

BSB 2023

Exercice 1 –

1. Je remplace x par -1 dans l'expression de $P(x)$:

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0.$$

En effet, P s'annule bien en $x = -1$.

2. D'après la question précédente, -1 est une racine du polynôme P .

Ainsi $x - (-1) = x + 1$ est un diviseur de P , c'est-  dire qu'il existe un polynôme de degré $3 - 1 = 2$ tel que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$. Je développe ce produit :

$$(x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c.$$

Par identification des coefficients, comme ce produit est égal au polynôme $P(x)$, alors

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = -1 \\ c + b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - 1 = -2 \\ c = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1 \end{cases}$$

Ainsi une factorisation de $P(x)$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 1).$$

3. D'après la question 1., -1 est une racine de $P(x)$. Grâce à la question précédente, je cherche les racines de $x^2 - 2x + 1$. Je reconnais une identité remarquable :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Finalement $P(x)$ admet bien deux racines : -1 et 1 .

4. Comme $P(x)$ est un polynôme, il me suffit d'étudier la limite du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

5. Pour étudier les variations de P , j'étudie le signe de sa dérivée. La fonction P est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Je calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.

Donc $P(x)$ a deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{2 + 4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 - 4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Comme $a = 3 > 0$, j'en déduis le tableau de signe de $P'(x)$ et le tableau de variation de P :

| | | | | | | |
|---------|-----------|----------------|-----------------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $+\infty$ | | |
| $P'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| P | | | $\frac{32}{27}$ | | 0 | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | | | | | |

$$\text{avec } P\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1 - 3 + 9 + 27}{27} = \frac{32}{27}.$$

6. Un point d'inflexion représente un changement de convexité de la courbe : la dérivée seconde s'y annule et change de signe.

La fonction P' est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x) = 6x - 2$. Ainsi

$$P''(x) = 0 \iff 6x - 2 = 0 \iff 6x = 2 \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}.$$

Et comme il s'agit d'une fonction affine, le signe change bien au voisinage de $x = \frac{1}{3}$. Le point d'abscisse $x = \frac{1}{3}$ est bien un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction P .

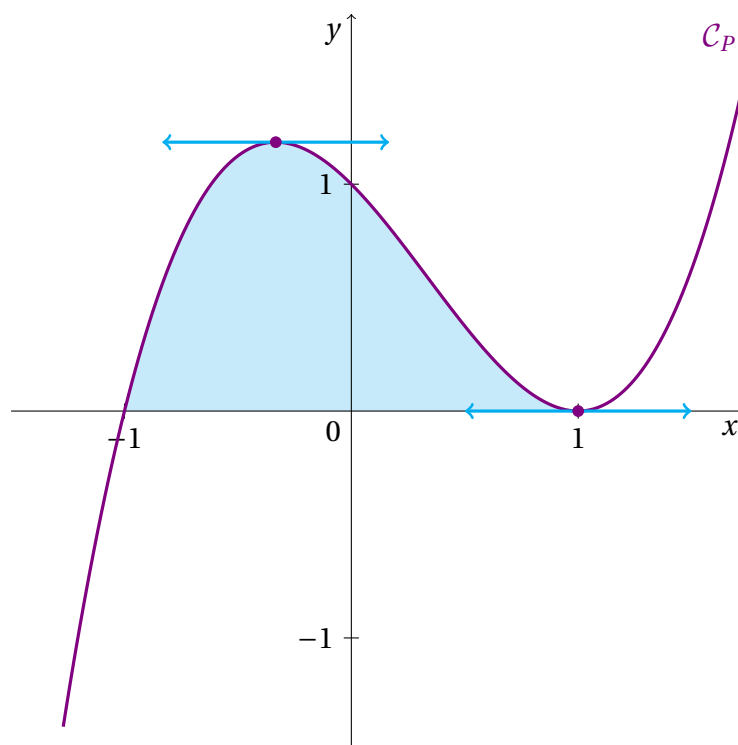
7. Pour calculer l'intégrale I , il me faut cette fois une primitive de la fonction P .

Comme il s'agit d'une fonction polynomiale, j'opère directement terme à terme :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 P(x) \, dx = \int_{-1}^1 x^3 - x^2 - x + 1 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

8. Les tangentes horizontales se situent aux points d'abscisses $-\frac{1}{3}$ et 1 .

Voici le tracé de la courbe de P , avec en bleu l'aire de l'intégrale I :



9. Je remplace x par 0 dans l'expression de $f(x)$:

$$f(0) = (0^2 - 2 \times 0 - 1)e^0 = -1 \times 1 = -1.$$

L'image de 0 par f est -1 .

10. Pour calculer les limites, je décompose le produit en deux facteurs :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x - 1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x - 1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

11. La fonction f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

f est de la forme $u \times v$, avec $u(x) = x^2 - 2x - 1$ et $v(x) = e^x$.

Comme $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x - 2) \times e^x + (x^2 - 2x - 1) \times e^x = (x^2 - 3)e^x.$$

Alors comme l'exponentielle est toujours strictement positive,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff (x^2 - 3)e^x = 0 \iff x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 3 \\ &\iff x = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

12. Grâce aux informations précédentes, je peux dresser le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

| | | | | | | |
|---------|-----------|---------------------------|---------------|------------------------|-----------|-----|
| x | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | 0 | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| f | | $0 \nearrow f(-\sqrt{3})$ | $\searrow -1$ | $f(\sqrt{3}) \nearrow$ | $+\infty$ | |

13. Grâce au tableau de variation, je sais que la fonction f est croissante sur $] -\infty, -\sqrt{3}]$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Alors j'en déduis que $f(-\sqrt{3})$ est positif.

De même, comme la fonction f est décroissante sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ et que $f(0) = -1 < 0$.

Alors j'en déduis que $f(\sqrt{3})$ est négatif.

14. a) D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ et que $f(-\sqrt{3}) > 0 > f(\sqrt{3})$, alors 0 est une valeur intermédiaire et donc il existe un réel $\alpha \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Ce réel est unique par stricte monotonie de la fonction f .

b) Comme $f(0) = -1 < 0$, alors $f(-\sqrt{3}) > f(\alpha) > f(0)$, et par décroissance de f , j'en déduis bien que α est strictement négatif.

15. L'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse -1 est $y = f'(-1) \times (x + 1) + f(-1)$.

Je calcule ces deux valeurs :

$$f(-1) = ((-1)^2 - 2 \times (-1) - 1)e^{-1} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \quad \text{et} \quad f'(-1) = ((-1)^2 - 3)e^{-1} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}.$$

Finalement l'équation de la tangente devient

$$y = -\frac{2}{e} \times (x + 1) + \frac{2}{e}, \quad \text{i.e.} \quad y = -\frac{2}{e}x.$$

Lorsque x vaut 0, j'obtiens que y vaut aussi 0, ce qui confirme bien que cette tangente passe par l'origine du repère.

16. a) L'équation d'une tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$. Cette tangente passe par l'origine si et seulement si cette équation est vérifiée lorsque $(x, y) = (0, 0)$, *i.e.*

$$0 = f'(x_0) \times (0 - x_0) + f(x_0) \iff f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0.$$

- b) En remplaçant $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ par leurs expressions dans l'équation précédente, j'obtiens

$$f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0 \iff (x_0^2 - 2x_0 - 1)e^{x_0} - x_0(x_0^2 - 3)e^{x_0} = 0$$

$$\iff (x_0^2 - 2x_0 - 1 - (x_0^3 - 3x_0))e^{x_0} = 0$$

$$\iff (-x_0^3 + x_0^2 + x_0 - 1)e^{x_0} = 0 \iff -P(x_0)e^{x_0} = 0.$$

Comme une exponentielle n'est jamais nulle, alors on retrouve bien que la tangente passe par l'origine si et seulement si $P(x_0) = 0$.

- c) Comme P n'admet que deux racines distinctes, alors il n'existe que deux abscisses pour lesquelles la tangente en ce point passe par l'origine : en -1 (la tangente déterminée à la question 15.) et en 1 .

Exercice 2 –**Partie 1**

1. a) Il s'agit de $n = 2$ répétitions de l'épreuve de Bernoulli de succès "obtenir PILE", de probabilité p , répétitions identiques et indépendantes. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et p .
- b) Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2 et pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$,

$$P(X = k) = \binom{2}{k} \times p^k \times (1 - p)^{2-k}.$$

En particulier, pour $k = 1$, $P(X = 1) = \binom{2}{1} \times p^1 \times (1 - p)^1 = 2p(1 - p)$.

2. Le succès est obtenu lorsque les deux lancers aboutissent à deux résultats différents. Autrement dit, il y a un PILE et un FACE. Ainsi la probabilité du succès est égale à la probabilité de n'obtenir qu'un seul PILE, à savoir $P(X = 1) = 2p(1 - p)$.
3. a) Dans cette expérience, les cinq premiers lancers aboutissent à deux résultats similaires et il faut attendre le sixième lancer pour obtenir un PILE et un FACE. Ainsi le rang du premier succès est $N = 6$.
- b) La variable aléatoire N est égale au rang du premier succès lors de la répétition de l'épreuve de Bernoulli de succès "obtenir deux résultats différents", de probabilité $2p(1 - p)$, répétitions identiques et indépendantes. N suit donc une loi géométrique de paramètre $q = 2p(1 - p)$. Le support de N est donné par $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = k) = q \times (1 - q)^{k-1} = 2p(1 - p)(p^2 + (1 - p)^2)^{k-1}.$$

En effet si $q = P(X = 1) = 2p(1 - p)$, alors $1 - q = P(X = 2) + P(X = 0) = p^2 + (1 - p)^2$.

- c) Comme N suit une loi géométrique, alors N admet une espérance et une variance et

$$E(N) = \frac{1}{q} = \frac{1}{2p(1 - p)} \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{1 - q}{q^2} = \frac{p^2 + (1 - p)^2}{4p^2(1 - p)^2}.$$

4. a) Alice gagne lors de la première manche si la séquence obtenue est PF . Comme les deux lancers sont indépendants, la probabilité est donnée par

$$P(PF) = P(P) \times P(F) = p(1 - p).$$

- b) Pour qu'Alice gagne à la seconde manche, dès lors que la seconde manche a lieu, la probabilité est la même. Et la probabilité que la seconde manche ait lieu est donnée par $1 - P(X = 1) = 1 - q = p^2 + (1 - p)^2$. Ainsi la probabilité qu'Alice gagne à la seconde manche est donnée par

$$p(1 - p) \times (p^2 + (1 - p)^2).$$

- c) La probabilité de victoire de Bob est égale à celle de Alice, puisque seul l'ordre d'apparition des résultats change : Bob gagne lors de la première manche si la séquence obtenue est FP . Comme les deux lancers sont indépendants, la probabilité est donnée par

$$P(FP) = P(F) \times P(P) = (1 - p) \times p = p(1 - p).$$

Comme il y a un PILE et un FACE des deux côtés, les probabilités sont égales, à la première comme à la seconde manche. Donc le jeu est équitable.

Partie 2

5. Voici la fonction Python complétée :

```

1. import numpy.random as rd
2. S=0
3. T=0
4. for k in range(1,4):
5.     r=rd.random()
6.     if r<1/2:
7.         S=S+1
8.     if r<1/2 and T==0:
9.         T=k
10. print("S=",S,"et T=",T)

```

6. La variable aléatoire S compte le nombre de succès lors de $n = 3$ répétitions de l  preuve de Bernoulli de succès "obtenir PILE", de probabilité $p = \frac{1}{2}$, répétitions identiques et indépendantes. Donc S suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$.

Son espérance est donnée par $E(S) = n \times p = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

7. Le support de T est donné par $T(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$, selon qu'aucun PILE soit obtenu ou que le premier PILE arrive au lancer 1, 2 ou 3.

8. L  v  nement $[S = 2] \cap [T = 1]$ correspond à ce que les trois lancers apportent deux PILE et que le premier soit obtenu au premier tirage. Il y a donc deux issues possibles :

$$[S = 2] \cap [T = 1] = \{(PPF), (PFP)\}.$$

Comme la pièce est équilibrée et que les tirages sont indépendants, les $2^3 = 8$ issues possibles ont la même probabilité d'arriver. Ainsi, comme deux issues sont favorables à cet   v  nement, sa probabilité est donnée par $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

9. Voici les probabilités manquantes dans le tableau de la loi conjointe :

$$A = P([S = 0] \cap [T = 1]) = 0, \quad B = P([S = 1] \cap [T = 0]) = 0, \quad C = P([S = A] \cap [T = 3]) = \frac{1}{8}$$

$$D = P([S = 2] \cap [T = 1]) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad E = P([S = 3] \cap [T = 3]) = 0.$$

10. En décomposant selon les valeurs possibles et grâce à la loi conjointe,

$$P(S = T) = \sum_{k=0}^3 P([S = k] \cap [T = k]) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}.$$

11. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[S=2]}(T = 1) = \frac{P([S = 2] \cap [T = 1])}{P(S = 2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{2}{3}.$$

Partie 3

12. Je montre que la fonction g vérifie les trois conditions de la définition d'une densité :

- Pour $t \notin [0, 1[$, $g(t) = 0 \geq 0$ et pour $t \in [0, 1[$, $g(t) = 6t(1-t) \geq 0$ car $t \geq 0$ et $t \leq 1$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) \geq 0$.
- La fonction g est continue sur $] -\infty, 0[$ car constante, elle est continue sur $[0, 1[$ car polynomiale et elle est continue sur $[1, +\infty[$ car constante.
Donc g admet au plus deux points de discontinuité en 0 et 1.
- Il reste à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ converge et vaut 1.

  tant donnée l'expression de g , j'étudie séparément les intégrales suivantes :

▷ Déjà, $\int_{-\infty}^0 g(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt$ et $\int_1^{+\infty} g(t) dt = \int_1^{+\infty} 0 dt$ convergent et valent 0.

▷ Puis

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) dt &= \int_0^1 6t(1-t) dt = 6 \times \int_0^1 (t - t^2) dt = 6 \times \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 6 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{0}{2} + \frac{0}{3} \right) = 6 \times \frac{3-2}{6} = 6 \times \frac{1}{6} = 1. \end{aligned}$$

Gr  ce à la relation de Chasles, j'en déduis que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_{-\infty}^0 g(t) dt + \int_0^1 g(t) dt + \int_1^{+\infty} g(t) dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

La fonction g vérifie les trois conditions donc g est bien une densité de probabilité.

13. a) Je cherche $P\left(Z = \frac{1}{2}\right)$. Or Z est une variable aléatoire à densité, donc $P\left(Z = \frac{1}{2}\right) = 0$.

b) Si $x \in [0, 1]$, alors g est nulle sur $] -\infty, 0[$ et $g(t) = 6t(1-t)$ pour $t \in [0, x]$. Alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x g(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 6t(1-t) dt = 0 + 6 \times \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^x \\ &= 6 \times \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{0}{2} + \frac{0}{3} \right) = 3x^2 - 2x^3. \end{aligned}$$

c) Je cherche $P\left(Z \leq \frac{1}{4}\right)$. Gr  ce à la fonction de répartition, comme $\frac{1}{4} \in [0, 1]$, alors

$$P\left(Z \leq \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{16} - \frac{1}{32} = \frac{6-1}{32} = \frac{5}{32}.$$

d) Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt$ converge.

• Déjà, $\int_{-\infty}^0 t g(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt$ et $\int_1^{+\infty} t g(t) dt = \int_1^{+\infty} 0 dt$ convergent et valent 0.

• Puis

$$\begin{aligned} \int_0^1 t g(t) dt &= \int_0^1 t \times 6t(1-t) dt = 6 \times \int_0^1 (t^2 - t^3) dt = 6 \times \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 \\ &= 6 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{0}{3} + \frac{0}{4} \right) = 6 \times \frac{4-3}{12} = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors la variable aléatoire Z admet une espérance et

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = \int_{-\infty}^0 t g(t) dt + \int_0^1 t g(t) dt + \int_1^{+\infty} t g(t) dt = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 –

1. Je calcule la différence coefficient par coefficient puis le produit matriciel :

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B \times (B - I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 2-2 \\ -2+1+1 & 0 & -2+1+1 \\ -2+2 & 0 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

2. Comme $B \times (B - I_3) = 0_3$, j'en déduis que le polynôme $x(x - 1)$ est un polynôme annulateur de la matrice B .
3. Comme $B \times (B - I_3) = 0_3$, en développant le produit j'obtiens que $B^2 - B = 0_3$, i.e. $B^2 = B$.
   partir de là, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$.
4. Les valeurs propres possibles pour une matrice sont parmi les racines d'un polynôme annulateur. Or

$$x(x - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Ainsi les valeurs propres possibles pour B sont 0 et 1.

5. 0 est une valeur propre de B s'il existe une solution non nulle $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'équation $BX = 0X$. Je résous alors cette équation :

$$BX = 0X \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & & & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

Je remarque que la troisième ligne est l'opposée de la première : elles sont donc équivalentes. Puis en additionnant la première à la deuxième, j'obtiens le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x & + & 2z & = & 0 \\ & y & - & z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & -2z \\ & y & = & z \end{cases}$$

Alors en fixant $z = 1$, j'obtiens une solution non nulle de l'équation matricielle $BX = 0X$:

$$X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Donc 0 est bien une valeur propre de la matrice } B.$$

6. Si la matrice B était inversible, alors en notant B^{-1} son inverse et en multipliant l'équation précédemment obtenue par B^{-1} à gauche, j'obtiendrais

$$B \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff B^{-1} \times B \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est évidemment une contradiction. Donc la matrice B n'est pas inversible.

7. a) Je calcule le produit matriciel :

$$BU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U.$$

- b) La matrice colonne U est non nulle et satisfait l'équation matricielle $BU = 1U$.
Alors 1 est une valeur propre de la matrice B et U en est un vecteur propre associé.
- c) Je calcule encore le produit matriciel :

$$BV = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -1+1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$$

La matrice colonne V est non nulle et satisfait l'équation matricielle $BV = 1V$.
Alors V est un vecteur propre de la matrice B associé à la valeur propre 1.

8. Je commence par calculer la matrice A :

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{donc } A = \frac{1}{4}(M - I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B - I_3.$$

Puis je calcule le produit matriciel $A^2 = A \times A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0 & 4-2 \\ -2+1 & 0 & -2+1 \\ -2+1 & 0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A.$$

9. Par définition de M :

$$A = \frac{1}{4}(M - I_3) \iff 4A = M - I_3 \iff 4A + I_3 = M.$$

10. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

  nonc   : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $M^n = I_3 + u_n A$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad I_3 + u_0 A = I_3 + 0 \times A = I_3.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $M^n = I_3 + u_n A$. Alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (I_3 + u_n A) \times (I_3 + 4A) = I_3 + 4A + u_n A + 4u_n A^2 = I_3 + 4A + u_n A - 4u_n A \\ &= I_3 + (4 + u_n - 4u_n) \times A = I_3 + (4 - 3u_n) \times A = I_3 + u_{n+1} A. \end{aligned}$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I_3 + u_n A.$$

11. a) Pour montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, j'exprime w_{n+1} en fonction de w_n pour un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 4 - 3u_n - 1 = 4 - 3(w_n + 1) - 1 = 4 - 3w_n - 3 - 1 = -3w_n.$$

Ainsi la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien géométrique, de raison $q = -3$.

- b) Comme la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, de raison $q = -3$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 1 = 0 - 1 = -1$, alors son expression explicite est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = -1 \times (-3)^n = -(-3)^n.$$

Puis comme pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n + 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = w_n + 1 = 1 - (-3)^n.$$

12. En combinant que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I_3 + u_n A$ et $u_n = 1 - (-3)^n$, alors j'obtiens que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I_3 + (1 - (-3)^n)A.$$

13. a)    chaque itération de la boucle `while`, la variable `u` est actualisée de u_k à u_{k+1} puis `k` inc  mente de 1. Alors lorsque $k = n$, la variable `u` contient déjà la valeur de u_n . Il est donc temps de sortir de la boucle.
- b) Pour afficher u_{2023} , il suffira de faire appel à cette fonction et d'afficher le résultat à l'aide de l'instruction :

`print(term(2023))`

14. J'ai déjà remarqué à la question 8. que $A = B - I_3$. Alors en combinant cela avec $M = 4A + I_3$, j'obtiens que

$$M = 4A + I_3 = 4(B - I_3) + I_3 = 4B - 4I_3 + I_3 = 4B - 3I_3.$$

Ainsi choisir $\alpha = -3$ et $\beta = 4$ convient.

15. D'après la formule du binôme de Newton, comme les matrices I_3 et B commutent, et comme pour tout $k \geq 1$, $B^k = B$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$M^n = (4B - 3I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (4B)^k \times (-3I_3)^{n-k} = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times 4^k \times (-3)^{n-k} \right) \times B.$$

Puis je cherche à simplifier le coefficient devant la matrice B :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times 4^k \times (-3)^{n-k} &= (-3)^n \times \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times \left(\frac{4}{-3}\right)^k = (-3)^n \times \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^k \times 1^{n-k} \right) \\ &= (-3)^n \times \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^k \times 1^{n-k} - 1 \right) = (-3)^n \times \left(\left(1 - \frac{4}{3}\right)^n - 1 \right) \\ &= (-3)^n \times \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1 \right) = 1 - (-3)^n \end{aligned}$$

Finalement j'obtiens que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) B.$$

Et en injectant que $A = B - I_3$ dans l'expression obtenue à la question 12., je retrouve bien cette expression : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = I_3 + (1 - (-3)^n) \times (B - I_3) = I_3 + (1 - (-3)^n)B - I_3 + (-3)^n I_3 = (1 - (-3)^n)B + (-3)^n I_3.$$