ESCP 2018

Exercice 1 –

1. a) Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{E}$ vérifie en particulier que $ad - bc = 0$.
Or une matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si $ad - bc$ est non nul. Donc les matrices de $\mathcal{E}$ ne sont pas inversibles.

b) Il me suffit de vérifier les deux équations pour les deux matrices en question.
Pour la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $a = b = 1$ et $c = d = -1$. Alors

$$a + d = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad ad - bc = 1 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 + 1 = 0.$$

J'ai bien montré que $M_1 \in \mathcal{E}$.
Pour la matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $a = c = 1$ et $b = d = -1$. Alors

$$a + d = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad ad - bc = 1 \times (-1) - (-1) \times 1 = -1 + 1 = 0.$$

J'ai bien montré que $M_2 \in \mathcal{E}$ aussi.

c) Je me sers des deux matrices M_1 et M_2 introduites à la question précédente. Je pose $S = M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. J'obtiens que $a = 2$, $d = -2$ et $b = c = 0$. Alors

$$ad - bc = 2 \times (-2) - 0 \times 0 = -4 - 0 = -4 \neq 0.$$

Ainsi la somme de deux matrices de $\mathcal{E}$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{E}$.
De même, en posant $P = M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. J'obtiens que $a = d = 2$ et $b = c = -2$. Alors

$$a + d = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Ainsi le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{E}$ non plus.

d) Je commence par calculer le carré de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$.
Comme la matrice M est une matrice de $\mathcal{E}$, alors en particulier $a + d = 0 \iff a = -d$ et $a^2 = d^2 = -ad$. Ainsi je peux réécrire

$$M^2 = \begin{pmatrix} bc - ad & b(a+d) \\ c(a+d) & bc - ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque $bc - ad = -(ad - bc) = 0$.
Finalement, j'ai montré que si $M \in \mathcal{E}$, alors M^2 est la matrice nulle.
Donc pour tout entier $n \geqslant 2$, $M^n = M^2 \times M^{n-2} = 0_2 \times M^{n-2} = 0_2$.

2. a) Je calcule le déterminant de la matrice A : $1 \times 5 - 2 \times (-2) = 5 + 4 = 9 \neq 0$.
Donc la matrice A est bien inversible.

b) Je calcule la matrice K :

$$K = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

J'obtiens que $a = c = -2$ et $b = d = 2$. Alors

$$a + d = -2 + 2 = 0 \quad \text{et} \quad ad - bc = (-2) \times 2 - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0.$$

J'ai donc bien montré que $K = A - 3I \in \mathcal{E}$.

c) *(i)* Comme $K = A - 3I$, alors $A = K + 3I$. Pour calculer A^n, j'utilise la formule du binôme de Newton. Pour cela, je vérifie que les deux matrices commutent : $K \times (3I) = 3K$ et $(3I) \times K = 3K$ donc les matrices K et $3I$ commutent et d'après la formule du binôme de Newton,

$$A^n = (K + 3I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} K^k (3I)^{n-k}.$$

D'après la question **2.b)**, je sais que $K \in \mathcal{E}$ donc que $K^k = 0_2$ pour tout $k \geqslant 2$ d'après la question **1.d)**. Par conséquent, tous les termes de la somme sont nuls sauf les deux premiers où $k = 0$ et $k = 1$. Ainsi pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$A^n = \binom{n}{0} K^0 (3I)^{n-0} + \binom{n}{1} K^1 (3I)^{n-1} = 1 \times I \times 3^n I + n \times K \times 3^{n-1} I = 3^n I + n3^{n-1} K.$$

Je remarque facilement que cette formule reste vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, puisque

$$A^0 = I = 3^0 I + 0 \times \frac{1}{3} \times K \quad \text{et} \quad A^1 = A = 3I + K = 3^1 I + 1 \times 1 \times K.$$

(ii) D'après la question précédente, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = 3^n I + n3^{n-1} K = 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n - 2n \times 3^{n-1} & 2n \times 3^{n-1} \\ -2n \times 3^{n-1} & 3^n + 2n \times 3^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. a) Je me ressers ici du fait que comme K est une matrice de $\mathcal{E}$, $K^2 = 0_2$. Ainsi $(A - 3I)^2 = 0_2$ et il me suffit de développer pour obtenir un polynôme annulateur de la matrice A de degré 2 : $(A - 3I)^2 = A^2 - 2 \times A \times 3I + (3I)^2 = A^2 - 6A + 9I = 0_2$.
Donc $\alpha = -6$ et $\beta = 9$ conviennent.
Pour justifier l'unicité de ce couple, je suppose par l'absurde qu'il en existe deux distincts, (α_1, β_1) et (α_2, β_2), tels que $A^2 + \alpha_1 A + \beta_1 I = A^2 + \alpha_2 A + \beta_2 I = 0_2$.
Par soustraction, j'obtiens que $(\alpha_1 - \alpha_2) A = (\beta_2 - \beta_1) I$.

- Si α_1 et α_2 étaient différents, j'obtiendrais en divisant par la différence que la matrice A est un multiple de la matrice I. Ce n'est pas le cas donc $\alpha_1 = \alpha_2$.
- Dans ce cas, si β_1 et β_2 étaient différents, j'obtiendrais en divisant par la différence que la matrice I est un multiple de la matrice 0_2. Ce n'est pas le cas donc $\beta_1 = \beta_2$.

En conclusion, $(\alpha, \beta) = (-6, 9)$ est l'unique couple de réels tels que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0_2$.

b) En factorisant l'expression précédente, j'obtiens que

$$A^2 - 6A + 9I = 0 \iff A^2 - 6A = -9I \iff A \times \left(\frac{1}{-9}(A - 6I) \right) = I.$$

Donc la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}(A - 6I) = \frac{2}{3} I - \frac{1}{9} A.$$

c) Je remplace A par $K+3I$ dans l'expression précédente et j'obtiens que

$$A^{-1} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}(K+3I) = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}K - \frac{1}{3}I = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K.$$

En remplaçant n par -1 dans la formule obtenue à la question **2.c)*(i)***, vérifiée pour tout $n \geqslant 0$, j'obtiens que

$$A^{-1} = 3^{-1}I + (-1)\times 3^{-1-1}\times K = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K.$$

Donc la formule $A^n = 3^n I + n3^{n-1}K$ reste valide pour $n=-1$.
Je raisonne par récurrence pour montrer qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Je commence par réécrire la formule adaptée à une puissance négative que je note $-n$, pour garder un n positif : $A^{-n} = 3^{-n}I + (-n)3^{-n-1}K = \dfrac{1}{3^n}I - \dfrac{n}{3^{n+1}}K.$

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^{-n} = \dfrac{1}{3^n}I - \dfrac{n}{3^{n+1}}K.$

Initialisation : J'ai déjà vérifié que $\mathcal{P}_1$ était vraie car $A^{-1} = \dfrac{1}{3}I - \dfrac{1}{9}K.$

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $A^{-n} = \dfrac{1}{3^n}I - \dfrac{n}{3^{n+1}}K.$ Alors

$$\begin{aligned} A^{-(n+1)} = A^{-n}\times A^{-1} &= \left(\frac{1}{3^n}I - \frac{n}{3^{n+1}}K\right)\times\left(\frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K\right) \\ &= \frac{1}{3^{n+1}}I - \left(\frac{1}{3^n\times 9} + \frac{n}{3^{n+1}\times 3}\right)K + \frac{n}{3^{n+1}\times 9}0_2. \end{aligned}$$

Donc $A^{-(n+1)} = \dfrac{1}{3^{n+1}}I - \dfrac{n+1}{3^{n+2}}K.$
Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_1$ est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^{-n} = \frac{1}{3^n}I - \frac{n}{3^{n+1}}K.$$

En particulier, ceci conclut bien la démonstration du fait que la formule obtenue à la question **2.c)*(i)*** reste vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad A^n = 3^n I + n3^{n-1}K.$$

4. a) D'après la question **3.a)**, je sais que $A^2 - 6A + 9I = 0_2$, donc que le polynôme $x^2 - 6x + 9$ est un polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A sont donc à chercher parmi ses racines. Or $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, donc l'unique racine de ce polynôme est 3. Finalement l'unique valeur propre possible pour A est 3.

b) Je pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et résous l'équation $AX = 3X$:

$$\begin{aligned} AX = 3X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 3x \\ -2x + 5y = 3y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

Ainsi la matrice colonne $X = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est une solution de l'équation $AX = 3X$.
Et comme cette matrice colonne est non nulle, alors 3 est bien valeur propre de A et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Plus précisément, toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}$ pour un x réel non nul sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 3.

Exercice 2 –

1. a) Il s'agit de calculer l'intégrale d'une fonction dont je connais une primitive.
   En effet, une primitive de $g_0(t) = t$ est donnée par $G_0(t) = \frac{t^2}{2}$. Ainsi

$$I_0 = \int_1^e t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{e^2-1}{2}.$$

   b) Je note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $g_n(t) = t\big(\ln(t)\big)^n$. Comme $t \in [1,e]$, en particulier et puisque la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$t \geqslant 1 > 0 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant t \leqslant e \iff \ln(1) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(e), \quad \textit{i.e.}\ \ln(t) \in [0,1].$$

   Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $t \in [1,e]$, $g_n(t) = t\big(\ln(t)\big)^n \geqslant 0$.
   Donc I_n est l'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[1,e]$.
   J'en déduis alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

   c) Pour étudier le sens de variation de la suite I_n, j'étudie le signe de la différence de deux termes consécutifs. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e t\big(\ln(t)\big)^{n+1}\,\mathrm{d}t - \int_1^e t\big(\ln(t)\big)^n\,\mathrm{d}t = \int_1^e t\big(\ln(t)\big)^n\big(\ln(t)-1\big)\,\mathrm{d}t.$$

   J'ai montré à la question précédente que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $t \in [1,e]$, $t\big(\ln(t)\big)^n \geqslant 0$ et $\ln(t) \in [0,1]$. Donc $\ln(t) - 1 \leqslant 0$ sur $[1,e]$. En particulier, la fonction à intégrer est négative donc l'intégrale est négative, *i.e.* $I_{n+1} - I_n \leqslant 0 \iff I_{n+1} \leqslant I_n$.
   Et j'ai bien montré que le suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Comme elle est aussi minorée par 0 d'après la question précédente, elle est décroissante minorée donc convergente par le théorème de la limite monotone.

2. a) Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. Je dérive $f_n(t) = \big(\ln(t)\big)^{n+1}$. f_n est de la forme u^{n+1} avec $u(t) = \ln(t)$.
   Comme $u'(t) = \frac{1}{t}$, alors

$$\forall t \in [1,e], \quad f_n'(t) = (n+1) \times \frac{1}{t} \times \big(\ln(t)\big)^n = \frac{n+1}{t}\big(\ln(t)\big)^n.$$

   b) Je calcule l'intégrale $I_{n+1} = \int_1^e t\big(\ln(t)\big)^{n+1}\,\mathrm{d}t$ en utilisant une intégration par parties.
   Je pose

$$u'(t) = t \qquad u(t) = \frac{t^2}{2}$$
$$v(t) = \big(\ln(t)\big)^{n+1} \qquad v'(t) = \frac{n+1}{t}\big(\ln(t)\big)^n$$

Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{t^2}{2}\big(\ln(t)\big)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times \frac{n+1}{t}\big(\ln(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^2}{2} \times 1^{n+1} - \frac{1^2}{2} \times 0^{n+1} - \frac{n+1}{2}\int_1^e t\big(\ln(t)\big)^n \,\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n. \end{aligned}$$

En multipliant par 2 cette expression, j'obtiens bien que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n \quad \Longleftrightarrow \quad 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2.$$

c) J'utilise la formule précédente en $n = 0$ et la valeur de I_0 calculée à la question **1.a)** pour déterminer la valeur de I_1 :

$$2I_1 + 1 \times I_0 = e^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2I_1 = e^2 - I_0 = e^2 - \frac{e^2-1}{2} = \frac{e^2+1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad I_1 = \frac{e^2+1}{4}.$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Grâce aux indications de l'énoncé, comme $I_{n+1} \leqslant I_n$, alors

$$e^2 = 2I_{n+1} + (n+1)I_n \leqslant 2I_n + (n+1)I_n = (n+3)I_n \quad \Longleftrightarrow \quad I_n \geqslant \frac{e^2}{n+3}.$$

Et de la même manière, en appliquant la formule cette fois en $n-1$, puisque $I_{n-1} \geqslant I_n$,

$$e^2 = 2I_n + nI_{n-1} \geqslant 2I_n + nI_n = (n+2)I_n \quad \Longleftrightarrow \quad I_n \leqslant \frac{e^2}{n+2}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad \dfrac{e^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e^2}{n+2}$.

e) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^2}{n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^2}{n+2} = 0$ et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{e^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e^2}{n+2}$, alors par le théorème des gendarmes, la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui existe par la question **1.c)**) est donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

Concernant la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$, j'obtiens un encadrement en multipliant l'encadrement précédent par n : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n+3}e^2 \leqslant nI_n \leqslant \dfrac{n}{n+2}e^2$.
Mais alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$ comme limites de fractions rationnelles.
Donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+3}e^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2}e^2 = e^2$ et par le théorème des gendarmes, j'en déduis que la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = e^2.$$

f) Je n'ai qu'à compléter la valeur initiale de I_0 et la formule de récurrence de I_{n+1}.
Dans la boucle `for`, je calcule la valeur de I_k donc $n+1$ est à remplacer par `k`.

```
n=input('Donner une valeur à n :')
I=(%e^2-1)/2
for k=1:n
    I=%e^2/2-k/2*I
end
disp(I)
```

3. a) Je repars de l'encadrement obtenu à la question **2.d)**, appliqué aux termes I_n et I_{n+1}.
Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\frac{e^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{e^2}{n+2} \quad \text{et} \quad \frac{e^2}{n+4} = \frac{e^2}{n+1+3} \leqslant I_{n+1} \leqslant \frac{e^2}{n+1+2} = \frac{e^2}{n+3}.$$

D'où, en faisant la somme de $2I_{n+1}$ et de I_n,

$$\begin{aligned} & 2\times\frac{e^2}{n+4}+\frac{e^2}{n+3} \leqslant 2I_{n+1}+I_n \leqslant 2\times\frac{e^2}{n+3}+\frac{e^2}{n+2} \\ \iff\quad & \frac{\big(2(n+3)+(n+4)\big)e^2}{(n+3)(n+4)} \leqslant 2I_{n+1}+I_n \leqslant \frac{\big(2(n+2)+(n+3)\big)e^2}{(n+2)(n+3)} \\ \iff\quad & \frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} \leqslant 2I_{n+1}+I_n \leqslant \frac{(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

b) Je raisonne de nouveau par encadrement, grâce au résultat de la question précédente.
Pour cela, je remarque que d'après la formule de la question **2.b)**,

$$2I_{n+1}+(n+1)I_n = e^2 \quad\iff\quad 2I_{n+1}+I_n = e^2 - nI_n.$$

Alors en multipliant par n l'encadrement de la question précédente, j'obtiens que

$$\frac{n(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} \leqslant n\big(2I_{n+1}+I_n\big) = n\big(e^2-nI_n\big) \leqslant \frac{n(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)}.$$

Mais alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(3n+10)}{(n+3)(n+4)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(3n+7)}{(n+2)(n+3)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{n^2} = 3$ comme limites de fractions rationnelles. Donc par produit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)} = 3e^2$$

et par le théorème des gendarmes, j'en déduis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 3e^2.$$

4. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $I_n = \dfrac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(e^2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)$.

Initialisation : Pour $n=0$,

$$I_0 = \frac{e^2-1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^0\times 0!}{2^{0+1}}\left(e^2\sum_{k=0}^{0}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right) = \frac{1}{2}\times\big(e^2\times1-1\big) = \frac{e^2-1}{2}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $I_n = \dfrac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(e^2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)$.

Alors en réutilisant l'expression de I_{n+1} obtenue dans la question **2.b)**,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} \times \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left(e^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right) \\
&= \frac{e^2}{2} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \left(e^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \left(\frac{2^{n+2}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} \times \frac{e^2}{2} + e^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \left(e^2 \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} + e^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \left(e^2 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_0$ est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left(e^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right).$$

Exercice 3 –

1. a) Au départ, l'une contient une boule rouge et une boule blanche. Si je tire la boule rouge, je la remets et en ajoute un seconde. Il y a donc deux boules rouges et une boule blanche à ce moment là dans l'urne. Si je tire la boule blanche, je la remets et en ajoute un seconde. Il y a donc deux boules blanches et une boule rouge à ce moment là dans l'urne. J'ai bien montré que le nombre de boules rouges à l'issue de la première expérience est 1 ou 2, *i.e.*

$$X_1(\Omega) = \{1,2\} = [\![1,2]\!].$$

Au premier tirage, il y a une chance sur deux de tirer la boule rouge et une chance sur deux de tirer la boule blanche. Ainsi

$$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 2) = P(R_1) = \frac{1}{2}.$$

Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité : X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1,2]\!]$. Alors

$$E(X_1) = \frac{n+1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad V(X_1) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{2^2-1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

b) À l'issue du deuxième tirage, il y a :

- une seule boule rouge si deux boules blanches ont été tirées,
- deux boules rouges si une boule rouge et une boule blanche ont été tirées,
- trois boules rouges si deux boules rouges ont été tirées.

Ainsi, en termes d'événements, comme il y a deux possibilités pour le tirage bicolore,

$$\begin{aligned}
[X_2 = 1] &= B_1 \cap B_2, \\
[X_2 = 2] &= (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2), \\
[X_2 = 3] &= R_1 \cap R_2.
\end{aligned}$$

c) À l'aide de la question précédente, je détermine la loi de X_2.
Tout d'abord, le support est donné par $X_2(\Omega) = [\![1,3]\!]$.

- D'après la formule des probabilités composées,

$$P(X_2 = 1) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

- D'après la formule des probabilités totales,

$$P(X_2 = 2) = P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

- D'après la formule des probabilités composées,

$$P(X_2 = 3) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

En résumé, la loi de la variable aléatoire X_2 est donnée par

k	1	2	3
$P(X_2 = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ainsi X_2 suit bien une loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$. Alors

$$E(X_2) = \frac{n+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad V(X_2) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{3^2-1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

2. a) Je détermine la loi conjointe du couple (X_1, X_2) en étudiant chaque événement :

- L'événement $[X_1 = 1, X_2 = 1]$ décrit un nombre de boules rouges qui n'a pas évolué ni à l'issue du premier tirage ni à l'issue du deuxième tirage. Cela signifie donc qu'une boule blanche a été piochée au premier et au deuxième tirages.
Ainsi $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
- L'événement $[X_1 = 1, X_2 = 2]$ décrit une boule blanche tirée en premier (puisque le nombre de boules rouges n'a pas évolué à l'issue du premier tirage), puis une boule rouge tirée en second (puisque le nombre de boules rouges a augmenté à l'issue du deuxième tirage). Ainsi $P(X_1 = 1, X_2 = 2) = P(B_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
- L'événement $[X_1 = 1, X_2 = 3]$ est impossible puisque pour passer de 1 à 3 boules rouges, il faudrait en ajouter deux en un seul tirage. Ainsi $P(X_1 = 1, X_2 = 3) = 0$.
- L'événement $[X_1 = 2, X_2 = 1]$ est impossible puisque le nombre de boules rouges ne peut pas diminuer d'un tirage à l'autre. Ainsi $P(X_1 = 2, X_2 = 1) = 0$.
- L'événement $[X_1 = 2, X_2 = 2]$ décrit une boule rouge tirée en premier (puisque le nombre de boules rouges a augmenté à l'issue du premier tirage), puis une boule blanche tirée en second (puisque le nombre de boules rouges n'a pas évolué à l'issue du deuxième tirage). Ainsi $P(X_1 = 2, X_2 = 2) = P(R_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
- Enfin, l'événement $[X_1 = 2, X_2 = 3]$ décrit un nombre de boules rouges qui augmente à l'issue du premier tirage et à l'issue du deuxième tirage. Cela signifie donc qu'une boule rouge a été piochée au premier et au deuxième tirages.
Ainsi $P(X_1 = 2, X_2 = 3) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Je déduis de cette analyse le tableau de la loi conjointe du couple suivant :

	$X_2=1$	$X_2=2$	$X_2=3$
$X_1=1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
$X_1=2$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

b) Je commence par calculer $E(X_1X_2)$:

$$E(X_1X_2)=1\times1\times\frac{1}{3}+1\times2\times\frac{1}{6}+1\times3\times0+2\times1\times0+2\times2\times\frac{1}{6}+2\times3\times\frac{1}{3}=\frac{1+1+2+6}{3}=\frac{10}{3}.$$

Puis d'après la formule de König-Huygens, en utilisant les espérances déjà calculées,

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=\frac{10}{3}-\frac{3}{2}\times2=\frac{10}{3}-3=\frac{10-9}{3}=\frac{1}{3}.$$

Si les variables aléatoires X_1 et X_2 étaient indépendantes, alors la covariance $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$ serait nulle. Or ce n'est pas le cas. Donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3. a) L'événement $[X_n=1]$ décrit une situation où le nombre de boules rouges n'a pas évolué au cours des n premiers tirages.
Ainsi $[X_n=1]$ signifie que seules des boules blanches ont été tirées, *i.e.*

$$[X_n=1]=B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n.$$

b) D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}P(X_n=1)&=P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)\times P_{B_1\cap B_2}(B_3)\times\cdots\times P_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\qquad\textit{après simplifications.}\end{aligned}$$

À l'inverse, pour que l'urne contienne $n+1$ boules rouges à l'issue du n-ième tirage, il faut avoir tiré n boules rouges lors des n premiers tirages. Ainsi

$$[X_n=n+1]=R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n.$$

Puis d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}P(X_n=n+1)&=P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)\times P_{R_1\cap R_2}(R_3)\times\cdots\times P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{n-1}}(R_n)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\qquad\textit{après simplifications.}\end{aligned}$$

4. a) Tout d'abord, à l'issue du n-ième tirage, l'urne contient au total $n+2$ boules car elle en contient 2 initialement et que l'on en rajoute une à chaque tirage.
Si l'événement $[X_n=k-1]$ est réalisé, c'est-à-dire si l'urne contient $k-1$ boules rouges à l'issue du n-ième tirage, alors l'événement $[X_{n+1}=k]$ est réalisé si l'urne contient k boules rouges à l'issue du $(n+1)$-ième tirage.
Cela revient à dire qu'une boule rouge a été ajoutée, donc qu'une boule rouge a été tirée.
Or il y a $k-1$ boules rouges parmi les $n+2$ boules de l'urne. Donc

$$P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)=\frac{k-1}{n+2}.$$

De même, si l'événement $[X_n=k]$ est réalisé, c'est-à-dire si l'urne contient k boules rouges à l'issue du n-ième tirage, alors l'événement $[X_{n+1}=k]$ est réalisé si l'urne contient k boules rouges à l'issue du $(n+1)$-ième tirage.
Cela revient à dire qu'une boule blanche a été tirée. Or il y a $n+2-k$ boules blanches parmi les $n+2$ boules de l'urne. Donc

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)=\frac{n+2-k}{n+2}.$$

b) S'il y a k boules rouges dans l'urne à l'issue du $(n+1)$-ième tirage, alors il ne pouvait y en avoir que k ou $k-1$ à l'issue du n-ième tirage.
Ainsi d'après la formule des probabilités totales,

$$P(X_{n+1}=k)=P(X_n=k)\times P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)+P(X_n=k-1)\times P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)$$

$$\iff \quad P(X_{n+1}=k)=\frac{n+2-k}{n+2}\times P(X_n=k)+\frac{k-1}{n+2}\times P(X_n=k-1).$$

J'obtiens bien ainsi une relation entre $P(X_{n+1}=k)$, $P(X_n=k)$ et $P(X_n=k-1)$.

c) Je raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n+1]\!]$.

Initialisation : Pour $n=1$, j'ai déjà montré à la question **1.a)** que X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1,2]\!]$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, je sais que X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n+1]\!]$, *i.e.*

$$\forall k\in[\![1,n+1]\!],\quad P(X_n=k)=\frac{1}{n+1}.$$

- Si $k=1$, alors je sais déjà grâce à la question **3.b)** que $P(X_{n+1}=1)=\dfrac{1}{n+2}$.
- De même si $k=n+2$, alors je sais que $P(X_{n+1}=n+2)=\dfrac{1}{n+2}$.
- Et pour tous les $k\in[\![2,n+1]\!]$, j'utilise la relation exhibée à la question **4.b)** :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=k)&=\frac{n+2-k}{n+2}\times P(X_n=k)+\frac{k-1}{n+2}\times P(X_n=k-1)\\&=\frac{n+2-k}{n+2}\times\frac{1}{n+1}+\frac{k-1}{n+2}\times\frac{1}{n+1}\qquad \textit{par hypothèse de récurrence}\\&=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2-k}{n+2}+\frac{k-1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

Donc pour tout $k\in[\![1,n+2]\!]$, $P(X_{n+1}=k)=\dfrac{1}{n+2}$, *i.e.* X_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![1,n+2]\!]$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_1$ est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad X_n \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1,n+1]\!].$$

5. Pour compléter le programme, il suffit d'incrémenter la valeur représentant le nombre de boules rouges ou blanches, selon la valeur de l'entier aléatoire. Et finalement, x contient le nombre de boules rouges. D'où

```
n=input('Donner une valeur à n :')
r=1; b=1
for k=1:n
    if rand()<r/(r+b) then r=r+1
                      else b=b+1
    end
end
x=r
disp(x)
```

6. a) La seule différence entre les variables aléatoires X_n et Y_n réside en la couleur des boules considérées. Les expériences sont les mêmes et l'état initial de l'urne, une boule rouge et une boule blanche, termine de démontrer la symétrie parfaite entre ces deux variables aléatoires. Elles suivent donc toutes les deux la même loi.

   b) X_n compte le nombre de boules rouges dans l'urne quand Y_n compte le nombre de boules banches de l'urne. Ainsi la somme $X_n + Y_n$ correspond au nombre total de boules dans l'urne à l'issue du n-ième tirage, à savoir $n+2$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n + Y_n = n+2.$$

   c) Je sais que $X_n + Y_n = n+2$, donc $Y_n = n+2-X_n$ et

$$\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = \mathrm{Cov}(X_n, n+2-X_n) = \mathrm{Cov}(X_n, n+2) - \mathrm{Cov}(X_n, X_n) = 0 - V(X_n) = -V(X_n).$$

   Par ailleurs, comme les variables X_n et Y_n suivent la même loi, alors $V(X_n) = V(Y_n)$. Donc le coefficient de corrélation linéaire est donné par

$$\rho(X_n, Y_n) = \frac{\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)}{\sqrt{V(X_n)}\sqrt{V(Y_n)}} = \frac{-V(X_n)}{V(X_n)} = -1.$$

Exercice 4 –

1. Comme la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

   En retournant la formule de König-Huygens, je peux retrouver $E(Z^2)$:

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 \quad \iff \quad E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

2. a)
   - Pour $x<0$, $f(x) = 0 \geqslant 0$ et pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \geqslant 0$ comme produits de trois facteurs positifs. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
   - La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ car constante et elle est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues.
     Donc f admet au plus un point de discontinuité.
   - Il reste à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda E(Z) = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1.$$

   Selon les trois points précédents, f décrit bien une densité de probabilité.

   b) Sous réserve de convergence,

$$E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \times E(Z^2) = \lambda \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}.$$

   Donc la variable aléatoire U admet bien une espérance et $E(U) = \frac{2}{\lambda}$.

3. a) Soit $A > 0$. Je calcule l'intégrale $\displaystyle\int_0^A x^3 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant une intégration par parties.
Je pose

$$u'(x) = e^{-\lambda x} \qquad u(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$$
$$v(x) = x^3 \qquad v'(x) = 3x^2$$

Alors par intégration par parties,

$$\int_0^A x^3 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A - \int_0^A -\frac{3x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{A^3}{\lambda}e^{-\lambda A} - \frac{0^3}{\lambda}e^0 + \int_0^A \frac{3x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -\frac{A^3}{\lambda}e^{-\lambda A} + \frac{3}{\lambda}\int_0^A x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

J'obtiens bien l'expression souhaitée.

b) Je fais tendre A vers $+\infty$. Je sais déjà grâce à la question **2.b)** que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{E\big(Z^2\big)}{\lambda} = \dfrac{2}{\lambda^3}$.
Et par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{A^3}{\lambda}e^{-\lambda A} = 0$.
Alors d'après l'égalité établie à la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{3}{\lambda}\times\frac{2}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^4}.$$

Alors j'en déduis que la variable aléatoire U^2 admet une espérance puisque

$$E\big(U^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda^2\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda^2\times\frac{6}{\lambda^4} = \frac{6}{\lambda^2}.$$

Donc la variable aléatoire U admet une variance.

c) Pour calculer la variance de U, j'utilise la formule de König-Huygens :

$$V(U) = E\big(U^2\big) - E(U)^2 = \frac{6}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

4. a) Je distingue les cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$:

- Si $x < 0$, alors
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t = 0.$$
- Si $x \geqslant 0$, alors
$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda^2\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Je calcule l'intégrale $\displaystyle\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ en utilisant une intégration par parties. Je pose

$$u'(t) = e^{-\lambda t} \qquad u(t) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$$
$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$

Alors par intégration par parties,

$$\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{0}{\lambda}e^0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$$

Alors
$$F(x) = \lambda^2 \times \int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\lambda xe^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 = 1 - (1+\lambda x)e^{-\lambda x}.$$

Finalement, j'ai bien montré que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

b) Avant de faire intervenir les probabilités, je raisonne sur les inéquations impliquées dans les événements :
$$|U - E(U)| \leqslant E(U) \iff -E(U) \leqslant U - E(U) \leqslant E(U) \iff 0 \leqslant U \leqslant 2E(U).$$

Or d'après la question **2.b)**, $E(U) = \dfrac{2}{\lambda}$. Donc $|U - E(U)| \leqslant E(U) \iff 0 \leqslant U \leqslant \dfrac{4}{\lambda}$ et ainsi
$$P\Big(\big[|U-E(U)| \leqslant E(U)\big]\Big) = P\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \frac{4}{\lambda}\right]\right).$$

c) D'après la question précédente, $P\Big(\big[|U-E(U)| \leqslant E(U)\big]\Big) = P\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \dfrac{4}{\lambda}\right]\right)$.

Comme je connais la fonction de répartition de la variable aléatoire U, alors
$$P\Big(\big[|U-E(U)| \leqslant E(U)\big]\Big) = P\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \frac{4}{\lambda}\right]\right) = F\left(\frac{4}{\lambda}\right) - F(0) = F\left(\frac{4}{\lambda}\right).$$

Et
$$F\left(\frac{4}{\lambda}\right) = 1 - \left(1 + \lambda \times \frac{4}{\lambda}\right)e^{-\lambda \times \frac{4}{\lambda}} = 1 - 5e^{-4} = 1 - \frac{5}{e^4}.$$

D'après l'énoncé,
$$e^4 \approx 54.6 > 50 \iff \frac{5}{e^4} < \frac{5}{50} = 0.1 \iff 1 - \frac{5}{e^4} > 1 - 0.1 = 0.9.$$

Finalement, j'ai bien montré que $P\Big(\big[|U-E(U)| \leqslant E(U)\big]\Big) > 0.9$.

5. a) La variable aléatoire $\overline{U_n}$ est un estimateur de $a = \dfrac{1}{\lambda}$. Je calcule son espérance pour savoir si celui-ci est sans biais. Par linéarité de l'espérance,
$$E\left(\overline{U_n}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n U_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n E(U_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n E(U) = E(U) = \frac{2}{\lambda} = 2a.$$

Bien que $\overline{U_n}$ ne soit pas un estimateur sans biais de a, je déduis aisément que
$$W_n = \frac{1}{2}\overline{U_n}$$
est un estimateur sans biais de a, puisque $E(W_n) = \dfrac{1}{2}E\left(\overline{U_n}\right) = a$.

b) Les variables $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont mutuellement indépendantes, donc
$$V(W_n) = V\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n U_k\right) = \frac{1}{(2n)^2}\sum_{k=1}^n V(U_k) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^n V(U) = \frac{1}{4n} \times \frac{6}{\lambda^2} = \frac{3a^2}{2n}.$$

En particulier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(W_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3a^2}{2n} = 0.$

c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'estimateur W_n admet une variance, *i.e.* un moment d'ordre 2. Je peux donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad P\Big(\big[|W_n - a| \geqslant \varepsilon\big]\Big) \leqslant \frac{V(W_n)}{\varepsilon^2}.$$

Alors en faisant tendre n vers $+\infty$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} V(W_n) = 0$, j'obtiens que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\Big(\big[|W_n - a| \geqslant \varepsilon\big]\Big) = 0.$$