9 Réduction des matrices carrées

I – Matrice diagonalisable

1 – Définition

Définition 9.1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que la matrice A est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **inversible** et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **diagonale** telle que

$$A = PDP^{-1}.$$

Remarque 9.2 –

- On sait que $A = PDP^{-1} \iff P^{-1}AP = D$.

- *Diagonaliser* une matrice A signifie trouver deux matrices D et P, respectivement diagonale et inversible, telle que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 9.3 – Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, en considérant les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque 9.4 – En pratique, il n'est pas toujours nécessaire de calculer P^{-1} pour montrer qu'une matrice A est diagonalisable, comme le montre la proposition ci-dessous.

Proposition 9.5

Soient A une matrice, D une matrice diagonale et P une matrice inversible.

Si $AP = PD$, alors la matrice A est diagonalisable.

Exemple 9.6 – Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est diagonalisable à l'aide des matrices P et D.

2 – Application au calcul de puissance

Proposition 9.7

Soit A une matrice. On suppose qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D telles que $A = PDP^{-1}$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Démonstration.

□

Remarque 9.8 – Si le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire pour montrer qu'une matrice A est diagonalisable, il est cependant **indispensable** pour obtenir une expression explicite des puissances de A, ce qui est souvent ce que l'on cherche à obtenir.

II – Valeurs propres et vecteurs propres

1 – Définition

Définition 9.9 – Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et λ un réel.

- On dit que λ est une **valeur propre** de la matrice A si et seulement si

$$\text{il existe } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \textbf{ NON NUL} \text{ tel que } AX = \lambda X.$$

- La matrice colonne X est alors appelée **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

Exemple 9.10 – On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M et préciser les valeurs propres associées.

Proposition 9.11

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et λ un réel. Il n'y a que deux possibilités pour l'ensemble des solutions de l'équation $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- Ou bien cet ensemble contient uniquement la matrice colonne nulle, auquel cas λ **n'est pas** valeur propre de A.
- Ou bien cet ensemble contient aussi d'autres matrices non nulles, auquel cas λ est valeur de propre de A et n'importe quelle matrice **non nulle** de cet ensemble est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple 9.12 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. Les réels 2 et 3 sont-ils valeurs propres de A ? Si oui, déterminer un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

2 – Polynôme annulateur de A

Définition 9.13 – Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polynôme. On définit le **polynôme matriciel** $P(A)$ comme étant la matrice carrée

$$P(A) = a_d A^d + a_{d-1}A^{d-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

On dit que le polynôme $P(x)$ est un **polynôme annulateur** de la matrice A lorsque $P(A) = 0_n$.

Exemple 9.14 – Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Si $P(x) = x^2 + 2x$, alors $P(A) =$
2. Si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, alors $P(A) =$
3. Si $P(x) = -3$, alors $P(A) =$

Exemple 9.15 – On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que le polynôme $x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de M.

Proposition 9.16

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice.

Le polynôme $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de A.

Démonstration.

$\square$

Exemple 9.17 – On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Donner un polynôme annulateur de A.

Théorème 9.18

Soient A une matrice carrée et $P(x)$ un polynôme annulateur de A.

Toute valeur propre λ de A est racine du polynôme $P(x)$.

ATTENTION ! Ce résultat nous indique **seulement** que les valeurs propres de A sont **nécessairement** des racines du polynôme $P(x)$. Mais il peut aussi y avoir des racines du polynôme $P(x)$ qui **ne sont pas** des valeurs propres de A.

Exemple 9.19 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 - x$ est un polynôme annulateur de A.

2. En déduire les valeurs propres possibles de A.

3. Déterminer lesquelles sont bien des valeurs propres de A.

Remarque 9.20 – Comme déjà vu dans le **Chapitre 5**, disposer d'un polynôme annulateur permet également, dans certains cas, d'obtenir l'inversibilité et l'inverse d'une matrice.
Par exemple, en se servant du fait que le polynôme $x^3 + x^2 + 1$ soit un polynôme annulateur de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

III – Diagonalisation pratique

Théorème 9.21

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ avec $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des vecteurs propres associés.
Alors la matrice P obtenue en juxtaposant les matrices colonnes $V_1, V_2, \ldots, V_n$ est inversible. Et en notant D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{alors } A = PDP^{-1}.$$

Remarque 9.22 –

- Dans le cas $n = 2$, le théorème précédent se réécrit :
  Si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ayant deux valeurs propres λ_1 et λ_2, avec $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_1 et $V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_2, alors la matrice $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible et en notant D la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,
  $$A = PDP^{-1}.$$
- Dans le cas $n = 3$, le théorème précédent se réécrit :
  Si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ayant trois valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3, avec $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_1, $V_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_2 et $V_3 = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_3, alors la matrice $P = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ est inversible et en notant D la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,
  $$A = PDP^{-1}.$$

Exemple 9.23 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P(x) = x^2 - 2x - 3$ est un polynôme annulateur de A.

2. Calculer les racines α et β de $P(x)$.

3. Montrer que α et β sont des valeurs propres de A et calculer les vecteurs propres associés.

4. Justifier que A est diagonalisable et la diagonaliser.