INTERRO DE COURS – SEMAINE 2

Exercice 1 – On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ et QP.

Solution : On a

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

2. On définit la matrice $D = QAP$. Calculer D. *(D est presque sûrement une matrice diagonale.)*

Solution : On a :

$$\begin{aligned} D &= QAP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Montrer que $A = PDQ$.

Solution : On sait que $D = QAP$. Ainsi,

$$PDQ = \underbrace{PQ}_{=I_3} A \underbrace{PQ}_{=I_3} = I_3 A I_3 = A$$

Ainsi, on a bien $A = PDQ$.

4. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Solution : La matrice D étant diagonale, on a

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}$$

5. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = PD^nQ$.

Solution : Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $A^n = PD^nQ$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PD^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$$A^{n+1} = A^n \times A$$

par hypothèse de récurrence, on sait que

$$A^n = PD^nQ$$

et que $A = PDQ$. Donc,

$$A^{n+1} = PD^nQPDQ = PD^nIDQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$.

$$\forall n \in \mathbf{N}, A^n = PD^nQ.$$

6. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nQ \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8^n \\ -(-1)^n & 0 & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ -8^n & 0 & -8^n \\ 8^n - (-1)^n & 0 & 8^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$