CONCOURS BLANC 1

Exercice 1 –

1. On a $2x-4=0 \iff 2x=4 \iff x=\frac{4}{2}=2$ donc $\mathcal{S}=\{2\}$.
2. On a $4(x-1)+3(2x-1)=0 \iff 4x-4+6x-3=0 \iff 10x=7 \iff x=\frac{7}{10}$ donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{10}\right\}$.
3. On a $x^2+2x+3=x(x-1) \iff x^2+2x+3=x^2-x \iff 3x+3=0 \iff 3x=-3 \iff x=-1$ donc $\mathcal{S}=\{-1\}$.
4. Calculons le discriminant $\Delta=49-40=9$. Il y a donc deux racines
$$x_1=\frac{7-3}{2}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{7+3}{2}=5,$$
donc $\mathcal{S}=\{2,5\}$.
5. On a $2x(x+1)=-1 \iff 2x^2+2x+1=0$. On calcule le discriminant $\Delta=4-8=-4$.
Il n'y a donc pas de solution. Donc $\mathcal{S}=\emptyset$.
6. On a $x(x+1)-(4x-1)(x+3)=x^2-2x+1 \iff x^2+x-4x^2-12x+x+3=x^2-2x+1 \iff -4x^2-8x+2=0$. On calcule le discriminant $\Delta=64+32=96$. Il y a donc deux racines
$$x_1=\frac{8-\sqrt{96}}{-8}=\frac{8-4\sqrt{6}}{-8}=\frac{\sqrt{6}}{2}-1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{8+\sqrt{96}}{-8}=\frac{8+4\sqrt{6}}{-8}=-\frac{\sqrt{6}}{2}-1.$$
7. On a $-2x+3>0 \iff -2x>-3 \iff x<\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$ donc $\mathcal{S}=\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$.
8. Calculons le discriminant $\Delta=25-24=1$. Il y a donc deux racines
$$x_1=\frac{-5-1}{-2}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-5+1}{-2}=2.$$
On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x^2+5x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathcal{S}=]2,3[$.
9. On a $2x(x-2)\leqslant x^2-4 \iff 2x^2-4x\leqslant x^2-4 \iff x^2-4x+4\leqslant 0$. On calcule le discriminant $\Delta=16-16=0$. Il y a donc une unique racine
$$x_0=2.$$
On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-2x+4		$+$	0	$+$	

Et donc $\mathcal{S}=\{2\}$.

10. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x-1}=0 &\iff \frac{x-1}{(x-1)(x+3)}-\frac{2(x+3)}{(x-1)(x+3)}=0\\ &\iff \frac{x-1-2x-6}{(x-1)(x+3)}=0\\ &\iff \frac{-x-7}{(x-1)(x+3)}=0.\end{aligned}$$

Commençons par chercher les valeurs interdites.
On a $(x-1)(x+3)=0 \iff x-1=0$ ou $x+3=0 \iff x=1$ ou $x=-3$.
Par ailleurs, $-x-7=0 \iff x=-7$. Or -7 n'est pas valeur interdite, donc $\mathcal{S}=\{-7\}$.

11. On a

$$\begin{aligned}\frac{x}{2x-4}+\frac{3}{-2x+1}\leqslant\frac{1}{2} &\iff \frac{2x(-2x+1)}{(2x-4)(-2x+1)}+\frac{6(2x-4)}{(2x-4)(-2x+1)}-\frac{(2x-4)(-2x+1)}{(2x-4)(-2x+1)}\leqslant 0\\ &\iff \frac{-4x^2+2x+12x-24+4x^2-2x-8x+4}{(2x-4)(-2x+1)}\leqslant 0\\ &\iff \frac{4x-20}{(2x-4)(-2x+1)}\leqslant 0.\end{aligned}$$

On a $4x-20=0 \iff x=5, \qquad 2x-4=0 \iff x=2 \quad$ et $\quad -2x+1=0 \iff x=\frac{1}{2}$.
On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		5		$+\infty$
$4x-20$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\frac{4x-20}{(2x-4)(-2x+1)}$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Et donc $\mathcal{S}=\left]\frac{1}{2},2\right[\cup[5,+\infty[$.

12. On a $(-1)^3-7\times(-1)-6=-1+7-6=0$ donc -1 est racine. On effectue alors la division euclidienne de x^3-7x-6 par $x+1$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} x^3 & & & - & 7x & - & 6 & x+1 \\ \cline{8-8} x^3 & + & x^2 & & & & & x^2-x-6 \\ \hline & - & x^2 & - & 7x & - & 6 & \\ & - & x^2 & - & x & & & \\ \cline{2-7} & & & & -6x & - & 6 & \\ & & & & -6x & - & 6 & \\ \cline{5-7} & & & & & & 0 & \end{array}$$

Calculons désormais le discriminant de $x^2 - x - 6$. On a $\Delta = 1 + 24 = 25$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Au final on obtient donc $\mathcal{S} = \{-2, -1, 3\}$.

13. On a $-2^3 + 2^2 + 22 \times 2 - 40 = -8 + 4 + 44 - 40 = 0$ donc 2 est racine. On effectue alors la division euclidienne de $-x^2 + x^2 + 22x - 40$ par $x - 2$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} -x^3 & + & x^2 & + & 22x & - & 40 & x-2 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & 2x^2 & & & & & -x^2-x+20 \\ \cline{1-7} & - & x^2 & + & 22x & - & 40 & \\ & - & x^2 & + & 2x & & & \\ \cline{3-7} & & & & 20x & - & 40 & \\ & & & & 20x & - & 40 & \\ \cline{5-7} & & & & & & 0 & \end{array}$$

Calculons désormais le discriminant de $-x^2 - x + 20$. On a $\Delta = 1 + 80 = 81$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{1-9}{-2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+9}{-2} = -5.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-5		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2-x+20$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$-x^3+x^2+22x-40$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Et donc $\mathcal{S} =]-\infty, -5[\cup]2, 4[$.

Exercice 2 –

1. (a) On a $P(-1) = -3 - 7 + 7 + 3 = 0$. Donc il existe Q tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$. On détermine ce polynôme Q en effectuant la division euclidienne de P par $x + 1$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 3x^3 & - & 7x^2 & - & 7x & + & 3 & x+1 \\ \cline{8-8} 3x^3 & + & 3x^2 & & & & & 3x^2-10x+3 \\ \cline{1-7} & - & 10x^2 & - & 7x & + & 3 & \\ & - & 10x^2 & - & 10x & & & \\ \cline{3-7} & & & & 3x & + & 3 & \\ & & & & 3x & + & 3 & \\ \cline{5-7} & & & & & & 0 & \end{array}$$

Donc $P(x) = (x+1)(3x^2 - 10x + 3)$.

(b) Calculons le discriminant de $3x^2 - 10x + 3$. On a $\Delta = 100 - 36 = 64$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{3}, 3\right\}$.

2. (a) Déterminons les valeurs interdites. Ce sont les solutions de l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 144 - 144 = 0$. Il y a donc une unique racine

$$x_0 = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

(b) On a le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x^2-10x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2-12x+12$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Et donc $\mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty[$.

Exercice 3 –

1. Les fonctions f et g sont des polynômes donc $D_f = \mathbf{R}$ et $D_g = \mathbf{R}$.
Par ailleurs,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty.$$

2. On a $f(2) = 8 + 24 - 10 - 5 = 17$ et $g(2) = 8 + 4 + 5 = 17$.
Donc le point de coordonnées $(2, 17)$ est bien un point de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.
3. On a $f(2) - g(2) = 17 - 17 = 0$. Donc 2 est racine du polynôme $f(x) - g(x)$. Donc il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $f(x) - g(x) = (x-2)Q(x)$.
4. Déterminons ce polynôme Q par division euclidienne. On a $f(x) - g(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ et

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & + & 4x^2 & - & 7x & - & 10 & x-2 \\ \cline{8-8}
x^3 & - & 2x^2 & & & & & x^2+6x+5 \\ \cline{1-7}
 & + & 6x^2 & - & 7x & - & 10 & \\
 & + & 6x^2 & - & 12x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & 5x & - & 10 & \\
 & & & & 5x & - & 10 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Donc $f(x) - g(x) = (x-2)(x^2 + 6x + 5)$.

Calculons le discriminant de x^2+6x+5. On a $\Delta = 36-20 = 16$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-6-4}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6+4}{2} = -1.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+6x+5		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

- $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x) \leqslant g(x)$, *i.e.* sur $]-\infty,-5] \cup [-1,2]$.
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x) \geqslant g(x)$, *i.e.* sur $[-5,-1] \cup [2,+\infty[$.

Exercice 4 –

1. (a) Par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f est donné par

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

Le tableau de signe de la fonction f est donné par

x	$-\infty$		-2		3		4		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

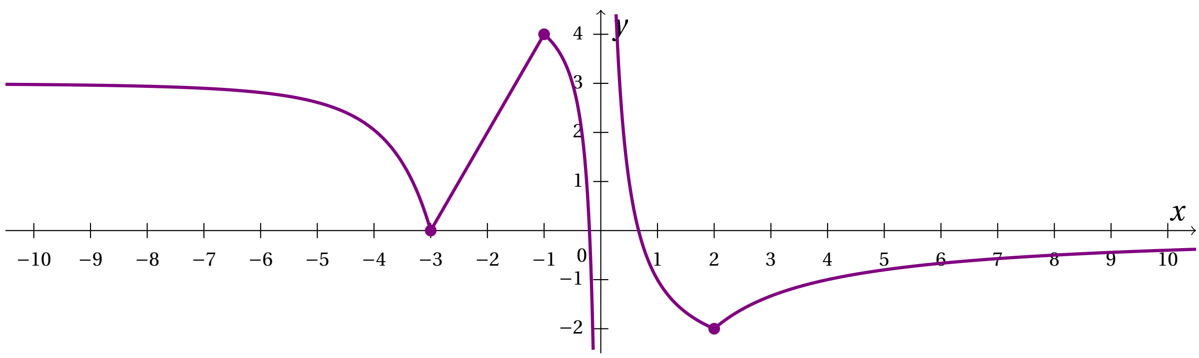
(b) (i) FAUX. L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions $x \approx 3$ et $x \approx 7$.

(ii) FAUX. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$ et deux asymptotes verticales en -2 et en 4.

(iii) VRAI. Le maximum de f sur $[-2,2]$ est atteint en 2 et vaut environ -1.

(iv) FAUX. f est strictement croissante sur $]-2,4[$ et sur $]4,+\infty[$ (mais f n'est pas définie en 4).

2.



3. (i) FAUX. L'équation $g(x)=0$ admet une solution pour $x=-3$ et une autre solution dans l'intervalle $]-1,0[$.
   (ii) VRAI. On a bien $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.
   (iii) VRAI. g est croissante sur $[2,+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
   (iv) FAUX. f est décroissante sur $]-\infty,-3]$.

Exercice 5 –

1. On a

$$u_1 = 1.01\times 100\,000 - 2000 = 99\,000 \quad \text{et} \quad u_2 = 1.01\times 99\,000 - 2000 = 97\,990.$$

2. La somme qu'il reste à rembourser à la fin du n-ième mois d'emprunt est donnée par u_n. Le taux mensuel étant de 1%, ce montant augmente de 1%. Autrement dit, il est multiplié par 1.01. Après remboursement de 2000 euros, le montant u_{n+1} restant à rembourser est donc donné par

$$u_{n+1} = 1.01u_n - 2000.$$

3. Soit $n\in\mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 200\,000 = 1.01u_n - 2000 - 200\,000 = 1.01\,(v_n + 200\,000) - 2000 - 200\,000 \\ &= 1.01\,v_n + 202\,000 - 2000 - 200\,000 = 1.01\,v_n. \end{aligned}$$

   Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison 1.01. Son premier terme est donné par

$$v_0 = u_0 - 200\,000 = 100\,000 - 200\,000 = -100\,000.$$

4. La suite (v_n) étant géométrique de premier terme $v_0 = -100\,000$ et de raison $q = 1.01$, on a pour tout entier n,

$$v_n = v_0 \times q^n = -100\,000 \times (1.01)^n.$$

   Alors pour tout entier n,

$$u_n = v_n + 200\,000 = 200\,000 - 100\,000 \times (1.01)^n.$$

5. On a

$$u_{69} = 200\,000 - 100\,000\times(1.01)^{69} \approx 200\,000 - 100\,000 \times 1.99 = 1000.$$

6. Il faudra donc 70 mois à cette personne pour rembourser son crédit, avec un dernier remboursement d'un montant d'environ 1000 euros.

Exercice 6 –

1. D'après l'énoncé, on a

$$P(S) = 0.3, \qquad P(\overline{S}) = 1-0.3 = 0.7, \qquad P_S(E) = 1 - 0.223 = 0.777,$$

$$P_S\left(\overline{E}\right) = 0.223, \qquad P_{\overline{S}}(E) = 0.827 \quad \text{et} \quad P_{\overline{S}}\left(\overline{E}\right) = 1 - 0.827 = 0.173.$$

2. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(S\cap\overline{E}) = P(S)\times P_S(\overline{E}) = 0.3\times 0.223 = 0.0669.$$

   Autrement dit, la probabilité que la personne interrogée ait plus de 50 ans et qu'elle travaille à temps partiel est de 0.0669, *i.e.* 6.69%.

3. On cherche $P\left(\overline{E}\right)$. D'après la formule des probabilités totales, comme S et $\overline{S}$ forment un système complet d'évènements, on a

$$\begin{aligned} P\left(\overline{E}\right) &= P\left(S\cap\overline{E}\right)+P\left(\overline{S}\cap\overline{E}\right)=P(S)\times P_S\left(\overline{E}\right)+P\left(\overline{S}\right)\times P_{\overline{S}}\left(\overline{E}\right)\\ &= 0.3\times 0.223+0.7\times 0.173 = 0.0669+0.1211=0.188. \end{aligned}$$

4. On cherche $P_{\overline{E}}(S)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a

$$P_{\overline{E}}(S)=\frac{P\left(S\cap\overline{E}\right)}{P\left(\overline{E}\right)}=\frac{0.0669}{0.188}=\frac{669}{1880}.$$

Exercice 7 –

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$u_n>0$".

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0=2>0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque de $\mathbf{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. On a

$$u_{n+1}=2u_n+4>2\times 0+4=4>0,$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_0$ est vraie, alors, par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad u_n>0.$$

Exercice 8 –

1. Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$\sum_{k=1}^{n}2^k=2(2^n-1)$" .

   Initialisation : Pour $n=1$,

$$\sum_{k=1}^{1}2^k=2^1=2\quad\text{et}\quad 2\times(2^1-1)=2\times 1=2,$$

   donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbf{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1}2^k=\sum_{k=1}^{n}2^k+2^{n+1}=2(2^n-1)+2^{n+1}=2^{n+1}-2+2^{n+1}=2^{n+2}-2=2(2^{n+1}-1),$$

   donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_1$ est vraie, alors, par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n}2^k=2(2^n-1).$$

2. On sait que pour tout $q \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q \times \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$
Donc pour $q = 2$, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2\left(2^n - 1\right).$$

Exercice 9 –

1. On a
$$\lim_{x \to -2} 2x^3 - x^2 + 5x + 6 = 2 \times (-8) - 4 + 5 \times (-2) + 6 = -16 - 4 - 10 + 6 = -24.$$
2. On a
$$\lim_{x \to -1} \frac{x-2}{2x-3} = \frac{-1-2}{-2-3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$
3. On décompose :
$$\lim_{x \to 2^-} 2x - 1 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 2^-} -2x + 4 = 0^+,$$
donc $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x-1}{-2x+4} = +\infty$.
4. On décompose :
$$\lim_{x \to 0^+} 3x - 1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x(x+1) = 0^+,$$
donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x-1}{x(x+1)} = -\infty$.
5. On décompose :
$$\lim_{x \to +\infty} 2 = 2, \qquad \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2x^2} = 0,$$
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2x^2} = 2$.
6. On a
$$\lim_{x \to +\infty} -x^3 + 5x^2 + 4x - 7 = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty.$$
7. On a
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{-4x^3 + 2x - 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{-4x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{-4x} = 0^-.$$
8. On décompose :
$$\lim_{x \to -\infty} -2x^2 + 1 = \lim_{x \to -\infty} -2x^2 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x+5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2 = 2,$$
donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2 + 1) \times \dfrac{2x+1}{x+5} = -\infty$.
9. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} + 16 = 16$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{3}{x} + 16} = \sqrt{16} = 4$.
10. On a $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-3}{-x+2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{\dfrac{-3}{-x+2}} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{\dfrac{-3}{-x+2}} - 2 = +\infty$ et donc
$$\lim_{x \to 2^+} \left(\sqrt{\frac{-3}{-x+2}} - 2\right)^3 = +\infty.$$

Exercice 10 –

1. (a) La fonction f étant une fraction rationnelle, on a $D_f = \mathbf{R} \setminus \{V.I.\}$.
Par ailleurs, $2x-4=0 \iff 2x=4 \iff x=2$. Donc $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

(b) On a
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{2x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty.$$
Et de même,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{2x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$
Par ailleurs,
$$\lim_{x\to2^-} x^2-2x+1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to2^-} 2x-4 = 0^-,$$
donc $\displaystyle\lim_{x\to2^-} \frac{x^2-2x+1}{2x-4} = -\infty$.
Et de même,
$$\lim_{x\to2^+} x^2-2x+1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to2^+} 2x-4 = 0^+,$$
donc $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{x^2-2x+1}{2x-4} = +\infty$.
Graphiquement, cela nous donne une asymptote verticale d'équation $x=2$ et possiblement deux asymptotes obliques en $-\infty$ et $+\infty$.

(c) On remarque que
$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x-4} = \frac{x(x-2)+1}{2x-4} = x \times \frac{x-2}{2(x-2)} + \frac{1}{2x-4} = x \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-4},$$
ce qui nous amène à $\quad a = \dfrac{1}{2}, \qquad b=0 \quad \text{et} \quad c=1.$
Comme $f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2x-4}$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x-4} = 0$, on en déduit que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est bien asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2. (a) Posons $u(x) = x^2-2x+1$ et $v(x) = 2x-4$, de sorte que $f = \dfrac{u}{v}$.
On a $u'(x) = 2x-2$ et $v'(x) = 2$. Donc
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\big(v(x)\big)^2} = \frac{(2x-2)(2x-4) - 2(x^2-2x+1)}{(2x-4)^2} \\ &= \frac{4x^2-8x-4x+8-2x^2+4x-2}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2-8x+6}{(2x-4)^2}. \end{aligned}$$

(b) Pour étudier les variations de f, il faut commencer par étudier le signe de f'. Pour cela, calculons le discriminant de $2x^2-8x+6$. On a $\Delta = 64-48 = 16$. Il y a donc deux racines
$$x_1 = \frac{8-4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+4}{4} = 3.$$
Par ailleurs, on a vu que $2x-4=0 \iff x=2$. On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.
On a $f(1) = \dfrac{1^2-2\times1+1}{2\times1-4} = \dfrac{0}{-2} = 0 \quad$ et $\quad f(3) = \dfrac{3^2-2\times3+1}{2\times3-4} = \dfrac{4}{2} = 2.$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$2x^2-8x+6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-4)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

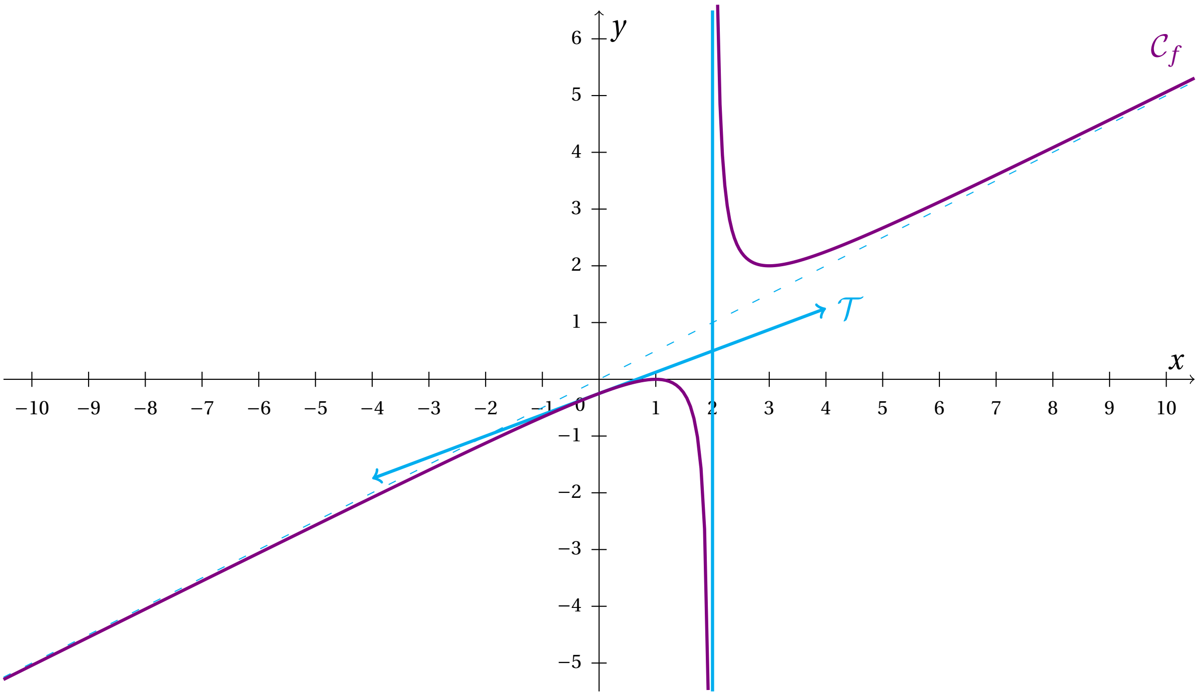
(c) L'équation de la tangente est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Ici $a = 0$. On a

$$f(0) = \frac{0^2 - 2\times 0 + 1}{2\times 0 - 4} = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{2\times 0^2 - 8\times 0 + 6}{(2\times 0-4)^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

On en déduit l'équation de la tangente.

$$y = \frac{3}{8}(x-0) - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}.$$

3. On a l'allure de courbe suivante.



4. (a) La convexité est donnée par le signe de $f''(x)$. Ici, on remarque que le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $(x-2)^3$, donc le même que celui de $x-2$. Ainsi,
   - f est convexe lorsque $f''(x) \geqslant 0 \iff x-2 \geqslant 0$, *i.e.* sur $]2, +\infty[$, et
   - f est concave lorsque $f''(x) \leqslant 0 \iff x-2 \leqslant 0$, *i.e.* sur $]-\infty, 2[$.

   Comme la dérivée seconde ne s'annule pas, la courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion.

   (b) Sur $]2, +\infty[$, comme f est convexe, les tangentes à la courbe sont situées en-dessous de la courbe alors que sur $]-\infty, 2[$, où f est concave, les tangentes à la courbe sont situées au-dessus de la courbe.

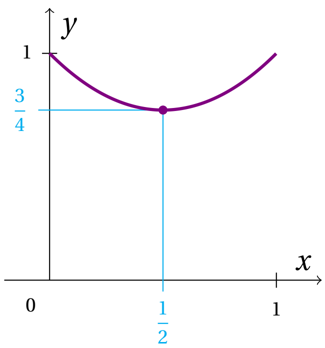
Exercice 11 – Partie A

1. On a $f'(x) = 2x - 1$. Or $2x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{1}{2}$.
   On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1

   En effet,
$$f(0) = 0^2 + 1 - 0 = 1, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

2. D'après le tableau de variation, la fonction admet un minimum local pour $x = \frac{1}{2}$ de valeur $\frac{3}{4}$.
   Elle n'admet pas de maximum local.
3. D'après le tableau de variation de la question 1, pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$\frac{3}{4} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$
   En particulier, on a bien que pour tout $x \in [0,1]$, $\quad f(x) \in [0,1]$.
4. La fonction f est une fonction polynomiale de degré 2, sa courbe suit donc une parabole.



Partie B

1. On a
$$u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{7}{9} \quad \text{et} \quad u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81} + 1 - \frac{7}{9} = \frac{67}{81}.$$

2. Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$u_n \in [0,1]$".

   Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{3} \in [0,1]$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbf{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in [0,1]$.
   D'après la Partie A, on sait que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \in [0,1]$. Ainsi $f(u_n) \in [0,1]$, *i.e.* $u_{n+1} \in [0,1]$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_0$ est vraie, alors, par principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbf{N}$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in [0,1].$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 - u_n - u_n = u_n^2 + 1 - 2u_n = (u_n - 1)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante (d'après la question 3) et majorée par 1 (d'après la question 2), donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.
Notons ℓ sa limite. Puisque $u_{n+1} = u_n^2 + 1 - u_n$, on a par passage à la limite

$$\ell = \ell^2 + 1 - \ell \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell - 1)^2 = 0.$$

Et donc $\ell = 1$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercice 12 –

1. D'après l'énoncé, on a

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0.2.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'évènements, on a

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\
&= 0.7P(A_n) + 0.2P(\overline{A_n}) = 0.7P(A_n) + 0.2\big(1 - P(A_n)\big) \\
&= 0.7P(A_n) + 0.2 - 0.2P(A_n) = 0.5P(A_n) + 0.2.
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a bien $p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.

3. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.4 = 0.5p_n + 0.2 - 0.4 = 0.5(u_n + 0.4) + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n + 0.2 + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0.5. Son premier terme est donné par

$$u_1 = p_1 - 0.4 = 0.2 - 0.4 = -0.2.$$

(b) Comme (u_n) est une suite géométrique, on a pour tout entier n,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

Alors pour tout entier n, on a

$$p_n = u_n + 0.4 = 0.4 - 0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

4. La suite (u_n) est une suite géométrique, de premier terme $u_1 = -0.2$ négatif et de raison $q = 0.5 \in]0,1[$. Donc la suite (u_n) est une suite croissante à termes négatifs. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_n = u_n + 0.4$, la suite (p_n) partage la même variation que la suite (u_n), elle est donc croissante.

5. Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, la limite de la suite géométrique (u_n) est 0. Alors, comme $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad p_n = u_n + 0.4$,

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + 0.4 = 0 + 0.4 = 0.4.$$