ESCP 2023

Exercice 1 –

1. Je commence par calculer le carré de la matrice A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I.$$

J'ai montré que $A^2 = A + 2I$. Alors $A^2 - A - 2I = 0_3$, matrice nulle d'ordre 3, ce qui signifie que le polynôme $x^2 - x - 2$, qui est bien de degré 2, est un polynôme annulateur de la matrice A.

2. a) Les valeurs propres possibles pour la matrice A sont parmi les racines d'un polynôme annulateur. Il me suffit donc de trouver les racines du polynôme $x^2 - x - 2$.
Je calcule son discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$.
Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ainsi les deux valeurs propres possibles pour la matrice A sont -1 et 2.

b) En me servant du polynôme annulateur,

$$A^2 - A - 2I = 0_3 \iff A^2 - A = 2I \iff A \times (A - I) = 2I \iff A \times \left(\frac{1}{2}(A - I)\right) = I.$$

Grâce à cette équation, j'en déduis que la matrice A est inversible
et que son inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I).$$

3. a) Je calcule les trois produits matriciels demandés :

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2U,$$

$$AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -V,$$

$$AW = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -W.$$

Comme U est une matrice colonne non nulle telle que $AU = 2U$, alors 2 est effectivement valeur propre de A, associée au vecteur propre $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
De même, comme V est une matrice colonne non nulle telle que $AV = -V$, alors -1 est effectivement valeur propre de A, associée au vecteur propre $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Enfin pour les mêmes raisons, W est un autre vecteur propre associé à la valeur propre -1.

b) Je calcule puis compare les deux produits matriciels. Comme les colonnes de Q sont les vecteurs propres de la matrice A, alors je connais déjà les colonnes de la matrice AQ :

$$A \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$Q \times D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi j'ai bien vérifié l'égalité matricielle $AQ = QD$.

c) Je calcule le produit matriciel QR :

$$Q \times R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1-1 & 1-1 \\ 1+1-2 & 1+2 & 1-1 \\ 1-2+1 & 1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I.$$

Comme $Q \times R = 3I$, alors la matrice Q est inversible et son inverse est donnée par

$$Q^{-1} = \frac{1}{3}R.$$

d) Comme la matrice Q est inversible, alors l'équation $AQ = QD$ se réécrit $A = QDQ^{-1}$, où la matrice D est diagonale et la matrice Q est inversible. Il s'agit de la définition d'une matrice diagonalisable. Donc la matrice A est bien diagonalisable.

4. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = QD^nQ^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $A^n = QD^nQ^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = QD^nQ^{-1} \times QDQ^{-1} = QD^nIDQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = QD^nQ^{-1}.$$

b) J'ai montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = QD^nQ^{-1}$.
Or je connais Q et Q^{-1} et comme D est une matrice diagonale, alors

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice A^n, il me suffit de calculer le produit $A^n = QD^nQ^{-1}$. Ici, seule la première ligne est demandée.

$$Q \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^n = QD^n \times Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n + (-1)^n & 2^n + (-1)^n - 2 \times (-1)^n & 2^n - 2 \times (-1)^n + (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2 \times (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Je retrouve la formule annoncée par l'énoncé pour la première ligne de la matrice A^n.

5. a) À l'instant 0, le jeton se trouve sur le sommet 1 et il se déplace de façon équiprobable sur l'un des deux autres sommets. Ainsi le jeton quitte le sommet 1 et a une chance sur deux d'arriver sur les sommets 2 et 3 :

$$P(X_1 = 1) = 0, \qquad P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 3) = \frac{1}{2}.$$

Alors comme $\{[X_1 = 2], [X_1 = 3]\}$ forme un système complet d'événements, en utilisant la formule des probabilités totales et le fait que le jeton a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'aller sur chacun des autres sommets, j'obtiens bien les formules annoncées par l'énoncé :

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$P(X_2 = 2) = P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 2) + P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$P(X_2 = 3) = P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 3) + P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{4}.$$

b) Je reprends un raisonnement similaire. Pour $n \geqslant 2$, $\{[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3]\}$ forme un système complet d'événements et pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, les probabilités conditionnelles sont données par

$$P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{2} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Alors d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{i=1}^{3} P(X_n = i) \times P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = 1) \\ &= P(X_n = 1) \times 0 + P(X_n = 2) \times \frac{1}{2} + P(X_n = 3) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3) \end{aligned}$$

c) De la même manière, je peux démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 3) \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2).$$

Alors en posant B la matrice égale à $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} A$,
j'obtiens bien que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} L_n \times B &= \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P(X_n = 2) + P(X_n = 3) & P(X_n = 1) + P(X_n = 3) & P(X_n = 1) + P(X_n = 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) & P(X_{n+1} = 2) & P(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = L_{n+1}. \end{aligned}$$

d) Je vérifie que $L_0 \times B$ soit bien égale à L_1, puis que $L_1 \times B$ soit bien égale à L_2 :

$$L_0 \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = L_1$$

$$L_1 \times B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = L_2$$

Ainsi l'égalité $L_{n+1} = L_n B$ est vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

e) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $L_n = L_0 B^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $L_0 B^0 = L_0 \times I = L_0$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $L_n = L_0 B^n$.
Et grâce à la question précédente, $L_{n+1} = L_n B$. Alors directement

$$L_{n+1} = L_n B = L_0 B^n \times B = L_0 B^{n+1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 B^n.$$

f) La loi de X_n est donnée par les trois coefficients de la matrice L_n.
D'après la question **5.e)**, $L_n = L_0 B^n$. D'après la question **5.c)**, $B = \frac{1}{2} A$.
Donc

$$L_n = L_0 \times \left(\frac{1}{2} A\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times L_0 A^n.$$

En utilisant la question **4.b)**, comme $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$L_0 \times A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2 \times (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Et finalement, en multipliant par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$L_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n est donnée par

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad P(X_1 = 2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad P(X_1 = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercice 2 –

1. Je montre que la fonction f vérifie les trois conditions d'une densité de probabilité :
   - Pour $x \notin [0,1]$, $f(x) = 0 \geqslant 0$ et pour $x \in [0,1]$, $f(x) = 4x(1-x^2) \geqslant 0$ car $x \geqslant 0$ et $1-x^2 \geqslant 0$ puisque $x \leqslant 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
   - Sur $]-\infty,0[$, f est continue car constante, sur $[0,1]$, f est continue car polynomiale et sur $]1,+\infty[$, f est continue car constante.

     Donc f admet au plus deux points de discontinuité sur $\mathbb{R}$.
   - Il me reste à montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

     Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :
     - ▷ $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
     - ▷ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
     - ▷ $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x-4x^3\,\mathrm{d}x.$

       L'intégrande est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

       $$\int_0^1 4x-4x^3\,\mathrm{d}x = \left[4\frac{x^2}{2}-4\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left[2x^2-x^4\right]_0^1 = \left(2\times1^2-1^4\right)-\left(2\times0^2-0^4\right) = (2-1)-0 = 1.$$

     Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

     $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0+1+0 = 1.$$

   Finalement, j'ai bien montré que f est une densité de probabilité.

2. a) La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x\times 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
   - $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} x\times 0\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
   - $\displaystyle\int_{0}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x^2(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x^2-4x^4\,\mathrm{d}x.$

     L'intégrande est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

     $$\int_0^1 4x^2-4x^4\,\mathrm{d}x = \left[4\frac{x^3}{3}-4\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \left[\frac{4}{3}x^3-\frac{4}{5}x^5\right]_0^1 = \left(\frac{4}{3}\times1^3-\frac{4}{5}\times1^5\right)-0 = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}.$$

   Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0+\frac{8}{15}+0 = \frac{8}{15}.$$

   Finalement la variable aléatoire X possède une espérance et $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}.$

b) La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x^2 \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
- $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} x^2 \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
- $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x^3\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 4x^3 - 4x^5\,\mathrm{d}x.$

  L'intégrande est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

$$\int_0^1 4x^3 - 4x^5\,\mathrm{d}x = \left[4\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \left[x^4 - \frac{2}{3}x^6\right]_0^1 = \left(1^4 - \frac{2}{3}\times 1^6\right) - 0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

Ainsi la variable aléatoire X^2 possède une espérance et $E\left(X^2\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Finalement, grâce à la formule de König-Huygens, j'en déduis que la variable aléatoire X possède une variance et

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{64}{225} = \frac{75-64}{225} = \frac{11}{225}.$$

3. Pour déterminer la fonction de répartition, je raisonne à l'aide d'une disjonction de cas pour appliquer la définition : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si $x < 0$, alors $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors il me faut découper l'intégrale en deux morceaux :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 4t\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t = 0 + \left(\left(2\times x^2 - x^4\right) - 0\right) = 2x^2 - x^4,$$

  en réutilisant le calcul d'intégrale effectué à la question **1.**.
- Si $x > 1$, alors il me faut découper l'intégrale en trois morceaux :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} 4t\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1,$$

  toujours en réutilisant le calcul d'intégrale effectué à la question **1.**.

Il me reste alors à me ramener à la forme souhaitée par l'énoncé.
Je dois montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $2x^2 - x^4 = 1 - \left(1-x^2\right)^2$. Or pour $x \in [0,1]$,

$$1 - \left(1-x^2\right)^2 = 1 - \left(1^2 - 2\times 1\times x^2 + \left(x^2\right)^2\right) = 1 - \left(1 - 2x^2 + x^4\right) = 1 - 1 + 2x^2 - x^4 = 2x^2 - x^4.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left(1-x^2\right)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

4. a) La fonction de répartition d'une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme U et V ont G pour fonction de répartition, alors

$$P(M > x) = P(U > x) \times P(V > x) = \big(1 - P(U \leqslant x)\big) \times \big(1 - P(V \leqslant x)\big) = \big(1 - G(x)\big)^2.$$

Puis pour la fonction de répartition,

$$F_M(x) = P(M \leqslant x) = 1 - P(M > x) = 1 - \big(1 - G(x)\big)^2.$$

c) En combinant les expressions obtenues aux deux questions précédentes, j'obtiens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \big(1 - x\big)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

5. a) De nouveau, j'opère par disjonction de cas selon les valeurs de x :

- Si $x < 0$, alors $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P\big(\sqrt{M} \leqslant x\big) = 0$ car une racine carrée ne peut pas être strictement négative.
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P\big(\sqrt{M} \leqslant x\big) = P\big(M \leqslant x^2\big)$ car $x \geqslant 0$.
  Et comme $0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow 0 = 0^2 \leqslant x^2 \leqslant 1^2 = 1$, alors $F_Z(x) = F_M\big(x^2\big) = 1 - \big(1 - x^2\big)^2$.
- Si $x > 1$, alors $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P\big(\sqrt{M} \leqslant x\big) = P(M \leqslant x^2\big) =$ car $x \geqslant 0$.
  Et comme $x > 1 \Longrightarrow x^2 > 1^2 = 1$, alors $F_Z(x) = F_M\big(x^2\big) = 1$.

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \big(1 - x^2\big)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

b) Les deux variables aléatoires X et Z partagent la même fonction de répartition.
Comme la fonction de répartition caractérise la loi, alors X et Z suivent la même loi.

c) Grâce à la question précédente, pour simuler X, il suffit de simuler Z, qui est la racine carrée de la variable aléatoire M. Ainsi le script `Python` se complète ainsi :

```
1.      U=rd.random()
2.      V=rd.random()
3.      M=np.min(U,V)
4.      X=np.sqrt(M)
```

Exercice 3 –

1. a)

   b)

   c)

2. a)

   b)

   c)

   d)

3.

4.

5.

Exercice 4 –

1. a)

   b)

2.

3. a)

   b)

4. a)

   b)

   c)

   d)

5. a)

   b)

   c)

6. a)

   b)

   c)

   d)