

DEVOIR SURVEILLÉ 2

Exercice 1 –

$$1. A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{6}{6} - \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6-2+3}{6} = \frac{7}{6}$$

$$2. B = 3 \left(1 - \frac{1}{5} \right) + 2 \times \frac{3}{7} = 3 \times \left(\frac{5}{5} - \frac{1}{5} \right) + \frac{6}{7} = 3 \times \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{12}{5} + \frac{6}{7} = \frac{84}{35} + \frac{30}{35} = \frac{114}{35}$$

$$3. C = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{2}{7} + 3 \left(2 - \frac{1}{2} \right)} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{2}{7} + 3 \times \frac{3}{2}} = \frac{\frac{3+1}{3}}{\frac{2}{7} + \frac{9}{2}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{14} + \frac{63}{14}} = \frac{4}{3} \times \frac{14}{67} = \frac{56}{201}$$

$$4. D = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} \right) \div \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{2}{6} - \frac{3}{6} \right) \times \left(\frac{3}{12} - \frac{16}{12} \right) \div \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \times \left(-\frac{13}{12} \right) \times 2 = \frac{13}{36}$$

Exercice 2 –

$$1. \text{ Je résous : } 2x - 4 = 1 \iff 2x = 5 \iff x = \frac{5}{2} \text{ donc } \mathcal{S} = \left\{ \frac{5}{2} \right\}.$$

$$2. \text{ Je résous : } x + 3 \leq 2x - 1 \iff -x \leq -4 \iff x \geq 4 \text{ donc } \mathcal{S} = [4, +\infty[.$$

3. Je me ramène à une étude de signe :

$$\frac{x+2}{x-3} \leq 3 \iff \frac{(x+2) - 3(x-3)}{x-3} \leq 0 \iff \frac{-2x+11}{x-3} \leq 0.$$

J'établis désormais le tableau de signe de $\frac{-2x+11}{x-3}$:

x	$-\infty$	3	$\frac{11}{2}$	$+\infty$	
$-2x+11$	$+$	$+$	0	$-$	
$x-3$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{-2x+11}{x-3}$	$-$		$+$	0	$-$

$$\text{Donc } \mathcal{S} =]-\infty, 3[\cup \left[\frac{11}{2}, +\infty \right[.$$

$$4. \text{ Je commence par chercher les éventuelles valeurs interdites : } x - 2 = 0 \iff x = 2.$$

Ensuite, $4x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{4}$. Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites.

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{4} \right\}.$$

$$5. \text{ Je calcule le discriminant du polynôme : } \Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 100 - 96 = 4 = 2^2 > 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-2}{2 \times 2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+2}{2 \times 2} = 3.$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \{2, 3\}.$$

6. Je calcule le discriminant du polynôme : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.
Le polynôme admet donc deux racines

$$x_1 = \frac{2-4}{2 \times (-1)} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{2 \times (-1)} = -3.$$

J'établis le tableau de signe de $-x^2 - 2x + 3$:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$-x^2-2x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $S =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$.

7. Je pose $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - x - 2$. Comme $P(-1) = -6 + 7 + 1 - 2 = 0$, alors -1 est une racine du polynôme $P(x)$ et donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - (-1))Q(x) = (x + 1)Q(x)$.
Je détermine le polynôme $Q(x)$ par division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 & + \quad 7x^2 & - \quad x & - \quad 2 & x+1 \\
 - (6x^3 & + \quad 6x^2) & & & 6x^2 + x - 2 \\
 \hline
 & x^2 & - \quad x & - \quad 2 & \\
 & - (x^2 & + \quad x) & & \\
 \hline
 & & - \quad 2x & - \quad 2 & \\
 & & - (-2x & - \quad 2) & \\
 \hline
 & & & 0 &
 \end{array}$$

Finalement j'obtiens que $P(x) = (x + 1)(6x^2 + x - 2)$.

Je calcule maintenant le discriminant du facteur de degré 2 :

$\Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49 = 7^2 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-1-7}{2 \times 6} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Donc $S = \left\{ -1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right\}$.

Exercice 3 –

- La fonction a est une fonction polynomiale donc a est définie sur \mathbb{R} .
- La fonction b est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $4x - 1 = 0 \iff 4x = 1 \iff x = \frac{1}{4}$. Donc b est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$.
- La fonction c est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $x^2 - 5x + 6 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1^2 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Donc c est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

4. La fonction d est de la forme \sqrt{u} avec $u(x) = x^2 - 2x - 3$. Il me faut résoudre $x^2 - 2x - 3 \geq 0$.
Je calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

J'établis alors le tableau de signe de $u(x)$:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc d est définie sur $] -\infty, -1] \cup [3, +\infty[$.

5. La fonction e est une somme, de la forme $e_1 + e_2$ avec $e_1(x) = \frac{1}{x}$ et $e_2(x) = 4x - 5$.
 e_1 est la fonction inverse, définie sur \mathbb{R}^* et e_2 est une fonction polynomiale, définie sur \mathbb{R} .
Donc e est définie sur l'intersection $\mathbb{R}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^*$.

6. La fonction f est de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{2x-1}{-x+3}$. Il me faut donc résoudre $\frac{2x-1}{-x+3} \geq 0$.
J'établis le tableau de signe de $u(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x - 1$	-	0	+	+
$-x + 3$	+	+	0	-
$\frac{2x-1}{-x+3}$	-	0	+	-

Donc f est définie sur $\left[\frac{1}{2}, 3\right[$.

Exercice 4 –

- La fonction f est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$. Donc f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
La fonction g est une fonction polynomiale donc g est définie sur \mathbb{R} .
- f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ qui n'est pas symétrique par rapport à 0. Donc f ne peut être ni paire, ni impaire. g en revanche est définie sur \mathbb{R} , qui est bien symétrique par rapport à 0.
Je calcule alors $g(-x)$: $g(-x) = 2(-x)^2 + 3 = 2x^2 + 3 = g(x)$. Donc g est paire.
- Je détermine les expressions des fonctions composées :

$$f \circ f(x) = f\left(\frac{1}{2x-3}\right) = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2x-3} - 3} = \frac{1}{\frac{2}{2x-3} - \frac{3(2x-3)}{2x-3}} = \frac{1}{\frac{2-6x+9}{2x-3}} = \frac{2x-3}{-6x+11}.$$

$f \circ f$ est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $-6x + 11 = 0$, i.e. $x = \frac{11}{6}$. Donc $f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{11}{6}\right\}$.

$$f \circ g(x) = f(2x^2 + 3) = \frac{1}{2(2x^2 + 3) - 3} = \frac{1}{4x^2 + 6 - 3} = \frac{1}{4x^2 + 3}.$$

$f \circ g$ est une fraction rationnelle qui n'a pas de valeur interdite, puisque $4x^2 + 3 \geq 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $f \circ g$ est définie sur \mathbb{R} .

$$g \circ g(x) = g(2x^2 + 3) = 2(2x^2 + 3)^2 + 3 = 8x^4 + 24x^2 + 18 + 3 = 8x^4 + 24x^2 + 21.$$

$g \circ g$ est une fonction polynomiale donc $g \circ g$ est définie sur \mathbb{R} .

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{1}{2x-3}\right) = 2\left(\frac{1}{2x-3}\right)^2 + 3 = \frac{2+3(2x-3)^2}{(2x-3)^2} = \frac{2+3(4x^2-12x+9)}{(2x-3)^2} = \frac{12x^2-36x+29}{(2x-3)^2}$$

$g \circ f$ est une fraction rationnelle dont l'unique valeur interdite est $x = \frac{3}{2}$.

Donc $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Exercice 5 –

1. Par lecture graphique, j'obtiens le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f		↗ 2	↘ 0 ↗	

Par lecture graphique, j'obtiens le tableau de signe de la fonction g :

x	$-\infty$	-4	6	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

2. a) Je développe la forme factorisée donnée par l'énoncé afin de retomber sur la définition de $f(x)$:

$$\frac{(x+4)(x-2)^2}{16} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2 - 16x + 16}{16} = \frac{x^3 - 12x + 16}{16} = \frac{x^3}{16} - \frac{3}{4}x + 1 = f(x).$$

J'ai bien montré que pour tout réel x , $f(x) = \frac{(x+4)(x-2)^2}{16}$.

- b) J'étudie le signe de $f(x)$ grâce à la forme factorisée. Un carré est toujours positif et 16 est un nombre strictement positif, donc j'établis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$	0
$f(x)$	$-$	0	$+$	0

3. Je commence par calculer le discriminant : $\Delta = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right) \times 3 = \frac{1}{16} + \frac{12}{8} = \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}}{-\frac{2}{8}} = -\frac{6}{4} \times \left(-\frac{8}{2}\right) = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}}{-\frac{2}{8}} = -4.$$

Je déduis donc la factorisation de $g(x)$:

$$g(x) = -\frac{1}{8} \times (x+4)(x-6) = -\frac{(x+4)(x-6)}{8}.$$

4. a) Grâce aux deux factorisations trouvées précédemment pour $f(x)$ et $g(x)$, alors je peux écrire pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{(x+4)(x-2)^2}{16} - \frac{-(x+4)(x-6)}{8} = \frac{(x+4)((x-2)^2 + 2x - 12)}{16} \\ &= \frac{(x+4)(x^2 - 4x + 4 + 2x - 12)}{16} = \frac{(x+4)(x^2 - 2x - 8)}{16}. \end{aligned}$$

- b) Puisque $f(x) \leq g(x) \iff f(x) - g(x) \leq 0$, il me faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
J'utilise l'expression établie à la question précédente et m'intéresse au facteur de degré 2.
Le discriminant de $x^2 - 2x - 8$ vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36 = 6^2 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{2-6}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Je peux alors établir le tableau de signe de $f(x) - g(x)$:

x	$-\infty$	-4	-2	4	$+\infty$		
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$x^2 - 2x - 8$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ se trouvent dans $\mathcal{S} =]-\infty, -4] \cup [-2, 4]$.

5. Le tableau de signe de f obtenu à la question **2.a)** est bien cohérent avec le graphique fourni. Aussi, en accord avec la question **4.b)**, la courbe \mathcal{C}_f est bien en dessous de \mathcal{C}_g sur $] -\infty, -4] \cup [-2, 4]$ et au-dessus de \mathcal{C}_g sur $[-4, -2] \cup [4, +\infty[$. Ceci est également cohérent avec le graphique fourni.

Exercice 6 –

- Graphiquement, j'obtiens que :
 - $f(0) = -6$,
 - l'image de 3 par f est $f(3) = 0$,
 - les antécédents de -4 par f sont -1 et 2 ,
 - l'unique antécédent de 10 par f est 4.5 ,

- e) les antécédents de -6 par f sont 0 et 1 ,
 f) l'ordonnée du point de \mathcal{C}_f d'abscisse 5 est 14 ,
 g) les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont -2.5 et 3.5 .
 2. Je remplace x par $\frac{1}{2}$ dans la formule de $f(x)$ et j'obtiens

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{25}{4}.$$

3. Je développe le produit donné dans le but de retrouver la définition de $f(x)$:

$$(x-3)(x+2) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6 = f(x).$$

4. Grâce à la question précédente,

$$f(x) = 0 \iff (x-3)(x+2) = 0 \iff x-3 = 0 \text{ ou } x+2 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -2.$$

Je retrouve donc bien le fait que les antécédents de 0 par f sont -2 et 3 .

Exercice 7 –

1. FAUX, $[-1, -3]$ n'a même pas de sens mathématique.
2. FAUX, $[5, 2]$ n'a même pas de sens mathématique.
3. VRAI, la flèche monte de 2 à 4 sur cet intervalle.
4. VRAI, -3 est le minimum de f sur $[-5, 12]$.
5. FAUX, puisque le minimum de f sur $[-5, 12]$ est -3 .
6. VRAI, puisque $f(9) = 2 < 4 < 5 = f(4)$ et que f est décroissante sur $[4, 9]$.
7. VRAI, puisque $f(12) = 4$ et que f est croissante sur $[9, 12]$.

Exercice 8 –

1. Je remplace n par les valeurs dans la définition de u_n :

$$u_0 = \frac{3 \times 0 + 4}{0 + 1} = \frac{4}{1} = 4, \quad u_1 = \frac{3 + 4}{1 + 1} = \frac{7}{2}, \quad u_2 = \frac{6 + 4}{2 + 1} = \frac{10}{3} \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{9 + 4}{3 + 1} = \frac{13}{4}.$$

2. Pour les expressions suivantes, j'obtiens

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= \frac{3(n-1) + 4}{n-1+1} = \frac{3n-3+4}{n} = \frac{3n+1}{n}, \\ u_n - 1 &= \frac{3n+4}{n+1} - 1 = \frac{3n+4}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1}, \\ u_{n+2} &= \frac{3(n+2) + 4}{n+2+1} = \frac{3n+6+4}{n+3} = \frac{3n+10}{n+3}, \\ u_n + 2 &= \frac{3n+4}{n+1} + 2 = \frac{3n+4}{n+1} + \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{3n+4+2n+2}{n+1} = \frac{5n+6}{n+1}, \\ u_{2n-1} &= \frac{3(2n-1) + 4}{2n-1+1} = \frac{6n-3+4}{2n} = \frac{6n+1}{2n}, \\ 2u_n - 1 &= 2 \times \frac{3n+4}{n+1} - 1 = \frac{6n+8}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{5n+7}{n+1}, \\ u_{2n-1} &= \frac{3 \times 2n + 4}{2n+1} - 1 = \frac{6n+4}{2n+1} - \frac{2n+1}{2n+1} = \frac{4n+3}{2n+1}. \end{aligned}$$

3. Le terme d'indice $n+1$ est donné par

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1) + 4}{n+1+1} = \frac{3n+3+4}{n+2} = \frac{3n+7}{n+2}.$$