7 | Limites et continuité

I – Notions de limite

1 – Illustration

- Soit f la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2.$$
Étudions les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	1	0.25	0.01	0.0001	0	0.0001	0.01	0.25	1

On constate que plus x se rapproche de 0, plus x^2 se rapproche de 0.
On dit que x^2 **tend vers 0, lorsque x tend vers 0**, et on note
$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

- Soit f la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$
Étudions les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	1	4	100	10 000	10 000	100	4	1

On constate que plus x se rapproche de 0, plus $\frac{1}{x^2}$ devient "grand".
On dit que $\frac{1}{x^2}$ **tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers 0**, et on note
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

- Soit f la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$
Étudions les valeurs de $f(x)$ lorsque x devient "grand".

x	1	5	10	100
$f(x)$	1	0.04	0.01	0.0001

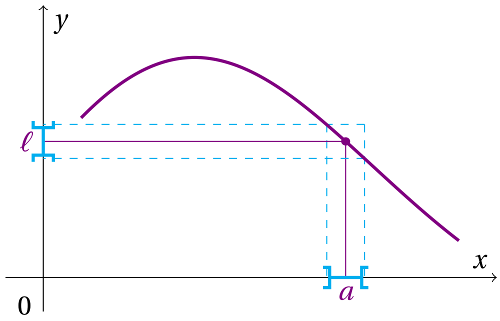
On constate que plus x devient "grand", plus $\frac{1}{x^2}$ se rapproche de 0.
On dit que $\frac{1}{x^2}$ **tend vers 0, lorsque x tend vers $+\infty$**, et on note
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

2 – Limite finie en un point

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a.

On dit que f **admet** ℓ **pour limite en** a lorsque $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de ℓ pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a.
On note alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$



Exemple 7.1 – Soit f la fonction définie sur $]-2;4[$ par $f(x) = x^2 + 3x - 5$. On a

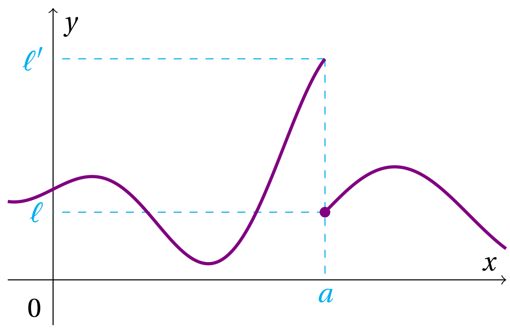
$$\lim_{x\to 0} f(x) = -5, \qquad \lim_{x\to -2} f(x) = -7, \qquad \lim_{x\to 4} f(x) = 23.$$

3 – Limite à gauche et à droite en un point

Pour certaines fonctions, il peut être utile de distinguer le comportement en un point a, selon que l'on s'approche de a exclusivement par la gauche, par valeurs inférieures *i.e.*, pour des abscisses $x < a$, ou exclusivement par la droite, par valeurs supérieures *i.e.*, pour des abscisses $x > a$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si lorsque x se rapproche de a par valeurs inférieures, $f(x)$ se rapproche de ℓ, on dit que f admet ℓ pour **limite à gauche** en a et on note
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell.$$
- Si lorsque x se rapproche de a par valeurs supérieures, $f(x)$ se rapproche de ℓ, on dit que f admet ℓ pour **limite à droite** en a et on note
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell.$$



4 – Limite infinie en un point

Une fonction f peut également avoir une limite infinie en un point *i.e.*, prendre des valeurs positives ou négatives aussi grande que l'on veut.
Plus précisément, pour une fonction f, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers a, si $f(x)$ peut prendre des valeurs **positives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a. On note alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

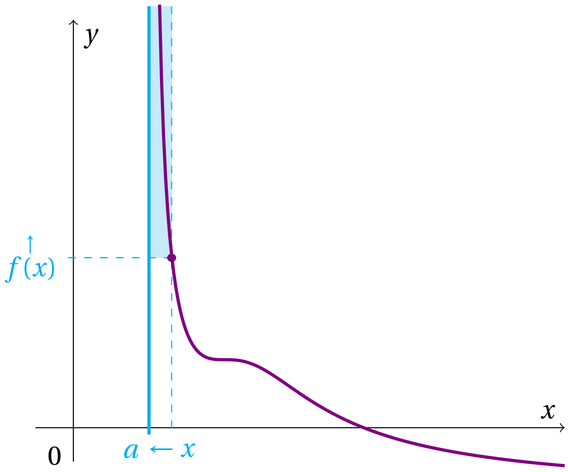
De même, on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$, lorsque x tend vers a, si $f(x)$ peut prendre des valeurs **négatives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a. On note alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Si la fonction n'est définie qu'à gauche de a (resp. qu'à droite de a), on note de manière similaire

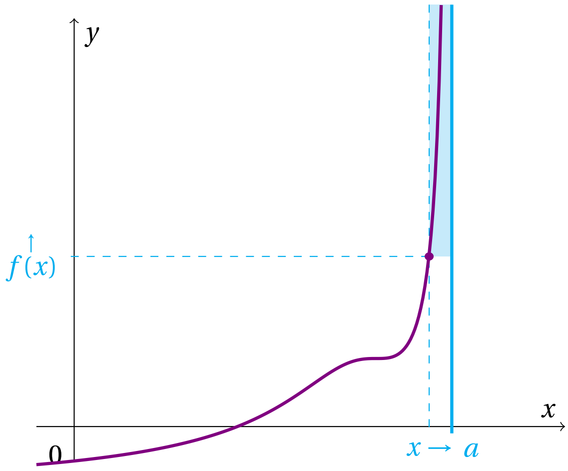
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty\right).$$

Limite "à droite" de a :

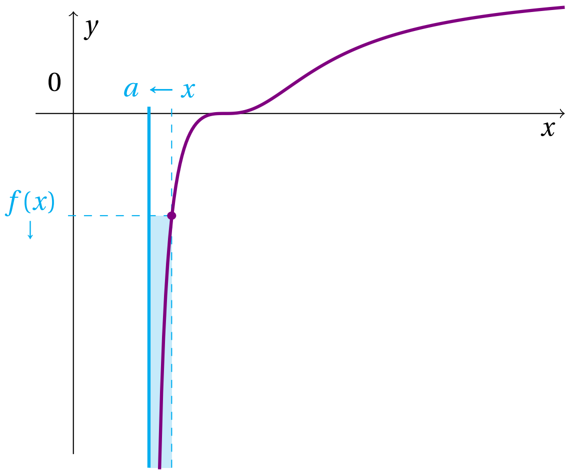


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

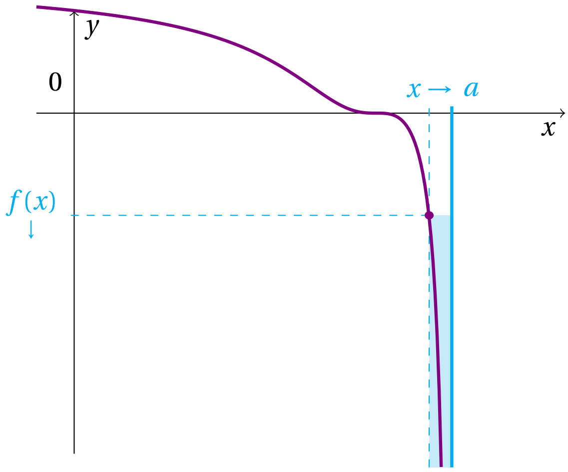
Limite "à gauche" de a :



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$



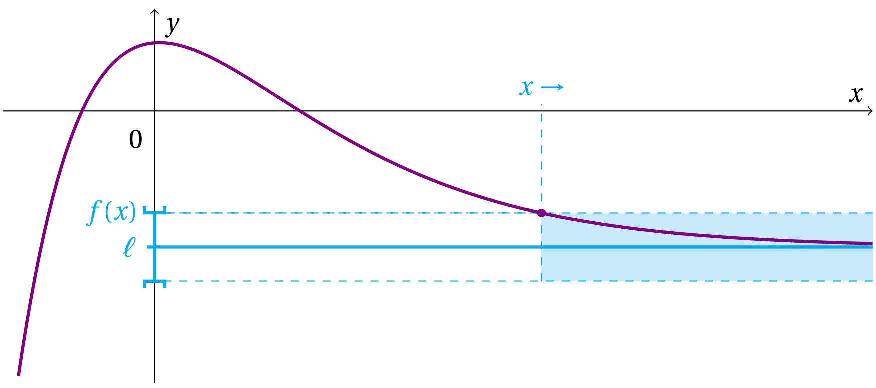
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

5 – Limite finie en l'infini

Lorsqu'une fonction f est définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, on peut s'intéresser au comportement de $f(x)$ lorsque x devient très grand, dans les positifs ou les négatifs. Soit $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que f **admet ℓ pour limite en** $+\infty$ lorsque $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de ℓ pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand. On note alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Il en va de même pour définir $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition de choisir x suffisamment grand.

6 – Limite infinie en l'infini

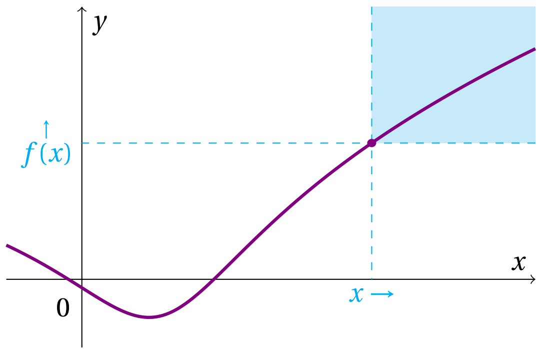
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$, où A est un réel.

1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand. On note

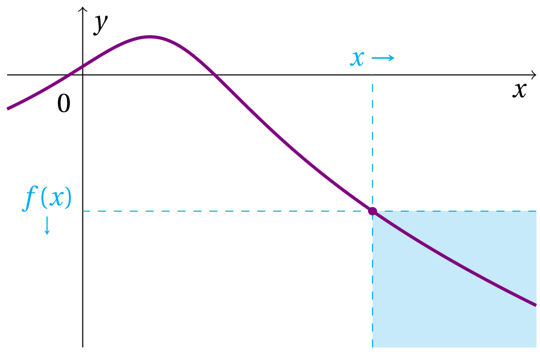
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

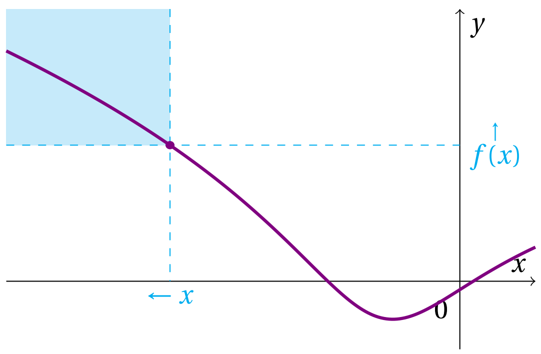
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;A]$, où A est un réel.

1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x négatif suffisamment grand. On note

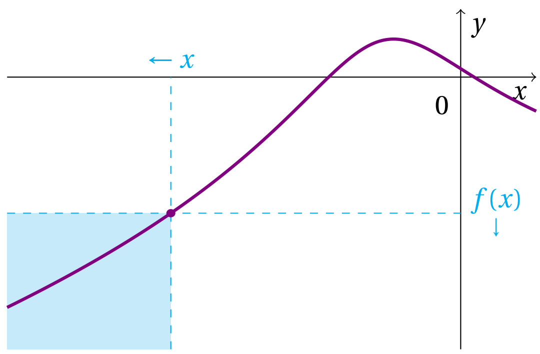
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x négatif suffisamment grand. On note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$



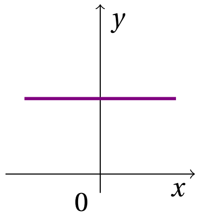
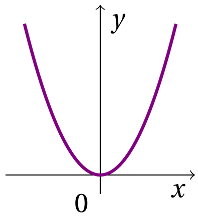
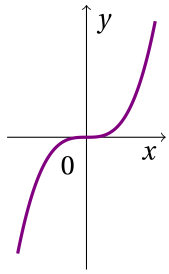
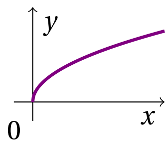
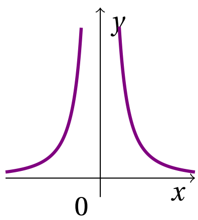
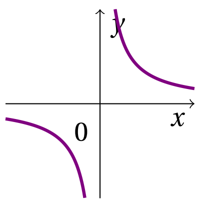
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

II – Calculs de limites

1 – Limites des fonctions usuelles

Fonction	Définie sur	Courbe	Limite en $-\infty$	Limite en 0	Limite en $+\infty$
$x \mapsto c$ $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$		c	c	c
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbf{N}^*$ pair	$\mathbf{R}$		$+\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbf{N}^*$ impair	$\mathbf{R}$		$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbf{R}_+$		*NON DÉFINI*	0	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $n \in \mathbf{N}^*$ pair	$\mathbf{R}^*$		0^+	$\lim\limits_{x\to 0^-} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} = +\infty$	0^+
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $n \in \mathbf{N}^*$ impair	$\mathbf{R}^*$		0^-	$\lim\limits_{x\to 0^-} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} = +\infty$	0^+

Exemple 7.2 – On a

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0^-$

2 – Limite d'une somme de deux fonctions

Ce tableau récapitule les cas possibles pour la limite d'une somme de deux fonctions u et v selon les limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x\to\alpha} u(x)+v(x) =$$

$\lim_{x\to\alpha} v(x)$ \ $\lim_{x\to\alpha} u(x)$	$\ell \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbf{R}$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$-\infty$

Exemple 7.3 – Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-1+\dfrac{1}{x}$. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2-1=-1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty,$$

donc par somme, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0,$$

donc par somme, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3 – Limite d'un produit de deux fonctions

Ce tableau récapitule les cas possibles pour la limite d'un produit de deux fonctions u et v selon les limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x\to\alpha} u(x)\times v(x) =$$

$\lim_{x\to\alpha} v(x)$ \ $\lim_{x\to\alpha} u(x)$	$\ell \in \mathbf{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\ell' \in \mathbf{R}^*$	$\ell\times\ell'$	0	$\pm\infty$
0	0	0	*F.I.*
$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*	$\pm\infty$

Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat entre $+\infty$ et $-\infty$.

Exemple 7.4 – Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \times \left(\frac{1}{x} - 1\right)$. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} - 1 = +\infty,$$

donc nous sommes en présence de la forme indéterminée "$0\times\infty$".
Or pour tout réel x non-nul, $x^2 \times \left(\frac{1}{x} - 1\right) = x - x^2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x - x^2 = 0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1,$$

donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4 – Limite d'un quotient de deux fonctions

Ce tableau récapitule les cas possibles pour la limite d'un quotient de deux fonctions u et v selon les limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{u(x)}{v(x)} =$$

$\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)$	$\ell \in \mathbf{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\ell' \in \mathbf{R}^*$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	*F.I.*	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	0	*F.I.*

Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du quotient qui permet de déterminer le résultat entre $+\infty$ et $-\infty$.

Exemple 7.5 – Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

$$\lim_{x\to 1^+} 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} x^2 - 1 = 0^+,$$

donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty,$$

donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5 – Composition de limites

Théorème 7.6 – Composition de limites

Soient f et g deux fonctions et a, b et c des réels ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X\to b} g(X) = c, \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} g\circ f(x) = c.$$

Exemple 7.7 – Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}}+2$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{X\to 0^+} \sqrt{X} = 0,$$

donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} = 0$.

Dès lors, par somme, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}}+2 = 2$.

6 – Limites de fonctions polynômes ou rationnelles en $\pm\infty$

Théorème 7.8

La limite d'une fonction polynôme en $\pm\infty$ est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

Exemple 7.9 – $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -3x^3-2x^2+x-5 = \lim_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$.

Théorème 7.10

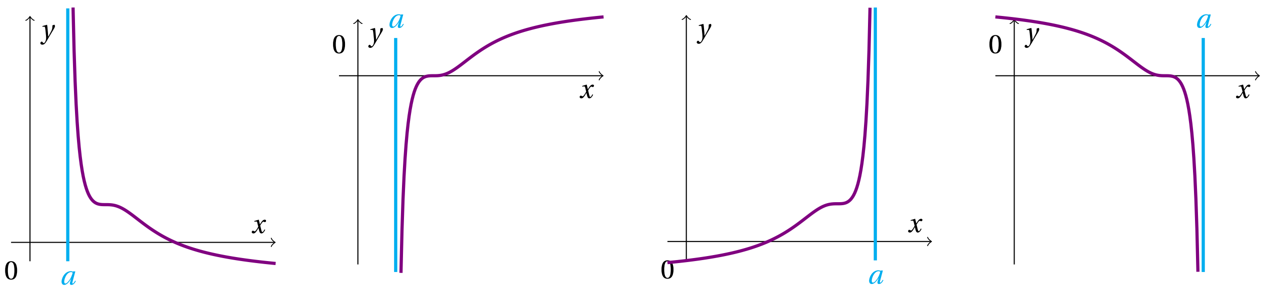
La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

Exemple 7.11 – $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-2x^3}{3x^4+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{3x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{3x} = 0$.

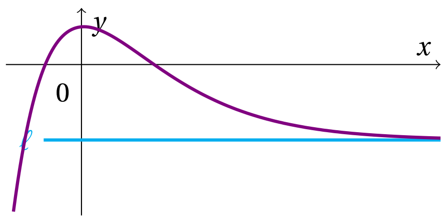
III – Asymptotes et branches infinies

1 – Asymptotes

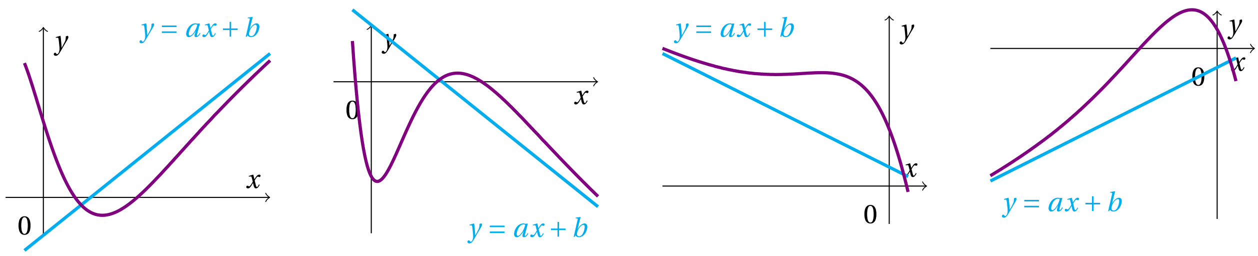
Définition 7.12 – Soit a un réel. Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ et/ou que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$ en a.



Définition 7.13 – Soit ℓ un réel. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), alors la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** en $+\infty$ (resp. $-\infty$).



Définition 7.14 – Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y = ax + b$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$), on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).



Exemple 7.15 – Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty; -\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{5x-1}{2x+3}$. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations de ses éventuelles asymptotes.

Commençons par étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$. D'après le théorème 7.10,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-1}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et de même} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-1}{2x+3} = \frac{5}{2}$$

Ainsi, la droite d'équation $y = \frac{5}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Étudions maintenant les limites en $-\frac{3}{2}$.

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}} 5x-1 = -\frac{17}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}} 2x+3 = 0^-,$$

donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}} \frac{5x-1}{2x+3} = +\infty$. De même,

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x>-\frac{3}{2}}} 5x-1 = -\frac{17}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x>-\frac{3}{2}}} 2x+3 = 0^+,$$

donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}} \frac{5x-1}{2x+3} = -\infty$.
Ainsi, la droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

IV – Continuité

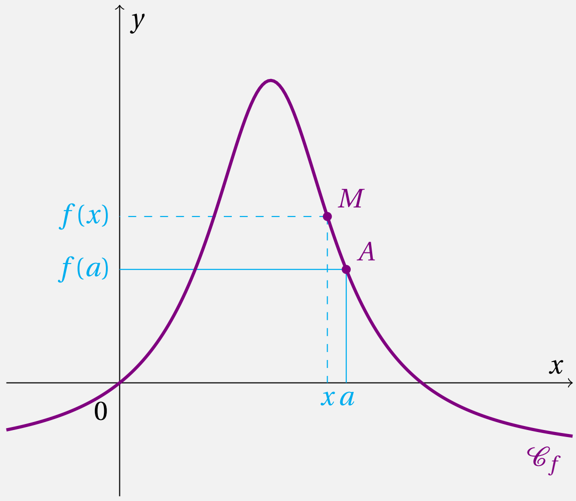
1 – Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Intuitivement, dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou). Mathématiquement, cela se traduit de la manière suivante.

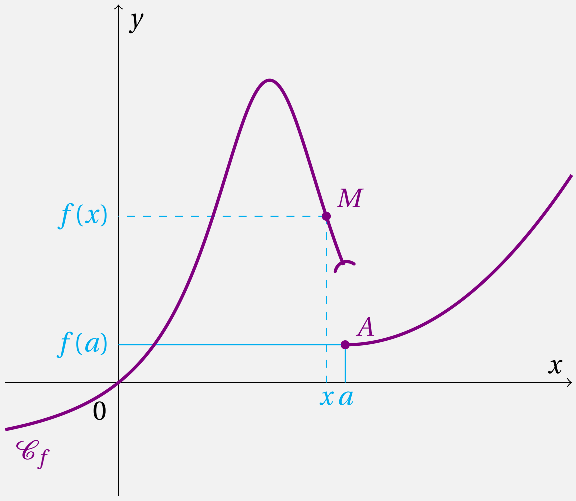
Définition 7.16 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I.

- f est dite **continue** en a lorsque
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$
Sinon, f est dite **discontinue** en a.
- f est dite **continue sur l'intervalle** I lorsqu'elle est continue en tout point $a \in I$.

Exemple 7.17 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a. Pour tout réel x de l'intervalle I, on considère le point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x.



La fonction f est continue.



La fonction f n'est pas continue en a.

Pour tout réel a de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a.

La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a. Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a.

2 – Opérations sur les fonctions continues

Théorème 7.18

- Si f et g sont deux fonctions continues, alors la somme $f+g$ et le produit fg sont continues. Si de plus, g ne s'annule pas, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est aussi continue.
- Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Théorème 7.19 – Continuité des fonctions de référence

- Une fonction polynomiale est continue sur $\mathbf{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbf{R}_+$.
- La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
- Une fraction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exemple 7.20 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2 - 2x + 1 + \sqrt{x}$.

Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto x^2 - 2x + 1$ sont continues sur $\mathbf{R}_+^*$. Donc, f est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbf{R}_+^*$.