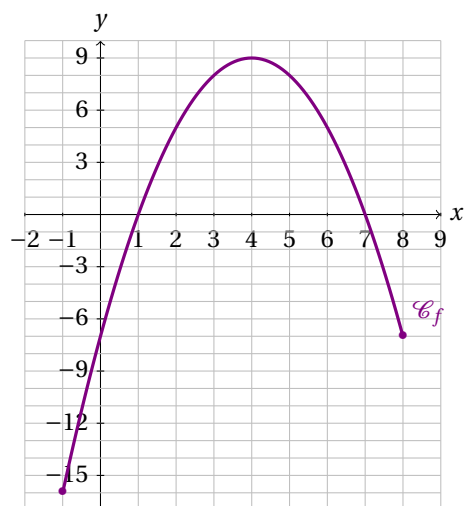


EXERCICES — CHAPITRE 3

Images et antécédents

Exercice 1 –

1. Sur la figure ci-dessous, on donne la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f . Déterminer graphiquement (aucune justification n'est demandée) :



- (a) l'image de 3 par f ,
- (b) $f(9)$ et $f(0)$,
- (c) l'ordonnée du point de \mathcal{C}_f d'abscisse 5,
- (d) les éventuels antécédents de -7 par f ,
- (e) les solutions de l'équation $f(x) = 0$,
- (f) le tableau de signes de f ,
- (g) le tableau de variation de f ,
- (h) le maximum de f et pour quelle valeur il est atteint,
- (i) la solution de l'inéquation $f(x) > 5$.

2. Soit g la fonction définie sur $[-1; 8]$ par $g(x) = (x-3)^2 - 16$.

- (a) Développer, réduire et ordonner $g(x)$.
- (b) Factoriser $g(x)$.
- (c) Déterminer algébriquement en utilisant la forme de $g(x)$ qui convient le mieux :
 - i. l'image de 3 par g ,
 - ii. x tel que $g(x) = 0$,
 - iii. les antécédents de -7 par g .
- (d) Donner un tableau de valeurs de la fonction g pour des valeurs allant de -1 à 8 .
- (e) Tracer \mathcal{C}_g sur le graphique ci-dessus.
- (f) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.

Exercice 2 – Déterminer, dans chacun des cas,

- l'image de -2 ; 0 et 3 par la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$,
- l'image de -3 ; 0 et 1 par la fonction g définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x) = \frac{4x+1}{2x-3}$,
- l'image de -1 ; 0 et 3 par la fonction h définie sur \mathbf{R} par $h(x) = (2x-5)(3x+1)$.

Exercice 3 – Déterminer, dans chacun des cas, si c'est possible,

- les antécédents de 2 ; -1 et 0 par la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = -2x$,
- les antécédents de 2 ; -1 et 0 par la fonction g définie sur \mathbf{R} par $g(x) = 5x + 1$,
- les antécédents de 2 et 0 par la fonction h définie sur \mathbf{R} par $h(x) = 2x^2 + 1$,
- les antécédents de 2 ; -1 et 0 par la fonction i définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ par $i(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$,
- les antécédents de 5 et 1 par la fonction j définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 + 5x + 5$.

Parité, monotonie et bornes

Exercice 4 – Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrer que f est paire. Que peut-on en déduire sur sa représentation graphique?

Exercice 5 – Étudier la parité de la fonction f dans les cas suivants.

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 3x$. f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 + x$. f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^3 - 2x$. f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$. | <ol style="list-style-type: none"> f définie sur $\mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$ par $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$. f définie sur $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{2-x}$. f définie sur \mathbf{R}^* par $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. |
|--|---|

Exercice 6 – Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- Étudier la parité de f .
- On admet que f est décroissante sur $[0; +\infty[$. En déduire, d'après la question précédente, le sens de variation de f sur $] -\infty; 0]$. Dresser alors le tableau de variation de f sur \mathbf{R} .
- Montrer que pour tout réel x , $0 \leq f(x) \leq 1$.

Exercice 7 – Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction f , dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-1	0	2	4
f	3	0	1	-1

Exercice 8 – Soit f une fonction définie sur \mathbf{R}_+ dont voici le tableau de variation. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

x	0	2	$+\infty$
f	-1	3	

- | | |
|--|---|
| 1. f est croissante sur $[-1; 3]$. | 5. $\exists x \in \mathbf{R}_+, f(x) < 0$. |
| 2. f est décroissante sur $[2; +\infty[$. | 6. $\exists x \in \mathbf{R}_+, f(x) = 4$. |
| 3. $\forall x \in [0; 2], f(x) \leq 1$. | 7. $f(2) \leq f(3)$. |
| 4. $\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) \leq 3$. | 8. $f(1) \geq f(2)$. |

Exercice 9 – f est une fonction définie sur \mathbf{R} . Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

- Si f est croissante sur $[0; 2]$, alors f est croissante sur $[0; 1]$.
- Si $f(0) < f(1)$, alors f est croissante sur $[0; 1]$.
- Si f a un maximum en 1 sur $[0; 1]$, alors f est croissante sur $[0; 1]$.
- Si f n'est pas croissante sur $[0; 1]$, alors f est décroissante sur $[0; 1]$.

Composition de fonctions

Exercice 10 – 1. Donner le domaine de définition ainsi que la forme des fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$ pour les fonctions f et g définies de la façon suivante.

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x) = 2x^2 - x$ et $g(x) = 3x + 2$, | (c) $f(x) = 1 - x^3$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, |
| (b) $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ et $g(x) = x^2 + 2$. | |

2. Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction $f \circ g \circ h$ pour les fonctions f , g et h définies de la façon suivante.

- (a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$ et $h(x) = x - 1$,
 (b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = x^2 + 2$ et $h(x) = x + 3$.

3. Donner le domaine de définition des fonctions h suivantes et les mettre sous la forme $f \circ g$ où f et g sont à définir.

- (a) $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$, (b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Exercice 11 – Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

- | | | |
|--|---|--------------------------------------|
| 1. $x^4 - 5x^2 + 2x + 1$ | 7. $\frac{8x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 6}$ | 12. $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4x-1}}$ |
| 2. $x + \sqrt{x}$ | 8. $\sqrt{x^2 - 3x - 18}$ | 13. $\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ |
| 3. $\frac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$ | 9. $\frac{1}{x} + \sqrt{x}$ | 14. $\sqrt{x+1} + \frac{1}{8-x^3}$ |
| 4. $\sqrt{x^2 + 3x - 10}$ | 10. $\sqrt{x+7} + \sqrt{2x^2 - 3x - 9}$ | |
| 5. $\frac{x+6}{x^2 + 5x + 1}$ | 11. $\frac{x^2 + 5x - 7}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$ | |
| 6. $\sqrt{3x - 2}$ | | |

Bijection

Exercice 12 – Montrer que la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = -3x + 4$ est une bijection de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

Exercice 13 – Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective?

Exercice 14 – Conjecturer, d'après les graphes, si les fonctions suivantes sont bijectives. On précisera bien les ensembles de départ et d'arrivée.

