

INTERRO DE RENTRÉE

Exercice 1 –

$$1. \quad 4x - 5 = -2x + 3 \iff 6x = 8 \iff x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}.$$

$$2. \quad x + 4 \leq -2x + 5 \iff 3x \leq 1 \iff x \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } S = \left] -\infty, \frac{1}{3} \right].$$

$$3. \quad 2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 3x - 18 \iff x^2 - 10x + 21 = 0$$

Je calcule le discriminant : $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 21 = 100 - 84 = 16 > 0$.

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{10 - 4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 4}{2} = 7.$$

$$\text{Donc } S = \{3, 7\}.$$

$$4. \quad \text{Je cherche le signe de } P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4.$$

Comme la somme des coefficients est nulle, alors 1 est une racine : $P(1) = 2 - 3 + 5 - 4 = 0$.

Donc $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ est un multiple de $x - 1$. Je note alors $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$, *i.e.*

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = (x - 1) \times (ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.$$

Alors par identification des coefficients,

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = 5 \\ -c = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 + a = -3 + 2 = -1 \\ c = 5 + b = 5 - 1 = 4 \\ -c = -4 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = (x - 1)(2x^2 - x + 4).$$

Je calcule le discriminant du facteur de degré 2 : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 1 - 32 = -31 < 0$.

Ce facteur n'admet donc pas de racine et est de signe constant, positif puisque $a = 2 > 0$.

Alors le signe de $P(x)$ est donné par celui de $x - 1$, *i.e.*

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 < 0 \iff x - 1 < 0 \iff x < 1.$$

$$\text{Donc } S = \left] -\infty, 1 \right[.$$

$$5. \quad \frac{2x+3}{x-1} + \frac{1}{x} = 0 \iff \frac{(2x+3) \times x + (x-1) \times 1}{(x-1) \times x} = 0 \iff \frac{2x^2 + 4x - 1}{x(x-1)} = 0$$

Cette équation a deux valeurs interdites : 0 et 1.

Je calcule le discriminant du numérateur : $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 16 + 8 = 24 > 0$.

Le numérateur admet donc deux racines, et comme $\sqrt{24} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$, alors

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{24}}{2 \times 2} = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{4} = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{4} = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Aucune de ces solutions n'est valeur interdite, donc } S = \left\{ -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$

Exercice 2 –

1. Je calcule la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x = +\infty.$$

2. Je calcule la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0$$

Donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0.$

3. Je calcule la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

4. Je calcule la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \text{Forme indéterminée.}$$

Or $\ln(x) - x = x \times \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right)$ et par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$

Donc

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -1 \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty.$$

5. Je calcule la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} 4x - 1 = 7 \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) + 4x - 1 = +\infty.$$

Exercice 3 –

1. f est une fonction polynomiale donc $f'(x) = 3x^2 + 4 \times 2x - 5 = 3x^2 + 8x - 5.$

2. f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 4x - 1$ et $v(x) = \ln(x)$. Comme $u'(x) = 4$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$, alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 4 \times \ln(x) + (4x - 1) \times \frac{1}{x} = 4\ln(x) + 4 - \frac{1}{x}.$$

3. f est de la forme $e^u + 1$ avec $u(x) = 2x + 3$. Comme $u'(x) = 2$, alors

$$f'(x) = u'(x) e^{u(x)} + 0 = 2 \times e^{2x+3} = 2e^{2x+3}.$$

4. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2$. Comme $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 2x$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{x^2 e^x - 2x e^x}{(x^2)^2} = \frac{x(x-2)e^x}{x^4} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}.$$

5. f est de la forme u^2 avec $u(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Alors $f'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x)$.

Il me faut donc calculer $u'(x)$. u est de la forme $\frac{w}{v}$ avec $w(x) = x+1$ et $v(x) = x-1$.

Comme $w'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$, alors

$$u'(x) = \frac{w'(x)v(x) - w(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Ainsi

$$f'(x) = 2 \times \left(-\frac{2}{(x-1)^2} \right) \times \frac{x+1}{x-1} = -\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Exercice 4 –

1. Je calcule les limites en 0^+ et en $+\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^5 = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty \end{array} \right\} \text{Par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+.$$

2. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x^5$. Comme $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 5x^4$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x^5 - \ln(x) \times 5x^4}{(x^5)^2} = \frac{x^4(1 - 5\ln(x))}{x^{10}} = \frac{1 - 5\ln(x)}{x^6}.$$

J'étudie le signe de $f'(x)$ pour obtenir les variations de f :

$$1 - 5\ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq 5\ln(x) \iff \frac{1}{5} \geq \ln(x) \iff e^{\frac{1}{5}} \geq x.$$

J'en déduis le tableau de variation suivant, avec $f\left(e^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{5}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{5}}\right)^5} = \frac{\frac{1}{5}}{e} = \frac{1}{5e}$.

x	0	$e^{\frac{1}{5}}$	$+\infty$	
$1-5\ln(x)$	+	0	-	
x^6	0	+	+	
$f'(x)$		+	0	-
f	<div><div>$-\infty$</div><div>\nearrow</div><div>$\frac{1}{5e}$</div><div>\searrow</div><div>0</div></div>			

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici $a = 1$ et

$$f(1) = \frac{\ln(1)}{1^5} = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{1 - 5\ln(1)}{1^6} = 1.$$

Ainsi l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par

$$y = 1 \times (x - 1) + 0, \quad \text{i.e.} \quad y = x - 1.$$

4. Voici le graphe de la courbe et de sa tangente :



Exercice 5 –

1. Je calcule les limites en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+.$$

2. f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = e^x$. Comme $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -1 \times e^x + (2 - x) \times e^x = (1 - x)e^x.$$

J'étudie le signe de $f'(x)$ pour obtenir les variations de f . Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc

$$f'(x) \geq 0 \iff (1 - x)e^x \geq 0 \iff 1 - x \geq 0 \iff 1 \geq x.$$

J'en déduis le tableau de variation suivant, avec $f(1) = (2 - 1) \times e^1 = e$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1 - x$	+	0	-
e^x	+		+
$f'(x)$	+	0	-
f	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> 0 ↗ e ↘ $-\infty$ </div>		

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici $a = 1$ et

$$f(1) = e \quad \text{et} \quad f'(1) = (1 - 1) \times e^1 = 0.$$

Ainsi l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par

$$y = 0 \times (x - 1) + e, \quad \text{i.e.} \quad y = e.$$

4. f' est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = e^x$. Comme $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -1 \times e^x + (1 - x) \times e^x = -xe^x.$$

La fonction f est convexe là où sa dérivée seconde est positive.

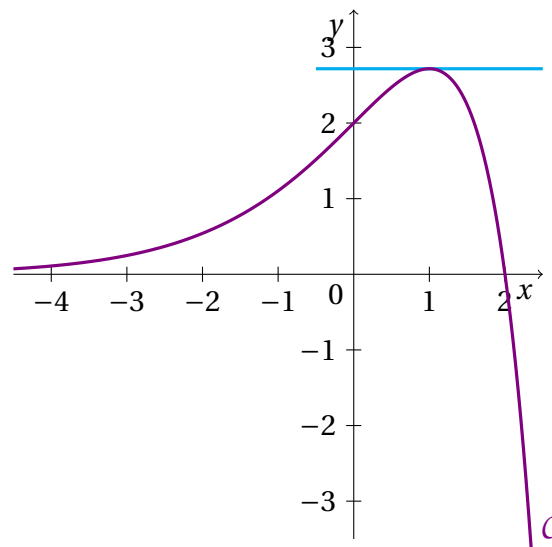
Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc

$$f''(x) \geq 0 \iff -xe^x \geq 0 \iff -x \geq 0 \iff x \leq 0.$$

Finalement f est convexe sur $]-\infty, 0]$ et concave sur $[0, +\infty[$.

La courbe \mathcal{C} admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0 : $(0, f(0)) = (0, 2)$.

5. Voici le graphe de la courbe et de sa tangente :



Exercice 6 –

1. a) f est de la forme uv avec $u(x) = x^2 - 2x + 2$ et $v(x) = e^x$. Comme $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x - 2) \times e^x + (x^2 - 2x + 2) \times e^x = x^2 e^x.$$

- b) Les variations de f s'obtiennent grâce au signe de la dérivée. Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et $x^2 \geq 0$. J'en déduis donc le tableau de variation suivant, avec $f(0) = (0^2 - 2 \times 0 + 2) \times e^0 = 2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	+	0	+
e^x	+		+
$f'(x)$	+	0	+
f	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-between;"> 0 2 $+\infty$ </div>		

2. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici $a = 1$ et

$$f(1) = (1^2 - 2 \times 1 + 2) \times e^1 = e \quad \text{et} \quad f'(1) = 1^2 \times e^1 = e.$$

Ainsi l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par

$$y = e \times (x - 1) + e, \quad \text{i.e.} \quad y = ex.$$

3. a) f' est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$. Comme $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x = (x^2 + 2x)e^x = x(x+2)e^x.$$

- b) La fonction f est convexe là où sa dérivée seconde est positive.

Comme pour tout $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ alors

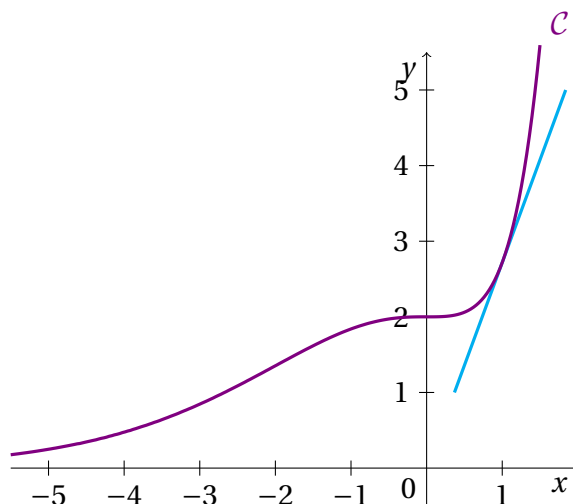
$$f''(x) \geq 0 \iff x(x+2)e^x \geq 0 \iff x(x+2) \geq 0.$$

Il s'agit de la forme factorisée d'un polynôme de degré 2 dont les racines sont -2 et 0 . Comme $a = 1 > 0$ le polynôme est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre celles-ci. Donc f est convexe sur $]-\infty, -2]$ et sur $[0, +\infty[$ et concave sur $[-2, 0]$.

- c) La courbe \mathcal{C} admet deux points d'inflexion :

$$(-2, f(-2)) = \left(-2, \frac{10}{e^2}\right) \quad \text{et} \quad (0, f(0)) = (0, 2).$$

4. Voici le graphe de la courbe et de sa tangente :



Exercice 7 –

1. La fonction est polynomiale donc je calcule directement :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x - 4) dx &= \left[3 \times \frac{x^4}{4} - 2 \times \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 4 \right) - 0 = \frac{9 - 8 + 6 - 48}{12} = -\frac{41}{12}. \end{aligned}$$

2. Je commence par calculer une primitive de $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + x^2$. Puisque $u'(x) = 2x$, alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{u(x)} \right) = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Et donc

$$\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \left[-\frac{1}{2(1+x^2)} \right]_0^2 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

3. Je commence par calculer une primitive de $f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.

f semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^2 + 1$. Puisque $u'(t) = 2t$, alors

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} = 2 \times \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = 2f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(t)} = \sqrt{u(t)} = \sqrt{t^2+1}.$$

Et donc $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = \left[\sqrt{t^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1.$

4. La fonction est une somme donc je calcule directement :

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 4x - 1 \right) dx = \left[2\sqrt{x} + 2x^2 - x \right]_1^2 = (2\sqrt{2} + 8 - 2) - (2 + 2 - 1) = 2\sqrt{2} + 3.$$

5. Je commence par calculer une primitive de $f(x) = \frac{x^3}{x^4+3}$.

f semble être de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^4 + 3$. Puisque $u'(x) = 4x^3$, alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{4x^3}{x^4+3} = 4f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \ln(u(x)) = \frac{\ln(x^4+3)}{4}.$$

Et donc

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x^3}{x^4+3} dx = \left[\frac{\ln(x^4+3)}{4} \right]_{-2}^{-1} = \frac{\ln(4)}{4} - \frac{\ln(19)}{4} = \frac{1}{4} \times \ln\left(\frac{4}{19}\right) = -\frac{1}{4} \times \ln\left(\frac{19}{4}\right).$$

Exercice 8 –

1. a) f est de la forme $f(x) = u(x)^3 + x$ avec $u(x) = 1 - x$. Comme $u'(x) = -1$, alors

$$f'(x) = 3 \times (-1) \times (1-x)^2 + 1 = -3(x^2 - 2x + 1) + 1 = -3x^2 + 6x - 3 + 1 = -3x^2 + 6x - 2.$$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, je calcule le discriminant : $\Delta = 6^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 12 > 0$.

Le polynôme admet donc deux racines, et comme $\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, alors

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{12}}{2 \times (-3)} = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{-6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{-6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Je déduis le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f , avec

$$f(0) = (1-0)^3 + 0 = 1, \quad f(1) = (1-1)^3 + 1 = 1$$

$$\text{et} \quad f\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{9} = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

x	0	$1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(x)$	-	0	+
f	1	$1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$	1

b) D'après le tableau de variation précédent, je sais que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \leq f(x) \leq 1.$$

Il ne me reste alors plus qu'à montrer que $1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \geq 0$.

Comme $0 \leq 2\sqrt{3} \leq 9$, alors $0 \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \leq 1$ et donc $1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \geq 0$.

Finalement, j'ai bien montré que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

2. a) Je raisonne par récurrence sur $n \geq 0$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $u_n \in [0, 1]$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{4}{10}$ et $0 \leq \frac{4}{10} \leq 1$. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $u_n \in [0, 1]$. Or d'après la question **1.b)**, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$. Donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$.

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1].$$

b) J'étudie le signe de la différence de deux termes consécutifs : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (1 - u_n)^3 + u_n - u_n = (1 - u_n)^3 \geq 0 \quad \text{car } u_n \in [0, 1].$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (d'après la question **2.b)**) et majorée par 1 (d'après la question **2.a)**). Donc selon le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Je note ℓ sa limite, i.e. $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$. Alors en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = (1 - u_n)^3 + u_n$, j'obtiens donc que $\ell = (1 - \ell)^3 + \ell$.
Ainsi $(1 - \ell)^3 = 0 \iff 1 - \ell = 0 \iff \ell = 1$. Ainsi j'ai bien montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 9 –

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12500 = 1.02u_n - 250 - 12500 = 1.02(v_n + 12500) - 250 - 12500 \\ &= 1.02v_n + 12750 - 250 - 12500 = 1.02v_n. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien géométrique, de raison $q = 1.02$.

b) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1.02 et son premier terme est donné par $v_0 = u_0 - 12500 = 8500 - 12500 = -4000$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n = -4000 \times 1.02^n.$$

c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 12500$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 12500 - 4000 \times 1.02^n.$$

2. Comme $1.02 > 1$ et que $v_0 = -4000$ est négatif, la suite géométrique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Et comme pour tout entier n , $u_n = v_n + 12500$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi décroissante.

3. Comme $1.02 > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1.02^n = +\infty$ et par somme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 12500 - 4000 \times 1.02^n = -\infty.$$

Exercice 10 –

1. a) D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} P(H) &= \frac{52}{100} = \frac{13}{25}, & P_H(\bar{S}) &= \frac{15}{100} = \frac{3}{20}, & P_F(S) &= \frac{916}{1000} = \frac{229}{250}, \\ P(F) &= 1 - P(H) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}, & P_H(S) &= 1 - P_H(\bar{S}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20} \\ & & \text{et } P_F(\bar{S}) &= 1 - P_F(S) = 1 - \frac{229}{250} = \frac{21}{250}. \end{aligned}$$

b) D'après la formule des probabilités composées,

$$P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = \frac{12}{25} \times \frac{229}{250} \approx 0.44.$$

Ainsi environ 44% des personnes qui exercent un emploi sont des femmes salariées.

c) D'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, H\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(S) = P(F)P_F(S) + P(H)P_H(S) = \frac{12}{25} \times \frac{229}{250} + \frac{13}{25} \times \frac{17}{20} \approx 0.44 + \frac{221}{500} \approx 0.88.$$

d) Je cherche $P_S(H)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_S(H) = \frac{P(H \cap S)}{P(S)} \approx \frac{0.44}{0.88} = 0.5.$$

2. a) Il s'agit de la répétition de $n = 40$ épreuves de Bernoulli de succès "la femme travaille à temps partiel", de probabilité $p = 0.3$, identiques et indépendantes. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0.3$. Le support de X est donné par $X(\Omega) = \llbracket 0, 40 \rrbracket$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k} = \binom{40}{k} \times 0.3^k \times 0.7^{40-k}.$$

b) Puisque X suit une loi binomiale, $E(X) = np = 40 \times 0.3 = 12$. Cela signifie qu'en moyenne, pour chaque échantillon de 40 femmes, 12 travaillent à temps partiel.

c) Je cherche $P(X = 12)$. En appliquant la formule de la question 2.a), j'obtiens que

$$P(X = 12) = \binom{40}{12} \times 0.3^{12} \times 0.7^{28}.$$

Exercice 11 –

1. Le support est l'ensemble des issues possibles. Ici deux boules sont tirées donc il peut y en avoir 0, 1 ou 2 rouges, *i.e.* $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Pour tout $k \in \{0, 1\}$, je note R_k , V_k et B_k les événements "obtenir une boule rouge au k -ième tirage", "obtenir une boule verte au k -ième tirage" et "obtenir une boule bleue au k -ième tirage".

D'après la formule des probabilités composées,

$$P(X = 2) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Les tirages possibles n'amenant aucune boule rouge sont les suivants : $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap B_2$ et $B_1 \cap V_2$. Donc

$$P(X = 0) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) + P(V_1) \times P_{V_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(V_2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Enfin

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 2) - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Tout ceci est résumé dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. Grâce aux valeurs du tableau,

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

Pour la variance, je commence par calculer $E(X^2)$. Grâce au théorème de transfert,

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{5}.$$

Puis d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{5} - 1^2 = \frac{2}{5}.$$

3. La formule de la fonction de répartition est donnée par $F_X(x) = P(X \leq x)$. Donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{5} & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \frac{4}{5} & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

