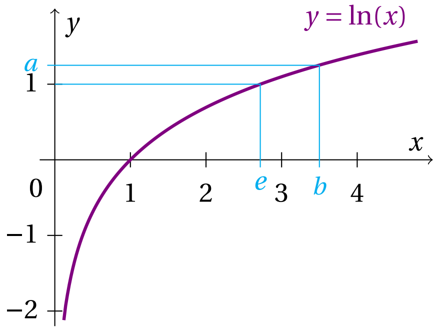
13 | Fonction exponentielle

I – Définition et premières propriétés

Nous pouvons généraliser la démarche qui nous a permis d'introduire dans le chapitre précédent le nombre e. Il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre réel a quelconque : il existe un unique nombre réel b tel que $\ln(b) = a$.



Ainsi pour $a = 1$, on trouve $b = e$. Pour $a = 2$, on trouve $b = e^2$. Pour $a = 3$, on trouve $b = e^3$. Pour $a = -1$, on trouve $b = e^{-1}$. Et pour $a = n$, où n est un entier relatif, on trouve $b = e^n$.

Définition 13.1 – Le nombre b tel que $\ln(b) = a$ est appelé **exponentielle de** a et est noté e^a.

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée exp, définie sur $\mathbf{R}$ et prenant ses valeurs dans $]0,+\infty[$. Pour des raisons évidentes, nous noterons le plus souvent $\exp(x) = e^x$.

$$]0,+\infty[\xrightarrow{\ln}\mathbf{R} \quad \text{et en sens inverse} \quad]0,+\infty[\xleftarrow{\exp}\mathbf{R}.$$

Proposition 13.2

- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\quad e^x > 0$.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$ et pour tout réel $y > 0$, $\quad y = e^x \iff x = \ln(y)$.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\quad \ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\quad e^{\ln(x)} = x$.

Remarque 13.3 – On a

$$\ln(1) = 0 \iff e^0 = 1.$$

Exemple 13.4 – Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes.

- $e^x = 1$
  $e^x = 1 \iff x = \ln(1) \iff x = 0.$
- $e^{2t-1} = 1$
  $e^{2t-1} = 1 \iff 2t-1 = \ln(1) = 0$
  $\iff 2t = 1 \iff t = \dfrac{1}{2}.$
- $\ln(x) = 2$
  $\ln(x) = 2 \iff x = e^2.$
- $\ln(3x) = \dfrac{1}{2}$
  $\ln(3x) = \dfrac{1}{2} \iff 3x = e^{\frac{1}{2}} \iff x = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{3}.$

Proposition 13.5

Pour tous réels a et b,
$$e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Comme pour la fonction logarithme népérien, on peut tirer plusieurs conséquences de cette propriété fondamentale de la fonction exponentielle.

Proposition 13.6

- Pour tout réel $a \in \mathbf{R}$, $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- Pour tous réels a et b dans $\mathbf{R}$, $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout réel $a \in \mathbf{R}$ et pour tout entier relatif $n \in \mathbf{N}$, $\quad e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

Démonstration.

- $e^a \times e^{-a} = e^0 = 1$ donc $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- $e^{a-b} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \dfrac{1}{e^b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- $e^{na} = \exp\left(\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{e^a \times e^a \times \ldots e^a}_{n \text{ fois}} = (e^a)^n$.

□

Exemple 13.7 – Soient x et y deux réels. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$.
2. $\dfrac{(e^x)^2}{e^x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$.
3. $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{x+x} = e^{2x}$.
4. $(e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2 = e^{6x} \times e^{-2x} = e^{6x-2x} = e^{4x}$.
5. $e^0 \times e^{-x} \times (e^x)^2 = 1 \times e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x$.
6. $\dfrac{e^x}{e^y} \times e^{y-x} = e^{x-y} \times e^{y-x} = e^{x-y+y-x} = e^0 = 1$.

II – Étude de la fonction exponentielle

1 – Dérivée et sens de variation

Proposition 13.8

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \ln\left(\exp(x)\right)$.
On a $f'(x) = \dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)}$. Mais on sait par ailleurs que $\ln\left(\exp(x)\right) = x$ et donc que $f(x) = x$. Donc on a également $f'(x) = 1$. Ainsi
$$1 = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} \quad \text{et donc} \quad \exp'(x) = \exp(x).$$

□

Proposition 13.9

La fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** sur **R**.

Démonstration. La fonction exp est dérivable donc continue sur **R**. Et pour tout réel x, on a $\exp'(x) = \exp(x) > 0$. Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur **R**. □

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes.

Proposition 13.10

Pour tous réels a et b,

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$,
- $e^a > e^b$ si et seulement si $a > b$.

Exemple 13.11 – Résoudre dans **R** les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$

$$\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1} \iff e^{5x+2} = e^{2x^2-1} \iff 5x+2 = 2x^2-1 \iff 2x^2-5x+1 = 0.$$

On calcule le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4\times 2\times 1 = 25-8 = 17$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{4}.$$

2. $e^{x^2+x-1} = 1$

$$e^{x^2+x-1} = 1 \iff e^{x^2+x-1} = e^0 \iff x^2+x-1 = 0.$$

On calcule le discriminant $\Delta = 1+4 = 5$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. $e^{2x} \leqslant e^x$

$$e^{2x} \leqslant e^x \iff 2x \leqslant x \iff x \leqslant 0.$$

Donc $\mathcal{S} =]-\infty, 0]$.

4. $e^{2x}e^{x^2} < 1$

$$e^{2x}e^{x^2} < 1 \iff e^{2x+x^2} < e^0 \iff 2x+x^2 < 0.$$

Les racines de ce polynôme de degré 2 sont 0 et -2. On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc $\mathcal{S} =]-2, 0[$.

2 – Limites

Proposition 13.12

La fonction exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Proposition 13.13

La fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

L'axe des abscisses est **asymptote horizontale** à la courbe d'équation $y = e^x$ en $-\infty$.

Exemple 13.14 – Calculer les limites suivantes.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

  On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{X\to0} e^X = 1$. Donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
- $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

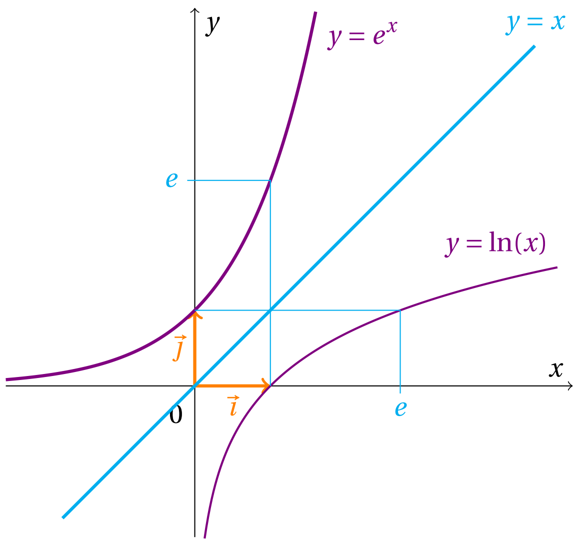
  On a $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

  On a $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. Donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

3 – Courbe représentative

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.

- La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.



4 – Croissances comparées

Proposition 13.15

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

En particulier, lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Remarque 13.16 – Ces limites sont normalement des **formes indéterminées**. Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de croissances comparées.
On retient que l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances de x.

Exemple 13.17 –

- $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty.$

III – Étude d'une fonction de la forme $\exp(u)$

Proposition 13.18

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $f = e^u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

On note en abrégé

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Exemple 13.19 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{x^3-4x^2+2x-3}$. Calculer $f'(x)$.
Posons $u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$. On a $u'(x) = 3x^2 - 8x + 2$. Donc

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (3x^2 - 8x + 2)e^{x^3-4x^2+2x-3}.$$

Exemple 13.20 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{2x^3-15x^2+36x-25}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to-\infty} e^X = 0,$$

donc par composition,

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x^3-15x^2+26x-25} = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = \lim_{x\to+\infty} x^3 + -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty,$$

donc par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x^3-15x^2+26x-25} = +\infty.$$

2. Étudier les variations de la fonction f.
Posons $u(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25$. Alors $u'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$. Donc

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 6(x^2 - 5x + 6)e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25}.$$

Une exponentielle est toujours positive. Il ne nous reste donc qu'à étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$.
On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ et ainsi le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$6(x^2 - 5x + 6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25}$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	e^3	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$