cap B)+P(\overline{S}\cap B) = P(S)\times P_S(B)+P(\overline{S})\times P_{\overline{S}}(B) = 0,6\times 0,45+0,4\times 0,55 = 0,27+0,22 = 0,49.$$

On peut donc effectivement affirmer que près de la moitié des résidents choisit la formule Simple.

3. (a) D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}0,18 = P(A) &= P(S\cap A) + P(\overline{S}\cap A)\\ &= P(S)\times P_S(A) + P(\overline{S})\times P_{\overline{S}}(A)\\ &= 0,6\times 0,2 + 0,4\times x\\ &= 0,12+0,4x.\end{aligned}$$

Ainsi on a bien

$$0,18 = 0,12+0,4x.$$

(b) Pour trouver la valeur de $P_{\overline{S}}(A)$, il nous suffit de résoudre l'équation ci-dessus. On a

$$0,18 = 0,12 + 0,4x \iff 0,06 = 0,4x \iff x = \frac{0,06}{0,4} = \frac{6}{40} = 0,15.$$

Ainsi $P_{\overline{S}}(A) = 0,15$.

4. D'après la formule de Bayes,

$$P_A(\overline{S}) = \frac{P(A\cap\overline{S})}{P(A)} = \frac{0,4\times 0,15}{0,18} = \frac{0,06}{0,18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Exercice 5 – 1. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition "$u_n = 2\times 4^n + 1$".

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad 2\times 4^0 + 1 = 2\times 1 + 1 = 3.$$

Ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Comme on a supposé $\mathscr{P}_n$ vraie, on a $u_n = 2\times 4^n + 1$. On veut montrer que $\mathscr{P}_{n+1}$ est également vraie *i.e.,* $u_n = 2\times 4^{n+1} + 1$.
On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 4u_n - 3 \\ &= 4(2\times 4^n + 1) - 3 \\ &= 4\times 2\times 4^n + 4 - 3 \\ &= 2\times 4\times 4^n + 1 \\ &= 2\times 4^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la proposition est héréditaire.

Conclusion : Comme $\mathscr{P}$ est héréditaire et que $\mathscr{P}_0$ est vraie, par principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$ *i.e.,*

$$\forall n\in\mathbf{N}, \quad u_n = 2\times 4^n + 1.$$

2. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition "$u_n \leq 1$".

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leq 1$$

donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4}\times 1 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la proposition est héréditaire.

Conclusion : Comme $\mathscr{P}$ est héréditaire et que $\mathscr{P}_0$ est vraie, par principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$ *i.e.,*

$$\forall n\in\mathbf{N}, \quad u_n \leq 1.$$

3. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition "$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Autrement dit on suppose que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On veut montrer que $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)}{6}\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) \\
&= \frac{(n+1)}{6}\big(2n^2 + 7n + 6\big) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},
\end{aligned}$$

car $(n+2)(2n+3) = (2n^2+7n+6)$. Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la proposition est héréditaire.

Conclusion : Comme $\mathscr{P}$ est héréditaire et que $\mathscr{P}_1$ est vraie, par principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ *i.e.*,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$