NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 23

Exercice 1 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.

Solution : Je calcule $A^2 - 2A + 3I_2$:
$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-5 & -10+20 \\ 2-4 & -5+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$ donc

$$A^2 - 2A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Finalement le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est bien un polynôme annulateur de A.

2. En déduire les valeurs propres possibles de A.

Solution : Les valeurs propres possibles de A sont les racines du polynôme $X^2 - 2X - 3$.
Je calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Donc les valeurs propres possibles pour la matrice A sont parmi -1 et 3.

3. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de A et donner un vecteur propre pour chacune d'elle.

Solution :

- Je cherche une solution non nulle de l'équation $AX = -X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$AX = -X \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 5y & = & -x \\ -x & + & 4y & = & -y \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & 5y & = & 0 \\ -x & + & 5y & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff -x+5y=0 \iff x=5y$$

  Je fixe alors $y = 1$ et j'obtiens $x = 5 \times 1 = 5$.

  Ainsi -1 est bien valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

- Je cherche une solution non nulle de l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$AX = 3X \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 5y & = & 3x \\ -x & + & 4y & = & 3y \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} -5x & + & 5y & = & 0 \\ -x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff -x+y=0 \iff x=y$$

  Je fixe alors $y = 1$ et j'obtiens $x = 1$.

  Ainsi 3 est bien valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.