

5 | Probabilités élémentaires

I – Le cadre probabiliste

Le but est ici de reprendre le vocabulaire des probabilités, vu en classe de terminale, et d'établir le lien avec une vision ensembliste.

1 – Un peu de vocabulaire

Définition 5.1 – Une **expérience aléatoire** est une expérience dont l'**issue** (le résultat) ne peut pas être prévue. La répétition d'une telle expérience ne donne *a priori* pas le même résultat.

Exemple 5.2 –

1. Jeter un dé à 6 faces et noter le résultat.
2. Lancer une pièce de monnaie et noter le résultat.
3. Lancer une copie du haut d'un escalier à 20 marches et obtenir la note de la copie.

Définition 5.3 – L'**univers** est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. Il est souvent noté Ω . Une **issue** est un élément $\omega \in \Omega$.

Exemple 5.4 –

1. $\Omega =$
2. $\Omega =$
3. $\Omega =$

Définition 5.5 – Un **évènement** est un ensemble de résultats possibles d'une expérience aléatoire. Dans le cas où l'univers Ω est fini, on peut associer de manière unique un évènement A à une partie (un sous-ensemble) de Ω , que l'on note également A ,

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ réalise } A\}.$$

Autrement dit, si $\omega \in \Omega$ est une issue possible de l'expérience, alors ω réalise A si et seulement si $\omega \in A$.

Exemple 5.6 – En reprenant les expériences précédentes,

1. "obtenir un numéro impair" : la partie associée est
2. "obtenir FACE" : la partie associée est
3. "avoir la moyenne" : la partie associée est

2 – Lien entre terminologie probabiliste et ensembliste

On effectue une expérience aléatoire. On note Ω l'univers. On considère A et B deux évènements liés à l'expérience aléatoire.

Définition 5.7 – Un évènement est dit

- **élémentaire** lorsque la partie associée est réduite à un élément (on parle de singleton),
- **certain** s'il est toujours réalisé (c'est alors l'univers Ω),
- **impossible** s'il n'est jamais réalisé (c'est alors l'ensemble vide \emptyset).

Exemple 5.8 – En reprenant les expériences précédentes,

1. Un évènement élémentaire est
2. Un évènement certain est
3. Un évènement impossible est

Définition 5.9 – Soit $\omega \in \Omega$. On dit que ω réalise l'**évènement contraire** de A si et seulement si ω ne réalise pas A . On note \bar{A} l'évènement contraire de A . La partie \bar{A} associée est la partie constituée de tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A , i.e. $\bar{A} = \Omega \setminus A$. On l'appelle le **complémentaire** de A .

Exemple 5.10 – En reprenant les expériences précédentes,

1. Soit A l'évènement "obtenir un nombre pair". La partie associée est
L'évènement contraire est
2. Soit A l'évènement "obtenir FACE". La partie associée est
L'évènement contraire est
3. Soit A l'évènement "avoir une note supérieure ou égale à 12". La partie associée est
L'évènement contraire est

Définition 5.11 – On dit que l'évènement A **implique** l'évènement B si la réalisation de l'évènement A implique celle de l'évènement B . En terme ensembliste, cela signifie que

$$A \text{ implique } B \iff A \subset B.$$

Exemple 5.12 – On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à 6 faces deux fois de suite. Soit A l'évènement "faire un 6 au premier lancer" et B l'évènement "faire au moins un 6". Les parties associées sont

Définition 5.13 – On dit que l'évènement A **ou** B est réalisé si et seulement si au moins l'un des deux évènements A ou B est réalisé. La partie associée est la réunion $A \cup B$.

Exemple 5.14 – On reprend l'expérience précédente. Soit A l'évènement "faire un 3 au premier lancer" et B l'évènement "faire un 5 au deuxième lancer". Les parties associées sont

L'évènement A **ou** B est

Définition 5.15 – On dit que l'évènement A **et** B est réalisé si et seulement si les deux évènements A et B sont réalisés. La partie associée est l'intersection $A \cap B$.

Exemple 5.16 – On reprend l'expérience précédente.
L'évènement A **et** B est

Définition 5.17 – On dit que deux évènements A et B sont **incompatibles** si l'évènement A **et** B est impossible. Autrement dit, les évènements A et B sont incompatibles si et seulement si les parties A et B associées vérifient $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 5.18 – On reprend l'expérience précédente. Soit A l'évènement "faire un 3 au premier lancer" et C l'évènement "faire un 5 au premier lancer". A et C sont-ils incompatibles?

Proposition 5.19 – Lois de Morgan

Soient A et B deux évènements. Le passage au complémentaire transforme les intersections en réunions et inversement :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exemple 5.20 – On reprend l'expérience précédente.
L'évènement contraire de A **ou** B est

L'évènement contraire de A **et** B est

On récapitule toutes ces notions dans le tableau suivant.

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste	Notation
évènement certain	ensemble dans sa totalité	Ω
évènement impossible	ensemble vide	\emptyset
évènement élémentaire	singleton	$\{\omega\}$
évènement A	ensemble A	$A \subset \Omega$
évènement contraire de A	complémentaire de A	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
A ou B	A union B	$A \cup B$
A et B	A inter B	$A \cap B$
A et B incompatibles	A et B disjoints	$A \cap B = \emptyset$
ω réalise A	ω appartient à A	$\omega \in A$

II – Probabilités

Dans toute la suite, Ω désigne un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω .

Définition 5.21 – On appelle **probabilité** sur Ω (ou loi de probabilité) toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ vérifiant

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tous événements incompatibles } A \text{ et } B, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A)$ s'appelle la **probabilité de l'évènement** A .



ATTENTION! Une probabilité est par définition à valeurs dans $[0, 1]$. Ainsi, pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

On vérifie donc **SYSTÉMATIQUEMENT** que le résultat d'un calcul de probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

1 – Propriétés de base

Proposition 5.22

Soient A et B deux événements. Alors pour toute probabilité P ,

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

Démonstration.

□

Proposition 5.23 – Formule de Poincaré

Soient A et B deux événements. Dans le cas où les événements ne sont pas incompatibles, la probabilité de l'union est donnée par

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Démonstration.

□

2 – Probabilités élémentaires

Théorème 5.24

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement. Si $A = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors on a

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}).$$

Exemple 5.25 – Un dé est truqué pour que le 6 apparaisse deux fois plus souvent que les autres faces qui, elles, ont toutes la même probabilité de tomber. Calculer $P(\{4, 5, 6\})$.

3 – Le cas de l'équiprobabilité

Définition 5.26 – Deux évènements A et B sont dits **équiprobables** s'ils ont la même probabilité, c'est-à-dire si $P(A) = P(B)$. On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

Remarque 5.27 – Les situations d'équiprobabilité sont très nombreuses. Par exemple le lancer d'une pièce ou d'un dé équilibré, le tirage au hasard d'une boule dans une urne (on dit souvent "indiscernables au toucher" pour supposer l'équiprobabilité), d'une carte dans un jeu, d'une personne dans un échantillon, etc. Il faut cependant bien faire attention à ne pas voir de l'équiprobabilité dans toutes les situations!

Remarque 5.28 – Loto et équiprobabilité

Le tirage du Loto est un exemple classique d'équiprobabilité : tous les nombres ont absolument la même chance d'être tirés. Par exemple, le tirage $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a la même probabilité de sortir que les autres, alors que peu de gens auraient l'idée de jouer ces 6 numéros.

Théorème 5.29

On suppose que l'on est en situation d'équiprobabilité.

- Pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ où $n = \text{Card}(\Omega)$.
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}.$$

Remarque 5.30 – On appelle **cardinal** d'un ensemble fini E son nombre d'éléments et on le note $\text{Card}(E)$ (ou $|E|$ ou encore $\#E$).

Exemple 5.31 –

- $\text{Card}\{0, 3, 7\}$
- $\text{Card} \emptyset$
- $\text{Card}[[1, n]]$
- $\text{Card}[0, n]$

III – Probabilités conditionnelles

1 – Définitions et propriétés

Définition 5.32 – Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement tel que $P(A) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** le nombre, noté $P_A(B)$, défini par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple 5.33 – On lance un dé cubique équilibré et on considère les évènements suivants :

- A : "obtenir un nombre inférieur à 3",
- B : "obtenir un 5",
- C : "obtenir un 2".

Calculer $P_A(B)$ et $P_A(C)$ de deux façons différentes.

Proposition 5.34

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement tel que $P(A) \neq 0$. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω .

Remarque 5.35 – En particulier, toutes les propriétés vues dans la section II s'appliquent à $P_A : B \mapsto P_A(B)$.

2 – Formule des probabilités composées

Si A et B sont deux évènements de probabilité non nulle, alors par définition de $P_A(B)$ et de $P_B(A)$, on a

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

On peut généraliser la formule précédente.

Proposition 5.36 – Formule des probabilités composées

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des évènements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Remarque 5.37 –

Dans le cas $n = 2$, on retrouve la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Dans le cas $n = 3$, on retrouve la formule $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$.

Exemple 5.38 – Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges, indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise 3 boules dans cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.

3 – Formule des probabilités totales

Définition 5.39 – Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des évènements. On dit que $\{A_1, \dots, A_n\}$ est un **système complet d'évènements** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq i < j \leq n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Exemple 5.40 –

- Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\{A, \bar{A}\}$ est un système complet d'évènements.
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors $\{\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}\}$ est un système complet d'évènements.

Théorème 5.41 – Formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements. Alors, pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k).$$

Si de plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(A_k) \neq 0$, alors

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \times P_{A_k}(B).$$

Remarque 5.42 –

Dans le cas $n = 2$, on note $\{A, \bar{A}\}$ et on obtient la formule $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$.

Dans le cas $n = 3$, on note $\{A_1, A_2, A_3\}$ et on obtient la formule $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$.

Exemple 5.43 – Dans une population, une personne sur 10000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99% des malades mais aussi faussement positif chez 0.1% des personnes non atteintes. Calculer la probabilité qu'un individu obtienne un résultat positif.

Théorème 5.44 – Formule de Bayes

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements et soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement.

On suppose que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(A_k) \neq 0$ et que $P(B) \neq 0$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P_B(A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^n P(A_k) \times P_{A_k}(B)}.$$

Exemple 5.45 – On reprend l'exemple précédent. Un individu passe le test et obtient un résultat positif. Quelle est sa probabilité d'être malade? Qu'en conclure?

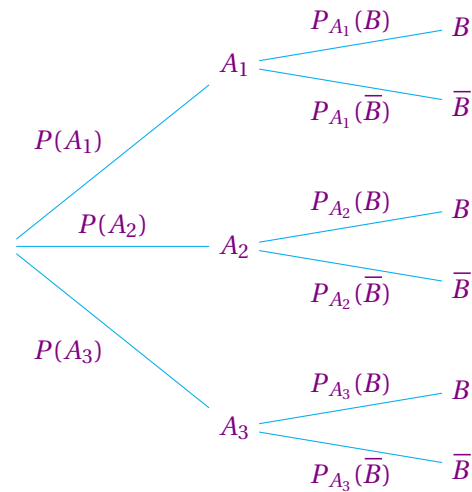
4 – Lien avec les arbres pondérés

Il est relativement commode de représenter une expérience aléatoire par un arbre pondéré et surtout de savoir utiliser cet arbre pour faire des calculs de probabilités.

On considère l'exemple ci-contre dont l'univers associé comporte six issues :

$$\Omega = \{A_1 \cap B, A_1 \cap \bar{B}, A_2 \cap B, A_2 \cap \bar{B}, A_3 \cap B, A_3 \cap \bar{B}\}.$$

Le but de ce paragraphe est d'illustrer les propriétés vues précédemment via un certain nombre de "règles" de calcul sur les arbres pondérés.



- **Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.**

Cette règle illustre le fait que la probabilité conditionnelle est bien une probabilité. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple

$$\begin{aligned} P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) &= 1, \\ P_{A_1}(B) + P_{A_1}(\bar{B}) &= 1, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

- **Règle 2 : La probabilité de l'évènement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.**

Cette règle illustre la formule des probabilités composées. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B) &= P(A_1) \times P_{A_1}(B), \\ P(A_2 \cap \bar{B}) &= P(A_2) \times P_{A_2}(\bar{B}), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

- **Règle 3 : La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet évènement.**

Cette règle illustre la formule des probabilités totales. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + P(A_3) \times P_{A_3}(B).$$

Exemple 5.46 – Un élève a beaucoup de mal à se réveiller le matin. Aussi, pour parer à toute éventualité, il programme son réveil à trois horaires h_1 , h_2 et h_3 . Il se réveille à l'heure h_1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à l'heure h_2 avec probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsqu'il se réveille à l'heure h_1 , la probabilité qu'il arrive à l'heure en classe est de 95%. Lorsqu'il se réveille à l'heure h_2 , la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de 10%. Enfin, lorsqu'il se réveille à l'heure h_3 , la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de 30%. Quelle est la probabilité que l'élève soit en retard ?

Remarque 5.47 – On peut toujours faire un arbre pondéré mais contrairement aux exigences du baccalauréat, il ne suffit plus pour la justification des calculs. Les règles énoncées ci-dessus ne sont finalement qu'une bonne représentation visuelle des propriétés énoncées précédemment.

IV – Indépendance

1 – Indépendance de deux événements

Définition 5.48 – Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Remarque 5.49 – Il est facile de voir que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ ou de manière équivalente si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. Autrement dit, deux événements A et B sont indépendants si la donnée de l'information " B est réalisé" (resp. " A est réalisé") n'influe pas sur la réalisation de A (resp. B). On retrouve donc une notion intuitive d'indépendance.

Remarque 5.50 – **Les probabilités et les préjugés des joueurs**

À la roulette, la boule s'arrête au hasard sur un numéro rouge ou un numéro noir. Dans des ouvrages sur la roulette, on lit que la plus longue "série" (c'est-à-dire suite de résultats de même couleur) que l'on ait observée a été de 24 rouges ou de 24 noirs. Beaucoup de joueurs, s'ils observent un jour une série de 24 rouges n'hésitent pas à conclure que le noir doit forcément sortir au coup suivant "puisque'il n'y a jamais eu de série de 25..." Mais comme l'écrivait le mathématicien Joseph Bertrand, "la roulette n'a ni conscience, ni mémoire..."

Au Loto, les numéros les moins souvent obtenus lors des tirages précédents ont-ils plus de chances de sortir au tirage suivant? Le hasard réserve bien des surprises : par exemple, le numéro 22 n'est sorti comme numéro complémentaire qu'après 344 tirages, c'est-à-dire plus de 6 ans après le premier tirage du Loto (le 19 mai 1976)...

Le "bon sens" devrait suffire à persuader les joueurs que les coups successifs de la roulette, comme les tirages successifs du Loto sont indépendants les uns des autres.

Exemple 5.51 – On lance un dé cubique et on considère les événements

- A : "le résultat obtenu est inférieur ou égal à 2",
- B : "le résultat obtenu est supérieur ou égal à 4".

Déterminer si A et B sont indépendants dans les deux cas suivants.

- **Cas 1 : dé équilibré.**
- **Cas 2 : dé pipé.** On considère un dé qui permet d'obtenir 1 avec la probabilité 1.

Remarque 5.52 – La notion d'indépendance dépend donc de la probabilité P étudiée.

2 – Indépendance d'une famille d'évènements

Définition 5.53 – Soient A_1, \dots, A_n des évènements. On dit que A_1, \dots, A_n sont **mutuellement indépendants** si

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Exemple 5.54 – Avec quatre évènements A_1, A_2, A_3 et A_4 , on dit que les évènements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont mutuellement indépendants lorsque l'on a les 11 égalités suivantes :

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2), P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3), P(A_1 \cap A_4) = P(A_1)P(A_4),$
 $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3), P(A_2 \cap A_4) = P(A_2)P(A_4), P(A_3 \cap A_4) = P(A_3)P(A_4),$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3), P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_4),$
 $P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_3)P(A_4), P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_2)P(A_3)P(A_4),$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4).$

Exemple 5.55 – On lance deux fois un dé équilibré et on considère les évènements suivants.

- A : "le premier chiffre est pair",
- B : "le second chiffre est impair",
- C : "la somme des chiffres est paire".

Les évènements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants?

Théorème 5.56

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des évènements mutuellement indépendants. Soient $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des évènements tels que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$.

Alors les évènements B_1, \dots, B_n sont également mutuellement indépendants.

Exemple 5.57 – Si A, B, C sont mutuellement indépendants, alors A, \overline{B}, C aussi, ou encore \overline{A}, B, C , etc.