ECRICOME 2024

Exercice 1 –

1. a) Je calcule la matrice M :

$$M = A - I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0-4 & -1 & 8 \\ 4 & 4-4 & -4 \\ 0 & 0 & 2-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule d'abord la matrice $2M + I$ avant de calculer son cube :

$$2M + I = 2 \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4+2 & -1 & 8 \\ 4 & 0+2 & -4 \\ 0 & 0 & -2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je peux alors calculer les produits matriciels $(2M+I)^2$ puis $(2M+I)^3$:

$$(2M+I)^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4-4 & 2-2 & -16+4 \\ -8+8 & -4+4 & 32-8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2M+I)^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6-6 \\ 0 & 0 & -12+12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Ainsi j'ai bien montré que $(2M+I)^3 = 0_3$.

c) En développant littéralement le produit précédemment obtenu, j'obtiens que

$$(2M+I)^2 = (2M)^2 + 2M \times I + I \times 2M + I^2 = 4M^2 + 4M + I \qquad \textit{(les produits commutent)}$$
$$(2M+I)^3 = (2M+I) \times \left(4M^2 + 4M + I\right) = 8M^3 + 12M^2 + 6M + I$$

Ainsi en injectant ce développement dans l'équation obtenue précédemment, j'obtiens bien que

$$(2M+I)^3 = 0_3 \iff 8M^3 + 12M^2 + 6M + I = 0_3 \iff 8M^3 + 12M^2 + 6M = -I$$
$$\iff M\left(8M^2 + 12M + 6I\right) = -I.$$

d) Grâce à la question précédente,

$$M\left(8M^2 + 12M + 6I\right) = -I \iff M\left(-8M^2 - 12M - 6I\right) = I.$$

Ainsi la matrice M est inversible et son inverse est donnée par

$$M^{-1} = -8M^2 - 12M - 6I.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule l'expression $AX_n + B$ dans le but de retrouver X_{n+1} :

$$AX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -s_n + 8t_n \\ 4r_n + 4s_n - 4t_n \\ 2t_n \end{pmatrix}$$

$$AX_n + B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -s_n + 8t_n \\ 4r_n + 4s_n - 4t_n \\ 2t_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}s_n + 2t_n \\ r_n + s_n - t_n \\ \frac{1}{2}t_n + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier naturel n, $\quad X_{n+1} = AX_n + B$.

3. a) Je calcule l'expression $AC+B$ dans le but de retrouver C :

$$AC+B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-1&8\\4&4&-4\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-8+16\\8+32-8\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}=C.$$

Ainsi j'ai bien montré que $AC+B=C$.

b) Par construction, $M=A-I$. Donc $I-A=-(A-I)=-M$ est inversible comme j'ai déjà démontré que M est inversible. Son inverse est donnée par

$$(I-A)^{-1}=-M^{-1}=8M^2+12M+6I.$$

c) En combinant les résultats des questions précédentes, je sais que $I-A$ est inversible et que $AC+B=C$. Alors

$$AC+B=C \iff B=C-AC=(I-A)\times C \iff C=(I-A)^{-1}B.$$

En particulier, $C=(I-A)^{-1}B$ est l'unique solution de l'équation matricielle $AX+B=X$ d'inconnue X.

4. Je raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n-C=A^n(X_0-C)$.

Initialisation : Pour $n=0$,

$$A^0(X_0-C)=I(X_0-C)=X_0-C.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $X_n-C=A^n(X_0-C)$. Or

$$\begin{aligned}X_{n+1}-C&=AX_n+B-C=A\big(A^n(X_0-C)+C\big)+B-C=A^{n+1}(X_0-C)+AC+B-C\\&=A^{n+1}(X_0-C)+C-C=A^{n+1}(X_0-C),\end{aligned}$$

comme $AC+B=C$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n-C=A^n(X_0-C).$$

5. a) D'après la question **1.b)**, je sais que $(2M+I)^3=0_3$. Or $M=A-I$, donc en combinant ces deux relations,

$$(2M+I)^3=0_3 \iff \big(2(A-I)+I\big)^3=0_3 \iff (2A-2I+I)^3=0_3 \iff (2A-I)^3=0_3.$$

Comme $(2A-I)^3=0_3$, alors le polynôme $(2x-1)^3$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Les valeurs propres de la matrice A sont donc parmi les racines de ce polynôme annulateur. Et comme

$$(2x-1)^3=0 \iff 2x-1=0 \iff 2x=1 \iff x=\frac{1}{2},$$

alors l'unique valeur propre possible pour la matrice A est $\frac{1}{2}$.

b) i. Si la matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible R telles que $A = RDR^{-1}$. La matrice D n'a alors sur sa diagonale que des valeurs propres de la matrice A. Ici, comme $\frac{1}{2}$ est l'unique valeur propre de A, alors la matrice D n'a que cette valeur sur sa diagonale, *i.e.*

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I.$$

Alors l'identité de diagonalisabilité peut se réécrire en multipliant par R^{-1} à gauche et par R à droite,

$$A = RDR^{-1} = R \times \frac{1}{2}I \times R^{-1} \iff \frac{1}{2}I = R^{-1}AR.$$

ii. En reprenant l'identité obtenue à la question précédente,

$$A = RDR^{-1} = R \times \frac{1}{2}I \times R^{-1} = \frac{1}{2}RR^{-1} = \frac{1}{2}I.$$

iii. Le raisonnement par l'absurde mené dans cette question suppose que la matrice A est diagonalisable et aboutit au fait que la matrice A est égale à la matrice $\frac{1}{2}I$. Or ce n'est pas le cas, la matrice A n'étant même pas diagonale. Cette contradiction démontre donc que l'hypothèse de départ est erronée : la matrice A n'est pas diagonalisable.

6. a) Je calcule le produit matriciel QP :

$$QP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -6+6 & 12 & 8-8 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

b) Comme $QP = 2I$, alors la matrice P est inversible et son inverse est donnée par $P^{-1} = \frac{1}{2}Q$.

c) Je vais calculer le produit matriciel $\frac{1}{4}PTQ$ dans le but de retrouver A :

$$PT = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -6+6 & 12+4 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 16 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PTQ = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 16 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 48 \\ 24 & 12+12 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}PTQ.$$

d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = \frac{1}{2^{n+1}}PT^nQ$.

Initialisation : Pour $n=0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^1}PT^0Q = \frac{1}{2}PQ = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $A^n = \dfrac{1}{2^{n+1}}PT^nQ$. Or

$$A^{n+1} = A^n \times A = \frac{1}{2^{n+1}}PT^nQ \times \frac{1}{4}PTQ = \frac{1}{2^{n+1}}PT^n \times \frac{1}{2}I \times TQ = \frac{1}{2^{n+2}}PT^{n+1}Q.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{2^{n+1}}PT^nQ.$$

e) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n=0$,

$$T^0 = I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2\times 0 & 2\times 0\times(-1) \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or

$$\begin{aligned} T^{n+1} = T^n \times T &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2n & 2\times 2n + 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & 2n(2+n-1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & 2(n+1)(n+1-1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

***Remarque :** Il aurait aussi été possible d'utiliser le binôme de Newton mais la récurrence semble plus facile puisqu'il ne s'agit que de vérifier une formule de l'énoncé.*

7. D'après la question **4.**, je sais que $X_n - C = A^n(X_0 - C)$. Et je connais désormais une formule pour la matrice A_n. Donc je peux en déduire X_n, et les formes explicites des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix} = A^n(X_0 - C) + C = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_0-2 \\ s_0-8 \\ t_0-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+3n^2-11n \\ 4n+4-6n^2+10n \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\big(3n^2-13n\big) \\ 8 + \frac{1}{2^{n+1}}\big(-6n^2+14n+4\big) \\ 2 - \frac{2}{2^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\big(3n^2-13n\big) \\ 8 + \frac{1}{2^{n}}\big(-3n^2+7n+2\big) \\ 2 - \frac{1}{2^{n}} \end{pmatrix}$$

Finalement j'obtiens bien pour tout entier naturel n,

$$r_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\big(3n^2-13n\big), \qquad s_n = 8 + \frac{1}{2^n}\big(-3n^2+7n+2\big) \quad \text{et} \quad t_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

8. a) Grâce à la propriété fondamentale du logarithme,

$$\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \ln\big(n^2\big) - \ln\big(2^n\big) = 2\ln(n) - n\ln(2) = n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right).$$

Puis par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right) = -\ln(2)$ et par produit, comme $\ln(2) > \ln(1) = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right) = -\infty.$$

Alors par continuité de la fonction exponentielle, comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Enfin comme pour tout $n \geqslant 1$, $\quad 0 \leqslant \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{n^2}{2^n}$, alors par théorème d'encadrement des limites, j'en déduis que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

b) Par opérations sur les limites, grâce aux deux résultats obtenus à la question précédente et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\big(3n^2-13n\big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\big(-3n^2+7n+2\big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Finalement par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 2+0 = 2, \qquad \lim_{n\to+\infty} s_n = 8+0 = 8 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = 2-0 = 2.$$

Exercice 2 –

Partie 1

1. a) Je sais que $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Ainsi par opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{4}{1+0} = 4.$$

Comme la limite est finie, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=4$ au voisinage de $-\infty$.

b) Je sais que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Ainsi en décomposant numérateur et dénominateur,

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to+\infty} 4 = \quad 4 \\ \lim_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^x = +\infty \end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Comme la limite est finie, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f = \frac{4}{u}$, avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^x$. Comme $u'(x) = \mathrm{e}^x$, alors

$$f'(x) = -\frac{4u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{4\,\mathrm{e}^x}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2}.$$

Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, alors j'en déduis que $4\,\mathrm{e}^x > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2 > 0$.
En conséquence, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) < 0$.

b) Les variations de la fonction f s'obtiennent grâce au signe de la dérivée. D'après la question précédente, comme la dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}$, la fonction f est strictement décroissante. Aussi $f(0) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^0} = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$, ce qui me permet d'établir le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	4	$\searrow$ 2 $\searrow$	0

c) Comme la fonction f est décroissante et que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$, alors la courbe représentative de f est toujours en dessous de la droite d'équation $y=4$, asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

d) L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$. Or

$$f(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'(0) = -\frac{4\,\mathrm{e}^0}{\left(1+\mathrm{e}^0\right)^2} = -\frac{4\times 1}{(1+1)^2} = -1.$$

Finalement l'équation de cette tangente est donnée par

$$y = -1\times x + 2 \qquad i.e. \quad y = -x+2.$$

3. a) Comme la fonction f est deux fois dérivable, alors la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f' = -\frac{u}{v}$, avec $u(x) = 4\,\mathrm{e}^x$ et $v(x) = \left(1+\mathrm{e}^x\right)^2$.
Comme $u'(x) = 4\,\mathrm{e}^x$ et que $v'(x) = 2\times \mathrm{e}^x \times \left(1+e^x\right)$, alors

$$f''(x) = -\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{4\,\mathrm{e}^x\times\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2 - 4\,\mathrm{e}^x\times 2\,\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{\left(\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2\right)^2}$$
$$= -\frac{4\,\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^x-2\,\mathrm{e}^x\right)\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^4} = -\frac{4\,\mathrm{e}^x\left(1-\mathrm{e}^x\right)}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^3} = \frac{4\,\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^3}$$

Finalement je retrouve bien la formule souhaitée : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f''(x) = \frac{4\,\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^3}$.

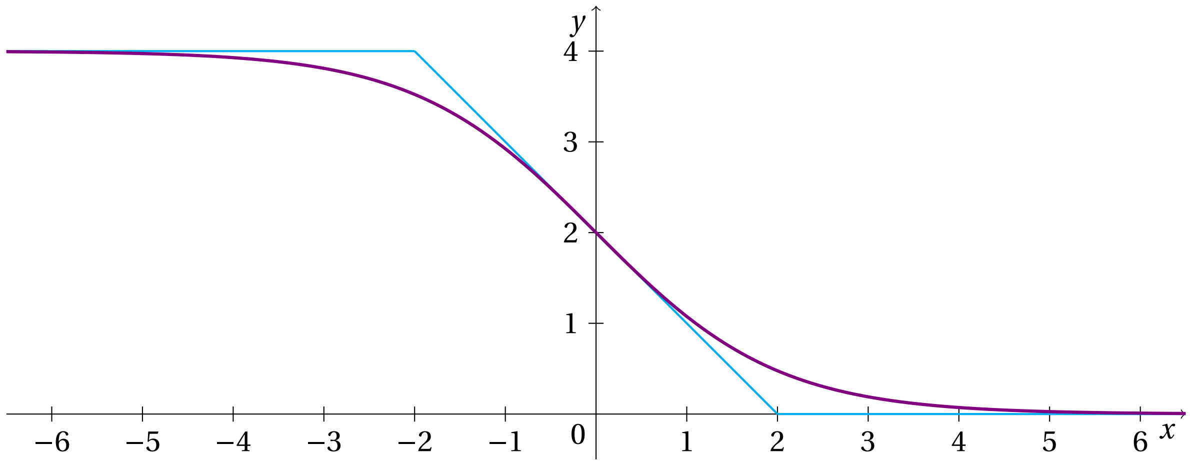
b) Les points d'inflexion de la courbe sont les points où la convexité change. Or la convexité s'obtient grâce au signe de la dérivée seconde. J'étudie donc le signe de $f''(x)$.
Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x>0$, alors j'en déduis que $4\,\mathrm{e}^x>0$ et $\left(1+\mathrm{e}^x\right)^3>0$.
En outre, $\mathrm{e}^x-1\geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x\geqslant 1 \iff x\geqslant \ln(1)=0$. Par conséquent, j'établis le tableau de signe de la fonction f'' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi le point d'abscisse $x=0$, à savoir le point de coordonnées $(0,2)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe représentative de f et la fonction est convexe sur l'intervalle $\left[0,\infty\right[$ et concave sur l'intervalle $\left]-\infty,0\right]$.

c) Comme le point d'abscisse 0 est le point d'inflexion, et que la courbe est concave avant puis convexe après, alors la courbe se trouve en dessous de la tangente sur l'intervalle $\left]-\infty,0\right]$ et au-dessus de la tangente sur l'intervalle $\left[0,\infty\right[$.

4. Voici l'allure de la courbe représentative de la fonction f.



5. a) En partant de la définition de la fonction f, je multiplie numérateur et dénominateur par e^{-x} : pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{4\times\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)\times\mathrm{e}^{-x}} = \frac{4\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} = 4\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

b) Je débute par déterminer une primitive de la fonction f. L'ensemble des primitives s'obtiendront alors en ajoutant une constante et il me suffira de choisir la constante qui convient pour que la primitive s'annule en 0. f semble être de la forme $-4 \times \frac{u'}{u}$, avec $u(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$. Puisque $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, alors

$$-4 \times \frac{u'(x)}{u(x)} = -4 \times \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 4\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -4 \times \ln\big(u(x)\big) = -4 \times \ln\big(1+\mathrm{e}^{-x}\big).$$

Ainsi l'ensemble des primitives de la fonction f sont de la forme $F(x) = -4 \times \ln\big(1+\mathrm{e}^{-x}\big) + C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$. Je calcule alors l'image de 0 :

$$F(0) = -4 \times \ln\big(1+\mathrm{e}^{-0}\big) + C = -4 \times \ln(2) + C.$$

Ainsi $F(0) = 0 \iff -4 \times \ln(2) + C = 0 \iff C = 4 \times \ln(2)$ et la primitive de f qui s'annule en 0 est donnée par

$$F(x) = -4 \times \ln\big(1+\mathrm{e}^{-x}\big) + 4 \times \ln(2) = 4 \times \Big(\ln(2) - \ln\big(1+\mathrm{e}^{-x}\big)\Big) = 4\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 4\ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right).$$

Partie 2

6. a) La fonction f est continue car dérivable et strictement décroissante, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image, à savoir $]0,4[$.

b) i. Soit $y \in]0,4[$.

$$f\big(g(y)\big) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^{g(y)}} = \frac{4}{1+\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{4}{y}-1\right)}} = \frac{4}{1+\frac{4}{y}-1} = \frac{4}{\frac{4}{y}} = 4 \times \frac{y}{4} = y.$$

ii. Comme $\forall y \in]0,4[, \quad f\big(g(y)\big) = y,$ alors g est la bijection réciproque de la fonction f *i.e.* $g = f^{-1}$.

c) Comme f et g sont bijections réciproques, alors pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad g\big(f(x)\big) = x$.
Ainsi comme f est décroissante, alors g est décroissante et

$$0.05 \leqslant f(x) \leqslant 2 \iff g(0.05) \geqslant g\big(f(x)\big) \geqslant g(2) \iff g(2) \leqslant x \leqslant g(0.05).$$

Or

$$g(2) = \ln\left(\frac{4}{2}-1\right) = \ln(2-1) = \ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad g(0.05) = \ln\left(\frac{4}{0.05}-1\right) = \ln(80-1) = \ln(79).$$

Donc

$$0.05 \leqslant f(x) \leqslant 2 \iff g(2) \leqslant x \leqslant g(0.05) \iff 0 \leqslant x \leqslant \ln(79).$$

7. a) En traduisant l'énoncé, le fabriquant souhaite que la hauteur de la rampe soit entre 0.05m et 2m, *i.e.* $0.05 \leqslant f(x) \leqslant 2$. J'ai résolu cette in équation à la question précédente et trouvé que cela signifie que $0 \leqslant x \leqslant \ln(79)$.
La longueur sur le sol de la rampe est donc bien de $\ln(79) - 0 = \ln(79)$ mètres.

b) L'aire qui établit le volume de béton nécessaire est donné par l'intégrale de la fonction f entre les bornes $a = 0$ et $b = \ln(79)$. Je calcule alors cette intégrale à l'aide de la primitive obtenue à la question **5.b)**, qui s'annule en 0 :

$$\int_0^{\ln(79)} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^{\ln(79)} = F\big(\ln(79)\big) - F(0) = 4\ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}^{\ln(79)}}{1+\mathrm{e}^{\ln(79)}}\right) - 0 = 4\ln\left(\frac{2\times 79}{1+79}\right) = 4\ln\left(\frac{79}{40}\right).$$

Le volume de béton nécessaire est donc de $4\ln\left(\frac{79}{40}\right)\mathrm{m}^3$.

Partie 3

8. a) Il s'agit d'une intégrale impropre. Je fixe $M \leqslant 0$ et calcule l'intégrale sur le segment $[0, M]$ avant de faire tendre M vers $+\infty$. J'utilise de nouveau la primitive obtenue à la question **5.b)**, qui s'annule en 0. Ainsi

$$\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^M = F(M) - F(0) = 4\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-M}}\right) - 0 = 4\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-M}}\right).$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty} \mathrm{e}^{-M} = \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc $\lim\limits_{M\to+\infty} 4\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-M}}\right) = 4\ln\left(\frac{2}{1+0}\right) = 4\ln(2)$.
Donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 4\ln(2)$.

b) Je fixe $\alpha = \frac{1}{4\ln(2)}$ et je montre que la fonction ainsi obtenue αh est une densité de probabilité. Déjà comme $\ln(2) > 0$, alors $\alpha > 0$.

- Pour $x < 0$, $\alpha h(x) = \alpha \times 0 = 0 \geqslant 0$ et pour $x \geqslant 0$, $\alpha h(x) = \alpha f(x) \geqslant 0$ car $\alpha > 0$ et $f(x) \geqslant s > 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha h(x) \geqslant 0$.
- Sur $]-\infty, 0[$, αh est continue car constante et sur $[0, +\infty[$, αh est continue comme f est continue. Donc αh admet au plus un point de discontinuité sur $\mathbb{R}$.
- Il me reste à montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x$.
  Je calcule séparément les deux intégrales suivantes :
  ▷ $\int_{-\infty}^0 \alpha h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 \alpha \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
  ▷ $\int_0^{+\infty} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \alpha f(x)\,\mathrm{d}x$.

  L'intégrale impropre converge et $\int_0^{+\infty} \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\ln(2)} \times 4\ln(2) = 1$.
  Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x + \int_s^{+\infty} \alpha h(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.$$

Finalement j'ai bien montré que αh est une densité de probabilité.

c) La variable aléatoire U suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.
Sa fonction de répartition est donc donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

d) Soit $x \in [0,+\infty[$. Par croissance de la fonction exponentielle,

$$x \geqslant 0 \iff -x \leqslant 0 \iff 0 < \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0 = 1 \iff 1 = 1+0 < 1+\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1+1 = 2.$$

Puis par croissance de la fonction logarithme népérien,

$$1 < 1+\mathrm{e}^{-x} \leqslant 2 \iff 0 = \ln(1) < \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \ln(2)$$

$$\iff 0 < \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)} \leqslant \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1 \iff 0 = 1-1 \leqslant 1 - \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)} < 1-0 = 1.$$

Finalement j'ai bien montré que

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad 1 - \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)} \in [0,1[.$$

e) Soit $x \in [0,+\infty[$. Je commence par m'intéresser aux inégalités impliquant les variables aléatoires avant de passer aux probabilités.
Par croissance des fonctions exponentielle et logarithme,

$$\begin{aligned} X \leqslant x &\iff -\ln\left(\mathrm{e}^{(1-U)\ln(2)}-1\right) \leqslant x &&\iff \ln\left(\mathrm{e}^{(1-U)\ln(2)}-1\right) \geqslant -x \\ &\iff \mathrm{e}^{(1-U)\ln(2)}-1 \geqslant \mathrm{e}^{-x} &&\iff \mathrm{e}^{(1-U)\ln(2)} \geqslant 1+\mathrm{e}^{-x} \\ &\iff (1-U)\ln(2) \geqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) &&\iff \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant (1-U)\ln(2). \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré la première partie de l'égalité :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad P\big([X \leqslant x]\big) = P\big([\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant (1-U)\ln(2)]\big).$$

Puis en continuant mon travail sur les inégalités,

$$\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant (1-U)\ln(2) \iff \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)} \leqslant 1-U \iff U \leqslant 1 - \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)}.$$

Alors

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad P\big([X \leqslant x]\big) = P\Big([U \leqslant 1 - \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)}]\Big) = F_U\left(1 - \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)}\right).$$

Et comme d'après la question précédente, $1 - \dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)} \in [0,1[$, alors

$$F_U\left(1 - \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)}\right) = 1 - \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)}.$$

f) Par définition, la fonction de répartition de X est donnée pour $x \in]-\infty,0[$ par $F_X(x) = 0$ et pour $x \in [0,+\infty[$ par

$$F_X(x) = P\big([X \leqslant x]\big) = 1 - \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\ln(2)}.$$

Comme cette fonction de répartition est dérivable, alors X est une variable aléatoire à densité et une densité est donnée par la dérivée de la fonction de répartition.
Pour $x \in]-\infty,0[$, $\quad F'_X(x) = 0$ et pour $x \in [0,+\infty[$, $\quad F_X$ est de la forme $F_X = 1 - \dfrac{1}{\ln(2)}\ln(u)$, avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-x}$. Comme $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, alors

$$F'_X(x) = -\frac{1}{\ln(2)} \times \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{4\ln(2)} \times \frac{4\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \alpha f(x).$$

Ainsi je retrouve bien la fonction αh définie précédemment qui est bien une densité de X.

g) Voici une fonction `Python` qui renvoie une simulation de X, après importation des librairies `numpy` et `numpy.random` :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX():
    u=rd.random()
    return -np.log(np.exp((1-u)*np.log(2))-1)
```

h) Le script calcule 10000 simulations de la loi de la variable aléatoire X et sont représentées sur le graphe les moyennes des N premières simulations pour tous les entiers N entre 1 et 10000. On remarque alors que pour des grandes valeurs de N, la moyenne tend vers une limite finie. Il s'agit d'une illustration de la loi des grands nombres, et la limite observée est l'espérance de la variable aléatoire X.

Exercice 3 –

Partie 1

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $a_n + b_n + c_n = 1$.
   Initialisation : Pour $n = 1$,
   $$a_n + b_n + c_n = \frac{3}{8} + 0 + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$
   Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, $a_n + b_n + c_n = 1$. Or
   $$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &= \frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n + \frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n + \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \\ &= \frac{2+4+5}{11}a_n + \frac{3+3+5}{11}b_n + \frac{3+4+4}{11}c_n = a_n + b_n + c_n = 1. \end{aligned}$$
   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
   Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n + b_n + c_n = 1.$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $x_n = a_n + b_n + c_n$. Or je viens de montrer à la question précédente que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n + b_n + c_n = 1$.
   Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $x_n = 1$ et la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est bien une suite constante.

3. a) Soit $n \geqslant 1$. Je cherche à exprimer y_{n+1} en fonction de y_n.
   Comme $y_{n+1} = -a_{n+1} + 2b_{n+1} - c_{n+1}$, alors
   $$\begin{aligned} y_{n+1} &= -\frac{2}{11}a_n - \frac{3}{11}b_n - \frac{3}{11}c_n + \frac{8}{11}a_n + \frac{6}{11}b_n + \frac{8}{11}c_n - \frac{5}{11}a_n - \frac{5}{11}b_n - \frac{4}{11}c_n \\ &= \frac{1}{11}a_n - \frac{2}{11}b_n + \frac{1}{11}c_n = -\frac{1}{11}\big(a_n + 2b_n - c_n\big) = -\frac{1}{11}y_n. \end{aligned}$$
   Comme pour tout $n \geqslant 1$, $y_{n+1} = -\dfrac{1}{11}y_n$ alors la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est bien une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{11}$.

   b) Comme la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{11}$ et de premier terme
   $$y_1 = -a_1 + 2b_1 - c_1 = -\frac{3}{8} + 0 - \frac{5}{8} = -\frac{8}{8} = -1,$$
   alors sa forme explicite est donnée par
   $$\forall n \geqslant 1, \quad y_n = y_1 \times q^{n-1} = -1 \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} = -\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

4. a) Soit $n \geqslant 1$. Je cherche à exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.
   Comme $z_{n+1} = -5a_{n+1} - 5b_{n+1} + 7c_{n+1}$, alors
   $$\begin{aligned} z_{n+1} &= -\frac{10}{11}a_n - \frac{15}{11}b_n - \frac{15}{11}c_n - \frac{20}{11}a_n - \frac{15}{11}b_n - \frac{20}{11}c_n + \frac{35}{11}a_n + \frac{35}{11}b_n + \frac{28}{11}c_n \\ &= \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n - \frac{7}{11}c_n = -\frac{1}{11}\big(-5a_n - 5b_n + 7c_n\big) = -\frac{1}{11}z_n. \end{aligned}$$
   Comme pour tout $n \geqslant 1$, $z_{n+1} = -\dfrac{1}{11}z_n$ alors la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{11}$.

b) Comme la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{11}$ et de premier terme

$$z_1 = -5a_1 - 5b_1 + 7c_1 = -\frac{15}{8} - 0 + \frac{35}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2},$$

alors sa forme explicite est donnée par

$$\forall n \geqslant 1, \quad z_n = z_1 \times q^{n-1} = \frac{5}{2} \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

5. a) Je calcule les sommes des deux expressions données dans le but de retrouver $3b_n$ et $12c_n$. Soit $n \geqslant 1$,

$$x_n + y_n = a_n + b_n + c_n - a_n + 2b_n - c_n = 3b_n$$

$$5x_n + z_n = 5a_n + 5b_n + 5c_n - 5a_n - 5b_n + 7c_n = 12c_n.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = \frac{1}{3}\big(x_n + y_n\big) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{12}\big(5x_n + z_n\big).$$

b) D'après la question **1.**, je sais que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n + b_n + c_n = 1$. Alors grâce aux formules obtenues à la question précédente, pour $n \geqslant 1$,

$$a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \frac{1}{3}\big(x_n + y_n\big) - \frac{1}{12}\big(5x_n + z_n\big) = 1 - \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{5}{12}x_n - \frac{1}{12}z_n = 1 - \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n.$$

c) En combinant la formule obtenue à la question précédente avec celles obtenues aux questions **2.**, **3.** et **4.**, j'obtiens que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_n = 1 - \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n &= 1 - \frac{3}{4} \times 1 - \frac{1}{3} \times \left(-\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right) - \frac{1}{12} \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\ &= 1 - \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{24}\right) \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \left(-\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1},$$

$$c_n = \frac{5}{12}x_n + \frac{1}{12}z_n = \frac{5}{12} \times 1 + \frac{1}{12} \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} = \frac{5}{12} + \frac{5}{24} \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

6. Comme $-\dfrac{1}{11} \in \,]-1,1[$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} = 0$.

Je peux alors obtenir les limites des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ par somme :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{5}{12} + 0 = \frac{5}{12}.$$

Partie 2

7. Étant donné que les perches prennent peur, elles ne peuvent pas être pêchées en premier. Cela laisse donc 3 goujons et 5 truites en lice pour être le premier poisson pêché. Comme le choix du poisson est équiprobable, la probabilité que le premier poisson pêché soit un goujon est de trois sur huit, *i.e.* $g_1 = \dfrac{3}{8}$ et la probabilité que le premier poisson pêché soit une truite est de cinq sur huit, *i.e.* $t_1 = \dfrac{5}{8}$.

8. a) Si le premier poisson pêché est un goujon, alors il reste 11 poissons dans l'étang dont 2 goujons. Ainsi la probabilité de pêcher un goujon en deuxième poisson après qu'un goujon a été pêché en premier est donc de deux sur onze, *i.e.* $P_{G_1}(G_2) = \dfrac{2}{11}$. De la même manière, si le premier poisson pêché est une truite, alors il reste 11 poissons dans l'étang dont 3 goujons. Ainsi la probabilité de pêcher un goujon en deuxième poisson après qu'une truite a été pêchée en premier est donc de trois sur onze, *i.e.* $P_{T_1}(G_2) = \dfrac{3}{11}$.

   b) Comme une perche ne peut pas être le premier poisson pêché, alors G_1 et T_1 forment un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales, la probabilité de pêcher un goujon en deuxième poisson est donnée par

$$\begin{aligned} g_2 = P(G_2) &= P\big(G_1 \cap G_2\big) + P\big(T_1 \cap G_2\big) = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(T_1) \times P_{T_1}(G_2) \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{2}{11} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{11} = \frac{6}{88} + \frac{15}{88} = \frac{21}{88}. \end{aligned}$$

9. Je cherche $P_{G_2}(T_1)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{G_2}(T_1) = \frac{P\big(T_1 \cap G_2\big)}{P(G_2)} = \frac{\frac{15}{88}}{\frac{21}{88}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}.$$

Si le deuxième poisson pêché est un goujon, la probabilité que le premier ait été une truite est $\dfrac{5}{7}$.

10. a) Soit n un entier non nul. Si le n-ème poisson pêché est un goujon, alors il reste dans l'étang 11 poissons dont 2 sont des goujons. Ainsi $P_{G_n}(G_{n+1}) = \dfrac{2}{11}$.
De la même manière, si le n-ème poisson pêché est une perche, alors il reste dans l'étang 11 poissons dont 3 sont des goujons. Ainsi $P_{P_n}(G_{n+1}) = \dfrac{3}{11}$.
Et si le n-ème poisson pêché est une truite, alors il reste dans l'étang 11 poissons dont 3 sont des goujons. Ainsi $P_{T_n}(G_{n+1}) = \dfrac{3}{11}$.

   b) Soit n un entier non nul. Le n-ème poisson pêché est un goujon ou une perche ou une truite. Ainsi $\{G_n, P_n, T_n\}$ forme un système complet d'événements et d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} g_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P\big(G_n \cap G_{n+1}\big) + P\big(P_n \cap G_{n+1}\big) + P\big(T_n \cap G_{n+1}\big) \\ &= P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(G_{n+1}) + P(T_n) \times P_{T_n}(G_{n+1}) \\ &= g_n \times \frac{2}{11} + p_n \times \frac{3}{11} + t_n \times \frac{3}{11} = \frac{2}{11} g_n + \frac{3}{11} p_n + \frac{3}{11} t_n. \end{aligned}$$

   c) Soit n un entier non nul. En raisonnant de manière similaire, on obtient les formules suivantes pour p_{n+1} et t_{n+1} en fonction de g_n, p_n et t_n :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(P_{n+1}) &= P(G_n) \times P_{G_n}(P_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(P_{n+1}) + P(T_n) \times P_{T_n}(P_{n+1}) \\ &= \frac{4}{11} g_n + \frac{3}{11} p_n + \frac{4}{11} t_n, \\ t_{n+1} = P(T_{n+1}) &= P(G_n) \times P_{G_n}(T_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(T_{n+1}) + P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) \\ &= \frac{5}{11} g_n + \frac{5}{11} p_n + \frac{4}{11} t_n. \end{aligned}$$

11. Je remarque que les suites $(g_n)_{n\geqslant 1}$, $(p_n)_{n\geqslant 1}$ et $(t_n)_{n\geqslant 1}$ sont définies de la même manière que l'étaient les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$: les formules de récurrence sont les mêmes et les valeurs initiales aussi : $g_1 = \dfrac{3}{8} = a_1, \qquad p_1 = 0 = b_1 \qquad \text{et} \qquad t_1 = \dfrac{5}{8} = c_1.$
J'en déduis donc qu'elles partagent les mêmes formes explicites et ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$g_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}, \qquad p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \qquad \text{et} \qquad t_n = \frac{5}{12} + \frac{5}{24} \times \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

Partie 3

12. a) Dans la table `poissons`, la clé primaire, identifiée par le fait qu'elle soit soulignée dans le schéma relationnel est l'`id`, numéro permettant d'identifier l'espèce.

b) La requête SQL permettant de modifier la taille de l'espèce `goujon` est la suivante :

```
UPDATE poissons SET taille = 610 WHERE espece = "goujon"
```

c) La requête SQL permettant d'afficher la liste des poissons autorisés est la suivante :

```
SELECT * FROM poissons WHERE protection = 0 AND taille >= 125
```

13. a) Comme le pêcheur attrape au plus un poisson par période, le support de U est réduit à deux éléments : 0 et 1. La variable aléatoire U suit donc une loi de Bernoulli dont le succès est "pêcher un poisson", de probabilité $p = \frac{1}{4}$. Il s'agit du paramètre de la loi de Bernoulli. Ainsi $U \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

b) Les trois heures du concours sont découpées en neuf périodes de vingt minutes, qui représentent $n = 9$ répétitions identiques et indépendantes de l'épreuve de Bernoulli de succès "pêcher un poisson", de probabilité $p = \frac{1}{4}$. La variable aléatoire V compte le nombre de succès, donc V suit une loi binomiale de paramètre $n = 9$ et $p = \frac{1}{4}$. Ainsi $V \hookrightarrow \mathcal{B}\left(9, \dfrac{1}{4}\right)$.

c) La probabilité que le pêcheur n'attrape aucun poisson lors du concours est donnée par $P(V = 0)$. Comme V suit une loi binomiale, je peux calculer cette probabilité :

$$P(V = 0) = \binom{9}{0} \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{9-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \left(\frac{3}{4}\right)^9.$$

14. a) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Son support est donné par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

L'espérance et la varice de X sont données par les formules suivantes :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

b) On souhaite que le nombre moyen de poissons pêchés lors du concours soit identique, c'est-à-dire que les deux lois partagent la même espérance. Comme V suit une loi binomiale, alors

$$E(V) = n \times p = 9 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Il faut donc choisir $\lambda = \dfrac{9}{4} > 0$ pour que les espérances de V et de X soient égales.

c) À l'aide de la formule des probabilités rappelée à la question **a)**, la probabilité que le pêcheur n'attrape aucun poisson lors du concours est donnée par

$$P(X=0)=\frac{\lambda^0}{0!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{1}{1}\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}=\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}.$$

15. a) Si les deux rivaux ont pêché 15 poissons, alors le premier en a pêché un certain nombre k entre 0 et 15, et l'autre en a pêché le complémentaire à 15, *i.e.* $15-k$. Ainsi en décomposant l'événement $[X+Y=15]$ selon les seize valeurs possibles pour k, j'obtiens bien que

$$[X+Y=15]=\bigcup_{k=0}^{15}\Big([X=k]\cap[Y=15-k]\Big).$$

b) Grâce à l'égalité d'événements précédente, comme l'union est disjointe et que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned}P\big([X+Y=15]\big)&=P\left(\bigcup_{k=0}^{15}\Big([X=k]\cap[Y=15-k]\Big)\right)=\sum_{k=0}^{15}P\big([X=k]\cap[Y=15-k]\big)\\&=\sum_{k=0}^{15}P\big([X=k]\big)\times P\big([Y=15-k]\big)=\sum_{k=0}^{15}\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\times\frac{\mu^{15-k}}{(15-k)!}\,\mathrm{e}^{-\mu}.\end{aligned}$$

Alors en remarquant que $\displaystyle\binom{15}{k}=\frac{15!}{k!\times(15-k)!}\iff\frac{1}{k!}\times\frac{1}{(15-k)!}=\frac{1}{15!}\times\binom{15}{k}$,
je peux simplifier la somme obtenue :

$$P\big([X+Y=15]\big)=\sum_{k=0}^{15}\frac{1}{15!}\binom{15}{k}\times\lambda^k\mu^{15-k}\times\mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mu}=\frac{1}{15!}\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\lambda^k\mu^{15-k}\,\mathrm{e}^{-\lambda-\mu}.$$

c) Je reconnais en $\displaystyle\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\lambda^k\mu^{15-k}$ la formule du binôme de Newton.
Ainsi

$$\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\lambda^k\mu^{15-k}=(\lambda+\mu)^{15}\quad\text{et}\quad P\big([X+Y=15]\big)=\frac{1}{15!}(\lambda+\mu)^{15}\,\mathrm{e}^{-\lambda-\mu}.$$

d) D'après la formule des probabilités conditionnelles et grâce aux simplifications déjà opérées, pour tout $k\in[\![0,15]\!]$,

$$\begin{aligned}P_{[X+Y=15]}\big([X=k]\big)&=\frac{P\big([X=k]\cap[X+Y=15]\big)}{P\big([X+Y=15]\big)}=\frac{P\big([X=k]\cap[Y=15-k]\big)}{P\big([X+Y=15]\big)}\\&=\frac{\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\times\frac{\mu^{15-k}}{(15-k)!}\,\mathrm{e}^{-\mu}}{\frac{1}{15!}(\lambda+\mu)^{15}\,\mathrm{e}^{-\lambda-\mu}}=\frac{\frac{1}{15!}\binom{15}{k}\times\lambda^k\mu^{15-k}\times\mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mu}}{\frac{1}{15!}(\lambda+\mu)^{15}\,\mathrm{e}^{-\lambda-\mu}}\\&=\binom{15}{k}\frac{\lambda^k\mu^{15-k}}{(\lambda+\mu)^{15}}=\binom{15}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{15-k}.\end{aligned}$$

e) Comme $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}=\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu}=1$, alors en posant $p=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$, $1-p=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$ et je reconnais en la loi de Z une loi binomiale. Pour tout $k\in[\![0,15]\!]$,

$$P(Z=k)=P_{[X+Y=15]}\big([X=k]\big)=\binom{15}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{15-k}=\binom{15}{k}p^k(1-p)^{15-k}.$$

Finalement Z suit une loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

f) Si les deux rivaux ont pêché 15 poissons, *i.e.* que l'événement $[X+Y=15]$ est réalisé, alors $Y = 15 - X$. Dès lors,

$$[X \geqslant Y] \iff [X \geqslant 15 - X] \iff [2X \geqslant 15] \iff \left[X \geqslant \frac{15}{2}\right] \iff [X \geqslant 8],$$

comme X est à valeurs entières. Ainsi

$$P_{[X+Y=15]}\big([X \geqslant Y]\big) = P_{[X+Y=15]}\big([X \geqslant 8]\big).$$

Donc le pêcheur bat son rival s'il a plus de poissons que lui, donc plus de huit poissons selon ce raisonnement. Finalement le pêcheur bat son rival s'il pêche entre 8 et 15 poissons, ce qui donne une probabilité de

$$\begin{aligned} P_{[X+Y=15]}\big([X \geqslant Y]\big) = P_{[X+Y=15]}\big([X \geqslant 8]\big) = \sum_{k=8}^{15} P_{[X+Y=15]}\big([X=k]\big) = \sum_{k=8}^{15} P\big([Z=k]\big) \\ = \sum_{k=8}^{15} \binom{15}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{15-k}. \end{aligned}$$