CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A

1. - $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne non nul, et on a : $AU = U$, donc :

   $\boxed{U \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 1.}$

   - De même le vecteur $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul et vérifie $AV = 2V$, donc :

   $\boxed{V \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 2.}$

   - Enfin le vecteur $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul et vérifie $AW = 3W$, donc

   $\boxed{W \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 3.}$

2. On obtient $\boxed{P^2 = I_3}$. Ainsi, $\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible et on a : } P^{-1} = P.}$

3. (a) La matrice P donnée est la matrice dont les vecteurs colonnes sont dans cet ordre les vecteurs propres U, V et W trouvés précédemment.
   Donc la matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP$ est la matrice dont les termes diagonaux sont respectivement les valeurs propres 1,2,3, soit $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$

   (b) Montrons par récurrence que pour tout nombre entier naturel n : $A^n = PD^nP$:

   - Pour $n = 0$: $PD^0P = PIP^{-1} = I$ (car $P^{-1} = P$)
     et $A^0 = I$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$
   - Soit $n \geqslant 0$. On suppose que $A^n = PD^nP$.
     On a montré que $D = P^{-1}AP$ donc en multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite dans chaque membre, on obtient :
     $A = PDP^{-1} = P^{-1}DP$ puisque $P^{-1} = P$
     d'où $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP \times P^{-1}DP$, soit $A^{n+1} = PD^{n+1}P$
   - Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ A^n = PD^nP}$

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(c) La matrice D est diagonale donc D^n aussi et pour tout naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

donc $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix}$

et $A^n = PD^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n & 0 \\ 3^n - 2^{n+1} + 1 & 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}}$

Partie B

1. (a) Le premier client choisit exactement une formule, donc $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$.

   (b) Après réception du $2^{ième}$ bon, il ne peut y avoir plus de deux formules choisies. Donc $c_2 = 0$.
   a_2 est la probabilité qu'il n'y ait qu'une formule choisie. Cette probabilité est égale à la probabilité que le deuxième client ait choisi la même formule que le premier. Donc $a_2 = \dfrac{1}{3}$.

   Puisque, $a_2 + b_2 + c_2 = 1$, on a alors $b_2 = \dfrac{2}{3}$.

   (c)
   - Si, après réception du $k^{ième}$ bon l'événement A_k est réalisé, c'est-à-dire si une seule formule a été choisie, alors après réception du bon suivant :
     - ⋆ l'événement A_{k+1} est réalisé si ce client a choisi la même formule que les k précédents donc $P_{A_k}(A_{k+1}) = \dfrac{1}{3}$
     - ⋆ l'événement B_{k+1} est réalisé si ce client a choisi l'une des 2 autres formules restantes donc $P_{A_k}(B_{k+1}) = \dfrac{2}{3}$,
     - ⋆ puisque chaque client choisit une seule formule $P_{A_k}(C_{k+1}) = 0$
   - Si, après réception du $k^{ième}$ bon l'événement B_k est réalisé, c'est-à-dire si deux formules ont été choisies, alors, après réception du bon suivant :
     - ⋆ l'événement A_{k+1} ne peut pas être réalisé donc $P_{B_k}(A_{k+1}) = 0$.
     - ⋆ l'événement B_{k+1} est aussi réalisé si le $(k+1)^{ième}$ client choisit l'une des deux formules déjà choisies donc $P_{B_k}(B_{k+1}) = \dfrac{2}{3}$,
     - ⋆ l'événement C_{k+1} est réalisé si c'est la dernière formule qui est choisie donc $P_{B_k}(C_{k+1}) = \dfrac{1}{3}$
   - Si, après réception du $k^{ième}$ bon, l'événement C_k est réalisé, c'est-à-dire si les trois formules ont été choisies, alors, après la réception du $(k+1)^{ième}$ bulletin, les trois formules restent choisies, donc : $P_{C_k}(A_{k+1}) = 0, \quad P_{C_k}(B_{k+1}) = 0, \quad P_{C_k}(C_{k+1}) = 1$

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

2. (a) Pour chaque valeur de l'entier k, les événements $A_k,\ B_k,\ C_k$ forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire les trois égalités :

$$\begin{cases} P\left(A_{k+1}\right) = P_{A_k}\left(A_{k+1}\right)P\left(A_k\right) + P_{B_k}\left(A_{k+1}\right)P\left(B_k\right) + P_{C_k}\left(A_{k+1}\right)P\left(C_k\right) \\ P\left(B_{k+1}\right) = P_{A_k}\left(B_{k+1}\right)P\left(A_k\right) + P_{B_k}\left(B_{k+1}\right)P\left(B_k\right) + P_{C_k}\left(A_{k+1}\right)P\left(C_k\right) \\ P\left(C_{k+1}\right) = P_{A_k}\left(C_{k+1}\right)P\left(A_k\right) + P_{B_k}\left(C_{k+1}\right)P\left(B_k\right) + P_{C_k}\left(C_{k+1}\right)P\left(C_k\right) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a_{k+1} = \dfrac{1}{3}a_k \\ b_{k+1} = \dfrac{2}{3}a_k + \dfrac{2}{3}b_k \\ c_{k+1} = \dfrac{1}{3}b_k + c_k \end{cases}$$

Ces trois égalités sont équivalentes à l'unique égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A}$$

(b) On montre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

- La formule est vraie pour $n = 1$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^0 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, avec la convention $M^0 = I$.
- Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

  On sait que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = MM^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$
- Conclusion : la formule est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

3. (a) On sait que $M = \dfrac{1}{3}A$, donc $M^{n-1} = \dfrac{1}{3^{n-1}}A^{n-1}$. On a donc :

$$M^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 2 & 2^{n-1} & 0 \\ 3^{n-1} - 2^n + 1 & 3^{n-1} - 2^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on en déduit :

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2^n - 2 \\ 3^{n-1} - 2^n + 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où : } \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ c_n = \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}} = 1 - \dfrac{2^n - 1}{3^{n-1}} \end{cases}$$

(b) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^{n-1} = +\infty$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0}$.

De plus, $b_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \dfrac{2}{3^{n-1}}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{3^{n-1}} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0}$.

On trouve enfin que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 1.}$

Ce résultat était hautement prévisible, il signifie que si le nombre de clients est élevé, il est très probable que toutes les formules seront choisies.

(c) On observe que l'on calcule le contenu de la variable `c` avec la formule définissant c_n en fonction de n pour tout entier n strictement positif.

Ainsi, ce code semble calculer le rang du premier terme de la suite (c_n) supérieur ou égal à 0,95. Ce rang est donc le plus petit nombre de clients tel que la probabilité que les trois formules soient choisies vaut au moins 0,95.

On peut donc affirmer qu'à partir de 11 clients, on est sûr à 95% que toutes les formules seront choisies.

EXERCICE 2

1. (a) $\lim\limits_{x \to 0} (2x - 1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty}$

La courbe admet donc une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 0.}$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1) = +\infty$, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = 2 + \frac{\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\dfrac{x}{x+1}} = 2 + \frac{1}{x(x+1)}$$

Pour tout $x > 0$, on a $g'(x) > 0$ comme somme de de deux nombres strictement positifs.

Donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}.}$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

3. (a) $\lim_{x \to +\infty} g(x) - (2x-1) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$

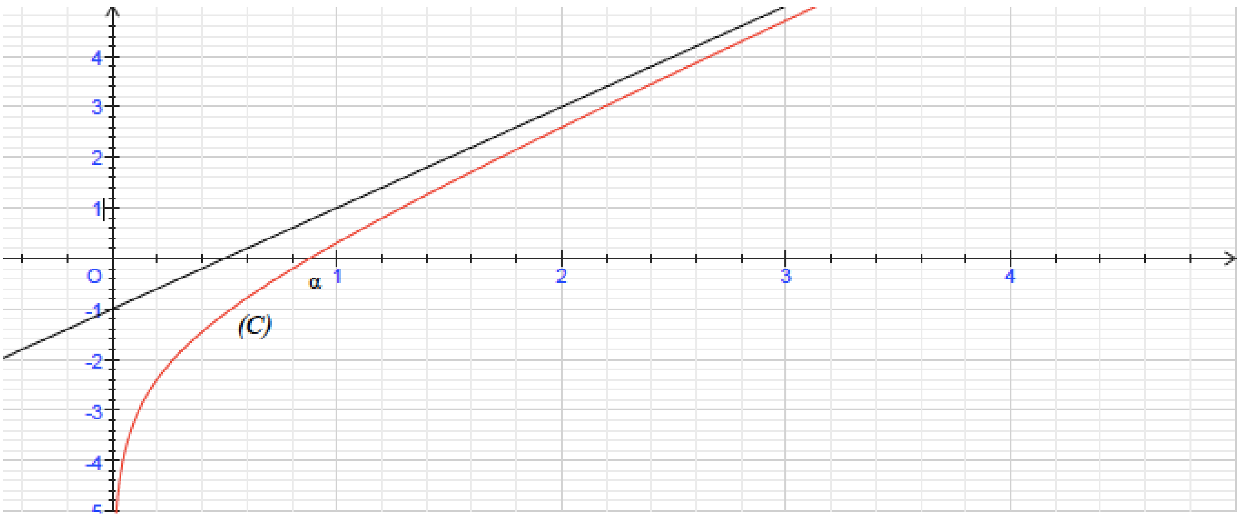
Ainsi $\boxed{\text{la courbe } (C) \text{ admet pour asymptote oblique la droite } (D) \text{ d'équation } y = 2x - 1}$.

(b) Pour tout $x > 0$, $\frac{x}{x+1} < 1$ donc $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$, donc $\boxed{(C) \text{ est toujours en dessous de } (D) \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}}$.

4. (a) La fonction g est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement croissante. De plus $g(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

(b)
```
function y=g(x)
        y=2*x-1+log(x/(x+1))
endfunction
a = input('Entrer la valeur de a : ')
b = input('Entrer la valeur de b : ')
while b - a > 0.01
        m =(a+b)/2
        if g(a)*g(m) <= 0  then
                b = m
        else
                a = m
        end
end
disp(m)
```

5.



Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

6. (a) Pour tout $x>1$, $2x-1-g(x)=-\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, on pose $\left|\begin{array}{l} u(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \\ v'(x)=-1 \end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l} u'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}, \\ v(x)=-x \end{array}\right.$

Les fonctions u' et v' sont continues sur $]1,+\infty[$ donc d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I=\int_1^2 [2x-1-g(x)]\,\mathrm{d}x &= \left[-x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2-\int_1^2 \frac{-x}{x(x+1)}\mathrm{d}x \\ &= -2\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\int_1^2\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ &= -2\ln(2)+2\ln(3)-\ln(2)+\Big[\ln|x+1|\Big]_1^2 = \boxed{3\ln(3)-4\ln(2)} \end{aligned}$$

(b) L'aire délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$ vaut, en unités d'aire, $3\ln(3)-4\ln(2)$.

7. (a) Le vecteur `u` contient les 50 premiers termes de la suite (u_n) dans l'ordre.
Ainsi, l'instruction `S = cumsum(u)` crée un vecteur contenant les sommes cumulées des composantes de `u` : le vecteur `S` contient les valeurs u_1, u_1+u_2, $\sum\limits_{k=1}^{3}u_k$, $\ldots$, $\sum\limits_{k=1}^{50}u_k$, c'est á dire les nombres $\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$ pour n un entier naturel compris entre 1 et 50.
L'instruction `plot(1:50,S,'+')` construit alors un nuage de points représentant ces sommes partielles en fonction de n.
On constate que les points du nuage sont proches des points de la courbe représentative de la fonction ln. Or $\lim\limits_{+\infty}\ln=+\infty$ donc $\boxed{\text{il semble que la série } \sum u_n \text{ soit divergente}}$.

(b) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\geqslant 1$, $u_n=(2n-1)-g(n)=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$, et :

$$\sum_{n=1}^{N}u_n=\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{N}\ln(n+1)-\sum_{n=1}^{N}\ln(n)=\ln(N+1)$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty}(\ln(N+1))=+\infty$, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est divergente}}$

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

EXERCICE 3

1. (a) On a : $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 1$

   Ainsi, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ donc f n'est pas continue au point d'abscisse 2.

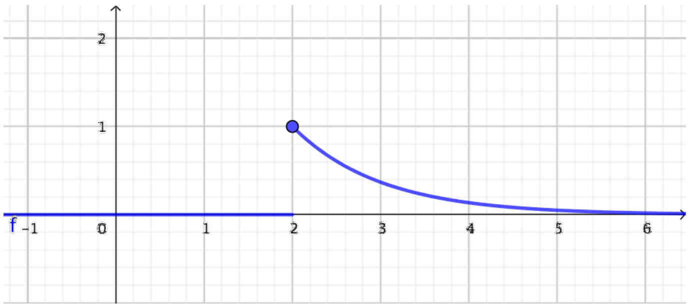
   Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas continue sur } \mathbb{R}}$.

   (b) La fonction f n'est pas continue en 2 donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 2.}$

   (c) $\forall x \in \,]2; +\infty[\,,\ f'(x) = -e^{2-x} < 0$, donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [2; +\infty[}$

   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2-x} = 0$ donc $\boxed{\text{l'axe des abscisses est asymptote horizontale à } C_f \text{ en } +\infty.}$

   (e)



2. (a) Pour $B > a$, $\displaystyle\int_a^B f(x)\,dx = \int_a^B e^{a-x}dx = \left[-e^{a-x}\right]_a^B = 1 - e^{a-B}$

   Or, $\lim\limits_{B \to +\infty} e^{a-B} = \lim\limits_{A \to -\infty} e^A = 0$, donc $\lim\limits_{B \to +\infty} \left(1 - e^{a-B}\right) = 1$

   Donc $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge et vaut } 1.}$

   (b)
   - f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$
   - f est continue sur $]-\infty, a[$ en tant que fonction constante nulle, f est continue sur $]a, +\infty[$ comme composée de fonctions de référence continues.
     De plus, $\lim\limits_{x \to a^{--}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) = 1$
     Ainsi, f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - f étant nulle sur $]-\infty, a[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ converge et vaut 0.

     De plus, d'après la question précédente, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1

     On en déduit, par la relation de Chasles, que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1

   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc bien une densité de probabilité.}}$

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F_X\ (x) = \displaystyle\int_{\infty}^{x} f\,(t)\,dt$

- Si $x < a$, $\ F_X\ (x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
- Si $x \geqslant a$, $\ F_X\ (x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} e^{a-t}dt = \left[-e^{a-t}\right]_a^x = 1 - e^{a-x}$

(b) $F_X\,(x) = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant a \\ 1 - e^{a-x} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant a \\ e^{a-x} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant a \\ a - x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

L'équation $F_X\,(x) = \dfrac{1}{2}$ admet pour unique solution $\boxed{x = a + \ln(2)}$

(c) $P_{(X>a+1)}\,(X > a+2) = \dfrac{P\,((X > a+1) \cap (X > a+2))}{P\,(X > a+1)} = \dfrac{P\,(X > a+2)}{P\,(X > a+1)}$

d'où $\quad P_{(X>a+1)}\,(X > a+2) = \dfrac{1 - F\,(a+2)}{1 - F\,(a+1)} = \dfrac{e^{-2}}{e^{-1}} = \boxed{\dfrac{1}{e}}$

4. (a) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F_Y\ (x) = P\,(X - a \leqslant x) = P\,(X \leqslant a + x) = F_X\ (x + a)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F_Y\ (x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x + a < a \\ 1 - e^{a-(x+a)} & \text{si } x + a \geqslant a \end{cases} \boxed{= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$

(b) On en déduit que Y est une variable à densité qui suit la **loi exponentielle de paramètre 1**.

(c) D'après (b), $E\,(Y) = \dfrac{1}{1} = 1$ et $\ V\,(Y) = \dfrac{1}{1^2} = 1$

On en déduit, par linéarité de l'espérance, $E\,(X) = E\,(Y + a) = E\,(Y) + a = 1 + a$

et $V\,(X) = V\,(Y + a) = V\,(Y) = 1$

5. (a) $E(S_n) = E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - 1)\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(E(X_k) - 1)$ par linéarité de l'espérance

et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont de même loi que X

donc $E(S_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(1 + a - 1) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a = \dfrac{1}{n} \times na = a$

donc **S_n est un estimateur sans biais de a**

(b) $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes

donc $V(S_n) = V\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - 1)\right) = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} V(X_k)$

donc $V(S_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$

On en déduit que le risque quadratique $r\,(S_n)$ vaut : $r\,(S_n) = V\,(S_n) + 0^2$

soit $r\,(S_n) = V\,(S_n) = \dfrac{1}{n}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r\,(S_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0.}$

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(c) Vu l'instruction `X = Y + a`, le vecteur `Y` doit contenir 50 réalisations de la variable aléatoire Y de loi exponentielle de paramètre 1, conformément à la question **3.b)**. Ce faisant, l'espérance de Y est 1 et on peut créer ce vecteur en écrivant : `Y = grand(1,50,'exp',1)`. Enfin, pour calculer S_n connaissant le vecteur `X`, il suffit de calculer la moyenne des composantes du vecteur `X-1`. On en déduit le programme ci-dessous.

```
a = 1
Y = grand(1,50,'exp',1)
X = Y + a
S = mean(X-1)
```


Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.