DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 –

1. Je remplace x par -1 dans l'expression de $P(x)$:

$$P(-1) = (-1)^3 - 21 \times (-1) - 20 = -1 + 21 - 20 = 0.$$

2. Comme $P(-1) = 0$, alors -1 est une racine de $P(x)$ donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$. Pour déterminer $Q(x)$, j'effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & x^3 & & & - & 21x & - \; 20 & x+1 \\ \cline{8-8}
- & (x^3 & + & x^2) & & & & x^2 - x - 20 \\ \cline{2-7}
 & & - & x^2 & - & 21x & - \; 20 & \\
 & - & (- & x^2 & - & x) & & \\ \cline{3-7}
 & & & & - & 20x & - \; 20 & \\
 & & & - & (- & 20x & - \; 20) & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi j'ai montré que $Q(x) = x^2 - x - 20$ et donc que $P(x) = (x+1)\big(x^2 - x - 20\big)$.

3. Afin de connaître le signe de $P(x)$, je cherche celui de $Q(x)$ et pour cela, cherche ses racines.
Je calcule le discriminant de $Q(x)$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 1 + 80 = 81 = 9^2 > 0$.
Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) - 9}{2 \times 1} = \frac{1-9}{2} - 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+9}{2} = 5.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant pour $P(x)$:

x	$-\infty$		-4		-1		5		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - x - 20$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc les solutions de $P(x) \geqslant 0$ se trouvent dans $\mathcal{S} = \big[-4, -1\big] \cup \big[5, +\infty\big[$.

4. La fonction f est de la forme $f(x) = \sqrt{P(x)}$ donc le domaine de définition de f est donné par l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.
D'après la question précédente, f est donc définie sur

$$D_f = \big[-4, -1\big] \cup \big[5, +\infty\big[.$$

5. La fonction g est de la forme $g = h + f$ avec $h(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 14}$ et f la fonction étudiée à la question précédente. Donc la fonction g est définie là où les deux racines carrées sont définies, *i.e.* $D_g = D_h \cap D_f$.

J'ai déjà déterminé D_f à la question précédente, il me reste à déterminer D_h.
Pour cela, il me faut résoudre l'inéquation $x^2 - 5x - 14 \geqslant 0$.
Je commence par calculer le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 25 + 56 = 81 = 9^2 > 0$.
Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-5) - 9}{2 \times 1} = \frac{5 - 9}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + 9}{2} = 7.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$x^2 - 5x - 14$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc h est définie sur $D_h = \left]-\infty, -2\right] \cup \left[7, +\infty\right[$.
Finalement la fonction g est définie sur

$$D_g = D_h \cap D_f = \left[-4, -2\right] \cup \left[7, +\infty\right[.$$

Exercice 2 –

1. Le nombre d'arbres en milliers d'unités au cours de l'année $2020 + n$ est donnée par u_n. Ce nombre diminue de 5% chaque année, autrement dit, il est multiplié par $1 - 0.05 = 0.95$. Par ailleurs, 3000 nouveaux arbres sont plantés chaque année.
   Tout ceci m'amène donc à l'expression suivante :

$$u_{n+1} = 0.95 u_n + 3.$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. J'exprime v_{n+1} en fonction de v_n afin de montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 60 - u_{n+1} = 60 - \big(0.95 u_n + 3\big) = 60 - 0.95 u_n - 3 = 57 - 0.95 u_n \\ &= 57 - 0.95 \times \big(60 - v_n\big) = 57 - 57 + 0.95 v_n = 0.95 v_n \end{aligned}$$

   J'ai bien montré que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.95.

   b) Je calcule le premier terme de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10.$$

   c) Puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, je connais son expression explicite :

$$v_n = v_0 \times q^n = 10 \times 0.95^n.$$

   d) En me servant de la relation entre u_n et v_n et de l'expression explicite de v_n, alors j'en déduis que pour tout entier n,

$$u_n = 60 - v_n = 60 - 10 \times 0.95^n.$$

3. Le nombre d'arbres de la forêt (en milliers) en 2030 correspond à u_{10}. Alors

$$u_{10} = 60 - 10 \times 0.95^{10} \approx 60 - 10 \times 0.60 = 60 - 6 = 54.$$

   Ainsi il y aura donc environ 54000 arbres dans cette forêt en 2030.

Exercice 3 – Afin de faciliter la résolution de l'exercice, j'introduis les événements suivants :

- R_1 : "la première boule tirée est rouge",
- V_1 : "la première boule tirée est verte",
- B_1 : "la première boule tirée est bleue",
- R_2 : "la deuxième boule tirée est rouge",
- V_2 : "la deuxième boule tirée est verte",
- B_2 : "la deuxième boule tirée est bleue".

1. Je cherche ici $P(V_1 \cap V_2)$. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

La probabilité que les deux boules tirées soient vertes est $\frac{1}{12}$.

2. Je cherche ici $P(V_2)$. Les événements R_1, V_1 et B_1 forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(V_2) &= P(R_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2) = P(R_1)P_{R_1}(V_2) + P(V_1)P_{V_1}(V_2) + P(B_1)P_{B_1}(V_2) \\ &= \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La probabilité que la deuxième boule tirée soit verte est $\frac{1}{3}$.

3. Il me faut cette fois étudier les probabilités de R_1, V_1 et B_1, sachant V_2.
D'après la définition des probabilités conditionnelles, $P_{V_2}(V_1) = \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_2)}$.
Or d'après la question **1.**, $P(V_1 \cap V_2) = \frac{1}{12}$ et d'après la question **2.**, $P(V_2) = \frac{1}{3}$.
Alors

$$P_{V_2}(V_1) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{4}.$$

En raisonnant de même pour les boules rouges et bleues, j'obtiens

$$P_{V_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{\frac{2}{9} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{4}$$

et

$$P_{V_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{\frac{4}{9} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{2}.$$

Il y a donc plus de chances pour que la première boule tirée ait été bleue.

Exercice 4 –

1. À la lecture de l'énoncé, je remarque que

$$P(S) = 0.6, \qquad P(\overline{S}) = 1 - 0.6 = 0.4, \qquad P_S(A) = 0.2, \qquad P_S(B) = 0.45,$$

$$P_S(C) = 1 - 0.2 - 0.45 = 0.35, \qquad P_{\overline{S}}(B) = 0.55 \quad \text{et} \quad P(A) = 0.18.$$

2. Je cherche ici à calculer $P(B)$. D'après la formule des probabilités totales, puisque $\{S, \overline{S}\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(B) = P(S \cap B) + P(\overline{S} \cap B) = P(S) \times P_S(B) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(B)$$
$$= 0.6 \times 0.45 + 0.4 \times 0.55 = 0.27 + 0.22 = 0.49.$$

   Le gestionnaire peut donc effectivement affirmer que près de la moitié des résidents choisissent la formule *Simple*.

3. a) D'après la formule des probabilités totales, puisque $\{S, \overline{S}\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$0.18 = P(A) = P(S \cap A) + P(\overline{S} \cap A) = P(S) \times P_S(A) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(A)$$
$$= 0.6 \times 0.2 + 0.4 \times x = 0.12 + 0.4x.$$

   Ainsi j'ai bien montré que

$$0.18 = 0.12 + 0.4x.$$

   b) Pour trouver la valeur de $P_{\overline{S}}(A)$, il me suffit de résoudre l'équation obtenue à la question précédente :

$$0.18 = 0.12 + 0.4x \iff 0.4x = 0.18 - 0.12 = 0.06 \iff x = \frac{0.06}{0.4} = \frac{6}{40} = 0.15.$$

   Donc $P_{\overline{S}}(A) = 0.15$.

4. Je cherche ici à calculer $P_A(\overline{S})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_A(\overline{S}) = \frac{P(A \cap \overline{S})}{P(A)} = \frac{P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(A)}{P(A)} = \frac{0.4 \times 0.15}{0.18} = \frac{0.06}{0.18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \approx 0.33.$$

   La probabilité qu'un résident ait loué un deux-pièces sachant qu'il n'a souscrit aucune formule d'entretien est $\frac{1}{3}$.