10 Variables aléatoires réelles

I – Généralités sur les variables aléatoires

1 – Définitions et exemples

Quand on étudie une probabilité, l'univers Ω (l'ensemble des résultats possibles) n'est pas forcément composé d'objets mathématiques : par exemple $\{\text{PILE}, \text{FACE}\}$. Dans ce cas, à chaque issue, on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$. On peut par exemple considérer le gain obtenu à l'issu d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.

Définition 10.1 – Une **variable aléatoire** X est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
On appelle **support** de X et on note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Exemple 10.2 – Tout au long de ce chapitre, on s'appuie sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées :

1. Un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on tire le numéro 1 on gagne 4€, si on tire un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain (algébrique).
   X est une variable aléatoire et son support est donné par
   $$X(\Omega) =$$
2. On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des deux résultats obtenus.
   X est une variable aléatoire et son support est donné par
   $$X(\Omega) =$$

2 – Événements associés à une variable aléatoire

Définition 10.3 – Soient X une variable aléatoire sur Ω et $x \in \mathbb{R}$ un réel. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des issues de l'univers dont l'image par la variable aléatoire X est x.
De la même manière, on définit

$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}, \qquad [X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$

$$[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}, \qquad [X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}.$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors on note

$$[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega \mid x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}.$$

Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbb{R}$, on note

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}.$$

Exemple 10.4 – Calculer $P\big([X=3]\big)$ et $P\big([X\leqslant 2]\big)$ dans les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1.

2.

Proposition 10.5

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Alors $\big\{[X=x] \mid x\in X(\Omega)\big\}$, ensemble des événements $[X=x]$ pour toutes les valeurs x du support $X(\Omega)$, forme un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\big)=1.$$

Exemple 10.6 – Donner un système complet d'événements pour chacun des deux exemples de l'Exemple 10.2.

1. Un système complet d'événements est donné par
2. Un système complet d'événements est donné par

Remarque 10.7 – Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P\big([X=x]\big)$ en $P(X=x)$ et il en est de même pour les autres ensembles.

3 – Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 10.8 – Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi** de la variable aléatoire X la donnée de toutes les probabilités $P(X=x)$ pour tous les réels $x\in X(\Omega)$.

Méthode 10.9 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

1. On détermine le support $X(\Omega)$, *i.e.* l'ensemble des valeurs prises par X.
2. On calcule la probabilité $P(X=x)$ pour tout $x\in X(\Omega)$.

On résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec sur la première ligne l'ensemble des valeurs prises par X et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

Exemple 10.10 – Déterminer la loi de X dans les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1.

2.

Remarque 10.11 – On n'oublie pas de vérifier **à chaque fois** que la somme des probabilités inscrites dans le tableau fait 1.

4 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition 10.12 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X et on note F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Les valeurs prises par F_X sont des probabilités donc **toujours** comprises entre 0 et 1.

Proposition 10.13

Soit X une variable aléatoire finie. On note le support $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Alors

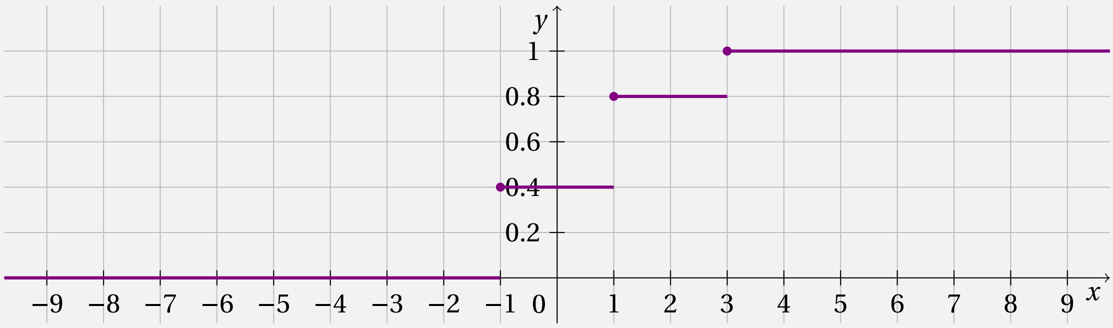
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1, \\ P(X = x_1) & \text{si } x_1 \leqslant x < x_2, \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) & \text{si } x_2 \leqslant x < x_3, \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) & \text{si } x_k \leqslant x < x_{k+1}, \qquad (\text{pour } 3 \leqslant k \leqslant n-1) \\ 1 & \text{si } x_n \leqslant x. \end{cases}$$

En particulier F_X est constante sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$, c'est-à-dire entre deux valeurs consécutives du support.

Exemple 10.14 – Calculer la fonction de répartition de X dans les deux exemples de l'Exemple 10.2.

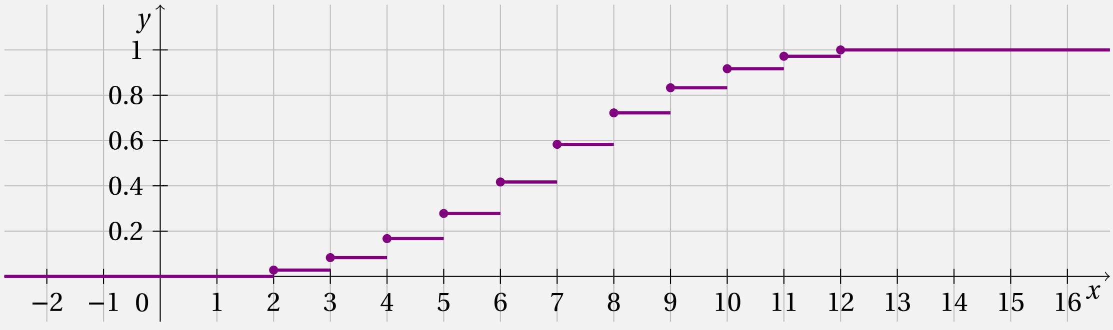
1.

Et voici le tracé de la fonction de répartition :



2.

Et voici le tracé de la fonction de répartition :



Proposition 10.15

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X. Autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

II – Moments d'une variable aléatoire finie

1 – Espérance

Définition 10.16 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont le support est noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On appelle **espérance** de X le réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n.$$

Remarque 10.17 –

- L'espérance $E(X)$ correspond à la **moyenne** des valeurs x_i affectées des fréquences p_i.
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $E(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois. Le signe de $E(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre. Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est **équitable**.

Exemple 10.18 – Calculer l'espérance de X pour chacun des deux exemples de l'Exemple 10.2.

1.

2.

Proposition 10.19 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires finies définies sur Ω et a et b deux réels. Alors

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX+b) = aE(X) + b.$$

Exemple 10.20 – On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.
Soient g la fonction définie par $g(x) = 2x+3$ et $Y = g(X) = 2X+3$. Déterminer l'espérance de Y.

Théorème 10.21 – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire finie. On note le support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i).$$

Exemple 10.22 – On considère la fonction $g(x) = x^2$. Calculer $E\big(g(X)\big)$ pour chacun des deux exemples de l'Exemple 10.2.

1.

2.

Remarque 10.23 –

- Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.
- Ce théorème est principalement utilisé pour calculer $E\big(X^2\big)$, l'espérance du carré d'une variable aléatoire, quantité nécessaire au calcul de la variance de X en utilisant la formule de König-Huygens.

2 – Variance

Définition 10.24 – Soit X une variable aléatoire finie.

- On appelle **variance** de X le réel, noté $V(X)$, défini par

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - E(X)\big)^2 P(X = x_i).$$

- On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque 10.25 – La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Théorème 10.26 – Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire finie. Alors

$$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2.$$

Méthode 10.27 – Calculer la variance d'une variable aléatoire

1. On calcule $E\big(X^2\big)$ grâce au théorème de transfert.
2. Puis on utilise la formule de König-Huygens : $V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2$.

Exemple 10.28 – Calculer la variance $V(X)$ pour les deux exemples de l'Exemple 10.2.

1.

2.

Proposition 10.29

Soient X une variable aléatoire finie et a et b deux réels. Alors

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

En particulier

$$V(X+b) = V(X).$$

Remarque 10.30 – Contrairement à l'espérance, la variance **N'**est **PAS** linéaire.

Exemple 10.31 – On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$.
Calculer la variance de la variable aléatoire X puis celle de Y.

Remarque 10.32 – Lorsqu'une variable aléatoire admet une espérance nulle, on parle de variable **centrée**. Si en plus, son écart-type vaut 1, alors on parle de variable **centrée réduite**.

III – Lois usuelles

1 – Loi uniforme

Définition 10.33 – Soit un couple d'entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![a,b]\!]$ lorsque son support vaut $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$ et que chaque valeur a la même probabilité d'arriver :

$$\forall k \in [\![a,b]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{n},$$

avec n le nombre de valeurs dans l'intervalle $[\![a,b]\!]$, *i.e.* $n = b-a+1$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Exemple 10.34 – Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on note X le numéro obtenu.

Proposition 10.35

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,n]\!]$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Proposition 10.36

Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a,b]\!]$.
Alors la variable aléatoire $X-a+1$ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,b-a+1]\!]$ et l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

où $n = b-a+1$ est le nombre de valeurs.

2 – Loi de Bernoulli

Définition 10.37 – Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in \left]0,1\right[$ lorsqu'il n'y a que deux issues possibles, *i.e.* $X(\Omega) = \{0,1\}$, et que

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Une **épreuve** de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : l'une que l'on qualifie de "succès", de probabilité p, et l'autre que l'on qualifie d'"échec", de probabilité $1-p$.
On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un "succès", la variable aléatoire prend la valeur $X=1$, sinon elle prend la valeur $X=0$.

Exemple 10.38 – On lance une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est PILE et 0 sinon.

Proposition 10.39

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0,1\right[$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X)=p \quad \text{et} \quad V(X)=p(1-p).$$

Remarque 10.40 – Lorsque $p=1$, *i.e.* que le support est restreint à un unique élément, on parle alors de **loi certaine**. Les lois certaines sont caractérisées par une variance nulle.

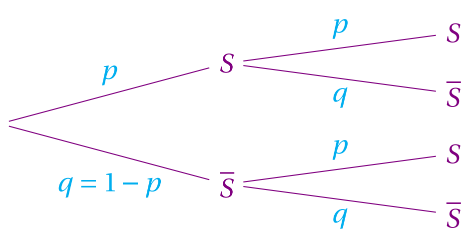
3 – Loi binomiale

Définition 10.41 – L'expérience aléatoire qui consiste à **répéter** n fois une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p, **à l'identique** et **de manière indépendante**, est appelée un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves de ce schéma de Bernoulli suit une **loi binomiale** de paramètres n et p. On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 10.42 – On lance dix fois de suite une pièce équilibrée et on note X le nombre de PILE obtenus.

Dans les cas où $n=2$ ou $n=3$, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.

1. Cas $n=2$
   On répète deux épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de manière indépendante.



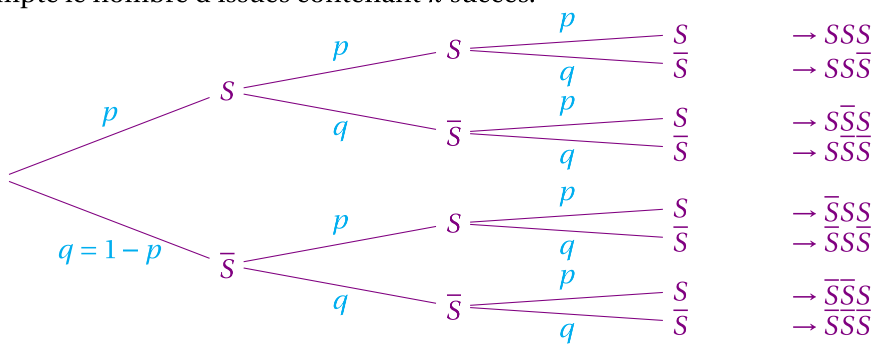
   La variable aléatoire X, égale au nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $n=2$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2
$P(X=k)$	q^2	$2\times p\times q$	p^2

2. Cas $n=3$
   On répète trois épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de façon indépendante.
   L'expérience comporte $2^3=8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\left\{SSS, SS\overline{S}, S\overline{S}S, \overline{S}SS, S\overline{S}\,\overline{S}, \overline{S}S\overline{S}, \overline{S}\,\overline{S}S, \overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\right\}.$$

Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X, égale au nombre de succès, on dresse un arbre et on compte le nombre d'issues contenant k succès.



La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X = k)$	q^3	$3 \times p \times q^2$	$3 \times p^2 \times q$	p^3

Définition 10.43 – Soient n un entier naturel non nul et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Si on représente par un arbre une série de n épreuves de Bernoulli, le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves répétées.

Remarque 10.44 –

- Un seul chemin permet d'obtenir 0 succès ou n succès consécutifs, donc $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- Il y a n chemins différents qui permettent d'obtenir un seul succès. Ainsi $\binom{n}{1} = n$.

Proposition 10.45

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Corollaire 10.46

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les trois valeurs principales à retenir pour les coefficients binomiaux sont les suivantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pour les coefficients suivants, il suffit de rajouter des facteurs au numérateur (en retirant 1 à chaque fois au précédent) et au dénominateur (en ajoutant 1 à chaque fois au précédent).

Proposition 10.47

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$,

- Relation de symétrie des coefficients :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

- Formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Remarque 10.48 – La formule du triangle de Pascal permet de déterminer les coefficients binomiaux de proche en proche.

Exemple 10.49 – Calculer les coefficients binomiaux suivants.

- $\binom{4}{2}$
- $\binom{5}{2}$
- $\binom{11}{1}$
- $\binom{3}{0}$

Proposition 10.50

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p. Alors le support de X vaut $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Proposition 10.51

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Exemple 10.52 – Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients choisissent l'option *Livraison Express*. On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bons portant la mention *Livraison Express*.

1. Déterminer la loi de X en justifiant soigneusement.

2. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.

4 – Formule du binôme de Newton

Théorème 10.53 – Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux réels de $\mathbb{R}$ et n un entier de $\mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 10.54 – Développer $(2+x)^3$ à l'aide du binôme de Newton.