CONCOURS BLANC 2

Exercice 1 –

1. J'étudie le signe de x^2+x+1 pour $x \in \mathbf{R}$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Comme le discriminant est négatif, le polynôme n'admet pas de racine et son signe est constant. Comme $a = 1 > 0$, j'en déduis que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2+x+1 > 0.$$

2. Je sais que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
Alors, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, j'en déduis par composition que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Je calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= \ln(3) - \ln(4) = \ln(3) - \ln\left(2^2\right) = \ln(3) - 2\ln(2).$$

J'ai bien montré que

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2).$$

4. (a) La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$, avec $u(x) = x^2+x+1$. On a $u'(x) = 2x+1$, donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

(b) J'obtiens les variations de f en étudiant le signe de $f'(x)$. Je sais que le dénominateur est strictement positif d'après la question 1. Je cherche le signe du numérateur.

$$2x+1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -1 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Je peux donc déduire le tableau de variation de f grâce au tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)-2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. (a) Je résous $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \iff \ln(x^2+x+1) = 0 \iff x^2+x+1 = e^0 = 1 \iff x^2+x = 0$$
$$\iff x(x+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1.$$

J'ai bien montré que les deux seules solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -1 et 0.

(b) L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en le point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0).$$

Or $f(0) = 0$ puisque 0 est solution de $f(x) = 0$, et $f'(0) = \dfrac{2\times 0+1}{0^2+0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = 1 \times (x-0) + 0 \iff y = x.$$

De la même manière, si $a = -1$, l'équation de la tangente devient

$$y = f'(-1) \times \big(x-(-1)\big) + f(-1).$$

Or $f(-1) = 0$ puisque -1 est aussi solution de $f(x) = 0$, et $f'(-1) = \dfrac{-2+1}{1-1+1} = \dfrac{-1}{1} = -1$.
Donc la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation

$$y = -1 \times (x+1) + 0 \iff y = -x-1.$$

6. (a) Je dérive de nouveau f' pour obtenir f''. La fonction f' est donnée sous la forme d'un quotient $f' = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x^2+x+1$.
On a alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x+1$, puis

$$f''(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{\big(x^2+x+1\big)^2} = \frac{2x^2+2x+2-(4x^2+4x+1)}{\big(x^2+x+1\big)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{\big(x^2+x+1\big)^2}.$$

J'ai bien montré que

$$f''(x) = \frac{-2x^2-2x+1}{\big(x^2+x+1\big)^2}.$$

(b) Pour étudier la convexité de f, j'étudie le signe de $f''(x)$. Pour commencer, je remarque que le dénominateur est toujours positif. Alors le signe de $f''(x)$ me sera donné par celui de $-2x^2-2x+1$. Je cherche donc le signe de ce polynôme de degré 2.
Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-2)\times 1 = 4+8 = 12 > 0$.
Il y a donc deux racines et je remarque que $\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{12}}{2\times(-2)} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{12}}{2\times(-2)} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Comme $a = -2$, je déduis le tableau de signe de $-2x^2-2x+1$, qui n'est autre que celui de $f''(x)$.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Je peux alors déduire que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$, car $f''(x)$ y est positif, et concave sur les intervalles $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right]$ et $\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.
Cela nous amène bien à deux points d'inflexions, lieu où la convexité change, l'un au point d'abscisse $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, l'autre au point d'abscisse $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

7. (a) Le fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Or j'ai déjà montré que $f(0) = 0$ et que la limite de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ est $+\infty$. Ainsi, comme $1 \in [0, +\infty[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, je peux déduire qu'il existe une unique solution, notée α, à l'équation $f(x) = 1$.

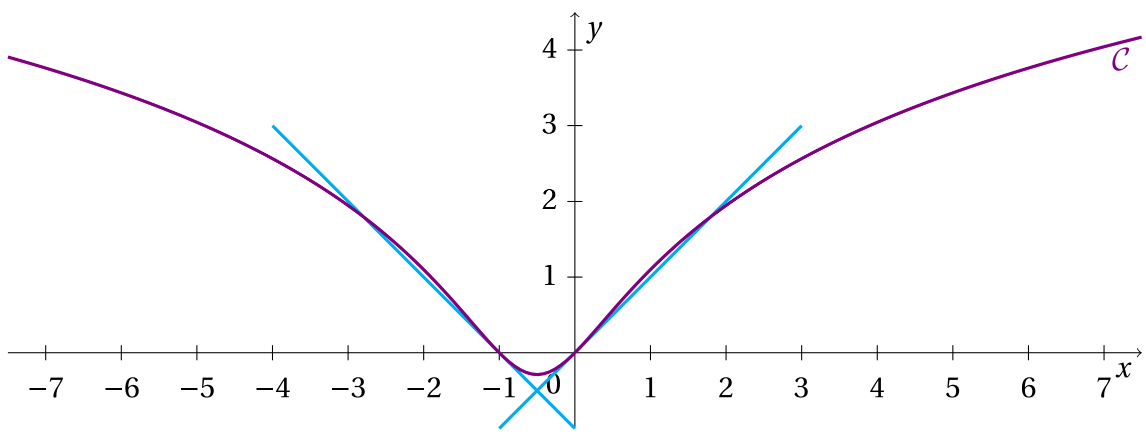
   (b) On a $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(1+1+1) = \ln(3) \approx 1.1$. Comme $f(0) \leqslant 1 = f(\alpha) \leqslant f(1)$ et que f est croissante, j'en déduis que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
   J'ai bien montré que
   $$\alpha \in [0, 1].$$

   (c) Comme α est solution de $f(x) = 1$, je sais que $\ln(\alpha^2 + \alpha + 1) = 1$. Alors,
   $$f(-1-\alpha) = \ln\left((-1-\alpha)^2 + (-1-\alpha) + 1\right) = \ln\left(\alpha^2 + 2\alpha + 1 - 1 - \alpha + 1\right) = \ln\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right) = 1.$$
   J'ai bien montré que
   $$f(-1-\alpha) = 1.$$

   (d) Voici le script complété.

```
function y=f(x)
    y=log(x∧2+x+1)
endfunction
a=0, b=1
while b-a>10∧(-3)
    c=(a+b)/2
    if f(c) < 1 then a=c
                 else b=c
    end
end
disp(a)
```

8. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de ses tangentes.



Exercice 2 –

1. (a) L'énoncé (H_1) affirme que $P(E) = 0.2$ et $P(A) = 0.8$. On retrouve bien $P(E) + P(A) = 1$. L'énoncé (H_2) affirme que $P_E(T) = 0.5$. Ainsi j'en déduis que $P_E(\overline{T}) = 1 - 0.5 = 0.5$. L'énoncé (H_3) affirme que $P_A(T) = 0.375$. Et j'en déduis que $P_A(\overline{T}) = 1 - 0.375 = 0.625$.

   (b) Comme $P(E) + P(A) = 1$, l'ensemble $\{E, A\}$ forme un système complet d'évènements. Alors, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(E \cap T) + P(A \cap T) = P(E) \times P_E(T) + P(A) \times P_A(T) \\ &= 0.2 \times 0.5 + 0.8 \times 0.375 = 0.1 + 0.3 = 0.4. \end{aligned}$$

   J'ai bien montré que $P(T) = 0.4$.

   (c) Je cherche à calculer $P_T(E)$. Par la formule de Bayes,

$$P_T(E) = \frac{P(E \cap T)}{P(T)} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

   Si le problème est résolu directement par téléphone, il y a 25% de chance que celui-ci concerne le petit électroménager.

2. (a) Les 10 appels sont $n = 10$ répétitions d'une même loi de Bernoulli de succès "l'appel concerne le petit électroménager", de probabilité $p = P(E) = 0.2$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire X compte le nombre de succès. J'en déduis que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.2$.
   Le support de X, ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire, est $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$, et pour tout $k \in [\![0, 10]\!]$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{10}{k} \times 0.2^k \times 0.8^{10-k}.$$

   (b) Comme X suit une loi binomiale, je sais que

$$E(X) = np = 10 \times 0.2 = 2 \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = 2 \times 0.8 = 1.6.$$

3. (a) De la même manière qu'à la question précédente, les 600 appels sont $n = 600$ répétitions d'une même loi de Bernoulli de succès "l'appel se résout directement au téléphone", de probabilité $p = P(T) = 0.4$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire Y compte le nombre de succès. J'en déduis que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = 0.4$.

   (b) Comme Y suit une loi binomiale, je sais trouver sa valeur moyenne et le carré de son écart-type :

$$m = E(Y) = np = 600 \times 0.4 = 240 \quad \text{et} \quad \sigma^2 = V(Y) = np(1-p) = 240 \times 0.6 = 144.$$

Exercice 3 –

Partie A

1. Je résous $x^2 + x + 1 = 0$ pour $x \in \mathbf{R}$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Comme le discriminant est négatif, le polynôme n'admet aucune racine. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet donc pas de solution réelle.

2. Je peux raisonner en ne considérant que les termes de plus haut degré. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-.$$

3. Je commence par dériver f afin d'étudier le signe de $f'(x)$ pour en déduire les variations de f. La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2+x+1$.
On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x+1$, donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1\times(x^2+x+1) - x\times(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+x+1-2x^2-x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$

Il ne me reste plus qu'à étudier le signe de chacun des facteurs pour obtenir le signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	-1	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0

En particulier, j'ai bien montré que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[-1,1\right]$.

4. (a) L'équation de la tangente à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ en le point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a)\times(x-a)+f(a)$. Ici $a=0$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(0)\times(x-0)+f(0).$$

Or $f(0) = \frac{0}{0^2+0+1} = 0$ et $f'(0) = \frac{1-0^2}{(0^2+0+1)^2} = \frac{1}{1} = 1$.
Donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = 1\times(x-0)+0 \iff y = x.$$

(b) Je cherche à résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant -1$.

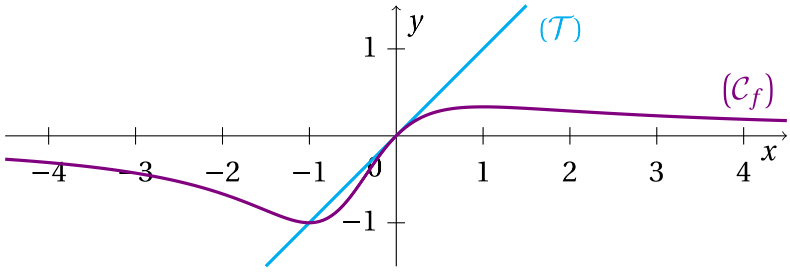
$$\begin{aligned} f(x) \leqslant x &\iff \frac{x}{x^2+x+1} - x \leqslant 0 \iff x - x(x^2+x+1) \leqslant 0 \qquad \text{car } x^2+x+1>0 \\ &\iff x - x^3 - x^2 - x \leqslant 0 \iff -x^2(x+1) \leqslant 0 \iff x^2(x+1) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Or $x^2 \geqslant 0$ sur $\mathbf{R}$ et $x+1 \geqslant 0$ puisque $x \geqslant -1$. J'ai donc bien montré que

$$\forall x \in [-1,+\infty[, \quad f(x) \leqslant x.$$

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction f se situe sous la tangente $(\mathcal{T})$ sur l'intervalle $[-1,+\infty[$.

5. Voici l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de sa tangente $(\mathcal{T})$.



Partie B

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En multipliant numérateur et dénominateur par n, j'obtiens

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$

En outre, comme $\dfrac{1}{n} > 0$, on a $n+1+\dfrac{1}{n} > n+1$ et, en passant à l'inverse,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons P_n la propriété "$0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$".

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{1} = 1.$$

Donc la propriété P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que P_n est vraie au rang n et montrons que P_{n+1} l'est aussi. Comme P_n est vraie, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$, car $n \geqslant 1$. Alors comme f est croissante sur $[0,1]$,

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = f(0) \leqslant u_{n+1} \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_1 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on a l'encadrement $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Or la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ a pour limite 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Alors grâce au théorème des gendarmes, je peux conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite vaut 0.

4. Voici le script complété.

```
function y=f(x)
    y = x/(1+x+x∧2)
endfunction
u = 1
n = 1
while u > 1/1000
    u = f(u)
    n = n+1
end
disp(n)
```

Partie C

1. Pour tout $n \geqslant 2$, notons P_n la propriété "$-1 \leqslant v_n \leqslant 0$".

   Initialisation : Pour $n = 2$,

   $$v_2 = f(v_1) = f(-2) = \frac{-2}{1+(-2)+(-2)^2} = \frac{-2}{3} \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \frac{-2}{3} \leqslant 0.$$

   Donc la propriété P_2 est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Supposons que P_n est vraie au rang n et montrons que P_{n+1} l'est aussi. Comme P_n est vraie, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ et comme f est croissante sur $[-1,0]$,

   $$f(-1) \leqslant f(v_n) \leqslant f(0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 = f(-1) \leqslant v_{n+1} \leqslant f(0) = 0.$$

   Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_2 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 2$, *i.e.*

   $$\forall n \geqslant 2, \quad -1 \leqslant v_n \leqslant 0.$$

2. Grâce à la question 4 de la Partie A, je sais que $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant -1$. Or, comme pour tout $n \geqslant 2$, $v_n \geqslant -1$, j'en déduis que $f(v_n) \leqslant v_n$, *i.e.*

   $$\forall n \geqslant 2, \quad v_{n+1} \leqslant v_n.$$

   J'ai bien montré que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante.

3. Grâce aux deux questions précédentes, je sais que la suite (v_n) est décroissante et minorée par -1. Par le théorème de convergence monotone, je peux en déduire que la suite (v_n) converge.

4. À l'aide de la figure, comme les points de la suite semblent se rapprocher de la droite d'équation $y = -1$, je conjecture que la limite de la suite (v_n) est -1.

5. (a) Je cherche à résoudre l'équation $f(x) = -1$ pour $x \in \mathbf{R}$.

   $$\begin{aligned} f(x) = -1 &\Longleftrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} + 1 = 0 \Longleftrightarrow x + 1 \times (x^2+x+1) = 0 \qquad \text{car } x^2+x+1 > 0 \\ &\Longleftrightarrow x + x^2 + x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

   L'unique solution de l'équation $f(x) = -1$ est $x = -1$. Le réel -1 est donc un point fixe de la fonction f.

   (b) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $v_n = -1$.
   Tout d'abord, n est différent de 1 puisque $v_1 = -2 \neq -1$. Alors dans ce cas $v_n = f(v_{n-1})$, donc $f(v_{n-1}) = -1$ et v_{n-1} est une solution de $f(x) = -1$. Comme -1 est l'unique solution de cette équation, je viens de montrer que si $v_n = -1$, alors $v_{n-1} = -1$, c'est-à-dire que le terme précédent aussi vaut -1. En itérant ce résultat, j'obtiens alors que $v_{n-2} = -1$, $v_{n-3} = -1$, etc. jusqu'à $v_2 = -1$ et donc $v_1 = -1$. Or cela est impossible. Mon raisonnement est donc absurde puisqu'il aboutit à une contradiction. Donc il ne peut pas exister de $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $v_n = -1$. J'ai bien montré que

   $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n \neq -1.$$

Exercice 4 –

1. (a) La probabilité a_2 est la probabilité de l'évènement A_2, à savoir que le joueur tire vers la cible A au deuxième lancer. Or s'il tire de nouveau vers la cible A, c'est qu'il n'a pas réussi à atteindre le secteur 1 la première fois. Comme il n'y a que deux secteurs sur la cible A, on a
$$a_2 = P(A_2) = \frac{1}{2}.$$
De la même manière, b_2 est la probabilité de l'évènement B_2, à savoir que le joueur tire vers la cible B au deuxième lancer. Or s'il tire cette fois vers la cible B, c'est qu'il a réussi à atteindre le secteur 1 la première fois sur la cible A. Comme il n'y a que deux secteurs sur cette cible, on a
$$b_2 = P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

(b) Le deuxième lancer ne pouvant se faire que sur l'une des deux cibles A ou B, l'ensemble $\{A_2, B_2\}$ forme un système complet d'évènements. Alors, par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned} b_3 = P(B_3) &= P(A_2 \cap B_3) + P(B_2 \cap B_3) = P(A_2) \times P_{A_2}(B_3) + P(B_2) \times P_{B_2}(B_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$
J'ai bien montré que
$$b_3 = \frac{5}{8}.$$

2. On raisonne de manière similaire à la question précédente. Si le joueur effectue un $n+1$-ème lancer, alors le n-ème lancer a été tiré ou bien sur la cible A, ou bien sur la cible B. Donc $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'évènements. Alors, par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times 0 = \frac{1}{2} a_n \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n. \end{aligned}$$
J'ai bien montré que
$$\forall n \geqslant 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n + \frac{1}{2} a_n.$$

3. (a) Voici le script complété.

```
n=input('n ?')
a=1, b=0
for i=2:n
    b=b*3/4+a/2
    a=a/2
end
disp(b,a)
```

(b) Si l'on échange les lignes 4. et 5., la variable `a` sera mise à jour en premier et contiendra la valeur a_i au moment de mettre à jour la variable `b` par la valeur b_i. C'est un problème puisque b_i dépend de a_{i-1} et non pas de a_i.

4. Je sais que $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$, donc la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$. Son premier terme est $a_1 = 1$. Je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \geqslant 1$,
$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$
J'ai bien montré que
$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

5. (a) Comme $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$, je sais que
$$v_1 = 2^{1-1}b_1 + 2 = 1 \times b_1 + 2 = 1 \times 0 + 2 = 2.$$
Aussi, pour tout $n \geqslant 1$, en me servant des questions précédentes et du fait que
$$v_n = 2^{n-1}b_n + 2 \iff v_n - 2 = 2^{n-1}b_n \iff \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = b_n,$$
je peux montrer que
$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 2^{n+1-1}b_{n+1} + 2 = 2^n\left(\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n\right) + 2 \\
&= \frac{2^n}{2}a_n + \frac{3 \times 2^n}{4}b_n + 2 = \frac{2^n}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{3 \times 2^n}{4} \times \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} + 2 \\
&= \frac{2^n}{2 \times 2^{n-1}} + \frac{3 \times 2^n \times (v_n - 2)}{4 \times 2^{n-1}} + 2 = 1 + \frac{3(v_n - 2)}{2} + 2 \\
&= 1 + \frac{3}{2}v_n - 3 + 2 = \frac{3}{2}v_n.
\end{aligned}$$
J'ai bien montré que
$$v_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n.$$

(b) Je reconnais en (v_n) une suite géométrique, de raison $q = \dfrac{3}{2}$ et de premier terme $v_1 = 2$. Je peux alors donner sa forme explicite : pour tout $n \geqslant 1$,
$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$
J'ai montré que
$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

(c) Comme j'ai établi dans les questions précédentes que $b_n = \dfrac{v_n - 2}{2^{n-1}}$ et que $v_n = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$, il me suffit de combiner pour obtenir que, pour tout $n \geqslant 1$,
$$b_n = \frac{v_n - 2}{2^{n-1}} = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^{n-1}} \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}} = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$
J'ai bien montré que
$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

6. Voici le script complété.

```
cible="a"
n=1
while cible <>"c"
    n=n+1
    if cible =="a" then
        secteur=grand(1,1,‘uin’,1,2)
        if secteur==1 then cible="b"
        end
    else
        if cible =="b" then
            secteur=grand(1,1,‘uin’,1,4)
            if secteur==1 then cible="c"
            end
        end
    end
end
disp(n)
```

7. (a) Si le joueur se décourage au bout de deux lancers, la seule façon pour que celui-ci gagne un lot est qu'il arrive à la cible C en deux lancers, c'est-à-dire qu'il atteigne le secteur 1 de la cible A au premier lancer, puis le secteur 1 de la cible B au deuxième lancer.
La probabilité ainsi obtenue est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
J'ai bien montré que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot est de $\frac{1}{8}$.

(b) Les 20 joueurs représentent $n = 20$ répétitions d'une même loi de Bernoulli de succès "le joueur gagne un lot", de probabilité $p = \frac{1}{8}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire Y compte le nombre de succès. J'en déduis que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{8}$.
Le support de Y est $Y(\Omega) = [\![0,20]\!]$, et pour tout $k \in [\![0,20]\!]$,

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{20}{k} \times \frac{1}{8^k} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{20-k}.$$

(c) Comme Y suit une loi binomiale, je sais que

$$E(Y) = np = 20 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = np(1-p) = \frac{5}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{16}.$$

(d) Y compte le nombre de succès des joueurs, ce qui coûte au forain 5€ de lot mais lui rapporte 3 fois 1€ par fléchette lancée. Soit un gain algébrique de −2€. Cela nous laisse $(20 - Y)$ échecs qui eux rapportent au forain 2€. En additionnant tout cela, le gain total du forain vaut

$$G = -2 \times Y + 2 \times (20 - Y) = 2(20 - Y) - 2Y.$$

Le gain moyen du forain correspond à l'espérance de G, *i.e.* par linéarité,

$$E(G) = E\big(2(20-Y) - 2Y\big) = 2\big(20 - E(Y)\big) - 2E(Y) = 2\left(20 - \frac{5}{2}\right) - 2 \times \frac{5}{2} = 40 - 5 - 5 = 30.$$

Le forain gagne en moyenne 30€ pour 20 joueurs.