EXERCICES — CHAPITRE 13

Exercice 1 (★★) – Simplifier les écritures suivantes.

1. $\left(e^x\right)^2 - \dfrac{1}{e^{-2x}}$
2. $\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$
3. $e^{-x}\left(e^{2x} - \dfrac{1}{e^x}\right)$
4. $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}$
5. $\dfrac{\left(e^{x+2}\right)^2}{e^{2x-1}}$
6. $\ln\left(e^{2x+1} \times e^{2-x}\right)$
7. $\dfrac{e^{2x+\ln(2)}}{e^{-x}}$
8. $\dfrac{e^{x+\ln(8)}}{e^{x-\ln(2)}}$

Exercice 2 (★★) – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^{x^2+2x-3} = 1$
2. $\dfrac{e^{x^2-3}}{e^{2x+1}} = e^{-3x+8}$
3. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$
4. $\ln\left(e^{x+1}\right) = e^{x+1} + x$
5. $e^{\ln(x^2+1)} - \ln\left(e^{1-x^2}\right) = \dfrac{1}{2}$
6. $\ln\left(e^{-x}\right) + e^{-\ln(x)} = 0$

Exercice 3 (★★) – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{\frac{1}{x}} \geqslant e$
2. $e^{2x} \leqslant e^x$
3. $e^{2x}e^{x^2} < 1$
4. $e^{x^2-10x+21} \geqslant 1$

Exercice 4 (★★) – Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$.

1. $f(x) = e^{2x} - 1$
2. $f(x) = xe^x - 2$
3. $f(x) = 4 - 2x + e^x$
4. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$
5. $f(x) = e^{-x}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1 - 3e^x$
7. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x^2 - x}$
8. $f(x) = \exp\left(\dfrac{2x+1}{x+3}\right)$
9. $f(x) = e^{x^2-3x+1}$
10. $f(x) = (1-2x)e^x$
11. $f(x) = x + 1 + xe^x$
12. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Exercice 5 (★★★) – Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0.

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x}$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{e^x - 1}$
3. $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$

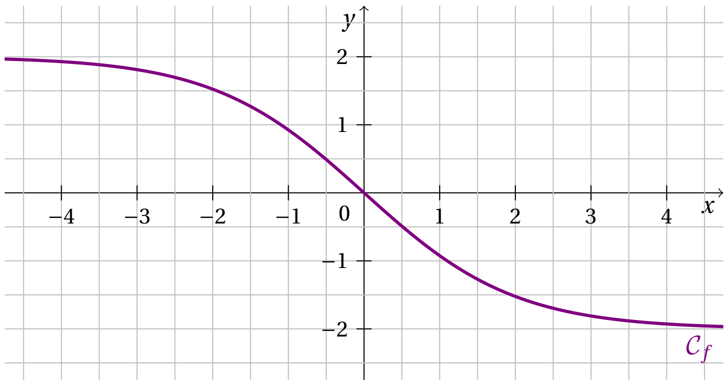
Exercice 6 (★★) – Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2} - \left(e^x\right)^2$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{e^{1-x}}$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} \times e^{x^2-2x+1}$

Exercice 7 (★★) – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x^3-15x^2+36x-25}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 8 (★★★) – On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{1+e^x} - 2$.



1. (a) Calculer $f\left(-\ln(7)\right)$ et $f\left(\ln(3)\right)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes?
3. (a) On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\ln(3)$.

Exercice 9 **(⋆⋆⋆) –** Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \dfrac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de f.
3. En déduire que pour tout réel x, $e^x + e^{-x} \geqslant 2$.

Exercice 10 **(⋆⋆⋆) –** Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{3-2x}{e^x}$.

1. (a) Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = (2x-5) \times e^{-x}$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

Exercice 11 **(⋆⋆⋆) –** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4-x)e^x - 2$.

1. (a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (b) La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes?
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
4. Tracer les asymptotes, la tangente $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}_f$.
   Indication numérique : $e^2 \approx 7.4$ *et* $e^3 \approx 20.1$

Exercice 12 **(⋆⋆⋆) –** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4e^x}{1+e^x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.
2. Montrer que $f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-x}}$, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.
3. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variation.
4. On appelle $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de $\mathcal{T}$.
5. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - (x+2)$.
   (a) Vérifier que $d'(x) = \dfrac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ et en déduire les variations de d.
   (b) Calculer $d(0)$ puis étudier le signe de $d(x)$.
   (c) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{T}$.
6. Tracer les asymptotes trouvées à la question **2.**, la tangente en 0 et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 13 **(⋆⋆⋆) – [BSB 2012 / Ex2]**
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - 1 + x.$$

1. (a) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

2. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   (c) Justifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}.$$
   (b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites calculées à la question **2.**.
4. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 14 **(⋆⋆⋆) –** Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{3x}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-2}^2 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 e^{2x} + \frac{e^x}{4}\,\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$