INTERRO DE COURS 6

Exercice 1 –

1. Calculer la somme suivante.
$$S=\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{2^k+1}+\sum_{k=1}^{3}\frac{k^2}{2}.$$

Solution : On a
$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{2^k+1}+\sum_{k=1}^{3}\frac{k^2}{2}\\&=\frac{1}{2^0+1}+\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2}+\frac{3^2}{2}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{4}{2}+\frac{9}{2}\\&=\frac{15}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\\&=\frac{45}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\\&=\frac{47}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\\&=\frac{235}{30}+\frac{6}{30}+\frac{1}{9}\\&=\frac{241}{30}+\frac{1}{9}\\&=\frac{723}{90}+\frac{10}{90}\\&=\frac{733}{90}.\end{aligned}$$

2. Traduire à l'aide du symbole Σ la somme suivante (on ne demande pas de calculer cette somme).
$$T=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{102}{103}+\frac{103}{104}.$$

Solution : On a
$$T=\sum_{k=1}^{103}\frac{k}{k+1}.$$

Exercice 2 – Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger. En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est de 15000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre de clients abonnés au site évolue selon la règle suivante : chaque mois, 10% des clients se désabonnent et 2500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture. On a ainsi $v_0 = 15000$.

1. Calculer v_1 et v_2.

Solution : On a $v_1 = 0,9\times 15000+2500 = 16000$ et $v_2 = 0,9\times 16000+2500 = 16900$.

2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500.$$

Solution : Le nombre d'abonnés diminuant de 10% chaque mois, pour obtenir le nombre d'abonnés au mois $n+1$, il faut multiplier par $0,9$ le nombre d'abonnés au mois n. Cependant, on a également 2500 nouveau abonnés chaque mois. Il faut donc ajouter 2500 au nombre précédent. Ainsi, on a bien

$$v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500.$$

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par

$$w_n = v_n - 25000.$$

(a) Justifier que la suite (w_n) est géométrique et préciser son premier terme.

Solution : On a

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 25000 \\ &= 0,9 \times v_n + 2500 - 25000 \\ &= 0,9 \times (w_n + 25000) + 2500 - 25000 \\ &= 0,9 w_n + 22500 + 2500 - 25000 \\ &= 0,9 w_n \end{aligned}$$

Donc, (w_n) est géométrique.
Par ailleurs, son premier terme est $w_0 = v_0 - 25000 = 15000 - 25000 = -10000$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$v_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n.$$

Solution : La suite (w_n) étant géométrique, on a, pour tout n,

$$w_n = w_0 \times q^n = -10000 \times 0,9^n.$$

Par ailleurs, $v_n = w_n + 25000$, donc

$$v_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n.$$

(c) Calculer le nombre d'abonnés au bout d'un an.
Indication numérique : $0,9^{12} \simeq 0,2824$.

Solution : Une année correspond à 12 mois. Il nous faut donc calculer v_{12}. La formule de la question précédente nous donne

$$v_{12} = 25000 - 10000 \times 0,9^{12} \simeq 25000 - 10000 \times 0,2824 = 25000 - 2824 = 22176.$$