Exercices — Chapitre 9

Exercice 1 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre à préciser.
2. Montrer que $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre à préciser.
3. Montrer que $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre à préciser.

Exercice 2 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $2A^3 - 3A^2 + A$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A.
3. Déterminer lesquelles sont effectivement valeurs propres et trouver des vecteurs propres associés.

Exercice 3 – On donne $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $B^2 - 2B + 2I$ puis en déduire que la matrice B n'a aucune valeur propre.
2. En déduire également que B est inversible et donner son inverse en fonction de B et I.

Exercice 4 – On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier l'égalité $M^2 - M - 6I = 0$ et en déduire les valeurs propres possibles de M.
2. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de M et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible.
4. On pose $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier l'égalité $MP = PD$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A(A - I)(A - 2I) = 0_3$ et en déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de A et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
3. En déduire une matrice P inversible telle que $AP = PD$, où D est une matrice diagonale que l'on précisera.

Exercice 6 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $x^3 - 3x^2 + 4$ est annulateur de A et en déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Vérifier que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée.
3. On note P la matrice dont la première colonne est V_1, la deuxième est V_2 et la dernière est V_3. Calculer $P^3 - 3P^2 + 5P - 3I_3$. En déduire que P est inversible et donner une expression de P^{-1} en fonction de I_3, P et P^2.
4. Vérifier l'égalité $AP = PD$, où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 7 – On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (v_n) et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & 2u_n & - & v_n & + & w_n \\ v_{n+1} & = & u_n & & & - & w_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n & - & 2v_n & + & w_n \end{array}\right.$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad X_n = A^n X_0$.
3. Vérifier que le polynôme $P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$ est annulateur de A.
4. Montrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de A^n.
6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de u_n, v_n et w_n.

Exercice 8 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 et $8A - 15I$ puis déterminer un polynôme annulateur de A.
   En déduire les valeurs propres possibles de A.

   (b) Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de A et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
2. (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner son inverse.

   (b) Soit $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $AP = PD$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $\quad A^n = PD^nP^{-1}$
   puis donner l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier n.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & 7u_n & + & 2v_n \\ v_{n+1} & = & -4u_n & + & v_n \end{array}\right.$$

   (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $\quad X_n = A^n X_0$,
   puis donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 9 – Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les trois premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = -2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_n - 11u_{n+1} + 6u_{n+2}.$$

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $\quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $\quad MX_n = X_{n+1}$.
   En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.
2. (a) Calculer $(M-I)(M-2I)(M-3I)$ puis en déduire les valeurs propres possibles de la matrice M.

   (b) Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de M et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.
3. (a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer PQ.
   En déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.

   (b) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $MP = PD$.

   (c) La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\quad M^n = PD^nP^{-1}$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, les coefficients de la première ligne de M^n.
   Donner alors l'expression de u_n en fonction de n.