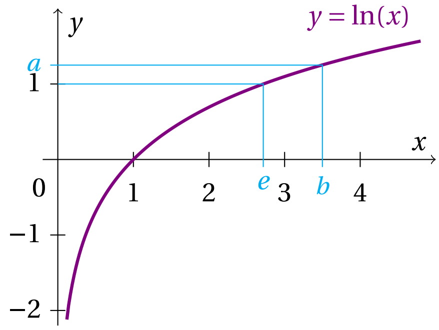
13 Fonction exponentielle

I – Définition et premières propriétés

Nous pouvons généraliser la démarche qui nous a permis d'introduire dans le chapitre précédent le nombre e. Il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre réel a quelconque : il existe un unique nombre réel b tel que $\ln(b) = a$.

Ainsi pour $a = 1$, on trouve $b = e$. Pour $a = 2$, on trouve $b = e^2$. Pour $a = 3$, on trouve $b = e^3$. Pour $a = -1$, on trouve $b = e^{-1}$. Et pour $a = n$, où n est un entier relatif, on trouve $b = e^n$.



Définition 13.1 – Le nombre b tel que $\ln(b) = a$ est appelé **exponentielle de** a et est noté e^a.

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée exp, définie sur $\mathbf{R}$ et prenant ses valeurs dans $]0,+\infty[$. Pour des raisons évidentes, nous noterons le plus souvent $\exp(x) = e^x$.

$$]0,+\infty[\xrightarrow{\ln}\mathbf{R} \quad \text{et en sens inverse} \quad]0,+\infty[\xleftarrow{\exp}\mathbf{R}.$$

Proposition 13.2

- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\quad e^x > 0$.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$ et pour tout réel $y > 0$, $\quad y = e^x \iff x = \ln(y)$.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\quad \ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\quad e^{\ln(x)} = x$.

Remarque 13.3 – On a

$$\ln(1) = 0 \iff e^0 = 1.$$

Exemple 13.4 – Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes.

- $e^x = 1$
- $\ln(x) = 2$
- $e^{2t-1} = 1$
- $\ln(3x) = \dfrac{1}{2}$

Proposition 13.5

Pour tous réels a et b,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Comme pour la fonction logarithme népérien, on peut tirer plusieurs conséquences de cette propriété fondamentale de la fonction exponentielle.

Proposition 13.6

- Pour tout réel $a \in \mathbf{R}$, $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- Pour tous réels a et b dans $\mathbf{R}$, $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout réel $a \in \mathbf{R}$ et pour tout entier relatif $n \in \mathbf{N}$, $\quad e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

Démonstration.

□

Exemple 13.7 – Soient x et y deux réels. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\dfrac{e^{2x}}{e^x}$
2. $\dfrac{(e^x)^2}{e^x}$
3. $\dfrac{e^x}{e^{-x}}$
4. $(e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2$
5. $e^0 \times e^{-x} \times (e^x)^2$
6. $\dfrac{e^x}{e^y} \times e^{y-x}$

II – Étude de la fonction exponentielle

1 – Dérivée et sens de variation

Proposition 13.8

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration.

□

Proposition 13.9

La fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** sur **R**.

Démonstration.

□

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes.

Proposition 13.10

Pour tous réels a et b,

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$,
- $e^a > e^b$ si et seulement si $a > b$.

Exemple 13.11 – Résoudre dans **R** les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$

2. $e^{x^2+x-1} = 1$

3. $e^{2x} \leqslant e^x$

4. $e^{2x}e^{x^2} < 1$

2 – Limites

Proposition 13.12

La fonction exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Proposition 13.13

La fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

L'axe des abscisses est **asymptote horizontale** à la courbe d'équation $y = e^x$ en $-\infty$.

Exemple 13.14 – Calculer les limites suivantes.

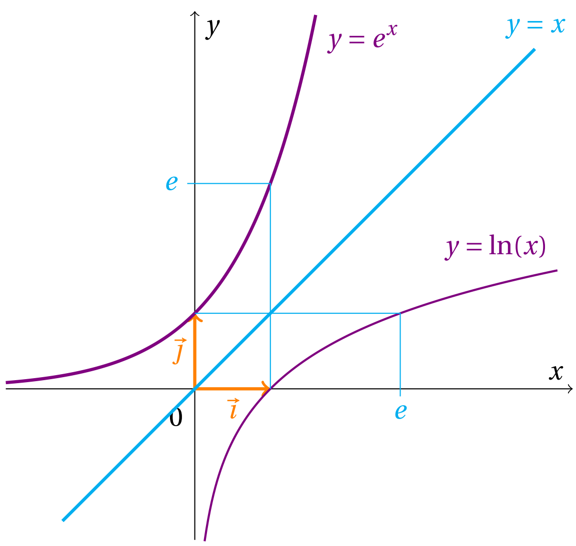
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

- $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

3 – Courbe représentative

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.
- La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.



4 – Croissances comparées

Proposition 13.15

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

En particulier, lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Remarque 13.16 – Ces limites sont normalement des **formes indéterminées**. Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de croissances comparées.
On retient que l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances de x.

Exemple 13.17 –
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x$

III – Étude d'une fonction de la forme $\exp(u)$

Proposition 13.18

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $f = e^u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

On note en abrégé

$$\left(e^u\right)' = u'e^u.$$

Exemple 13.19 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{x^3-4x^2+2x-3}$. Calculer $f'(x)$.

Exemple 13.20 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{2x^3-15x^2+36x-25}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction f.