CONCOURS BLANC 4 — BSB

Exercice 1 – BSB 2013 / Ex1

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $M^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix} b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, je sais que $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$. Alors

   $$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n & 2a_n + b_n \\ 0 & 2b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+1} & a_{n+1} \\ 0 & b_{n+1} \end{pmatrix}.$$

   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}.$$

2. Les termes de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la formule de récurrence $b_{n+1} = 2b_n$.
   La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $b_0 = 1$.
   Ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $b_n = b_0 \times q^n = 1 \times 2^n = 2^n$.
   En injectant la formule précédente dans l'expression de a_{n+1}, j'obtiens que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$a_{n+1} = 2a_n + b_n = 2a_n + 2^n.$$

3. a) Pour montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, j'exprime le terme c_{n+1} en fonction du terme précédent c_n. Soit $n \in \mathbb{N}$,

   $$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n + 2^n}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} = c_n + \frac{1}{2}.$$

   Ainsi la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$.
   Son premier terme est donné par $c_0 = \frac{a_0}{2^0} = \frac{0}{1} = 0$.

   b) Comme la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme $c_0 = 0$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 + n \times r = 0 + n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$.

   c) Je sais que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ et $c_n = \frac{n}{2}$. J'en déduis donc que

   $$a_n = c_n \times 2^n = \frac{n}{2} \times 2^n = n2^{n-1}.$$

4. Je sais que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ avec $a_n = n2^{n-1}$ et $b_n = 2^n$.
J'en déduis donc que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

5. a) Je sais d'après la question **2.** que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} = 2a_k + 2^k$, *i.e.*
$$a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k.$$

b) Il s'agit d'une somme télescopique. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \left(a_{k+1} - a_k\right) = \cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \cdots + a_{n+1} - \cancel{a_n} = a_{n+1} - a_0 = a_{n+1} - 0 = a_{n+1}.$$

c) Il s'agit de la somme des premières puissances de 2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1.$$

d) Grâce aux questions précédentes, je remarque qu'il s'agit de la somme des premiers termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tour entier $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \left(a_{k+1} - a_k - 2^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_{k+1} - a_k\right) - \sum_{k=0}^{n} 2^k = a_{n+1} - \left(2^{n+1} - 1\right).$$
Or $a_{n+1} = (n+1)2^{n+1-1} = (n+1)2^n$ donc finalement
$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n+1)2^n - 2 \times 2^n + 1 = (n+1-2)2^n + 1 = (n-1)2^n + 1.$$

6. a) Comme demandé par l'énoncé, j'utilise la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que la matrice P est inversible et trouver P^{-1}.
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
Finalement, j'obtiens que la matrice P est inversible et que son inverse est donnée par
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule le produit $P^{-1}A$ puis multiplie le résultat à droite par P pour vérifier que $P^{-1}AP = M$.
$$P^{-1} \times A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} - \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$
$$P^{-1}A \times P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ 1 - 1 & 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M.$$

c) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n = P^{-1}A^nP$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $M^0 = I_2$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}P = I_2$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que $M^n = P^{-1}A^nP$. Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = P^{-1}A^nP \times P^{-1}AP = P^{-1}A^nI_2AP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = P^{-1}A^nP.$$

Pour calculer la matrice A^n, je dois retourner l'égalité que je viens de démontrer :

$$M^n = P^{-1}A^nP \iff PM^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = I_2A^nI_2 = A^n \iff A^n = PM^nP^{-1}.$$

Il ne me reste plus qu'à calculer ce produit matriciel, en réutilisant le résultat de la question **4.** pour la matrice M^n :

$$P \times M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1}+2^n \\ -2^n & -n2^{n-1}+2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & (n+2)2^{n-1} \\ -2^n & (2-n)2^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$A^n = PM^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & (n+2)2^{n-1} \\ -2^n & (2-n)2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1}+(n+2)2^{n-2} & -2^{n-1}+(n+2)2^{n-2} \\ -2^{n-1}+(2-n)2^{n-2} & 2^{n-1}+(2-n)2^{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+4)2^{n-2} & n2^{n-2} \\ -n2^{n-2} & (4-n)2^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 – BSB 2013 / Ex2

1. a) Je calcule la limite de chacun des termes :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} -2x+3 = \ \ 3 \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 0$, *i.e.* l'axe des ordonnées, est donc asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

b) Pour éviter une forme indéterminée, je réécris l'expression de f sous une forme adaptée à l'utilisation des résultats de croissances comparées. Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \ln(x) - 2x + 3 = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 2 + \frac{3}{x}\right).$$

Alors par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Puis comme

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} -2 = -2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = \ \ 0 \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} - 2 + \frac{3}{x} = -2.$$

Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

2. Je dérive terme à terme : pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x} = \frac{1-2x}{x}.$$
Pour étudier les variations de f, je détermine le signe de $f'(x)$:
$$x > 0 \quad \text{et} \quad 1-2x \geqslant 0 \iff 2x \leqslant 1 \iff x \leqslant \frac{1}{2}.$$
Enfin
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times \frac{1}{2} + 3 = -\ln(2) - 1 + 3 = 2 - \ln(2) \approx 2 - 0.7 = 1.3.$$
J'obtiens alors le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$2-\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

3. Pour étudier la convexité de la fonction f, il me faut étudier le signe de sa dérivée seconde. Pour cela, je dérive terme à terme $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$:
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$
La dérivée seconde étant toujours négative (un carré est toujours positif),
j'en déduis que la fonction f est concave sur $\left]0, +\infty\right[$.

4. a) L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 1 est donnée par $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Je calcule donc $f(1)$ et $f'(1)$:
$$f(1) = \ln(1) - 2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{1}{1} - 2 = -1.$$
Alors l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ devient
$$y = -(x-1) + 1 \qquad \textit{i.e.} \quad y = 2 - x.$$
b) J'ai montré précédemment que la fonction f est concave sur $\left]0, +\infty\right[$. Elle est donc située en dessous de toutes ses tangentes. En particulier $\mathcal{T}$ est située au-dessus de $\mathcal{C}$.

5. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. De plus $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.3 > 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation

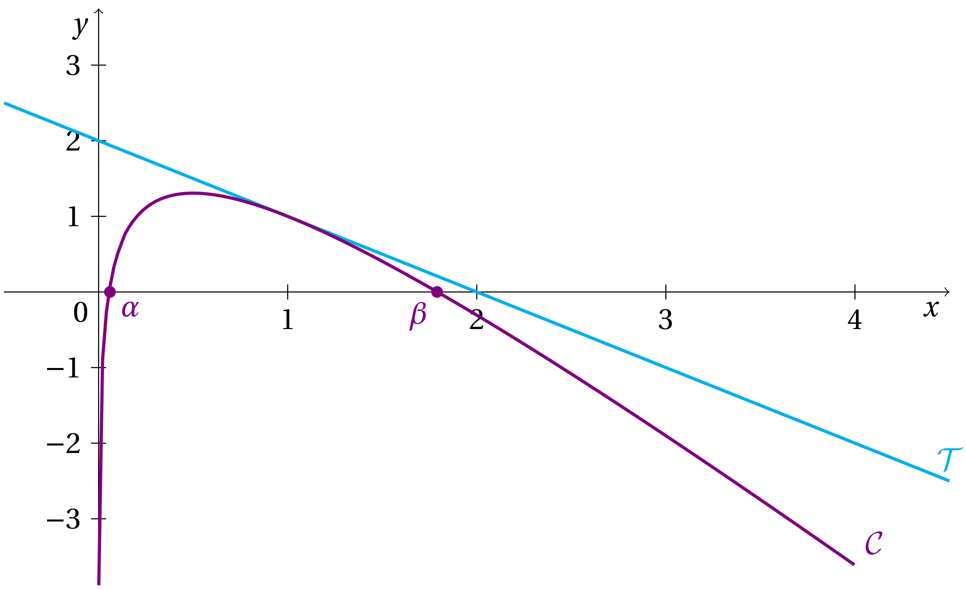
$f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

f est aussi continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.3 > 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

J'ai bien montré que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β sur l'intervalle $]0, +\infty[$ avec $\alpha < \beta$.

b) Je sais que $f(1) = 1 > 0$ et $f(2) = \ln(2) - 2 \times 2 + 3 \approx 0.7 - 1 = -0.3 < 0$.
Donc puisque $0 \in \left]f(2), f(1)\right[$, j'en déduis que $\beta \in]1, 2[$.

6. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente $\mathcal{T}$:



Exercice 3 – BSB 2013 / Ex3

Partie I

1. a) D'après la formule des probabilités totales, comme $\{A, B\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = \frac{1}{3} \times \frac{12}{100} + \frac{2}{3} \times \frac{9}{100} = \frac{12}{300} + \frac{18}{300} = \frac{30}{300} = \frac{1}{10}.$$

b) Je cherche $P_D(A)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{12}{100}}{\frac{1}{10}} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

2. a) La variable aléatoire X compte le nombre de succès "la balle présente un défaut", de probabilité $p = \frac{1}{10}$, lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{10}$.
Le support de X est donné par $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, 10]\!]$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{10}\right)^k \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}.$$

b) Comme la variable aléatoire X suit une loi binomiale, alors

$$E(X) = np = \frac{n}{10} \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = \frac{n}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9n}{100}.$$

Partie II

1. a) Dans cette question $n = 30$ donc $E(X) = \frac{n}{10} = \frac{30}{10} = 3$. Si Y est une variable aléatoire approchant X, alors elle partage la même espérance que X. Comme Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors il faut que

$$E(Y) = \lambda = E(X) = 3 \qquad \textit{i.e.} \quad \lambda = 3.$$

b) Comme la variable aléatoire Y suit une loi de Poisson, alors le support de Y est donné par $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{3^k}{k!} e^{-3}.$$

c) Je cherche $P(Y \geqslant 1)$. Or $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0)$. Alors en regardant la troisième ligne du tableau, celle correspondant à une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$, j'obtiens que

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.0498 = 0.9502.$$

La probabilité d'avoir au moins une balle présentant un défaut parmi les 30 s'élève donc à un peu plus de 95%.

2. a) Dans cette question $n = 3600$ donc $E(X) = \frac{n}{10} = 360$ et $V(X) = \frac{9n}{100} = 324$. Si Z est une variable aléatoire approchant X, alors elle partage la même espérance et la même variance que X. Comme Z suit une loi normale de paramètres m et σ^2, alors il faut que

$$E(Z) = m = E(X) = 360 \quad \text{et} \quad V(Z) = \sigma^2 = V(X) = 324.$$

Grâce à l'indication numérique, j'obtiens qu'il faut choisir

$$m = 360 \quad \text{et} \quad \sigma = 18.$$

b) Je cherche $P(Z \geqslant 396)$. Or $P(Z \geqslant 396) = P\left(\frac{Z-360}{18} \geqslant \frac{396-324}{18}\right) = P\left(\frac{Z-360}{18} \geqslant 2\right)$. Comme $\frac{Z-360}{18}$ suit une loi normale centrée réduite, alors

$$P(Z \geqslant 396) = P\left(\frac{Z-360}{18} \geqslant 2\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

La probabilité recherchée s'élève donc à 2.28%.

Exercice 4 – BSB 2013 / Ex4

1. a) Soit $A \geqslant 1$. Une primitive de la fonction $h(t) = e^{-2t}$ est donnée par $H(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$. Alors

$$I_A = \int_1^A e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_1^A = -\frac{1}{2}e^{-2A} + \frac{1}{2}e^{-2} = \frac{e^{-2} - e^{-2A}}{2}.$$

Puis en faisant tendre A vers $+\infty$, comme $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-2A} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, alors

$$\lim_{A\to+\infty} I_A = \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-2} - e^{-2A}}{2} = \frac{e^{-2} - 0}{2} = \frac{e^{-2}}{2}.$$

b) • Pour $t < 1$, $f(t) = 0 \geqslant 0$ et pour $t \geqslant 1$, $f(t) = 2e^{-2t+2} > 0$ comme exponentielle. Donc la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.

• Sur $]-\infty, 1[$, f est continue car constante. Sur $[1, +\infty[$, f est continue comme composée de fonctions continues. Donc f admet au plus un point de discontinuité.

• J'étudie la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

En décomposant, $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0. Puis

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} 2e^{-2t+2}\,\mathrm{d}t = 2e^2 \times \int_1^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 2e^2 \times \frac{e^{-2}}{2} = 1,$$

la convergence de cette intégrale ayant été démontrée à la question précédente.

Finalement, grâce à la relation de Chasles, j'en déduis que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 + 1 = 1.$$

Grâce aux trois points précédents, j'ai bien montré que la fonction f décrit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. Je raisonne en distinguant les cas $x < 1$ et $x \geqslant 1$.

• Si $t < 1$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

• Si $t \geqslant 1$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_1^{A} 2e^{-2t+2}\,\mathrm{d}t = 0 + 2e^2 I_x = 2e^2\frac{e^{-2} - e^{-2x}}{2} = 1 - e^{-2x+2}.$$

Finalement, je retrouve bien les formules annoncées par l'énoncé.

3. a) En utilisant la fonction de répartition, je sais que

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - e^{-2\times 2+2}\right) = e^{-2},$$
$$P(X \leqslant 3) = F(3) = 1 - e^{-2\times 3+2} = 1 - e^{-4},$$
$$P(2 \leqslant X \leqslant 3) = F(3) - F(2) = 1 - e^{-4} - \left(1 - e^{-2}\right) = e^{-2} - e^{-4}.$$

b) D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[X\geqslant 2]}(X \leqslant 3) = \frac{P\big([X \geqslant 2] \cap [X \leqslant 3]\big)}{P(X \geqslant 2)} = \frac{P(2 \leqslant X \leqslant 3)}{P(X \geqslant 2)} = \frac{e^{-2} - e^{-4}}{e^{-2}} = 1 - e^{-2}.$$

4. a) Soit $A \geqslant 1$. Je calcule l'intégrale $\displaystyle\int_1^{A} te^{-2t}\,\mathrm{d}t$ en utilisant une intégration par parties.

Je pose

$$u'(t) = e^{-2t} \qquad u(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$$
$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$

Alors par intégration par parties,

$$\int_1^{A} te^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{2}e^{-2t}\right]_1^{A} - \int_1^{A} -1 \times \frac{1}{2}e^{-2t}\,\mathrm{d}t = -\frac{A}{2}e^{-2A} + \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\int_1^{A} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{e^{-2}}{2} - \frac{A}{2}e^{-2A} + \frac{1}{2}I_A = \frac{e^{-2}}{2} - \frac{A}{2}e^{-2A} + \frac{e^{-2} - e^{-2A}}{4} = \frac{3}{4}e^{-2} - \frac{A}{2}e^{-2A} - \frac{1}{4}e^{-2A}.$$

b) En faisant tendre A vers $+\infty$, comme $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-2A} = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} Ae^{-2A} = 0$, alors

$$\lim_{A\to+\infty} J_A = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{3}{4}e^{-2} - \frac{A}{2}e^{-2A} - \frac{1}{4}e^{-2A}\right) = \frac{3}{4}e^{-2} - 0 - 0 = \frac{3}{4}e^{-2}.$$

c) La variable aléatoire X admet une densité si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

En décomposant, $\int_{-\infty}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0. Puis

$$\int_{1}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} t\times 2e^{-2t+2}\,\mathrm{d}t = 2e^2 \times \int_{1}^{+\infty} te^{-2t}\,\mathrm{d}t = 2e^2\times\frac{3}{4}e^{-2} = \frac{3}{2},$$

la convergence de cette intégrale ayant été démontrée à la question précédente.

Finalement, grâce à la relation de Chasles, j'en déduis que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Autrement dit, La variable aléatoire X admet une densité et

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}.$$

5. a) Par définition de la fonction de répartition, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$G(y) = P(Y \leqslant y) = P(X-1 \leqslant y) = P(X \leqslant y+1) = F(y+1).$$

b) En distinguant les cas $y<0$ et $y \geqslant 0$, il vient que

- si $y<0$, alors $y+1<1$ et $G(y) = F(y+1) = 0$,
- et si $y \geqslant 0$, alors $y+1 \geqslant 1$ et $G(y) = F(y+1) = 1-e^{-2(y+1)+2} = 1-e^{-2y}$.

Finalement, j'obtiens que

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0,\\ 1-e^{-2y} & \text{si } y\geqslant 0.\end{cases}$$

Je reconnais là la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

c) Comme la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$, alors la variance est donnée par

$$V(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

d) Je sais que Y admet une variance et que $Y = X-1 \iff X = Y+1$.
Alors X admet une variance et

$$V(X) = V(Y+1) = V(Y) = \frac{1}{4}.$$