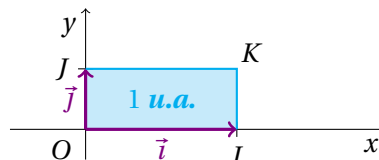


11 | Intégrales et primitives

I – Intégrale et aire

1 – Unité d'aire

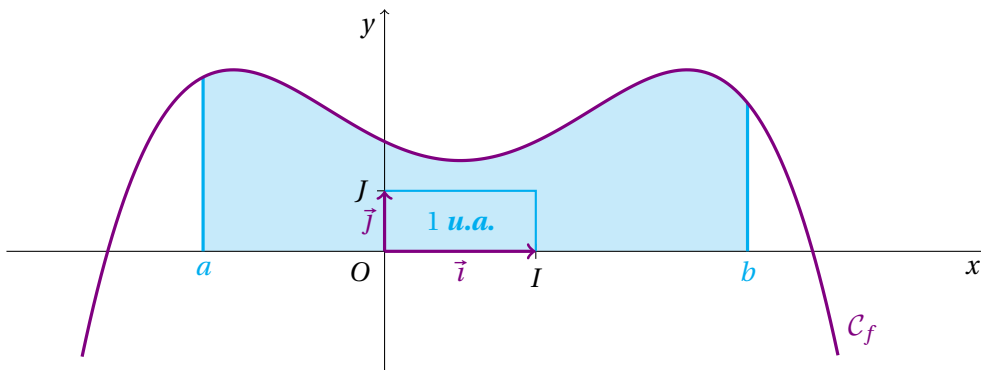
Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée $u.a.$, est l'aire du rectangle unitaire $OIKJ$ avec $I(1,0)$, $J(0,1)$ et $K(1,1)$.



2 – Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 11.1 – Soient f une fonction définie, **continue** et **positive** sur un intervalle $[a, b]$ et C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$.



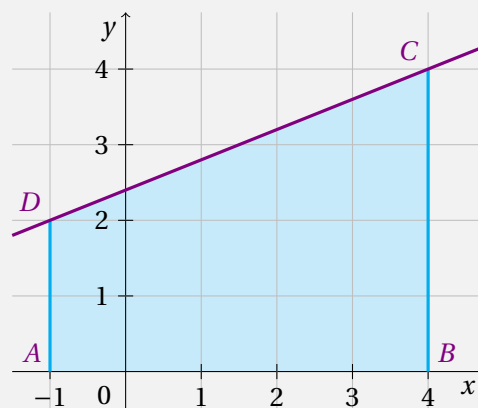
Remarque 11.2 –

- $\int_a^b f(x) dx$ se lit "intégrale de a à b de $f(x) dx$ ".
- Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.
- La variable x est dite "*muette*". Elle n'intervient pas dans le résultat, c'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$.
- $\int_a^a f(x) dx = 0$ car le domaine \mathcal{D}_f est alors réduit à un segment.

Exemple 11.3 – Calculer $\int_{-1}^4 \frac{2x+12}{5} dx$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{2x+12}{5}$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1, 4]$. L'intégrale $\int_{-1}^4 \frac{2x+12}{5} dx$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

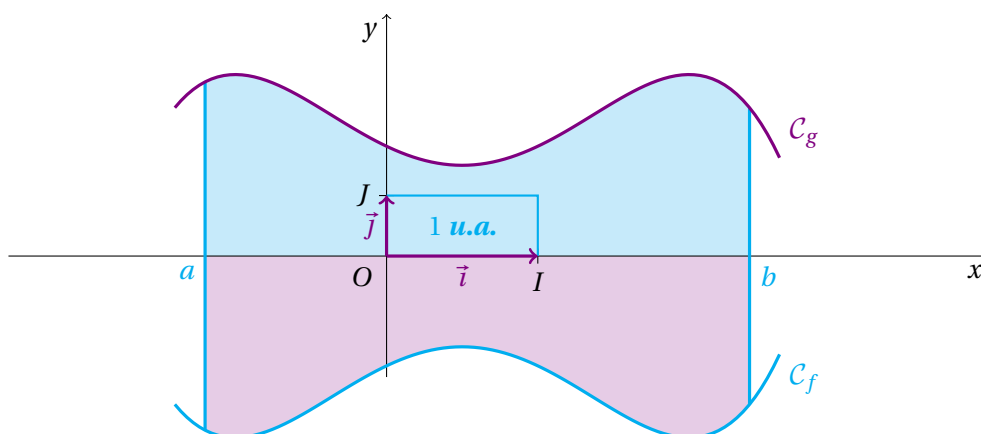
$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 \frac{2x+12}{5} dx &= \frac{(AD + BC) \times AB}{2} \\ &= \frac{(2 + 4) \times 5}{2} = 15. \end{aligned}$$



3 – Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et **négative** sur un intervalle $[a, b]$, alors la fonction g définie sur l'intervalle $[a, b]$ par $g(x) = -f(x)$ est une fonction continue et **positive** sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine \mathcal{D}_g compris entre la courbe \mathcal{C}_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Définition 11.4 – Soient f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a, b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire \mathcal{A} , exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}.$$

4 – Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui, à tout réel x de l'intervalle $[a, b]$, associe l'intégrale de la fonction f entre a et x : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Théorème 11.5

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée est f .

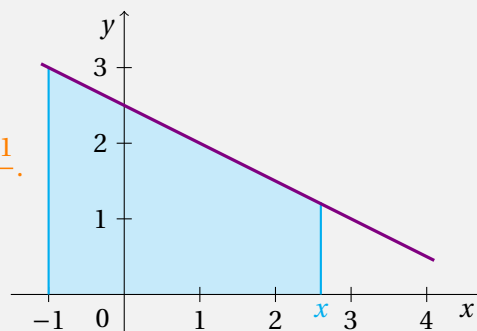
Exemple 11.6 – Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 4]$ par $f(x) = \frac{5-x}{2}$.

Si x est un réel de l'intervalle $[-1, 4]$, la fonction F définie par $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ est égale à l'aire du trapèze colorié. Donc

$$F(x) = \frac{(3 + \frac{5-x}{2})(1+x)}{2} = \frac{(11-x)(1+x)}{4} = \frac{-x^2 + 10x + 11}{4}.$$

La fonction F est bien dérivable sur $[-1, 4]$ et

$$\forall x \in [-1, 4], \quad F'(x) = \frac{1}{4} \times (-2x + 10) = \frac{5-x}{2} = f(x).$$



II – Primitives

1 – Définition

Définition 11.7 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit qu'une fonction F est une **primitive** de la fonction f sur I si F est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 11.8 – Vérifier les assertions suivantes.

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur \mathbb{R} de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 3x^2 + 6x = f(x)$.

- $G : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur \mathbb{R}_+^* de $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$.

- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H : x \mapsto x^2 + c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto 2x$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x = f(x)$.

Remarque 11.9 –

- Comme F est dérivable sur I , la fonction F est en particulier continue sur I .
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f .
C'est pourquoi on parle d'**une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f .

Théorème 11.10

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I .
- Si F est une primitive de f sur I , alors toute autre primitive de f sur I est de la forme $F + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné : Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 11.11 – Montrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = x^2 - 1$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ qui vérifie $F(1) = 0$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x = f(x)$ et $F(1) = 1^2 - 1 = 0$.

2– Primitives des fonctions usuelles

Étant donnée la définition d'une primitive, certains résultats connus pour les fonctions dérivées se prolongent aux fonctions primitives.

Proposition 11.12

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I .

Proposition 11.13 – Primitives des fonctions usuelles

Le tableau suivant récapitule les primitives des fonctions usuelles.

f est définie sur I par	une primitive F est donnée par	validité
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax$	sur \mathbb{R}
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur \mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	sur \mathbb{R}_+^* ou sur \mathbb{R}_-^*
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \geq 2 \text{ entier})$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur \mathbb{R}_+^* ou sur \mathbb{R}_-^*
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur \mathbb{R}_+^*

Exemple 11.14 – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2$

$$F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$$

2. $f(x) = x + \frac{3}{2}$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + C$$

3. $f(x) = (2x+1)(x-3)$

Tout d'abord, je développe $f(x) = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$.

Ainsi une primitive est donnée par $F(x) = 2 \times \frac{x^3}{3} - 5 \times \frac{x^2}{2} - 3x + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + C$.

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

8. $f(x) = \frac{6x^2 - 8x + 2}{5}$

$$F(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{5} + C$$

5. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3 \times \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C$$

9. $f(x) = -\frac{6}{x^4}$

$$F(x) = -6 \times \left(-\frac{1}{3x^3}\right) = \frac{2}{x^3} + C$$

6. $f(x) = \frac{1}{x^5}$

$$F(x) = -\frac{1}{4x^4} + C$$

10. $f(x) = x^2 + 3x - 2$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3 \times \frac{x^2}{2} - 2x + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$$

7. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 2\sqrt{x} + C = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2\sqrt{x} + C$$

11. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3x^2 - \frac{1}{x^2}$

$$F(x) = 2 \times 2\sqrt{x} + 3 \times \frac{x^3}{3} - \left(-\frac{1}{x}\right) + C = 4\sqrt{x} + x^3 + \frac{1}{x} + C$$

3 – Primitives des fonctions composées usuelles

Proposition 11.15 – Primitives des fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Le tableau suivant récapitule les primitives des fonctions composées.

Conditions	fonction f	une primitive F est donnée par
$n \in \mathbb{N}^*$	$f = u' \times u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I et $n > 1$	$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$



Méthode 11.16 – Calculer une primitive d'une fonction composée

Pour calculer une primitive d'une fonction composée f , il faut s'appuyer sur le tableau précédent.

On procède de la manière suivante :

1. On repère la forme de la fonction : un produit $u' \times u^n$, un quotient $\frac{u'}{u^n}$, etc.
2. On **identifie** la fonction u et on **calcule** sa dérivée u' .
3. On compare la forme repérée avec la fonction de départ. Il y a alors deux possibilités :
 - La forme repérée correspond **exactement** à la fonction de départ, auquel cas une primitive est directement donnée par la formule du tableau.
 - La forme repérée est de la forme $k \times f(x)$, auquel cas une primitive est donnée par la formule du tableau, **multipliée par** $\frac{1}{k}$.

Exemple 11.17 – Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x+1)^2$

f semble être de la forme $u' u^2$ avec $u(x) = 2x+1$. Puisque $u'(x) = 2$, alors

$$u'(x)u(x)^2 = 2(2x+1)^2 = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{(2x+1)^3}{6}.$$

2. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x+1$. Puisque $u'(x) = 1$, alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x+1}.$$

$$3. f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$$

f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 - 3x$. Puisque $u'(x) = -3$, alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(1-3x)^2} = -3f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{-3} \times \left(-\frac{1}{u(x)} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-3x} = \frac{1}{3-9x}.$$

$$4. f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$$

f semble être de la forme $u' u^3$ avec $u(x) = x^2 - x + 1$. Puisque $u'(x) = 2x - 1$, alors

$$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)(x^2-x+1)^3 = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2-x+1)^4}{4}.$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

f semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x + 2$. Puisque $u'(x) = 1$, alors

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x+2}.$$



Méthode 11.18 – Déterminer la primitive vérifiant une condition donnée

Pour déterminer la primitive F d'une fonction f vérifiant une condition donnée :

1. On commence par déterminer la forme générale de toutes les primitives de la fonction f :
 ➤ Les primitives de f sont toutes de la forme $F + C$.
2. On utilise ensuite la condition que doit vérifier la primitive demandée pour déterminer la valeur de la constante C .

Exemple 11.19 – Calculer la primitive F de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

Je commence par déterminer la forme générale des primitives de f .

f est une fonction polynomiale donc je peux primitiver terme à terme :

$$F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + 2x + C = x^3 - 2x^2 + 2x + C.$$

Je dois maintenant déterminer la valeur de la constante C . Je sais que $F(1) = 0$ donc

$$F(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 2 + C = 0.$$

Autrement dit, $1 + C = 0$. Donc $C = -1$ et la primitive F de f qui vérifie $F(1) = 0$ est donnée par

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

III – Intégrale d'une fonction continue

1 – Définition

Définition 11.20 – Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I . Si F est une primitive de f sur I , alors l'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Remarque 11.21 –

- La différence $F(b) - F(a)$ se note $\left[F(x)\right]_a^b$. Ainsi

$$\int_a^b f(x) \, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Puisqu'il s'agit de la différence entre deux termes, le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 11.22 – Calculer chacune des intégrales suivantes.

1. $\int_1^3 3t^2 + 2t - 1 \, dt$

Je commence par calculer une primitive de la fonction $f(t) = 3t^2 + 2t - 1$.

Il s'agit d'une fonction polynomiale donc je peux primitiver terme à terme :

$$F(t) = 3 \times \frac{t^3}{3} + 2 \times \frac{t^2}{2} - 1 \times t = t^3 + t^2 - t.$$

Dès lors, l'intégrale se calcule grâce à cette primitive :

$$\int_1^3 3t^2 + 2t - 1 \, dt = \left[t^3 + t^2 - t\right]_1^3 = (3^3 + 3^2 - 3) - (1^3 + 1^2 - 1) = 33 - 1 = 32.$$

2. $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$

Je commence par calculer une primitive de la fonction $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

La fonction semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + x^2$. Puisque $u'(x) = 2x$, alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{u(x)}\right) = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Dès lors,

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx = \left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right]_0^1 = -\frac{1}{2(1+1^2)} + \frac{1}{2(1+0^2)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

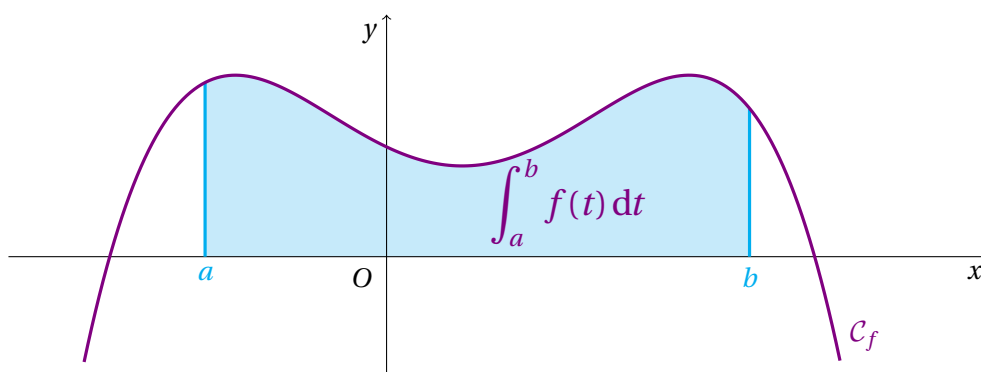
Proposition 11.23

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I . Alors

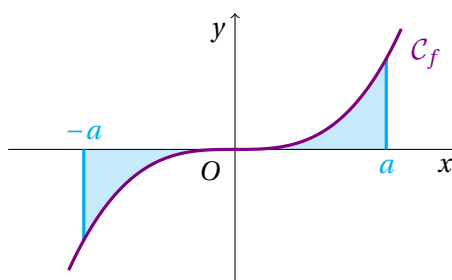
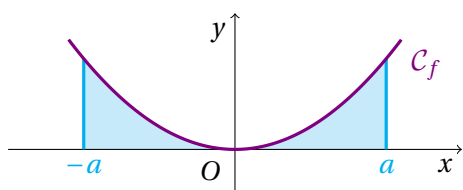
$$\int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt.$$

2 – Premières propriétés**Proposition 11.24**

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$, f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et \mathcal{C}_f la courbe représentative de f . Alors $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire de la surface comprise entre \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

**Proposition 11.25**

- Si la fonction f est continue et paire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \times \int_0^a f(t) dt$.
- Si la fonction f est continue et impaire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

**Exemple 11.26 –**

- $\int_{-1}^1 t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt = 0$ puisque la fonction est impaire.
- $\int_{-1}^1 t^2 + |t| dt = 2 \times \int_0^1 t^2 + |t| dt = 2 \times \int_0^1 t^2 + t dt = 2 \times \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3}$ par parité.

Proposition 11.27 – Relation de Chasles

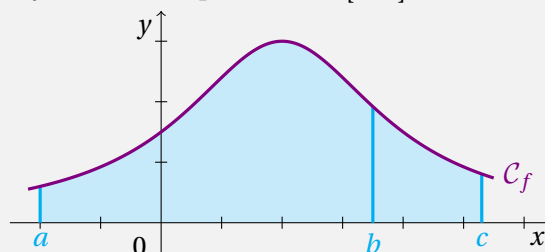
Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I . Alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

Exemple 11.28 – Interprétation graphique

L'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = b$ et $x = c$.

(f continue et positive sur $[a, c]$ et $a \leq b \leq c$).

**Méthode 11.29 – Calculer l'intégrale d'une fonction f définie "par morceaux"**

Pour calculer l'intégrale d'une fonction f dont l'expression est définie en plusieurs morceaux, on utilise la relation de Chasles. On décompose ainsi l'intégrale de f sur chaque intervalle sur lequel on connaît l'expression de f .

Exemple 11.30 – Soit f la fonction définie sur $[-2, 3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Calculer $\int_{-2}^3 f(x) dx$.

J'applique la relation de Chasles pour décomposer l'intégrale en deux morceaux sur lesquels je connais l'expression de f puis je remplace $f(x)$ par ces expressions :

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 (x+1) dx + \int_1^3 -\frac{1}{x^2} dx.$$

Il ne me reste alors plus qu'à calculer ces deux intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 f(x) dx &= \int_{-2}^1 (x+1) dx + \int_1^3 -\frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^1 + \left[\frac{1}{x} \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + (-2) \right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} + 1 - 2 + 2 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

