1 | Matrices

I – Généralités

Définition 1.1 – Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ tout tableau de nombres de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix},$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$. Ce sont les **coefficients** de la matrice A.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.2 – Voici des exemples de matrices :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$,
- $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$,
- $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Remarque 1.3 – Le premier indice n (i pour les coefficients) concerne les lignes et le second indice p (j pour les coefficients) concerne les colonnes.

Proposition 1.4 – Égalité matricielle

Deux matrices sont **égales** si et seulement si elles ont le même nombre de lignes et de colonnes **et** les mêmes coefficients.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,q} \end{pmatrix}$. Alors

$$A = B \iff \begin{cases} n = m, \\ p = q, \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad a_{i,j} = b_{i,j}. \end{cases}$$

Exemple 1.5 – On donne

$$E = \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & -2y-4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer x et y pour que les deux matrices E et F soient égales.

Définition 1.6 –

- Une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes est une **matrice carrée**. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
- Une matrice qui ne possède qu'une seule ligne est une **matrice ligne**.
- Une matrice qui ne possède qu'une seule colonne est une **matrice colonne**.
  Dans certaines applications, on utilise le terme "vecteur" pour parler d'une matrice colonne.

Exemple 1.7 –

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 3.
- La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.
- La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Définition 1.8 –

- On appelle **matrice nulle** à n lignes et p colonnes et on note $0_{n,p}$ la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls. Si $n = p$, on écrit simplement 0_n au lieu de $0_{n,n}$.
- On appelle **matrice identité** de taille n et on note I_n la matrice **carrée** dont les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres sont égaux à 0. Autrement dit,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.9 – Exprimer les matrices suivantes.

- 0_2
- I_3
- $0_{5,3}$
- $I_{3,2}$

II – Opérations sur les matrices

1 – Multiplication d'une matrice par un réel

Définition 1.10 – Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et tout réel λ, on définit

$$\lambda A = \lambda \times \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, pour multiplier une matrice par un réel λ, on multiplie tous ses coefficients par λ.

Exemple 1.11 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Calculer $4A$.

Définition 1.12 – Pour toute matrice A, la matrice $(-1) \times A$ est notée $-A$ et s'appelle la **matrice opposée** de la matrice A.

Remarque 1.13 – L'opposée $-A$ d'une matrice A s'obtient donc en remplaçant chaque coefficient de A par son opposé.

Exemple 1.14 – Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $-A$.

2 – Somme de deux matrices

Définition 1.15 – Soient deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ **de même taille**. On définit

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la somme des matrices A et B est la matrice **de même taille** que A et B dont chaque coefficient est la somme des coefficients correspondants de A et B.

ATTENTION ! L'addition de deux matrices n'est possible **que si elles ont le même nombre de lignes et de colonnes**.

Exemple 1.16 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B$.

Remarque 1.17 – On définit de même la soustraction de deux matrices A et B en utilisant l'opposé :

$$A - B = A + \big(-B\big).$$

Proposition 1.18

Soient A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ et μ des réels. Alors

- par commutativité de l'addition, $A + B = B + A$,
- par associativité de l'addition, $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- par associativité de la multiplication par un réel, $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
- par distributivité de la multiplication par un réel, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Exemple 1.19 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Soit X une matrice carrée de taille 2 telle que $2X + 3A = B$. Déterminer la matrice X.

Exemple 1.20 – Soient x, y et z des réels. Calculer la matrice $x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Déterminer alors l'ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3 – Multiplication de deux matrices

Définition 1.21 – Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice quelconque et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B, la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ notée $A \times B$ ou AB, définie par

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + \cdots + a_{1,p}b_p \\ a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + \cdots + a_{2,p}b_p \\ \vdots \\ a_{n,1}b_1 + a_{n,2}b_2 + \cdots + a_{n,p}b_p \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la matrice AB est une matrice colonne de taille n dont le i-ième coefficient $\big(i \in [\![1, n]\!]\big)$ est donné par

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_k.$$

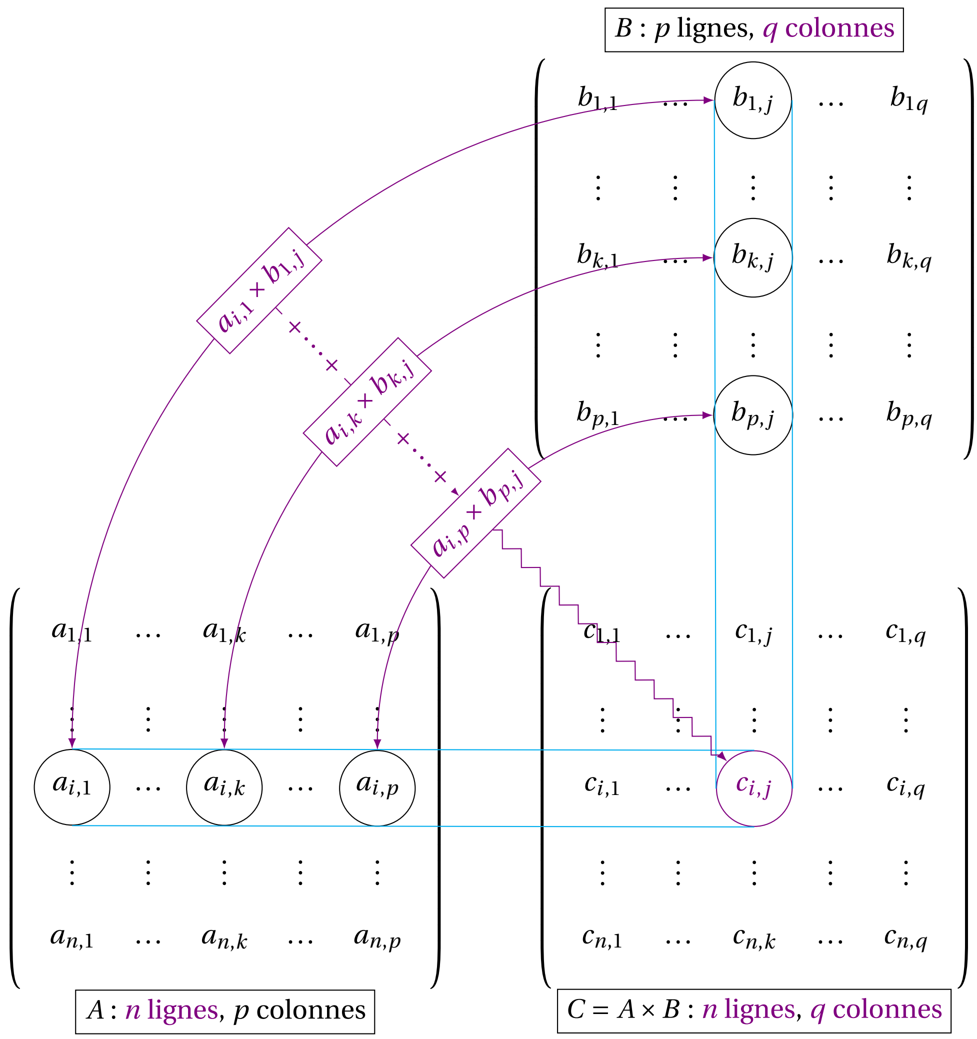
Exemple 1.22 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculer AX.

Définition 1.23 – Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices.
On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B, la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ notée $A \times B$ ou AB, définie par

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix} \qquad \text{où } c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$

ATTENTION ! Pour pouvoir effectuer le produit AB, le nombre de colonnes de A doit être **égal** au nombre de lignes de B. Sinon le produit n'est pas défini.

Illustration du produit matriciel :



Exemple 1.24 – Calculer les produits matriciels suivants après avoir donné l'ensemble de matrices auquel ils appartiennent.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
- $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
- $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
- $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $H = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \\ 9 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ATTENTION !

- La multiplication matricielle **n'est pas commutative**. En général, le produit AB (s'il existe) n'est pas égal au produit BA (s'il existe aussi).
- Un produit de deux matrices peut être égal à la matrice nulle sans qu'aucune de ces deux matrices ne soit égale à la matrice nulle.

Proposition 1.25

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $E \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Alors

- par associativité de la multiplication de matrices, $(A \times C) \times E = A \times (C \times E)$,
- par distributivité de la multiplication de matrices, $(A+B)C = AC + BC$ et $A(C+D) = AC + AD$.

Et pour toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$M \times I_n = I_n \times M = M \quad \text{et} \quad I_n \times X = X.$$

La matrice identité est l'**élément neutre** de la multiplication matricielle *(comme le* 1 *l'est pour les réels)*.

Remarque 1.26 – On peut retenir que les règles de calcul sont les mêmes qu'avec les réels **à l'exception que** la commutativité n'est en général pas vraie pour les matrices.

4 – Lien avec les systèmes d'équations linéaires

Proposition 1.27

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Alors l'équation matricielle $AX = B$ est équivalente à un système d'équations linéaires :

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

Autrement dit, le p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est solution du système à n équations et p inconnues si et seulement si la matrice colonne X est solution de l'équation matricielle $AX = B$.

Remarque 1.28 – Les matrices permettent donc une écriture beaucoup plus succincte d'un système d'équations linéaires. Par ailleurs, il sera donné dans un autre chapitre des outils matriciels permettant la résolution de tels systèmes.

Définition 1.29 – Étant donné le système linéaire à n équations et p inconnues suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right. ,$$

la matrice des coefficients $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ s'appelle la **matrice associée** au système.

Exemple 1.30 – Réécrire chacun des systèmes suivants sous forme d'une équation matricielle.

- $\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & -4 \end{array} \right.$

- $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & y & - & 2z & + & t & = & 3 \\ & & & & 4z & - & t & = & 2 \\ & & & & & & 2t & = & -4 \end{array} \right.$

III – Puissance d'une matrice carrée

1 – Définition et premiers exemples

Définition 1.31 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **carrée**. On pose $A^0 = I_n$ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

ATTENTION ! Le calcul de A^n **ne** consiste **pas** à élever les coefficients de A à la puissance n.

Remarque 1.32 – Comme pour les réels où $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a^0 = 1$,
toute matrice élevée à la puissance 0 vaut l'élément neutre, à savoir I_n pour les matrices.

Exemple 1.33 – Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^3.

Proposition 1.34

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tous entiers naturels r et s,

$$A^r \times A^s = A^{r+s} \quad \text{et} \quad \left(A^r\right)^s = A^{rs}.$$

ATTENTION ! Puisque la multiplication matricielle **n'est pas commutative**, les autres règles usuelles sur les puissances dans $\mathbb{R}$ ne sont pas vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Par exemple, en général $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

Exemple 1.35 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2 puis conclure. Les matrices AB et BA sont-elles égales ?

Exemple 1.36 – Calculer la puissance n-ième de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 – Cas d'une matrice diagonale

Proposition 1.37

Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

□

Exemple 1.38 – Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la puissance n-ième de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.39

Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe trois matrices $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDQ$ et $PQ = QP = I_n$, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PD^kQ = P \times \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix} \times Q.$$

Exemple 1.40 – On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ et QP.

2. On définit la matrice $D = QAP$. Calculer D.

3. En utilisant que $D = QAP$, en déduire que $A = PDQ$.

4. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$.

6. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3 – Formule du binôme de Newton

Définition 1.41 – Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Proposition 1.42 – Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A et B **commutent** (*i.e.* $AB = BA$).
Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

Remarque 1.43 – La formule du binôme de Newton sert à calculer les puissances d'une matrice **à condition que** l'on puisse écrire celle-ci comme la somme de deux matrices qui commutent et dont on sait expliciter les puissances. Le cas le plus fréquent est celui pour lequel la matrice considérée est la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice dont les puissances sont nulles à partir d'un certain rang, **et qui commutent**.

Exemple 1.44 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $A = D + J$.

2. Calculer J^2. En déduire J^n pour tout $n \geqslant 2$.

3. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J.$$

5. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.