DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 –

1.

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{12}{12} - \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \times 6}{\frac{2}{15} - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{\left(\frac{10}{15} - \frac{12}{15}\right) \times 6}{\frac{6}{45} - \frac{20}{45}} \\ &= \frac{\frac{-2}{15} \times 6}{\frac{-14}{45}} \\ &= \frac{12}{15} \times \frac{45}{14} \\ &= \frac{2 \times 6 \times 3 \times 15}{15 \times 2 \times 7} \\ &= \frac{18}{7} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} C &= \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times 3\right) \div \frac{2}{5} \\ &= \left(1 - \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) \times 3\right) \div \frac{2}{5} \\ &= \left(1 - \frac{1}{6} \times 3\right) \div \frac{2}{5} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \div \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
D &= \left(1-\frac{1}{8}\right)\div\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{2}{7}+1\right)^2\\
&= \frac{7}{8}\div\left(\frac{4}{12}+\frac{9}{12}\right)\times\left(\frac{9}{7}\right)^2\\
&= \frac{7}{8}\div\frac{13}{12}\times\frac{81}{49}\\
&= \frac{7}{8}\times\frac{12}{13}\times\frac{81}{49}\\
&= \frac{7\times 3\times 4\times 81}{2\times 4\times 13\times 7\times 7}\\
&= \frac{243}{182}
\end{aligned}$$

Exercice 2 –

1. On a $2x-3=0 \iff 2x=3 \iff x=\dfrac{3}{2}$ donc $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
2. On a $x+3=2x-1 \iff -x=-4 \iff x=4$ donc $\mathscr{S}=\{4\}$.
3. On a $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{4} \iff \dfrac{1}{3}x=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3} \iff \dfrac{1}{3}x=\dfrac{1}{12} \iff x=3\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$ donc $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.
4. Commençons par calculer le discriminant : $\Delta=(-10)^2-4\times 1\times 21=100-84=16>0$.
   Il y a donc deux racines
   $$x_1=\frac{10-4}{2}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{10+4}{2}=7.$$
   Donc $\mathscr{S}=\{3;7\}$.
5. Commençons par calculer le discriminant : $\Delta=\left(\dfrac{6}{7}\right)^2-4\times 3\times\dfrac{3}{49}=\dfrac{36}{49}-\dfrac{36}{49}=0$.
   Il y a donc une seule racine
   $$x_0=\frac{-\frac{6}{7}}{2\times 3}=\frac{-1}{7}.$$
6. On a
   $$\begin{aligned}
   \frac{1}{x-1}=\frac{2}{2x+3} &\iff \frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x+3}=0\\
   &\iff \frac{2x+3}{(x-1)(2x+3)}-\frac{2(x-1)}{(x-1)(2x+3)}=0\\
   &\iff \frac{2x+3-2x+2}{(x-1)(2x+3)}=0\\
   &\iff \frac{5}{(x-1)(2x+3)}=0
   \end{aligned}$$
   Or, il n'y a évidemment pas de solution à l'équation $1=0$ donc $\mathscr{S}=\emptyset$.
   Remarque : Pas besoin de calculer les valeurs interdites ici puisque il est clair que l'équation « numérateur = 0 » n'admet pas de solution.
7. Commençons par déterminer les valeurs interdites. On a
   $$\begin{aligned}
   (x-1)(x-3)=0 &\iff x-1=0 \text{ ou } x-3=0\\
   &\iff x=1 \text{ ou } x=3
   \end{aligned}$$
   Par ailleurs, pour résoudre $x^2-5x+6=0$, on commence par calculer le discriminant :
   $\Delta=(-5)^2-4\times 1\times 6=25-24=1$. Il y a donc deux racines
   $$x_1=\frac{5-1}{2}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+1}{2}=3.$$
   Or, 3 est une valeur interdite donc il n'y a qu'une solution $x=2$. Ainsi, $\mathscr{S}=\{2\}$.

Exercice 3 –

1. $-2x+3>0 \iff -2x>-3 \iff x<\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$. Donc $\mathscr{S}=\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$.
2. $2x-1<\dfrac{1}{2} \iff 2x<1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \iff x<\dfrac{3}{4}$. Donc $\mathscr{S}=\left]-\infty;\dfrac{3}{4}\right[$.
3. $\dfrac{1}{3}x+1\geq\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3} \iff -\dfrac{1}{3}x\geq-\dfrac{4}{3} \iff x\leq\dfrac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{3}}=4$. Donc $\mathscr{S}=]-\infty;4]$.
4. On commence par étudier le signe de x^2+2x+1. Le discriminant vaut : $\Delta=4-4=0$.
   Il y a donc une racine
   $$x_0=-1.$$
   On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^2+2x+1		$+$	0	$+$	

   Donc $\mathscr{S}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.
5. On commence par étudier le signe de x^2-5x+6. Le discriminant vaut : $\Delta=25-24=1$.
   Il y a donc deux racines
   $$x_1=2 \quad \text{et} \quad x_2=3.$$
   On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	$+$	$-$	

   Donc $\mathscr{S}=[2;3]$.
6. On a
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x-1}\geq\frac{4}{2x-1}\\
\iff\ &\frac{(x-1)(2x-1)+3(x+2)(2x-1)-4(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(2x-1)}\geq 0\\
\iff\ &\frac{2x^2-x-2x+1+6x^2-3x+12x-6-4x^2+4x-8x+8}{(x+2)(x-1)(2x-1)}\geq 0\\
\iff\ &\frac{4x^2+2x+3}{(x+2)(x-1)(2x-1)}\geq 0
\end{aligned}$$
   Le discriminant de $4x^2+2x+3$ vaut $\Delta=(2^2-4\times4\times3=-44<0$.
   Par ailleurs, $x+2=0 \iff x=-2$, $x-1=0 \iff x=1$ et $2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$.
   On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$4x^2+2x+3$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4x^2+2x+3}{(x+2)(x-1)(2x-1)}$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

Ainsi, $\mathscr{S} = \left]-2;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$.

Exercice 4 –

1. (a) On a

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{3} - \frac{9}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4} = \frac{-\frac{27}{8}}{3} + \frac{27}{8} + \frac{9}{4} = -\frac{9}{8} + \frac{27}{8} + \frac{18}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}.$$

(b) D'après le graphique, on a le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

(c) On a

$$\begin{aligned}\frac{(x+3)(2x-3)^2}{12} &= \frac{(x+3)(4x^2-12x+9)}{12}\\ &= \frac{4x^3-12x^2+9x+12x^2-36x+27}{12}\\ &= \frac{4x^3-27x+27}{12}\\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

(d) 12 étant un nombre strictement positif, il suffit d'étudier le signe de $(x+3)(2x-3)^2$.
Un carré étant toujours positif, on a pour tout x, $(2x-3)^2 \geq 0$.
Par ailleurs, $x+3=0 \iff x=-3$. On en déduit le tableau de signe suivant pour $f(x)$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

2. Pour résoudre l'équation $g(x) = 0$, on commence par calculer le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{2}{3} \times (-3) = 1 + 8 = 9$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-1-3}{\frac{4}{3}} = -3 \quad \text{et} \quad \frac{-1+3}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}.$$

3. Pour étudier la position des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, il nous faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$. D'après la question précédente, on a

$$g(x) = \frac{2}{3}(x+3)\left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{(x+3)(2x-3)^2}{12} - \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \\ &= \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \times \left(\frac{2x-3}{4} - 1\right) \\ &= \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \times \frac{2x-7}{4} \\ &= \frac{(x+3)(2x-3)(2x-7)}{12}. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(2x-3)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

- sur $]-\infty;-3]$ et sur $\left[\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$, $\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$,
- sur $\left[-3;\frac{3}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$.