15 Systèmes linéaires

I – Définition et exemples

Définition 15.1 – On appelle **système linéaire** de n **équations** à p **inconnues** $x_1, ..., x_p$ tout système (S) de la forme

$$(S) \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où $a_{i,j}$ et b_i désignent des réels supposés connus.

La i-ème équation du système (S) est notée L_i et s'appelle la i-ème **ligne** du système (S).

Résoudre le système (S), c'est déterminer tous les ($x_1, ..., x_p$) vérifiant les n équations du système.

Si pour tout *i* dans [1; n], on a $b_i = 0$, on dit que le système (*S*) est **homogène**.

Exemple 15.2 –

Le système suivant est un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Le couple (-1,3) en est une solution car on a $2 \times (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$ et -1 - 3 = -4.

• Le système suivant est un système homogène de trois équations à trois inconnues.

$$\begin{cases} 2x + y + 5z &= 0\\ x - 3y + z &= 0\\ 3x - 2y + 6z &= 0 \end{cases}$$

Notons que le triplet (0,0,0) est solution évidente, mais il peut y en avoir d'autres...

• Le système suivant est un système de trois équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} x+5y &= -2\\ 3x+y &= 0\\ -x+2y &= 1 \end{cases}$$

Remarque 15.3 -

- Il ne faut pas croire qu'un système linéaire admet toujours une unique solution! En effet, certains systèmes linéaires admettent une infinité de solutions et d'autres n'admettent aucune solution.
- En pratique, on rencontrera principalement des systèmes de deux équations à deux inconnues ou bien des systèmes de trois équations à trois inconnues.

Définition 15.4 – On dit que deux systèmes (S) et (S') sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

II - Résolution des systèmes linéaires

1 - Méthode par substitution

Pour les systèmes de deux équations à deux inconnues, on peut résoudre un système en exprimant une inconnue en fonction de l'autre et en remplaçant cette inconnue dans l'autre ligne.

Exemple 15.5 - On considère le système

$$\begin{cases} x+y &= 1\\ 2x-y &= 5 \end{cases}$$

En utilisant (L_1) , on obtient x = 1 - y. Donc, en remplaçant dans (L_2) , cela donne 2(1 - y) - y = 5, d'où 2 - 2y - y = 5, *i.e.*, 2 - 3y = 5. On résout cette équation.

$$2-3y=5 \iff -3y=5-2 \iff -3y=3 \iff y=\frac{3}{-3}=-1.$$

Et donc, x = 1 - y = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2.

2 - Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 15.6 – Les opérations suivantes sur les lignes d'un système linéaire (S) sont appelées **opérations élémentaires**.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.
- $L_i \leftarrow aL_i$: remplacement d'une ligne par son produit par un réel non-nul a.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: remplacement d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.
- $L_i \leftarrow aL_i + bL_i$: regroupement en une opération des deux opérations précédentes.

Proposition 15.7

Si on transforme un système à l'aide d'une opération élémentaire, on obtient un système équivalent.



ATTENTION! Il est très important de n'appliquer qu'une opération élémentaire à la fois. Sinon, on peut ne pas obtenir un système équivalent.

Exemple 15.8 –

$$\begin{cases} x - 7y + 11z = 1 \\ -x + 12y - 19z = 2 \\ -3y + 5z = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 7y + 11z = 1 \\ 5y - 8z = 3 \\ -3y + 5z = 3 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

3 - Système triangulaire

Définition 15.9 – Un système triangulaire est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Exemple 15.10 - Les systèmes suivants sont des systèmes triangulaires

$$(S_1) \iff \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -y = 2 \end{cases}$$
 et $(S_2) \iff \begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ -2y + 3z = 3 \\ 2z = 6 \end{cases}$

La résolution des systèmes triangulaires est très simple. On trouve la dernière inconnue grâce à la dernière équation, puis on trouve les autres inconnues successivement en remontant d'équation en équation.

Exemple 15.11 – Résoudre le système triangulaire (S_2) ci-dessus.

La dernière équation nous permet d'obtenir $z = \frac{6}{2} = 3$. En remplaçant z dans la deuxième équation, on obtient

$$-2y+3 \times 3 = 3 \iff -2y+9 = 3 \iff -2y = -6 \iff y = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Enfin, en remplaçant y et z dans la première équation, on obtient

$$x+3-2\times 3 = -2 \iff x-3 = -2 \iff x = -2+3 = 1.$$

Ainsi, la solution du système (S_2) est (1; 3; 3).

4 – Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est un procédé algorithmique qui permet de passer d'un système linéaire de n équations à n inconnues quelconque à un système triangulaire équivalent en utilisant uniquement des opérations élémentaires sur les lignes du système.

Exemple 15.12 – On souhaite résoudre le système

$$(S) \iff \begin{cases} -y + 2z = 7 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ x + y - z = -4 \end{cases}$$

<u>Première étape</u>: Il faut que la première ligne contienne la première inconnue (ici x). Si ce n'est pas le cas, on échange la première ligne avec une autre ligne qui contient x (avec, si possible, le coefficient 1 ou -1 pour simplifier les calculs suivants).

Ici, on échange donc les lignes 1 et 3. Le système devient

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ - y + 2z = 7 \end{cases} L_1 \leftrightarrow L_3$$

Puis, à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait « disparaître » la première inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, on « nettoie » la première colonne des x.

On commence par supprimer le *x* dans la deuxième ligne.

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ y + 6z = 9 \\ - y + 2z = 7 \end{cases}$$
 $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

Puis on supprime le *x* dans la troisième ligne : il n'y a rien à faire ici.

Deuxième étape : Il faut que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici y). Si ce n'est pas le cas, on échange la deuxième ligne avec une autre ligne contenant y (si possible avec le coefficient 1 pour simplifier les calculs suivants), mais sans utiliser la ligne 1.

Ici il n'y a rien à faire : la deuxième ligne contient déjà y.

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait « disparaître » la deuxième inconnue dans la troisième ligne. En d'autres termes, on « nettoie » la deuxième colonne des y.

Il suffit ici d'additionner les lignes 2 et 3.

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ y + 6z = 9 \\ 8z = 16 \end{cases}$$
 $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

Troisième étape : On obtient alors un système triangulaire que l'on sait résoudre.

La troisième équation donne $z = \frac{16}{8} = 2$. En remplaçant z dans la deuxième équation, on a $y + 6 \times 2 = 9$ soit y + 12 = 9. Ainsi, y = 9 - 12 = -3. Enfin, en remplaçant y et z dans la première ligne, on obtient : x - 3 - 2 = -4 soit x - 5 = -4. D'où x = -4 + 5 = 1. Ainsi, l'unique solution du système est

$$\mathcal{S} = \{(1; -3; 2)\}.$$