EXERCICES — CHAPITRE 10

Probabilités

Exercice 1 – Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\forall\varepsilon>0,\quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Exercice 2 – On considère une suite de lancers indépendants d'une même pièce équilibrée. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si l'évènement "obtenir PILE" est réalisé au n-ième lancer et 0 sinon. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\overline{X_n}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.

1. Que représente $\overline{X_n}$?
2. Justifier que, pour tout réel strictement positif ε,

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\overline{X_n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

3. Le résultat précédent est-il conforme à l'intuition ?

Exercice 3 (extrait de BSB 2018) – Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

1. Montrer que les intégrales

$$I=\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t,\qquad J=\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad K=\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes et vérifier que $I=\dfrac{1}{a}$, $\quad J=\dfrac{1}{2a^2}\quad$ et $\quad K=\dfrac{1}{3a^3}$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{3a^3}{t^4} & \text{si } t\geqslant a,\\ 0 & \text{si } t<a.\end{cases}$$

2. Montrer en utilisant un des calculs de la question **1.** que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère X une variable aléatoire de densité f.

3. Montrer en utilisant certains calculs de la question **1.** que X admet une espérance et une variance et vérifier que

$$E(X)=\frac{3a}{2}\quad\text{et}\quad V(X)=\frac{3a^2}{4}.$$

4. On note F la fonction de répartition de X.
   (a) Calculer $F(x)$ pour $x<a$.
   (b) Justifier que lorsque $x\geqslant a$,
   $$F(x)=1-\left(\frac{a}{x}\right)^3.$$
   (c) Vérifier que
   $$P(2a\leqslant X\leqslant 4a)=\frac{7}{64}\quad\text{et}\quad P(X\geqslant 2a)=\frac{1}{8}.$$
   Calculer $P_{[X\geqslant 2a]}(X\leqslant 4a)$.
5. On considère maintenant n variables aléatoires indépendantes $X_1,\dots,X_n$ suivant la même loi que X. On pose
   $$M_n=\frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n}X_k.$$
   (a) Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
   (b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que
   $$P\left(\left|M_n-a\right|>\varepsilon\right)\leqslant\frac{a^2}{3n\varepsilon^2}.$$

Exercice 4 (extrait de ESCP 2017) – Soient a un réel vérifiant $-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-a}{2} & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \dfrac{1+a}{2} & \text{si } 0<x\leqslant 1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité et on suppose que le paramètre a est inconnu.

2. Calculer $E(X)$ et montrer que $V(X)=\dfrac{4-3a^2}{12}$.

3. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
4. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant toutes la même loi que X. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

   (a) On pose $Y_n = 2\overline{X_n}$. Montrer que $E(Y_n) = a$.

   (b) Montrer que $V(Y_n) = \dfrac{4-3a^2}{3n}$.

   (c) Soit ε un réel strictement positif. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à Y_n, établir l'inégalité

$$P\left(\left|Y_n - a\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{4}{3n\varepsilon^2}.$$

Estimation

Exercice 5 – Soit R un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \dfrac{2t}{R^2} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant R, \\ 0 & \text{si } t > R. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Soit T une variable aléatoire de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_T de T.
3. Justifier que T admet une espérance et une variance et les déterminer.
4. Soient $n \geqslant 2$ un entier et $(T_1, \ldots, T_n)$ un échantillon de T. On définit la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k$.

   (a) Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

   (b) En déduire que $Z_n = \dfrac{3}{2}Y_n$ est un estimateur sans biais de R.

   (c) Déterminer le risque quadratique de Z_n.
5. On suppose qu'en simulant T, on a obtenu les valeurs suivantes :

   3.61, 1.47, 3.81, 3.65, 1.42, 3.93, 3.88, 1.88, 3.18, 2.22, 1.24, 2.95, 2.11, 1.73, 2.95

   En déduire une estimation de R.

Exercice 6 – Soit θ un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \theta, \\ e^{-(t-\theta)} & \text{si } t \geqslant \theta, \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Soit T une variable aléatoire de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_T de T.
3. On introduit la variable aléatoire W définie par $W = T - \theta$.

   (a) Expliciter la fonction de répartition F_W de W puis reconnaître la loi de W.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de W puis l'espérance et la variance de T.
4. Soient $n \geqslant 2$ un entier et $(T_1, \ldots, T_n)$ un échantillon de T. On définit la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k$.

   (a) Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

   (b) En déduire que $Z_n = Y_n - 1$ est un estimateur sans biais de θ.

   (c) Déterminer le risque quadratique de Z_n.
5. On suppose qu'en simulant T, on a obtenu les valeurs suivantes :

   5.66, 5.1, 5.07, 5.60, 5.88, 6.52, 10.07, 6.38, 7.52, 5.58, 5.34, 5.31, 5.59, 7.91, 6.13

   En déduire une estimation de θ.

Exercice 7 – Soient X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0,1\right[$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de la loi de X. On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\alpha \in \left]0,1\right[$.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(|\overline{X_n} - p| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

3. En appliquant l'inégalité précédente à un ε bien choisi, en déduire que

$$P\left(p \in \left[\overline{X_n} - \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 1 - \alpha.$$

4. Établir le tableau de variation sur $[0,1]$ de la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$. En déduire que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
5. En déduire un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $1-\alpha$.