

VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

- f est une **densité** si et seulement si
 - ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
 - ▷ f est continue par morceaux, avec un nombre fini de points de discontinuité.
 - ▷ L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.
- Je connais la **densité** et je cherche la **fonction de répartition** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

- Lien entre **fonction de répartition** et **probabilité** :

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

- Je connais la **fonction de répartition** et je cherche la **densité** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F'_X(x) \quad (\text{sauf éventuellement en un nombre fini de points}).$$

- Calculs de **probabilités** en connaissant la **fonction de répartition** :

$$P(X \leq a) = F_X(a), \quad P(X \geq a) = 1 - F_X(a) \quad \text{et} \quad P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

- Calculs de **probabilités** en connaissant la **densité** :

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt, \quad P(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(t) dt \quad \text{et} \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt.$$

- Espérance et variance (*sous réserve de convergence*) :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt, \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \quad \text{et} \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

- Loi **uniforme** sur l'intervalle $[a, b]$: (3 morceaux)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b, \\ 0 & \text{si } t > b. \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- Loi **exponentielle** de paramètre λ : (2 morceaux)

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- Loi **normale** : se ramener à la loi normale centrée réduite en utilisant :

$$X \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(m, \sigma^2) \iff \frac{X-m}{\sigma} \text{ suit la loi normale centrée réduite } \mathcal{N}(0, 1).$$