

ECRICOME 2022

Exercice 1 –

Partie A – Calcul matriciel et suites

1. a) Je calcule le produit $P \times Q$:

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1-1 & 1-1 \\ 1-2+1 & 1+1+1 & 1+1-2 \\ 1-1 & 1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I.$$

- b) Comme $P \times Q = 3I$, alors en particulier $P \times \left(\frac{1}{3}Q\right) = I$.

Donc la matrice P est inversible et son inverse est donnée par $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule le produit MX_n :

$$MX_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + 2c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{4} + \frac{c_n}{4} \\ \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{4} \\ \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{4} + \frac{c_n}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Grâce aux formules de récurrences des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, je retrouve bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

- b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

  nonc   : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $X_n = M^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 X_0 = I \times X_0 = X_0.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi. Alors d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = M \times X_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_0.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0.$$

3. a) Je calcule chaque matrice puis le produit :

$$4M - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 4M - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

donc

$$(4M - I)(4M - 4I) = \begin{pmatrix} -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \\ -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \\ -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que la matrice $(4M - I)(4M - 4I)$ est la matrice nulle.

- b) Comme $(4M - I)(4M - 4I)$ est la matrice nulle, alors $(4X - 1)(4X - 4)$ est un polynôme annulateur de la matrice M . Ainsi les valeurs propres possibles pour M sont parmi les racines de ce polynôme. Je cherche donc les racines :

$$\begin{aligned} (4X - 1)(4X - 4) = 0 &\iff 4X - 1 = 0 \text{ ou } 4X - 4 = 0 \iff 4X = 1 \text{ ou } 4X = 4 \\ &\iff X = \frac{1}{4} \text{ ou } X = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi les valeurs propres possibles pour la matrice M sont $\frac{1}{4}$ et 1.

4. a) Je cherche la matrice D telle que $M = PDP^{-1}$. Comme P est inversible, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P , j'obtiens que

$$P^{-1} \times M \times P = P^{-1} \times PDP^{-1} \times P = I \times D \times I = D, \quad \text{i.e.} \quad D = P^{-1} \times M \times P.$$

Ainsi je calcule les produits :

$$MP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2+1+1 & 2-1 & 1-1 \\ 1+2+1 & 1-2 & 2-1 \\ 1+1+2 & 1-1 & 1-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} P^{-1} \times MP &= \frac{1}{3} Q \times MP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4+4+4 & 1-1 & 1-1 \\ 8-4-4 & 2+1 & -1+1 \\ 4+4-8 & 1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors la matrice D est bien diagonale et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

- b) Puisque $M = PDP^{-1}$, alors par récurrence, j'obtiens que $M^n = PD^nP^{-1}$.

- c) Comme la matrice D est diagonale, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Puis je calcule les produits :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

et

$$PD^n \times P^{-1} = PD^n \times \frac{1}{3}Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré que la matrice M^n est donnée par

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2 \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2 \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

d) D'après la question **2.b)**, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = X_n = M^n X_0 = M^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$a_n = \frac{1}{3} \times \left(1 + 2 \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3} \times \left(1 + 2 \times \frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{2}{4^n}\right),$$

$$b_n = \frac{1}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

e) Comme $4 > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$ et par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{4^n} = 0$.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}(1+0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

5. Voici le script complété.

```
n=0
a=1; b=0
while a>0.0334 and b<0.333
    n=n+1
    a=1/3*(1+(2/4^n))
    b=1/3*(1-(1/4^n))
end
disp(n)
```

Partie B – Application à un jeu de hasard

6. Selon l'énoncé, au début du jeu, le pion est sur la case 0. Donc directement,

$$P(A_0) = 1, \quad P(B_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(C_0) = 0,$$

ce qui corrobore bien le fait que A_0 est l'  v  nement certain et que B_0 et C_0 sont des   v  nements impossibles, comme annoncé en fin d'énoncé.

Puis le joueur avance son pion de 0, 1, 2 ou 3 cases en fonction du chiffre tiré de manière équiprobable. Je remarque que s'il tire 0 ou 3, le pion ne bouge pas ou avance de trois cases, ce qui le ramène à la même case.

Donc à l'issue du premier coup, le joueur sera encore sur la case 0 avec probabilité $\frac{2}{4}$, sur la case 1 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et sur la case 2 avec probabilité $\frac{1}{4}$. Ainsi j'ai montré que

$$P(A_1) = P(\{0, 3\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B_1) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(C_1) = P(\{2\}) = \frac{1}{4}.$$

7. a) Pour les mêmes raisons qu'au premier coup, si à l'issue du n -ième coup, le pion est sur la case 0, alors il y sera encore à l'issue du coup suivant si le joueur a tiré 0 (ne bouge pas) ou 3 (fait un tour complet). Il s'agit de deux possibilités sur quatre dans une situation d'équiprobabilité, donc

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = P(\{0, 3\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Si à l'issue du n -ième coup, le pion est sur la case 1, alors il sera sur la case 0 à l'issue du coup suivant si le joueur a tiré 2. Donc

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = P(\{2\}) = \frac{1}{4}.$$

Et si à l'issue du n -ième coup, le pion est sur la case 2, alors il sera sur la case 0 à l'issue du coup suivant si le joueur a tiré 1. Donc

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}.$$

- b) D'après la formule des probabilités totales, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'  v  nements, alors

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times \frac{1}{2} + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Je peux montrer exactement de la même façon que

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times \frac{1}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{2} + P(C_n) \times \frac{1}{4}$$

et

$$P(C_{n+1}) = P(A_n) \times \frac{1}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times \frac{1}{2}.$$

- c) Les formules de récurrences des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les mêmes que celles vérifiées par les suites $(P(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(P(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(P(C_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Aussi, les termes initiaux a_0 , b_0 et c_0 correspondent aux probabilités initiales $P(A_0)$, $P(B_0)$ et $P(C_0) = 0$.

Donc ces suites possèdent la même définition, *i.e.* pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$P(A_n) = a_n = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{2}{4^n}\right), \quad P(B_n) = b_n = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad P(C_n) = c_n = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

8. J'ai montré à la question 4.e) que la limite de chacune des trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vaut $\frac{1}{3}$. En terme de probabilités, cela signifie qu'après un grand nombre de coups, la probabilité d'être sur n'importe quelle case du plateau est proche de $\frac{1}{3}$. La situation tend à se rapprocher d'une situation d'équiprobabilité.

Exercice 2 –

1. a) Je raisonne par composition puis par produit :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} 1+x = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow -1} x \ln(1+x) = +\infty.$$

Graphiquement, je peux en déduire que la courbe \mathcal{C}_f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

- b) De même, par composition puis par produit :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1+x) = +\infty.$$

- c) Pour étudier une éventuelle branche parabolique, il me faut étudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$.

Or $\frac{f(x)}{x} = \ln(1+x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$. Donc la courbe \mathcal{C}_f admet bien une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, de direction (Oy) .

2. a) La fonction f est dérivable sur $] -1, +\infty[$. f est de la forme $f = u \times v$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+x)$. Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{w'(x)}{w(x)}$, avec $w(x) = 1+x$.

Comme $w'(x) = 1$, alors $v'(x) = \frac{1}{x+1}$ et donc pour tout $x \in] -1, +\infty[$,

$$f'(x) = x \times \frac{1}{1+x} + 1 \times \ln(1+x) = \frac{x}{1+x} + \ln(1+x).$$

- b) Je dérive de nouveau f' pour trouver f'' . La fonction f' est dérivable sur $] -1, +\infty[$. f' est une somme donc je dérive terme à terme :

- Je connais déjà la dérivée de $v(x) = \ln(1+x)$, qui est $v'(x) = \frac{1}{x+1}$.
- La dérivée de $u(x) = \frac{x}{1+x}$ est donnée par $u'(x) = \frac{1 \times (1+x) - x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$.

Alors pour tout $x \in] -1, +\infty[$, j'ai bien montré que

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1+(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{x+2}{(1+x)^2}.$$

- c) Pour étudier les variations de f' , il me faut étudier le signe de la dérivée f'' . Or pour $x \in] -1, +\infty[$, $x \geq -1 \iff x+2 \geq 1 > 0$. Et comme le dénominateur est un carré, il est positif. Ainsi pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f''(x) \geq 0$ donc la fonction f' est croissante sur l'intervalle $] -1, +\infty[$.

3. a) Je calcule $f'(0)$ en remplaçant x par 0 dans la formule obtenue en question 2.a) :

$$f'(0) = \frac{0}{1+0} + \ln(1+0) = 0 + \ln(1) = 0.$$

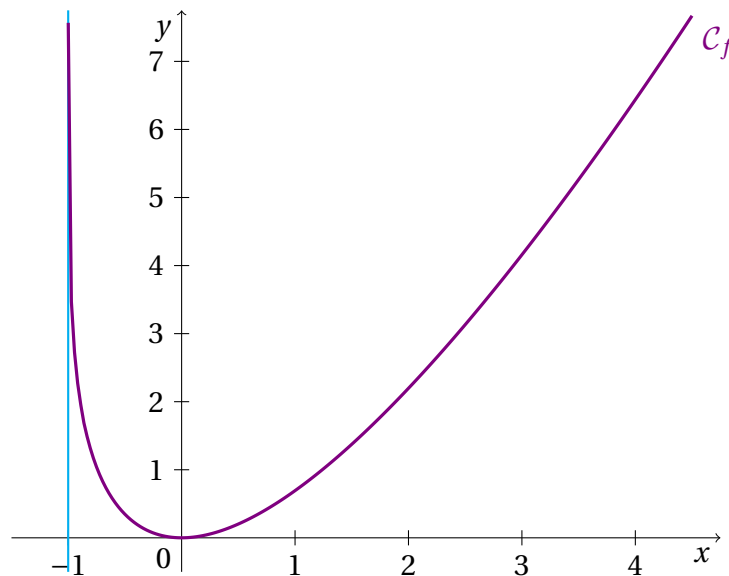
Comme f' est croissante et que $f'(0) = 0$, alors je peux en déduire que $f'(x)$ est négatif pour $x \leq 0$ et positif pour $x \geq 0$.

- b) D'après la question précédente, je connais le signe de la dérivée f' .

Je peux donc déduire les variations de la fonction f . Voici le tableau de variation de f , complété avec les limites trouvées en question 1. et $f(0) = 0 \times \ln(1+0) = 0$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

4. Grâce au tableau de variation et à l'asymptote $x = -1$, je peux tracer l'allure de la courbe \mathcal{C}_f . Je note qu'en 0, la courbe passe par l'axe des abscisses et la tangente est horizontale.



5. a) Je cherche à calculer $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$. Je pose

$$\begin{aligned} u'(x) &= x & u(x) &= \frac{x^2}{2} \\ v(x) &= \ln(1+x) & v'(x) &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{1^2}{2} \ln(1+1) - \frac{0^2}{2} \ln(1+0) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \end{aligned}$$

J'ai bien montré que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx.$

- b) Pour vérifier cette égalité, il me suffit de partir du terme de droite puis de tout mettre au même dénominateur :

$$x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}.$$

- c) En récrivant l'intégrande selon l'expression trouvée précédemment puis en primitivant terme à terme, j'obtiens que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx &= \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^2}{2} - 1 + \ln(1+1) \right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0 + \ln(1+0) \right) = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) - 0 = \ln(2) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- d) Finalement, en combinant les résultats des questions précédentes,

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

6. Voici le script complété.

```
function y=f(x)
    y=x^n*log(1+x)
endfunction
for n=1:50
    x=linspace(0,1,100)
    fplot2d(x,f)
end
```

7. a) Graphiquement, l'intégrale I_n représente l'aire sous la courbe de la fonction f_n , au-dessus de l'axe des abscisses, entre les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
 b)    l'aide du graphique proposé, je conjecture que la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle. En effet, l'aire sous la courbe semble se réduire indéfiniment.
8. a) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $x \in [0, 1]$. Alors par croissance de la fonction logarithme,

$$0 \leq x \leq 1 \iff 1 \leq 1+x \leq 2 \iff 0 = \ln(1) \leq \ln(1+x) \leq \ln(2).$$

Puis comme $x \geq 0$, alors $x^n \geq 0$ et en multipliant l'inégalité précédente,

$$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2).$$

- b) Gr  ce à la question précédente et par linéarité de l'intégrale, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) dx.$$

Puis $\int_0^1 0 dx = 0$ et

$$\int_0^1 x^n \ln(2) dx = \ln(2) \times \int_0^1 x^n dx = \ln(2) \times \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \ln(2) \times \left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$.

- c) D'après la question précédente, je connais un encadrement de I_n : $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$.

Puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$.

Je conclus grâce au théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Exercice 3 –

1. J  tudie la continuité de la fonction
- f
- en
- $x = 0$
- .

Pour cela, je compare les limites à gauche et à droite de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2a^2} = \frac{0}{2a^2} = 0.$$

Comme la limite à gauche de f en 0 est égale à la limite à droite de f en 0, alors j'en déduis que la fonction f est bien continue en 0.

De la même manière, en $x = 2a$:

$$\lim_{x \rightarrow 2a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2a^+} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{x}{2a^2} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}.$$

Comme la limite à gauche de f en $2a$ n'est pas égale à la limite à droite de f en $2a$, alors j'en déduis que la fonction f n'est pas continue en $x = 2a$.

2. La fonction
- f
- est définie en trois morceaux :

- Pour $x \notin [0, 2a]$, $f(x) = 0 \geq 0$ et pour $x \in [0, 2a]$, $f(x) = \frac{x}{2a^2} \geq 0$
car $x \geq 0$ et qu'un carré est toujours positif. Donc la fonction f est positive sur \mathbb{R} .
- Sur $] -\infty, 0[$, $f(x) = 0$ est continue car constante, sur $]0, 2a[$, $f(x) = \frac{x}{2a^2}$ est continue car polynomiale et sur $]2a, +\infty[$, $f(x) = 0$ est continue car constante.
Gr  ce à la question précédente, je sais que f est aussi continue en 0, mais pas en $2a$: elle admet donc un unique point de discontinuité sur \mathbb{R} .
- Il me reste à montrer que l'intégrale converge et vaut 1. Par la relation de Chasles, sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{2a} \frac{t}{2a^2} dt + \int_{2a}^{+\infty} 0 dt.$$

Or $\int_{-\infty}^0 0 dt$ converge et vaut 0, puisque la fonction sous l'intégrale est nulle.

De même $\int_{2a}^{+\infty} 0 dt$ converge et vaut 0.

Ainsi l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{2a} \frac{t}{2a^2} dt = \left[\frac{1}{2a^2} \times \frac{t^2}{2} \right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2} \times \left(\frac{(2a)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{1}{2a^2} \times \frac{4a^2}{2} = 1.$$

Ainsi j'ai bien montré que l'intégrale converge et vaut 1.

Grâce aux trois points précédents, je conclus que f décrit bien une densité de probabilité.

3. a) La fonction de répartition
- F
- de
- X
- est donnée par
- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$
- .

Je raisonne ensuite par disjonction de cas :

- si $x < 0$, alors $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$,
- si $0 \leq x \leq 2a$, alors $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{t}{2a^2} dt = 0 + \left[\frac{t^2}{4a^2} \right]_0^x = \frac{x^2}{4a^2} - \frac{0^2}{4a^2} = \frac{x^2}{4a^2}$,
- si $x > 2a$, alors $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{2a} \frac{t}{2a^2} dt + \int_{2a}^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1$.

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^2}{4a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a, \\ 0 & \text{si } x > 2a. \end{cases}$$

b) D'après la formule des probabilités composées,

$$P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \leq a) = \frac{P\left([X > \frac{a}{2}] \cap [X \leq a]\right)}{P\left(X > \frac{a}{2}\right)} = \frac{P\left(\frac{a}{2} < X \leq a\right)}{P\left(X > \frac{a}{2}\right)}.$$

Puis en utilisant la fonction de répartition,

$$P\left(X > \frac{a}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{a}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4a^2} = 1 - \frac{a^2}{4} \times \frac{1}{4a^2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

et

$$P\left(\frac{a}{2} < X \leq a\right) = F(a) - F\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4a^2} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4a^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Finalement

$$P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \leq a) = \frac{P\left(\frac{a}{2} < X \leq a\right)}{P\left(X > \frac{a}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{16}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

4. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée

$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ converge. Or sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t \times 0 dt + \int_0^{2a} t \times \frac{t}{2a^2} dt + \int_{2a}^{+\infty} t \times 0 dt.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, l'intégrale converge,

i.e. X admet une espérance et

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{2a} \frac{t^2}{2a^2} dt = \left[\frac{t^3}{6a^2} \right]_0^{2a} = \frac{(2a)^3}{6a^2} - \frac{0^3}{6a^2} = \frac{8a^3}{6a^2} = \frac{4a}{3}.$$

5. La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si la variable aléatoire X^2 admet une espérance, *i.e.* si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge.

De la même manière que dans la question précédente, l'intégrale généralisée converge et

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^{2a} \frac{t^3}{2a^2} dt = \left[\frac{t^4}{8a^2} \right]_0^{2a} = \frac{(2a)^4}{8a^2} - \frac{0^4}{8a^2} = \frac{16a^4}{8a^2} = 2a^2.$$

Donc X admet une variance et selon la formule de K  nig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = 2a^2 - \frac{16a^2}{9} = \frac{18a^2}{9} - \frac{16a^2}{9} = \frac{2a^2}{9}.$$

6. a) Par définition de la fonction de répartition, pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x)$ et pour $x \geq 0$,

$$G(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}).$$

Ainsi en reprenant ma disjonction de cas :

- si $x < 0$, alors $G(x) = P(X^2 \leq x) = 0$,
- si $0 \leq \sqrt{x} \leq 2a$, i.e. $0 \leq x \leq 4a^2$, alors $G(x) = F(\sqrt{x}) = \frac{(\sqrt{x})^2}{4a^2} = \frac{x}{4a^2}$,
- si $\sqrt{x} > 2a$, i.e. $x > 4a^2$, alors $G(x) = F(\sqrt{x}) = 1$.

Ainsi j'ai montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{4a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 4a^2, \\ 1 & \text{si } x > 4a^2. \end{cases}$$

- b) Comme pour $x \in [0, 4a^2]$, $G(x) = \frac{x}{4a^2} = \frac{x-0}{4a^2-0}$,

je reconnais en G la fonction de répartition de la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 4a^2]$. Et puisque la fonction de répartition caractérise la loi, alors la variable aléatoire Y suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 4a^2]$.

- c) La commande `rand()*4*a^2` simule le choix aléatoire d'un réel uniformément entre 0 et $4a^2$. Il s'agit là de simuler un tirage de la loi uniforme de la variable aléatoire Y .
- d) En me servant de la simulation de la loi uniforme de la variable aléatoire Y , alors la commande `sqrt(rand()*4*a^2)` simule un tirage de la loi de la variable aléatoire X .
7. a) Je calcule l'espérance de T_n . Comme pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(X_k) = E(X) = \frac{4a}{3}$, alors par linéarité

$$E(T_n) = E\left(\frac{3}{4n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{3}{4n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{3}{4n} \times n \times \frac{4a}{3} = a.$$

Ainsi j'ai bien montré que T_n est un estimateur sans biais de a .

- b) Comme l'estimateur T_n est sans biais, le risque quadratique est donné par la variance : $r(T_n) = V(T_n)$. Je calcule donc $V(T_n)$. Comme les variables X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors

$$V(S_n) = V\left(\frac{3}{4n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{3^2}{(4n)^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{9}{16n^2} \sum_{k=1}^n V(X) = \frac{9}{16n^2} \times n \times 2a^2 = \frac{9a^2}{8n}.$$

- c) Voici le script complété.

```
n=length(X)
T_n=3/(4*n)*sum(X)
disp(T_n)
```