Devoir Surveillé 3

Exercice 1 –

1. (a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.
Donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0} x+1=1$. On a $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x=0^+$ (car $x>0$) donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)}{x}=-\infty$. Ainsi par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

   (b) On a $f(x)-y=x+1+\dfrac{\ln(x)}{x}-(x+1)=\dfrac{\ln(x)}{x}$. Or on vient de voir à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x}{x}=0$. Autrement dit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=0$. Donc la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   (c) Étudions le signe de $f(x)-y$. On a vu que $f(x)-y=\dfrac{\ln(x)}{x}$. Puisque $x\in]0;+\infty[$, le signe de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ dépend uniquement du signe de $\ln(x)$. Or, on sait que $\ln(x)\leq 0$ sur $]0;1]$ et que $\ln(x)\geq 0$ sur $[1;+\infty[$. Ainsi
   - $f(x)-y\leq 0$ sur $]0;1]$,
   - $f(x)-y\geq 0$ sur $[1;+\infty[$.

   Et donc
   - $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$ sur $]0;1]$,
   - $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$ sur $[1;+\infty[$.

2. (a) Pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a
$$g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}.$$
Puisque $x\in]0;+\infty[$, le signe de $g'(x)$ dépend uniquement du signe de $2x^2-1$. Pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a $2x^2-1\geq 0 \iff 2x^2\geq 1 \iff x^2\geq\dfrac{1}{2} \iff x\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (car x est positif).
On en déduit le tableau de signe et de variation suivant.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

   (b) On a
$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\ln(2)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln(2).$$
On sait que $\ln(2)>0$ puisque $2>1$, donc $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$. Or $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ correspond au minimum de la fonction g sur $]0;+\infty[$ (d'après le tableau de variation obtenu à la question précédente).
Puisque le minimum de g est strictement positif, on en déduit que $g(x)>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

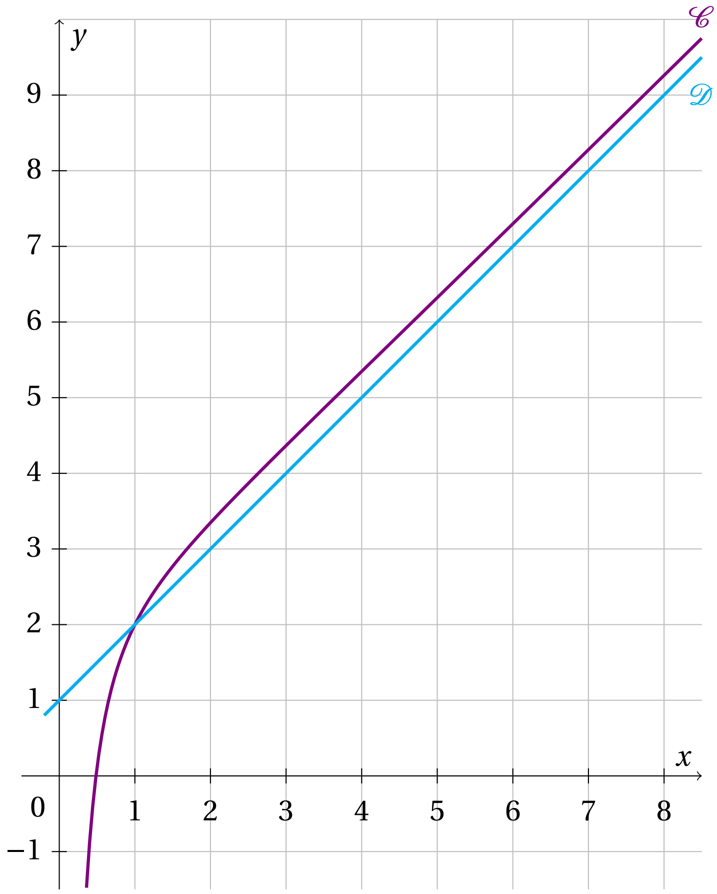
(c) Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$. On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$. Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\big(v(x)\big)^2} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} \\ &= 1 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

(d) On a vu à la question 2b que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$. Puisque $x^2 > 0$ également, on en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$. On obtient donc le tableau de signe et de variation suivant.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

3. On a l'allure de courbe suivante.



4. (a) Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : "$u_n \geq n+1$".

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0 = 1$ et $0+1=1$ donc $u_0 \geq 0+1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On a donc $u_n \geq n+1 \geq 1$. Or, on a vu à la question 1c que pour tout $x \geq 1$, on a $f(x) \geq x+1$. Ainsi on a

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n + 1 \geq n+1+1 = n+2,$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, comme $\mathscr{P}_n$ est vraie en $n=0$ et est hérédiatire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$ *i.e.*,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geq n+1.$$

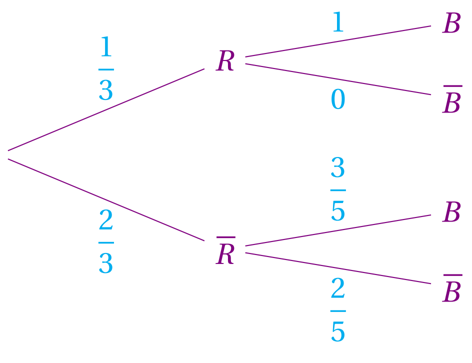
(b) Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n + 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} - u_n = 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

Or on a vu à la question précédente que $u_n \geq n+1$ pour tout n. En particulier, $u_n \geq 1$ pour tout n et donc $\ln(u_n) \geq 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Et donc (u_n) est croissante.
Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison des limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2 – Partie I :

La situation peut être illustrée à l'aide de l'arbre de probabilités suivant.



1. Les évènements R et $\overline{R}$ forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(B\cap R) + P(B\cap \overline{R}) = P(R)\times P_R(B) + P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(B) = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{2}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

2. Il s'agit de calculer la probabilité $P_B(\overline{R})$. D'après la formule de Bayes,

$$P_B(\overline{R}) = \frac{P(B\cap\overline{R})}{P(B)} = \frac{P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{11}{15}} = \frac{6}{11}.$$

3. (a) X compte le nombre de réalisations de l'évènement succès "prendre le bus", de probabilité $\frac{11}{15}$, lors de 180 épreuves identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 180$ et $p = \frac{11}{15}$. Par conséquent on a $X(\Omega) = [\![0;180]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0;180]\!], \quad P(X = k) = \binom{180}{k}\left(\frac{11}{15}\right)^k\left(\frac{4}{15}\right)^{180-k}.$$

(b) Comme X suit une loi binomiale,

$$E(X) = np = 180 \times \frac{11}{15} = 132,$$

et

$$V(X) = np(1-p) = 132 \times \frac{4}{15} = \frac{176}{5}.$$

(c) Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de jours dans l'année où Coralie va au lycée à pied. Il est clair que $Z = 180 - X$ puisqu'il y a X jours où Coralie prend le bus sur un total de 180 jours. Par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(180 - X) = 180 - E(X) = 180 - 132 = 48.$$

En conclusion, Coralie peut espérer aller au lycée à pied 48 jours dans l'année.

Partie II :

1. Par définition de l'espérance,

$$E(N) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8}.$$

2. D'après le tableau de la loi de N, le support de N est $N(\Omega) = [\![1;3]\!]$. Il y a donc au plus 3 jours de grève, et Coralie peut arriver en retard 0, 1, 2 ou 3 matins. Donc $Y(\Omega) = [\![0;3]\!]$.

3. (a) $P_{[N=1]}(Y = 0)$ est la probabilité que Coralie ne soit pas en retard le premier jour de grève donc $P_{[N=1]}(Y = 0) = \frac{2}{3}$.
$P_{[N=1]}(Y = 1)$ est la probabilité que Coralie soit en retard le premier jour de grève donc $P_{[N=1]}(Y = 1) = \frac{1}{3}$.

(b) Par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P\big([N = 1] \cap [Y = 0]\big) = P(N = 1) \times P_{[n=1]}(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P\big([N = 1] \cap [Y = 1]\big) = P(N = 1) \times P_{[n=1]}(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Enfin, il est impossible d'avoir plus de jours en retard que de jours de grève car Y est le nombre de retards pendant la période de grève. Donc

$$P\big([N = 1] \cap [Y = 2]\big) = 0 \quad \text{et} \quad P\big([N = 1] \cap [Y = 3]\big) = 0.$$

4. (a) Les évènements $[N=1]$, $[N=2]$ et $[N=3]$ forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P([Y=0]\cap[N=1]) + P([Y=0]\cap[N=2]) + P([Y=0]\cap[N=2]) \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De même pour le calcul des probabilités $P(Y=1)$, $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$. Ainsi la loi de Y est donnée par

k	0	1	2	3
$P(Y=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{1}{72}$

Alors, par définition de l'espérance,

$$E(Y) = 0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{7}{18}+2\times\frac{7}{72}+3\times\frac{1}{72}=\frac{45}{72}=\frac{5}{8}.$$

(b) La probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève est $P(Y=0)=\frac{1}{2}$.

(c) D'après la question 3b, $P\big([N=1]\cap[Y=0]\big)=\frac{1}{3}$ alors que $P(N=1)=\frac{1}{2}$ et $P(Y=0)=\frac{1}{2}$ donc $P\big([N=1]\cap[Y=0]\big)\neq P(N=1)\times P(Y=0)$, ce qui prouve que les variables aléatoires Y et N ne sont pas indépendantes.

(d) Par définition,

$$E(YN)=\frac{1}{6}+\frac{2}{18}+\frac{3}{6}+\frac{4}{72}+\frac{6}{12}+\frac{9}{72}=\frac{35}{24}.$$

D'après la formule de Huygens,

$$\operatorname{Cov}(Y,N)=E(YN)-E(Y)E(N).$$

Or d'après la question 1, on a $E(N)=\frac{15}{8}$ et d'après la question 4, on a $E(Y)=\frac{5}{8}$. Donc

$$\operatorname{Cov}(Y,N)=\frac{35}{24}-\frac{5}{8}\times\frac{15}{8}=\frac{55}{192}.$$

Exercice 3 –

1. (a) Le nombre total de tirages est $\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$, c'est le nombre de combinaisons de 2 élèments parmi 4. Le nombre de tirages favorables est de 2 : ou bien on tire les deux boules blanches, ou bien les deux boules noires.
Ainsi la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

(b) Il s'agit de répéter n fois une même expérience, de manière indépendante, et la variable aléatoire N compte le nombre de succès de l'évènement "tirer deux boules de même couleur". Donc N suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{3}$. On en déduit que son support est $N(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$,

$$P(N=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

(c) Comme N suit une loi binomiale,

$$E(N) = np = \frac{n}{3} \quad \text{et} \quad V(N) = np(1-p) = \frac{n}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2n}{9}.$$

(d) On cherche la probabilité d'obtenir au moins un succès *i.e.,*

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N=0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

2. (a) L'urne U contient 4 boules, l'évènement $[X=1]$ est donc impossible et $P(X=1)=0$. L'évènement $[X=2]$ se réalise si l'on retire deux boules à chacun des deux tirages. En particulier, on a tiré deux boules de même couleur au premier tirage. Dans ce cas, il ne reste que les deux boules de l'autre couleur dans l'urne et l'urne sera vide à l'issue du deuxième tirage. Ainsi, d'après la question 1a,

$$P(X=2) = P(A) = \frac{1}{3}.$$

Grâce à ce que l'on a fait, on sait que l'évènement $[X=3]$ se réalise si l'on tire deux boules de même couleur au deuxième tirage, après avoir tiré deux boules de couleurs différentes au premier tirage. Ainsi, en notant A_i l'évènement "on tire deux boules de même couleur au i-ème tirage", on a que

$$P(X=3) = P(\overline{A_1}\cap A_2) = P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

(b) L'évènement $[X=n]$ se réalise si et seulement si les deux boules de même couleur sont tirées au $(n-1)$-ème tirage et pas lors des $n-2$ tirages précédents (sinon l'urne serait vidée avant le n-ème tirage). Avec les notations de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
P(X=n) &= P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-2}}\cap A_{n-1}) \\
&= P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \times \cdots \times P_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-2}}}(A_{n-1}) \\
&= (1-a)\times(1-a)\times\cdots\times(1-a)\times a = (1-a)^{n-2}a.
\end{aligned}$$

(c) Nous avons montré à la question précédente qu'une fois le premier succès réalisé, l'urne était vidée au tirage suivant. Ainsi $Z = X-1$ représente le rang du premier succès d'une répétition indépendante d'une même expérience. Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $a = \frac{1}{3}$.

(d) Comme Z suit une loi géométrique,

$$E(Z) = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-a}{a^2}.$$

Comme $X = Z+1$, on sait que

$$E(X) = E(Z)+1 = \frac{1}{a}+1 = \frac{1+a}{a} \quad \text{et} \quad V(X) = 1^2\times V(Z) = V(Z) = \frac{1-a}{a^2}.$$

3. Notons, pour $n \geq 2$, $\mathscr{P}_n$ la proposition : "$u_n = \frac{\lambda}{r-s}(r^{n-2} - s^{n-2})$".

Initialisation : Pour $n = 2$, $u_2 = 0$ et $\frac{\lambda}{r-s}(r^{2-2} - s^{2-2}) = \frac{\lambda}{r-s}(1-1) = 0$ donc $\mathscr{P}_2$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 2$ un entier quelconque. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \lambda r^{n-2} + s u_n \\ &= \lambda r^{n-2} + s\frac{\lambda}{r-s}(r^{n-2} - s^{n-2}) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\lambda r^{n-2}(r-s) + s\lambda(r^{n-2} - s^{n-2})}{r-s} \\ &= \frac{\lambda(r^{n-1} - r^{n-2}s + sr^{n-2} - s^{n-1})}{r-s} \\ &= \frac{\lambda}{r-s}(r^{n-1} - s^{n-1}). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, comme $\mathscr{P}_n$ est vraie en $n = 2$ et est héréditaire, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 2$ *i.e.,*

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{\lambda}{r-s}(r^{n-2} - s^{n-2}).$$

4. (a) Le nombre total de tirages est $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$, c'est le nombre de combinaisons de 2 élèments parmi 6. Le nombre de tirages favorables est de 3 : ou bien on tire les deux boules blanches, ou bien les deux boules noires, ou bien les deux boules vertes.
Ainsi la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

(b) L'urne U contient 6 boules, l'évènement $[Y = 2]$ est donc impossible et $P(Y = 2) = 0$.
L'évènement $[Y = 3]$ se réalise si l'on retire deux boules à chacun des trois tirages. Ainsi, en notant B_i l'évènement "on tire deux boules de même couleur au i-ème tirage dans l'urne V", on a que

$$P(Y = 3) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = b \times a = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

En effet, une fois que deux boules d'une même couleur ont été retirées de l'urne V, celle-ci se retrouve dans la configuration de l'urne U (à la couleur près).

(c) D'après la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'évènements $\{B, \overline{B}\}$,

$$\begin{aligned} P(Y = n+1) &= P(B \cap [Y = n+1]) + P(\overline{B} \cap [Y = n+1]) \\ &= P(B) \times P_B(Y = n+1) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(Y = n+1) \\ &= bP(X = n) + (1-b)P(Y = n). \end{aligned}$$

En effet, la probabilité $P_B(Y = n+1)$ correspond à une urne dont on vient de retirer deux boules de la même couleur, donc assimilable à l'urne U, que l'on doit vider en n tirages restants. D'où $P_B(Y = n+1) = P(X = n)$.
De même, la probabilité $P_{\overline{B}}(Y = n+1)$ correspond à une urne V dans son état initial que l'on doit vider en n tirages restants. D'où $P_{\overline{B}}(Y = n+1) = P(Y = n)$.

(d) D'après la question 4b, $P(Y=2)=0$, et comme $P(X=n)=(1-a)^{n-2}a$, on a que

$$P(Y=n+1)=ab(1-a)^{n-2}+(1-b)P(Y=n).$$

Alors, en posant $u_n=P(Y=n)$, $\lambda=ab$, $r=(1-a)$ et $s=(1-b)$ et en utilisant le résultat de la question 4d, on a

$$\begin{aligned}\forall n\geq 2,\quad P(Y=n)&=\frac{ab}{(1-a)-(1-b)}\left((1-a)^{n-2}-(1-b)^{n-2}\right)\\&=\frac{ab}{b-a}\left((1-a)^{n-2}-(1-b)^{n-2}\right).\end{aligned}$$

(e) Les séries géométriques $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ convergent lorsque $|q|<1$ et leur somme vaut $\dfrac{1}{1-q}$. Ici, $0<1-a<1$ et $0<1-b<1$, donc en opérant le changement de variable $k=n-2$, j'en déduis que les séries

$$\sum_{n\geq 2}(1-a)^{n-2}=\sum_{k\geq 0}(1-a)^k \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 2}(1-b)^{n-2}=\sum_{k\geq 0}(1-b)^k$$

convergent. Alors la série

$$\sum_{n\geq 2}P(Y=n)=\sum_{n\geq 2}\frac{ab}{b-a}\left((1-a)^{n-2}-(1-b)^{n-2}\right)$$

converge aussi et sa somme vaut

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}P(Y=n)&=\frac{ab}{b-a}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(1-a)^k-\sum_{k=0}^{+\infty}(1-b)^k\right)\\&=\frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{1-(1-a)}-\frac{1}{1-(1-b)}\right)\\&=\frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\\&=\frac{ab}{b-a}\times\frac{b-a}{ab}\\&=1.\end{aligned}$$