CONCOURS BLANC 2

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.
Tout calcul doit être accompagné d'une phrase l'expliquant !

Ce sujet comporte 6 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage !

Exercice 1 –

1. Justifier que pour tout réel x on a $x^2 + x + 1 > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. Rappeler la valeur de $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Vérifier que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2)$.
4. (a) Justifier que pour tout réel x, on a $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.
   (b) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbf{R}$ en y faisant figurer les éléments obtenus aux questions 2 et 3.
5. (a) Montrer, en la résolvant, que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x admet exactement deux solutions : -1 et 0.
   (b) Justifier que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.
   Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.
6. (a) Calculer la dérivée seconde de f et vérifier que pour tout réel x, on a $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2+x+1)^2}$.
   (b) Étudier la convexité de f sur $\mathbf{R}$. Vérifier que $\mathcal{C}$ admet exactement deux points d'inflexions aux points d'abscisses $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.
7. (a) Justifier, sans la résoudre, que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement une solution α dans $[0, +\infty[$.
   (b) On donne $\ln(3) \approx 1.1$. Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.
   (c) Vérifier que $f(-1-\alpha) = 1$.
   (d) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-3} près par dichotomie.

```
function y=f(x)
    y=...
endfunction
a=0, b=...
while b-a>10∧(-3)
    c=...
    if f(c)<1 then a=...
              else b=...
    end
end
disp(...)
```

8. On donne les valeurs suivantes : $\alpha \approx 0.9$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \approx -0.3$, $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0.4$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \approx -1.4$.
   Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes obtenues en 5.(b).

Exercice 2 – Dans cet exercice, on étudie quelques situations probabilistes liées à un standard téléphonique d'un service après-vente. Le standard de ce service après-vente reçoit deux types d'appels : les appels concernant le petit électroménager et les appels concernant les appareils audio et vidéo.
Lors d'un appel, le problème est soit résolu directement par téléphone, soit il nécessite l'intervention d'un technicien. On considère les événements suivants.

- E : "l'appel concerne le petit électroménager",
- A : "l'appel concerne les appareils audio et vidéo",
- T : "le problème se résout directement par téléphone".

De plus, des études ont permis d'établir les résultats suivants.

(H_1) Le standard reçoit 20% d'appels concernant le petit électroménager et 80% d'appels concernant les appareils audio et vidéo.

(H_2) Lorsqu'un appel concerne le petit électroménager, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de 0.5.

(H_3) Lorsqu'un appel concerne un appareil audio et vidéo, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de 0.375.

On supposera enfin les appels indépendants les uns des autres.

1. (a) Traduire en terme de probabilité les données (H_1), (H_2) et (H_3).
   (b) Montrer que $P(T) = 0.4$.
   (c) On suppose qu'une personne appelant le standard a vu son problème résolu directement par téléphone, calculer la probabilité pour que le problème posé concerne un petit électroménager.
2. Un standardiste reçoit 10 appels dans l'heure, on note X la variable aléatoire représentant le nombre d'appels concernant le petit électroménager.
   (a) Déterminer la loi de X : on donnera les valeurs prises par X ainsi que, pour chacune d'elles, la probabilité correspondante.
   (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.
3. Pendant une période de 10 jours, un standardiste reçoit 600 appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre d'appels résolus directement par téléphone.

(a) Donner la loi de Y.

(b) On admet dans la suite de cette partie que l'on peut approcher la loi de Y par une loi normale. *(AG) : Les lois normales sont des lois que nous verrons l'an prochain.*
Déterminer les paramètres de cette loi. *(AG) : Il faut donner la valeur moyenne de Y, notée m, ainsi que le carré de son écart-type, noté σ^2.*

Exercice 3 –

Partie A

1. Justifier que l'équation $x^2+x+1=0$, d'inconnue réelle x, n'admet aucune solution.

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f.
On remarquera en particulier que f est croissante sur l'intervalle $[-1,1]$.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
(b) Montrer que pour tout réel x de $[-1,+\infty[$, on a $f(x) \leqslant x$.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.
5. Tracer l'allure de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{T})$ dans un repère orthonormé.
On soignera en particulier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T).

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}.$$

1. Vérifier que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$
En déduire que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$
3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et préciser sa limite.
4. Recopier et compléter le script du programme `Scilab` suivant, pour qu'il affiche le plus petit entier naturel non nul n tel que $u_n \leqslant 1/1000$.

```
function y=f(x)
    y = x/(1+x+x∧2)
endfunction
u = ......
n = ......
while u ......
    u = ......
    n = ......
end
disp(......)
```

Partie C

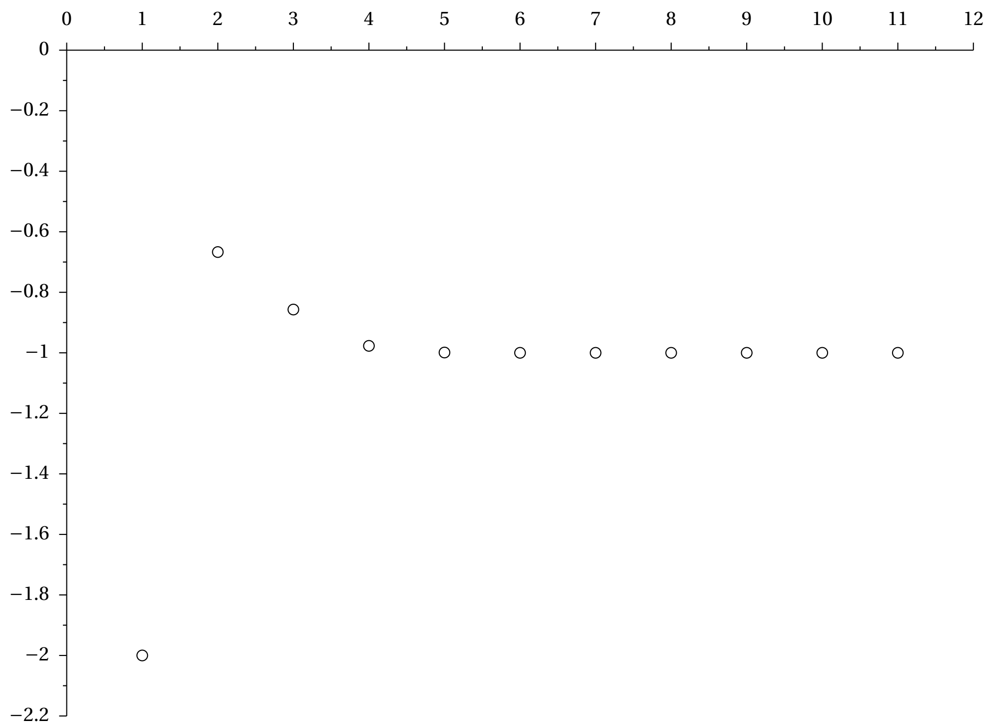
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1+v_n+v_n^2}.$$

1. En utilisant la question 3 de la Partie A, démontrer par récurrence que

$$\forall n \geqslant 2, \quad -1 \leqslant v_n \leqslant 0.$$

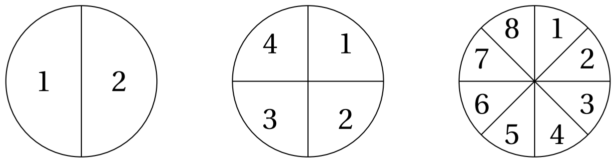
2. En utilisant la question 4 de la Partie A, montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
4. À l'aide de `Scilab`, on trace les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, et on obtient la figure ci-dessous.
   Conjecturer alors la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.



5. (a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$, d'inconnue réelle x.
   (b) Montrer par l'absurde que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n \neq -1.$$

Exercice 4 – Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cibles A, B et C. La cible A est séparée en deux secteurs, la cible B est séparée en quatre secteurs et la cible C est séparée en 8 secteurs. Sur chaque cible, les secteurs sont de même dimension ce qui signifie qu'un joueur qui lance une fléchette au hasard sur une cible donnée a les mêmes chances d'atteindre chaque secteur de cette cible.



A **B** **C**

Le jeu consiste à lancer des fléchettes sur les cibles successives selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A. Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droit de passer à la cible B ; dans le cas contraire on continue à lancer la fléchette en direction de la cible A.
- De même, lorsqu'on lance une fléchette en direction de la cible B, il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B.
- Enfin le joueur ne lance qu'une fois la fléchette en direction de la cible C. Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que pour une cible donnée les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des fléchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note A_n l'événement "lors du lancer de la n-ème fléchette le joueur tire vers la cible A". On définit de même l'événement B_n. On note enfin a_n et b_n les probabilités respectives de A_n et B_n.
Le joueur commençant par la cible A, on a donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

1. (a) Calculer les probabilités a_2 et b_2.

   (b) Calculer b_3 et vérifier que $b_3 = \dfrac{5}{8}$.

2. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n.$$

3. (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche les valeurs de a_n et de b_n, l'entier $n \geqslant 1$ étant donné par l'utilisateur.

```
1.  n=input('n ?')
2.  a=1, b=0
3.  for i=2:n
4.      b=...
5.      a=...
6.  end
7.  disp(b,a)
```

   (b) Si on échange les lignes 4. et 5. le résultat affiché est-il le même ? Pourquoi ?

4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$.

(a) Montrer que $v_1 = 2$ et que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = \dfrac{3}{2} v_n$.

(b) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

(c) Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $b_n = 2 \times \dfrac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \dfrac{2}{2^{n-1}}$.

6. On rappelle que si n est un entier naturel non nul, `grand(1,1,‘uin’,1,n)` permet de simuler la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes lancées par le joueur. Recopier le programme suivant et compléter les lignes 11. et 12. afin qu'il simule notre expérience et affiche la valeur de X.

```
 1.  cible="a"
 2.  n=1
 3.  while cible<>"c"
 4.      n=n+1
 5.      if cible=="a" then
 6.          secteur=grand(1,1,‘uin’,1,2)
 7.          if secteur==1 then cible="b"
 8.          end
 9.      else
10.          if cible=="b" then
11.              secteur=...
12.              if ... then ...
13.              end
14.          end
15.      end
16.  end
17.  disp(n)
```

7. Il faut payer 1 euro pour chaque fléchette lancée. Les joueurs se découragent vite. Le forain constate qu'en fait, chaque joueur effectue au moins deux lancers et s'il n'obtient pas le droit de tirer sur la cible C après les deux premiers lancers, alors il abandonne le jeu. Les deux euros qu'il a donnés sont alors perdus.

   (a) Justifier que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot dans ces conditions est $\dfrac{1}{8}$.

   20 joueurs se présentent successivement et jouent selon ce principe. On suppose que les résultats de chaque joueur sont indépendants les uns des autres. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui gagnent un lot.

   (b) Reconnaître la loi de Y. Décrire l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y et donner l'expression de $P(Y = k)$ pour tout entier k appartenant à cet ensemble.

   (c) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

   (d) Chaque lot offert par le forain est d'une valeur de 5 euros. Une fois que les 20 joueurs ont tenté leur chance, on note G la variable aléatoire égale au gain en euros du forain, G étant négatif si le forain perd de l'argent.
   Justifier que $G = 2(20 - Y) - 2Y$. Calculer le gain moyen du forain.