

## EXERCICES — CHAPITRE 4

**Exercice 1 (★)** – On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$u_n = 5\sqrt{n} - 3 \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{2}{n+1} + 1.$$

1. Calculer les deux premiers termes de chaque suite.
2. Calculer le quinzième terme de chaque suite.

**Exercice 2 (★)** – On considère les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  définies par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = -u_n^2 + u_n - 1 \quad \text{et} \quad v_1 = 5 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n}.$$

Calculer les quatre premiers termes de ces deux suites.

**Exercice 3 (★)** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n^2 - n + 1$ .

1. Calculer  $u_0$  et  $u_{10}$ .
2. Exprimer  $u_n + 1$  et  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 4 (★)** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 4$  et de raison  $r = \frac{1}{2}$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Calculer  $u_{10}$ .

**Exercice 5 (★★)** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

1. On donne  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $r = -\frac{1}{4}$ . Calculer  $u_{13}$ .
2. On donne  $u_{36} = 86$  et  $r = 2$ . Calculer  $u_0$ .
3. On donne  $u_2 = 2$  et  $u_{15} = 67$ . Calculer  $r$  et  $u_1$ .
4. On donne  $u_8 = 34$  et  $r = 3$ . Calculer  $u_1$ .

**Exercice 6 (★)** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de premier terme  $u_0 = 7$  et de raison  $q = 3$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Calculer  $u_5$ .

**Exercice 7 (★★)** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$ .

1. On donne  $u_0 = 8$  et  $q = \frac{1}{2}$ . Calculer  $u_7$ .
2. On donne  $u_1 = 2$  et  $q = \frac{3}{2}$ . Calculer  $u_5$ .
3. On donne  $u_4 = 7$  et  $q = \frac{1}{3}$ . Calculer  $u_1$ .
4. On donne  $u_2 = 4$  et  $u_4 = \frac{16}{9}$ . Calculer  $q$ . (On suppose  $q > 0$ .)

**Exercice 8 (★★)** – On suppose que chaque année, la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2020, la production a été de 25000 unités.

1. On note  $P_0 = 25000$  et  $P_n$  la production au cours de l'année 2020 +  $n$ .  
Montrer que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Calculer la production de l'usine en 2025.  
Indication numérique :  $0.96^5 \approx 0.82$ .

**Exercice 9 (★★)** – On place un capital  $u_0 = 1500$  euros à 4.5% par an avec intérêts simples. On note  $u_n$  le capital obtenu au bout de  $n$  années.

1. Donner la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
3. Au bout de combien d'années, le capital initial aura-t-il doublé?

**Exercice 10 (★★)** – On place un capital  $u_0 = 3500$  euros à 3% par an avec intérêts composés. On note  $u_n$  le capital obtenu au bout de  $n$  années.

1. Donner la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.  
Indication numérique :  $1.03^{10} \approx 1.34$ .

**Exercice 11** (★ ★ ★) – On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 1 + 2u_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .
2. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle arithmétique? géométrique?
3. On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n = u_n + 1$ .
  - a) Calculer  $v_0, v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$ .
  - b) Justifier que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
  - c) Donner l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
4. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 12** (★ ★ ★) – La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2020 et a enregistré 2500 inscriptions en 2020. On estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents. On modélise cette situation par une suite numérique  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On note  $a_0 = 2500$  le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2020 et  $a_n$  le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année  $2020 + n$ .

1. a) Calculer  $a_1$  et  $a_2$ .  
b) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a la relation  $a_{n+1} = 0.8 \times a_n + 400$ .
2. On pose pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = a_n - 2000$ .
  - a) Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q = 0.8$  et de premier terme  $u_0 = 500$ .
  - b) En déduire que le terme général de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est  $a_n = 500 \times 0.8^n + 2000$ .

**Exercice 13** (★ ★) – Exprimer à l'aide du symbole  $\Sigma$  les expressions suivantes.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{12}$   | 4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$            |
| 2. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024}$ | 5. $S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 13^2 + 14^2$ |
| 3. $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots + \frac{a^n}{n}$                        | 6. $S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125$                 |

**Exercice 14** (★ ★) – Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole  $\Sigma$ , en faisant disparaître ce symbole.

$$1. T_1 = \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2} \quad \left| \quad 2. T_2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1} \right.$$

**Exercice 15** (★ ★ ★) –

1. Calculer la somme

$$S = -2 + 2 + 6 + 10 + \dots + 98 + 102 + 106.$$

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique de raison  $\frac{1}{3}$  et de premier terme  $u_0 = \frac{1}{2}$ . Calculer

$$T = \sum_{k=0}^{10} u_k.$$

**Exercice 16** (★ ★ ★) – Calculer les sommes  $S$  et  $T$ .

$$1. S = 2 + 6 + 18 + \dots + 118098 \quad \left| \quad 2. T = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{59049} \right.$$

**Exercice 17** (★ ★ ★) – Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$ . Calculer  $S_{10}$ .

**Exercice 18** (★ ★ ★) – Une entreprise propose pour recruter un nouvel employé un salaire annuel de 21000 euros avec augmentation annuelle du salaire de 4% tous les ans. On note  $s_n$  le salaire annuel pour l'année  $n$ . On a donc  $s_1 = 21000$ .

1. Calculer  $s_2$  et  $s_3$ .
2. Donner la nature de la suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  et exprimer  $s_n$  en fonction de  $n$ .

$$3. \text{ Justifier que } \sum_{k=1}^5 s_k \approx 115500.$$

Indication numérique :  $1.04^5 \approx 1.22$ .

4. Si cet employé reste 20 ans dans l'entreprise, calculer la somme des salaires perçus durant ces 20 ans. En déduire son salaire annuel moyen sur ces 20 ans.

Indication numérique :  $1.04^{20} \approx 2.19$ .