

INTERRO DE COURS 4

Exercice 1 – On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Solution : On a

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. En déduire la somme partielle $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

3. En déduire que la série converge et préciser sa somme.

Solution : On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$ donc la série converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Exercice 2 – On considère la série $\sum_{n \geq 0} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Calculer la somme partielle $\sum_{k=0}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

Solution :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k} &= \sqrt{1} - \sqrt{0} + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

2. La série converge-t-elle? Si oui, préciser sa somme.

Solution : On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ donc la série diverge.