NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 18

Exercice 1 – Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-13x+7}{4x-2}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

Solution :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} 2x^2-13x+7 = \ 1\\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} 4x-2=0^+\end{array}\right\}\text{Par quotient,}\quad \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=+\infty.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x=\dfrac{1}{2}$.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-13x+7}{4x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$

b) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{4x-2}$.

Solution : Je souhaite trouver a, b et c pour que $f(x)$ soit égal à $ax+b+\dfrac{c}{4x-2}$.
Je procède par équivalence :

$$\begin{aligned}
f(x)=ax+b+\frac{c}{4x-2} &\iff \frac{2x^2-13x+7}{4x-2}=ax+b+\frac{c}{4x-2}\\
&\iff \frac{2x^2-13x+7}{4x-2}=\frac{(ax+b)(4x-2)+c}{4x-2}\\
&\iff \frac{2x^2-13x+7}{4x-2}=\frac{4ax^2-2ax+4bx-2b+c}{4x-2}\\
&\iff \frac{2x^2-13x+7}{4x-2}=\frac{4ax^2+(4b-2a)x+c-2b}{2x-2}\\
&\iff \begin{cases}4a=2\\ 4b-2a=-13\\ c-2b=7\end{cases} \iff \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-3\\ c=1\end{cases}
\end{aligned}$$

c) En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 3$.

Solution : En utilisant l'expression de $f(x)$ obtenue à la question précédente,

$$f(x) - y = \frac{x}{2} - 3 + \frac{1}{4x-2} - \left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{1}{4x-2}.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x-2} = 0^+.$$

Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet bien la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 3$ pour asymptote oblique en $+\infty$.