BSB 2021

Exercice 1 –

1. Pour vérifier que la matrice M est idempotente, je calcule M^2.

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = M.$$

   J'ai bien montré que $M^2 = M$, *i.e.* que M est idempotente.

2. (a) Comme la matrice M est idempotente, par définition, $M^2 = M$. Donc

$$M^2 - M = O_n,$$

   où O_n désigne la matrice nulle d'ordre n.
   J'en déduis que le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de la matrice M.

   (b) Les valeurs propres d'une matrice sont nécessairement parmi les racines d'un polynôme annulateur. Comme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de la matrice M, je cherche ses racines. Or

$$X^2 - X = 0 \iff X(X-1) = 0 \iff X = 0 \text{ ou } X - 1 = 0 \iff X = 0 \text{ ou } X = 1.$$

   Donc les valeurs propres possibles pour la matrice M sont 0 et 1.

   (c) Pour vérifier que la matrice $N = I_n - M$ est idempotente, je calcule N^2.

$$N^2 = (I_n - M)^2 = (I_n - M) \times (I_n - M) = I_n \times I_n - I_n \times M - M \times I_n + M \times M = I_n - M - M + M^2.$$

   Or M est idempotente, donc $M^2 = M$, *i.e.*

$$N^2 = I_n - 2M + M = I_n - M = N.$$

   J'ai bien montré que $N^2 = N$, *i.e.* que N est idempotente.

3. (a) Pour vérifier que la matrice C est idempotente, je calcule C^2.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = C.$$

   J'ai bien montré que $C^2 = C$, *i.e.* que C est idempotente.
   En outre, grâce à la question 2, comme la matrice C est idempotente, j'en déduis que la matrice $D = I_2 - C$ est elle-aussi idempotente.
   Je calcule CD et DC. Comme C est idempotente,

$$CD = C \times (I_2 - C) = C \times I_2 - C \times C = C - C^2 = C - C = O_2.$$

   De la même manière, $DC = C - C^2 = O_2$.

   (b) Notons P_n la propriété $B^n = 2^n C + D$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$B^0 = I_2 \quad \text{et} \quad 2^0 C + D = C + D = C + I_2 - C = I_2.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$B^{n+1} = B^n \times B = \left(2^n C + D\right) \times (2C + D) = 2^{n+1} C^2 + 2^n CD + 2DC + D^2.$$

Or par idempotence, $C^2 = C$ et $D^2 = D$, puis avec les calculs de la question précédente, $CD = DC = O_2$. Donc

$$B^{n+1} = 2^{n+1} C + D.$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad B^n = 2^n C + D.$$

Alors la formule explicite de B^n est

$$B^n = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ -2 \times 2^n + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}.$$

J'ai montré que

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Je calcule P^2.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Comme $P^2 = I_2$, je déduis que la matrice P est inversible et que son inverse est $P^{-1} = P$.

(d) Je calcule $P^{-1}AP$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je calcule aussi B pour vérifier que $P^{-1}AP = B$.

$$B = 2C + D = 2C + I_2 - C = C + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $P^{-1}AP = B$.

(e) Comme $P^{-1}AP = B$, je sais que

$$P \times P^{-1}AP \times P^{-1} = PBP^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A = PBP^{-1}.$$

Notons P_n la propriété $A^n = PB^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_2 \quad \text{et} \quad P^{-1}B^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$A^{n+1} = A^n \times A = PB^nP^{-1} \times PBP^{-1} = PB^nI_2BP^{-1} = PB^nBP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}.$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = PB^nP^{-1}.$$

(f) Je sais que $A^n = PB^nP^{-1}$ grâce à la question précédente et je connais les coefficients de la matrice B^n par la question 3b. Donc

$$\begin{aligned}
PB^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+1}-1+2^{n+1}-2 & 2^n-1+2^n-2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2\times 2^{n+1}-3 & 2\times 2^n-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+2}-3 & 2^{n+1}-3 \end{pmatrix} \\
\text{et} \quad PB^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+2}-3 & 2^{n+1}-3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}+2^n-2 & -2^n+1 \\ 2^{n+2}+2^{n+1}-6 & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2+1)\times 2^n-2 & -2^n+1 \\ (2^2+2)\times 2^n-6 & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2^n-2 & -2^n+1 \\ 6\times\left(2^n-1\right) & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$A^n = \begin{pmatrix} 3\times 2^n-2 & -2^n+1 \\ 6\times\left(2^n-1\right) & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 –

1. J'étudie le signe de x^2+x+1 pour $x \in \mathbf{R}$. C'est un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = 1-4 = -3 < 0$. Comme le discriminant est négatif, le polynôme n'admet pas de racine et son signe est constant. Comme $a = 1 > 0$, j'en déduis que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2+x+1 > 0.$$

2. Je sais que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
Alors, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, j'en déduis par composition que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Je calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \ln(3) - \ln(4) = \ln(3) - \ln\left(2^2\right) = \ln(3) - 2\ln(2).
\end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2).$$

4. (a) La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$, avec $u(x) = x^2 + x + 1$. On a $u'(x) = 2x + 1$, donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

(b) J'obtiens les variations de f en étudiant le signe de $f'(x)$. Je sais que le dénominateur est strictement positif d'après la question 1. Je cherche le signe du numérateur :

$$2x+1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -1 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Je peux donc déduire le tableau de variation de f grâce au tableau de signe de f'.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3) - 2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. (a) Je résous $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \iff \ln(x^2+x+1) = 0 \iff x^2+x+1 = e^0 = 1 \iff x^2+x = 0$$
$$\iff x(x+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1.$$

J'ai bien montré que les deux seules solutions de $f(x) = 0$ sont -1 et 0.

(b) L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en le point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0).$$

Or $f(0) = 0$ puisque 0 est solution de $f(x) = 0$, et $f'(0) = \dfrac{2\times 0+1}{0^2+0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Donc la tangente au point d'absisse 0 a pour équation

$$y = 1 \times (x-0) + 0 \iff y = x.$$

De la même manière, si $a = -1$, l'équation de la tangente devient

$$y = f'(-1) \times \big(x - (-1)\big) + f(-1).$$

Or $f(-1) = 0$ puisque -1 est aussi solution de $f(x) = 0$, et $f'(-1) = \dfrac{-2+1}{1-1+1} = \dfrac{-1}{1} = -1$.
Donc la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation

$$y = -1 \times (x+1) + 0 \iff y = -x - 1.$$

6. (a) Je dérive de nouveau f' pour obtenir f''. La fonction f' est donnée sous la forme d'un quotient $f' = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x^2+x+1$.
On a alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x+1$, puis

$$f''(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{2x^2+2x+2-(4x^2+4x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

J'ai bien montré que

$$f''(x) = \frac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

(b) Pour étudier la convexité de f, j'étudie le signe de $f''(x)$. Pour commencer, je remarque que le dénominateur est toujours positif. Alors le signe de $f''(x)$ me sera donné par celui de $-2x^2-2x+1$. Je cherche donc le signe de ce polynôme de degré 2.
Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 4+8 = 12 > 0$.
Il y a donc deux racines, et je remarque que $\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{12}}{2\times(-2)} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{12}}{2\times(-2)} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Comme $a = -2$, je déduis le tableau de signe de $-2x^2-2x+1$, qui n'est autre que celui de $f''(x)$.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Je peux alors déduire que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$, car $f''(x)$ y est positif, et concave sur les intervalles $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right]$ et $\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.
Cela nous amène bien à deux points d'inflexions, moment où la convexité change, l'un au point d'abscisse $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, l'autre au point d'abscisse $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

7. (a) Le fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Or j'ai déjà montré que $f(0) = 0$ et que la limite de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ est $+\infty$. Ainsi, comme $1 \in [0,+\infty[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, je peux déduire qu'il existe une unique solution, notée α, à l'équation $f(x) = 1$.

(b) On a $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(1+1+1) = \ln(3) \approx 1.1$. Comme $f(0) \leqslant 1 = f(\alpha) \leqslant f(1)$ et que f est croissante, j'en déduis que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
J'ai bien montré que

$$\alpha \in [0,1].$$

(c) Comme α est solution de $f(x) = 1$, je sais que $\ln(\alpha^2+\alpha+1) = 1$. Alors,

$$f(-1-\alpha) = \ln\left((-1-\alpha)^2 + (-1-\alpha)+1\right) = \ln\left(\alpha^2+2\alpha+1-1-\alpha+1\right) = \ln\left(\alpha^2+\alpha+1\right) = 1.$$

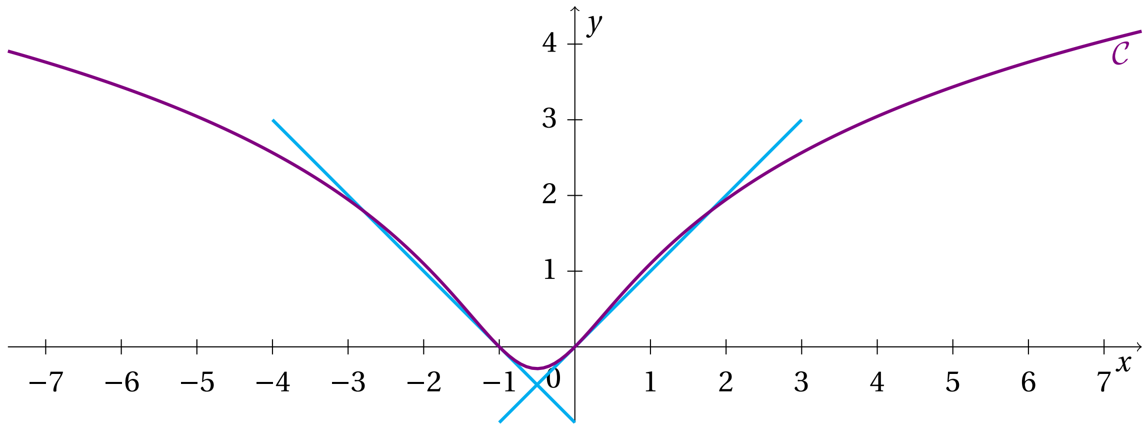
J'ai bien montré que

$$f(-1-\alpha) = 1.$$

(d) Voici le script complété.

```
function y=f(x)
    y=log(x^2+x+1)
endfunction
a=0, b=1
while b-a>10^(-3)
    c=(a+b)/2
    if f(c) < 1 then a=c
        else b=c
    end
end
disp(a)
```

8. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de ses tangentes.



Exercice 3 –

1. (a) La probabilité a_2 est la probabilité de l'évènement A_2, à savoir que le joueur tire vers la cible A. Or s'il tire de nouveau vers la cible A, c'est qu'il n'a pas réussi à atteindre le secteur 1 la première fois. Comme il n'y a que deux secteurs sur la cible A, on a

$$a_2 = P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

De la même manière, b_2 est la probabilité de l'évènement B_2, à savoir que le joueur tire vers la cible B. Or s'il tire cette fois vers la cible B, c'est qu'il a réussi à atteindre le secteur 1 la première fois sur la cible A. Comme il n'y a que deux secteurs sur cette cible, on a

$$b_2 = P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

(b) Le deuxième lancer ne pouvant se faire que sur l'une des deux cibles A ou B, $\{A_2, B_2\}$ forme un système complet d'évènements. Alors, par la formule des probabilités totales,

$$b_3 = P(B_3) = P(A_2 \cap B_3) + P(B_2 \cap B_3) = P(A_2) \times P_{A_2}(B_3) + P(B_2) \times P_{B_2}(B_3)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

J'ai bien montré que

$$b_3 = \frac{5}{8}.$$

2. On raisonne de manière similaire à la question précédente. Si le joueur effectue un $n+1$-ième lancer, alors le n-ième lancer a été tiré ou bien sur la cible A, ou bien sur la cible B. Donc $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'évènements. Alors, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times 0 = \frac{1}{2} a_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n + \frac{1}{2} a_n.$$

3. (a) Voici le script complété.

```
1.  n=input('n ?')
2.  a=1, b=0
3.  for i=2:n
4.      b=b*3/4+a/2
5.      a=a/2
6.  end
7.  disp(b,a)
```

(b) Si l'on échange les lignes 4. et 5., la variable `a` sera mise à jour en premier et contiendra la valeur a_i au moment de mettre à jour la variable `b` par la valeur b_i. C'est un problème puisque b_i dépend de a_{i-1} et non pas de a_i.

4. Je sais que $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$, donc la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Son premier terme est $a_1 = 1$. Je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

5. (a) Comme $v_n = 2^{n-1} b_n + 2$, je sais que

$$v_1 = 2^{1-1} b_1 + 2 = 1 \times b_1 + 2 = 1 \times 0 + 2 = 2.$$

Aussi, pour tout $n \geqslant 1$, en me servant des questions précédentes et du fait que

$$v_n = 2^{n-1} b_n + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad v_n - 2 = 2^{n-1} b_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = b_n,$$

je peux montrer que

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2^{n+1-1} b_{n+1} + 2 = 2^n \left(\frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n \right) + 2 \\ &= \frac{2^n}{2} a_n + \frac{3 \times 2^n}{4} b_n + 2 = \frac{2^n}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{3 \times 2^n}{4} \times \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} + 2 \\ &= \frac{2^n}{2 \times 2^{n-1}} + \frac{3 \times 2^n \times (v_n - 2)}{4 \times 2^{n-1}} + 2 = 1 + \frac{3(v_n - 2)}{2} + 2 \\ &= 1 + \frac{3}{2} v_n - 3 + 2 = \frac{3}{2} v_n. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$v_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n.$$

(b) Je reconnais en (v_n) une suite géométrique, de raison $q = \frac{3}{2}$ et de premier terme $v_1 = 2$. Je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

(c) Comme j'ai établi dans les questions précédentes que $b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}}$ et que $v_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, il me suffit de combiner pour obtenir que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^{n-1}} \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}} = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

6. Voici le script complété.

```
cible="a"
n=1
while cible <>"c"
    n=n+1
    if cible =="a" then
        secteur=grand(1,1,'uin',1,2)
        if secteur==1 then cible="b"
        end
    else
        if cible =="b" then
            secteur=grand(1,1,'uin',1,4)
            if secteur==1 then cible="c"
            end
        end
    end
end
disp(n)
```

7. (a) Si le joueur se décourage au bout de deux lancers, la seule façon pour que celui-ci gagne un lot est qu'il arrive à la cible C en deux lancers, c'est-à-dire qu'il atteigne le secteur 1 de la cible A au premier lancer, puis le secteur 1 de la cible B au deuxième lancer.
La probabilité ainsi obtenue est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
J'ai bien montré que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot est de $\frac{1}{8}$.

(b) Les 20 joueurs représentent $n = 20$ répétitions d'une même loi de Bernoulli de succès "Le joueur gagne un lot", de probabilité $p = \frac{1}{8}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire Y compte le nombre de succès. J'en déduis que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $= \frac{1}{8}$.
Le support de Y est $Y(\Omega) = [\![0, 20]\!]$, et pour tout $k \in [\![0, 20]\!]$,

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{20}{k} \times \frac{1}{8^k} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{20-k}.$$

(c) Comme Y suit une loi binomiale, je sais que

$$E(Y) = np = 20 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = np(1-p) = \frac{5}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{16}.$$

(d) Y compte le nombre de succès des joueurs, ce qui coute au forain 5€ de lot mais lui rapporte 3 fois 1€ par fléchette lancée. Soit un gain algébrique de −2€. Cela nous laisse $(20 - Y)$ échecs qui eux rapportent au forain 2€. En additionnant tout cela, le gain total du forain vaut

$$G = -2 \times Y + 2 \times (20 - Y) = 2(20 - Y) - 2Y.$$

Le gain moyen du forain correspond à l'espérance de G, *i.e.* , par linéarité,

$$E(G) = E\big(2(20 - Y) - 2Y\big) = 2\big(20 - E(Y)\big) - 2E(Y) = 2\left(20 - \frac{5}{2}\right) - 2 \times \frac{5}{2} = 40 - 5 - 5 = 30.$$

Le forain gagne en moyenne 30€ pour 20 joueurs.

Exercice 4 –

1. (a) La fonction f est définie en deux morceaux. Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, $f(t) = 0 \geqslant 0$ donc la fonction f est positive. Et sur l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$. Comme $t \geqslant 0$, alors on a $-t \leqslant \frac{t}{2}$, et par croissance de la fonction exponentielle $e^{-t} \leqslant e^{-\frac{t}{2}}$, donc $f(t) \geqslant 0$.
En résumé, la fonction f est positive sur $\mathbf{R}$ tout entier.

(b) Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, $f(t) = 0$ donc la fonction f est continue car constante. Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$ donc la fonction f est continue comme somme de fonctions continues. Il ne me reste plus qu'à étudier la continuité en $t = 0$.

$$\lim_{t \to 0^-} f(t) = \lim_{t \to 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to 0^+} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t} = e^{-\frac{0}{2}} - e^{-0} = 1 - 1 = 0.$$

Comme la limite à gauche de f en 0 est égale à la limite à droite de f en 0, on en déduit que la fonction f est continue en 0.
En conclusion, la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ tout entier.

(c) Par définition, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la limite $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-at}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.

Soit $X \geqslant 0$. Je cherche à calculer $\displaystyle\int_0^X e^{-at}\,\mathrm{d}t$. Je commence par remarquer qu'une primitive de $g(t) = e^{-at}$ est donnée par $G(t) = -\dfrac{1}{a}e^{-at}$. Donc

$$\int_0^X e^{-at}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^X = -\frac{1}{a}e^{-aX} + \frac{1}{a}e^{-a\times 0} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}e^{-aX}.$$

Il me reste à étudier la limite de cette quantité lorsque X tend vers $+\infty$. Comme $a > 0$,

$$\lim_{X\to+\infty} -aX = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty} e^{-aX} = 0.$$

Je peux alors déduire que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\times 0 = \frac{1}{a}$, ce qui indique que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}.$$

(d) Je sais déjà que f est positive et continue sur $\mathbf{R}$. Il me reste à montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Je décompose, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Je sais que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0 car la fonction dans l'intégrale est nulle.

Grâce à la question précédente, appliquée en $a = 1$ et $a = \dfrac{1}{2}$, je sais aussi que les deux intégrales suivantes convergent et je connais leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut, par linéarité,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 2 - 1 = 1.$$

En résumé, la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$, positive sur $\mathbf{R}$ et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + 1 = 1,$$

donc je peux en conclure que f est une densité de probabilité.

2. (a) La fonction de répartition F de X est donnée par $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si $x < 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

(b) Si $x \geqslant 0$, la fonction de répartition est

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{x} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x - \left[-e^{-t}\right]_0^x = -2e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{0}{2}} + e^{-x} - e^{-0} \\ &= -2e^{-\frac{x}{2}} + 2 + e^{-x} - 1 = -2e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

J'ai montré que pour tout $x \geqslant 0$,

$$F(x) = 1 - 2e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x}.$$

3. (a) Comme la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre a, je sais que sa densité est donnée par la fonction

$$f_Y(t) = \begin{cases} ae^{-at} & \text{si } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Aussi, son espérance est donnée par

$$E(Y) = \frac{1}{a}.$$

(b) D'après la définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité, je sais que

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} tae^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

En combinant les deux précédentes équations, j'obtiens que

$$\int_{0}^{+\infty} tae^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}.$$

Alors, en divisant des deux côtés par a non-nul, j'obtiens que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_{0}^{+\infty} te^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}.$$

(c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or, sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} t \times 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} t \times f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}} - te^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Et comme les deux intégrales impliquées convergent (il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente en $a = 1$ et $a = \frac{1}{2}$), j'en déduis que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc que la variable aléatoire X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{1^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{1} = 4 - 1 = 3. \end{aligned}$$

L'espérance de X vaut $E(X) = 3$.