# Concours Blanc 4 — ESCP

**Exercice 1 –**

1. Je commence par calculer le carré de la matrice $A$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I.$$

J'ai montré que $A^2 = A+2I$. Alors $A^2 - A - 2I = 0_3$, matrice nulle d'ordre 3, ce qui signifie que le polynôme $x^2 - x - 2$, qui est bien de degré 2, est un polynôme annulateur de la matrice $A$.

2. a) Les valeurs propres possibles pour la matrice $A$ sont parmi les racines d'un polynôme annulateur. Il me suffit donc de trouver les racines du polynôme $x^2 - x - 2$.
Je calcule son discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$.
Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ainsi les deux valeurs propres possibles pour la matrice $A$ sont $-1$ et 2.

b) En me servant du polynôme annulateur,

$$A^2 - A - 2I = 0_3 \iff A^2 - A = 2I \iff A \times (A - I) = 2I \iff A \times \left(\frac{1}{2}(A-I)\right) = I.$$

Grâce à cette égalité, j'en déduis que la matrice $A$ est inversible
et que son inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I).$$

3. a) Je calcule les trois produits matriciels demandés :

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2U,$$

$$AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -V,$$

$$AW = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -W.$$

Comme $U$ est une matrice colonne non nulle telle que $AU = 2U$,
alors 2 est effectivement valeur propre de $A$, associée au vecteur propre $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même, comme $V$ est une matrice colonne non nulle telle que $AV = -V$,
alors $-1$ est effectivement valeur propre de $A$, associée au vecteur propre $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Enfin pour les mêmes raisons, $W$ est un autre vecteur propre associé à la valeur propre $-1$.

b) Je calcule puis compare les deux produits matriciels. Comme les colonnes de $Q$ sont les vecteurs propres de la matrice $A$, alors je connais déjà les colonnes de la matrice $AQ$ :

$$A \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q \times D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien vérifié l'égalité matricielle $AQ = QD$.

c) Je calcule le produit matriciel $QR$ :

$$Q \times R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1-1 & 1-1 \\ 1+1-2 & 1+2 & 1-1 \\ 1-2+1 & 1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I.$$

Comme $Q \times R = 3I$, alors la matrice $Q$ est inversible et son inverse est donnée par

$$Q^{-1} = \frac{1}{3}R.$$

d) Comme la matrice $Q$ est inversible, alors l'équation $AQ = QD$ se réécrit $A = QDQ^{-1}$, où la matrice $D$ est diagonale et la matrice $Q$ est inversible. Il s'agit de la définition d'une matrice diagonalisable. Donc la matrice $A$ est bien diagonalisable.

4. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

**Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = QD^nQ^{-1}$.

**Initialisation :** Pour $n = 0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, $A^n = QD^nQ^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = QD^nQ^{-1} \times QDQ^{-1} = QD^nIDQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = QD^nQ^{-1}.$$

b) J'ai montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = QD^nQ^{-1}$.
Or je connais $Q$ et $Q^{-1}$ et comme $D$ est une matrice diagonale, alors

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice $A^n$, il me suffit de calculer le produit $A^n = QD^nQ^{-1}$. Ici, seule la première ligne est demandée.

$$Q \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^n = QD^n \times Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+(-1)^n+(-1)^n & 2^n+(-1)^n-2\times(-1)^n & 2^n-2\times(-1)^n+(-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2\times(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Je retrouve la formule annoncée par l'énoncé pour la première ligne de la matrice $A^n$.

5. a) À l'instant 0, le jeton se trouve sur le sommet 1 et il se déplace de façon équiprobable sur l'un des deux autres sommets. Ainsi le jeton quitte le sommet 1 et a une chance sur deux d'arriver sur les sommets 2 et 3 :

$$P\big(X_1 = 1\big) = 0, \qquad P\big(X_1 = 2\big) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P\big(X_1 = 3\big) = \frac{1}{2}.$$

Alors comme $\big\{[X_1 = 2], [X_1 = 3]\big\}$ forme un système complet d'événements, en utilisant la formule des probabilités totales et le fait que le jeton a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'aller sur chacun des autres sommets, j'obtiens bien les formules annoncées par l'énoncé :

$$\begin{aligned} P\big(X_2=1\big) &= P\big(X_1=2\big)\times P_{[X_1=2]}\big(X_2=1\big)+P\big(X_1=3\big)\times P_{[X_1=3]}\big(X_2=1\big) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ P\big(X_2=2\big) &= P\big(X_1=2\big)\times P_{[X_1=2]}\big(X_2=2\big)+P\big(X_1=3\big)\times P_{[X_1=3]}\big(X_2=2\big) = \frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\ P\big(X_2=3\big) &= P\big(X_1=2\big)\times P_{[X_1=2]}\big(X_2=3\big)+P\big(X_1=3\big)\times P_{[X_1=3]}\big(X_2=3\big) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

b) Je reprends un raisonnement similaire. Pour $n \geqslant 2$, $\big\{[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3]\big\}$ forme un système complet d'événements et pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, les probabilités conditionnelles sont données par

$$P_{[X_n=i]}\big(X_{n+1} = j\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{2} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Alors d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P\big(X_{n+1}=1\big) &= \sum_{i=1}^{3} P\big(X_n=i\big)\times P_{[X_n=i]}\big(X_{n+1}=1\big) \\ &= P\big(X_n=1\big)\times 0+P\big(X_n=2\big)\times\frac{1}{2}+P\big(X_n=3\big)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}P\big(X_n=2\big)+\frac{1}{2}P\big(X_n=3\big) \end{aligned}$$

c) De la même manière, je peux démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$P\big(X_{n+1}=2\big) = \frac{1}{2}P\big(X_n=1\big)+\frac{1}{2}P\big(X_n=3\big) \quad \text{et} \quad P\big(X_{n+1}=3\big) = \frac{1}{2}P\big(X_n=1\big)+\frac{1}{2}P\big(X_n=2\big).$$

Alors en posant $B$ la matrice égale à $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A$,
j'obtiens bien que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} L_n \times B &= \begin{pmatrix} P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P(X_n=2)+P(X_n=3) & P(X_n=1)+P(X_n=3) & P(X_n=1)+P(X_n=2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) & P(X_{n+1}=2) & P(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} = L_{n+1}. \end{aligned}$$

d) Je vérifie que $L_0 \times B$ soit bien égale à $L_1$, puis que $L_1 \times B$ soit bien égale à $L_2$ :

$$L_0 \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = L_1,$$

$$L_1 \times B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = L_2.$$

Ainsi l'égalité $L_{n+1} = L_n B$ est vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

e) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

**Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $L_n = L_0 B^n$.

**Initialisation :** Pour $n = 0$, $L_0 B^0 = L_0 \times I = L_0$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $L_n = L_0 B^n$.
Et grâce à la question précédente, $L_{n+1} = L_n B$. Alors directement

$$L_{n+1} = L_n B = L_0 B^n \times B = L_0 B^{n+1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 B^n.$$

f) La loi de $X_n$ est donnée par les trois coefficients de la matrice $L_n$.
D'après la question **5.e)**, $L_n = L_0 B^n$. D'après la question **5.c)**, $B = \frac{1}{2}A$.
Donc

$$L_n = L_0 \times \left(\frac{1}{2}A\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times L_0 A^n.$$

En utilisant la question **4.b)**, comme $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$L_0 \times A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2 \times (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Et finalement, en multipliant par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$L_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de $X_n$ est donnée par

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad P(X_n = 2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad P(X_n = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

**Exercice 2 –**

1. Je montre que la fonction $f$ vérifie les trois conditions d'une densité de probabilité :
   - Pour $x \notin [0,1]$, $f(x) = 0 \geqslant 0$ et pour $x \in [0,1]$, $f(x) = 4x(1-x^2) \geqslant 0$ car $x \geqslant 0$ et $1 - x^2 \geqslant 0$ puisque $x \leqslant 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
   - Sur $]-\infty, 0[$, $f$ est continue car constante, sur $[0,1]$, $f$ est continue car polynomiale et sur $]1, +\infty[$, $f$ est continue car constante.

     Donc $f$ admet au plus deux points de discontinuité sur $\mathbb{R}$.
   - Il me reste à montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

     Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :

     ▷ $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

     ▷ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

     ▷ $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x - 4x^3\,\mathrm{d}x$.

     La fonction est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

     $$\int_0^1 4x - 4x^3\,\mathrm{d}x = \left[4 \times \frac{x^2}{2} - 4 \times \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left[2x^2 - x^4\right]_0^1 = \left(2 \times 1^2 - 1^4\right) - \left(2 \times 0^2 - 0^4\right) = 2 - 1 = 1.$$

     Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

     $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 1 + 0 = 1.$$

   Finalement, j'ai bien montré que $f$ est une densité de probabilité.

2. a) La variable aléatoire $X$ possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
   - $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} x \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
   - $\displaystyle\int_{0}^{1} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x^2(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x^2 - 4x^4\,\mathrm{d}x$.

     La fonction est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

     $$\int_0^1 4x^2 - 4x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5\right]_0^1 = \left(\frac{4}{3} \times 1^3 - \frac{4}{5} \times 1^5\right) - 0 = \frac{20 - 12}{15} = \frac{8}{15}.$$

   Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{8}{15} + 0 = \frac{8}{15}.$$

   Finalement la variable aléatoire $X$ possède une espérance et $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}$.

b) La variable aléatoire $X$ admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x^2 \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
- $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} x^2 \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
- $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x^3\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x^3 - 4x^5\,\mathrm{d}x.$

  La fonction est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

$$\int_0^1 4x^3 - 4x^5\,\mathrm{d}x = \left[4\times\frac{x^4}{4} - 4\times\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \left[x^4 - \frac{2}{3}x^6\right]_0^1 = \left(1^4 - \frac{2}{3}\times 1^6\right) - 0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

Ainsi la variable aléatoire $X^2$ possède une espérance et $E\left(X^2\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$

Finalement, grâce à la formule de König-Huygens, j'en déduis que la variable aléatoire $X$ possède une variance et

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{64}{225} = \frac{75-64}{225} = \frac{11}{225}.$$

3. Pour déterminer la fonction de répartition, je raisonne à l'aide d'une disjonction de cas pour appliquer la définition : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

- Si $x<0$, alors $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors il me faut découper l'intégrale en deux morceaux :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 4t\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t = 0 + \left(\left(2x^2 - x^4\right) - 0\right) = 2x^2 - x^4,$$

  en réutilisant le calcul d'intégrale effectué à la question **1.**.
- Si $x>1$, alors il me faut découper l'intégrale en trois morceaux :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} 4t\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1,$$

  toujours en réutilisant le calcul d'intégrale effectué à la question **1.**.

Il me reste alors à me ramener à la forme souhaitée par l'énoncé.
Je dois montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $2x^2 - x^4 = 1 - \left(1-x^2\right)^2$. Or pour $x \in [0,1]$,

$$1 - \left(1-x^2\right)^2 = 1 - \left(1^2 - 2\times 1\times x^2 + \left(x^2\right)^2\right) = 1 - \left(1 - 2x^2 + x^4\right) = 1 - 1 + 2x^2 - x^4 = 2x^2 - x^4.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0, \\ 1 - \left(1-x^2\right)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x>1. \end{cases}$$

4. a) La fonction de répartition d'une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $U$ et $V$ ont $G$ pour fonction de répartition, alors

$$P(M > x) = P(U > x) \times P(V > x) = \big(1 - P(U \leqslant x)\big) \times \big(1 - P(V \leqslant x)\big) = \big(1 - G(x)\big)^2.$$

Puis pour la fonction de répartition,

$$F_M(x) = P(M \leqslant x) = 1 - P(M > x) = 1 - \big(1 - G(x)\big)^2.$$

c) En combinant les expressions obtenues aux deux questions précédentes, j'obtiens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \big(1 - x\big)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

5. a) De nouveau, j'opère par disjonction de cas selon les valeurs de $x$ :
   - Si $x < 0$, alors $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P\big(\sqrt{M} \leqslant x\big) = 0$ car une racine carrée ne peut pas être strictement négative.
   - Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P\big(\sqrt{M} \leqslant x\big) = P\big(M \leqslant x^2\big)$ car $x \geqslant 0$.
   Et comme $0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow 0 = 0^2 \leqslant x^2 \leqslant 1^2 = 1$, alors $F_Z(x) = F_M\big(x^2\big) = 1 - \big(1 - x^2\big)^2$.
   - Si $x > 1$, alors $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P\big(\sqrt{M} \leqslant x\big) = P(M \leqslant x^2)$ car $x \geqslant 0$.
   Et comme $x > 1 \Longrightarrow x^2 > 1^2 = 1$, alors $F_Z(x) = F_M\big(x^2\big) = 1$.

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \big(1 - x^2\big)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

b) Les deux variables aléatoires $X$ et $Z$ partagent la même fonction de répartition.
Comme la fonction de répartition caractérise la loi, alors $X$ et $Z$ suivent la même loi.

c) Grâce à la question précédente, pour simuler $X$, il suffit de simuler $Z$, qui est la racine carrée de la variable aléatoire $M$. Ainsi le script `Python` se complète ainsi :

```
1.    U=rd.random()
2.    V=rd.random()
3.    M=np.min(U,V)
4.    X=np.sqrt(M)
```

**Exercice 3 –**

1. a) Comme les supports de $X$ et de $Y$ sont donnés par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0,1,2\}$ et que $S = X + Y$, alors $S$ peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 4 :

$$S(\Omega) = \big\{0,1,2,3,4\big\}.$$

Pour déterminer la loi, je calcule les probabilités de chaque issue possible en me servant de l'indépendance des variables aléatoires $X$ et $Y$ :

$$\begin{aligned}
P(S=0) &= P\big([X=0]\cap[Y=0]\big) = P(X=0)\times P(Y=0) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16},\\
P(S=1) &= P\big([X=0]\cap[Y=1]\big) + P\big([X=1]\cap[Y=0]\big)\\
&= P(X=0)\times P(Y=1) + P(X=1)\times P(Y=0) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{8},\\
P(S=2) &= P\big([X=0]\cap[Y=2]\big) + P\big([X=1]\cap[Y=1]\big) + P\big([X=2]\cap[Y=0]\big)\\
&= P(X=0)\times P(Y=2) + P(X=1)\times P(Y=1) + P(X=2)\times P(Y=0)\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8} = \frac{5}{16},\\
P(S=3) &= P\big([X=1]\cap[Y=2]\big) + P\big([X=2]\cap[Y=1]\big)\\
&= P(X=1)\times P(Y=2) + P(X=2)\times P(Y=1) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4},\\
P(S=4) &= P\big([X=2]\cap[Y=2]\big) = P(X=2)\times P(Y=2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Je résume la loi de $S$ dans un tableau :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(S=k)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

b) Grâce à la loi de $S$, je peux calculer son espérance :

$$E(S) = 0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{5}{16}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4} = 0+\frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+1 = \frac{3}{4}+\frac{3}{4}+1 = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}.$$

c) Par définition, $S = X + Y$ et par linéarité de l'espérance, $E(S) = E\big(X+Y\big) = E(X)+E(Y)$. Or

$$E(X) = 0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4} \quad\text{et}\quad E(Y) = 0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4},$$

donc finalement, je retrouve bien

$$E(S) = E\big(X+Y\big) = E(X)+E(Y) = \frac{5}{4}+\frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$

2. a) Comme les supports de $X$ et de $Y$ sont donnés par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0,1,2\}$ et que $T = XY$, alors $T$ peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 4 :

$$T(\Omega) = \big\{0,1,2,4\big\}.$$

b) Grâce à la formule de Poincaré,

$$\begin{aligned}
P(T=0) &= P\big([X=0]\cup[Y=0]\big) = P(X=0)+P(Y=0) - P\big([X=0]\cap[Y=0]\big)\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16} = \frac{1}{2}-\frac{1}{16} = \frac{8-1}{16} = \frac{7}{16}.
\end{aligned}$$

Pour déterminer la loi, je calcule les probabilités de chaque issue possible en me servant des probabilités déjà calculées à la question **1.a)**. J'obtiens alors

$$P(T=1) = P\big([X=1]\cap[Y=1]\big) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$
$$P(T=2) = P\big([X=1]\cap[Y=2]\big) + P\big([X=2]\cap[Y=1]\big) = P(S=3) = \frac{1}{4},$$
$$P(T=4) = P\big([X=2]\cap[Y=2]\big) = P(S=4) = \frac{1}{4}.$$

Je résume la loi de $T$ dans un tableau :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(T=k)$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

c) Grâce à la loi de $T$, je peux calculer son espérance :

$$E(T) = 0\times\frac{7}{16} + 1\times\frac{1}{16} + 2\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1+8+16}{16} = \frac{25}{16}.$$

d) Par définition, $T = XY$ et comme les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes,

$$E(T) = E\big(XY\big) = E(X)\times E(Y) = \frac{5}{4}\times\frac{5}{4} = \frac{25}{16}.$$

3. En me servant des calculs déjà effectués, j'obtiens aisément la loi du couple $\big(S,T\big)$.
En effet, je sais déjà que $[S=4]=[T=4]$, $[S=3]=[T=2]$, $[S=0]\cup[S=1]\subset[T=0]$ et que $[T=1]\subset[S=2]$. Finalement, voici le tableau représentant la loi du couple $\big(S,T\big)$ :

| | $T=0$ | $T=1$ | $T=2$ | $T=4$ |
|---|---|---|---|---|
| $S=0$ | $\frac{1}{16}$ | 0 | 0 | 0 |
| $S=1$ | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | 0 |
| $S=2$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ | 0 | 0 |
| $S=3$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| $S=4$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |

En sommant les probabilités de chaque ligne, je retrouve bien la loi de $S$
et en sommant les probabilités de chaque colonne, je retrouve bien la loi de $T$.

4. Les variables aléatoires $S$ et $T$ ne sont pas indépendantes. Si c'était le cas, alors on aurait par exemple $P\big([S=0]\cap[T=1]\big) = P(S=0)\times P(T=1)$. Or

$$P\big([S=0]\cap[T=1]\big) = 0 \quad \text{et} \quad P(S=0)\times P(T=1) = \frac{1}{16}\times\frac{1}{16} \neq 0.$$

Donc les variables aléatoires $S$ et $T$ ne sont pas indépendantes.

5. Grâce à la loi du couple $\big(S,T\big)$, je peux calculer l'espérance du produit $ST$ :

$$E\big(ST\big) = 2\times1\times\frac{1}{16} + 3\times2\times\frac{1}{4} + 4\times4\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} + 4 = \frac{1+12+32}{8} = \frac{45}{8}.$$

La covariance $\mathrm{Cov}(S,T)$ s'obtient à l'aide de la formule de König-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(S,T) = E\big(ST\big) - E(S)\times E(T) = \frac{45}{8} - \frac{5}{2}\times\frac{25}{16} = \frac{45}{8} - \frac{125}{32} = \frac{180-125}{32} = \frac{55}{32}.$$

**Exercice 4 –**

1. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

**Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : "$u_n$ est bien défini et strictement positif".

**Initialisation :** Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{1}{2} > 0$ donc $u_1$ est bien défini et strictement positif. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, $u_n$ est bien défini et strictement positif. Comme $u_n > 0$, alors $2(n+1)u_n + 1 > 1$ est non nul donc le quotient

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}$$

est bien défini. Et comme numérateur et dénominateur sont strictement positifs, alors le quotient aussi. Donc $u_{n+1}$ est strictement positif. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \text{ est bien défini et strictement positif.}$$

J'ai ainsi montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et qu'il s'agit d'une suite de réels strictement positifs.

b) Voici la fonction `Python` complétée :

```
1. def suite(n):
2.     u=1/2
3.     for k in range(2,n+1):
4.         u=u/(2*k*u+1)
5.     return(u)
```

2. Je calcule $u_2$ puis $u_3$ à l'aide de la formule de récurrence donnée :

$$u_2 = \frac{u_1}{2\times(1+1)\times u_1 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{2\times 2\times\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2+1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$u_3 = \frac{u_2}{2\times(2+1)\times u_2 + 1} = \frac{\frac{1}{6}}{2\times 3\times\frac{1}{6}+1} = \frac{\frac{1}{6}}{1+1} = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

3. a) J'ai déjà montré à la question **1.** que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_{n+1}$.

Puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $2(n+1)u_n + 1 > 2(n+1)u_n$,

alors par décroissance de la fonction inverse, $\dfrac{1}{2(n+1)u_n+1} < \dfrac{1}{2(n+1)u_n}$.

Puis en multipliant par $u_n > 0$, $\dfrac{u_n}{2(n+1)u_n+1} < \dfrac{u_n}{2(n+1)u_n}$

*i.e.* , en simplifiant par $u_n > 0$, $u_{n+1} < \dfrac{1}{2(n+1)}$.

J'ai bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}.$$

b) Grâce au théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2(n+1)} = 0$, alors j'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

4. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Je calcule la différence $v_{k+1} - v_k$ :

$$v_{k+1} - v_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{2(k+1)u_k + 1}{u_k} - \frac{1}{u_k} = \frac{2(k+1)u_k}{u_k} = 2(k+1).$$

b) Si la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ était arithmétique, alors la différence entre deux termes consécutifs serait constante. Ici, ce n'est pas le cas : elle vaut $2(k+1)$, qui dépend de $k$.
Donc la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas arithmétique.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je somme pour les $k$ de 1 à $n-1$ l'équation obtenue à la question **4.a)**. Je reconnais une somme télescopique d'un côté et la somme des premiers entiers de l'autre :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\left(v_{k+1} - v_k\right) &= v_2 - v_1 \ + \ v_3 - v_2 \ + \ v_4 - v_3 \ + \ \cdots \ + \ v_{n-1} - v_{n-2} \ + \ v_n - v_{n-1} \\ &= v_n - v_1 = v_n - \frac{1}{u_1} = v_n - \frac{1}{\frac{1}{2}} = v_n - 2,\end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) = 2 \times \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 2 \times \sum_{k=2}^{n} k = 2 \times \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right) = n(n-1) - 2.$$

Ainsi j'ai montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - 2 = n(n-1) - 2$, *i.e.* $v_n = n(n-1)$.

d) D'après la définition des termes $v_n$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Enfin comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n-1) = +\infty$, je retrouve bien par quotient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. a) Je calcule la différence de fractions dans le but d'identifier les coefficients $a$ et $b$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1) - bn}{n(n+1)} = \frac{(a-b)n + a}{n(n+1)}.$$

Ainsi par identification des coefficients,

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} \iff \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(a-b)n+a}{n(n+1)} \iff \left\{\begin{array}{ll} a - b = 0 \\ a \quad\ = 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1\end{array}\right.$$

Ainsi j'ai montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Je somme la relation obtenue à la question précédente pour tous les $n$ allant de 1 à $N$. Je reconnais une somme télescopique :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{N}.$$

c) Il me suffit alors de faire tendre $N$ vers $+\infty$ dans l'expression de la somme partielle obtenue à la question précédente pour déterminer la nature de la série de terme général $u_n$.
Comme pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = 1 - \frac{1}{N}$ et que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N} = 1$,
alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

6. a) J'ai montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le terme $u_n$ est positif (question **1.**) et que la somme infinie de tous les termes $u_n$ vaut 1 (question **5.c)**).
Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décrit bien la loi d'une variable aléatoire discrète infinie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \big[n+1, n+2\big]$, $t \geqslant n+1 > 0$ donc par décroissance de la fonction inverse, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Puis par croissance de l'intégrale,

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \times \int_{n+1}^{n+2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \times \Big[t\Big]_{n+1}^{n+2}$$
$$= \frac{1}{n+1} \times \big((n+2)-(n+1)\big) = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$.

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Je somme la relation obtenue à la question précédente pour tous les $n$ allant de 1 à $N$, puis je calcule l'intégrale à l'aide d'un primitive :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} \Big[\ln(t)\Big]_{n+1}^{n+2} = \sum_{n=1}^{N} \big(\ln(n+2)-\ln(n+1)\big).$$

Je reconnais alors une somme télescopique :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \big(\ln(n+2)-\ln(n+1)\big) = \ln(N+2)-\ln(1+1) = \ln(N+2)-\ln(2).$$

Finalement j'ai bien montré que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geqslant \ln(N+2)-\ln(2)$.

d) La variable aléatoire $X$ possède une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nu_n$ converge. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nu_n = \dfrac{n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n+1}$.
Ainsi la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nu_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$ est minorée par $\ln(N+2)-\ln(2)$, qui diverge vers $+\infty$ lorsque $N$ tend vers $+\infty$. Par théorème de comparaison, j'en déduis que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nu_n$ diverge et donc que la variable aléatoire $X$ n'admet pas d'espérance.