10 | Variables aléatoires réelles

I – Généralités sur les variables aléatoires

1 – Définitions et exemples

Il arrive souvent qu'à chaque résultat d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers Ω (l'ensemble des résultats possibles) dans $\mathbf{R}$. On peut par exemple considérer le gain obtenu à l'issu d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.

Définition 10.1 – Une **variable aléatoire** X est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
On appelle **support** de X, et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.

Exemple 10.2 – Tout au long de ce chapitre, on s'appuiera sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1, on gagne 4€, si on a un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et
$$X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}.$$
2. On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des deux résultats obtenus. X est une variable aléatoire et
$$X(\Omega) = [\![2; 12]\!] \qquad \textit{(on obtient au minimum 2 et au maximum 12).}$$

2 – Évènements associés à une variable aléatoire

Définition 10.3 – Soit X une variable aléatoire sur Ω et $x \in \mathbf{R}$. On note
$$[X = x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\},$$
$$[X < x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) < x\},$$
$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leqslant x\},$$
$$[X > x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) > x\},$$
$$[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \geqslant x\}.$$
Si x et y sont deux réels tels que $x < y$ alors on note
$$\left[x \leqslant X \leqslant y\right] = \left\{\omega \in \Omega; x \leqslant X(\omega) \leqslant y\right\}.$$
Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbf{R}$, on note
$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in I\}.$$

Exemple 10.4 – Calculer $P([X = 3])$ et $P([X \leqslant 2])$ dans les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. On gagne 3€ dans le cas où l'on obtient le tirage 1. Ainsi,
$$P(X=3)=P(\{1\})=\frac{1}{5}.$$
Par ailleurs, on gagne moins de 2€ dans le cas où l'on obtient n'importe quel tirage différent de 1. Autrement dit, si l'on obtient un 2, un 3, un 4 ou un 5. Ainsi,
$$P(X\leqslant 2)=P(\{2;3;4;5\})=\frac{4}{5}.$$

2. La somme des deux dés vaut 3 si l'on a obtenu $(1;2)$ ou $(2;1)$ avec les deux dés. Puisqu'il y a au total 36 issues possibles lorsque l'on lance les deux dés (tous les tirages $(1;1)$, $(1;2)$, …, $(1;6)$, …, $(6;1)$, $(6;2)$, …, $(6;6)$), on a :
$$P(X=3)=P(\{(1;2);(2;1)\})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$
Par ailleurs, la somme des deux dés est inférieure ou égale à 2 seulement lorsque l'on obtient $(1;1)$ avec les deux dés. Ainsi,
$$P(X\leqslant 2)=P(\{(1;1)\})=\frac{1}{36}.$$

Proposition 10.5

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Alors, l'ensemble
$$\big\{[X=x]\,;x\in X(\Omega)\big\}$$
forme un système complet d'évènements. En particulier, on a
$$\sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\big)=1.$$

Exemple 10.6 – On reprend les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. Un système complet d'évènements est $\big\{[X=-1]\,;[X=1]\,;[X=3]\big\}$.
2. Un système complet d'évènements est $\big\{[X=2];[X=3];[X=4];\dots;[X=12]\big\}$.

Remarque 10.7 – Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P([X=x])$ en $P(X=x)$, et de même pour les autres ensembles.

3 – Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 10.8 – Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi** de la variable aléatoire X, la donnée des $P(X=x)$ pour tout réel x.

Méthode 10.9 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

- On donne l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.
- On calcule $P(X=x)$ pour tout $x\in X(\Omega)$.

On résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec, sur la 1ère ligne, les valeurs prises par X, et sur la 2ème ligne les probabilités correspondantes.

Exemple 10.10 – On reprend les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. La loi de la variable aléatoire X est donnée par

$$P(X=-1)=\frac{2}{5},\qquad P(X=1)=\frac{2}{5},\qquad P(X=3)=\frac{1}{5}.$$

   Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant.

x	-1	1	3
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. On a

$$P(X=2)=P(\{(1;1)\}=\frac{1}{36},\qquad P(X=3)=P(\{(1;2);(2;1)\})=\frac{2}{36}$$

$$P(X=4)=P(\{(1;3);(2;2);(3;1)\})=\frac{3}{36}\qquad \text{etc.}$$

   De manière générale, on a

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarque 10.11 – On n'oubliera pas de vérifier **à chaque fois** que la somme des probabilités inscrites dans le tableau fait 1.

4 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition 10.12 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X et on note F_X la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)\in[0;1]$$

Proposition 10.13

Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ avec $x_1<x_2<\dots<x_n$. Alors

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<x_1,\\ P(X=x_1)+\dots+P(X=x_k) & \text{si } x_k\leqslant x<x_{k+1},\\ 1 & \text{si } x_n\leqslant x.\end{cases}$$

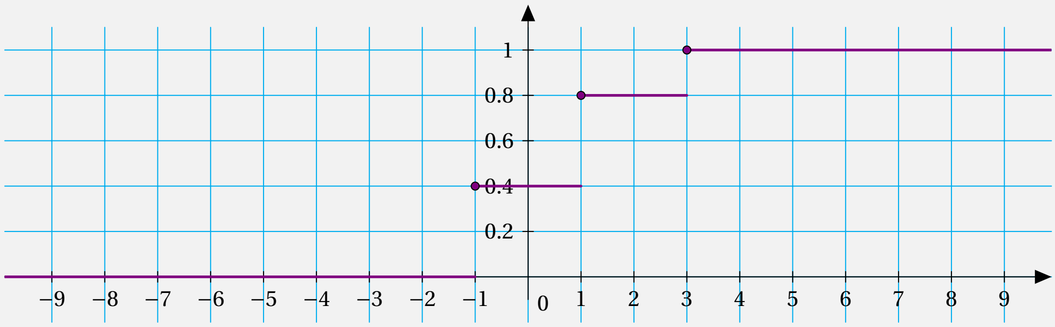
En particulier, F_X est constante sur $[x_k;x_{k+1}[$.

Exemple 10.14 – Calculer la fonction de répartition de X dans les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. On a vu que $X(\Omega)=\{-1;1;3\}$. Dès lors,
   - Si $x<-1$, alors $F_X(x)=0$.
   - Si $-1\leqslant x<1$, alors $F_X(x)=P(X=-1)=\frac{2}{5}$.
   - Si $1\leqslant x<3$, alors $F_X(x)=P(X=-1)+P(X=1)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$.
   - Si $x\geqslant 3$, alors $F_X(x)=1$.

Ce que l'on peut résumer par

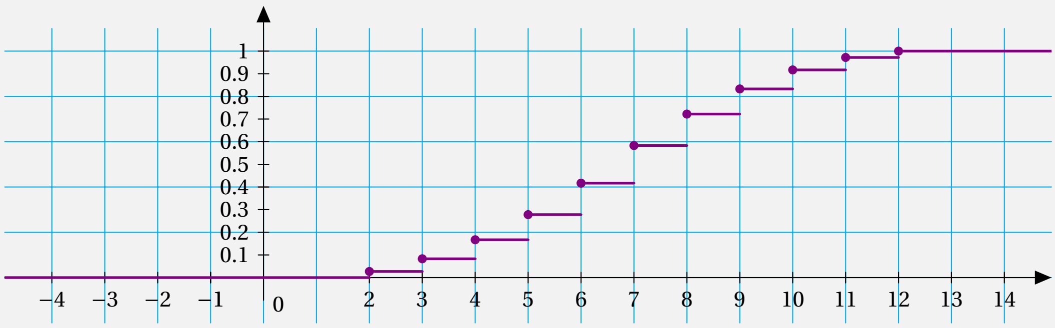
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{2}{5} & \text{si } -1 \leqslant x < 1, \\ \frac{4}{5} & \text{si } 1 \leqslant x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3. \end{cases}$$



2. On a vu que $X(\Omega) = [\![2;12]\!]$. Dès lors,
   - Si $x < 2$, alors $F_X(x) = 0$.
   - Si $2 \leqslant x < 3$, alors $F_X(x) = P(X=2) = \frac{1}{36}$.
   - Si $3 \leqslant x < 4$, alors $F_X(x) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$.
   - Si $4 \leqslant x < 5$, alors $F_X(x) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$.
   - etc.

   Ce que l'on peut résumer par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \frac{1}{36} & \text{si } 2 \leqslant x < 3, \\ \frac{3}{36} & \text{si } 3 \leqslant x < 4, \\ \frac{6}{36} & \text{si } 4 \leqslant x < 5, \\ \text{etc.} & \\ \frac{35}{36} & \text{si } 11 \leqslant x < 12, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 12. \end{cases}$$



Proposition 10.15

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X. Autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

II – Moments d'une variable aléatoire finie

1 – Espérance

Définition 10.16 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω qui prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

On appelle espérance mathématique de X le réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p(X = x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_k \times p_k.$$

Remarque 10.17 –

- L'espérance $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs x_i affectées des fréquences p_i.
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $E(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois. Le signe de $E(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre. Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est équitable.

Exemple 10.18 – Calculer $E(X)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 10.2.

1. $$E(X) = -1 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

2. $$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + \cdots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7.$$

Proposition 10.19

Soient X et Y deux variables aléatoires finies définies sur Ω. Soit a et $b \in \mathbf{R}$. Alors,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX+b) = aE(X) + b.$$

Exemple 10.20 – On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x+3$ et $Y = g(X) = 2X+3$. Déterminer l'espérance de Y.

$X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et le dé étant non-truqué, on est en situation d'équiprobabilité :
$\forall k \in [\![1;6]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{6}.$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

On en déduit que

$$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 7 + 3 = 10.$$

Théorème 10.21 – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$. Alors, l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i).$$

Exemple 10.22 – On considère la fonction $g(x) = x^2$. Calculer $E\big(g(X)\big)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 10.2.

1. D'après le théorème de transfert, on a

$$E\big(g(X)\big) = E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{2}{5} + 1^2 \times \frac{2}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} = \frac{13}{5}.$$

2. D'après le théorème de transfert, on a

$$E\big(g(X)\big) = E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}.$$

Remarque 10.23 – Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.

2 – Variance

Définition 10.24 – Soit X une variable aléatoire finie.

- On appelle **variance** de X le réel, noté $V(X)$, défini par

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i).$$

- On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque 10.25 – La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Théorème 10.26 – Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire finie. On a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Méthode 10.27 – Calculer la variance d'une variable aléatoire

- On calcule $E(X^2)$ grâce au théorème de transfert.
- Puis on utilise la formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple 10.28 – Calculer $V(X)$ pour les deux exemples de l'exemple 10.2.

1. On a déjà calculé $E(X^2)$ dans la partie précédente. On a $E(X^2) = \frac{13}{5}$. Par ailleurs, $E(X) = \frac{3}{5}$ donc $E(X)^2 = \frac{9}{25}$. Dès lors, d'après la formule de König-Huygens, on a
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{13}{5} - \frac{9}{25} = \frac{65}{25} - \frac{9}{25} = \frac{56}{25}.$$

2. On a déjà calculé $E(X^2)$ dans la partie précédente. On a $E(X^2) = \frac{329}{6}$. Par ailleurs, $E(X) = 7$ donc $E(X)^2 = 49$. Dès lors, d'après la formule de König-Huygens, on a
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{329}{6} - \frac{294}{6} = \frac{35}{6}.$$

Proposition 10.29

Soit X une variable aléatoire finie et soient a et b deux réels. Alors
$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$
En particulier,
$$V(X + b) = V(X).$$

Remarque 10.30 – Contrairement à l'espérance, la variance **n'**est **pas** linéaire.

Exemple 10.31 – On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X + 3$. Calculer la variance de X puis celle de Y.
$X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et le dé étant non-truqué, on est en situation d'équiprobabilité :
$\forall k \in [\![1;6]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{6}$. Dès lors,
$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}.$$
De même,
$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X = k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{91}{6}.$$
Dès lors, d'après la formule de König-Huygens,
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}.$$
On a donc, d'après la Proposition 10.29,
$$V(Y) = V(2X + 3) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}.$$

III – Lois usuelles

1 – Loi uniforme

Définition 10.32 – Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a < b$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![a;b]\!]$ lorsque $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et que

$$\forall k \in [\![a;b]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![a;b]\!]\right)$.

Exemple 10.33 – Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. On a $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;6]\!]\right)$ car $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;6]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{6}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu. On a $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$ car $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{n}$.

Proposition 10.34

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$, alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Proposition 10.35

Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a < b$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![a;b]\!]\right)$ alors $X - a + 1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;b-a+1]\!])$ et donc

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

2 – Loi de Bernoulli

Définition 10.36 – Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in]0;1[$ lorsqu'il n'y a que deux issues possibles $X(\Omega) = \{0;1\}$ et

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : une que l'on qualifie de "succès", de probabilité p, et l'autre que l'on qualifie "d'échec", de probabilité $1-p$. On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un "succès", la variable aléatoire prend la valeur $X = 1$, et sinon $X = 0$.

Exemple 10.37 – On lance une pièce équilibré et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est "Pile" et 0 sinon. Alors, $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Proposition 10.38

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

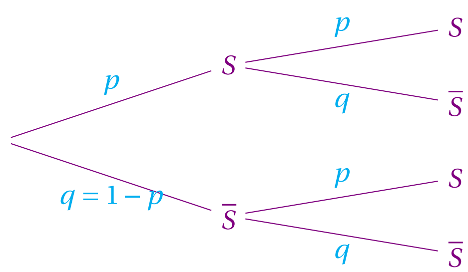
3 – Loi binomiale

Définition 10.39 – L'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p de manière indépendante est appelée un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves de ce schéma de Bernoulli suit une **loi binomiale** de paramètres n et p. On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 10.40 – On lance 10 fois de suite une pièce équilibrée et on note X le nombre de "Pile" obtenus. On a alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

Dans le cas où $n = 2$ ou 3, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.

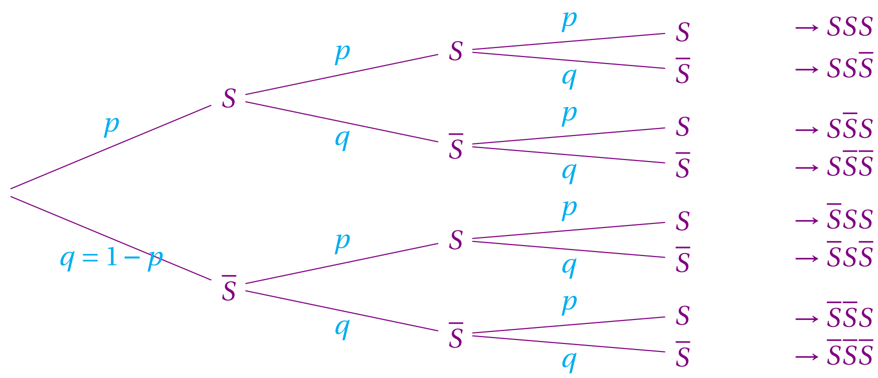
1. Cas $n = 2$
   On répète deux épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de façon indépendante.



   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(2;p)$ de paramètres $n = 2$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2
$P(X = k)$	q^2	$2 \times p \times q$	p^2

2. Cas $n = 3$
   On répète trois épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de façon indépendante.
   L'expérience comporte $2^3 = 8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres
   $$\left\{SSS, SS\overline{S}, S\overline{S}S, \overline{S}SS, S\overline{S}\,\overline{S}, \overline{S}S\overline{S}, \overline{S}\,\overline{S}S, \overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\right\}.$$
   Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès, on dresse un arbre et on compte le nombre d'issues contenant k succès.



La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3; p)$ de paramètres $n = 3$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X = k)$	q^3	$3 \times p \times q^2$	$3 \times p^2 \times q$	p^3

Définition 10.41 – Soit n un entier naturel non-nul et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
Si on représente par un arbre une série de n épreuves de Bernoulli, le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves répétées.

Remarque 10.42 –
- Un seul chemin permet d'obtenir 0 succès ou n succès consécutifs, donc $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.
- Il y a n chemins différents qui permettent d'obtenir un seul succès. Ainsi, $\binom{n}{1} = n$.

Proposition 10.43

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots\big(n-(k+1)\big)}{k!}.$$

Proposition 10.44

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a

- relation de symétrie des coefficients :
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$
- formule du triangle de Pascal :
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Remarque 10.45 – La formule du triangle de Pascal permet de déterminer les coefficients binomiaux de proche en proche.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Exemple 10.46 – Calculer les coefficients binomiaux suivants.

- $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4\times 3}{2\times 1} = 6$
- $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5\times 4}{2\times 1} = 10$
- $\binom{11}{1} = 11$
- $\binom{3}{0} = 1$

Proposition 10.47

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p. Alors, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ où } q = 1-p.$$

Proposition 10.48

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0;1[$. Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Exemple 10.49 – Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients choisissent l'option "Livraison Express". On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons. On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention "Livraison Express".

1. Déterminer la loi de X en justifiant soigneusement.
   X compte le nombre de réalisations de l'évènement succès "le bon de commande comprend la mention "Livraison Express"" de probabilité 0.4 lors de la répétition de 30 expériences identiques et indépendantes. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0.4$.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et interpréter le résultat.
   Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(30;0.4)$, on a d'après le cours que
   $$E(x) = 30 \times 0.4 = 12.$$
   Cela signifie que, sur un grand nombre de prélèvements de 30 bons, on trouve en moyenne 12 bons de commande avec la mention "Livraison Express".

4 – Formule du binôme de Newton

Théorème 10.50 – Formule du binôme de Newton

Soient a et b dans $\mathbf{R}$ et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 10.51 – $(2+x)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 \times x + 3 \times 2 \times x^2 + x^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3$.