

## DEVOIR SURVEILLÉ 3

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

**Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.**

*Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.*

*Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage!*

**Exercice 1** – Pour tout couple  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , soit  $M$  la matrice carrée d'ordre 2 définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

1. Dans cette question, on choisit  $a = b = -1$ .
  - a) La matrice  $M$  est-elle inversible?
  - b) Calculer pour tout entier  $n \geq 2$ , la matrice  $M^n$ .
2. Dans cette question, on choisit  $a = b$ .
  - a) La matrice  $M$  est-elle inversible?
  - b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a  $M^n = (1 + a)^{n-1} M$ .
3. On revient au cas général où  $a$  et  $b$  sont des réels quelconques.  
Montrer que la matrice  $M$  est inversible si et seulement si  $a \neq b$ .
4. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre  $p$  avec  $0 < p < 1$ . On pose  $q = 1 - p$ .  
Soit  $N$  la matrice définie par  $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$  et  $A$  l'événement : "la matrice  $N$  est inversible".
  - a) Établir la relation  $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k)$ .
  - b) Calculer  $\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$ .
  - c) En déduire  $P(A)$  en fonction de  $q$ .
5. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1}{2}$ .  
Soit  $N$  la matrice définie par  $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$  et  $A$  l'événement : "la matrice  $N$  est inversible".
  - a) Pour  $x$  réel, écrire les développements de  $(x + 1)^n$  et  $(x + 1)^{2n}$  à l'aide de la formule du binôme.
  - b) En utilisant l'identité  $(x + 1)^{2n} = (x + 1)^n (x + 1)^n$ , montrer que l'on a

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

c) En déduire la relation  $P(X = Y) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ .

d) Calculer  $P(A)$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 2 –

Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre 3 et  $I$  la matrice unité d'ordre 3. On pose par convention :  $M^0 = I$ .

On se propose d'étudier la suite réelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit  $A$  la matrice carrée d'ordre 3 telle que  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

soit  $X_n$  la matrice à trois lignes et une colonne définie par  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer  $X_0$  et  $X_1$ .
2. a) Justifier pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité  $X_{n+1} = AX_n$ .  
b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire pour tout entier naturel  $n$ , la relation  $X_n = A^n X_0$ .
3. Soit  $P$ ,  $Q$  et  $T$  les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer le produit  $PQ$ . En déduire que la matrice  $P$  est inversible et déterminer sa matrice inverse  $P^{-1}$ .
- b) Calculer les produits  $PT$  et  $AP$ . En déduire pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité  $A^n = PT^n P^{-1}$ .
4. Soit  $D$  la matrice définie par  $D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On pose  $N = T - D$ .  
a) Déterminer pour tout entier  $k \geq 2$ , la matrice  $N^k$ .  
b) Vérifier que  $DN = ND$  et montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c) En déduire pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de la matrice  $A^n$ .
5. a) Déduire des questions précédentes l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
b) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

**Exercice 3** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$ .

1. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle calcule et retourne  $u_n$  pour un entier  $n$  :

```
1. import numpy as np
2. def calculu(n):
3.     u=.....
4.     for k in range(n):
5.         u=.....
6.     return u
```

2. Établir pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'encadrement suivant :  $0 \leq u_n \leq 1$ .
3. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$ , à valeurs réelles, telle que  $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$  puis déterminer le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .
  - En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.
  - Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente.
4.
  - Justifier pour tout réel  $x \geq 0$ , l'inégalité  $\ln(1 + x) \leq x$ .
  - Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , établir l'inégalité  $u_{n+1} \leq u_n^2$ .
  - En déduire pour tout entier  $n \geq 1$ , l'inégalité  $u_n \leq (\ln 2)^n$ .
  - Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
  - On considère le programme Python suivant :

```
1. import numpy as np
2. n=0
3. u=1
4. while u>=0.0001:
5.     u=np.log(1+u**2)
6.     n=n+1
7. print(n)
```

On exécute ce programme. Le résultat affiché est 6.

Quelle est la signification de ce résultat ?

5. Établir pour tout entier  $n \geq 2$ , l'inégalité  $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2}$ .

**Exercice 4** – Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0. À partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ ,
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ ,
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ .

Les différents sauts sont supposés indépendants.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit les variables aléatoires suivantes :

- $X_n$  est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des  $n$  premiers sauts,
- $Y_n$  est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des  $n$  premiers sauts,
- $Z_n$  est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des  $n$  premiers sauts,
- $A_n$  est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son  $n$ -ième saut.

1. Donner la loi de la variable aléatoire  $A_1$ . Calculer  $E(A_1)$  et  $V(A_1)$ .
2. a) Justifier que  $A_2(\Omega) = \llbracket 2, 6 \rrbracket$ . Montrer que la loi de  $A_2$  est donnée par

$$P(A_2 = 2) = \frac{1}{4}, \quad P(A_2 = 3) = \frac{1}{4}, \quad P(A_2 = 4) = \frac{5}{16}, \quad P(A_2 = 5) = \frac{1}{8}, \quad P(A_2 = 6) = \frac{1}{16}.$$

- b) Calculer  $E(A_2)$ .
3. a) Présenter dans un tableau la loi du couple  $(A_2, Z_2)$ .  
En déduire la loi de  $Z_2$  ainsi que l'espérance de  $Z_2$ .
- b) Calculer la covariance  $\text{Cov}(A_2, Z_2)$  de  $A_2$  et  $Z_2$ .  
Les variables aléatoires  $A_2$  et  $Z_2$  sont-elles indépendantes?
4. On suppose avoir importé la librairie `numpy.random` sous l'abréviation `rd`.  
On rappelle qu'en Python, l'instruction `rd.randint(1, 5)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ .  
Compléter le programme suivant pour qu'il simule les 100 premiers déplacements de la puce.

```

1. import numpy as np
2. import numpy.random as rd
3. A=np.zeros(100)
4. for k in range(100):
5.     t=rd.randint(1,5)
6.     if t<=.....:
7.         A[k]=1
8.     if t==.....:
9.         A[k]=2
10.    if t==.....:
11.        A[k]=3
12. print(A)

```

5. Reconnaître les lois de  $X_n$ ,  $Y_n$  et  $Z_n$ . Justifier que  $X_n + Y_n$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$ .
6. a) Justifier la relation  $X_n + Y_n + Z_n = n$ . Calculer  $\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n)$ .  
b) En utilisant les valeurs de  $V(X_n)$ ,  $V(Y_n)$  et  $V(X_n + Y_n)$ , montrer que  $\text{Cov}(X_n, Y_n) = -\frac{n}{8}$ .  
c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X_n, Y_n)$  de  $X_n$  et  $Y_n$ .
7. a) Exprimer  $A_n$  en fonction de  $X_n$ ,  $Y_n$  et  $Z_n$ . Montrer que  $E(A_n) = \frac{7n}{4}$ .  
b) Exprimer  $A_n$  en fonction de  $X_n$  et  $Y_n$ . Calculer  $V(A_n)$  et  $\text{Cov}(A_n, X_n)$ .
8. On suppose avoir importé la bibliothèque `matplotlib.pyplot` sous l'abréviation `plt`.  
On rappelle que si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sont deux vecteurs de même taille, la commande `plt.plot(x, y)` permet de tracer la ligne brisée joignant les points  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ .  
On complète le programme Python de la question 4. en y ajoutant les lignes suivantes :

```

13. import matplotlib.pyplot as plt
14. x=np.arange(1,101,1)
15. y=np.zeros(100)
16. for k in range(1,100):
17.     y[k]=y[k-1]+A[k]
18. plt.plot(x,y)

```

Quelle sortie graphique obtient-on?