

CONCOURS BLANC 2

Exercice 1 – [extrait de BSB 2021 / Ex2]

1. J'étudie le signe de $x^2 + x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Comme le discriminant est strictement négatif, le polynôme n'admet pas de racine et son signe est constant. Comme $a = 1 > 0$, j'en déduis que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x + 1 > 0.$$

2. Je sais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Alors comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, j'en déduis par composition que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Je calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, en remplaçant x par $-\frac{1}{2}$ dans l'expression de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \ln(3) - \ln(4) = \ln(3) - \ln(2^2) = \ln(3) - 2\ln(2). \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2)$.

4. a) La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$.
Comme $u'(x) = 2x + 1$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

- b) J'obtiens les variations de f en étudiant le signe de $f'(x)$. Je sais que le dénominateur est strictement positif d'après la question 1.. Je cherche le signe du numérateur :

$$2x + 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \geq -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2}.$$

Je peux donc déduire le tableau de variation de f grâce au tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$	-	0	+
$x^2 + x + 1$	+		+
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$\ln(3) - 2\ln(2)$	$+\infty$

5. a) Je résous $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \ln(x^2 + x + 1) = 0 &\iff x^2 + x + 1 = e^0 = 1 &\iff x^2 + x = 0 \\ &\iff x(x+1) = 0 &\iff x = 0 \text{ ou } x+1 = 0 &\iff x = 0 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que les deux seules solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -1 et 0 .

b) L'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

Or $f(0) = 0$ puisque 0 est solution de $f(x) = 0$ et $f'(0) = \frac{2 \times 0 + 1}{0^2 + 0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$.

Donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = 1 \times (x - 0) + 0, \quad \text{i.e.} \quad y = x.$$

De la même manière, pour $a = -1$, l'équation de la tangente devient

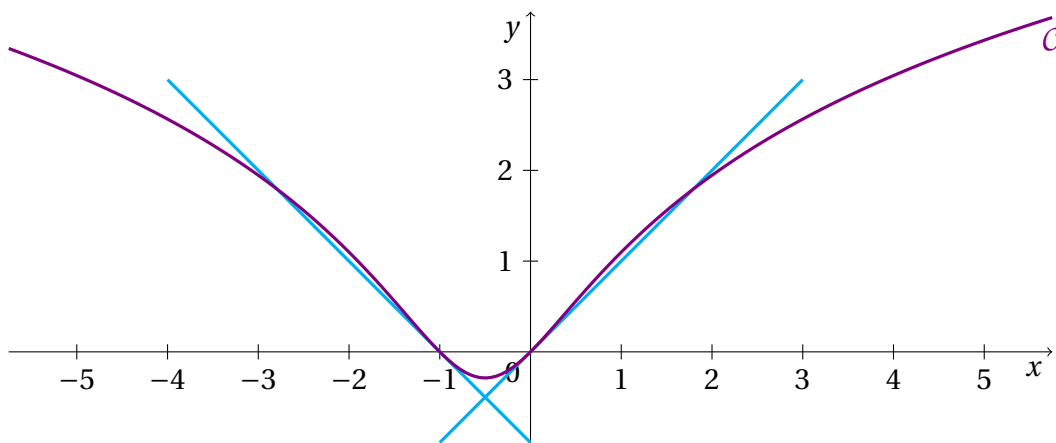
$$y = f'(-1) \times (x - (-1)) + f(-1).$$

Or $f(-1) = 0$ puisque -1 est solution de $f(x) = 0$ et $f'(-1) = \frac{-2 + 1}{1 - 1 + 1} = \frac{-1}{1} = -1$.

Donc la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation

$$y = -1 \times (x + 1) + 0, \quad \text{i.e.} \quad y = -x - 1.$$

6. Voici l'allure de la courbe \mathcal{C} et de ses tangentes :



Exercice 2 – [extrait d'ECRICOME 2017 / Ex2]**Partie I – Tirages dans une urne**

1. a) En considérant comme succès l'événement "piocher une boule noire", la variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition successive de 400 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \frac{1}{4}$, puisque une seule boule parmi les quatre boules de l'urne est noire. En particulier, le support est donné par $X(\Omega) = \llbracket 0, 400 \rrbracket$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \binom{400}{k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}.$$

- b) Comme X suit une loi binomiale, alors

$$E(X) = np = 400 \times \frac{1}{4} = 100 \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = 100 \times \frac{3}{4} = 25 \times 3 = 75.$$

2. a) La variable aléatoire Z ne semble pas suivre une loi usuelle. En revanche, il s'agit d'une variable aléatoire discrète finie puisque les valeurs possibles pour Z sont 1, 2, 3 et 4. Alors le support est donné par $Z(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et pour déterminer la loi de Z , il suffit de calculer $P(Z = 1)$, $P(Z = 2)$, $P(Z = 3)$ et $P(Z = 4)$, en utilisant la formule des probabilités composées. J'obtiens alors

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= \frac{1}{4}, & P(Z = 2) &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, \\ P(Z = 3) &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, & P(Z = 4) &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Alors après calculs, je remarque que Z suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.

- b) Comme Z suit une loi uniforme, alors

$$E(Z) = \frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{4^2-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

Partie II – Tirages dans une urne choisie au hasard

1. La variable aléatoire T compte le nombre de boules noires obtenues après deux tirages. Aucune, une ou deux boules noires peuvent avoir été piochées. Donc $T(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$.
2. Je note P l'événement "obtenir PILE", F l'événement "obtenir FACE" et pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, N_k l'événement "obtenir une boule noire au k -ième tirage" et B_k l'événement "obtenir une boule blanche au k -ième tirage". Alors d'après la formule des probabilités totales, comme les événements P et F forment un système complet d'événements,

$$P(T = 0) = P(F) \times P_F(B_1 \cap B_2) + P(P) \times P_P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{9}{32} = \frac{13}{32}.$$

De même,

$$P(T = 2) = P(F) \times P_F(N_1 \cap N_2) + P(P) \times P_P(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}.$$

Et finalement

$$P(T = 1) = 1 - P(T = 0) - P(T = 2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}.$$

3. Comme il s'agit d'une variable aléatoire discrète finie,

$$E(T) = 0 \times P(T=0) + 1 \times P(T=1) + 2 \times P(T=2) = 0 \times \frac{13}{32} + 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{32} = \frac{2 \times 7 + 10}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Si la variable aléatoire T suivait une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, comme $T(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$, alors nécessairement n serait égal à 2. Dans ce cas, l'espérance serait $E = np = 2p$, ce qui force $p = \frac{3}{8}$.

Ainsi la seule loi binomiale possible serait $\mathcal{B}\left(2, \frac{3}{8}\right)$. Mais alors la probabilité $P(T=2)$ serait égale à $p^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$, ce qui n'est pas le cas puisque $P(T=2) = \frac{5}{32}$.

J'en déduis donc que T ne suit pas une loi binomiale.

4. Je calcule puis compare les deux probabilités $P_{[T=1]}(P)$ et $P_{[T=1]}(F)$:

$$P_{[T=1]}(P) = \frac{P(P \cap [T=1])}{P(T=1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right)}{\frac{7}{16}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}.$$

Et donc

$$P_{[T=1]}(F) = 1 - P_{[T=1]}(P) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

Il est donc plus probable d'avoir obtenu FACE que PILE si une seule boule noire est piochée.

Exercice 3 – [extrait de BSB 2023 / Ex1]

1. Je remplace x par -1 dans l'expression de $P(x)$:

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0.$$

En effet, P s'annule bien en $x = -1$.

2. D'après la question précédente, -1 est une racine du polynôme P .

Ainsi $x - (-1) = x + 1$ est un diviseur de $P(x)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme de degré $3 - 1 = 2$ tel que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$. Je développe ce produit :

$$(x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c.$$

Par identification des coefficients, comme ce produit est égal au polynôme $P(x)$, alors

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = -1 \\ c + b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - 1 = -2 \\ c = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1 \end{cases}$$

Ainsi une factorisation de $P(x)$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 1).$$

3. D'après la question 1., -1 est une racine de $P(x)$. Grâce à la question précédente, je cherche les racines de $x^2 - 2x + 1$. Je reconnais une identité remarquable :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Finalement $P(x)$ admet bien deux racines : -1 et 1 .

4. Comme $P(x)$ est un polynôme, il me suffit d'étudier la limite du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

5. Pour étudier les variations de P , j'étudie le signe de sa dérivée. La fonction P est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Je calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.

Donc $P(x)$ a deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{2 + 4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 - 4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Comme $a = 3 > 0$, j'en déduis le tableau de signe de $P'(x)$ et le tableau de variation de P :

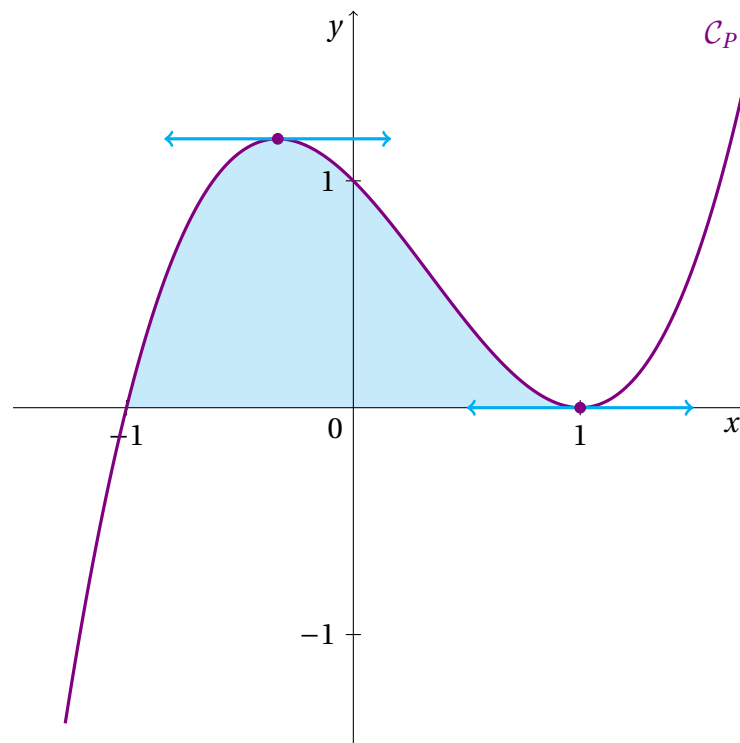
x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$P'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
P	$-\infty$	$\nearrow \frac{32}{27}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

$$\text{avec } P\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1 - 3 + 9 + 27}{27} = \frac{32}{27}.$$

6. Pour calculer l'intégrale I , il me faut cette fois une primitive de la fonction P .
Comme il s'agit d'une fonction polynomiale, j'opère directement terme à terme :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 P(x) dx = \int_{-1}^1 x^3 - x^2 - x + 1 dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

7. Les tangentes horizontales se situent aux points d'abscisses $-\frac{1}{3}$ et 1 .
Voici le tracé de la courbe de P , avec en bleu l'aire de l'intégrale I :



8. Je remplace x par 0 dans l'expression de $f(x)$:

$$f(0) = (0^2 - 2 \times 0 - 1)e^0 = -1 \times 1 = -1.$$

L'image de 0 par f est -1 .

9. Pour calculer les limites, je décompose le produit en deux facteurs :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x - 1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x - 1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

10. La fonction f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

f est de la forme $u \times v$, avec $u(x) = x^2 - 2x - 1$ et $v(x) = e^x$.

Comme $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x - 2) \times e^x + (x^2 - 2x - 1) \times e^x = (x^2 - 3)e^x.$$

Alors comme l'exponentielle est toujours strictement positive,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff (x^2 - 3)e^x = 0 \iff x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 3 \\ &\iff x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

11. Grâce aux informations précédentes, je peux dresser le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f	$0 \nearrow f(-\sqrt{3}) \xrightarrow{-1} f(\sqrt{3}) \nearrow +\infty$					

12. Grâce au tableau de variation, je sais que la fonction f est croissante sur $]-\infty, -\sqrt{3}]$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Alors j'en déduis que $f(-\sqrt{3})$ est positif.
De même, comme la fonction f est décroissante sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ et que $f(0) = -1 < 0$. Alors j'en déduis que $f(\sqrt{3})$ est négatif.
13. L'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse -1 est $y = f'(-1) \times (x + 1) + f(-1)$. Je calcule ces deux valeurs :

$$f(-1) = ((-1)^2 - 2 \times (-1) - 1)e^{-1} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \quad \text{et} \quad f'(-1) = ((-1)^2 - 3)e^{-1} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}.$$

Finalement l'équation de la tangente devient

$$y = -\frac{2}{e} \times (x + 1) + \frac{2}{e}, \quad \text{i.e.} \quad y = -\frac{2}{e}x.$$

Lorsque x vaut 0, j'obtiens que y vaut aussi 0, ce qui confirme bien que cette tangente passe par l'origine du repère.

14. a) L'équation d'une tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$. Cette tangente passe par l'origine si et seulement si cette équation est vérifiée lorsque $(x, y) = (0, 0)$, i.e.

$$0 = f'(x_0) \times (0 - x_0) + f(x_0) \iff f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0.$$

- b) En remplaçant $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ par leurs expressions dans l'équation précédente, j'obtiens

$$\begin{aligned} f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0 &\iff (x_0^2 - 2x_0 - 1)e^{x_0} - x_0(x_0^2 - 3)e^{x_0} = 0 \\ &\iff (x_0^2 - 2x_0 - 1 - (x_0^3 - 3x_0))e^{x_0} = 0 \\ &\iff (-x_0^3 + x_0^2 + x_0 - 1)e^{x_0} = 0 \iff -P(x_0)e^{x_0} = 0. \end{aligned}$$

Comme une exponentielle n'est jamais nulle, alors on retrouve bien que la tangente passe par l'origine si et seulement si $P(x_0) = 0$.

- c) Comme P n'admet que deux racines distinctes, alors il n'existe que deux abscisses pour lesquelles la tangente en ce point passe par l'origine : en -1 (la tangente déterminée à la question 15.) et en 1 .

Exercice 4 – [BSB 2021 / Ex3]

1. a) La probabilité a_2 est la probabilité de l'événement A_2 , à savoir que le joueur tire vers la cible A. Or s'il tire de nouveau vers la cible A, c'est qu'il n'a pas réussi à atteindre le secteur 1 la première fois. Comme il n'y a que deux secteurs sur la cible A, alors

$$a_2 = P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

De la même manière, b_2 est la probabilité de l'événement B_2 , à savoir que le joueur tire vers la cible B. Or s'il tire cette fois vers la cible B, c'est qu'il a réussi à atteindre le secteur 1 la première fois sur la cible A. Comme il n'y a que deux secteurs sur cette cible, alors

$$b_2 = P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

- b) Le deuxième lancer ne pouvant se faire que sur l'une des deux cibles A ou B, $\{A_2, B_2\}$ forme un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} b_3 = P(B_3) &= P(A_2 \cap B_3) + P(B_2 \cap B_3) = P(A_2) \times P_{A_2}(B_3) + P(B_2) \times P_{B_2}(B_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$b_3 = \frac{5}{8}.$$

2. Je raisonne de manière similaire à la question précédente.

Si le joueur effectue un $(n+1)$ -ième lancer, alors le n -ième lancer a été tiré ou bien sur la cible A, ou bien sur la cible B. Donc $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times 0 = \frac{1}{2} a_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n + \frac{1}{2} a_n.$$

3. a) Voici le script complété.

```
1. def calcul(n) :
2.     a=1
3.     b=0
4.     for k in range(1,n) :
5.         b=b*3/4+a/2
6.         a=a/2
7.     return a,b
```


b) Si les lignes 4. et 5. se retrouvent échangées, la variable a est mise à jour en premier et contient la valeur a_i au moment de mettre à jour la variable b par la valeur b_i .

C'est un problème puisque b_i dépend de a_{i-1} et non pas de a_i .

4. Je sais que $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ donc la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

Son premier terme est $a_1 = 1$ et je peux donner sa forme explicite : pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

5. a) Comme $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$, je sais que

$$v_1 = 2^{1-1}b_1 + 2 = 1 \times b_1 + 2 = 1 \times 0 + 2 = 2.$$

Aussi pour tout $n \geq 1$, en me servant des questions précédentes et du fait que

$$v_n = 2^{n-1}b_n + 2 \iff v_n - 2 = 2^{n-1}b_n \iff \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = b_n,$$

alors je peux montrer que

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2^{n+1-1}b_{n+1} + 2 = 2^n \left(\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n \right) + 2 \\ &= \frac{3 \times 2^n}{4}b_n + \frac{2^n}{2}a_n + 2 = \frac{3 \times 2^n}{4} \times \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} + \frac{2^n}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \\ &= \frac{3 \times 2 \times (v_n - 2)}{4} + \frac{2}{2} + 2 = \frac{3(v_n - 2)}{2} + 1 + 2 \\ &= \frac{3}{2}v_n - 3 + 3 = \frac{3}{2}v_n. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que

$$v_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n.$$

b) Je reconnais en $(v_n)_{n \geq 1}$ une suite géométrique, de raison $q = \frac{3}{2}$ et de premier terme $v_1 = 2$. Je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

J'ai montré que

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

c) Grâce aux questions précédentes, je sais que $b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}}$ et $v_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

Alors il me suffit de combiner ces deux expressions pour obtenir que pour tout $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = \frac{2 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^{n-1}} \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}} = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

J'ai ainsi bien montré que

$$\forall n \geq 1, \quad b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

6. Voici le script complété.

```

1. import numpy.random as rd
2. cible='a'
3. n=0
4. while cible!='c' :
5.     n=n+1
6.     if cible=='a' :
7.         secteur=rd.randint(1,3)
8.         if secteur==1 :
9.             cible='b'
10.    else :
11.        secteur=rd.randint(1,5)
12.        if secteur==1 :
13.            cible='c'
14. print(n)

```

7. a) Si le joueur se décourage au bout de deux lancers, la seule façon pour que celui-ci gagne un lot est qu'il arrive à la cible C en deux lancers, c'est-à-dire qu'il atteigne le secteur 1 de la cible A au premier lancer, puis le secteur 1 de la cible B au deuxième lancer.

La probabilité ainsi obtenue est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

J'ai bien montré que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot est de $\frac{1}{8}$.

- b) Les 20 joueurs représentent $n = 20$ répétitions d'une même épreuve de Bernoulli de succès "Le joueur gagne un lot", de probabilité $p = \frac{1}{8}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire Y compte le nombre de succès.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{8}$.

Le support de Y est donné par $Y(\Omega) = \llbracket 0, 20 \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$,

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{20}{k} \times \frac{1}{8^k} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{20-k}.$$

- c) Comme Y suit une loi binomiale, alors

$$E(Y) = np = 20 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = np(1-p) = \frac{5}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{16}.$$

- d) La variable aléatoire Y compte le nombre de succès des joueurs, qui coûtent au forain 5€ de lot mais lui rapporte trois fois 1€ par fléchette lancée, soit un gain algébrique de -2€ . Cela laisse $(20 - Y)$ échecs qui eux rapportent au forain 2€. En additionnant tout cela, le gain total du forain est donné par

$$G = -2 \times Y + 2 \times (20 - Y) = 2(20 - Y) - 2Y.$$

Finalement, le gain moyen du forain correspond à l'espérance de G , *i.e.* par linéarité,

$$E(G) = E(2(20 - Y) - 2Y) = 2(20 - E(Y)) - 2E(Y) = 2\left(20 - \frac{5}{2}\right) - 2 \times \frac{5}{2} = 40 - 5 - 5 = 30.$$

Le forain gagne donc en moyenne 30€ pour 20 joueurs.