EXERCICES — CHAPITRE 6

Intégration sur un segment

Exercice 1 ($\star$) – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f.

1. $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = -\dfrac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 2 ($\star\star$) – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f.

1. $f(x) = 2xe^{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$ sur $\left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$
5. $f(x) = \dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+3\right)^4}$ sur $\mathbb{R}$
6. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 3 ($\star\star$) – On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

1. On note α et β les deux racines de la fonction $P : x \mapsto x^2 - 2x - 3$. Déterminer α et β.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}, \quad f(x) = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}.$$
3. En déduire une primitive de f sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

Exercice 4 ($\star\star$) – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 1\right) \mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^2 \left(e^{2x} + e^{-x}\right) \mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-2}^{-1} (4x-1)^3 \mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1+3x^2} \mathrm{d}x$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^1 e^{2x-1} \mathrm{d}x$

Exercice 5 ($\star\star\star$) – Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $I_7 = \displaystyle\int_0^1 te^{2t} \mathrm{d}t$
2. $I_8 = \displaystyle\int_1^2 t^2 \ln(t) \mathrm{d}t$
3. $I_9 = \displaystyle\int_1^4 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$
4. $I_{10} = \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right) e^{3x} \mathrm{d}x$

Exercice 6 ($\star\star\star$) – L'objectif est de calculer les intégrales
$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} \, \mathrm{d}x.$$

1. **Calcul de I.**
   Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.
   a) Calculer la dérivée de f.
   b) En déduire la valeur de I.
2. **Calcul de J et de K.**
   a) Sans calculer explicitement les intégrales J et K, vérifier que $J + 2I = K$.
   b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
   c) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 7 ($\star\star$) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2} \mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{x^n}{\left(1+x^2\right)^2} \leqslant x^n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8 ($\star\star\star$) – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \ln(x)^n \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.
5. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 9 ($\star\star\star\star$) – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} \mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$ puis en déduire que $\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
4. En déduire que $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x = 1$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.
   a) Montrer que $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \mathrm{d}x$.
   Indication : Penser à une intégration par parties.
   b) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $\quad 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.
   c) En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$.

Intégrales généralisées

Exercice 10 (★★) – Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^5} \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2t} \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^3} \mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3} \mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x$

Exercice 11 (★★) – Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \mathrm{d}x$

Exercice 12 (★★★) – Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 13 (★★★) –

1. À l'aide d'une intégration par parties, donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^A x e^{-x} \mathrm{d}x$ puis calculer
$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A x e^{-x} \mathrm{d}x.$$
2. Que peut-on en déduire pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x} \mathrm{d}x$?

Exercice 14 (★★) – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1 l'intégrale $I_A = \displaystyle\int_1^A \frac{2}{x^3} \mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} I_A$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 15 (★★★) – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x e^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

1. Calculer la dérivée de la fonction g définie pour tout réel x positif ou nul par $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
2. Soit M un réel strictement positif. On pose $I(M) = \displaystyle\int_0^M x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$.
   Déduire de la question précédente la valeur de $I(M)$ puis calculer $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} I(M)$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 16 (★★★★) – [Extrait d'ECRICOME 2016 / Ex2]

On pose $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_0 est une intégrale convergente égale à $\dfrac{1}{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $M \geqslant 1$,
$$\int_1^M x^{n+1} e^{-x} \mathrm{d}x = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1) x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$
3. En raisonnant par récurrence et à l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n converge.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_{n+1} = \dfrac{1}{e} + (n+1) I_n$.
5. Calculer I_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$.