Devoir Maison 3

Exercice 1 –

1. D'après la formule des probabilités totales, comme $\left\{R, \overline{R}\right\}$ forme un système complet d'évènements,

$$P(J) = P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J) = P(R) \times P_R(J) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(J)$$
$$= \frac{3}{5} \times 1 + \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5} + \frac{2}{15} = \frac{11}{15}.$$

En effet, si l'élève connaît la réponse, il va répondre juste avec une probabilité 1, contre une probabilité $\frac{1}{3}$ s'il répond au hasard.

2. Les 20 questions représentent $n = 20$ répétitions d'une expérience de Bernoulli (succès : "répondre juste", de probabilité $p = \frac{11}{15}$), identiques et indépendantes. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{11}{15}$. Le support de X est donné par $X(\Omega) = [\![0, 20]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, 20]\!]$,

$$P(X = k) = \binom{20}{k}\left(\frac{11}{15}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{20-k}.$$

3. Comme X suit une loi binomiale, on a

$$E(X) = np = 20 \times \frac{11}{15} = \frac{44}{3} \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = \frac{44}{3} \times \frac{4}{15} = \frac{176}{45}.$$

4. (a) D'après l'énoncé, il y a X bonnes réponses, rapportant 1 point chacune, et donc $20 - X$ mauvaises réponses, rapportant -2 points chacune. Ainsi la note finale devient

$$N = 1 \times X + (-2) \times (20 - X) = X - 40 + 2X = 3X - 40.$$

   (b) Comme $N = 3X - 40$, on a

$$E(N) = E(3X - 40) = 3E(X) - 40 = 3 \times \frac{44}{3} - 40 = 44 - 40 = 4,$$

$$V(N) = V(3X - 40) = 3^2 V(X) = 9 \times \frac{176}{45} = \frac{176}{5}.$$

5. (a) Il s'agit cette fois de $n = 20$ répétitions d'une expérience de Bernoulli (succès : "répondre juste" de probabilité $p = \frac{3}{5}$), identiques et indépendantes. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès, elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{3}{5}$.

   (b) La note moyenne obtenue par l'élève B correspond à l'espérance de Y, *i.e.*

$$E(Y) = 20 \times \frac{3}{5} = 12.$$

(c) En comparant les notes moyennes obtenues par les élèves A et B dans le cas de points négatifs en cas de mauvaises réponses (4 pour l'élève A et 12 pour l'élève B), il vient naturellement la conclusion que la meilleure stratégie est de ne pas répondre au hasard aux questions pour lesquelles on ne connaît pas la réponse.

Exercice 2 –

1. (a) Comme une primitive de x^n est donnée par $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, une primitive de f_1 est donnée par

$$F_1(x) = 4\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - x = x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x.$$

(b) De la même manière, une primitive de f_2 est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x.$$

(c) f_3 semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = 2x - 1$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$u'(x)u(x)^2 = 2(2x-1)^2 = 2f_3(x).$$

Donc une primitive de f_3 est donc donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-1)^3}{3} = \frac{(2x-1)^3}{6}.$$

(d) f_4 semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 3x + 1$. On a $u'(x) = 3$ donc

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{\sqrt{3x+1}} = 3f_4(x).$$

Donc une primitive de f_4 est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u(x)} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3x+1} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}.$$

(e) f_5 semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 + 1$. On a $u'(x) = 2x$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 2f_5(x).$$

Donc une primitive de f_5 est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{u(x)} = \frac{-1}{2x^2+2}.$$

(f) f_6 semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = 2x^2 - 2x + 1$. On a $u'(x) = 4x - 2$ donc

$$u'(x)u(x)^3 = (4x-2)(2x^2-2x+1)^3 = f_6(x).$$

Donc une primitive de f_6 est donnée par

$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(2x^2-2x+1)^4}{4}.$$

(g) f_7 semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 2x-1$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2} = f_7(x).$$

Donc une primitive de f_7 est donnée par

$$F(x) = \frac{-1}{u(x)} = \frac{-1}{2x-1}.$$

(h) f_8 n'est pas une fonction composée. On peut donc primitiver directement. On a

$$f_8(x) = 2 \times \frac{1}{x^2}.$$

Donc une primitive de f_8 est donnée par

$$F(x) = 2 \times \frac{-1}{x} = \frac{-2}{x}.$$

(i) Une primitive de f_9 est donnée par

$$F(x) = 4\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x} = 2x^2 - x - \frac{1}{x}.$$

(j) On réécrit f_{10} pour faire apparaître des fonctions dont on sait calculer une primitive :

$$f_{10}(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Donc une primitive de f_{10} est donnée par

$$F(x) = x - \frac{1}{x}.$$

2. (a) On a

$$\int_0^1 (2x^2-5x+3)\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 3 = \frac{4}{6} - \frac{15}{6} + \frac{18}{6} = \frac{7}{6}.$$

(b) On a

$$\int_0^1 (4x^3-3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x = \left[4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = 1-1+1+1 = 2.$$

(c) Commençons par trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{(1+3x^2)^2}$.

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1+3x^2$. On a $u'(x) = 6x$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{6x}{(1+x^2)^2} = 6f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{6} \times \frac{-1}{u(x)} = \frac{1}{6} \times \frac{-1}{1+3x^2} = \frac{-1}{6+18x^2}.$$

Et donc

$$\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{6+18x^2}\right]_1^2 = \frac{-1}{78} - \frac{-1}{24} = \frac{-4}{312} + \frac{13}{312} = \frac{9}{312} = \frac{3}{104}.$$

(d) Commençons par trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}$.

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + x^4$. On a $u'(x) = 4x^3$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} = 4f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{u(x)} = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{1+x^4} = \frac{-1}{4+4x^4}.$$

Et donc

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{4+4x^4}\right]_0^1 = \frac{-1}{8} - \frac{-1}{4} = \frac{1}{8}.$$

(e) Commençons par trouver une primitive de $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^2 + 1$. On a $u'(t) = 2t$ donc

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} = 2f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(t)} = \sqrt{t^2+1}.$$

Et donc

$$\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_{-1}^1 = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0.$$

Remarque : La fonction $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est impaire. Il est donc normal d'obtenir que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = 0$.

(f) Commençons par trouver une primitive de $f(t) = \dfrac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}$.

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^4 + 1$. On a $u'(x) = 4t^3$ donc

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}} = f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = 2\sqrt{u(t)} = 2\sqrt{t^4+1}.$$

Et donc

$$\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t^4+1}\right]_{-1}^1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0.$$

(g) On a

$$\int_1^2 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3} - 1 + \frac{3}{8} = \frac{56}{24} - \frac{24}{24} + \frac{9}{24} = \frac{41}{24}.$$

(h) On a

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x - 2\right) \mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^4 = \left(2\sqrt{4} + \frac{16}{2} - 8\right) - \left(2 + \frac{1}{2} - 2\right) = 4 + 8 - 8 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

(i) Commençons par trouver une primitive de $f(x) = (4x-1)^3$.
f semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = 4x - 1$. On a $u'(x) = 4$ donc

$$u'(x)u(x)^3 = 4(4x-1)^3 = 4f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(4x-1)^4}{16}.$$

Et donc

$$\int_{-2}^{-1} (4x-1)^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{(4x-1)^4}{16}\right]_{-2}^{-1} = \frac{625}{16} - \frac{6561}{16} = -\frac{5936}{16} = -371.$$

(j) Commençons par trouver une primitive de $f(x) = x(5x^2+1)^2$.
f semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = 5x^2 + 1$. On a $u'(x) = 10x$ donc

$$u'(x)u(x)^2 = 10x(5x^2+1)^2 = 10f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{10} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{(5x^2+1)^3}{30}.$$

Et donc

$$\int_{-1}^{0} x(5x^2+1)^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{(5x^2+1)^3}{30}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{30} - \frac{216}{30} = \frac{-215}{30} = -\frac{43}{6}.$$