CONCOURS BLANC 4 — ECRICOME

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 5 pages et est constitué de 3 exercices. Bon courage !

Exercice 1 – On note dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les deux matrices suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n. \end{cases}$$

1. a) Calculer le produit matriciel $(M - I)(M + 3I)$.
   b) Déterminer un polynôme P non nul, annulateur de la matrice M.
   c) Déterminer les valeurs propres possibles de M.
2. a) À l'aide de la question **1.a)**, déterminer l'expression de M^2 en fonction des matrices M et I.
   b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = u_n M + v_n I.$
3. a) Déterminer la matrice carrée A d'ordre 2 telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
   c) On importe la bibliothèque `numpy` grâce à l'instruction `import numpy as np`.
   `A` désigne la matrice A et `C` désigne la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   Compléter la fonction suivante, où n désigne un entier naturel, pour qu'elle calcule et affiche la matrice colonne composée des termes u_n et v_n.

```
1.  import numpy as np
2.  def fonction(n):
3.      A=np.array([[...,...],[...,...]])
4.      C=np.array([[0],[1]])
5.      for k in range(n):
6.          C=......
7.      return ......
```

4. On considère les matrices colonnes $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que V_1 et V_2 sont des vecteurs propres de la matrice A.
   Préciser pour chacun la valeur propre associée.
   b) Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice carrée d'ordre 2 dont les colonnes sont les vecteurs V_1 et V_2.
   Justifier que Q est inversible puis déterminer Q^{-1}.
   c) Déterminer la matrice D telle que $D = Q^{-1}AQ$.
   d) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = QD^nQ^{-1}$.
   e) En déduire que pour tout entier naturel n,
   $$A^n = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n \end{pmatrix}.$$
   f) Déterminer les valeurs de u_n et v_n en fonction de n.
5. a) Expliciter, pour tout entier naturel n, les neuf coefficients de la matrice M^n.
   b) On suppose avoir complété correctement la fonction `Python` de la question **3.c)** et on considère la fonction suivante, de paramètre un entier n.

```
def fonction2(n):
    C=fonction(n)
    M=np.array([[2,-2,1],[2,-3,2],[-1,2,0]])
    I=np.array([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]])
    return C[0]*M+C[1]*I
```

   Que renvoie cette nouvelle fonction pour une valeur de n donnée ?

Exercice 2 – On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par
$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. a) Donner la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement votre résultat.
   b) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x)$ a le même signe que $1-\ln(x)$.
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction f, en faisant apparaître les valeurs des extremums et la limite en $+\infty$.
2. a) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, calculer $f''(x)$.
   b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
   c) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?
3. On note M le point d'abscisse $e^{3/2}$ de $\mathcal{C}_f$.
   a) Déterminer les coordonnées de M.
   b) Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point M.
   c) Calculer les coordonnées du point d'intersection N de (T) avec l'axe des ordonnées.
   d) Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T) sur $[1,+\infty[$.

4. On donne

$$e \approx 2.72, \quad \frac{1}{e} \approx 0.37, \quad e^{3/2} \approx 4.48, \quad f\left(e^{3/2}\right) \approx 0.33, \quad f'\left(e^{3/2}\right) \approx -0.02, \quad \frac{2}{e^{3/2}} \approx 0.45.$$

Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ en plaçant sur le même graphique le point M, le point N, ainsi que la droite (T). *On pourra par exemple choisir un repère où l'axe des abscisses a pour unité* 1*cm et l'axe des ordonnées a pour unité* 4*cm.*

5. a) Pour tout réel A supérieur ou égal à 1, calculer l'intégrale $I(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

   b) Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

6. Pour tout réel A supérieur ou égal à 1, on note $J(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(A) = \dfrac{-\ln(A)}{A} - \dfrac{1}{A} + 1$.

   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} J(A)$.

7. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

   a) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que g est une densité de probabilité.

   c) Compléter les lignes `5.` à `7.` du script `Python` ci-dessous pour que la fonction g prenne en entrée un réel x et calcule $g(x)$.

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt
3.  def g(x):
4.      if x>=1:
5.          y=......
6.      else:
7.          y=......
8.      return y
9.  x=np.linspace(-4,8,100)
10. y=np.zeros(100)
11. for k in range(100):
12.     y[k]=g(x[k])
13. plt.plot(x,y)
14. plt.show()
```

   d) Qu'obtient-on lors de l'exécution des lignes `9.` à `14.` du script précédent ?

8. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction g.

   a) Montrer que la fonction de répartition G de X est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

   b) Calculer les probabilités $P\left(\left[X > e^2\right]\right)$ et $P_{[X>e]}\left(\left[X > e^2\right]\right)$.

   c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Exercice 3 – *Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.*

PARTIE A

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, égale à la durée de fonctionnement d'un composant électronique jusqu'à sa première panne éventuelle.

Pour tout entier naturel n, on note $u_n = P\big([X > n]\big)$.
On suppose dans toute cette partie que, pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$.
Le composant est mis en service à l'instant 0. On a ainsi $u_0 = 1$.

1. a) Soit n un entier naturel non nul. Justifier l'égalité d'événements

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n].$$

   b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n-1} - u_n = P\big([X = n]\big).$$

2. On suppose que la probabilité que le composant tombe en panne à l'instant n sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$ vaut $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire que

$$\forall n \geqslant 1, \quad P_{[X>n-1]}\big([X = n]\big) = \frac{2}{5}.$$

   a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$P_{[X>n-1]}\big([X > n]\big) = 1 - P_{[X>n-1]}\big([X = n]\big).$$

   b) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $u_n = \frac{3}{5} u_{n-1}$.

   c) En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de u_n en fonction de n.

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$P\big([X = n]\big) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

   b) En déduire que X suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

   c) Donner l'espérance et la variance de X.

PARTIE B

Un appareil est constitué de deux composants électroniques dont les durées de vie sont supposées indépendantes. Cet appareil ne fonctionne que si au moins un des deux composants est en état de marche.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales à la durée de vie de chacun de ces composants et Z la variable aléatoire égale à la durée de vie de l'appareil. La durée de vie de l'appareil est donc égale à la plus grande des durées de vie des deux composants.

On suppose que X_1 et X_2 suivent la même loi géométrique de paramètre $\frac{2}{5}$.

4. a) On importe grâce à l'instruction `import numpy.random as rd` la bibliothèque `random`. On rappelle qu'en `Python`, l'instruction `rd.random()` renvoie un réel choisi au hasard et uniformément dans l'intervalle $[0,1]$.
Recopier et compléter le script ci-dessous pour qu'il crée une fonction `geom` qui simule une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $\frac{2}{5}$.

```
import numpy.random as rd
def geom():
    X=......
    while ......:
        X=......
    return X
```

b) Recopier et compléter alors le script ci-dessous pour qu'il crée une fonction `simulZ()` qui simule la variable aléatoire Z.

```
def simulZ():
    X1=geom()
    X2=geom()
    if X1>X2:
        Z=......
    else:
        Z=......
    return Z
```

5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $P\big([X_1 \leqslant n]\big) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

6. a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité

$$[Z \leqslant n] = [X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n].$$

b) En déduire la valeur de $P\big([Z \leqslant n]\big)$ pour tout entier naturel n.

c) En remarquant que $P\big([Z = n]\big) = P\big([Z \leqslant n]\big) - P\big([Z \leqslant n-1]\big)$, montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$P\big([Z = n]\big) = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

7. Justifier la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{9}{25}\right)^n$ puis vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} P\big([Z = n]\big) = 1$.

8. a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $\frac{16}{25}$.
Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$nP\big([Z = n]\big) = 2nP\big([X_1 = n]\big) - nP\big([Y = n]\big).$$

b) En déduire que Z admet une espérance, et que

$$E(Z) = 2E(X_1) - E(Y).$$

En déduire la valeur de $E(Z)$.