Interro de cours 10

Exercice 1 – Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $a(x) = 8x^3 + 4x^2 - 12x + 5$

Solution : $a'(x) = 24x^2 + 8x - 12$

2. $b(x) = (2x^2 + x - 2)(3x + 2)$

Solution : b est de la forme uv avec $u(x) = 2x^2 + x - 2$ et $v(x) = 3x + 2$.
On a $u'(x) = 4x + 1$ et $v'(x) = 3$, donc

$$\begin{aligned} b'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) &= (4x+1)(3x+2) + (2x^2 + x - 2) \times 3 \\ &= 12x^2 + 8x + 3x + 2 + 6x^2 + 3x - 6 = 18x^2 + 14x - 4. \end{aligned}$$

3. $c(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

Solution : c est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 3x - 2$.
On a $u'(x) = 3$, donc

$$c'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)} = \frac{-3}{(3x-2)^2}.$$

4. $d(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{3x + 2}$

Solution : d est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 + x - 2$ et $v(x) = 3x + 2$.
On a $u'(x) = 4x + 1$ et $v'(x) = 3$, donc

$$\begin{aligned} d'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} &= \frac{(4x+1)(3x+2) - (2x^2 + x - 2) \times 3}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{12x^2 + 8x + 3x + 2 - 6x^2 - 3x + 6}{(3x+2)^2} = \frac{6x^2 + 8x + 8}{(3x+2)^2}. \end{aligned}$$

5. $e(x) = \sqrt{3x^2 - x - 1}$

Solution : e est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x^2 - x - 1$.
On a $u'(x) = 6x - 1$, donc

$$e'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2 - x - 1}}.$$

6. $f(x) = (x^2 + 1) \times \dfrac{1}{x}$

Solution : f est de la forme uv avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$.
On a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$, donc

$$\begin{aligned} f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) &= 2x \times \frac{1}{x} + (x^2+1) \times \frac{-1}{x^2} \\ &= 2 - \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \end{aligned}$$

7. $g(x) = x\sqrt{x} + x$

Solution : La fonction g est la somme de la fonction $x\sqrt{x}$ qui est un produit uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ et qui se dérive donc comme un produit $(uv)' = u'v + uv'$, et de la fonction x dont la dérivée vaut 1.
On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc

$$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 = \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{3x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

8. $h(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

Solution : h est de la forme u^2 avec $u(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. u est par ailleurs un quotient et se dérive comme tel :

$$u'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Alors

$$h'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times \frac{-2}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{-4}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2.$$