

DEVOIR SURVEILLÉ 3

Exercice 1 – [BSB 2019 / Ex1]

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 0 & 2(3^n - 2^n) + 3^n \\ 0 & 3 \times 3^n & 3 \times n3^{n-1} + 3^n \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3 \times 3^n - 2 \times 2^n \\ 0 & 3^{n+1} & n3^n + 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1) \times 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. a) L'instruction manquante est `a=2*a+3**i`. En effet, comme les valeurs de i vont de 0 à $n-1$, à chaque itération le terme a_{i+1} est calculé : pour cela, il faut sommer le double du terme précédent $2a_i$ avec la puissance de 3 correspondant à cet indice, *i.e.* 3^i .

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule le produit AX_n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3^n \\ 3b_n + 3^n \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

c) Voici le programme complété.

```

1. import numpy as np
2. def calculbisa(n):
3.     A=np.array([[2,0,1],[0,3,1],[0,0,3]])
4.     X=np.array([[2],[0],[1]])
5.     for i in range(n):
6.         X=np.dot(A,X)
7.     return X[0]
```

d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.
Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

e) D'après les questions précédentes,

$$X_n = A^n X_0 \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 3^n - 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$

3. a) Je calcule le produit PQ :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Comme $P \times Q = I_3$, j'en déduis que la matrice P est inversible et que

$$P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule le produit PM avant de multiplier le résultat par P^{-1} :

$$P \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4+1 & 0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$PM \times P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 1 \\ 1-1 & 3 & 1 \\ 3-3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi j'ai bien montré que $PMP^{-1} = A$.

c) Avant de passer à la récurrence proprement dite, il me faut montrer que $M = P^{-1}AP$.
Il s'agit d'une conséquence directe de la question précédente : comme $PMP^{-1} = A$,
alors $P^{-1} \times PMP^{-1} \times P = P^{-1}AP$, *i.e.* $M = P^{-1}AP$, puisque $P^{-1}P = I_3$.

Je raisonne alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $M^n = P^{-1} A^n P$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad P^{-1} A^0 P = P^{-1} I_3 P = P^{-1} P = I_3.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = P^{-1} A^n P \times P^{-1} A P = P^{-1} A^n \times A P = P^{-1} A^{n+1} P.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = P^{-1} A^n P.$$

Comme je connais les matrices P^{-1} , A^n et P , il ne me reste plus qu'à calculer le produit :

$$\begin{aligned} A^n \times P &= \begin{pmatrix} -3^n + 2^n & 0 & -2^n + 3^n - 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 3^n & 0 & 3^n - 2 \times 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix} \\ P^{-1} \times A^n P &= \begin{pmatrix} -2^n + 3^n + 3^n & 0 & -3^n + 2 \times 2^n - 3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n + 3^n & 0 & -3^n + 2 \times 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Je retrouve bien, pour la matrice M^n et tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'expression donnée par l'énoncé.

4. a) J'ai montré à la question 2.e) que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $b_k = k \times 3^{k-1}$.

Donc $b_{k+1} = (k+1) \times 3^k = k \times 3^k + 3^k$ et alors

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_k - 3^k &= k \times 3^k + 3^k - k \times 3^{k-1} - 3^k = k \times (3^k - 3^{k-1}) = k \times (3 \times 3^{k-1} - 3^{k-1}) \\ &= k \times 3^{k-1} \times (3 - 1) = b_k \times 2 = 2b_k. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

- b) Je reconnais la somme des $n+1$ premières puissances de 3. Alors

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{1-3^{n+1}}{-2} = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

- c) Je reconnais une somme télescopique. Ici, seuls les deux termes extrêmes vont rester.

Ainsi

$$\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_1 - b_0 + b_2 - b_1 + \dots + b_n - b_{n-1} + b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1}.$$

En effet, comme $b_0 = 0$, j'obtiens bien le résultat souhaité.

- d) En assemblant les résultats des questions précédentes, j'obtiens bien l'égalité désirée :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k3^{k-1} &= \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \times (b_{k+1} - b_k - 3^k) = \frac{1}{2} \times \left(\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) - \sum_{k=0}^n 3^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(b_{n+1} - \frac{3^{n+1}-1}{2} \right) = \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{1-3^{n+1}}{4} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2 – [BSB 2019 / Ex2]

1. Pour calculer la limite en $-\infty$, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1 \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

J'en déduis que la représentation graphique \mathcal{C} de f admet une asymptote horizontale, au voisinage de $-\infty$, d'équation $y = 0$.

2. a) Je pars de l'expression $\frac{1}{1 + e^{-x}}$ et je multiplie numérateur et dénominateur par e^x pour retrouver l'expression de $f(x)$:

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1 \times e^x}{(1 + e^{-x}) \times e^x} = \frac{e^x}{e^x + e^0} = \frac{e^x}{1 + e^x} = f(x).$$

J'ai bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

- b) Grâce à cette nouvelle expression, je calcule la limite de f en $+\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1 + 0 = 1 \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

J'en déduis alors que la représentation graphique \mathcal{C} de f admet une seconde asymptote horizontale, au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = 1$.

3. a) La fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + e^x$.
Puisque $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x \times (1 + e^x) - e^x \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

J'ai bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$.

- b) Les variations de la fonction f s'obtiennent en étudiant le signe de $f'(x)$. Ici, le signe est immédiat puisque le dénominateur est un carré et le numérateur, une exponentielle. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} . En outre,

$$f(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$\frac{1}{2}$	1

- c) L'équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation devient

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

Or

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Finalement l'équation de \mathcal{T} est donnée par

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

4. La convexité de f s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.

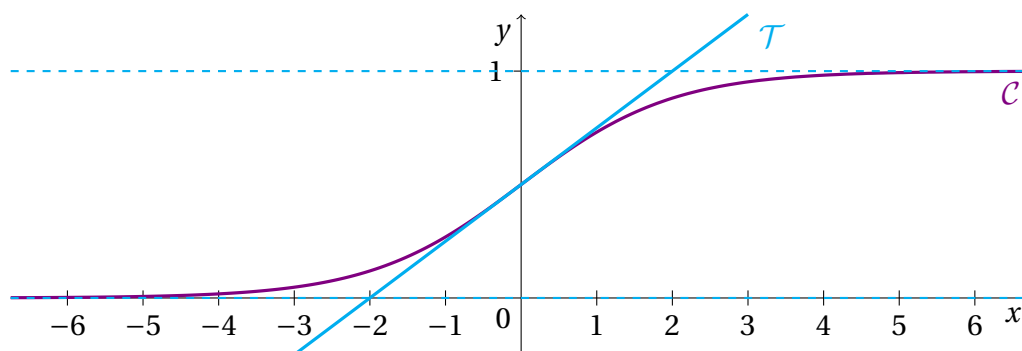
Ici l'énoncé me donne $f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0 \quad \text{et} \quad (1+e^x) > 0$,

j'en déduis que le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $(1-e^x)$.

Or $1-e^x \geq 0 \iff 1 \geq e^x \iff 0 \geq x$, donc j'en déduis que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ puis concave sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est point d'inflexion : la tangente en ce point, calculée précédemment, traverse la courbe en ce point.

5. La courbe admet deux asymptotes horizontales, je connais l'équation de la tangente à la courbe en 0. Je suis donc capable de tracer l'allure de la courbe.



Exercice 3 – [BSB 2019 / Ex3]

1. Si la pièce amène FACE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne \mathcal{U}_2 et la boule tirée est rouge avec probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi $P_F(R_1) = \frac{1}{2}$.

Au contraire, si la pièce amène PILE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne \mathcal{U}_1 et la boule tirée est rouge avec probabilité 1. Autrement dit $P_{\bar{F}}(R_1) = 1$.

Alors d'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, \bar{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer une boule rouge est donnée par

$$P(R_1) = P(F \cap R_1) + P(\bar{F} \cap R_1) = P(F) \times P_F(R_1) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

2. a) Si la pièce amène FACE, alors les tirages s'effectuent dans l'urne \mathcal{U}_2 .
D'après la formule des probabilités composées,

$$P_F(R_1 \cap R_2) = P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(R_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

De même,

$$P_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2) = P_{\bar{F}}(R_1) \times P_{\bar{F} \cap R_1}(R_2) = 1 \times 1 = 1.$$

Alors d'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, \bar{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer deux boules rouges de suite est donnée par

$$P(R_1 \cap R_2) = P(F) \times P_F(R_1 \cap R_2) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

b) Je cherche ici $P_{R_1 \cap R_2}(\bar{F})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{R_1 \cap R_2}(\bar{F}) = \frac{P(\bar{F} \cap R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{7} = \frac{6}{7}.$$

Si les deux boules tirées sont rouges, la probabilité que la pièce ait amené PILE est $\frac{6}{7}$.

3. **Dans cette question, une erreur présente initialement dans l'énoncé a été corrigée.**

a) Si une boule blanche est tirée en premier, alors je sais qu'il s'agit de l'urne \mathcal{U}_2 , donc $Y = 1$. Si au contraire une boule rouge est tirée, il peut s'agir de l'urne \mathcal{U}_1 ou de \mathcal{U}_2 et il faut donc faire au moins un autre tirage.

Si ce deuxième tirage donne une boule blanche, alors encore une fois, je sais qu'il s'agit de l'urne \mathcal{U}_2 , donc $Y = 2$. Si au contraire une boule rouge est tirée, alors il peut encore s'agir de l'urne \mathcal{U}_1 ou de \mathcal{U}_2 . Il faut donc refaire un troisième tirage pour déterminer dans quelle urne les tirages ont lieu.

Au troisième tirage, si une boule blanche est tirée, alors il s'agit de l'urne \mathcal{U}_2 . Cependant, si une boule rouge est tirée alors ce ne peut être que l'urne \mathcal{U}_1 puisque seule l'urne \mathcal{U}_1 contient plus de deux boules rouges.

Ainsi j'ai montré que le support de Y , ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y , est donné par $Y(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

b) Comme expliqué à la question précédente, l'événement $[Y = 1]$ ne se réalise que lorsqu'une boule blanche est tirée au premier tirage. Ceci n'est possible que si la boule a été tirée dans l'urne \mathcal{U}_2 et donc que la pièce a amené FACE.

Ainsi j'ai bien montré que

$$[Y = 1] = F \cap B_1.$$

Alors d'après la formule des probabilités composées,

$$P(Y = 1) = P(F \cap B_1) = P(F) \times P_F(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

c) Par un raisonnement similaire à la question précédente, je montre que

$$[Y = 2] = F \cap R_1 \cap B_2.$$

Alors d'après la formule des probabilités composées,

$$P(Y = 2) = P(F \cap R_1 \cap B_2) = P(F) \times P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

d) Par complémentarité, comme $\{[Y = 1], [Y = 2], [Y = 3]\}$ forme un système complet d'événements, j'obtiens que

$$P(Y = 3) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

Je remarque qu'il s'agit là de la somme des deux probabilités données dans l'énoncé initial.

e) Je connais désormais la loi de Y donc je peux facilement calculer son espérance :

$$E(Y) = 1 \times P(Y = 1) + 2 \times P(Y = 2) + 3 \times P(Y = 3) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{7}{4} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exercice 4 – [ECRICOME 2020 / Ex1]**Partie A**

1. Voici la fonction complétée :

```

1. def calcul(n):
2.     u=0
3.     v=1
4.     for k in range(n):
5.         w=u
6.         u=v
7.         v=7*u+8*w
8.     return u

```

2. Pour montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, j'exprime s_{n+1} en fonction de s_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} = 8u_{n+1} + 8u_n = 8 \times (u_{n+1} + u_n) = 8 \times s_n.$$

J'ai bien montré que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 8$.

Je peux alors en donner son expression explicite : comme $s_0 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = s_0 \times q^n = 1 \times 8^n = 8^n.$$

3. a) D'après les formules de l'énoncé, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = v_n - v_{n+1} = (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} = (-1)^n \times (u_n + u_{n+1}) = (-1)^n \times s_n.$$

b) D'après les questions précédentes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $t_n = (-1)^n \times s_n$ et $s_n = 8^n$.
Alors

$$t_n = (-1)^n \times 8^n = (-8)^n.$$

4. a) Il s'agit de la somme des n premières puissances de -8 . Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{1 - (-8)^{n-1+1}}{1 - (-8)} = \frac{1 - (-8)^n}{1 + 8} = \frac{1}{9} \times (1 - (-8)^n).$$

b) Il s'agit cette fois d'une somme télescopique :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = v_0 - v_1 + v_1 - v_2 + \cdots + v_{n-2} - v_{n-1} + v_{n-1} - v_n = v_0 - v_n = -v_n. \quad \text{car } v_0 = 0.$$

c) D'après les questions précédentes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = - \sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = - \sum_{i=0}^{n-1} t_i = - \sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = - \frac{1}{9} \times (1 - (-8)^n) = \frac{1}{9} \times ((-8)^n - 1).$$

Puis comme $v_n = (-1)^n u_n$, alors $u_n = (-1)^n v_n$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (-1)^n \times \frac{1}{9} \times ((-8)^n - 1) = \frac{1}{9} \times ((-1)^n \times (-8)^n - (-1)^n) = \frac{1}{9} \times (8^n - (-1)^n).$$

Enfin comme $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$, alors j'ai bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}.$$

Partie B

1. Je calcule le produit M^2 puis l'expression $M^2 - 7M - 8I$:

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+9+9 & 6+6+9 & 6+9+6 \\ 6+6+9 & 9+4+9 & 9+6+6 \\ 6+9+6 & 9+6+6 & 9+9+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$$

$$M^2 - 7M + 8I = \begin{pmatrix} 22 & 23 & 23 \\ 23 & 22 & 23 \\ 23 & 23 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & -21 & -21 \\ -21 & -14 & -21 \\ -21 & -21 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

2. D'après la question précédente,

$$M^2 - 7M - 8I = 0_3 \iff M^2 - 7M = 8I \iff M \times (M - 7I) = 8I$$

$$\iff M \times \left(\frac{1}{8} \times (M - 7I) \right) = I.$$

La matrice M est donc bien inversible et son inverse est donnée par $M^{-1} = \frac{1}{8} \times (7I - M)$.

3. a) Je calcule chaque côté pour vérifier l'égalité :

$$M^0 = I \quad \text{et} \quad a_0 M + b_0 I = 0 \times M + 1 \times I = I.$$

Donc l'égalité $M^0 = a_0 M + b_0 I$ est bien vérifiée.

- b) De la même façon, en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, alors j'obtiens bien que

$$a_1 M + b_1 I = 1 \times M + 0 \times I = M = M^1.$$

- c) En supposant que $M^n = a_n M + b_n I$ pour deux réels a_n et b_n , alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = (a_n M + b_n I) \times M = a_n M^2 + b_n M.$$

Or en utilisant le résultat de la question 1., puisque $M^2 - 7M - 8I = 0_3$ alors $M^2 = 7M + 8I$.
En remplaçant M^2 par cette expression, j'obtiens alors

$$M^{n+1} = a_n(7M + 8I) + b_n M.$$

Puis en développant le produit,

$$M^{n+1} = 7a_n M + 8a_n I + b_n M = (7a_n + b_n)M + 8a_n I,$$

$$\text{i.e.} \quad M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I \quad \text{pour} \quad a_{n+1} = 7a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 8a_n.$$

- d) Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont initialisées de la même manière :

$$a_0 = u_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_1 = u_1 = 1.$$

L'étape d'initialisation est double puisque la formule de récurrence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fait intervenir u_{n+1} , u_n et u_{n-1} . C'est pourquoi je m'éloigne un peu de la rédaction habituelle.

Et les formules de récurrence des deux suites sont identiques : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = 7a_n + b_n = 7a_n + 8a_{n-1}, \text{ puisque } b_{n+1} = 8a_n.$$

Alors par récurrence, comme les suites sont initialisées et définies par récurrence de la même manière, les deux suites sont identiques, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = u_n.$$

Partie C

1. La somme de toutes les probabilités doit être égale à 1. Or ici, la somme vaut 24β .

Donc

$$24\beta = 1 \iff \beta = \frac{1}{24}.$$

2. Pour déterminer les lois marginales, je calcule la somme des probabilités sur chacune des lignes ou des colonnes. J'obtiens alors les tableaux suivants :

k	1	2	3
$P(X = k)$	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$

k	1	2	3
$P(Y = k)$	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$

Les deux lois sont identiques (même support et mêmes probabilités) et il s'agit de la loi uniforme sur l'intervalle $\llbracket 1, 3 \rrbracket$. Ainsi

$$E(X) = E(Y) = \frac{3+1}{2} = 2.$$

3. a) Je calcule l'espérance du produit XY à l'aide de la loi conjointe :

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \times 1 \times 2\beta + 1 \times 2 \times 3\beta + 1 \times 3 \times 3\beta + 2 \times 1 \times 3\beta + 2 \times 2 \times 2\beta + 2 \times 3 \times 3\beta \\ &\quad + 3 \times 1 \times 3\beta + 3 \times 2 \times 3\beta + 3 \times 3 \times 2\beta \\ &= (2 + 6 + 9 + 6 + 8 + 18 + 9 + 18 + 18)\beta = 94\beta = \frac{94}{24} = \frac{47}{12}. \end{aligned}$$

Puis d'après la formule de König-Huygens,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y) = \frac{47}{12} - 2 \times 2 = \frac{47}{12} - 4 = \frac{47}{12} - \frac{48}{12} = -\frac{1}{12}.$$

- b) Si les deux variables aléatoires X et Y étaient indépendantes, alors la covariance $\text{Cov}(X, Y)$ serait nulle. Or selon la question précédente, ce n'est pas le cas.
Donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.