

# 9 | Compléments sur les suites

## I – Propriétés éventuelles d'une suite

### 1 – Suites monotones

**Définition 9.1** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. On dit que

- |  |  |
|--|--|
| • $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est <b>croissante</b> lorsque             | • $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est <b>décroissante</b> lorsque             |
| $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1},$                    | $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1},$                      |
| • $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est <b>strictement croissante</b> lorsque | • $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est <b>strictement décroissante</b> lorsque |
| $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1},$                       | $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1},$                         |

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).



#### Méthode 9.2 – Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante

Pour établir qu'une suite est monotone, on peut :

- Étudier le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$ . En effet, on sait que

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0, \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0. \end{aligned}$$

- Comparer le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et 1 **lorsque tous les termes sont strictement positifs**.  
En effet, on sait que

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1. \end{aligned}$$

#### Exemple 9.3 –

- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$  est strictement croissante.

- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{2^n}{n+1}$  est strictement croissante.



### Méthode 9.4 – Variations des suites usuelles

#### • Cas des suites arithmétiques.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r.$$

La monotonie de la suite dépend donc du signe de  $r$  :

- ▷ Si  $r > 0$ , alors  $u_{n+1} - u_n > 0$  et donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
- ▷ Si  $r < 0$ , alors  $u_{n+1} - u_n < 0$  et donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.

Si $r > 0$ , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.	Si $r < 0$ , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

#### • Cas des suites géométriques.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ . Alors

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n \times (q - 1).$$

La monotonie de la suite dépend des signes de  $u_0$ , de  $q^n$  et de  $(q - 1)$ .

1. Si  $q < 0$ , alors  $q^n$  est positif lorsque  $n$  est pair et négatif lorsque  $n$  est impair, donc la suite n'est pas monotone. On parle de suite *alternée*.
2. Si  $q > 0$ , alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon les cas :
  - ▷ Si  $u_0 > 0$  et  $q > 1$ , la suite est croissante (les termes grandissent, dans le positif).
  - ▷ Si  $u_0 > 0$  et  $0 < q < 1$ , la suite est décroissante (les termes rapetissent, dans le positif).
  - ▷ Si  $u_0 < 0$  et  $q > 1$ , la suite est décroissante (les termes grandissent, dans le négatif).
  - ▷ Si  $u_0 < 0$  et  $0 < q < 1$ , la suite est croissante (les termes rapetissent, dans le négatif).

$u_0 > 0$		$u_0 < 0$	
$q > 1$	$0 < q < 1$	$q > 1$	$0 < q < 1$

**Exemple 9.5** – Déterminer le sens de variation des suites suivantes, définies par la donnée d'un terme initial et d'une relation de récurrence.

1.  $u_0 = 7$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4.$

2.  $v_1 = -3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 5v_n.$

## 2 – Suite majorée/minorée/bornée

**Définition 9.6** – Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $m$  et  $M$  deux réels. On dit que

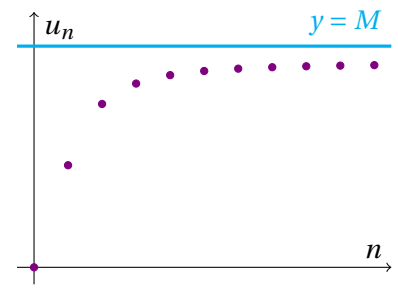
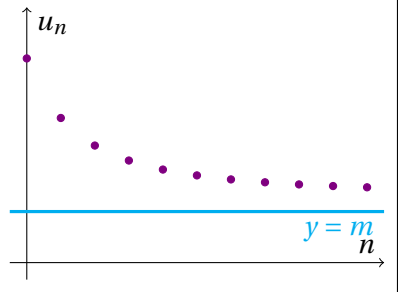
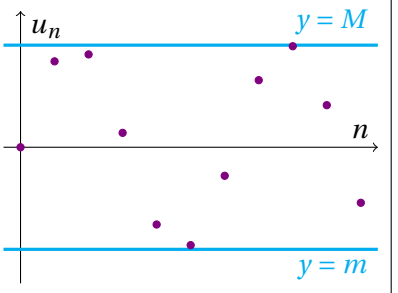
•  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **majorée** par  $M$  lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

•  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **minorée** par  $m$  lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m.$$

Enfin la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.	La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.	La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
		



### Méthode 9.7 – Montrer qu'une suite est majorée/minorée/bornée

Pour montrer qu'une suite est majorée, on opère de la même façon que pour une fonction : on étudie le signe de  $u_n - M$  pour tout  $n$  et on montre que  $u_n - M \leq 0$ .

De la même manière, on étudie le signe de  $u_n - m$  pour tout  $n$  et on montre que  $u_n - m \geq 0$  pour prouver que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par  $m$ .

**Exemple 9.8** – Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{3n^2}{n^2 + 1}$  est majorée par 3.

## II – Limite d'une suite réelle

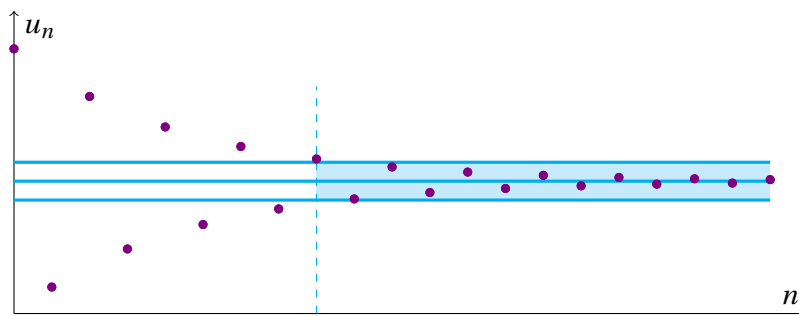
### 1 – Limite finie

**Définition 9.9** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$  et  $\ell$  un réel.

1. Dire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet pour **limite** le réel  $\ell$  signifie que le terme  $u_n$  devient arbitrairement proche du réel  $\ell$  pourvu que  $n$  soit suffisamment grand. On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel  $\ell$  est dite **convergente**.



Graphiquement, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient aussi tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir d'un certain rang. La distance entre les termes de la suite et sa limite tend à s'annuler, ce qui se traduit par le résultat suivant.

**Proposition 9.10**

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \ell = 0$ .

**Exemple 9.11** – Montrer que la suite définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$  tend vers 1 en  $+\infty$ .

### 2 – Limite infinie

**Définition 9.12** –

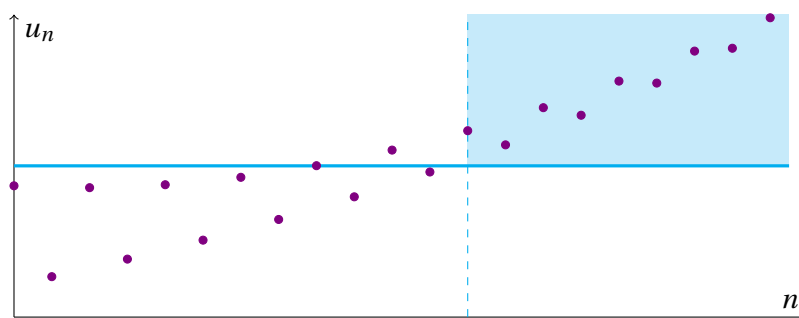
- On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **admet une limite** égale à  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si le terme  $u_n$  prend des valeurs **positives** arbitrairement grandes, pourvu que  $n$  soit suffisamment grand. On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **admet une limite** égale à  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si le terme  $u_n$  prend des valeurs **négatives** arbitrairement grandes, pourvu que  $n$  soit suffisamment grand. On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

- Une suite qui admet une limite infinie est dite **divergente**.



Graphiquement, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle ouvert de la forme  $]a, +\infty[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir d'un certain rang.

**Exemple 9.13** – Montrer que la suite définie  $\forall n \geq 0$  par  $u_n = \frac{n^2}{n+1}$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

**Remarque 9.14** –

- Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général  $(-1)^n$  prend alternativement les valeurs 1 et  $-1$ . Elle n'admet donc pas de limite. On parle là aussi de suite **divergente**.
- En revanche, si une suite converge vers un réel  $\ell$  ou diverge vers  $\pm\infty$ , alors cette limite est **unique**.
- Tous les résultats concernant les opérations sur les limites vus au Chapitre 7 concernant les fonctions restent valables pour les suites.

**Proposition 9.15**

Le tableau suivant donne la limite de  $q^n$ , si celle-ci existe, en fonction des valeurs de  $q$  :

	$q > 1$	$q = 1$	$q \in ]-1, 1[$	$q \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite



**Méthode 9.16 – Limites des suites usuelles**

• **Cas des suites arithmétiques.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{et} \quad u_n = u_0 + n \times r.$$

La limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dépend donc du signe de  $r$ .

1. Si  $r > 0$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ , i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
2. Si  $r < 0$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$ , i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

• **Cas des suites géométriques.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ . Alors

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{et} \quad u_n = u_0 \times q^n.$$

L'existence d'une limite pour la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dépend donc de la valeur de  $q$ .

1. Si  $q < -1$ , alors la suite est alternée et n'admet pas de limite.
2. Si  $-1 < q < 1$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
3. Si  $q > 1$ , alors la suite est monotone donc elle admet une limite qui dépend cette fois du signe de  $u_0$  :
  - ▷ Si  $u_0 > 0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ , i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
  - ▷ Si  $u_0 < 0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$ , i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

Les graphiques de la Méthode 9.4 montrent les différentes limites possibles dans le cas où  $q > 0$ .

**Exemple 9.17** – Déterminer les limites des suites suivantes, définies par récurrence.

1.  $u_0 = 7$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4$ .

2.  $v_1 = -3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 5v_n$ .

## III – Passage à la limite et relation d'ordre

### 1 – Théorèmes de majoration/minoration

#### Théorème 9.18

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites. On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ .

- Si les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

- Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ , i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge aussi et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

- Si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$ , i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge aussi et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

**Exemple 9.19** – Calculer la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = (2 + (-1)^n) n$ .

## 2 – Théorème d'encadrement

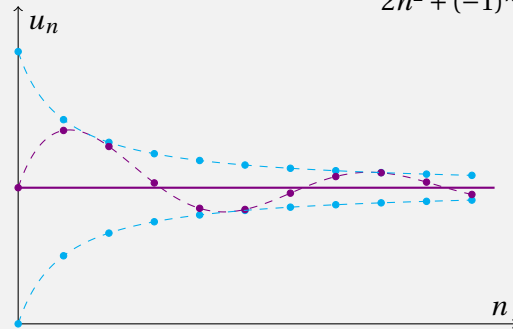
### Théorème 9.20 – Théorème des gendarmes

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ , alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

**Exemple 9.21** – Calculer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{1}{2n^2 + (-1)^n}$ .



(Le graphe n'est pas celui de la suite  $(u_n)$  mais est plus visuel.)

## 3 – Fonctions monotones

### Théorème 9.22 – Théorème de la limite monotone

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante et majorée, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante et minorée, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

### Corollaire 9.23

En conséquence du théorème de limite monotone,

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante qui n'est pas majorée, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante qui n'est pas minorée, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$ .

### Méthode 9.24 – Étudier la convergence d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier la convergence d'une suite définie par une relation du type  $u_{n+1} = f(u_n)$  :

1. On commence par étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en utilisant la Méthode 9.2.
2. On montre que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée ou minorée en utilisant la Méthode 9.7.
3. On applique le théorème de la limite monotone (Théorème 9.22) :
  - Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée, alors elle converge.
  - Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée, alors elle converge.
4. Enfin, pour déterminer la limite  $\ell$ , on utilise le fait que  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$  pour obtenir une équation du type  $f(\ell) = \ell$  que l'on résout ensuite pour trouver  $\ell$ .

Les différentes étapes de cette étude sont le plus souvent guidées par les questions de l'énoncé.



**Exemple 9.25** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier les variations de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .
3. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
4. Déterminer sa limite  $\ell$ .