

3 | Généralités sur les fonctions

I – Quelques rappels sur les fonctions

Définition 3.1 – Une **fonction** est un procédé qui, à un nombre x appartenant à un ensemble D , associe un nombre y . On note

$$f: \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

$f(x)$ est appelé **l'image** de x par f , tandis que x est appelé **antécédent** de $f(x)$ par f .



Méthode 3.2 – Déterminer une image ou un antécédent par le calcul

On suppose que l'on dispose de l'expression littérale d'une fonction f .

- Pour déterminer l'image d'un nombre a , il suffit de remplacer x par a dans l'expression de $f(x)$ et de faire le calcul.
- Pour déterminer le ou les antécédents (s'ils existent) d'un nombre b , il faut essayer de résoudre l'équation $f(x) = b$.

Exemple 3.3 –

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x + 3$. Déterminer l'image de 2 et le ou les antécédents (s'ils existent) de 4.
2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^2 - 5x$. Déterminer l'image de -1 et le ou les antécédents (s'ils existent) de -6 et de -7 .

Remarque 3.4 – Il peut y avoir un, plusieurs ou même aucun antécédent. Par contre, il ne peut y avoir qu'**UNE SEULE IMAGE**!

Définition 3.5 – Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé **ensemble de définition** de la fonction f , souvent noté D_f .

Exemple 3.6 – La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x-4}$ a pour ensemble de définition

Définition 3.7 – Dans le plan, muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on nomme **courbe représentative** d'une fonction numérique f , l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ du plan, pour x parcourant l'ensemble de définition de f . On la note souvent \mathcal{C}_f . Ainsi

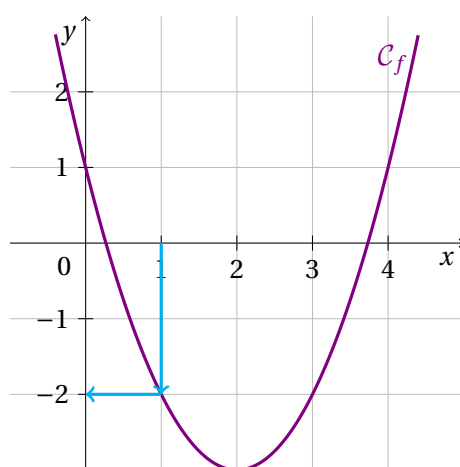
$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}.$$

Remarque 3.8 – En résumé, les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées et les antécédents x sur l'axe des abscisses.



Méthode 3.9 – Lire une image ou un antécédent à partir d'une courbe

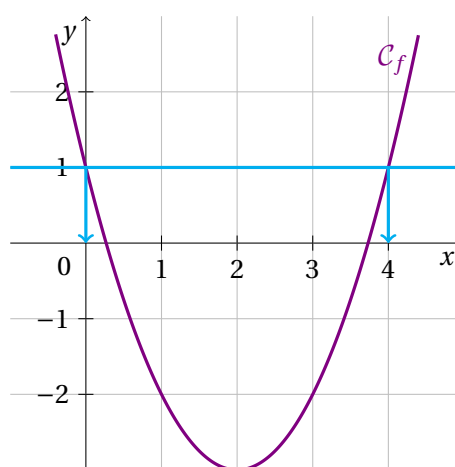
Trouver l'image d'un nombre



1. On place x sur l'axe des abscisses,
2. on se déplace verticalement jusqu'à rencontrer la courbe \mathcal{C}_f
3. et on lit $f(x)$ sur l'axe des ordonnées.

Ici, l'image de 1 par f est

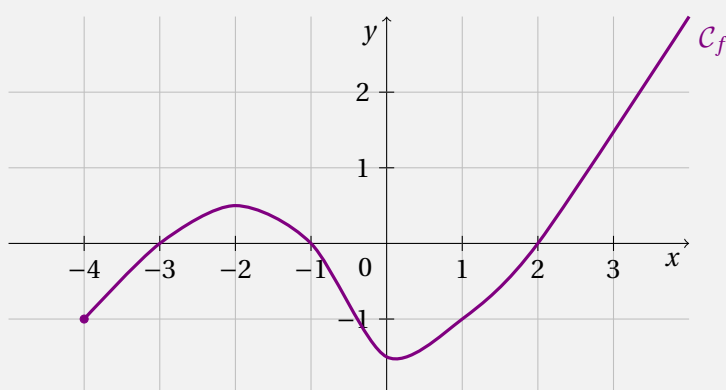
Trouver le ou les antécédents d'un nombre



1. On trace la droite horizontale passant par y
2. et à partir des points d'intersection, on se déplace verticalement vers l'axe des abscisses pour lire les antécédents.

Ici, les antécédents de 1 par f sont

Exemple 3.10 – Soit f la fonction dont on donne la courbe représentative \mathcal{C}_f suivante.



1. Utiliser le graphique pour déterminer les valeurs de $f(-4)$, $f(-3)$ et $f(0)$.

2. Déterminer les images par f de 1 et 3.

3. Trouver le ou les antécédents (s'ils existent) par la fonction f des nombres $\frac{1}{2}$, -1 et 2 .

II – Propriétés éventuelles d'une fonction

1 – Parité

Définition 3.11 –

- On dit que f est **paire** si D_f est symétrique par rapport à 0 ET que pour tout $x \in D_f$,

$$f(-x) = f(x).$$

- On dit que f est **impaire** si D_f est symétrique par rapport à 0 ET que pour tout $x \in D_f$,

$$f(-x) = -f(x).$$

Remarque 3.12 – La condition " D_f est symétrique par rapport à 0" **ne doit pas être oubliée** lorsque l'on démontre qu'une fonction est paire ou impaire. Par exemple, une fonction $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, quelque soit son expression, ne saurait être paire ou impaire, puisque son ensemble de définition $[-1, 2]$ n'est pas une partie de \mathbb{R} symétrique par rapport à 0.



Méthode 3.13 – Étudier la parité d'une fonction

On procède toujours en deux temps.

- On vérifie que D_f est symétrique par rapport à 0.
- On exprime $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$, pour tout $x \in D_f$.

Remarque 3.14 – On pourra retenir, pour la mise en oeuvre de cette méthode, la règle suivante :

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -x^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par exemple,

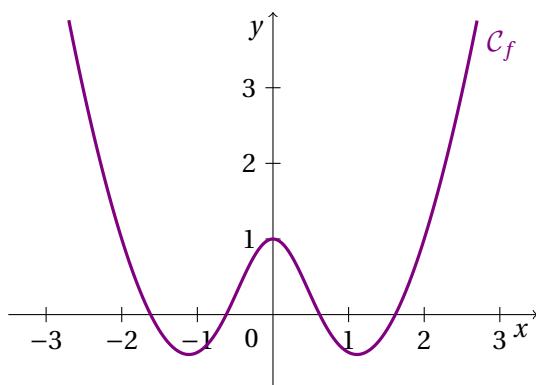
$$(-x)^2 = x^2 \quad \text{mais} \quad (-x)^3 = -x^3.$$

Exemple 3.15 –

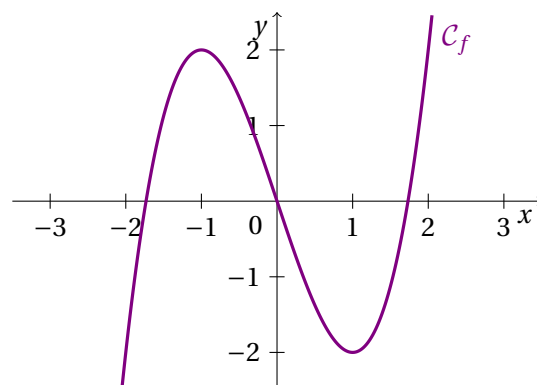
- Étudier la parité de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.
- Étudier la parité de la fonction f définie sur $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Théorème 3.16 – Interprétation graphique

- Si f est **paire**, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est **impaire**, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Courbe représentative d'une fonction paire



Courbe représentative d'une fonction impaire

2 – Monotonie

Définition 3.17 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \quad x \leq y \iff f(x) \leq f(y),$$

- f est **strictement croissante** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \iff f(x) < f(y),$$

- f est **décroissante** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \quad x \leq y \iff f(x) \geq f(y),$$

- f est **strictement décroissante** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \iff f(x) > f(y).$$

Lorsqu'une fonction f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante), on dit que f est **monotone** (resp. **strictement monotone**).

Enfin f est dite **constante** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \quad f(x) = f(y).$$

Remarque 3.18 –

- On dit qu'une fonction croissante **conserve** l'ordre et qu'une fonction décroissante **inverse** l'ordre.
- Il existe des fonctions qui ne sont pas monotones, c'est-à-dire qu'elles ne sont ni croissantes ni décroissantes. Elles peuvent par exemple être l'un puis l'autre.

3 – Fonctions bornées

Définition 3.19 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est

- **majorée** sur I lorsqu'elle vérifie

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leq M.$$

On dit alors que M est un **majorant** de f .

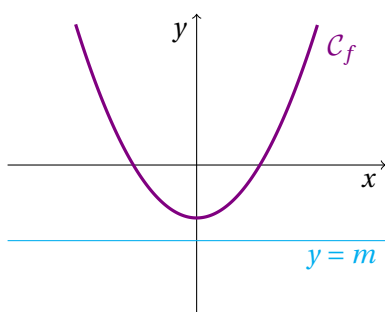
- **minorée** sur I lorsqu'elle vérifie

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geq m.$$

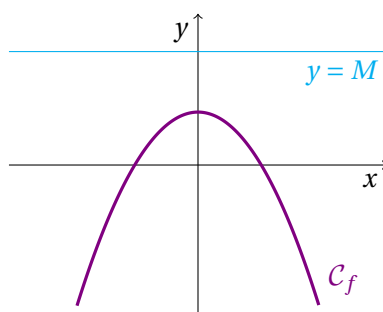
On dit alors que m est un **minorant** de f .

Enfin f est dite **bornée** sur I lorsqu'elle est à la fois majorée **ET** minorée sur I .

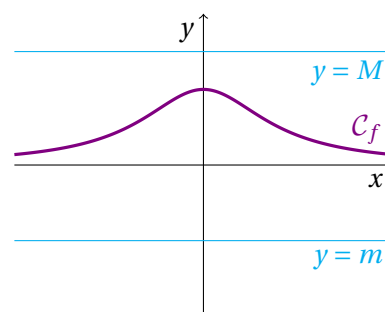
Remarque 3.20 – Graphiquement, une fonction f est majorée par un réel M (resp. minorée par un réel m) lorsque sa courbe représentative est située au-dessous (resp. au-dessus) de la droite horizontale d'équation $y = M$ (resp. $y = m$).



**Courbe représentative
d'une fonction minorée**



**Courbe représentative
d'une fonction majorée**



**Courbe représentative
d'une fonction bornée**



Méthode 3.21 – Montrer qu'une fonction est majorée/minorée/bornée

Pour montrer qu'une fonction est majorée ou minorée, il y a plusieurs possibilités.

- Lorsque la fonction f est définie sur un intervalle borné, on peut partir du domaine de définition de $f : x \in \dots$ puis on essaye de reconstituer la fonction f en appliquant les opérations et fonctions élémentaires (en faisant bien attention au maintien ou non des inégalités, selon que la fonction appliquée est croissante ou décroissante).
- Si la question posée est "Montrer que $f(x) \leq M$.", on peut étudier le signe de $f(x) - M$ et montrer que $f(x) - M \leq 0$. Inversement, si la question posée est "Montrer que $f(x) \geq m$.", on peut étudier le signe de $f(x) - m$ et montrer que $f(x) - m \geq 0$.

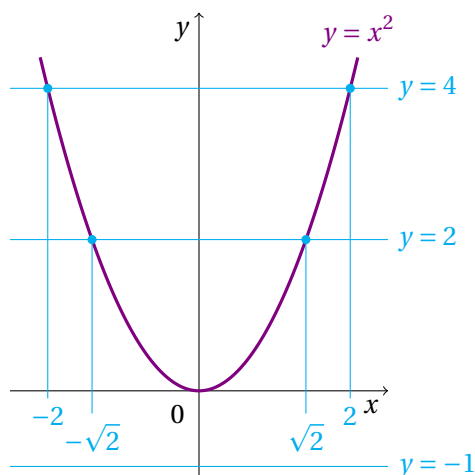
Exemple 3.22 –

1. Soit f la fonction définie pour $x \in [0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que $\forall x \in [0, 1], 0 \leq f(x) \leq 1$.

2. Soit g la fonction définie pour $x \in]-1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x}{1+x}$. Montrer g est majorée par 3.

III– Fonctions usuelles

1 – Fonction carrée



Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction carrée, dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

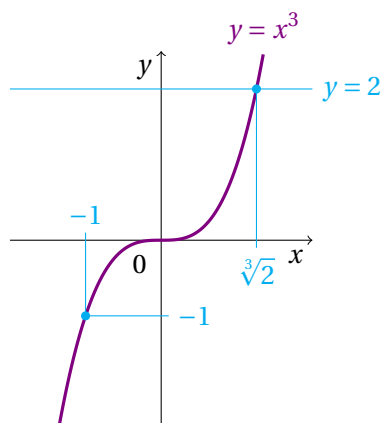
- Son ensemble de définition est D_f
- 2 et -2 ont la même image par la fonction carrée :
En effet,
- Les antécédents de 2 par la fonction carrée sont En effet, les deux solutions de l'équation $x^2 = 2$ sont
- -1 n'a pas d'antécédent par la fonction carrée, puisque

Théorème 3.23 – La fonction carrée

La fonction carrée, donnée par $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{matrix}$ vérifie les propriétés suivantes :

- f est à valeurs positives,
- f est paire,
- f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2 – Fonction cube



Soit $g : x \mapsto x^3$ la fonction cube, dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

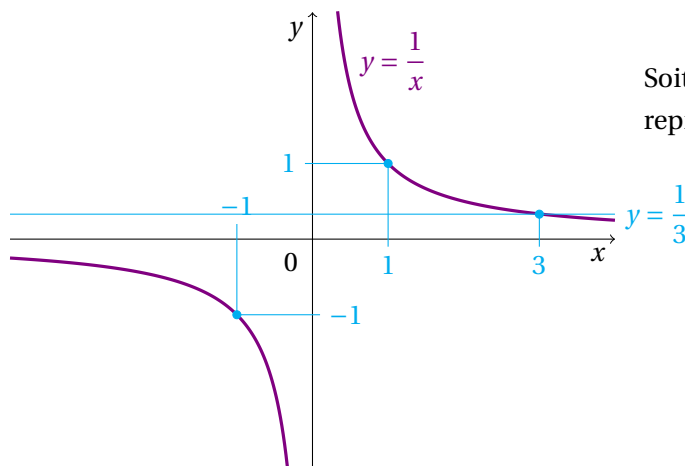
- Son ensemble de définition est D_g
- -1 a pour image
En effet, $g(-1)$
- 2 a pour unique antécédent par g le nombre
- En fait, tout élément $y \in \mathbb{R}$ admet un **unique** antécédent x par g , noté $\sqrt[3]{y}$. On dit que la fonction cube $g : x \mapsto x^3$ est une **bijection** de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Théorème 3.24 – La fonction cube

La fonction cube, donnée par $g : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{matrix}$ vérifie les propriétés suivantes :

- g est impaire,
- g est strictement croissante sur \mathbb{R} ,
- g n'est ni majorée, ni minorée sur \mathbb{R} .

3– Fonction inverse



Soit h la fonction inverse $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

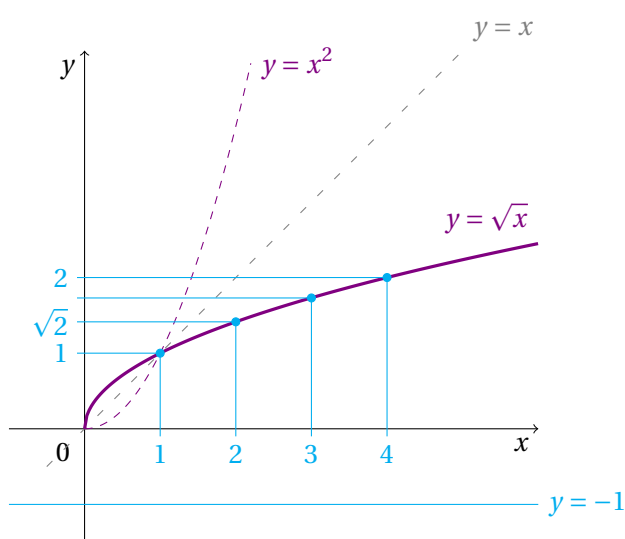
- Son ensemble de définition est D_h
En effet, $\frac{1}{x}$ n'est pas défini pour $x = 0$
- Les images respectives de 1 et -1 sont
En effet, $h(1) = 1$ et $h(-1) = -1$
- L'unique antécédent de $\frac{1}{3}$ est 3

Théorème 3.25 – La fonction inverse

La fonction inverse, donnée par $h : \begin{matrix} \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{matrix}$ vérifie les propriétés suivantes :

- h est impaire,
- h est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$,
- h n'est ni majorée, ni minorée sur \mathbb{R}^* .

4– Fonction racine carrée



Soit $\sqrt{\cdot}$ la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : x \mapsto \sqrt{x}$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

- Sa courbe représentative est la branche de parabole obtenue par symétrie par rapport à la droite $y = x$ de la courbe représentative de la fonction carrée sur l'intervalle \mathbb{R}_+ .
- Son domaine de définition est $D_{\sqrt{\cdot}}$
- Les images de 0, 1, 2 et 3 sont

$$\begin{array}{cc} \sqrt{0} & \sqrt{1} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{array}$$

- -1 n'a pas d'antécédent par la fonction racine carrée.

Théorème 3.26 – La fonction racine carrée

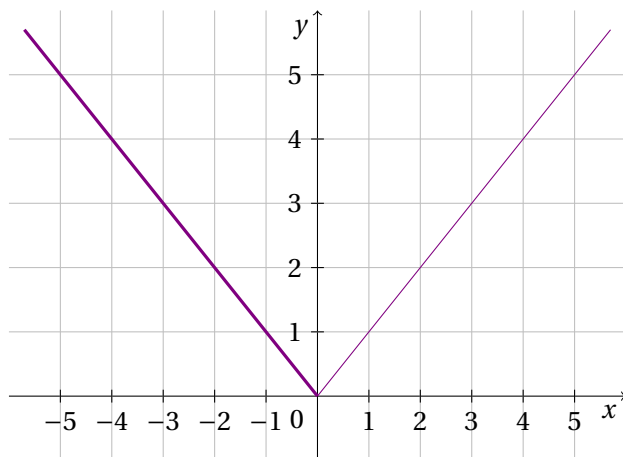
La fonction racine carrée, donnée par $\sqrt{\cdot} : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{matrix}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ ,
- $\sqrt{\cdot}$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

5 – Fonction valeur absolue

Pour un réel x , on peut le décomposer en regardant son signe ("+" ou "-") et sa valeur sans le signe. Cette valeur est appelée **valeur absolue** de x (le contraire d'absolu étant ici *relatif*).

La valeur absolue d'un nombre peut ainsi être vue comme "le nombre sans son signe".



Soit $|\cdot|$ la fonction valeur absolue $|\cdot| : x \mapsto |x|$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessus.

- Son domaine de définition est $D_{|\cdot|}$
- 5 et -4 ont la même image par la fonction valeur absolue :
- Les antécédents de 4 par la fonction valeur absolue sont
- -1 n'a pas d'antécédent par la fonction valeur absolue, puisque celle-ci est

Théorème 3.27 – La fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue, donnée par $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie les propriétés :

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- $|\cdot|$ est à valeurs positives,
- $|\cdot|$ est paire,
- $|\cdot|$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_- et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

Remarque 3.28 – Il s'agit d'une fonction définie **par morceaux** : il existe deux formules pour la définir, selon que x soit positif ou négatif. C'est pour cela que sa courbe représentative est composée de deux demi-droites ayant pour origine l'origine du repère (0,0). Le "coin" formé par ses deux demi-droites sera abordé dans le Chapitre 8.

Proposition 3.29

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$(\sqrt{y})^2 = y \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

Exemple 3.30 – $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$

Proposition 3.31

Soit a et b deux réels.

- On appelle **distance** entre a et b la valeur $|b - a|$. Il s'agit d'un réel positif.
- On appelle **longueur** de l'intervalle $[a, b]$ (ou $]a, b$ ou ...) la valeur $|b - a|$.

Exemple 3.32 –

1. Donner la distance entre les réels suivants.

• $\text{dist}(0, 8)$

• $\text{dist}(-2, 5)$

• $\text{dist}(5, -4)$

2. Donner la longueur des intervalles suivants.

• $\text{lg}([3, 4])$

• $\text{lg}([-9, 2])$

• $\text{lg}([-6, 9])$

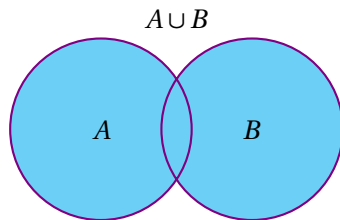
IV – Opérations sur les fonctions

Remarque 3.33 – Les symboles "réunion \cup ", "intersection \cap " et "privé de \setminus "

Soient A et B deux ensembles.

- On appelle **réunion** (ou **union**) de A et de B l'ensemble des x , noté $A \cup B$, tels que

$$x \in A \quad \text{OU} \quad x \in B.$$

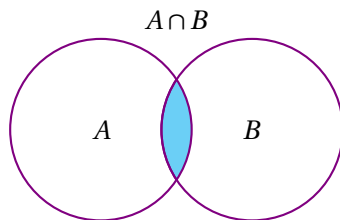


Par exemple, si $A = \{1, 2, 4, 7\}$ et $B = \{2, 3, 7, 8, 9\}$, alors

$$A \cup B$$

- On appelle **intersection** de A et de B l'ensemble des x , noté $A \cap B$, tels que

$$x \in A \quad \text{ET} \quad x \in B.$$

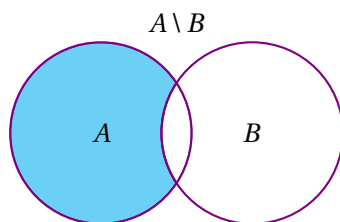


Par exemple, si $A = [1, 3]$ et $B = [-1, 2]$, alors

$$A \cap B$$

- On note $A \setminus B$ (lire A "privé de" B), l'ensemble des x tels que

$$x \in A \quad \text{ET} \quad x \notin B.$$



Par exemple, si $A = \{1, 2, 4, 7\}$ et $B = \{2, 3, 7, 8, 9\}$, alors

$$A \setminus B$$

Définition 3.34 – Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g .

- Addition** : La somme $f + g$ désigne la fonction définie sur $D_f \cap D_g$ par

$$\forall x \in D_f \cap D_g, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- Multiplication** : Le produit fg désigne la fonction définie sur $D_f \cap D_g$ par

$$\forall x \in D_f \cap D_g, \quad (fg)(x) = f(x) \times g(x).$$

- Division** : Le quotient $\frac{f}{g}$ désigne la fonction définie $D = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$ par

$$\forall x \in D, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exemple 3.35 – Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définies par $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition et son expression.

- $f + g$:

- fg :

- $\frac{g}{f}$:

Définition 3.36 – Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g .

La **composée** de f suivie de g , notée $g \circ f$, est définie pour les $x \in D_f$ tels que $f(x) \in D_g$ par

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Ainsi $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

Exemple 3.37 –

- Soient $f(x) = 3x - 4$ et $g(x) = x^2$. Donner l'ensemble de définition et l'expression de $g \circ f$.

- Soient $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Donner l'ensemble de définition et l'expression de $g \circ f$.

Méthode 3.38 – Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

1. Fonctions usuelles

- Une fonction polynomiale est définie sur \mathbb{R} .
- Une fraction rationnelle est définie sur \mathbb{R} privé des valeurs qui annulent son dénominateur, les **valeurs interdites**. En pratique, on résout l'équation "dénominateur = 0".
- La fonction racine carrée est définie sur \mathbb{R}_+ .



2. Fonctions quelconques

On commence par déterminer la **forme** de l'expression (somme, produit, quotient, composée) :

- pour une **somme** ou un **produit** : déterminer l'ensemble de définition de chacun des termes/facteurs et prendre l'intersection de ces ensembles,
- pour un **quotient** : prendre l'intersection des ensembles de définition respectifs du numérateur et du dénominateur, puis retirer les valeurs qui annulent le dénominateur,
- pour une **composée** : déterminer l'ensemble de définition de la première fonction et exprimer la condition assurant que l'image de la première fonction soit dans l'ensemble de définition de la seconde fonction. En particulier, une composée de la forme \sqrt{f} est définie lorsque f est définie **ET** que $f(x)$ est positif.

Exemple 3.39 – Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

2. $g(x) = \frac{2x+3}{4x-1}$

3. $h(x) = 4x - 1 + \sqrt{x}$

4. $j(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

5. $k(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

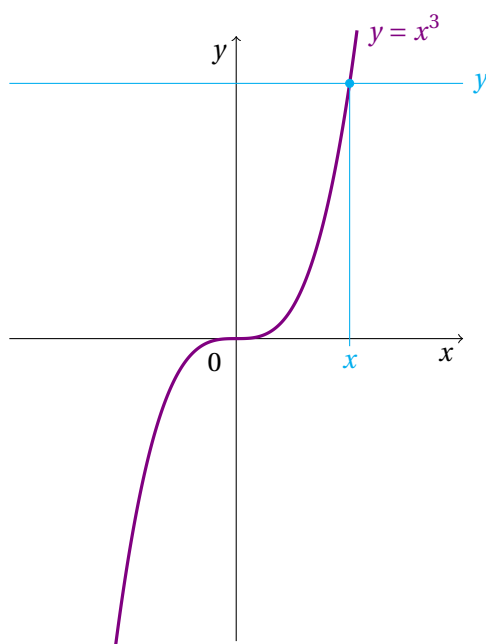
V – Fonction bijective

Définition 3.40 – Soient I et J deux intervalles. On dit qu'une fonction f est une **bijection** de I dans J ou que $f : I \rightarrow J$ est **bijection** si les deux conditions suivantes sont réunies :

- pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$,
- pour tout $y \in J$, il existe un **UNIQUE** $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

On peut alors définir une fonction appelée **bijection réciproque** ou **fonction réciproque** de f , que l'on note f^{-1} , définie sur J et à valeurs dans I , et qui, à un réel $y \in J$, associe l'**unique** solution $x \in I$ de l'équation $f(x) = y$.

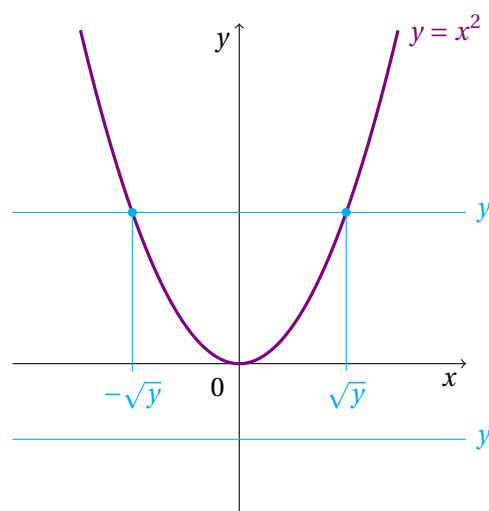
$$\forall x \in I, \quad \forall y \in J, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$



Pour la fonction cube $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^3$ dont la courbe est représentée ci-dessus, on observe graphiquement que tout élément y de \mathbb{R} admet un unique antécédent x .

Autrement dit, pour toute ordonnée $y \in \mathbb{R}$, il existe une unique abscisse $x \in \mathbb{R}$ telle que $y = x^3$.

La fonction cube est donc une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .



Pour la fonction carrée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$ dont la courbe est représentée ci-dessus, la situation varie selon le signe de y . Graphiquement,

- $y > 0$ admet deux antécédents par g : $\pm\sqrt{y}$,
- $y < 0$ n'admet aucun antécédent.

Du fait de l'absence d'existence ou d'unicité pour les antécédents de y , la fonction carrée n'est pas une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Remarque 3.41 – En revanche, la restriction de la fonction carré aux seuls réels positifs $f_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ $x \mapsto x^2$ est une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ .

Exemple 3.42 – Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto 3x - 2$ est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .