

## DEVOIR SURVEILLÉ 4

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

**Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.**

*Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.*

*Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage!*

**Exercice 1** – On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $P^3$ . En déduire que  $P$  est inversible et donner son inverse.
2. Vérifier que  $P^{-1}AP = L$ .
3. a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $P^{-1}A^nP = L^n$ .  
 b) Soit  $J = L - I$ . Calculer  $J^2$  puis  $J^3$ .  
 c) En utilisant la formule du binôme, montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

- d) En déduire, pour  $n \geq 2$ , les neuf coefficients de  $L^n$ .  
 Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque  $n = 0$  et lorsque  $n = 1$ .
- e) Déduire des questions précédentes que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On considère les trois suites  $(u_n)_{n \geq 1}$ ,  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$  définies par  $u_1 = 1$ ,  $v_1 = 0$  et  $w_1 = 2$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$u_{n+1} = u_n, \quad v_{n+1} = v_n + 2w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = 2u_n + w_n.$$

- a) Que pouvez-vous dire de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ ? Donner  $u_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ .
- b) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ . Montrer que  $X_{n+1} = AX_n$ .
- c) Établir pour tout entier  $n \geq 1$  que  $X_n = A^{n-1}X_1$ .
- d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$v_n = 2n(n-1) \quad \text{et} \quad w_n = 2n.$$

5. On considère le programme suivant qui permet de calculer les premiers termes des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$ ,  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$ .

- a) Compléter la ligne 2 afin que soit mémorisée dans la variable A la matrice A.  
 b) Pour mémoriser les termes successifs de la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  de  $v_2$  à  $v_{10}$ , quelle instruction parmi celles-ci faut-il ajouter en ligne 11? (On justifiera la réponse.)  
 A.  $v[i]=X[i]$  B.  $v[i]=X$  C.  $v[i]=X[1]$   
 D. une autre instruction à préciser.  
 c) Proposer de la même manière une instruction pour la ligne 12 qui permette de mémoriser les premiers termes de la suite  $(w_n)_{n \geq 1}$ .

```

1. import numpy as np
2. A=np.array(....)
3. u=np.zeros(10)
4. v=np.zeros(10)
5. w=np.zeros(10)
6. u[0]=1; v[0]=0; w[0]=2
7. X=np.array([[1],[0],[2]])
8. for i in range(1,10):
9.     X=np.dot(A,X)
10.    u[i]=1
11.    ....
12.    ....

```

**Exercice 2** – On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = e^x - \ln(x)$  et la fonction  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(x) = xe^x - 1$ .

1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .  
 b) Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$  sur  $[0, +\infty[$ . En déduire le tableau des variations de  $g$ . On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en  $+\infty$ .  
 c) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0, +\infty[$ . Vérifier que  $\alpha \in [0, 1]$ .  
 d) Préciser le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .
2. a) Calculer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
 b) Montrer que la dérivée de  $f$  vérifie, pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

En déduire le tableau des variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

- c) Justifier que le réel  $\alpha$  vérifie  $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$ . En déduire que  $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ .
3. a) Montrer que la dérivée seconde de  $f$  vérifie, pour tout réel  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}.$$

- b) Étudier la convexité de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
4. Tracer la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2cm. On donne  $\alpha \approx 0.57$  et  $f(\alpha) \approx 2.33$ .

**Exercice 3** – Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet de la "cage à l'écureuil". Il s'agit d'une structure métallique que l'enfant doit escalader jusqu'à son sommet.

La cage est constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau  $A$ . Il cherche ensuite à atteindre le deuxième niveau  $B$  et enfin le troisième niveau qui est le sommet  $C$ .

On décompose l'ascension de l'enfant en une succession d'instant. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau  $A$  puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- Si à un instant  $n$  donné l'enfant est sur le niveau  $A$ , alors à l'instant suivant  $n + 1$ , il y reste avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et passe au  $B$  avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ .
- Si à un instant  $n$  donné l'enfant est sur le niveau  $B$ , alors à l'instant suivant  $n + 1$ , il y reste avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et passe au  $C$  avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ .
- Si à un instant  $n$  donné l'enfant est sur le niveau  $C$ , alors il y reste définitivement.

On note pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_n$  l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau  $A$  à l'instant  $n$ ",  $B_n$  l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau  $B$  à l'instant  $n$ ". On note enfin  $C_n$  l'événement : "à l'instant  $n$  l'enfant est au sommet". On note  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  les probabilités respectives de ces trois événements.

1. Donner les probabilités  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ .
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, \quad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n.$$

3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $a_n = \frac{1}{3^n}$ .
4. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = 3^n b_n$ .
  - a) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison 2.
  - b) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
Établir pour tout entier naturel  $n$  que  $b_n = \frac{2^n}{3^n}$ .
5. Pour tout entier naturel  $n$ , quelle est la valeur de  $a_n + b_n + c_n$ ?  
En déduire une expression de  $c_n$  en fonction de l'entier  $n$ .  
Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$ . Comment interpréter le résultat?
6. On note  $X$  la variable aléatoire égale à l'instant où l'enfant atteint le sommet.
  - a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .
  - b) Justifier que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on a  $[X = n] = B_{n-1} \cap C_n$ .
  - c) En déduire, pour  $n \geq 2$ , que  $P(X = n) = \frac{4(n-1)}{3^n}$ .
7. a) On note  $X_1$  la variable aléatoire égale à l'instant où pour la première fois l'enfant quitte le niveau  $A$  pour arriver sur le niveau  $B$ .  
Justifier que  $X_1$  suit une loi usuelle. Donner l'ensemble  $X_1(\Omega)$  des valeurs prises par  $X_1$  et donner  $P(X_1 = k)$  pour tout entier  $k$  de  $X_1(\Omega)$ . Calculer  $E(X_1)$ .
  - b) On note  $X_2$  la variable aléatoire égale au nombre d'instant supplémentaires nécessaires à l'enfant pour atteindre pour la première fois le niveau  $C$  une fois qu'il a atteint le niveau  $B$ . Justifier que  $X_2$  suit la même loi que  $X_1$ .
  - c) Exprimer la variable aléatoire  $X$  en fonction de  $X_1$  et  $X_2$ .  
En déduire que  $X$  admet une espérance et que  $E(X) = 3$ .

**Exercice 4 –**

1. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Montrer que  $A$  est inversible et expliciter  $A^{-1}$ .

b) On rappelle que  $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Prouver que pour tout entier  $n \geq 0$ ,

il existe deux réels  $u_n$  et  $v_n$  tels que  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix}$ . On vérifiera que

$$u_0 = v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 1 \\ v_{n+1} = v_n - 2u_n. \end{cases}$$

c) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

d) Démontrer que  $\forall n \geq 1, \quad v_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} k$ .

e) En déduire une expression simplifiée de  $v_n$  puis écrire  $A^n$  sous la forme d'un tableau de nombres.

2. Soit  $f$  la fonction qui à tout réel  $x$  associe  $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ , où  $a, b, c$  sont trois réels.

a) Pour tout réel  $x$ , calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  s'écrit sous la forme

$$f'(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)e^{-x}$$

où  $a_1, b_1, c_1$  sont trois réels. Vérifier que  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

b) Exprimer  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  en fonction de  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$  en utilisant la matrice  $A^{-1}$ .

3. **Application.** Soient  $r$  et  $s$  les deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad r(x) = (x+1)e^{-x} \quad \text{et} \quad s(x) = (x^2 + x)e^{-x}.$$

Déduire de la question précédente une primitive  $R$  de  $r$  et une primitive  $S$  de  $s$ .

4. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x < 0, \quad g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, \quad g(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}.$$

a) Soit  $X \in [0, +\infty[$ . Calculer  $\int_0^X g(x) dx$  et  $\int_0^X xg(x) dx$ .

b) En déduire la convergence des intégrales  $\int_0^{+\infty} g(x) dx$  et  $\int_0^{+\infty} xg(x) dx$  puis donner leurs valeurs respectives.

c) Prouver que  $g$  est une densité de probabilité.

d) Soit  $Y$  une variable aléatoire possédant  $g$  pour densité.

Démontrer que  $Y$  admet une espérance et donner la valeur de  $E(Y)$ .