DEVOIR SURVEILLÉ 2

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez.
Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.
Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise.

Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 10 problèmes. Bon courage!

Exercice 1 – Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

1. $A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$
2. $B = 3\left(1 - \frac{1}{5}\right) + 2 \times \frac{3}{7}$
3. $C = \dfrac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{2}{7} + 3\left(2 - \frac{1}{2}\right)}$
4. $D = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3}\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}\right)$

Exercice 2 – Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $2x - 4 = 1$
2. $x + 3 \leq 2x - 1$
3. $\dfrac{x+2}{x-3} \leq 3$
4. $\dfrac{4x-1}{x-2} = 0$
5. $2x^2 - 10x + 12 = 0$
6. $-x^2 - 2x + 3 < 0$
7. $6x^3 + 7x^2 - x - 2 = 0$

Exercice 3 – Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

1. $a(x) = x^5 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$
2. $b(x) = \dfrac{2x-3}{4x-1}$
3. $c(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$
4. $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$
5. $e(x) = \dfrac{1}{x} + 4x - 5$
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{-x+3}}$

Exercice 4 – On considère les fonctions f et g définies par

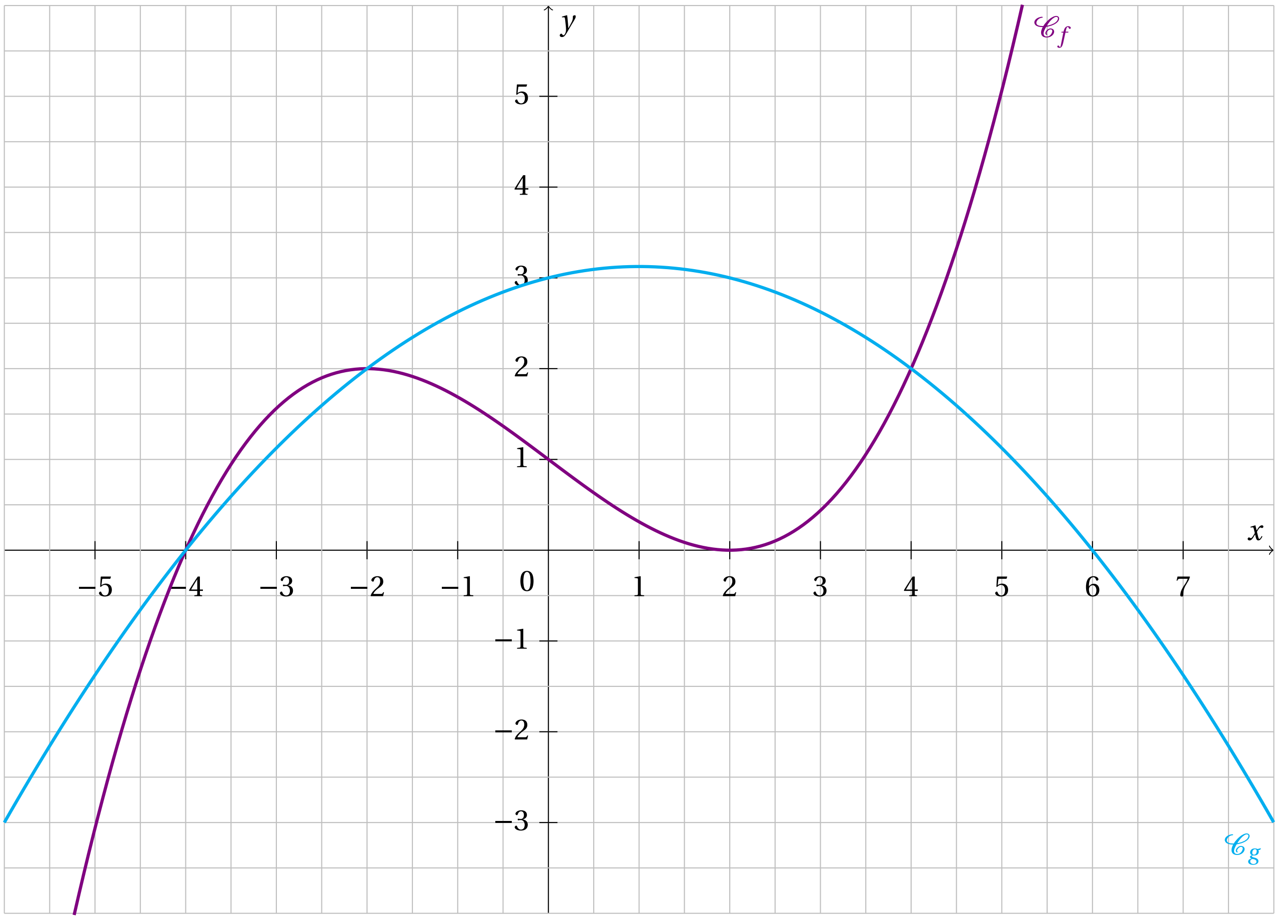
$$f(x) = \frac{1}{2x-3} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^2 + 3.$$

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions f et g.
2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Déterminer l'expression **puis** le domaine de définition des fonctions $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ et $g \circ g$.

Exercice 5 – Soient f et g les fonctions définies pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{x^3}{16} - \frac{3}{4}x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} + 3.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées ci-dessous.



1. Par lecture graphique, donner le tableau de variation de la fonction f ainsi que le tableau de signe de la fonction g.

À partir de maintenant, toutes les questions doivent être résolues sans utiliser le graphique.

2. (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{(x+4)(x-2)^2}{16}$.

   (b) Établir le tableau de signe de $f(x)$.

3. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $g(x) = 0$ et en déduire une expression factorisée de $g(x)$.

4. (a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{(x+4)(x^2-2x-8)}{16}$.

   (b) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

5. Les différents résultats obtenus sont-ils cohérents avec le graphique fourni ci-dessus ?

Exercice 6 – Soit f la fonction définie sur $[-3;5]$ par $f(x) = x^2 - x - 6$. Ci-dessous, on donne $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f.

1. Déterminer graphiquement

(a) $f(0)$,

(b) l'image de 3 par f,

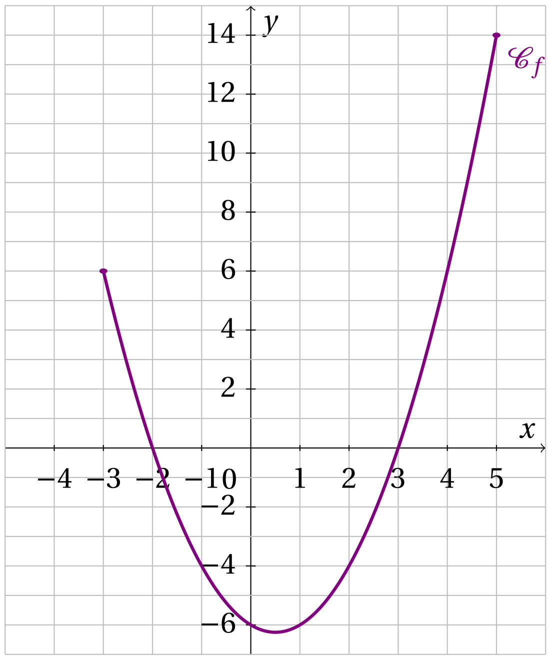
(c) les éventuels antécédents de -4 par f,

(d) les éventuels antécédents de 10 par f,

(e) les éventuels antécédents de -6 par f,

(f) l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5,

(g) les solutions de l'équation $f(x) = 3$.



2. Déterminer algébriquement l'image de $\frac{1}{2}$ par f.
3. Montrer que pour tout x de $[-3;5]$, $f(x) = (x-3)(x+2)$.
4. Retrouver algébriquement les antécédents de 0 par f.

Exercice 7 – On considère une fonction f définie sur $[-5;12]$ et dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-5		0		4		9		12
f	-1	↘	-3	↗	5	↘	2	↗	4

Répondre par VRAI ou FAUX aux questions suivantes. Une justification est demandée dans tous les cas.

1. f est croissante sur $[-1;-3]$,
2. f est décroissante sur $[5;2]$,
3. f est croissante sur $[9;12]$,
4. $\forall x \in [-5;12], \quad f(x) \geq -3$,
5. $\exists x \in [-5;12], \quad f(x) = -5$,
6. $\exists x \in [4;9], \quad f(x) = 4$,
7. $\forall x \in [9;12], \quad f(x) \leq 4$.

Exercice 8 – On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \dfrac{3n+4}{n+1}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer en fonction de n les expressions suivantes.

$$u_{n-1}, \quad u_n - 1, \quad u_{n+2}, \quad u_n + 2, \quad u_{2n-1}, \quad 2u_n - 1 \quad \text{et} \quad u_{2n} - 1.$$

3. Exprimer en fonction de n le terme de rang $n+1$.

Exercice 9 – On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1760$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,65u_n + 861.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle une suite géométrique ?
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2460$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n,

$$u_n = 2460 - 700 \times 0,65^n.$$

Exercice 10 –

1. Calculer les sommes suivantes.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{3}{(1+k)^2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{k}{k^2+1} + \sum_{k=0}^{2} (k+2)^2$

2. Écrire à l'aide du signe Σ les sommes suivantes (on ne demande pas de calculer les sommes).

   (a) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{4}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{100}}$

   (b) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 98 + 99$

   (c) $1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{4}{25} + \frac{1}{9} + \frac{4}{49} + \frac{1}{16} + \frac{4}{81} + \frac{1}{25}$