BSB 2021

Exercice 1 –

1. Pour vérifier que la matrice M est idempotente, je calcule M^2.

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = M.$$

   J'ai bien montré que $M^2 = M$, *i.e.* que M est idempotente.

2. (a) Comme la matrice M est idempotente, par définition, $M^2 = M$. Donc

$$M^2 - M = O_n,$$

   où O_n désigne la matrice nulle d'ordre n.
   J'en déduis que le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de la matrice M.

   (b) Les valeurs propres d'une matrice sont nécessairement parmi les racines d'un polynôme annulateur. Comme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de la matrice M, je cherche ses racines. Or

$$X^2 - X = 0 \iff X(X-1) = 0 \iff X = 0 \text{ ou } X - 1 = 0 \iff X = 0 \text{ ou } X = 1.$$

   Donc les valeurs propres possibles pour la matrice M sont 0 et 1.

   (c) Pour vérifier que la matrice $N = I_n - M$ est idempotente, je calcule N^2.

$$N^2 = (I_n - M)^2 = (I_n - M) \times (I_n - M) = I_n \times I_n - I_n \times M - M \times I_n + M \times M = I_n - M - M + M^2.$$

   Or M est idempotente, donc $M^2 = M$, *i.e.*

$$N^2 = I_n - 2M + M = I_n - M = N.$$

   J'ai bien montré que $N^2 = N$, *i.e.* que N est idempotente.

3. (a) Pour vérifier que la matrice C est idempotente, je calcule C^2.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = C.$$

   J'ai bien montré que $C^2 = C$, *i.e.* que C est idempotente.
   En outre, grâce à la question 2, comme la matrice C est idempotente, j'en déduis que la matrice $D = I_2 - C$ est elle-aussi idempotente.
   Je calcule CD et DC. Comme C est idempotente,

$$CD = C \times (I_2 - C) = C \times I_2 - C \times C = C - C^2 = C - C = O_2.$$

   De la même manière, $DC = C - C^2 = O_2$.

   (b) Notons P_n la propriété $B^n = 2^n C + D$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$B^0 = I_2 \quad \text{et} \quad 2^0 C + D = C + D = C + I_2 - C = I_2.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$B^{n+1} = B^n \times B = \left(2^n C + D\right) \times (2C + D) = 2^{n+1} C^2 + 2^n CD + 2DC + D^2.$$

Or par idempotence, $C^2 = C$ et $D^2 = D$, puis avec les calculs de la question précédente, $CD = DC = O_2$. Donc

$$B^{n+1} = 2^{n+1} C + D.$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad B^n = 2^n C + D.$$

Alors la formule explicite de B^n est

$$B^n = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ -2 \times 2^n + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}.$$

J'ai montré que

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Je calcule P^2.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Comme $P^2 = I_2$, je déduis que la matrice P est inversible et que son inverse est $P^{-1} = P$.

(d) Je calcule $P^{-1}AP$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je calcule aussi B pour vérifier que $P^{-1}AP = B$.

$$B = 2C + D = 2C + I_2 - C = C + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $P^{-1}AP = B$.

(e) Comme $P^{-1}AP = B$, je sais que

$$P \times P^{-1}AP \times P^{-1} = PBP^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A = PBP^{-1}.$$

Notons P_n la propriété $A^n = PB^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_2 \quad \text{et} \quad P^{-1}B^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$A^{n+1} = A^n \times A = PB^nP^{-1} \times PBP^{-1} = PB^nI_2BP^{-1} = PB^nBP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}.$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = PB^nP^{-1}.$$

(f) Je sais que $A^n = PB^nP^{-1}$ grâce à la question précédente et je connais les coefficients de la matrice B^n par la question 3b. Donc

$$\begin{aligned}
PB^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+1}-1+2^{n+1}-2 & 2^n-1+2^n-2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2\times 2^{n+1}-3 & 2\times 2^n-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+2}-3 & 2^{n+1}-3 \end{pmatrix} \\
\text{et} \quad PB^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2^{n+2}-3 & 2^{n+1}-3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}+2^n-2 & -2^n+1 \\ 2^{n+2}+2^{n+1}-6 & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2+1)\times 2^n-2 & -2^n+1 \\ (2^2+2)\times 2^n-6 & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2^n-2 & -2^n+1 \\ 6\times\left(2^n-1\right) & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$A^n = \begin{pmatrix} 3\times 2^n-2 & -2^n+1 \\ 6\times\left(2^n-1\right) & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 –

1. J'étudie le signe de x^2+x+1 pour $x \in \mathbf{R}$. C'est un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = 1-4 = -3 < 0$. Comme le discriminant est négatif, le polynôme n'admet pas de racine et son signe est constant. Comme $a = 1 > 0$, j'en déduis que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2+x+1 > 0.$$

2. Je sais que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
Alors, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, j'en déduis par composition que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Je calcule $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \ln(3) - \ln(4) = \ln(3) - \ln\left(2^2\right) = \ln(3) - 2\ln(2).
\end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2).$$

4. (a) La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$, avec $u(x) = x^2 + x + 1$. On a $u'(x) = 2x + 1$, donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

(b) J'obtiens les variations de f en étudiant le signe de $f'(x)$. Je sais que le dénominateur est strictement positif d'après la question 1. Je cherche le signe du numérateur :

$$2x+1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -1 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Je peux donc déduire le tableau de variation de f grâce au tableau de signe de f'.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\ln(3) - 2\ln(2)$	↗	$+\infty$

5. (a) Je résous $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \iff \ln(x^2+x+1) = 0 \iff x^2+x+1 = e^0 = 1 \iff x^2 + x = 0$$

$$\iff x(x+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1.$$

J'ai bien montré que les deux seules solutions de $f(x) = 0$ sont -1 et 0.

(b) L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en le point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0).$$

Or $f(0) = 0$ puisque 0 est solution de $f(x) = 0$, et $f'(0) = \dfrac{2\times 0+1}{0^2+0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Donc la tangente au point d'absisse 0 a pour équation

$$y = 1 \times (x-0) + 0 \iff y = x.$$

De la même manière, si $a = -1$, l'équation de la tangente devient

$$y = f'(-1) \times \big(x - (-1)\big) + f(-1).$$

Or $f(-1) = 0$ puisque -1 est aussi solution de $f(x) = 0$, et $f'(-1) = \dfrac{-2+1}{1-1+1} = \dfrac{-1}{1} = -1$.
Donc la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation

$$y = -1 \times (x+1) + 0 \iff y = -x - 1.$$

6. (a) Je dérive de nouveau f' pour obtenir f''. La fonction f' est donnée sous la forme d'un quotient $f' = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x^2+x+1$.
On a alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x+1$, puis

$$f''(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{2x^2+2x+2-(4x^2+4x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

J'ai bien montré que

$$f''(x) = \frac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

(b) Pour étudier la convexité de f, j'étudie le signe de $f''(x)$. Pour commencer, je remarque que le dénominateur est toujours positif. Alors le signe de $f''(x)$ me sera donné par celui de $-2x^2-2x+1$. Je cherche donc le signe de ce polynôme de degré 2.
Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 4+8 = 12 > 0$.
Il y a donc deux racines, et je remarque que $\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{12}}{2\times(-2)} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{12}}{2\times(-2)} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Comme $a = -2$, je déduis le tableau de signe de $-2x^2-2x+1$, qui n'est autre que celui de $f''(x)$.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Je peux alors déduire que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$, car $f''(x)$ y est positif, et concave sur les intervalles $\left]-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.
Cela nous amène bien à deux points d'inflexions, moment où la convexité change, l'un au point d'abscisse $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, l'autre au point d'abscisse $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

7. (a) Le fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Or j'ai déjà montré que $f(0) = 0$ et que la limite de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ est $+\infty$. Ainsi, comme $1 \in [0, +\infty[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, je peux déduire qu'il existe une unique solution, notée α, à l'équation $f(x) = 1$.

(b) On a $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(1+1+1) = \ln(3) \approx 1.1$. Comme $f(0) \leqslant 1 = f(\alpha) \leqslant f(1)$ et que f est croissante, j'en déduis que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
J'ai bien montré que

$$\alpha \in [0, 1].$$

(c) Comme α est solution de $f(x) = 1$, je sais que $\ln(\alpha^2+\alpha+1) = 1$. Alors,

$$f(-1-\alpha) = \ln\left((-1-\alpha)^2 + (-1-\alpha)+1\right) = \ln\left(\alpha^2+2\alpha+1-1-\alpha+1\right) = \ln\left(\alpha^2+\alpha+1\right) = 1.$$

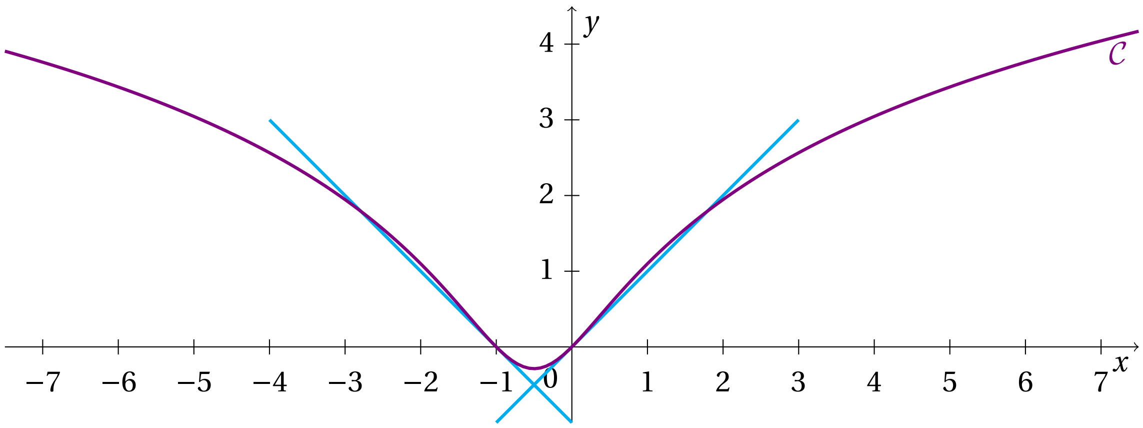
J'ai bien montré que

$$f(-1-\alpha) = 1.$$

(d) Voici le script complété.

```
function y=f(x)
    y=log(x∧2+x+1)
endfunction
a=0, b=1
while b-a>10∧(-3)
    c=(a+b)/2
    if f(c) < 1 then a=c
        else b=c
    end
end
disp(a)
```

8. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de ses tangentes.



Exercice 3 –

1. (a)
   (b)
2.
3. (a)
   (b)
4.
5. (a)
   (b)
   (c)
6.
7.
8. (a)
   (b)
   (c)
   (d)

Exercice 4 –

1. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
2. (a)
   (b)
3. (a)
   (b)
   (c)