EXERCICES — CHAPITRE 1

Exercice 1 – On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}$.

Calculer les matrices $A+B$, $2A-B$, AB et BA.

Exercice 2 – On considère la matrice $X=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Calculer les matrices $X-2I_3$, $-(X-2I_3)$, I_3-2X et $4(I_3-X)$.

Exercice 3 – On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}4&8\\1&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&9\\1&1\end{pmatrix}$.

Calculer et comparer $A^2+2AB+B^2$ et $(A+B)^2$.

Exercice 4 – Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible. Dans ce cas, donner la dimension de la matrice produit, sinon expliquer pourquoi c'est impossible.

1. $\begin{pmatrix}2&5\\3&6\\4&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&5\\4&6\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}-1&4&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-1&6\\2&4&-2\\3&5&3\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\3&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&5\\3&6\\4&1\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}2&5\\4&6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&5\\3&6\\4&7\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}2&5&0\\3&6&3\\4&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\3&5\end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix}1&0&5\\2&-1&6\\3&4&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&7&8\\0&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$

Exercice 5 – Calculer les produits suivants.

1. $\begin{pmatrix}-2&-1\\0&1\\2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}1&5\\2&6\\3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\3&4\end{pmatrix}$

Exercice 6 – On considère la matrice A définie par $A=\begin{pmatrix}x&1\\2&3\end{pmatrix}$ où x est un réel.

Déterminer $x\in\mathbb{R}$ pour que $A^2=\begin{pmatrix}6&1\\2&11\end{pmatrix}$.

Exercice 7 – Soit A la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&-2&1\end{pmatrix}$. Calculer $A\times {}^tA$ puis ${}^tA\times A$.

Exercice 8 –

1. On considère trois réels x, y et z, et les matrices
$$A=\begin{pmatrix}0&3&-2\\-4&5&-1\\-2&0&3\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad U=\begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix}.$$
À quel système d'équations l'égalité matricielle $AX=U$ est-elle équivalente ?
2. On considère le système suivant.
$$\begin{cases}2x-y+3z=-1\\-5x+y=3\\x+y-z=4\end{cases}$$
À quelle égalité matricielle le système est-il équivalent ?
3. On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&1\\0&3&5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-7&5&-1\\15&-10&2\\-9&6&-1\end{pmatrix}$.
   (a) Calculer AB et BA.
   (b) Montrer que, pour toutes matrices U et V de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a l'équivalence
   $$AU=V \iff U=BV$$
   Indication : Raisonner par double implication.
   (c) Résoudre le système suivant.
   $$\begin{cases}2x+y=2\\3x+2y+z=1\\3y+5z=3\end{cases}$$

Exercice 9 – Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. $AX=B$, avec $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}7\\-9\\0\end{pmatrix}$.
2. $AX=B$, avec $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&0&2\\1&0&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
3. $AX=3X$, avec $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&4&1\\2&2&5\end{pmatrix}$.

Exercice 10 – Dans chacun des cas suivants, calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

1. Calculer B et B^2.
2. Rappeler la formule du binôme de Newton.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B$.

Exercice 12 – On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $u_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4u_n - v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n.$$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que A s'écrit sous la forme $A = 3I_2 + J$, où J est une matrice à déterminer.
3. Vérifier que $J^2 = 0_2$, puis à l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 13 –

Partie A : Calcul matriciel

On considère les trois matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QMQ.$$

1. Calculer $Q \times Q$.
2. Calculer D. *On vérifiera que D est une matrice diagonale.* Justifier que $M = QDQ$.
3. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QD^nQ$.
4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

Partie B : Étude d'une expérience

On dispose de deux pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir PILE en lançant l'une des deux pièces vaut $\frac{1}{2}$.
On effectue des lancers selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les deux pièces,
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.
On considère, pour tout entier naturel n non nul, les évènements

- A_n : "obtenir 0 fois PILE à l'étape n",
- B_n : "obtenir 1 fois PILE à l'étape n",
- C_n : "obtenir 2 fois PILE à l'étape n",

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Soit n un entier naturel non nul. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1})$.
(*Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.*)
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n \end{cases}$$

4. (a) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où la matrice M est celle définie dans la Partie **A**.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.
5. (a) En déduire que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{P}(A_n) = 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n}, \qquad \mathrm{P}(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(C_n) = \frac{1}{4^n}.$$

   (b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.