CONCOURS BLANC 4 — ECRICOME

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 5 pages et est constitué de 3 exercices. Bon courage!

Exercice 1 –

Partie A

Soient A et P les matrices carrées d'ordre 3 définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On considère les matrices $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que U, V et W vérifient les équations suivantes $AU = U$, $AV = 2V$, $AW = 3W$.
2. Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
3. (a) Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, on a $A^n = PD^nP$.
   (c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n & 0 \\ 3^n - 2^{n+1} + 1 & 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}.$$

Partie B

Une entreprise de restauration collective propose trois formules de repas à n clients, où n est un entier naturel non nul. Chacun des clients choisit exactement **une** de ces trois formules au hasard et de façon équiprobable puis envoie un bon de commande à l'entreprise. L'entreprise réceptionne alors pour chacun de ses n clients son bon de commande et lui livre la formule choisie.
On suppose que les choix de formule des clients sont mutuellement indépendants.
Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note :

- A_k l'événement : "après réception du k-ième bon, une seule formule a été choisie",
- B_k l'événement : "après réception du k-ième bon, exactement deux formules ont été choisies",
- C_k l'événement : "après réception du k-ième bon, les trois formules ont été choisies".

Enfin, on pose pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $a_k = P(A_k)$, $b_k = P(B_k)$ et $c_k = P(C_k)$.

Le tableau ci-dessous donne un exemple de choix de formule pour les cinq premiers bons reçus :

	1er bon	2e bon	3e bon	4e bon	5e bon
numéro de la formule choisie	n° 2	n° 1	n° 2	n° 1	n° 3

Dans ce cas, B_2 est réalisé, C_4 n'est pas réalisé mais C_5 l'est.

1. (a) Préciser les nombres a_1, b_1 et c_1.
On ne demande pas de justification dans cette question.

   (b) Justifier les égalités $\quad a_2 = \dfrac{1}{3}, \quad b_2 = \dfrac{2}{3}, \quad c_2 = 0.$

   (c) Pour tout entier naturel k non nul, donner les valeurs de $P_{A_k}(A_{k+1})$, $P_{B_k}(A_{k+1})$, $P_{C_k}(A_{k+1})$, $P_{A_k}(B_{k+1})$, $P_{B_k}(B_{k+1})$, $P_{C_k}(B_{k+1})$, $P_{A_k}(C_{k+1})$, $P_{B_k}(C_{k+1})$, $P_{C_k}(C_{k+1})$.

2. (a) On considère la matrice M telle que $M = \dfrac{1}{3}A$ où A est la matrice définie dans la **partie A**.
En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$,
$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}.$$

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

3. (a) Justifier, pour tout entier naturel n non nul, les égalités $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ c_n = 1 - \dfrac{2^n - 1}{3^{n-1}} \end{cases}$.

   (b) Déterminer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.
Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

   (c) On considère le script `Scilab` suivant :

```
n=1
c=1-(2^n-1)/3^(n-1)
while c<0.95
    n=n+1
    c=1-(2^n-1)/3^(n-1)
end
disp(n)
```

   Après exécution, on obtient l'affichage suivant :

```
11.
```

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 2 –

Soit g la fonction numérique réelle définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

3. (a) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ dont on précisera une équation.

   (b) Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

   (b) Recopier et compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de `Scilab` afin qu'il affiche un encadrement de α à 10^{-2} près lorsque a et b sont choisis tels que $\alpha \in [a,b]$.

```
function y=g(x)
    y=............
endfunction
a=input('Entrer la valeur de a :')
b=input('Entrer la valeur de b :')
while b-a ............
    m=............
    if g(a)*g(m)<=0 then
        b=............
    else
        ............
    end
end
disp(............)
```

5. Le programme `Scilab` ci-dessus affiche `0.88` comme résultat. Dans un repère orthonormé, placer le réel α sur l'axe des abscisses, tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$.

6. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^2 \Big((2x-1) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = 2\ln(3) - 3\ln(2) + \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x,$$

   et en déduire que

$$\int_1^2 \Big((2x-1) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = 3\ln(3) - 4\ln(2).$$

   (b) Interpréter graphiquement le résultat.

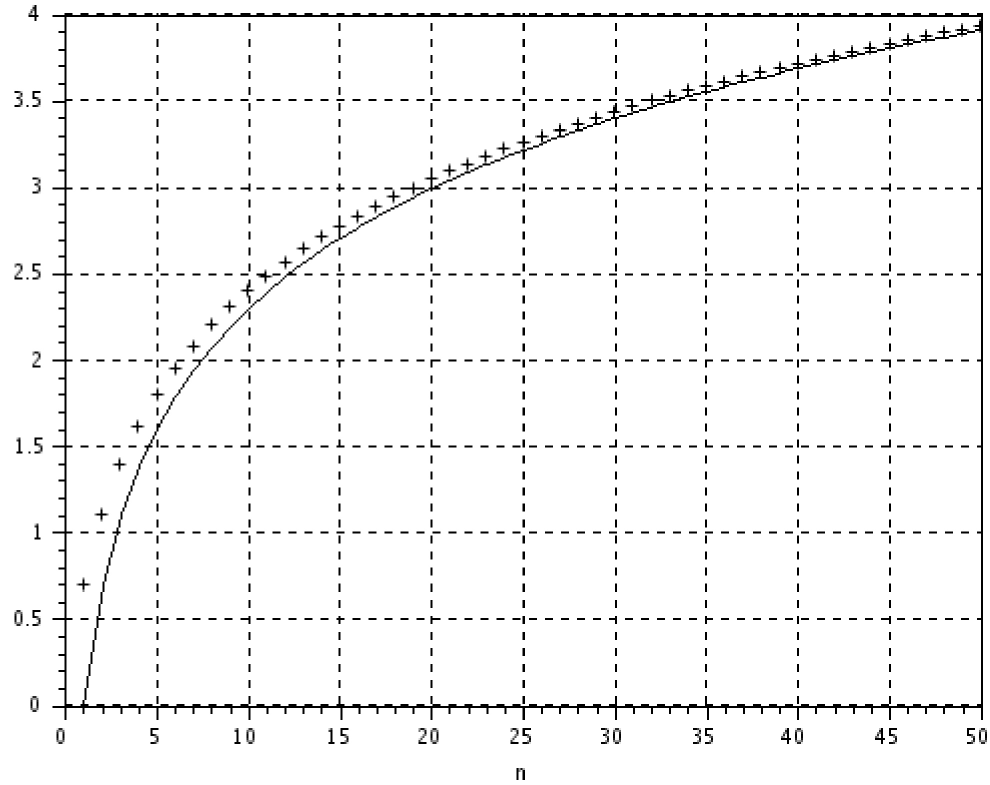
7. (a) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = (2n-1) - g(n).$$

   Le script `Scilab` ci-dessous construit un vecteur ligne `u` contenant les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

```
u=zeros(1,50)
for n=1:50
    u(n)=(2*n-1)-g(n)
end
S=cumsum(u)
plot(1:50,S,'+')
```

Dans ce script, g désigne la fonction g dont le code a été complété à la question **4.b)**. On exécute le script précédent et on obtient le graphique ci-dessous. Sur ce graphique, on a aussi tracé la courbe représentative de la fonction logarithme népérien ln en trait plein.



Interpréter le contenu du vecteur ligne S dans le contexte de l'énoncé. En notant pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad$ que peut-on conjecturer à l'aide du graphique précédent sur la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$?

(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ par un calcul rigoureux.

Exercice 3 –

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ e^{a-x} & \text{si } x \geqslant a. \end{cases}$$

1. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = 2$.

   On a donc pour tout réel x, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ e^{2-x} & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$

(a) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(b) La fonction f est-elle dérivable en 2?

(c) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

(d) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement votre résultat.

(e) Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

On revient à présent et **jusqu'à la fin de l'exercice** au cas général où a est un réel strictement positif.

2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur.

   (b) Montrer que f est une densité de probabilité.

3. On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f.

   (a) Démontrer que la fonction de répartition de X, notée F_X, est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - e^{a-x} & \text{si } x \geqslant a. \end{cases}$$

   (b) Déterminer la médiane de X, c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$.

   (c) Calculer la probabilité $P_{[X\geqslant a+1]}(X \geqslant a+2)$.

4. On considère la variable aléatoire $Y = X - a$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

   (b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

   (c) Donner l'espérance et la variance de Y.
   En déduire que $E(X) = 1 + a$ et $V(X) = 1$.

5. Soit n un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X.

   On cherche à estimer le réel a à l'aide de la variable aléatoire $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - 1)$.

   On admettra que $X_1 - 1, X_2 - 1, \ldots, X_n - 1$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

   (a) Montrer que $E(S_n) = a$.

   (b) Calculer $V(S_n)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(S_n)$.

   (c) On souhaite simuler une réalisation de la variable aléatoire S_n à l'aide de `Scilab`.
   L'instruction `grand(1,n,'exp',alpha)` construit un vecteur ligne contenant `n` coefficients donnant chacun une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\texttt{alpha}}$.
   Recopier et compléter le code ci-dessous pour qu'il fournisse une réalisation de la variable aléatoire S_{50} pour une valeur de `a` entrée par l'utilisateur.

```
a=........
Y=grand(1,........,'exp',........)
X=Y+a
S=........
```