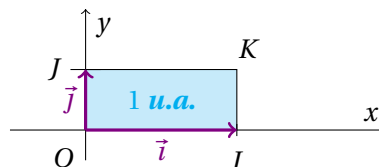


# 11 | Intégrales et primitives

## I – Intégrale et aire

### 1 – Unité d'aire

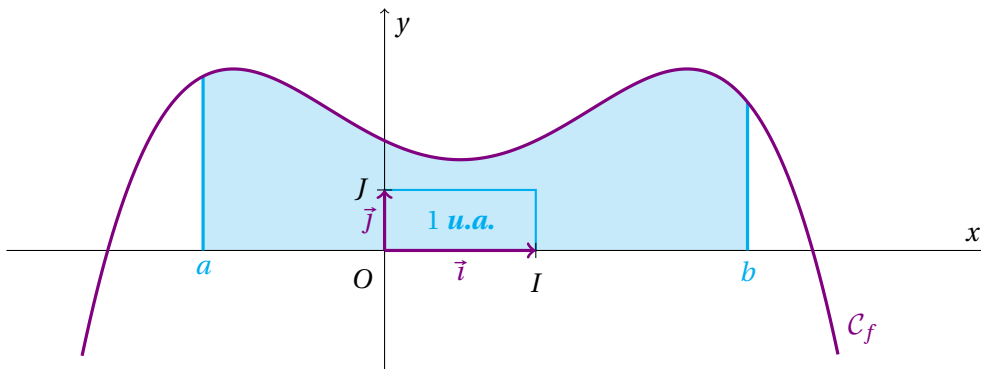
Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthogonal du plan.  
L'unité d'aire, notée  $u.a.$ , est l'aire du rectangle unitaire  $OIKJ$  avec  $I(1, 0)$ ,  $J(0, 1)$  et  $K(1, 1)$ .



### 2 – Intégrale d'une fonction continue et positive

**Définition 11.1** – Soit  $f$  une fonction définie, continue et positive sur un intervalle  $[a, b]$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
L'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}_f$  compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .

Ce nombre est noté  $\int_a^b f(x) dx$ .



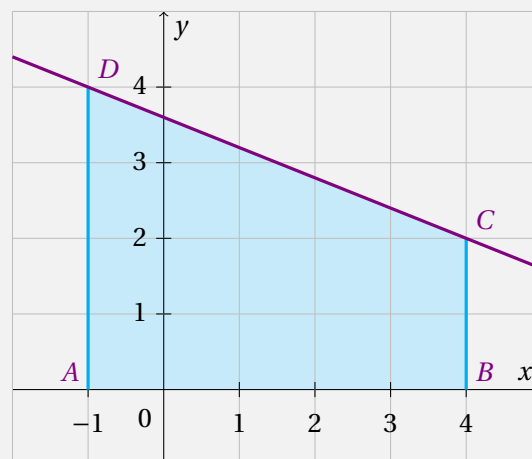
#### Remarque 11.2 –

- $\int_a^b f(x) dx$  se lit "intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f(x) dx$ ".
- Les réels  $a$  et  $b$  sont appelés les **bornes** de l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$ .
- La variable  $x$  est dite "muette", elle n'intervient pas dans le résultat. C'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres  $a$  et  $b$  :  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$ .
- $\int_a^a f(x) dx = 0$ , car le domaine  $\mathcal{D}_f$  est alors réduit à un segment.

**Exemple 11.3** – Calculer  $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$ .

La fonction affine  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = -0,4x + 3,6$  est continue et positive sur l'intervalle  $[-1, 4]$ . L'intégrale  $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$  est égale à l'aire du trapèze  $ABCD$ .

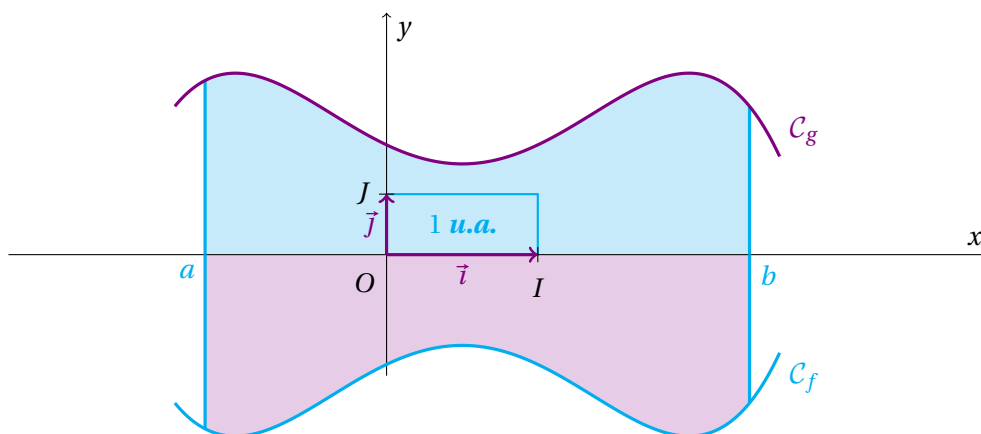
$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx &= \frac{(AD + BC) \times AB}{2} \\ &= \frac{(4 + 2) \times 5}{2} \\ &= 15. \end{aligned}$$



### 3 – Intégrale d'une fonction continue et négative

Si  $f$  est une fonction continue et négative sur un intervalle  $[a, b]$ , alors la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[a, b]$  par  $g = -f$  est une fonction continue et positive sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine  $\mathcal{D}_f$  compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  est égale à l'aire du domaine  $\mathcal{D}_g$  compris entre la courbe  $\mathcal{C}_g$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .



**Définition 11.4** – Soit  $f$  une fonction définie, continue et négative sur un intervalle  $[a, b]$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

L'intégrale de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  est égale à l'opposé de l'aire  $\mathcal{A}$ , exprimée en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}_f$  compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  :

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}.$$

### 4 – Lien entre intégrale et dérivée

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ . On peut définir une nouvelle fonction  $F$  qui à tout réel  $x$  de l'intervalle  $[a, b]$ , associe l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $x$  :  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

#### Théorème 11.5

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ .

La fonction  $F$  définie sur  $[a, b]$  par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur  $[a, b]$  et a pour dérivée  $f$ .

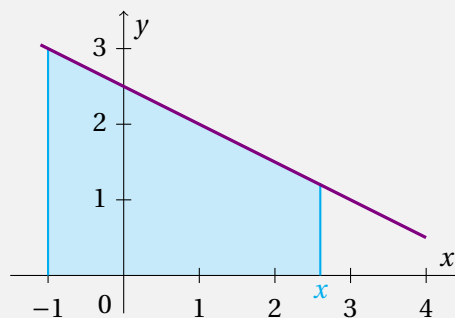
**Exemple 11.6** – Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[-1, 4]$  par  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .

Si  $x$  est un réel de l'intervalle  $[-1, 4]$ , la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  est égale à l'aire du trapèze colorié. On a donc

$$F(x) = \frac{(3 + (-0,5x + 2,5)) \times (x + 1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}.$$

La fonction  $F$  est dérivable sur  $[-1, 4]$  et

$$F'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x).$$



## II – Primitives

### 1 – Définition

**Définition 11.7** – Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $F$  est une **primitive de la fonction  $f$  sur  $I$**  si  $F$  est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

**Exemple 11.8** –

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$  est une primitive sur  $\mathbf{R}$  de  $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$ .

En effet, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $F'(x) = 3x^2 + 6x = f(x)$ .

- $G : x \mapsto 2\sqrt{x}$  est une primitive sur  $\mathbf{R}_+^*$  de  $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

En effet, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $G'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$ .

- Les fonctions  $F : x \mapsto x^2$ ,  $G : x \mapsto x^2 + 1$ , mais aussi  $H : x \mapsto x^2 + c$ ,  $c \in \mathbf{R}$  sont des primitives sur  $\mathbf{R}$  de la fonction  $f : x \mapsto 2x$ .

En effet, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x = f(x)$ .

**Remarque 11.9** –

- Comme  $F$  est dérivable sur  $I$ , la fonction  $F$  est en particulier continue sur  $I$ .
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée  $f$ . C'est pourquoi on parle **d'une** primitive de la fonction  $f$  et non de **la** primitive de la fonction  $f$ .

### Théorème 11.10

- Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet au moins une primitive sur  $I$ .
- Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors toute autre primitive de  $f$  sur  $I$  est la forme  $F + c$  où  $c$  est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de  $f$  sur  $I$  qui prend une valeur donnée en un point donné. Si  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbf{R}$ , il existe une unique primitive  $F_0$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $F_0(x_0) = y_0$ .

**Exemple 11.11** – La fonction  $F$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $F(x) = x^2 - 1$  est une primitive de  $f : x \mapsto 2x$  vérifiant  $F(1) = 0$ .

En effet, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $F'(x) = 2x = f(x)$  et  $F(1) = 1^2 - 1 = 0$ .

## 2 – Primitives des fonctions usuelles

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants.

- Si  $F$  et  $G$  sont des primitives des fonctions  $f$  et  $g$  sur un intervalle  $I$ , alors  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ .
- Si  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  et  $\lambda$  un réel, alors  $\lambda F$  est une primitive de  $\lambda f$  sur  $I$ .

$f$ est définie sur $I$ par	une primitive $F$ est donnée par	validité
$f(x) = a \quad (a \in \mathbf{R})$	$F(x) = ax$	sur $\mathbf{R}$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbf{N})$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbf{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	sur $] -\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n > 2 \text{ entier})$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $] -\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0, +\infty[$

**Exemple 11.12** – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1.  $f(x) = 3x^2$   
 $F(x) = 3 \times \frac{1}{3} x^3 + C = x^3 + C$

2.  $f(x) = x + \frac{3}{2}$   
 $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + C$

3.  $f(x) = (2x+1)(x-3)$   
 Tout d'abord, développons  $f(x) = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$ .  
 Ainsi une primitive est donnée par  $F(x) = 2 \times \frac{1}{3} x^3 - 5 \times \frac{1}{2} x^2 - 3x + C = \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 - 3x + C$ .

4.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$   
 $F(x) = -\frac{1}{x} + C$

7.  $f(x) = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$   
 $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + 2x + 2\sqrt{x} + C$

5.  $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$   
 $F(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{x} + C$

8.  $f(x) = \frac{6x^2 - 8x + 2}{5}$   
 $F(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{5} + C$

6.  $f(x) = \frac{1}{x^5}$   
 $F(x) = -\frac{1}{4x^4} + C$

9.  $f(x) = -\frac{6}{x^4}$   
 $F(x) = -6 \times \left( -\frac{1}{3x^3} \right) = \frac{2}{x^3} + C$

### 3– Primitives des fonctions composées usuelles

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Conditions	fonction $f$	une primitive $F$ est donnée par
$n \in \mathbf{N}, n > 0$	$f = u' \times u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u$ ne s'annule pas sur $I$	$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$
$u$ ne s'annule pas sur $I$ et $n > 1$	$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$u$ strictement positive sur $I$	$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$

**Exemple 11.13** – Calculer des primitives des fonctions suivantes.

1.  $f(x) = (2x+1)^2$

$f$  semble être de la forme  $u' u^2$  avec  $u(x) = 2x+1$ . On a  $u'(x) = 2$  donc

$$u'(x)u(x)^2 = 2(2x+1)^2 = 2f(x).$$

Donc une primitive de  $f$  est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{1}{6}(2x+1)^3.$$

2.  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

$f$  semble être de la forme  $\frac{u'}{u^2}$  avec  $u(x) = x+1$ . On a  $u'(x) = 1$  donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = f(x).$$

Donc une primitive de  $f$  est donnée par

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x+1}.$$

3.  $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$

$f$  semble être de la forme  $\frac{u'}{u^2}$  avec  $u(x) = 1-3x$ . On a  $u'(x) = -3$  donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(1-3x)^2} = -3f(x).$$

Donc une primitive de  $f$  est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{-3} \times \left(-\frac{1}{u(x)}\right) = \frac{1}{-3} \times \left(-\frac{1}{1-3x}\right) = \frac{1}{3(1-3x)}.$$

4.  $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$

$f$  semble être de la forme  $u' u^3$  avec  $u(x) = x^2-x+1$ . On a  $u'(x) = 2x-1$  donc

$$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)(x^2-x+1)^3 = f(x).$$

Donc une primitive de  $f$  est donnée par

$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2-x+1)^4}{4}.$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$f$  semble être de la forme  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$  avec  $u(x) = x+2$ . On a  $u'(x) = 1$  donc

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x).$$

Donc une primitive de  $f$  est donnée par

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x+2}.$$

## III – Intégrale d'une fonction continue

### 1 – Définition

**Définition 11.14** – Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . L'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est le nombre réel égal à  $F(b) - F(a)$ .

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Remarque 11.15** –

- La différence  $F(b) - F(a)$  se note  $\left[F(x)\right]_a^b$ . Ainsi

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Le résultat ne dépend pas de la primitive  $F$  choisie.

**Exemple 11.16** –

- $\int_1^3 3t^2 + 2t - 1 dt = \left[t^3 + t^2 - t\right]_1^3 = (3^3 + 3^2 - 3) - (1^3 + 1^2 - 1) = 33 - 1 = 32.$
- $\int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

**Proposition 11.17**

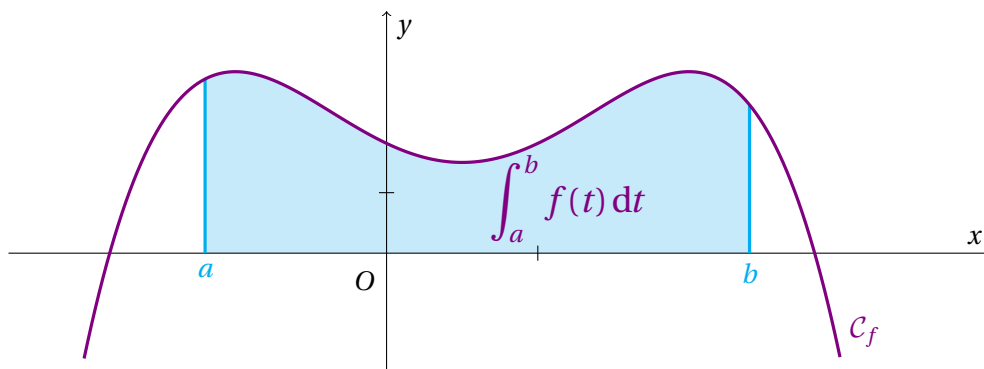
Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  dans  $I$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . On a alors

$$\int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt.$$

## 2– Premières propriétés

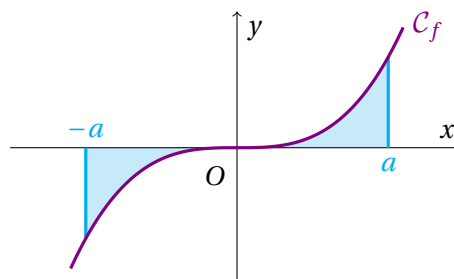
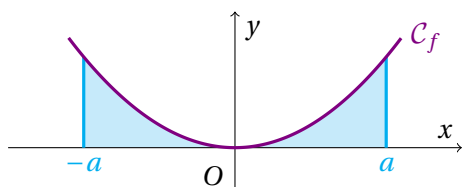
### Proposition 11.18

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ . Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a, b]$ . Soit  $C_f$  la courbe représentative de  $f$ . Alors  $\int_a^b f(t) dt$  est l'aire de la surface comprise entre  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ .



### Proposition 11.19

- Si  $f$  est continue et paire sur  $[-a, a]$ , alors  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ .
- Si  $f$  est continue et impaire sur  $[-a, a]$ , alors  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ .



### Exemple 11.20 –

- $\int_{-1}^1 t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt = 0$ .
- $\int_{-1}^1 t^2 + |t| dt = 2 \int_0^1 t^2 + |t| dt = 2 \int_0^1 t^2 + t dt = 2 \left[ \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3}$ .

### Proposition 11.21 – Relation de Chasles

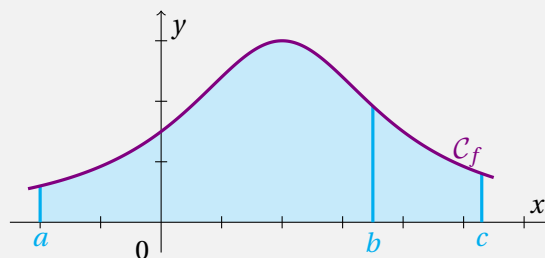
Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soient  $a, b$  et  $c$  dans  $I$ . Alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

**Exemple 11.22 – Interprétation graphique**

Dans le cas où  $f$  est une fonction continue et positive sur  $[a, b]$ .

L'aire du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = c$  est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  et du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = b$  et  $x = c$ .

**Proposition 11.23 – Linéarité de l'intégrale**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$ . Alors, pour tout réel  $\lambda$ , on a

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx.$$

**Exemple 11.24** – Soit  $a$  un réel et  $f$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Vérifier que  $\int_{-1}^1 f(x) \, dx = 1$ .

Par la relation de Chasles, on a

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx = \int_{-1}^0 f(x) \, dx + \int_0^1 f(x) \, dx.$$

Puis, par linéarité,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) \, dx &= \int_{-1}^0 \frac{1-a}{2} \, dx + \int_0^1 \frac{1+a}{2} \, dx = \frac{1-a}{2} \int_{-1}^0 1 \, dx + \frac{1+a}{2} \int_0^1 1 \, dx \\ &= \frac{1-a}{2} [x]_{-1}^0 + \frac{1+a}{2} [x]_0^1 = \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1. \end{aligned}$$