

BSB 2021

Exercice 1 –

1. Pour vérifier que la matrice M est idempotente, je calcule M^2 .

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} & \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} & \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} & \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} & \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} & \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} & \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = M.$$

J'ai bien montré que $M^2 = M$, *i.e.* que M est idempotente.

2. (a) Comme la matrice M est idempotente, par définition, $M^2 = M$. Donc

$$M^2 - M = O_n,$$

où O_n désigne la matrice nulle d'ordre n .

J'en déduis que le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de la matrice M .

- (b) Les valeurs propres d'une matrice sont nécessairement parmi les racines d'un polynôme annulateur. Comme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de la matrice M , je cherche ses racines. Or

$$X^2 - X = 0 \iff X(X - 1) = 0 \iff X = 0 \text{ ou } X - 1 = 0 \iff X = 0 \text{ ou } X = 1.$$

Donc les valeurs propres possibles pour la matrice M sont 0 et 1.

- (c) Pour vérifier que la matrice $N = I_n - M$ est idempotente, je calcule N^2 .

$$N^2 = (I_n - M)^2 = (I_n - M) \times (I_n - M) = I_n \times I_n - I_n \times M - M \times I_n + M \times M = I_n - M - M + M^2.$$

Or M est idempotente, donc $M^2 = M$, *i.e.*

$$N^2 = I_n - 2M + M = I_n - M = N.$$

J'ai bien montré que $N^2 = N$, *i.e.* que N est idempotente.

3. (a) Pour vérifier que la matrice C est idempotente, je calcule C^2 .

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = C.$$

J'ai bien montré que $C^2 = C$, *i.e.* que C est idempotente.

En outre, grâce à la question 2, comme la matrice C est idempotente, j'en déduis que la matrice $D = I_2 - C$ est elle-aussi idempotente.

Je calcule CD et DC . Comme C est idempotente,

$$CD = C \times (I_2 - C) = C \times I_2 - C \times C = C - C^2 = C - C = O_2.$$

De la même manière, $DC = C - C^2 = O_2$.

- (b) Notons P_n la propriété $B^n = 2^n C + D$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$B^0 = I_2 \quad \text{et} \quad 2^0 C + D = C + D = C + I_2 - C = I_2.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$B^{n+1} = B^n \times B = (2^n C + D) \times (2C + D) = 2^{n+1} C^2 + 2^n CD + 2DC + D^2.$$

Or par idempotence, $C^2 = C$ et $D^2 = D$, puis avec les calculs de la question précédente, $CD = DC = O_2$. Donc

$$B^{n+1} = 2^{n+1} C + D.$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = 2^n C + D.$$

Alors la formule explicite de B^n est

$$B^n = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ -2 \times 2^n + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}.$$

J'ai montré que

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Je calcule P^2 .

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Comme $P^2 = I_2$, je déduis que la matrice P est inversible et que son inverse est $P^{-1} = P$.

(d) Je calcule $P^{-1}AP$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je calcule aussi B pour vérifier que $P^{-1}AP = B$.

$$B = 2C + D = 2C + I_2 - C = C + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $P^{-1}AP = B$.

(e) Comme $P^{-1}AP = B$, je sais que

$$P \times P^{-1}AP \times P^{-1} = PBP^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A = PBP^{-1}.$$

Notons P_n la propriété $A^n = PBP^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_2 \quad \text{et} \quad P^{-1}B^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$A^{n+1} = A^n \times A = PB^n P^{-1} \times PBP^{-1} = PB^n I_2 BP^{-1} = PB^n BP^{-1} = PB^{n+1} P^{-1}.$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PB^n P^{-1}.$$

(f) Je sais que $A^n = PB^n P^{-1}$ grâce à la question précédente et je connais les coefficients de la matrice B^n par la question 3b. Donc

$$\begin{aligned} PB^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+1}-1+2^{n+1}-2 & 2^n-1+2^n-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2 \times 2^{n+1}-3 & 2 \times 2^n-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+2}-3 & 2^{n+1}-3 \end{pmatrix} \\ \text{et } PB^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+2}-3 & 2^{n+1}-3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}+2^n-2 & -2^n+1 \\ 2^{n+2}+2^{n+1}-6 & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2+1) \times 2^n-2 & -2^n+1 \\ (2^2+2) \times 2^n-6 & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n-2 & -2^n+1 \\ 6 \times (2^n-1) & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n-2 & -2^n+1 \\ 6 \times (2^n-1) & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 –

1. J'étudie le signe de x^2+x+1 pour $x \in \mathbb{R}$. C'est un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Comme le discriminant est négatif, le polynôme n'admet pas de racine et son signe est constant. Comme $a = 1 > 0$, j'en déduis que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x + 1 > 0.$$

2. Je sais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Alors, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, j'en déduis par composition que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Je calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \ln(3) - \ln(4) = \ln(3) - \ln(2^2) = \ln(3) - 2\ln(2). \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2).$$

4. (a) La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$, avec $u(x) = x^2 + x + 1$. On a $u'(x) = 2x + 1$, donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

- (b) J'obtiens les variations de f en étudiant le signe de $f'(x)$. Je sais que le dénominateur est strictement positif d'après la question 1. Je cherche le signe du numérateur :

$$2x+1 \geq 0 \iff 2x \geq -1 \iff x \geq -\frac{1}{2}.$$

Je peux donc déduire le tableau de variation de f grâce au tableau de signe de f' .

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$
x^2+x+1	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$\ln(3) - 2\ln(2)$	$+\infty$

5. (a) Je résous $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \iff \ln(x^2 + x + 1) = 0 \iff x^2 + x + 1 = e^0 = 1 \iff x^2 + x = 0$$

$$\iff x(x+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1.$$

J'ai bien montré que les deux seules solutions de $f(x) = 0$ sont -1 et 0 .

- (b) L'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} en le point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

Or $f(0) = 0$ puisque 0 est solution de $f(x) = 0$, et $f'(0) = \frac{2 \times 0 + 1}{0^2 + 0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$.

Donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = 1 \times (x - 0) + 0 \iff y = x.$$

De la même manière, si $a = -1$, l'équation de la tangente devient

$$y = f'(-1) \times (x - (-1)) + f(-1).$$

Or $f(-1) = 0$ puisque -1 est aussi solution de $f(x) = 0$, et $f'(-1) = \frac{-2+1}{1-1+1} = \frac{-1}{1} = -1$.

Donc la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation

$$y = -1 \times (x + 1) + 0 \iff y = -x - 1.$$

6. (a) Je dérive de nouveau f' pour obtenir f'' . La fonction f' est donnée sous la forme d'un quotient $f' = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2 + x + 1$.

On a alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x + 1$, puis

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 2 - (4x^2 + 4x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

J'ai bien montré que

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

- (b) Pour étudier la convexité de f , j'étudie le signe de $f''(x)$. Pour commencer, je remarque que le dénominateur est toujours positif. Alors le signe de $f''(x)$ me sera donné par celui de $-2x^2 - 2x + 1$. Je cherche donc le signe de ce polynôme de degré 2.

Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 4 + 8 = 12 > 0$.

Il y a donc deux racines, et je remarque que $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{12}}{2 \times (-2)} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{12}}{2 \times (-2)} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Comme $a = -2$, je déduis le tableau de signe de $-2x^2 - 2x + 1$, qui n'est autre que celui de $f''(x)$.

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

Je peux alors déduire que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right]$, car $f''(x)$ y est positif, et concave sur les intervalles $\left]-\infty, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right]$ et $\left[\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$. Cela nous amène bien à deux points d'inflexions, moment où la convexité change, l'un au point d'abscisse $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$, l'autre au point d'abscisse $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

7. (a) Le fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Or j'ai déjà montré que $f(0) = 0$ et que la limite de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ est $+\infty$. Ainsi, comme $1 \in [0, +\infty[$, par le théorème des valeurs int  rmediaires, je peux déduire qu'il existe une unique solution, notée α , à l'équation $f(x) = 1$.

- (b) On a $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(1 + 1 + 1) = \ln(3) \approx 1.1$. Comme $f(0) \leq 1 = f(\alpha) \leq f(1)$ et que f est croissante, j'en déduis que $0 \leq \alpha \leq 1$.

J'ai bien montré que

$$\alpha \in [0, 1].$$

- (c) Comme α est solution de $f(x) = 1$, je sais que $\ln(\alpha^2 + \alpha + 1) = 1$. Alors,

$$f(-1 - \alpha) = \ln((-1 - \alpha)^2 + (-1 - \alpha) + 1) = \ln(\alpha^2 + 2\alpha + 1 - 1 - \alpha + 1) = \ln(\alpha^2 + \alpha + 1) = 1.$$

J'ai bien montré que

$$f(-1 - \alpha) = 1.$$

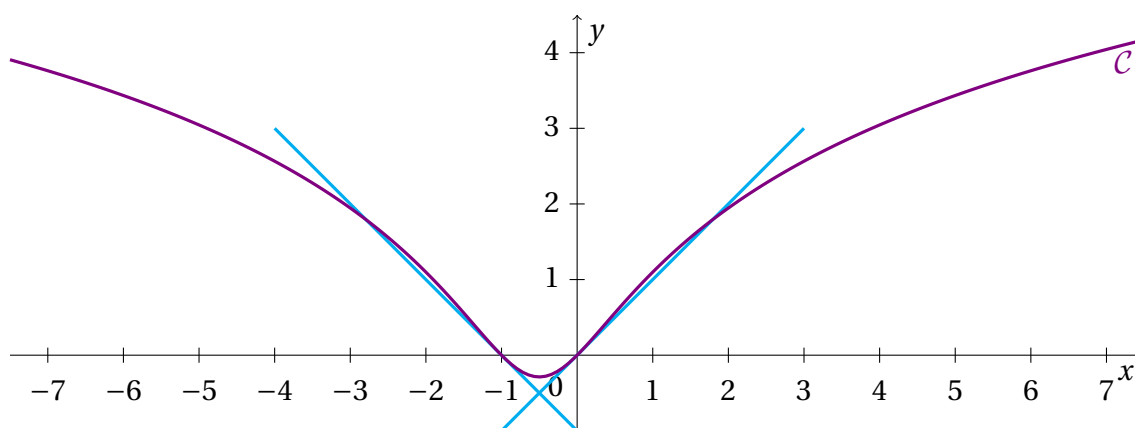
(d) Voici le script complété.

```

1. function y=f(x)
2.     y=log(x^2+x+1)
3. endfunction
4. a=0, b=1
5. while b-a>10^(-3)
6.     c=(a+b)/2
7.     if f(c) < 1 then a=c
8.         else b=c
9.     end
10. end
11. disp(a)

```

8. Voici l'allure de la courbe \mathcal{C} et de ses tangentes.



Exercice 3 –

1. (a) La probabilité a_2 est la probabilité de l'  v  nement A_2 , à savoir que le joueur tire vers la cible A. Or s'il tire de nouveau vers la cible A, c'est qu'il n'a pas réussi à atteindre le secteur 1 la première fois. Comme il n'y a que deux secteurs sur la cible A, on a

$$a_2 = P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

De la même manière, b_2 est la probabilité de l'  v  nement B_2 , à savoir que le joueur tire vers la cible B. Or s'il tire cette fois vers la cible B, c'est qu'il a réussi à atteindre le secteur 1 la première fois sur la cible A. Comme il n'y a que deux secteurs sur cette cible, on a

$$b_2 = P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

- (b) Le deuxième lancer ne pouvant se faire que sur l'une des deux cibles A ou B, $\{A_2, B_2\}$ forme un système complet d'  v  nements. Alors, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 b_3 &= P(B_3) = P(A_2 \cap B_3) + P(B_2 \cap B_3) = P(A_2) \times P_{A_2}(B_3) + P(B_2) \times P_{B_2}(B_3) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.
 \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$b_3 = \frac{5}{8}.$$

2. On raisonne de manière similaire à la question précédente. Si le joueur effectue un $n+1$ -ième lancer, alors le n -ième lancer a été tiré ou bien sur la cible A, ou bien sur la cible B. Donc $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'  v  nements. Alors, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times 0 = \frac{1}{2} a_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n + \frac{1}{2} a_n.$$

3. (a) Voici le script complété.

```
1. n=input('n ?')
2. a=1, b=0
3. for i=2:n
4.     b=b*3/4+a/2
5.     a=a/2
6. end
7. disp(b,a)
```

- (b) Si l'on échange les lignes 4. et 5., la variable a sera mise à jour en premier et contiendra la valeur a_i au moment de mettre à jour la variable b par la valeur b_i . C'est un problème puisque b_i dépend de a_{i-1} et non pas de a_i .
4. Je sais que $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$, donc la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Son premier terme est $a_1 = 1$. Je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

5. (a) Comme $v_n = 2^{n-1} b_n + 2$, je sais que

$$v_1 = 2^{1-1} b_1 + 2 = 1 \times b_1 + 2 = 1 \times 0 + 2 = 2.$$

Aussi, pour tout $n \geq 1$, en me servant des questions précédentes et du fait que

$$v_n = 2^{n-1} b_n + 2 \iff v_n - 2 = 2^{n-1} b_n \iff \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = b_n,$$

je peux montrer que

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= 2^{n+1-1} b_{n+1} + 2 = 2^n \left(\frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n \right) + 2 \\
 &= \frac{2^n}{2} a_n + \frac{3 \times 2^n}{4} b_n + 2 = \frac{2^n}{2} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{3 \times 2^n}{4} \times \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} + 2 \\
 &= \frac{2^n}{2 \times 2^{n-1}} + \frac{3 \times 2^n \times (v_n - 2)}{4 \times 2^{n-1}} + 2 = 1 + \frac{3(v_n - 2)}{2} + 2 \\
 &= 1 + \frac{3}{2} v_n - 3 + 2 = \frac{3}{2} v_n.
 \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$v_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n.$$

- (b) Je reconnais en (v_n) une suite géométrique, de raison $q = \frac{3}{2}$ et de premier terme $v_1 = 2$.
Je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}.$$

J'ai montré que

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}.$$

- (c) Comme j'ai établi dans les questions précédentes que $b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}}$ et que $v_n = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$,
il me suffit de combiner pour obtenir que, pour tout $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = \frac{2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} - 2}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^{n-1}} \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}} = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \geq 1, \quad b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

6. Voici le script complété.

```

1. cible="a"
2. n=1
3. while cible <>"c"
4.     n=n+1
5.     if cible == "a" then
6.         secteur=grand(1,1,'uin',1,2)
7.         if secteur==1 then cible="b"
8.     end
9.     else
10.        if cible == "b" then
11.            secteur=grand(1,1,'uin',1,4)
12.            if secteur==1 then cible="c"
13.        end
14.    end
15. end
16. end
17. disp(n)

```


7. (a) Si le joueur se décourage au bout de deux lancers, la seule façon pour que celui-ci gagne un lot est qu'il arrive à la cible C en deux lancers, c'est-à-dire qu'il atteigne le secteur 1 de la cible A au premier lancer, puis le secteur 1 de la cible B au deuxième lancer.

La probabilité ainsi obtenue est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

J'ai bien montré que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot est de $\frac{1}{8}$.

- (b) Les 20 joueurs représentent $n = 20$ répétitions d'une même loi de Bernoulli de succès "Le joueur gagne un lot", de probabilité $p = \frac{1}{8}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire Y compte le nombre de succès. J'en déduis que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{8}$.

Le support de Y est $Y(\Omega) = \llbracket 0, 20 \rrbracket$, et pour tout $k \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$,

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k} = \binom{20}{k} \times \frac{1}{8^k} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{20-k}.$$

- (c) Comme Y suit une loi binomiale, je sais que

$$E(Y) = np = 20 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = np(1 - p) = \frac{5}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{16}.$$

- (d) Y compte le nombre de succès des joueurs, ce qui coute au forain 5   de lot mais lui rapporte 3 fois 1   par fléchette lancée. Soit un gain algébrique de $-2  $. Cela nous laisse $(20 - Y)$ échecs qui eux rapportent au forain 2  . En additionnant tout cela, le gain total du forain vaut

$$G = -2 \times Y + 2 \times (20 - Y) = 2(20 - Y) - 2Y.$$

Le gain moyen du forain correspond à l'espérance de G , i.e., par linéarité,

$$E(G) = E(2(20 - Y) - 2Y) = 2(20 - E(Y)) - 2E(Y) = 2\left(20 - \frac{5}{2}\right) - 2 \times \frac{5}{2} = 40 - 5 - 5 = 30.$$

Le forain gagne en moyenne 30   pour 20 joueurs.

Exercice 4 –

1. (a) La fonction f est définie en deux morceaux. Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, $f(t) = 0 \geq 0$ donc la fonction f est positive. Et sur l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$. Comme $t \geq 0$, alors on a $-t \leq \frac{t}{2}$, et par croissance de la fonction exponentielle $e^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$, donc $f(t) \geq 0$. En résumé, la fonction f est positive sur \mathbb{R} tout entier.
- (b) Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, $f(t) = 0$ donc la fonction f est continue car constante. Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$ donc la fonction f est continue comme somme de fonctions continues. Il ne me reste plus qu'étudier la continuité en $t = 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t} = e^{-\frac{0}{2}} - e^{-0} = 1 - 1 = 0.$$

Comme la limite à gauche de f en 0 est égale à la limite à droite de f en 0, on en déduit que la fonction f est continue en 0.

En conclusion, la fonction f est continue sur \mathbb{R} tout entier.

- (c) Par définition, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge si et seulement si la limite $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-at} dt$ existe et est finie.

Soit $X \geq 0$. Je cherche à calculer $\int_0^X e^{-at} dt$. Je commence par remarquer qu'une primitive de $g(t) = e^{-at}$ est donnée par $G(t) = -\frac{1}{a}e^{-at}$. Donc

$$\int_0^X e^{-at} dt = \left[-\frac{1}{a}e^{-at} \right]_0^X = -\frac{1}{a}e^{-aX} + \frac{1}{a}e^{-a \times 0} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}e^{-aX}.$$

Il me reste à étudier la limite de cette quantité lorsque X tend vers $+\infty$. Comme $a > 0$,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} -aX = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-aX} = 0.$$

Je peux alors déduire que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-at} dt = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \times 0 = \frac{1}{a}$, ce qui indique que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge et vaut

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}.$$

- (d) Je sais déjà que f est positive et continue sur \mathbb{R} . Il me reste à montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1. Je décompose, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t} dt.$$

Je sais que $\int_{-\infty}^0 0 dt$ converge et vaut 0 car la fonction dans l'intégrale est nulle.

Gr  ce à la question précédente, appliquée en $a = 1$ et $a = \frac{1}{2}$, je sais aussi que les deux intégrales suivantes convergent et je connais leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t} dt$ converge et vaut, par linéarité,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 2 - 1 = 1.$$

En résumé, la fonction f est continue sur \mathbb{R} , positive sur \mathbb{R} et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t} dt = 0 + 1 = 1,$$

donc je peux en conclure que f est une densité de probabilité.

2. (a) La fonction de répartition F de X est donnée par $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Si $x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

(b) Si $x \geq 0$, la fonction de répartition est

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^0 0 \, dt + \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t} \, dt = \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} \, dt - \int_0^x e^{-t} \, dt \\ &= \left[-2e^{-\frac{t}{2}} \right]_0^x - \left[-e^{-t} \right]_0^x = -2e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{0}{2}} + e^{-x} - e^{-0} \\ &= -2e^{-\frac{x}{2}} + 2 + e^{-x} - 1 = -2e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

J'ai montré que pour tout $x \geq 0$,

$$F(x) = 1 - 2e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x}.$$

3. (a) Comme la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre a , je sais que sa densité est donnée par la fonction

$$f_Y(t) = \begin{cases} ae^{-at} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Aussi, son espérance est donnée par

$$E(Y) = \frac{1}{a}.$$

(b) D'après la définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité, je sais que

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) \, dt = \int_0^{+\infty} t a e^{-at} \, dt.$$

En combinant les deux précédentes équations, j'obtiens que

$$\int_0^{+\infty} t a e^{-at} \, dt = \frac{1}{a}.$$

Alors, en divisant des deux côtés par a non-nul, j'obtiens que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t e^{-at} \, dt$ converge et vaut

$$\int_0^{+\infty} t e^{-at} \, dt = \frac{1}{a^2}.$$

- (c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \, dt$ converge. Or, sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \, dt &= \int_{-\infty}^0 t \times 0 \, dt + \int_0^{+\infty} t \times f(t) \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t}{2}} - t e^{-t} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t}{2}} \, dt - \int_0^{+\infty} t e^{-t} \, dt \end{aligned}$$

Et comme les deux intégrales impliquées convergent (il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente en $a = 1$ et $a = \frac{1}{2}$), j'en déduis que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \, dt$ converge, donc que la variable aléatoire X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \, dt = \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t}{2}} \, dt - \int_0^{+\infty} t e^{-t} \, dt \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{1^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{1} = 4 - 1 = 3. \end{aligned}$$

L'espérance de X vaut $E(X) = 3$.