

EXERCICES — CHAPITRE 14

Exercice 1 (★★) – Étudier la convexité des fonctions suivantes.

- | | |
|---|---|
| $1. f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}$ | $3. h(x) = (x^2 - 9x + 22)e^x \quad \text{sur } \mathbb{R}$ |
| $2. g(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ | $4. i(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$ |

Exercice 2 (★★) – Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}.$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.
2. On note f' la dérivée de la fonction f .
 - a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{2-x}{x^3}$.
 - b) Donner le tableau de variation de la fonction f .
3.
 - a) Étudier la convexité de la fonction f .
 - b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 3 (★★) – On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln(x) - x.$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.
3. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$. On la note α .
4. Justifier que $\alpha \in [1, e]$.

Exercice 4 (★★) – [Extrait de ECRICOME 2024 / Ex2]

Soient f la fonction définie sur \mathbb{R} et g la fonction définie sur $]0, 4[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4}{1+e^x} \quad \text{et} \quad \forall y \in]0, 4[, \quad g(y) = \ln\left(\frac{4}{y} - 1\right).$$

1. Justifier que f réalise une bijection de \mathbb{R} dans $]0, 4[$.
2.
 - a) Pour tout $y \in]0, 4[$, calculer $f(g(y))$.
 - b) Que représente la fonction g pour la fonction f ?
3. Déterminer les réels x tels que $0.05 \leq f(x) \leq 2$.

Exercice 5 (★★★) – [BSB 2013 / Ex2]

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 2x + 3$, pour tout $x \in]0, +\infty[$. On note \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1.
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe \mathcal{C} ?
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$. Dresser le tableau de variation de f . On fera figurer les limites aux bornes. On déterminera aussi l'expression de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on en donnera une valeur approchée. On donne $\ln(2) \approx 0.7$.
3. Établir que f est concave sur $]0, +\infty[$.
4.
 - a) Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
 - b) Justifier sans calcul que \mathcal{T} est située au-dessus de \mathcal{C} sur $]0, +\infty[$.
5.
 - a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $]0, +\infty[$ avec $\alpha < \beta$.
 - b) Justifier que $\beta \in]1, 2[$.
6. Tracer l'allure de \mathcal{C} et de \mathcal{T} . On donne $\alpha \approx 0.06$ et $\beta \approx 1.79$.

Exercice 6 (★★★) – [Extrait de BSB 2016 / Ex2]

On considère la fonction f définie sur $] -2, +\infty[$ par

$$\forall x \in] -2, +\infty[, \quad f(x) = \ln(x+2) - x.$$

On nomme \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1.
 - a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 par valeurs supérieures. Comment interpréter graphiquement le résultat?
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer la dérivée de f . Dresser le tableau de variation de f sur $] -2, +\infty[$ en y faisant figurer les limites calculées en 1.
3.
 - a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -1, +\infty[$.
 - b) On donne $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(3) \approx 1.10$. Justifier que $\alpha \in]1, 2[$.
 - c) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution β entre -2 et -1 .
4. Calculer la dérivée seconde de f . Montrer que f est concave sur $] -2, +\infty[$.
5. On donne $\alpha \approx 1.15$ et $\beta \approx -1.8$. Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C} .

Exercice 7 (★ ★ ★) – [BSB 2017 / Ex2]

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln(x)$

et la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = xe^x - 1$.

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
b) Calculer la dérivée g' de g sur $]0, +\infty[$. En déduire le tableau de variation de g .
On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.
c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.
Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.
d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
2. a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures
et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
b) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

En déduire le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.

- c) Justifier que le réel α vérifie $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.
3. a) Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$,

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}.$$

- b) Étudier la convexité de f sur $]0, +\infty[$.
4. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})
d'unité 2cm. On donne $\alpha \approx 0.57$ et $f(\alpha) \approx 2.33$.