

NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 27

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 (2x^2 - 5x + 3) dx$

Solution :

$$\int_0^1 (2x^2 - 5x + 3) dx = \left[2 \times \frac{x^3}{3} - 5 \times \frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 3 - 0 = \frac{4}{6} - \frac{15}{6} + \frac{18}{6} = \frac{7}{6}$$

2. $\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx$

Solution : Je cherche une primitive de $f(x) = \frac{x^3}{(1+x^4)^2}$.

f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1+x^4$. Puisque $u'(x) = 4x^3$ alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} = 4f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{u(x)} \right) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{1+x^4} = -\frac{1}{4+4x^4}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx = \left[-\frac{1}{4+4x^4} \right]_0^1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

3. $\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}} dt$

Solution : Je cherche une primitive de $f(t) = \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}$.

f semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^4+1$. Puisque $u'(t) = 4t^3$ alors

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}} = f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = 2\sqrt{u(t)} = 2\sqrt{t^4+1}.$$

Ainsi

$$\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}} dt = \left[2\sqrt{t^4+1} \right]_{-1}^1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$$

4. $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x - 2 \right) dx$

Solution :

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x - 2 \right) dx = \left[2\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^4 = \left(2\sqrt{4} + \frac{16}{2} - 8 \right) - \left(2 + \frac{1}{2} - 2 \right) = 4 + 8 - 8 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

5. $\int_{-1}^0 x(5x^2 + 1)^2 dx$

Solution : Je cherche une primitive de $f(x) = x(5x^2 + 1)^2$.

f semble être de la forme $u' u^2$ avec $u(x) = 5x^2 + 1$. Puisque $u'(x) = 10x$ alors

$$u'(x)u(x)^2 = 10x(5x^2 + 1)^2 = 10f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{10} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{(5x^2 + 1)^3}{30}.$$

Ainsi

$$\int_{-1}^0 x(5x^2 + 1)^2 dx = \left[\frac{(5x^2 + 1)^3}{30} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{30} - \frac{216}{30} = -\frac{215}{30} = -\frac{43}{6}$$

Exercice 2 – Simplifier au maximum les nombres suivants.

1. $\ln(8) - 3\ln(2) + \ln(9)$

Solution :

$$\ln(8) - 3\ln(2) + \ln(9) = \ln(2^3) - 3\ln(2) + \ln(3^2) = 3\ln(2) - 3\ln(2) + 2\ln(3) = 2\ln(3)$$

2. $\frac{4\ln(9) + 5\ln(27)}{\ln(3)}$

Solution :

$$\frac{4\ln(9) + 5\ln(27)}{\ln(3)} = \frac{4 \times 2\ln(3) + 5 \times 3\ln(3)}{\ln(3)} = \frac{(8 + 15)\ln(3)}{\ln(3)} = 23$$

3. $\ln(8) - 3\ln(16)$

Solution :

$$\ln(8) - 3\ln(16) = 3\ln(2) - 3 \times 4\ln(2) = (3 - 12)\ln(2) = -9\ln(2)$$