5 Matrices inversibles

Dans tout ce chapitre, on ne considérera que des matrices carrées.

I – Matrices inversibles

Définition 5.1 – Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Si une telle matrice B existe, elle est appelée inverse de A et est notée A^{-1}.

Remarque 5.2 –

- La notion de matrice inversible n'a de sens **QUE** pour des matrices carrées.
- Une matrice inversible admet un unique inverse.

Exemple 5.3 –

1. La matrice identité est inversible et I_n^{-1}
2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. La matrice carrée nulle O_n n'est pas inversible car
4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle mais elle n'est pas inversible pour autant.

Théorème 5.4

Si P et Q sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $PQ = I_n$, alors P et Q sont inversibles et on a

$$P^{-1} = Q \quad \text{et} \quad Q^{-1} = P.$$

Exemple 5.5 –

- Considérons les matrices $P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.
- Considérons les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$.

Corollaire 5.6

Si P et Q sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $PQ = \lambda I_n$, avec $\lambda \neq 0$, alors P et Q sont inversibles et on a

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda} Q \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{\lambda} P.$$

Exemple 5.7 – Considérons les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarquons que le cas des matrices diagonales est facile.

Proposition 5.8

Une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux d_i sont tous non-nuls. Dans ce cas,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.9 –

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

Proposition 5.10

Soit A une matrice triangulaire supérieure ou inférieure de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si ses termes diagonaux sont tous non-nuls.

Exemple 5.11 –

- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Proposition 5.12

Soient A, B et C dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A est inversible, alors A est simplifiable à gauche et à droite, c'est-à-dire que

$$AB = AC \implies B = C,$$

$$BA = CA \implies B = C.$$

Terminons avec le cas des matrices carrées de taille 2.

Proposition 5.13

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

□

Exemple 5.14 – Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, préciser leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

II – Calcul effectif de l'inverse d'une matrice

1 – Calcul de l'inverse par la résolution d'un système

Théorème 5.15

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, le système linéaire $AX = Y$ admet une unique solution.

Méthode 5.16 – Montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on résout le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ en fonction de $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ quelconque fixé, puis on discute :

- si le système admet une unique solution $X = BY$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$,
- sinon la matrice n'est pas inversible.

Exemple 5.17 – Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

2 – Calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss

Théorème 5.18

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A transforme la matrice A en une matrice B inversible.
Dès lors, en transformant la matrice A en la matrice identité à l'aide d'opérations sur les lignes et en effectuant simultanément les mêmes opérations sur la matrice identité, on obtient l'inverse de la matrice A.

Méthode 5.19 – Méthode de Gauss-Jordan
En pratique, pour transformer A en I_n, on commence par transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure par la méthode du pivot de Gauss, ce qui permet déjà de savoir si A est inversible ou non. Le cas échéant, on transforme alors la matrice triangulaire obtenue en la matrice identité. C'est la méthode de Gauss-Jordan.

Exemple 5.20 – On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.