VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

- f est une densité si et seulement si
 - ightharpoonup Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
 - ▶ f n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité.
 - ightharpoonup L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.
- Je connais la densité et je cherche la fonction de répartition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

• Lien entre fonction de répartition et probabilité :

$$F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

• Je connais la **fonction de répartition** et je cherche la **densité** :

 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F'_X(x)$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).

Calculs de probabilités en connaissant la fonction de répartition :

$$P(X \leqslant a) = F_X(a), \qquad P(X \geqslant a) = 1 - F_X(a) \quad \text{et} \quad P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a).$$

• Calculs de probabilités en connaissant la densité :

$$P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(t) dt$$
, $P(X \geqslant a) = \int_{a}^{+\infty} f(t) dt$ et $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(t) dt$.

• Espérance et variance (sous réserve de convergence) :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt, \qquad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \quad \text{ et } \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

• Loi **uniforme** sur l'intervalle [a, b]: (3 morceaux)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \le t \le b, \\ 0 & \text{si } t > b. \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b, \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases} \qquad E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

• Loi **exponentielle** de paramètre λ : (2 morceaux)

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \ge 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \ge 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

• Loi normale : se ramener à la loi normale centrée réduite en utilisant que

X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ \iff $\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.