4 | Variables aléatoires discrètes

I – Généralités sur les variables aléatoires

1 – Espace probabilisé

Étant donné une expérience aléatoire, pour calculer des probabilités,

1. On commence par déterminer l'univers Ω de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire. Cet ensemble peut être **fini** ou **infini**.
   - Si l'expérience consiste à lancer un dé à 6 faces et à observer le numéro obtenu, alors $\Omega = [\![1;6]\!]$.
   - Si l'expérience consiste à lancer une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, alors $\Omega = \mathbf{N}^*$.
   - Si l'expérience consiste à observer la durée de vie d'une ampoule (en minutes), alors $\Omega = \mathbf{R}_+$.
   - etc.
2. On détermine ensuite une probabilité sur Ω, c'est-à-dire une application P qui à un évènement de Ω (*i.e.*, un sous-ensemble) associe un réel, compris entre 0 et 1, qui mesure le "degré de vraisemblance" de cet évènement.

Commençons par rappeler quelques propriétés, vues en première année dans le cas d'un univers fini, et qui restent vraies dans le cas d'un univers infini.

Proposition 4.1

Soient Ω un espace probabilisé et A, B deux évènements. On a les résultats suivants.

- $P(\Omega) = 1$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
- Si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- Si A et B sont incompatibles (*i.e.*, $A \cap B = \emptyset$), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple 4.2 – Tout au long de ce chapitre, on s'appuiera sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1, on gagne 4 €, si on a un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}$.
2. On lance un dé équilibré et on note X le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir 6. X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ (il faut au moins un lancer pour obtenir 6).

2 – Évènements associés à une variable aléatoire

Définition 4.3 – Soit X une variable aléatoire sur Ω et $x \in \mathbf{R}$. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\},$$
$$[X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}, \qquad [X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\},$$
$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}, \qquad [X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}.$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors on note

$$\left[x \leqslant X \leqslant y\right] = \{\omega \in \Omega \mid x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}.$$

Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbf{R}$, on note

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}.$$

Exemple 4.4 – Calculer $P([X = 1])$ et $P([X \leqslant 2])$ dans les deux exemples de l'exemple 4.2.

1. On a $X = 1$ si et seulement si on a obtenu un numéro pair, *i.e.*, un 2 ou un 4. Ainsi
$$P(X = 1) = \frac{2}{5}.$$
On a $X \leqslant 2$ si et seulement si $X = -1$ ou $X = 1$ si et seulement si on obtient 2, 3, 4 ou 5. Ainsi
$$P(X \leqslant 2) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}.$$
2. On a une chance sur 6 d'obtenir un 6 au premier lancer donc
$$P(X = 1) = \frac{1}{6}.$$
On a $X \leqslant 2$ si et seulement si $X = 1$ ou $X = 2$. On a déjà calculé la probabilité $P(X = 1)$. L'évènement $X = 2$ correspond au cas où l'on obtient un nombre différent de 6 au premier lancer et un 6 au deuxième lancer. Ainsi
$$P(X = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$
et donc
$$P(X \leqslant 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}.$$

Proposition 4.5

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Alors l'ensemble

$$\left\{[X = x] \mid x \in X(\Omega)\right\}$$

forme un système complet d'évènements. En particulier, on a

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P\left([X = x]\right) = 1.$$

Remarque 4.6 –

- Lorsque $X(\Omega)$ est fini, la somme précédente est une somme finie. En effet, dans ce cas,

$$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\},$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} P([X = x_k]) = 1.$$

- Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable, la somme précédente est la somme d'une série convergente. En effet,

$$X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbf{N}\},$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P([X = x_k]) = 1.$$

- Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P([X = x])$ en $P(X = x)$, et de même pour tous les autres ensembles.

Exemple 4.7 – On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1. Un système complet d'évènements est donné par $\{[X = -1]; [X = 1]; [X = 3]\}$.
2. Un système complet d'évènements est donné par $\left\{[X = k]; k \in \mathbf{N}^*\right\}$.

II – Variables aléatoires discrètes

1 – Définition

Définition 4.8 – Soit X une variable aléatoire sur Ω. On dit que

- X est une **variable aléatoire discrète** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble discret, *i.e.*, fini ou dénombrable.
- X est une **variable aléatoire discrète finie** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble fini.
- X est une **variable aléatoire discrète infinie** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

Exemple 4.9 – On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1. On a vu que $X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}$. Ainsi X est une variable aléatoire discrète finie.
2. On a vu que $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$. Ainsi X est une variable aléatoire discrète infinie.

2 – Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.10 – Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi** de la variable aléatoire X la donnée des $P(X = x)$ pour tout réel x du support $X(\Omega)$.

Méthode 4.11 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

1. On donne l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.
2. On calcule $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec, sur la 1ère ligne les valeurs prises par X, et sur la 2ème ligne les probabilités correspondantes.

Exemple 4.12 – On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1. La loi de la variable aléatoire X est donnée par

$$P(X=-1)=\frac{2}{5},\qquad P(X=1)=\frac{2}{5}\quad\text{et}\quad P(X=3)=\frac{1}{5}.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant.

x	-1	1	3
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. La loi de la variable aléatoire X est donnée par

$$\forall k\in\mathbf{N}^*,\quad P(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}.$$

On peut vérifier au passage que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=1.$$

3 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.13 – Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X, et on note F_X, la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$F_X:\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \to & [0;1]\\ x & \mapsto & P(X\leqslant x)\end{array}$$

Proposition 4.14

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω. On note $X(\Omega)=\{x_1;x_2;\dots\}$ avec $x_1<x_2<\cdots$. Alors

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<x_1,\\ P(X=x_1)+\cdots+P(X=x_k) & \text{si } x_k\leqslant x<x_{k+1},\\ 1 & \text{si } x\geqslant \max\limits_{i\in\mathbf{N}} x_i.\end{cases}$$

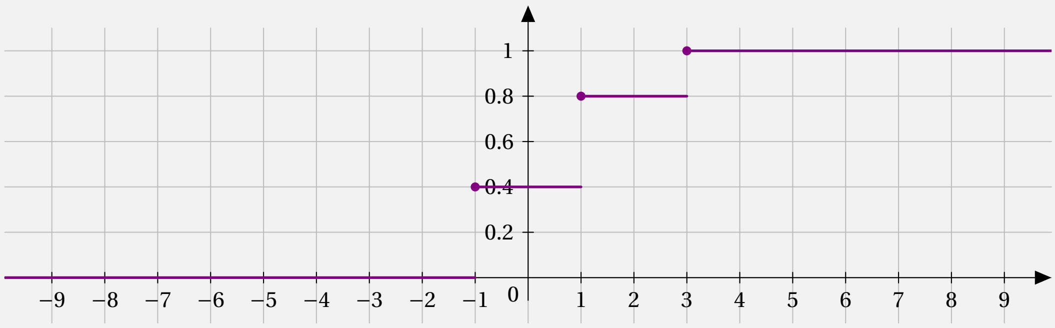
En particulier, F_X est constante sur $[x_k;x_{k+1}[$.

Exemple 4.15 – On reprend les deux exemples de l'exemple 4.2.

1. On a vu que $X(\Omega)=\{-1;1;3\}$. Ainsi
   - Si $x<-1$, alors $F_X(x)=0$.
   - Si $-1\leqslant x<1$, alors $F_X(x)=P(X=-1)=\frac{2}{5}$.
   - Si $1\leqslant x<3$, alors $F_X(x)=P(X=-1)+P(X=1)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$.
   - Si $x\geqslant 3$, alors $F_X(x)=1$.

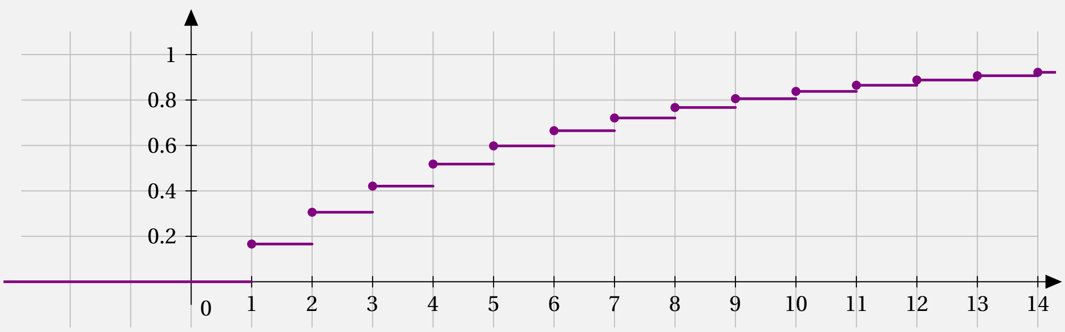
Ce que l'on peut résumer par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{2}{5} & \text{si } -1 \leqslant x < 1, \\ \frac{4}{5} & \text{si } 1 \leqslant x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3. \end{cases}$$



2. On a vu que $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$. Ainsi
   - Si $x < 1$, alors $F_X(x) = 0$.
   - Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, si $k \leqslant x < k+1$, alors

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^{k} P(X = j) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \times \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k}.$$



Proposition 4.16

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé Ω. On suppose que $X(\Omega) \subseteq \mathbf{Z}$. Alors

$$\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Remarque 4.17 – La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X. En effet, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

III – Moments d'une variable aléatoire discrète

1 – Espérance

Définition 4.18 – Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω.

- Si X est une variable aléatoire discrète finie, avec $X(\Omega) = \{x_1; \ldots; x_n\}$, alors X admet une **espérance**, notée $E(X)$, définie par
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$
- Si X est une variable aléatoire discrète infinie, avec $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbf{N}\}$, et que la série de terme général $x_n P(x_n)$ est **absolument** convergente, alors on dit que X admet une **espérance**, notée $E(X)$, et définie par
$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X = x_k).$$

Remarque 4.19 – L'espérance s'interprète comme une moyenne.

Exemple 4.20 – Montrer que la variable aléatoire X, du premier exemple de l'exemple 4.2, admet une espérance et la calculer.
La variable aléatoire du premier exemple est discrète finie. Donc elle admet une espérance.
En reprenant le tableau de la loi de X, on peut facilement calculer
$$E(X) = (-1) \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Remarque 4.21 – On peut montrer *(hors-programme)* que la série $\sum_{n \geqslant 1} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$ converge et que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = 6.$$
Autrement dit, la variable aléatoire X du second exemple de l'exemple 4.2 admet une espérance et $E(X) = 6$.

Proposition 4.22

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur Ω et admettant une espérance.
Soient a et b deux réels. Alors, $X + Y$ et $aX + b$ admettent une espérance et
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX+b) = aE(X) + b.$$

Exemple 4.23 – On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x + 3$ et $Y = g(X) = 2X + 3$. Calculer $E(Y)$.
Le dé est non-truqué donc $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et il y a équiprobabilité : $\forall k \in [\![1;6]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{6}$.
$X(\Omega)$ est fini donc X admet une espérance et
$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}.$$

$Y = 2X+3$ est aussi une variable aléatoire discrète finie, donc elle admet un espérance et

$$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X)+3 = 7+3 = 10.$$

Théorème 4.24 – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé Ω. On note $X(\Omega) = \{x_i; i \in I\}$ avec $I \subseteq \mathbf{N}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$. Alors, la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $g(x_n)P(X = x_n)$ est **absolument** convergente. Dans ce cas, on a alors

$$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i).$$

Remarque 4.25 –

- Si X est une variable aléatoire discrète finie, alors I est fini, donc l'espérance de $g(X)$ existe et la somme intervenant dans sa définition est une somme finie.
- Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.

Exemple 4.26 – On considère la variable X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

k	-3	-1	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

Calculer $E\left(X^2\right)$ et $E\left(X^3\right)$.

On a

$$E\left(X^2\right) = (-3)^2 \times \frac{2}{10} + (-1)^2 \times \frac{1}{10} + 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{2}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{1}{10} = \frac{42}{10} = \frac{21}{5},$$

et

$$E\left(X^3\right) = (-3)^3 \times \frac{2}{10} + (-1)^3 \times \frac{1}{10} + 0^3 \times \frac{1}{10} + 1^3 \times \frac{2}{10} + 2^3 \times \frac{3}{10} + 3^3 \times \frac{1}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}.$$

2 – Variance

Définition 4.27 – Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω.

- Si X est une variable aléatoire discrète finie avec $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$, alors X admet une **variance**, notée $V(X)$, et définie par

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 P(X = x_i).$$

- Si X est une variable aléatoire discrète infinie, avec $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbf{N}\}$ et que la série de terme général $\left(x_n - E(X)\right)^2 P(X = x_n)$ est **absolument** convergente, alors on dit que X admet une **variance**, notée $V(X)$ et définie par

$$V(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x_k - E(X)\right)^2 P(X = x_k).$$

Remarque 4.28 –

- La série $\sum_{n\geqslant 0}\left(x_n-E(X)\right)^2 P(X=x_n)$ étant à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.
- Sous réserve d'existence, on a $V(X)=E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$.
- La variance, si elle existe, est un réel **positif ou nul**.
- La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Théorème 4.29 – Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω. X admet une variance si et seulement si la variable aléatoire X^2 admet une espérance. Dans ce cas,

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2.$$

Méthode 4.30 – Répondre à la question "X admet-elle une variance? Si oui, la calculer."

1. Si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.
2. Si X admet une espérance, il faut regarder si $E\left(X^2\right)$ existe (grâce au théorème de transfert).
   - Si non, alors X n'admet pas de variance.
   - Si oui, alors on peut la calculer en utilisant la formule de König-Huygens

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2.$$

Exemple 4.31 – Montrer que la variable aléatoire X, du premier exemple de l'exemple 4.2, admet une variance et la calculer.

On a déjà vu que $E(X)=\frac{3}{5}$. Par ailleurs,

$$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{2}{5}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{13}{5}.$$

Alors, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{13}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{65}{25}-\frac{9}{25}=\frac{56}{25}.$$

Ici, la question de l'existence ne se pose pas vraiment puisque la variable aléatoire est finie.

Remarque 4.32 – On peut montrer *(hors-programme)* que la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6}$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}=66.$$

Autrement dit, le carré de la variable aléatoire X du second exemple de l'exemple 4.2 admet une espérance et $E\left(X^2\right)=66$. Alors, X admet une variance et

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=66-36=30.$$

Proposition 4.33

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance et soient a et b dans $\mathbf{R}$. Alors

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

En particulier,

$$V(X+b) = V(X).$$

Remarque 4.34 – Contrairement à l'espérance, la variance n'est pas linéaire.

Exemple 4.35 – On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$. Calculer la variance de X puis celle de Y.

X suit une loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$ donc on sait que

$$V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}.$$

Ainsi

$$V(Y) = V(2X+3) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}.$$

Définition 4.36 – Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

IV – Lois discrètes finies usuelles

1 – Loi uniforme

Définition 4.37 – Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a < b$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![a;b]\!]$ lorsque $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et que

$$\forall k \in [\![a;b]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![a;b]\!]\right)$.

Exemple 4.38 – Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non-truqué et on note X le numéro obtenu. On a $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;6]\!]\right)$ car $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;6]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{6}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu. On a $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$ car $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{n}$.

Proposition 4.39

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$ alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Proposition 4.40

Soit $(a,b)\in\mathbf{Z}^2$ avec $a<b$. Si $X\hookrightarrow\mathscr{U}(\llbracket a;b\rrbracket)$ alors $X-a+1\hookrightarrow\mathscr{U}(\llbracket 1;b-a+1\rrbracket)$ et donc

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\quad\text{et}\quad V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

2 – Loi de Bernoulli

Définition 4.41 – Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p\in]0;1[$ lorsque $X(\Omega)=\{0;1\}$ et

$$P(X=1)=p\quad\text{et}\quad P(X=0)=1-p.$$

On note $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$.

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : une que l'on qualifie de "succès", de probabilité p, et l'autre que l'on qualifie "d'échec", de probabilité $1-p$. On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un "succès", la variable aléatoire prend la valeur $X=1$, et sinon $X=0$.

Exemple 4.42 – On lance une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est "Pile" et 0 sinon. Alors, $X\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Proposition 4.43

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0;1[$. Alors X admet une espérance et une variance et on a

$$E(X)=p\quad\text{et}\quad V(X)=p(1-p).$$

3 – Loi binomiale

Définition 4.44 – Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètres** $n\in\mathbf{N}^*$ et $p\in]0;1[$ lorsque $X(\Omega)=\llbracket 0;n\rrbracket$ et que

$$\forall k\in\llbracket 0;n\rrbracket,\quad P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

On note $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$.

On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La probabilité d'obtenir un "succès" lors de la réalisation d'une épreuve est p. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus une fois que les n épreuves ont été réalisées suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple 4.45 – On lance 10 fois de suite un dé non-truqué, et on note X le nombre de numéros obtenus inférieurs ou égaux à 2. Alors, $X\hookrightarrow\mathscr{B}\left(10,\frac{1}{3}\right)$.

Remarque 4.46 – La loi de Bernoulli est le cas particulier de la loi binomiale avec $n=1$.

Proposition 4.47

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0;1[$. Alors X admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

V – Lois discrètes infinies usuelles

1 – Loi géométrique

Définition 4.48 – Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre** $p \in]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Exemple 4.49 – On lance indéfiniment un dé non-truqué. On note X le rang du lancer qui donne le nombre 1 pour la première fois. Alors, X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

Remarque 4.50 –

- Cet exemple est typique de la loi géométrique dont le modèle est le suivant :
  1. On réalise une succession d'épreuves indépendantes de Bernoulli de même paramètre p.
  2. On note X le rang de l'épreuve qui a amené le premier succès. X est considéré comme "le temps d'attente du premier succès".
- On a bien $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

Proposition 4.51

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Alors X admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple 4.52 – On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant 7 boules noires et 3 boules rouges et on note Y le rang de la première boule rouge. Reconnaître la loi de Y puis déterminer l'espérance et la variance de Y.

Y correspond au temps d'attente du premier succès lors de la répétition successive d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc Y suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{3}{10}$.

Ainsi

$$E(Y) = \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{3} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1-\frac{3}{10}}{\left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{70}{9}.$$

2 – Loi de Poisson

Définition 4.53 – Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ lorsque $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Remarque 4.54 –

- La loi de Poisson est parfois appelée **loi des évènements rares**. Elle sert par exemple à modéliser :
  - — le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps donné,
  - — le nombre de véhicules franchissant un poste de péage dans un intervalle de temps donné,
  - — le nombre de clients se présentant dans un magasin dans un intervalle de temps donné,
  - — le nombre de fautes de frappe dans les pages d'un cours de maths, etc.
- On a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

Proposition 4.55

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors X admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$