INTERRO DE COURS 14

Exercice 1 – On considère une urne contenant 4 boules blanches et 5 boules noires. On prélève successivement et avec remise 10 boules dans cette urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de X. On précisera notamment $X(\Omega)$ ainsi que la formule donnant $P(X=k)$ en fonction de k pour tout $k \in X(\Omega)$.

Solution : X compte le nombre de succès "obtenir une boule blanche", de probabilité $p=\frac{4}{9}$, lors de la répétition de $n=10$ expériences identiques et indépendantes.
Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{4}{9}$.
On a alors $X(\Omega)=[\![0,10]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X=k)=\binom{10}{k}\times\left(\frac{4}{9}\right)^k\times\left(\frac{5}{9}\right)^{10-k}.$$

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Solution : Puisque X suit une loi binomiale, on a

$$E(X)=np=10\times\frac{4}{9}=\frac{40}{9}$$

et

$$V(X)=np(1-p)=\frac{40}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{200}{81}.$$

3. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches. On donnera le résultat sous la forme $2^a\times3^b\times5^c$, pour a, b et c trois entiers *(non-nécessairement positifs).*

Solution : On a

$$P(X=2)=\binom{10}{2}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2\times\left(\frac{5}{9}\right)^8=45\times\frac{4^2\times5^8}{9^{2+8}}=2^{2\times2}\times3^{2-2\times10}\times5^{1+8}=2^4\times3^{-18}\times5^9.$$