9 | Compléments sur les suites

I – Propriétés éventuelles d'une suite

1 – Suites monotones

Définition 9.1 – Soit (u_n) une suite réelle.

- (u_n) est dite **strictement croissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n < u_{n+1}.$$
- (u_n) est dite **strictement décroissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > u_{n+1}.$$
- (u_n) est dite **croissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$
- (u_n) est dite **décroissante** lorsque
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}.$$

La suite (u_n) est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Méthode 9.2 – Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante
Pour établir qu'une suite est monotone, on peut

1. Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. En effet, on a
$$\begin{aligned} (u_n) \text{ croissante} &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0, \\ (u_n) \text{ décroissante} &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0. \end{aligned}$$
2. Lorsque tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. En effet, dans ce cas, on a
$$\begin{aligned} (u_n) \text{ croissante} &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \\ (u_n) \text{ décroissante} &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1. \end{aligned}$$

Exemple 9.3 –

1. La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ est strictement croissante.
Nous avons $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

2. La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ est strictement croissante.
   La suite (u_n) est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2\times(n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2}.$$

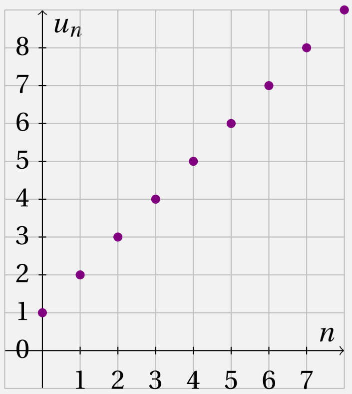
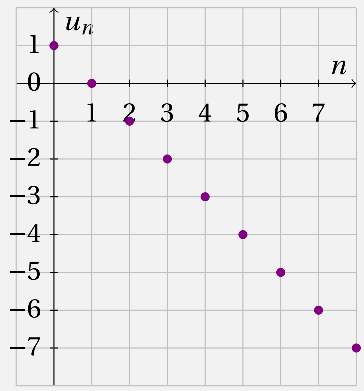
   Ainsi, la suite (u_n) est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ donc la suite (u_n) est croissante.

Exemple 9.4 –

- **Cas des suites arithmétiques.**
  Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors $u_{n+1} = u_n + r$ et donc

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

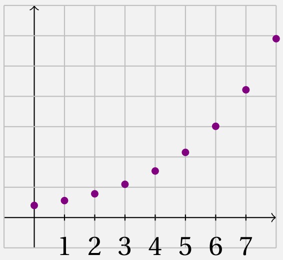
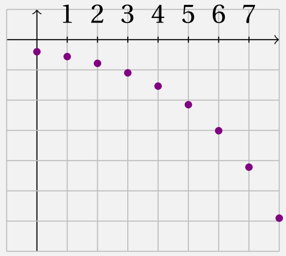
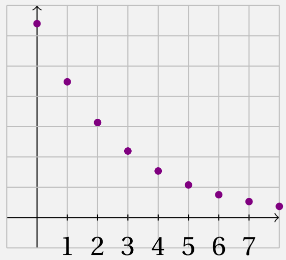
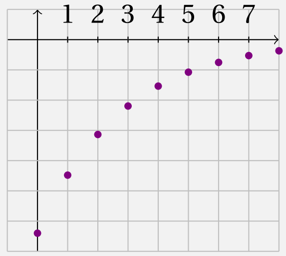
  La monotonie de la suite dépend donc du signe de r.
  1. Si $r \geq 0$, alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc (u_n) est croissante.
  2. Si $r \leq 0$, alors $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et donc (u_n) est décroissante.

Si $r \geq 0$, la suite (u_n) est croissante.	Si $r \leq 0$, la suite (u_n) est décroissante.
	

- **Cas des suites géométriques.**
  Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

$$u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n \times (q-1).$$

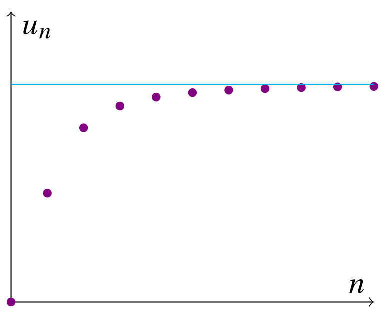
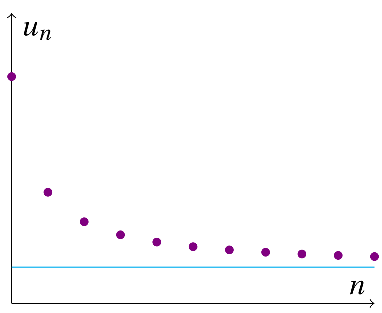
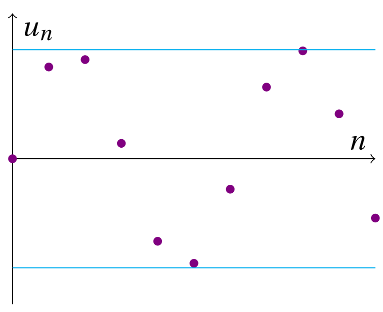
  La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$.
  1. Si $q < 0$, alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.
  2. Si $q > 0$, alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante. 	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante. 	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante. 	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante. 

2 – Suite majorée/minorée/bornée

Définition 9.5 – Soit (u_n) une suite réelle.

- (u_n) est dite **majorée** par M si
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq M.$$
- (u_n) est dite **minorée** par m si
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geq m.$$
- (u_n) est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

(u_n) est majorée	(u_n) est minorée	(u_n) est bornée
		

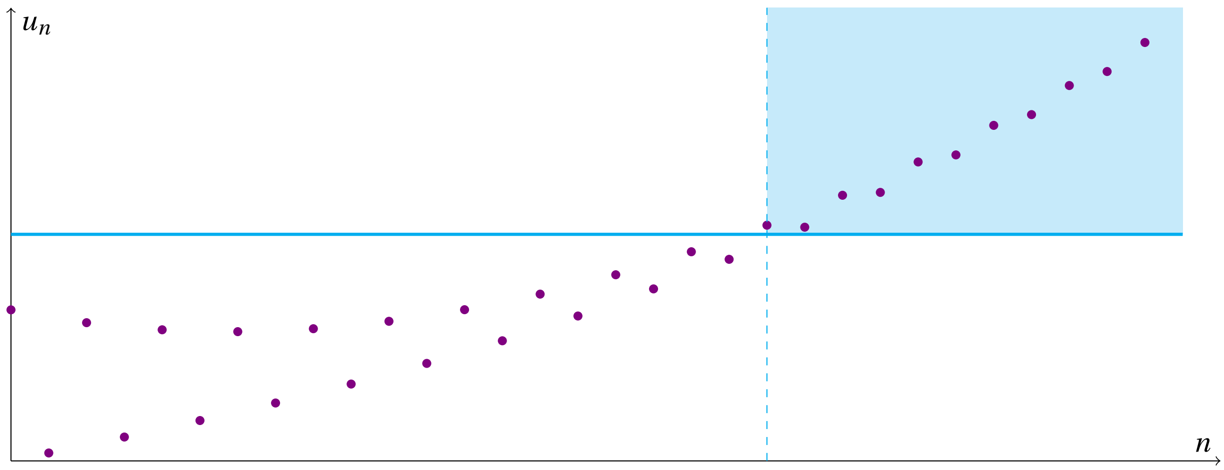
Exemple 9.6 – La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}$ est majorée par 3.
Pour tout entier n, on a
$$u_n - 3 = \frac{3n^2}{n^2+1} - 3 = \frac{3n^2 - 3(n^2+1)}{n^2+1} = \frac{-3}{n^2+1}.$$
Or, $-3 < 0$ et $n^2+1 > 0$ donc $\dfrac{-3}{n^2+1} < 0$. Autrement dit, $u_n - 3 < 0$ soit $u_n < 3$. Donc, la suite (u_n) est bien majorée par 3.

II – Limite d'une suite réelle

1 – Limite infinie

Définition 9.7 –

- On dit qu'une suite (u_n) **admet une limite** égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si u_n prend des valeurs **positives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
- On dit qu'une suite (u_n) **admet une limite** égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si u_n prend des valeurs **négatives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

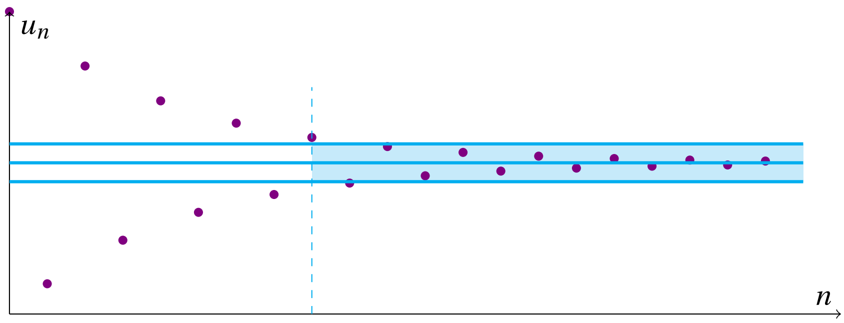


Exemple 9.8 – La suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
On a $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

2 – Limite finie

Définition 9.9 – Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbf{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite (u_n) admet pour **limite** le réel ℓ signifie que u_n devient aussi proche que l'on veut de ℓ pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite **convergente**.



Exemple 9.10 – La suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ tend vers 1 en $+\infty$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} = 1$.

Proposition 9.11

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \ell = 0$.

Remarque 9.12 – Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet donc pas de limite.

III – Lien entre convergence et inégalités

1 – Minoration et majoration

Proposition 9.13

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

- Si (u_n) et (v_n) convergent, alors
$$\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} v_n.$$
- Si au contraire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors (u_n) diverge et
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty.$$
- Enfin, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors (v_n) diverge et
$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

Exemple 9.14 – Soit (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = \left(2 + (-1)^n\right) n.$$

En posant $u_n = n$ pour tout n, on a bien

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

C'est pourquoi on peut affirmer que

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

2 – Théorème des gendarmes

Théorème 9.15

Soient (u_n), (v_n), et (w_n) trois suites telles que

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors (v_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Exemple 9.16 – Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par

$$u_n = \frac{1}{2n^2 + (-1)^n}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

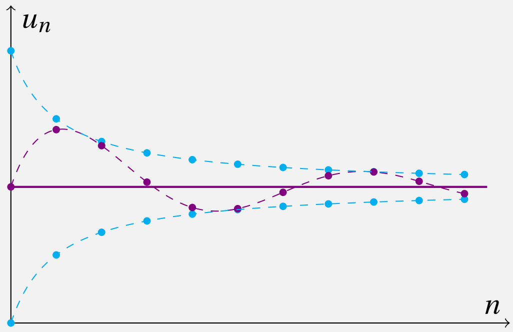
$$\frac{1}{2n^2+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2n^2-1}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2-1} = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$



3 – Théorème de convergence monotone

Théorème 9.17 – Théorème de convergence monotone

- Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

Exemple 9.18 – Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \text{et } u_0 = \frac{1}{2}.$$

1. Étudier les variations de la suite (u_n).
   Pour tout entier n, on a
   $$u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leq 0.$$
   Donc, la suite (u_n) est décroissante.
2. Montrer par récurrence que $u_n \in [0;1]$ pour tout entier naturel n.
   Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $u_n \in [0;1]$ ».

   Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2} \in [0;1]$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0;1]$, donc $u_n \geq u_n^2$. Ainsi, $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \geq 0$. Par ailleurs, puisque $u_n^2 \geq 0$, on a $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \leq u_n \leq 1$. Bref, on a
   $$0 \leq u_{n+1} \leq 1, \quad i.e., \quad u_{n+1} \in [0;1].$$
   Finalement, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, à savoir

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n \in [0;1]$$

3. En déduire que (u_n) converge.
   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Donc, d'après le théorème, elle converge.
4. Déterminer sa limite ℓ.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Or, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ donc en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$\ell = \ell - \ell^2$$

   Autrement dit, $\ell^2 = 0$ donc $\ell = 0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$