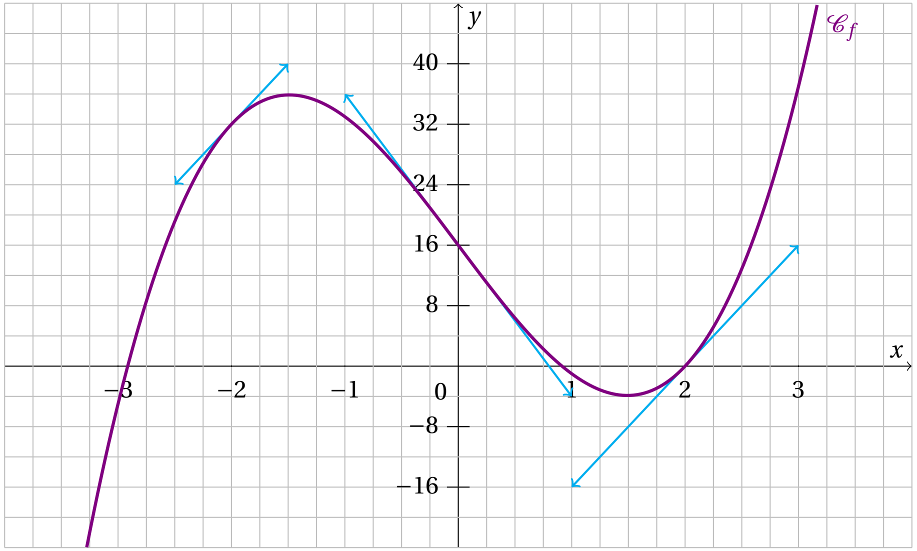
EXERCICES — CHAPITRE 8

Exercice 1 – Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Certaines tangentes à la courbe ont aussi été représentées.



Partie A : On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique,

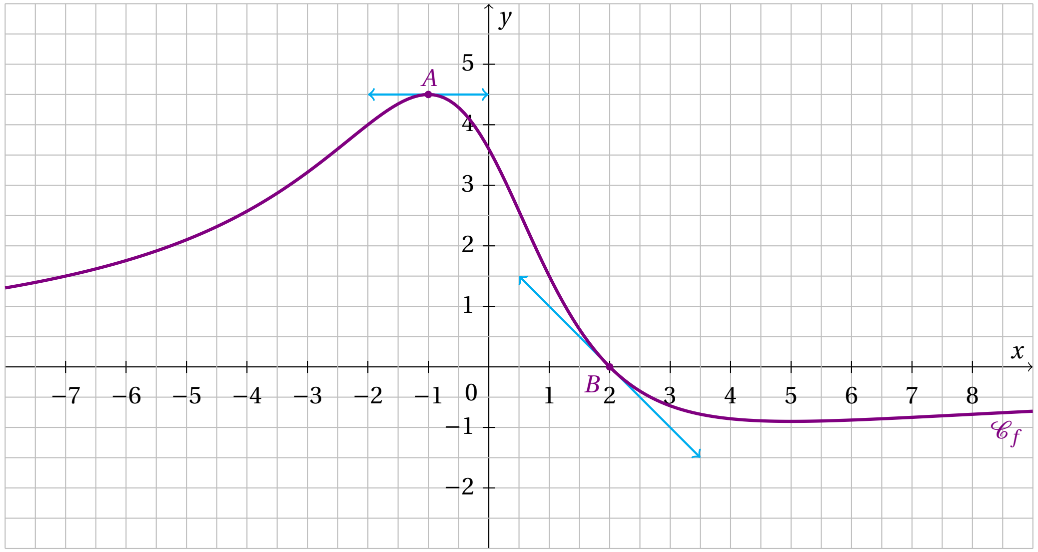
1. déterminer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$,
2. donner une estimation des solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

Partie B : La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^3 - 20x + 16$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(1,5)$, puis comparer ces résultats avec les valeurs obtenues dans la partie A.
3. Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.
4. Donner le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 2 –
Partie A : Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. On sait que

- la tangente au point $A\left(-1; \dfrac{9}{2}\right)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses,
- la tangente au point $B\,(2;0)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(0;2)$.



On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique et des renseignements fournis,

1. déeterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.
2. La tangente la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x + \dfrac{7}{2}$.
   Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant votre choix.

   (a) $f'(0) \times f'(3) \leqslant 0$.

   (b) $f'(-3) \times f'(1) \leqslant 0$.

Partie B : La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{18 - 9x}{x^2 + 5}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{9\left(x^2 - 4x - 5\right)}{\left(x^2 + 5\right)^2}$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$.

   (b) Donner le tableau de variation de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse (-2).

Exercice 3 – Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sans donner de justification concernant l'existence de cette dérivée).

1. $a(x) = 8x^3 + 4x^2 - 12x + 5$
2. $b(x) = (2x^2 + x - 2)(3x + 2)$
3. $c(x) = \dfrac{1}{3x - 2}$
4. $d(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{3x + 2}$
5. $e(x) = \sqrt{3x^2 - x - 1}$
6. $f(x) = (x^2 + 1) \times \dfrac{1}{x}$
7. $g(x) = x\sqrt{x} + x$
8. $h(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2$
9. $i(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$
10. $j(x) = (2x^2 - 4x + 3)^7$

Exercice 4 – Étudier les fonctions suivantes.

1. $a(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$
2. $b(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3x + 2}$
3. $c(x) = \dfrac{x^4 + 2x - 3}{x^3 - 1}$
4. $d(x) = (x^2 + 3x - 4)^{\frac{1}{2}}$

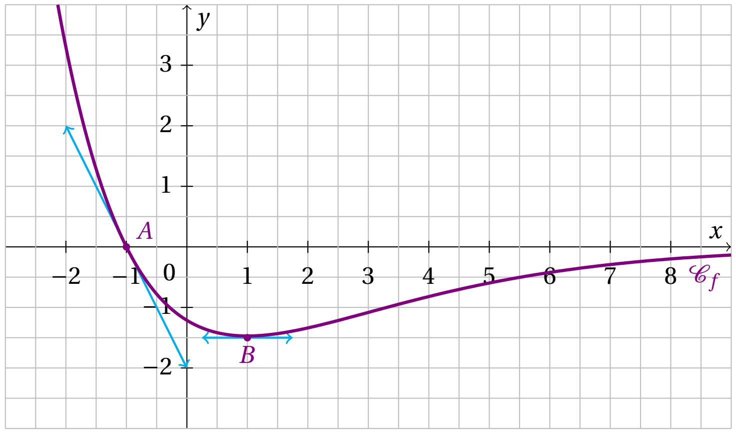
Exercice 5 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{15x + 60}{x^2 + 9}$. On note f' la dérivée de la fonction f.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variation de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse -4.

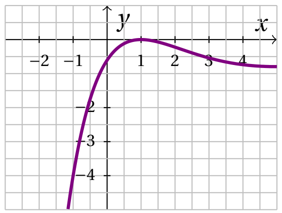
Exercice 6 – La courbe C_f ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que

- la courbe coupe l'axe des abscisses au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0; -2)$,
- la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

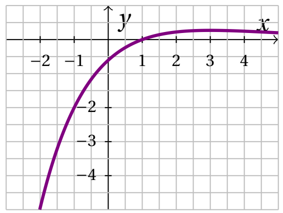
1. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.



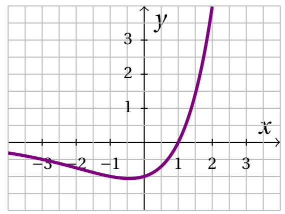
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f'. Déterminer laquelle.



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

Exercice 7 – Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = 8x^2 - 2x - \dfrac{9}{2x + 3}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x) = \dfrac{8x\left(8x^2 + 23x + 15\right)}{(2x + 3)^2}$.
2. Étudier les variations de la fonction f.

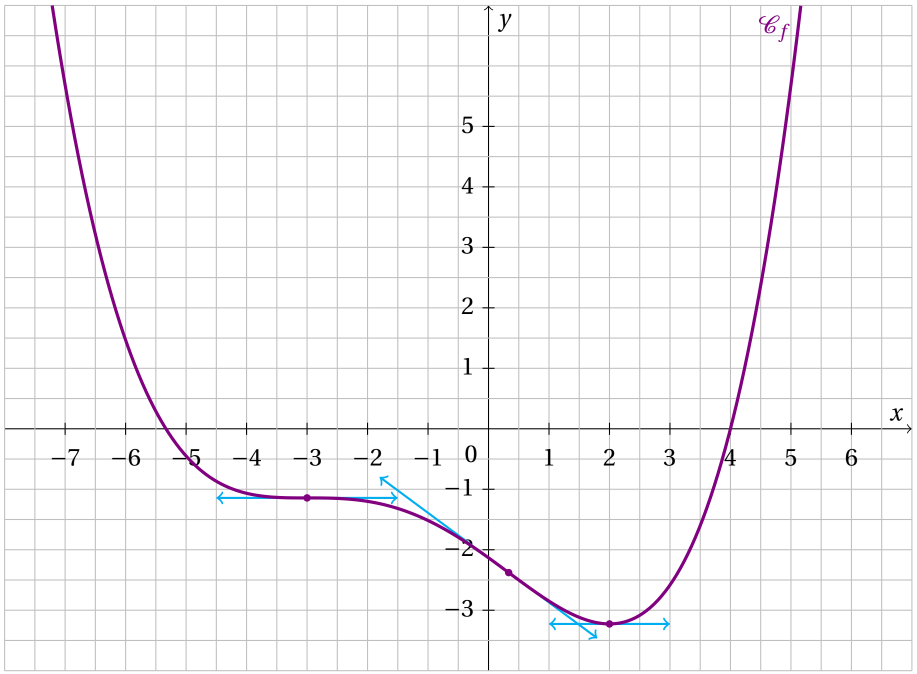
Exercice 8 – Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x^2 + 3}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Étudier les variations de f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

Exercice 9 – Étudier la convexité des fonctions définies par

1. $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$
2. $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
3. $h(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 10 – Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbf{R}$.



On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f. À partir du graphique, déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles <, = ou > est approprié.

$f(-6)\dots 0$	$f'(-6)\dots 0$	$f(-1)\dots f(3)$	$f'(-1)\dots f'(3)$
$f'(-6)\dots f'(-1)$	$f'(-3)\dots 0$	$f'(2)\dots 0$	$f'(-7)\dots f'(3)$
$f''(-6)\dots f''(-1)$	$f''(-3)\dots 0$	$f''(2)\dots 0$	$f''(-1)\dots f''(1)$

Exercice 11 – Soit f la fonction définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   (a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$.
   (b) Donner le tableau de variation de la fonction f.
3. (a) Étudier la convexité de la fonction f.
   (b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ?

Exercice 12 – Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = -x^3 + 16,5x^2 - 30x + 110$. On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde.

1. (a) Déterminer $f'(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
2. (a) Déterminer $f''(x)$.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f.