

**DEVOIR MAISON 3**

**Exercice 1** – Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

- L'élève A ne connaît que 60% de son cours, c'est-à-dire que pour chaque question, la probabilité qu'il connaisse la réponse est  $\frac{60}{100}$ .
- Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.
- Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements

- $R$  : "l'élève A connaît la réponse à la première question",
- $J$  : "l'élève A répond juste à la première question".

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que  $P(J) = \frac{11}{15}$ .

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de  $X$ . On donnera les valeurs prises par  $X$  et, pour chacune de ces valeurs  $k$ , la valeur de  $P(X = k)$ .
3. Donner  $E(X)$  et  $V(X)$  l'espérance et la variance de  $X$ .
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse.

Soit  $N$  la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.

- a) Justifier l'égalité  $N = 3X - 40$ .
- b) En déduire l'espérance de  $N$  ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
  - a) Déterminer la loi de  $Y$ .
  - b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
  - c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B, quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note?

**Exercice 2 –****Partie A**

1. Justifier que l'équation  $x^2 + x + 1 = 0$ , d'inconnue réelle  $x$ , n'admet aucune solution.

On considère alors la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

2. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de  $f$ .  
On remarquera en particulier que  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .
4. a) Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.  
b) Montrer que pour tout réel  $x$  de  $[-1, +\infty[$ , on a  $f(x) \leq x$ .  
Donner une interprétation graphique de ce résultat.
5. Tracer l'allure de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{T}$  dans un repère orthonormé.  
On soignera en particulier la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\mathcal{T}$ .

**Partie B**

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1 + u_n + u_n^2}.$$

1. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

3. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et préciser sa limite.
4. Recopier et compléter le script du programme Python suivant, pour qu'il affiche le plus petit entier naturel non nul  $n$  tel que  $u_n \leq 1/1000$ .

```
def f(x)
    return x/(1+x+x**2)
u=.....
n=.....
while u.....
    u=.....
    n=.....
print(.....)
```

**Partie C**

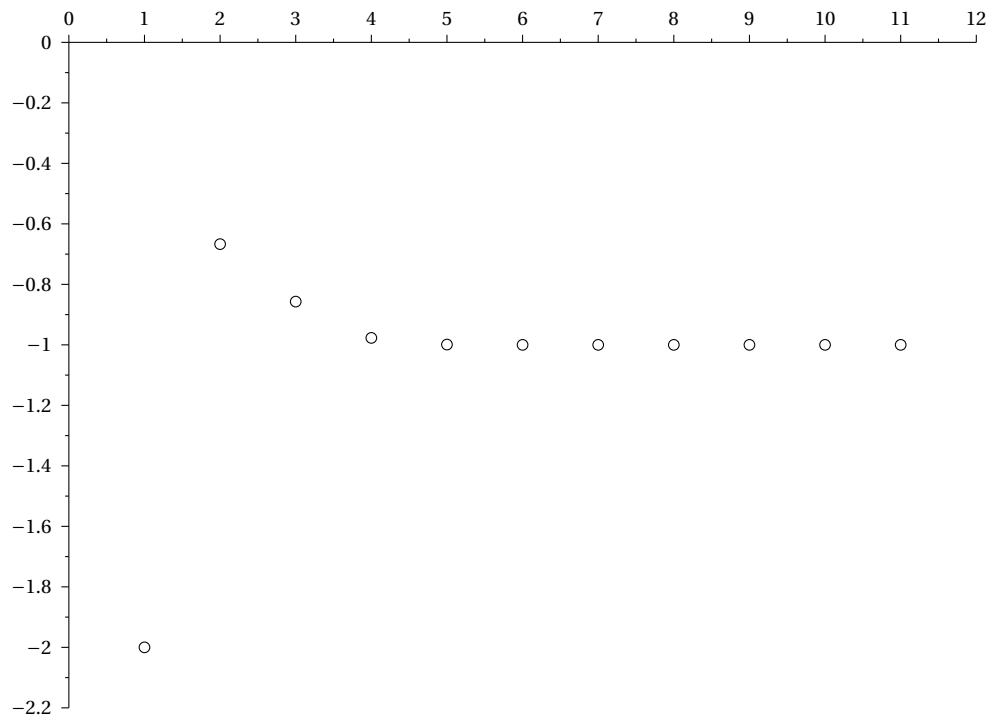
On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1 + v_n + v_n^2}.$$

1. En utilisant la question 3. de la Partie A, démontrer par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad -1 \leq v_n \leq 0.$$

2. En utilisant la question 4. de la Partie A, montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  est décroissante.  
3. En déduire la convergence de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .  
4. À l'aide de Python, on trace les premiers termes de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et on obtient la figure ci-dessous.  
Conjecturer alors la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .



5. a) Résoudre l'équation  $f(x) = -1$ , d'inconnue réelle  $x$ .  
b) Montrer par l'absurde que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \neq -1.$$