

EXERCICES — CHAPITRE 8

Exercice 1 (★★) – Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sans donner de justification concernant l'existence de cette dérivée).

1. $a(x) = 8x^3 + 4x^2 - 12x + 5$

2. $b(x) = (2x^2 + x - 2)(3x + 2)$

3. $c(x) = \frac{1}{3x - 2}$

4. $d(x) = \sqrt{3x^2 - x - 1}$

5. $e(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{3x + 2}$

6. $f(x) = (x^2 + 1) \times \frac{1}{x}$

7. $g(x) = x\sqrt{x} + x$

8. $h(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$

9. $i(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

10. $j(x) = (2x^2 - 4x + 3)^7$

Exercice 2 (★★) – Étudier les fonctions suivantes sur leur ensemble de définition puis tracer l'allure de leur courbe représentative.

1. $a(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$,

2. $b(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$,

Indication numérique : $\sqrt{2} \approx 1.4$, $b(-\sqrt{2}) \approx 5.8$ et $b(\sqrt{2}) \approx 0.2$.

3. $c(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x + 1}$ pour $x \in \mathbb{R}$,

4. $d(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ pour $x \in]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$.

Exercice 3 (★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{15x + 60}{x^2 + 9}$.

1. On note f' sa dérivée. Calculer $f'(x)$.2. Étudier le signe de $f'(x)$.3. Donner le tableau de variation de f .4. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse -4 .5. Dans un même repère, tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que la tangente \mathcal{T} .

Exercice 4 (★★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 3}$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Calculer la dérivée de la fonction f .2. Étudier les variations de f .3. Donner une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

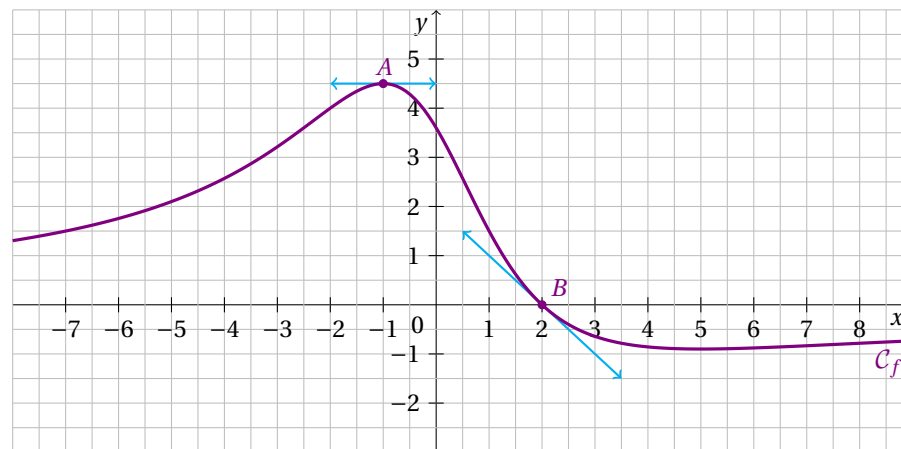
4. Sur un même graphique, tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que la tangente \mathcal{T} .

Exercice 5 (★★) –

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} . On sait que

- la tangente au point $A\left(-1, \frac{9}{2}\right)$ à la courbe \mathcal{C}_f est parallèle à l'axe des abscisses,
- la tangente au point $B(2, 0)$ à la courbe \mathcal{C}_f passe par le point de coordonnées $(0, 2)$.



On note f' la dérivée de la fonction f . À partir du graphique et des renseignements fournis,

1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.

La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x + \frac{7}{2}$.

2. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

$$(a) \quad f'(0) \times f'(3) \leq 0 \quad \Bigg| \quad (b) \quad f'(-3) \times f'(1) \leq 0$$

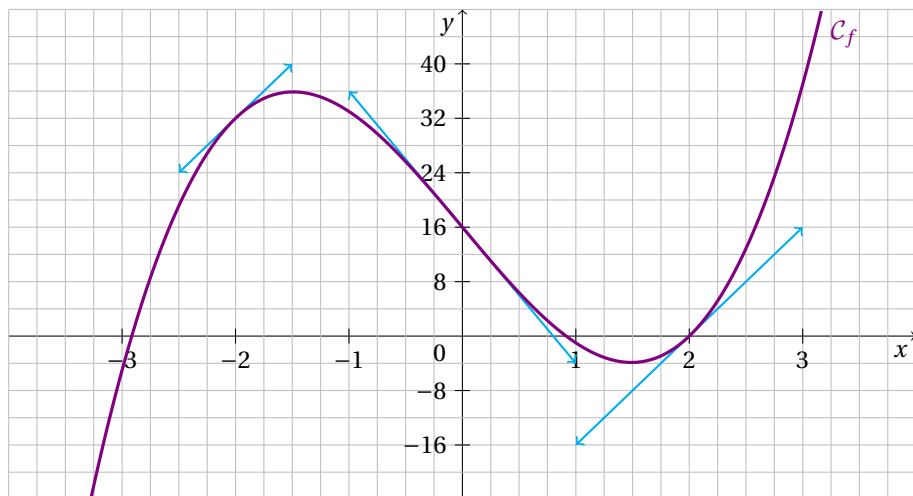
Partie B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{18 - 9x}{x^2 + 5}$.

1. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{9(x^2 - 4x - 5)}{(x^2 + 5)^2}$.

2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$.
(b) Donner le tableau de variation de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse -2 .

Exercice 6 (★★) – Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} . Certaines tangentes à la courbe ont aussi été représentées.



Partie A

On note f' la dérivée de la fonction f . À partir du graphique,

1. Déterminer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
2. Donner une estimation des solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

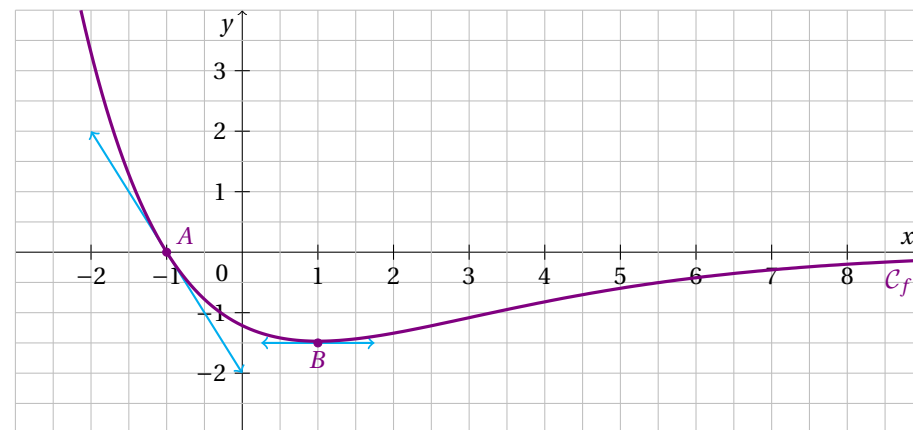
Partie B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^3 - 20x + 16$.

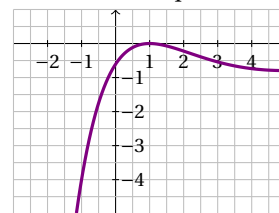
1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$, puis comparer ces résultats avec les valeurs obtenues dans la Partie A.
3. Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente à la courbe \mathcal{C}_f est parallèle à l'axe des abscisses.
4. Donner le tableau de variation de la fonction f .

Exercice 7 (★★) – La courbe \mathcal{C}_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On sait que

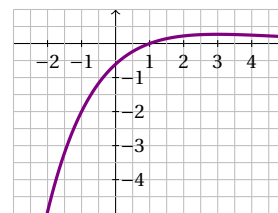
- la courbe coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse -1 et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0, -2)$,
- la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



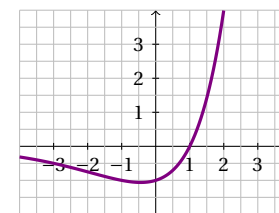
1. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. L'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



Courbe \mathcal{C}_1



Courbe \mathcal{C}_2



Courbe \mathcal{C}_3

Exercice 8 (★★★) – Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ par

$$f(x) = 8x^2 - 2x - \frac{9}{2x+3}.$$

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Montrer que $f'(x) = \frac{8x(8x^2 + 23x + 15)}{(2x+3)^2}$.
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f .