15 | Systèmes linéaires

I – Définition et exemples

Définition 15.1 – On appelle **système linéaire** de n **équations** à p **inconnues** $x_1,\dots,x_p$ tout système (S) de la forme

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où $a_{i,j}$ et b_i désignent des réels supposés connus.
La i-ème équation du système (S) est notée L_i et s'appelle la i-ème **ligne** du système (S).
Résoudre le système (S), c'est déterminer tous les $(x_1,\dots,x_p)$ vérifiant les n équations du système.
Si pour tout i dans $[\![1;n]\!]$, on a $b_i=0$, on dit que le système (S) est **homogène**.

Exemple 15.2 –

- Le système suivant est un système de deux équations à deux inconnues.

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x+y & = & 1 \\ x-y & = & -4 \end{array}\right.$$

Le couple $(-1,3)$ en est une solution car on a $2\times(-1)+3=-2+3=1$ et $-1-3=-4$.

- Le système suivant est un système homogène de trois équations à trois inconnues.

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x+y+5z & = & 0 \\ x-3y+z & = & 0 \\ 3x-2y+6z & = & 0 \end{array}\right.$$

Notons que le triplet $(0,0,0)$ est solution évidente, mais il peut y en avoir d'autres…

- Le système suivant est un système de trois équations à deux inconnues.

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+5y & = & -2 \\ 3x+y & = & 0 \\ -x+2y & = & 1 \end{array}\right.$$

Remarque 15.3 –

- Il ne faut pas croire qu'un système linéaire admet toujours une unique solution ! En effet, certains systèmes linéaires admettent une infinité de solutions et d'autres n'admettent aucune solution.
- En pratique, on rencontrera principalement des systèmes de deux équations à deux inconnues ou bien des systèmes de trois équations à trois inconnues.

Définition 15.4 – On dit que deux systèmes (S) et (S') sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

II – Résolution des systèmes linéaires

1 – Méthode par substitution

Pour les systèmes de deux équations à deux inconnues, on peut résoudre un système en exprimant une inconnue en fonction de l'autre et en remplaçant cette inconnue dans l'autre ligne.

Exemple 15.5 – On considère le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ 2x-y & = & 5 \end{array}\right.$$

En utilisant (L_1), on obtient $x=1-y$. Donc, en remplaçant dans (L_2), cela donne $2(1-y)-y=5$, d'où $2-2y-y=5$, *i.e.*, $2-3y=5$. On résout cette équation.

$$2-3y=5 \iff -3y=5-2 \iff -3y=3 \iff y=\frac{3}{-3}=-1.$$

Et donc, $x=1-y=1-(-1)=1+1=2$.

2 – Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 15.6 – Les opérations suivantes sur les lignes d'un système linéaire (S) sont appelées **opérations élémentaires**.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.
- $L_i \leftarrow aL_i$: remplacement d'une ligne par son produit par un réel non-nul a.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: remplacement d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.
- $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$: regroupement en une opération des deux opérations précédentes.

Proposition 15.7

Si on transforme un système à l'aide **d'une** opération élémentaire, on obtient un système équivalent.

ATTENTION ! Il est très important de n'appliquer qu'une opération élémentaire à la fois. Sinon, on peut ne pas obtenir un système équivalent.

Exemple 15.8 –

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 7y & + & 11z & = & 1 \\ -x & + & 12y & - & 19z & = & 2 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 7y & + & 11z & = & 1 \\ & & 5y & - & 8z & = & 3 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 3 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

3 – Système triangulaire

Définition 15.9 – Un système triangulaire est un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Exemple 15.10 – Les systèmes suivants sont des systèmes triangulaires

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 0 \\ & & -y & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (S_2) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ & - & 2y & + & 3z & = & 3 \\ & & & & 2z = 6 & & \end{array}\right.$$

La résolution des systèmes triangulaires est très simple. On trouve la dernière inconnue grâce à la dernière équation, puis on trouve les autres inconnues successivement en remontant d'équation en équation.

Exemple 15.11 – Résoudre le système triangulaire (S_2) ci-dessus.
La dernière équation nous permet d'obtenir $z = \frac{6}{2} = 3$.
En remplaçant z dans la deuxième équation, on obtient

$$-2y+3\times 3 = 3 \iff -2y+9=3 \iff -2y=-6 \iff y = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Enfin, en remplaçant y et z dans la première équation, on obtient

$$x+3-2\times 3 = -2 \iff x-3=-2 \iff x=-2+3=1.$$

Ainsi, la solution du système (S_2) est $(1;3;3)$.

4 – Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est un procédé algorithmique qui permet de passer d'un système linéaire de n équations à n inconnues quelconque à un système triangulaire équivalent en utilisant uniquement des opérations élémentaires sur les lignes du système.

Exemple 15.12 – On souhaite résoudre le système

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & -4 \end{array}\right.$$

<u>Première étape</u> : Il faut que la première ligne contienne la première inconnue (ici x). Si ce n'est pas le cas, on échange la première ligne avec une autre ligne qui contient x (avec, si possible, le coefficient 1 ou -1 pour simplifier les calculs suivants).

Ici, on échange donc les lignes 1 et 3. Le système devient

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

Puis, à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait "disparaître" la première inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, on "nettoie" la première colonne des x.

On commence par supprimer le x dans la deuxième ligne.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & y & + & 6z & = & 9 \\ & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Puis on supprime le x dans la troisième ligne : il n'y a rien à faire ici.

Deuxième étape : Il faut que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici y). Si ce n'est pas le cas, on échange la deuxième ligne avec une autre ligne contenant y (si possible avec le coefficient 1 pour simplifier les calculs suivants), mais **sans utiliser la ligne 1**.

Ici il n'y a rien à faire : la deuxième ligne contient déjà y.

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait "disparaître" la deuxième inconnue dans la troisième ligne. En d'autres termes, on "nettoie" la deuxième colonne des y.

Il suffit ici d'additionner les lignes 2 et 3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & y & + & 6z & = & 9 \\ & & & & 8z & = & 16 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Troisième étape : On obtient alors un système triangulaire que l'on sait résoudre.

La troisième équation donne $z = \dfrac{16}{8} = 2$.
En remplaçant z dans la deuxième équation, on a $y + 6 \times 2 = 9$ soit $y + 12 = 9$. Ainsi, $y = 9 - 12 = -3$.
Enfin, en remplaçant y et z dans la première ligne, on obtient : $x - 3 - 2 = -4$ soit $x - 5 = -4$.
D'où $x = -4 + 5 = 1$. Ainsi, l'unique solution du système est

$$\mathscr{S} = \{(1; -3; 2)\}.$$