NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 4

Exercice 1 – Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs d'une boule, **sans** remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus petit des deux numéros.

1. (a) Déterminer la loi du couple $\left(X_1, X_2\right)$ *(Le résultat peut être donné sous forme de tableau.)*

Solution : Tout d'abord, $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [\![1,4]\!]$.
Par ailleurs, le tirage s'effectuant sans remise, $\quad \forall i \in [\![1,4]\!], \quad P(X_1 = i, X_2 = i) = 0$.
De plus, par la formule des probabilités composées,

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2 \text{ avec } i \neq j, \quad P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i) P_{[X_1=i]}(X_2 = j) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Je résume tout cela dans le tableau suivant :

	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$	$X_2 = 4$
$X_1 = 1$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$X_1 = 2$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$X_1 = 3$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
$X_1 = 4$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

(b) En déduire la loi de X_1.

Solution : Pour obtenir la loi de X_1, il me suffit de faire la somme des probabilités de chaque ligne. J'obtiens

$$\forall i \in [\![1,4]\!], \quad P(X_1 = i) = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Je résume tout cela dans le tableau suivant :

x	1	2	3	4
$P(X_1 = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, Y).

Solution : Comme Y désigne le plus petit des deux numéros obtenus,

$$\forall 1 \leqslant i < j \leqslant 4, \quad P(X_1 = i, Y = j) = 0.$$

De même,

$$\forall 1 \leqslant j < i \leqslant 4, \quad P(X_1 = i, Y = j) = P(X_1 = i, X_2 = j) = \frac{1}{12}.$$

Enfin, comme le tirage s'effectue sans remise,

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 1, Y = 1) &= P(X_1 = 1, X_2 = 2) + P(X_1 = 1, X_2 = 3) + P(X_1 = 1, X_2 = 4) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \\
P(X_1 = 2, Y = 2) &= P(X_1 = 2, X_2 = 3) + P(X_1 = 2, X_2 = 4) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \\
P(X_1 = 3, Y = 3) &= P(X_1 = 3, X_2 = 4) = \frac{1}{12}, \\
P(X_1 = 4, Y = 4) &= 0.
\end{aligned}$$

Je résume tout cela dans le tableau suivant :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$
$X_1 = 1$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
$X_1 = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	0
$X_1 = 3$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
$X_1 = 4$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

(b) En déduire la loi de Y.

Solution : Pour obtenir la loi de Y, il me suffit de faire la somme des probabilités de chaque colonne. J'obtiens :

y	1	2	3	4
$P(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0

3. Donner la loi de X_1 sachant $[Y = 1]$.

Solution :

$$P_{[Y=1]}(X_1 = 1) = \frac{P(X_1 = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$P_{[Y=1]}(X_1 = 2) = \frac{P(X_1 = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6},$$

$$P_{[Y=1]}(X_1 = 3) = \frac{P(X_1 = 3, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6},$$

$$P_{[Y=1]}(X_1 = 4) = \frac{P(X_1 = 4, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6},$$

ce que je peux résumer dans le tableau suivant :

x	1	2	3	4
$P_{[Y=1]}(X_1 = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$