

DEVOIR SURVEILLÉ 4

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^3 . En déduire que P est inversible et donner son inverse.
2. Vérifier que $P^{-1}AP = L$.
3. a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $P^{-1}A^nP = L^n$.
 b) Soit $J = L - I$. Calculer J^2 puis J^3 .
 c) En utilisant la formule du binôme, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

- d) En déduire, pour $n \geq 2$, les neuf coefficients de L^n .
 Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$.
- e) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On considère les trois suites $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ et $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_n, \quad v_{n+1} = v_n + 2w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = 2u_n + w_n.$$

- a) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$? Donner u_n pour tout entier $n \geq 1$.
- b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
- c) Établir pour tout entier $n \geq 1$ que $X_n = A^{n-1}X_1$.
- d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$v_n = 2n(n-1) \quad \text{et} \quad w_n = 2n.$$

5. On considère le programme suivant qui permet de calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$.

- a) Compléter la ligne 2 afin que soit mémorisée dans la variable A la matrice A.
 b) Pour mémoriser les termes successifs de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ de v_2 à v_{10} , quelle instruction parmi celles-ci faut-il ajouter en ligne 11? (On justifiera la réponse.)
 A. $v[i]=X[i]$ B. $v[i]=X$ C. $v[i]=X[1]$
 D. une autre instruction à préciser.
 c) Proposer de la même manière une instruction pour la ligne 12 qui permette de mémoriser les premiers termes de la suite $(w_n)_{n \geq 1}$.

```

1. import numpy as np
2. A=np.array(...)
3. u=np.zeros(10)
4. v=np.zeros(10)
5. w=np.zeros(10)
6. u[0]=1; v[0]=0; w[0]=2
7. X=np.array([[1],[0],[2]])
8. for i in range(1,10):
9.     X=np.dot(A,X)
10.    u[i]=1
11.    ....
12.    ....

```

Exercice 2 – On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln(x)$ et la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = xe^x - 1$.

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0, +\infty[$. En déduire le tableau des variations de g . On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.
 c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$. Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.
 d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
2. a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 b) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

En déduire le tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$.

- c) Justifier que le réel α vérifie $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.
3. a) Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$,

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}.$$

- b) Étudier la convexité de f sur $]0, +\infty[$.
4. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 2cm. On donne $\alpha \approx 0.57$ et $f(\alpha) \approx 2.33$.

Exercice 3 – Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet de la "cage à l'écureuil". Il s'agit d'une structure métallique que l'enfant doit escalader jusqu'à son sommet.

La cage est constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau A . Il cherche ensuite à atteindre le deuxième niveau B et enfin le troisième niveau qui est le sommet C .

On décompose l'ascension de l'enfant en une succession d'instant. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- Si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau A , alors à l'instant suivant $n + 1$, il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au B avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- Si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau B , alors à l'instant suivant $n + 1$, il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au C avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- Si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau C , alors il y reste définitivement.

On note pour tout entier naturel n , A_n l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau A à l'instant n ", B_n l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau B à l'instant n ". On note enfin C_n l'événement : "à l'instant n l'enfant est au sommet". On note a_n , b_n et c_n les probabilités respectives de ces trois événements.

1. Donner les probabilités a_1 , b_1 et c_1 .
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, \quad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n.$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $a_n = \frac{1}{3^n}$.
4. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 3^n b_n$.
 - a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2.
 - b) En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de v_n en fonction de n .
Établir pour tout entier naturel n que $b_n = \frac{2n}{3^n}$.
5. Pour tout entier naturel n , quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$?
En déduire une expression de c_n en fonction de l'entier n .
Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$. Comment interpréter le résultat?
6. On note X la variable aléatoire égale à l'instant où l'enfant atteint le sommet.
 - a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
 - b) Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $[X = n] = B_{n-1} \cap C_n$.
 - c) En déduire, pour $n \geq 2$, que $P(X = n) = \frac{4(n-1)}{3^n}$.
7. a) On note X_1 la variable aléatoire égale à l'instant où pour la première fois l'enfant quitte le niveau A pour arriver sur le niveau B .
Justifier que X_1 suit une loi usuelle. Donner l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1 et donner $P(X_1 = k)$ pour tout entier k de $X_1(\Omega)$. Calculer $E(X_1)$.
 - b) On note X_2 la variable aléatoire égale au nombre d'instant supplémentaires nécessaires à l'enfant pour atteindre pour la première fois le niveau C une fois qu'il a atteint le niveau B . Justifier que X_2 suit la même loi que X_1 .
 - c) Exprimer la variable aléatoire X en fonction de X_1 et X_2 .
En déduire que X admet une espérance et que $E(X) = 3$.

Exercice 4 –

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est inversible et expliciter A^{-1} .

b) On rappelle que $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prouver que pour tout entier $n \geq 0$,

il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix}$. On vérifiera que

$$u_0 = v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 1 \\ v_{n+1} = v_n - 2u_n. \end{cases}$$

c) Exprimer u_n en fonction de n .

d) Démontrer que $\forall n \geq 1, \quad v_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} k$.

e) En déduire une expression simplifiée de v_n puis écrire A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

2. Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, où a, b, c sont trois réels.

a) Pour tout réel x , calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ s'écrit sous la forme

$$f'(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)e^{-x}$$

où a_1, b_1, c_1 sont trois réels. Vérifier que $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

b) Exprimer $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ en utilisant la matrice A^{-1} .

3. **Application.** Soient r et s les deux fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad r(x) = (x+1)e^{-x} \quad \text{et} \quad s(x) = (x^2 + x)e^{-x}.$$

Déduire de la question précédente une primitive R de r et une primitive S de s .

4. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x < 0, \quad g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, \quad g(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}.$$

a) Soit $X \in [0, +\infty[$. Calculer $\int_0^X g(x) dx$ et $\int_0^X xg(x) dx$.

b) En déduire la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} xg(x) dx$ puis donner leurs valeurs respectives.

c) Prouver que g est une densité de probabilité.

d) Soit Y une variable aléatoire possédant g pour densité.

Démontrer que Y admet une espérance et donner la valeur de $E(Y)$.