

10 | Variables aléatoires réelles

I – Généralités sur les variables aléatoires

1 – Définitions et exemples

Quand on étudie une probabilité, l'univers Ω (l'ensemble des résultats possibles) n'est pas forcément composé d'objets mathématiques : par exemple $\{\text{PILE}, \text{FACE}\}$. Dans ce cas, à chaque issue, on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers Ω dans \mathbb{R} . On peut par exemple considérer le gain obtenu à l'issue d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.

Définition 10.1 – Une **variable aléatoire** X est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
On appelle **support** de X et on note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X .

Exemple 10.2 – Tout au long de ce chapitre, on s'appuie sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées :

1. Un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on tire le numéro 1 on gagne 4€, si on tire un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain (algébrique).
 X est une variable aléatoire et son support est donné par

$$X(\Omega) = \{-1, 1, 3\}.$$

2. On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des deux résultats obtenus.
 X est une variable aléatoire et son support est donné par

$$X(\Omega) = [2, 12] \quad (\text{La somme fait au minimum 2 et au maximum 12.})$$

2 – Événements associés à une variable aléatoire

Définition 10.3 – Soient X une variable aléatoire sur Ω et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des issues de l'univers dont l'image par la variable aléatoire X est x .
De la même manière, on définit

$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\},$$

$$[X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$

$$[X \geq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\},$$

$$[X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}.$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors on note

$$[x \leq X \leq y] = \{\omega \in \Omega \mid x \leq X(\omega) \leq y\}.$$

Plus généralement, si I désigne une partie de \mathbb{R} , on note

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}.$$

Exemple 10.4 – Calculer $P([X = 3])$ et $P([X \leq 2])$ dans les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. Je gagne 3€ dans le cas où j'obtiens le tirage 1. Ainsi

$$P(X = 3) = P(\{1\}) = \frac{1}{5}.$$

Par ailleurs, je gagne moins de 2€ dans le cas où j'obtiens n'importe quel tirage différent de 1. Autrement dit, si j'obtiens un 2, un 3, un 4 ou un 5. Ainsi

$$P(X \leq 2) = P(\{2, 3, 4, 5\}) = \frac{4}{5}.$$

2. La somme des deux dés vaut 3 si j'obtiens (1, 2) ou (2, 1) avec les deux dés. Puisqu'il y a au total 36 issues possibles lorsque je lance les deux dés (tous les tirages (1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6, 6)), alors

$$P(X = 3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Par ailleurs, la somme des deux dés est inférieure ou égale à 2 seulement lorsque j'obtiens (1, 1) avec les deux dés. Ainsi

$$P(X \leq 2) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}.$$

Proposition 10.5

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . Alors $\{[X = x] \mid x \in X(\Omega)\}$, ensemble des événements $[X = x]$ pour toutes les valeurs x du support $X(\Omega)$, forme un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x]) = 1.$$

Exemple 10.6 – On reprend les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. Un système complet d'événements est donné par $\{[X = -1], [X = 1], [X = 3]\}$.
2. Un système complet d'événements est donné par $\{[X = 2], [X = 3], [X = 4], \dots, [X = 12]\}$.

Remarque 10.7 – Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P([X = x])$ en $P(X = x)$ et de même pour les autres ensembles.

3 – Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 10.8 – Soit X une variable aléatoire sur Ω . On appelle **loi** de la variable aléatoire X la donnée de toutes les probabilités $P(X = x)$ pour tous les réels $x \in X(\Omega)$.

Méthode 10.9 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

1. On détermine le support $X(\Omega)$, *i.e.* l'ensemble des valeurs prises par X .
2. On calcule la probabilité $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

On résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec sur la première ligne l'ensemble des valeurs prises par X et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.



Exemple 10.10 – On reprend les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. Pour déterminer la loi de la variable aléatoire X , je dois calculer les probabilités de tous les éléments du support. Alors en calculant le nombre d'issues favorables, j'obtiens que

$$P(X = -1) = \frac{2}{5}, \quad P(X = 1) = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad P(X = 3) = \frac{1}{5}.$$

Je résume cela dans le tableau suivant :

x	-1	1	3
$P(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. De la même manière, je calcule les 11 probabilités

$$P(X = 2) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}, \quad P(X = 3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36},$$

$$P(X = 4) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36}, \quad \text{etc.}$$

Finalement j'obtiens le tableau suivant :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarque 10.11 – On n'oublie pas de vérifier à **chaque fois** que la somme des probabilités inscrites dans le tableau fait 1.

4 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition 10.12 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X et on note F_X la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Les valeurs prises par F_X sont des probabilités donc **toujours** comprises entre 0 et 1.

Proposition 10.13

Soit X une variable aléatoire finie. On note le support $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1, \\ P(X = x_1) & \text{si } x_1 \leq x < x_2, \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) & \text{si } x_2 \leq x < x_3, \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_k) & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1}, \quad (\text{pour } 3 \leq k \leq n-1) \\ 1 & \text{si } x_n \leq x. \end{cases}$$

En particulier F_X est constante sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$, c'est-à-dire entre deux valeurs consécutives du support.

Exemple 10.14 – Calculer la fonction de répartition de X dans les deux exemples de l'Exemple 10.2.

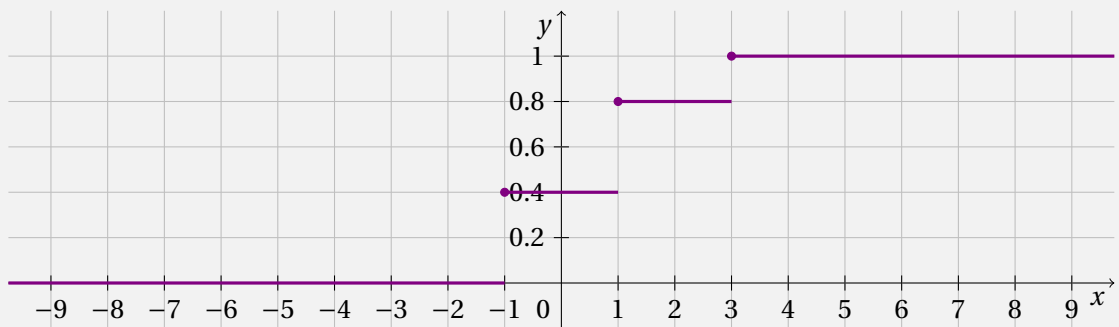
1. Je sais que le support vaut $X(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$. Alors

- lorsque $x < -1$, $F_X(x) = 0$,
- lorsque $-1 \leq x < 1$, $F_X(x) = P(X = -1) = \frac{2}{5}$,
- lorsque $1 \leq x < 3$, $F_X(x) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$,
- lorsque $x \geq 3$, $F_X(x) = 1$.

Je résume ceci par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{2}{5} & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ \frac{4}{5} & \text{si } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Et voici le tracé de la fonction de répartition :



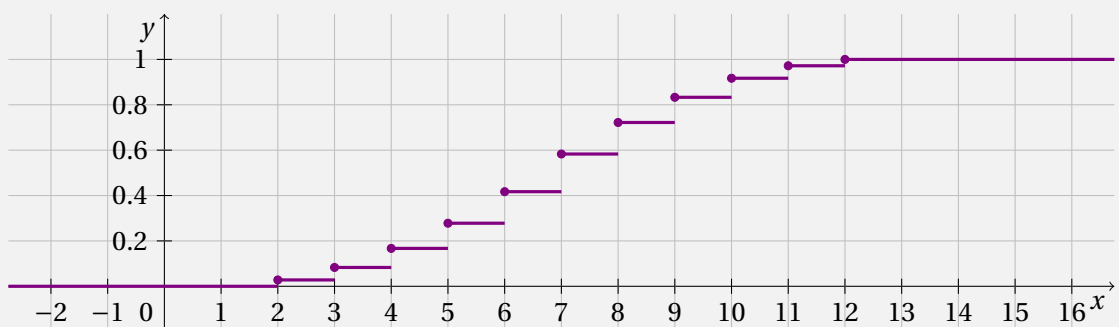
2. Je sais que le support vaut $X(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$. Alors

- lorsque $x < 2$, $F_X(x) = 0$,
- lorsque $2 \leq x < 3$, $F_X(x) = P(X = 2) = \frac{1}{36}$,
- lorsque $3 \leq x < 4$, $F_X(x) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$,
- lorsque $4 \leq x < 5$, $F_X(x) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$,
- etc.

Je résume ceci par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \frac{1}{36} & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ \frac{3}{36} & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ \text{etc.} & \\ \frac{35}{36} & \text{si } 11 \leq x < 12, \\ 1 & \text{si } x \geq 12. \end{cases}$$

Et voici le tracé de la fonction de répartition :



Proposition 10.15

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X . Autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

II – Moments d'une variable aléatoire finie

1 – Espérance

Définition 10.16 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont le support est noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

On appelle **espérance** de X le réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n.$$

Remarque 10.17 –

- L'espérance $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs x_i affectées des fréquences p_i .
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $E(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois. Le signe de $E(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre. Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est **équitable**.

Exemple 10.18 – Calculer l'espérance de X pour chacun des deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. En utilisant la loi donnée précédemment, $E(X) = (-1) \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.
2. En utilisant la loi donnée précédemment,

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + \dots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7.$$

Proposition 10.19 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires finies définies sur Ω et a et b deux réels. Alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Exemple 10.20 – On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.

Soient g la fonction définie par $g(x) = 2x + 3$ et $Y = g(X) = 2X + 3$. Déterminer l'espérance de Y .

Le support de X est donné par $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ et comme le dé est non truqué, il s'agit d'une situation d'équiprobabilité. Ainsi $\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$ et

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 k P(X = k) = \sum_{k=1}^6 k \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

J'en déduis que

$$E(Y) = E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 2 \times \frac{7}{2} + 3 = 7 + 3 = 10.$$

Théorème 10.21 – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire finie. On note le support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans \mathbb{R} . Alors l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^n g(x_i) P(X = x_i).$$

Exemple 10.22 – On considère la fonction $g(x) = x^2$. Calculer $E(g(X))$ pour chacun des deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. D'après le théorème de transfert et la loi de X calculée précédemment,

$$E(g(X)) = E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{2}{5} + 1^2 \times \frac{2}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} = \frac{2+2+9}{5} = \frac{13}{5}.$$

2. D'après le théorème de transfert et la loi de X calculée précédemment,

$$E(g(X)) = E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + \dots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}.$$

Remarque 10.23 –

- Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X .
- Ce théorème est principalement utilisé pour calculer $E(X^2)$, l'espérance du carré d'une variable aléatoire, quantité nécessaire au calcul de la variance de X en utilisant la formule de König-Huygens.

2 – Variance

Définition 10.24 – Soit X une variable aléatoire finie.

- On appelle **variance** de X le réel, noté $V(X)$, défini par

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i).$$

- On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque 10.25 – La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Théorème 10.26 – Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire finie. Alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$


Méthode 10.27 – Calculer la variance d'une variable aléatoire

1. On calcule $E(X^2)$ grâce au théorème de transfert.
2. Puis on utilise la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple 10.28 – Calculer la variance $V(X)$ pour les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. J'ai déjà calculé $E(X^2)$ dans la partie précédente et trouvé que $E(X^2) = \frac{13}{5}$.
Par ailleurs $E(X) = \frac{3}{5}$, donc $E(X)^2 = \frac{9}{25}$. Alors d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{13}{5} - \frac{9}{25} = \frac{65}{25} - \frac{9}{25} = \frac{56}{25}.$$

2. J'ai déjà calculé $E(X^2)$ dans la partie précédente et trouvé que $E(X^2) = \frac{329}{6}$.
Par ailleurs $E(X) = 7$, donc $E(X)^2 = 49$. Alors d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{329}{6} - \frac{294}{6} = \frac{35}{6}.$$

Proposition 10.29

Soient X une variable aléatoire finie et a et b deux réels. Alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

En particulier

$$V(X + b) = V(X).$$

Remarque 10.30 – Contrairement à l'espérance, la variance n'est PAS linéaire.

Exemple 10.31 – On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X + 3$. Calculer la variance de la variable aléatoire X puis celle de Y .

Il s'agit d'une loi uniforme sur l'intervalle $\llbracket 1, 6 \rrbracket$. J'ai déjà calculé l'espérance et trouvé que $E(X) = \frac{7}{2}$.
En appliquant le théorème de transfert, je trouve

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^6 k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^6 k^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{91}{6}.$$

Alors d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}.$$

Enfin d'après la Proposition 10.29,

$$V(Y) = V(2X + 3) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}.$$

Remarque 10.32 – Lorsqu’une variable aléatoire admet une espérance nulle, on parle de variable **centrée**. Si en plus, son écart-type vaut 1, alors on parle de variable **centrée réduite**.

III – Lois usuelles

1 – Loi uniforme

Définition 10.33 – Soit un couple d’entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $\llbracket a, b \rrbracket$ lorsque son support vaut $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$ et que chaque valeur a la même probabilité d’arriver :

$$\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n},$$

avec n le nombre de valeurs dans l’intervalle $\llbracket a, b \rrbracket$, i.e. $n = b - a + 1$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$.

Exemple 10.34 – Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.

Alors X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$, i.e. $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$, car $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$

$$\text{et pour tout } k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{6}.$$

2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on note X le numéro obtenu.

Alors X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, i.e. $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, car $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{et pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Proposition 10.35

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l’intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Alors l’espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Proposition 10.36

Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l’intervalle $\llbracket a, b \rrbracket$.

Alors la variable aléatoire $X - a + 1$ suit une loi uniforme sur l’intervalle $\llbracket 1, b - a + 1 \rrbracket$ et l’espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

où $n = b - a + 1$ est le nombre de valeurs.

2 – Loi de Bernoulli

Définition 10.37 – Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0, 1[$ lorsqu’il n’y a que deux issues possibles, i.e. $X(\Omega) = \{0, 1\}$, et que

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Une **épreuve** de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : l'une que l'on qualifie de "succès", de probabilité p , et l'autre que l'on qualifie d'"échec", de probabilité $1 - p$. On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un "succès", la variable aléatoire prend la valeur $X = 1$, sinon elle prend la valeur $X = 0$.

Exemple 10.38 – On lance une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est PILE et 0 sinon.

Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$, i.e. $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Proposition 10.39

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p).$$

Remarque 10.40 – Lorsque $p = 1$, i.e. que le support est restreint à un unique élément, on parle alors de **loi certaine**. Les lois certaines sont caractérisées par une variance nulle.

3 – Loi binomiale

Définition 10.41 – L'expérience aléatoire qui consiste à **répéter** n fois une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p , à l'**identique** et de **manière indépendante**, est appelée un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p .

La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves de ce schéma de Bernoulli suit une **loi binomiale** de paramètres n et p . On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

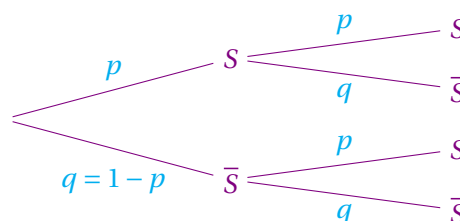
Exemple 10.42 – On lance dix fois de suite une pièce équilibrée et on note X le nombre de PILE obtenus.

Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$, i.e. $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

Dans les cas où $n = 2$ ou $n = 3$, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.

1. Cas $n = 2$

On répète deux épreuves de Bernoulli de paramètre p , successivement et de manière indépendante.



La variable aléatoire X , égale au nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et p .

Nombre de succès k	0	1	2
$P(X = k)$	q^2	$2 \times p \times q$	p^2

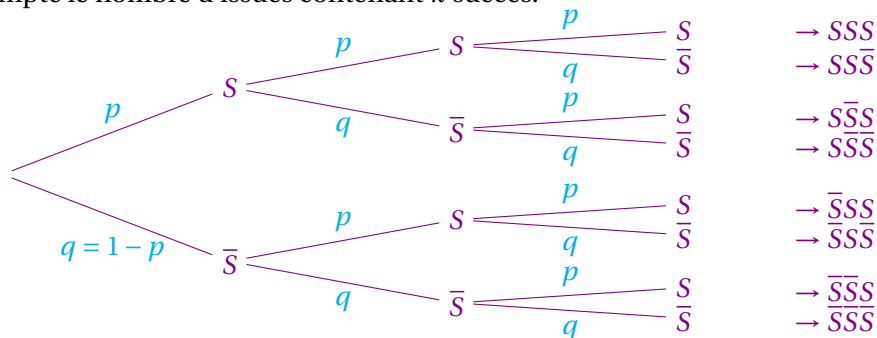
2. Cas $n = 3$

On répète trois épreuves de Bernoulli de paramètre p , successivement et de façon indépendante.

L'expérience comporte $2^3 = 8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{SSS, SS\bar{S}, S\bar{S}S, S\bar{S}\bar{S}, \bar{S}SS, \bar{S}S\bar{S}, \bar{S}\bar{S}S, \bar{S}\bar{S}\bar{S}\}.$$

Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X , égale au nombre de succès, on dresse un arbre et on compte le nombre d'issues contenant k succès.



La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p .

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X = k)$	q^3	$3 \times p \times q^2$	$3 \times p^2 \times q$	p^3

Définition 10.43 – Soient n un entier naturel non nul et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

Si on représente par un arbre une série de n épreuves de Bernoulli, le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves répétées.

Remarque 10.44 –

- Un seul chemin permet d'obtenir 0 succès ou n succès consécutifs, donc $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- Il y a n chemins différents qui permettent d'obtenir un seul succès. Ainsi $\binom{n}{1} = n$.

Proposition 10.45

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-(k+1))}{k!}.$$

Corollaire 10.46

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les trois valeurs principales à retenir pour les coefficients binomiaux sont les suivantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pour les coefficients suivants, il suffit de rajouter des facteurs au numérateur (en retirant 1 à chaque fois au précédent) et au dénominateur (en ajoutant 1 à chaque fois au précédent).

Proposition 10.47

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

- Relation de symétrie des coefficients :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

- Formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Remarque 10.48 – La formule du triangle de Pascal permet de déterminer les coefficients binomiaux de proche en proche.

Exemple 10.49 – Calculer les coefficients binomiaux suivants.

$$\bullet \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

$$\bullet \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$\bullet \binom{11}{1} = 11$$

$$\bullet \binom{3}{0} = 1$$

Proposition 10.50

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p . Alors le support de X vaut $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Proposition 10.51

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Exemple 10.52 – Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients choisissent l'option *Livraison Express*. On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bons portant la mention *Livraison Express*.

1. Déterminer la loi de X en justifiant soigneusement.

X compte le nombre de réalisations de l'événement succès "le bon de commande comprend la mention *Livraison Express*" de probabilité 0.4 lors de la répétition de 30 expériences identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0.4$.

2. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.

Puisque X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0.4$, alors

$$E(X) = n \times p = 30 \times 0.4 = 12.$$

Cela signifie que sur un grand nombre de prélèvements de 30 bons se trouvent en moyenne 12 bons de commande avec la mention *Livraison Express*.

4 – Formule du binôme de Newton

Théorème 10.53 – Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux réels de \mathbb{R} et n un entier de \mathbb{N} . Alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 10.54 – $(2 + x)^3 = 1 \times 2^0 \times x^3 + 3 \times 2 \times x^2 + 3 \times 2^2 \times x + 1 \times 2^3 \times x^0 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$