INTERRO DE COURS 7

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes à l'aide des primitives usuelles.

1. $I_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x$,

Solution :

$$I_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 5x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 2 - 5 = \frac{-15}{4}.$$

2. $I_2 = \int_0^2 (6x+3)^7\,\mathrm{d}x$, *(Vous avez le droit d'arrêter le calcul lorsque celui-ci vous semble trop compliqué.)*

Solution : Posons $f_2(x) = (6x+3)^7$. f_2 semble être de la forme $u'u^7$, avec $u(x) = 6x+3$.
On a $u'(x) = 6$ donc $u'(x)u(x)^7 = 6(6x+3)^7 = 6f_2(x)$.
Ainsi une primitive de f_2 est donnée par $F_2(x) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} u(x)^8 = \frac{1}{48}(6x+3)^8$.
Donc

$$I_2 = \int_0^2 (6x+3)^7\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{48}(6x+3)^8\right]_0^2 = \frac{15^8}{48} - \frac{3^8}{48} = \frac{\left(15^4+3^4\right)\left(15^4-3^4\right)}{48} = \cdots = 53393418.$$

3. $I_3 = \int_1^3 \frac{4}{\sqrt{3x+7}}\,\mathrm{d}x$,

Solution : Posons $f_3(x) = \frac{4}{\sqrt{3x+7}}$. f_3 semble être de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, avec $u(x) = 3x+7$.
On a $u'(x) = 3$ donc $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+7}} = \frac{3}{8} f_3(x)$.
Ainsi une primitive de f_3 est donnée par $F_3(x) = \frac{8}{3} \times 2\sqrt{u(x)} = \frac{8}{3}\sqrt{3x+7}$.
Donc

$$I_3 = \int_1^3 \frac{4}{\sqrt{3x+7}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{8}{3} \times \sqrt{3x+7}\right]_1^3 = \frac{8}{3}\sqrt{16} - \frac{8}{3}\sqrt{10} = \frac{8}{3}\left(4 - \sqrt{10}\right).$$

4. $I_4 = \int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

Solution : Posons $f_4(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}$. f_4 semble être de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+x+1$.
On a $u'(x) = 2x+1$ donc $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} f_4(x)$.
Ainsi une primitive de f_4 est donc donnée par $F_4(x) = 2\ln|x^2+x+1|$.
Donc

$$I_4 = \int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \left[2\ln|x^2+x+1|\right]_2^4 = 2\ln(21) - 2\ln(7) = 2\ln\left(\frac{21}{7}\right) = 2\ln(3).$$

Exercice 2 – Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1. $I_5 = \int_0^2 te^t \, \mathrm{d}t$,

Solution : Posons
$$\begin{array}{cc} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{array}$$
Alors, par intégration par parties,
$$I_5 = \int_0^2 te^t \, \mathrm{d}t = \left[te^t \right]_0^2 - \int_0^2 e^t \, \mathrm{d}t = 2e^2 - \left[e^t \right]_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

2. $I_6 = \int_1^e t \ln(t) \, \mathrm{d}t$.

Solution : Posons
$$\begin{array}{cc} u'(t) = t & u(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}$$
Alors, par intégration par parties, $I_6 = \int_1^e t \ln(t) \, \mathrm{d}t$
$$= \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}.$$