6 | Le raisonnement par récurrence

I – Principe du raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un principe de démonstration, visant à établir une propriété portant sur tous les entiers naturels.

Théorème 6.1 – Principe de récurrence

Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété définie sur $\mathbf{N}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. **Initialisation :** "$\mathscr{P}_0$ est vraie",
2. **Hérédité :** "Pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $\mathscr{P}_n$ est vraie alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est également vraie",

alors la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$.

Métaphoriquement, on peut se représenter le principe du raisonnement par récurrence comme une ligne infinie de dominos qu'il s'agirait de faire tomber. Si l'on est capable de faire tomber le premier domino (*i.e.*, si l'hypothèse d'**initialisation** est vérifiée) et que la chute d'un domino fait tomber le suivant (*i.e.*, que l'étape d'**hérédité** est vérifiée) alors tous les dominos vont tomber.

Illustrons désormais ce nouveau mode de raisonnement sur un exemple, afin d'en fixer les règles de rédaction (passages surlignés), auxquelles il est **très vivement** recommandé de se conformer !

Exemple 6.2 – Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \geq 0$. On souhaite montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 3$.

Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété "$u_n \geq 3$".

1. **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = 4 \geq 3$. Ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie.
2. **Hérédité :** Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Or par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 3$, donc
   $$u_{n+1} = 2u_n - 3 \geq 2 \times 3 - 3 = 3.$$
   Donc $u_{n+1} \geq 3$. Finalement $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
3. **Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie en $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, *i.e.*,
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geq 3.$$

Exemple 6.3 – Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété "$u_n = 2^{n+1} + 1$".

1. **Initialisation :** $u_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$. Ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie.
2. **Hérédité :** Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Or par hypothèse de récurrence, $u_n = 2^{n+1} + 1$,

donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 1 \\ &= 2\left(2^{n+1}+1\right) - 1 \\ &= 2\times 2^{n+1} + 2 - 1 \\ &= 2^{n+2} + 1. \end{aligned}$$

Finalement $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

3. **Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie en $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, *i.e.,*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + 1.$$

II – Propriété vraie pour $n \geq n_0$

Certaines propriétés dépendant d'un entier naturel n ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbf{N}$. Le cas échéant, l'étape d'initialisation ne porte plus sur $\mathscr{P}_0$ (ce qui n'aurait *a priori* aucun sens), mais sur $\mathscr{P}_{n_0}$, le premier rang à partir duquel la propriété $\mathscr{P}$ est vraie. Le principe du raisonnement reste ensuite le même.

Exemple 6.4 – Soit (u_n) une suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété "$u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$".

1. **Initialisation :** Pour $n = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $1 - \dfrac{1}{1+1} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\mathscr{P}_1$ est vraie.
2. **Hérédité :** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.

   Par définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Or par hypothèse de récurrence, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

   Donc $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{(n+2)}$. Finalement $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
3. **Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie en $n = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, *i.e.,*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exemple 6.5 – Démontrer que pour tout $n \geq 6$, $(n+2)^2 \leq 2^n$.

Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété "$2^n \geq (n+2)^2$".

1. **Initialisation :** Pour $n = 6$, $2^6 = 64$ et $(6+2)^2 = 64$. Ainsi $\mathscr{P}_6$ est vraie.
2. **Hérédité :** Soit $n \geq 6$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, on sait que $2^n \geq (n+2)^2$. Alors
   $$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \geq 2 \times (n+2)^2 \\ &\geq 2 \times (n^2+4n+4) \\ &\geq 2n^2+8n+8 \\ &\geq n^2+6n+9 \\ &= (n+3)^2 \\ &= ((n+1)+2)^2. \end{aligned}$$
   Finalement, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
3. **Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie en $n = 6$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \geq 6$, *i.e.*,
   $$\forall n \geq 6, \quad 2^n \geq (n+2)^2.$$

III – Récurrences impliquant le signe Σ

Proposition 6.6

Soit (u_n) une suite. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}.$$

Remarque 6.7 –

- Évidemment, on a également
$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}, \qquad \sum_{k=2}^{n+1} u_k = \sum_{k=2}^{n} u_k + u_{n+1}, \qquad \text{etc.}$$
- Cette propriété permet de démontrer un très grand nombre de formules portant sur le signe Σ, à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exemple 6.8 – Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$".

1. **Initialisation :** Pour $n = 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$. Ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie.
2. **Hérédité :** Soit $n \geq 0$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \quad \text{d'après la Proposition ci-dessus}\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Finalement $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

3. **Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie en $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, *i.e.*,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 6.9 – Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété "$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".

1. **Initialisation :** Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \frac{1\times 2\times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Ainsi $\mathscr{P}_1$ est vraie.
2. **Hérédité :** Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, on sait que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.\end{aligned}$$

   Finalement $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
3. **Conclusion :** Comme elle est héréditaire et vraie en $n = 1$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, *i.e.*,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$