6 | Compléments d'intégration

I – Intégration sur un segment

1 – Primitives

Définition 6.1 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une **primitive** de la fonction f sur I si F est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 6.2 – Vérifier les assertions suivantes.

- $F : x \mapsto x^4 + 4x^3 - x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 4x^3 + 12x^2 - 1$.
  En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad F'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 1 = f(x)$.
- $G : x \mapsto e^x - 2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto e^x$.
  En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad G'(x) = e^x = g(x)$.
- $H : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de $h : x \mapsto \ln(x)$.
  En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad H'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = h(x)$.
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H : x \mapsto x^2 + C$, pour tout $C \in \mathbb{R}$, sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
  En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x = f(x)$.

Remarque 6.3 –

- Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f.
  C'est pourquoi on parle d'**une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.

Théorème 6.4

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est de la forme $F + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné :
  Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 6.5 – Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 + x - 2$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 1$ qui vérifie $F(1) = 0$.
En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad F'(x) = 3x^2 + 1 = f(x) \quad$ et $\quad F(1) = 1^3 + 1 - 2 = 2 - 2 = 0$.

2 – Primitives usuelles

Pour rechercher une primitive, on utilise les formules suivantes connues pour la dérivation et les dérivées usuelles. Les formules suivantes sont valables sur tout intervalle où la fonction est continue.

la fonction f	une primitive F
$f(x) = a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n \quad (n \geqslant 0)$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad (n \neq 1)$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\lvert x\rvert)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = e^{ax} \quad (a \neq 0)$	$F(x) = \dfrac{1}{a}e^{ax}$

la fonction f	une primitive F
$f = u' \times u^n \quad (n \geqslant 0)$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = \dfrac{u'}{u^n} \quad (n \neq 1)$	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln(\lvert u\rvert)$
$f = u' \times e^u$	$F = e^u$

Méthode 6.6 – Calculer une primitive

- Si la fonction f à primitiver s'écrit comme une somme de fonctions usuelles (somme de puissances de x, de $\frac{1}{\sqrt{x}}$, de termes en $\frac{1}{x^n}$, etc.), alors il suffit de primitiver terme à terme.
- Pour calculer une primitive d'une fonction composée f, on procède de la manière suivante :
  1. On repère la forme de la fonction $\left(u' \times u^n, \frac{u'}{u}, u'e^u, \text{etc.}\right)$.
  2. On **identifie** la fonction u et on **calcule** sa dérivée u'.
  3. On compare la forme repérée avec la fonction de départ. Il y a alors deux possibilités :
     - ▷ La forme repérée correspond exactement à la fonction de départ, auquel cas une primitive est directement donnée par la formule du second tableau.
     - ▷ La forme repérée est de la forme $k \times f(x)$, auquel cas une primitive est donnée par la formule du second tableau, **multipliée par** $\frac{1}{k}$.

Exemple 6.7 – Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2 + x - 3$

   f est une fonction polynomiale donc je raisonne terme à terme :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x.$$

2. $f(x) = e^{2x} + e^{-x} + \frac{2}{x}$

   De nouveau, f est la somme de trois termes dont je sais calculer une primitive :

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^{-x} + 2\ln(\lvert x\rvert).$$

3. $f(x) = (2x-1)\left(2x^2 - 2x + 1\right)^3$

   f semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = 2x^2 - 2x + 1$. Puisque $u'(x) = 4x - 2$, alors

$$u'(x)u(x)^3 = (4x-2)\left(2x^2 - 2x + 1\right)^3 = 2f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^4}{4} = \frac{\left(2x^2 - 2x + 1\right)^4}{8}.$$

4. $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2+1$. Puisque $u'(x) = 2x$, alors

   $$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} = f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

   $$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x^2+1}.$$

5. $f(x) = \dfrac{x}{3+x^2}$

   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 3+x^2$. Puisque $u'(x) = 2x$, alors

   $$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{3+x^2} = 2f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

   $$F(x) = \frac{1}{2} \times \ln\left(|u(x)|\right) = \frac{\ln\left(3+x^2\right)}{2}.$$

6. $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x+2}$

   f semble être de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2+2x+2$. Puisque $u'(x) = 2x+2$, alors

   $$u'(x)e^{u(x)} = (2x+2)e^{x^2+2x+2} = 2f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

   $$F(x) = \frac{1}{2} \times e^{u(x)} = \frac{1}{2}e^{x^2+2x+2}.$$

3 – Intégration sur un segment

Définition 6.8 – Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f.

L'**intégrale** de f entre a et b est donnée par le nombre réel $F(b)-F(a)$, noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$:

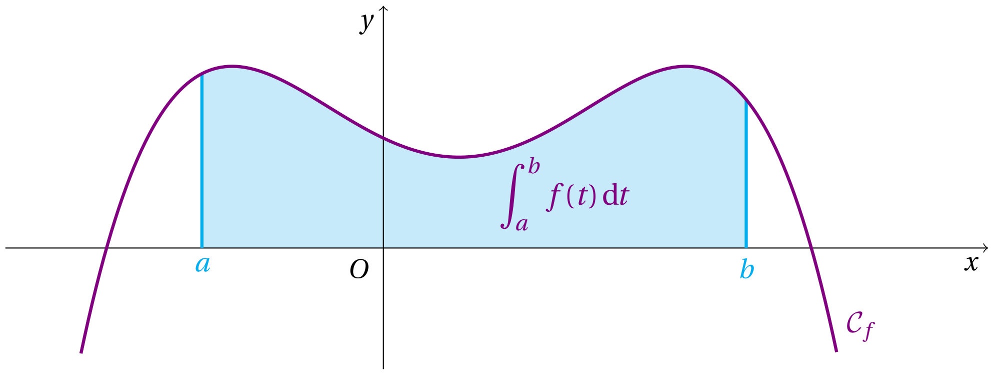
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b)-F(a).$$

Remarque 6.9 – Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Proposition 6.10 – Interprétation géométrique

Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ représente l'aire de la surface comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=a$ et $x=b$.



Exemple 6.11 – Calculer chacune des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^t + e^{-t}\,\mathrm{d}t$

   Je commence par calculer une primitive de la fonction $f(t) = e^t + e^{-t}$.
   La fonction f est une somme de fonctions dont je sais calculer une primitive, donc je raisonne terme à terme :
   $$F(t) = e^t + \left(-e^{-t}\right) = e^t - e^{-t}.$$
   Dès lors,
   $$\int_{-1}^{1} e^t + e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[e^t - e^{-t}\right]_{-1}^{1} = \left(e^1 - e^{-1}\right) - \left(e^{-1} - e^{-(-1)}\right) = 2\left(e^1 - e^{-1}\right) = 2\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

   Je commence par calculer une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}$.
   La fonction f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + x^3$. Puisque $u'(x) = 3x^2$, alors
   $$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3x^2}{1+x^3} = 3f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{3} \times \ln\left(|u(x)|\right) = \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{3}.$$
   Dès lors,
   $$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{3}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{3} - \frac{\ln(1)}{3} = \frac{\ln(2)}{3}.$$

Proposition 6.12 – Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$ un réel. Alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4 – Intégration par parties

Proposition 6.13 – Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 6.14 –

- On peut résumer la formule d'intégration par parties de la manière suivante :

$$\int u'v = \Big[uv\Big] - \int uv'.$$

- La formule d'intégration par parties permet de calculer des intégrales lorsque l'on ne sait pas trouver de primitive de la fonction à intégrer.

Méthode 6.15 – Calculer une intégrale par intégration par parties

Pour calculer une intégrale à l'aide de la formule d'intégration par parties :

1. On commence par identifier les fonctions u' et v. On peut notamment retenir que :
   - Dans une intégrale comportant une fonction logarithme, la fonction v correspond très souvent au facteur du logarithme.
   - Dans une intégrale comportant une fonction exponentielle, la fonction u' correspond souvent au facteur de l'exponentielle.
2. On calcule ensuite u (une primitive de u') et v' (la dérivée de v).
3. On applique la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. On calcule le crochet : $\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.
5. On simplifie le terme à l'intérieur de la deuxième intégrale. La fonction obtenue doit être plus simple que la fonction d'origine : théoriquement il s'agit d'une fonction dont on sait calculer une primitive. Il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale.

Exemple 6.16 – Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$

   Je commence par identifier les fonctions u' et v.
   Puisque mon intégrale comporte une fonction exponentielle, je choisis

$$u'(t) = e^t \qquad \text{et} \qquad v(t) = t.$$

   Je calcule ensuite u (une primitive de u') et v' (la dérivée de v). J'obtiens alors

$$u(t) = e^t \qquad \text{et} \qquad v'(t) = 1.$$

   J'applique ensuite la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 1\times e^t\,\mathrm{d}t$$
$$= \left(1\times e^1 - 0\times e^0\right) - \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = e - \Big[e^t\Big]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

2. $I_2 = \int_1^2 x \ln(x)\,\mathrm{d}x$

 Je commence par identifier les fonctions u' et v.
 Puisque mon intégrale comporte une fonction logarithme, je choisis

$$u'(x) = x \qquad \text{et} \qquad v(x) = \ln(x).$$

 Je calcule ensuite u (une primitive de u') et v' (la dérivée de v). J'obtiens alors

$$u(x) = \frac{x^2}{2} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

 J'applique ensuite la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[u(x)v(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{2^2}{2}\ln(2) - \frac{1^2}{2}\ln(1)\right) - \int_1^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \left(\frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

3. $I_3 = \int_1^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x$

 Je commence par identifier les fonctions u' et v.
 Bien que la fonction dans l'intégrale ne soit pas a priori un produit, je peux ajouter un facteur 1 *afin de faire apparaître un produit et d'appliquer une intégration par parties.*
 Puisque mon intégrale comporte une fonction logarithme, je choisis

$$u'(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad v(x) = \ln(x).$$

 Je calcule ensuite u (une primitive de u') et v' (la dérivée de v). J'obtiens alors

$$u(x) = x \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

 J'applique ensuite la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[u(x)v(x)\Big]_1^3 - \int_1^3 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln(x)\Big]_1^3 - \int_1^3 x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big(3\ln(3) - 1\ln(1)\Big) - \int_1^3 1\,\mathrm{d}x = 3\ln(3) - \Big[x\Big]_1^3 \\ &= 3\ln(3) - (3-1) = 3\ln(3) - 2\end{aligned}$$

5 – Intégrales et inégalités

Proposition 6.17 – Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Alors pour tous réels λ et μ,

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 6.18 – Positivité de l'intégrale

- Si f est continue et positive sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Si f est continue et positive sur $[a,b]$ et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a,b]$.
- Si f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Proposition 6.19 – Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode 6.20 – Étudier une suite d'intégrales

Il est fréquent d'avoir à étudier une suite d'intégrales de la forme $\displaystyle I_n = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Les différentes étapes de l'étude sont généralement guidées par les questions de l'énoncé et les solutions font régulièrement appel aux théorèmes généraux sur les suites vus en première année (théorèmes de comparaison, des gendarmes, de la limite monotone, etc.).

On présente ci-dessous quelques enchaînements classiques de questions :

- On étudie la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence :
  1. On commence par obtenir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n à l'aide d'une intégration par parties.
  2. On utilise ensuite cette relation pour étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (en obtenant une expression de I_n en fonction de n) ou pour calculer les premiers termes de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On vérifie les différentes hypothèses du théorème de la limite monotone pour montrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  1. On commence par étudier la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en calculant la différence $I_{n+1} - I_n$ et en utilisant la linéarité et la croissance de l'intégrale.
  2. On obtient une majoration ou une minoration de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par croissance de l'intégrale.
  3. On conclut grâce au théorème de la limite monotone.
- On montre la convergence et on obtient la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ grâce au théorème des gendarmes :
  1. On commence par obtenir un encadrement de $f_n(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.
  2. On applique ensuite la croissance de l'intégrale pour obtenir un encadrement de I_n.
  3. On utilise enfin le théorème des gendarmes pour démontrer la convergence et obtenir la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il n'est pas rare qu'un même exercice propose l'étude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par plusieurs des méthodes décrites ci-dessus.

Exemple 6.21 – Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.

1. Calculer I_0.

   Tout d'abord, j'explicite I_0 en remplaçant le n par 0 : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 x^0 e^x \, dx = \int_0^1 e^x \, dx$.
   Alors
   $$I_0 = \int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = e - (n+1) I_n.$$
   Je raisonne par intégration par parties pour calculer l'intégrale $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx$.
   Je pose donc
   $$u'(x) = e^x \qquad \text{et} \qquad v(x) = x^{n+1}$$
   et alors
   $$u(x) = e^x \qquad \text{et} \qquad v'(x) = (n+1)x^n.$$
   Puis
   $$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\ &= \left[x^{n+1} e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times e^x \, dx = \left(e - 0\right) - (n+1) \times \int_0^1 x^n e^x \, dx = e - (n+1) I_n \end{aligned}$$
   J'ai donc bien obtenu la relation donnée dans l'énoncé :
   $$I_{n+1} = e - (n+1) I_n.$$

   b) En déduire les valeurs de I_1, I_2 et I_3.
   J'utilise la relation établie à la question précédente pour calculer I_1, I_2 et I_3 :
   $$\begin{aligned} I_1 &= I_{0+1} = e - (0+1) \times I_0 = e - I_0 = e - (e-1) = 1, \\ I_2 &= I_{1+1} = e - (1+1) \times I_1 = e - 2I_1 = e - 2 \times 1 = e - 2, \\ I_3 &= I_{2+1} = e - (2+1) \times I_2 = e - 3I_2 = e - 3 \times (e-2) = e - 3e + 6 = 6 - 2e. \end{aligned}$$

3. a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule la différence entre deux termes consécutifs $I_{n+1} - I_n$:
   $$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx - \int_0^1 x^n e^x \, dx = \int_0^1 \left(x^{n+1} e^x - x^n e^x\right) dx = \int_0^1 (x-1) x^n e^x \, dx.$$
   Or pour tout $x \in [0,1]$, $x - 1 \leqslant 0$, $x^n \geqslant 0$ et $e^x \geqslant 0$. Donc par produit, pour tout $x \in [0,1]$, $(x-1)x^n e^x \leqslant 0$. Alors par croissance de l'intégrale,
   $$\int_0^1 (x-1) x^n e^x \, dx \leqslant 0,$$
   i.e. $I_{n+1} - I_n \leqslant 0 \iff I_{n+1} \leqslant I_n$. Ainsi la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien décroissante.

b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et pour pouvoir appliquer le théorème de la limite monotone, je dois encore montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi minorée.
En effet pour tout $x \in [0,1]$, $x^n \geqslant 0$ et $e^x \geqslant 0$ donc par produit, $x^n e^x \geqslant 0$.
Alors par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 x^n e^x \, \mathrm{d}x \geqslant 0,$$

i.e. $I_n \geqslant 0$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée.
Grâce au théorème de la limite monotone, j'en déduis que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$,

$$x^n \leqslant x^n e^x \leqslant e \times x^n.$$

Je démarre de l'encadrement que je connais pour x, à savoir

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

En appliquant la fonction exponentielle (croissante sur $\mathbb{R}$), j'obtiens alors

$$e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1 \iff 1 \leqslant e^x \leqslant e.$$

Puis en multipliant par $x^n \geqslant 0$, j'obtiens finalement

$$x^n \leqslant x^n e^x \leqslant e \times x^n.$$

b) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n e^x \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e \times x^n \, \mathrm{d}x.$$

Puis je calcule (ou reconnais) chacune des intégrales :

$$\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_0^1 x^n e^x \, \mathrm{d}x = I_n$$

$$\int_0^1 e \times x^n \, \mathrm{d}x = e \times \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = e \times \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = e \times \left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{e}{n+1}$$

Finalement j'ai bien montré que

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

J'applique maintenant le théorème des gendarmes. Grâce à l'encadrement précédent et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, alors je peux conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

II – Intégrales généralisées

Définition 6.22 – Soient a un réel et f une fonction continue sur $[a,+\infty[$.

- On dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^M f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite **finie** lorsque M tend vers $+\infty$.
  Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

Définition 6.23 – Déterminer la **nature** d'une intégrale impropre consiste à déterminer si cette intégrale impropre est **convergente** ou **divergente**.

Méthode 6.24 – Déterminer la nature d'une intégrale du type $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Pour déterminer la nature d'une intégrale du type $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, et la calculer en cas de convergence :

1. On fixe un réel $M \geqslant a$ et on calcule l'intégrale sur le segment $[a,M]$: $\displaystyle\int_a^M f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On calcule ensuite la limite lorsque M tend vers $+\infty$: $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(t)\,\mathrm{d}t$.
   - Si le résultat est infini, alors l'intégrale diverge.
   - Si le résultat est fini, alors l'intégrale converge et

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 6.25 –

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
  Je fixe $M \geqslant 2$ et calcule l'intégrale $\displaystyle\int_2^M \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$:
$$\int_2^M \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^M = -\frac{1}{M}+\frac{1}{2}.$$
  Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{M}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc l'intégrale impropre converge et
$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
  Je fixe $M \geqslant 0$ et calcule l'intégrale $\displaystyle\int_0^M e^{-t}\,\mathrm{d}t$:
$$\int_0^M e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^M = -e^{-M}+e^0 = 1-e^{-M}.$$
  Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} 1-e^{-M} = 1-0 = 1$ donc l'intégrale impropre converge et
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Définition 6.26 – Soient b un réel et f une fonction continue sur $]-\infty, b]$.

- On dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{m}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite **finie** lorsque m tend vers $-\infty$.
  Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

Exemple 6.27 –

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
  Je fixe $m \leqslant 0$ et calcule l'intégrale $\displaystyle\int_{m}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t$:
  $$\int_{m}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t}\Big]_{m}^{0} = -e^{0} + e^{-m} = e^{-m} - 1.$$
  Or $\displaystyle\lim_{m\to-\infty} e^{-m} = +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^{2t}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
  Je fixe $m \leqslant 1$ et calcule l'intégrale $\displaystyle\int_{m}^{1} e^{2t}\,\mathrm{d}t$:
  $$\int_{m}^{1} e^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_{m}^{1} = \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}e^{2m}.$$
  Or $\displaystyle\lim_{m\to-\infty} \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}e^{2m} = \frac{1}{2}e^{2}$ donc l'intégrale converge et
  $$\int_{-\infty}^{1} e^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{2}.$$

Définition 6.28 – Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- On dit que l'**intégrale généralisée** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** lorsque pour un réel $c \in \mathbb{R}$ choisi arbitrairement, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
  Alors selon la relation de Chasles, on note $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

Méthode 6.29 – Déterminer la nature d'une intégrale du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Pour déterminer la nature d'une intégrale du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, et la calculer en cas de convergence :

1. On fixe une valeur de c bien choisie :
   - Si la fonction est définie « par morceaux », on choisit une frontière.
   - Sinon $c = 0$ est souvent un choix pertinent.

2. On étudie séparément $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$:
   - Si les deux intégrales $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge également et $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   - Si l'une des deux intégrales diverge, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge également.

Remarque 6.30 – En cas de convergence, la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du réel c choisi.

Exemple 6.31 – Étudier la nature de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t$.

Je commence par calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(t) = \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}$.

f semble être de la forme $\frac{u'}{u^3}$ avec $u(t) = 1+e^t$. Puisque $u'(t) = e^t$, alors $\frac{u'(t)}{u(t)^3} = \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3} = f(t)$.

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t) = -\frac{1}{2u(t)^2} = -\frac{1}{2\left(1+e^t\right)^2}.$$

Je peux maintenant étudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour cela, je choisis de couper en $c=0$ et j'étudie la nature des deux intégrales $\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Je fixe $M \geqslant 0$ et calcule l'intégrale $\int_0^M \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t$:

$$\int_0^M \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\left(1+e^t\right)^2}\right]_0^M = -\frac{1}{2\left(1+e^M\right)^2} + \frac{1}{2\left(1+e^0\right)^2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2\left(1+e^M\right)^2}.$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty} \frac{1}{8} - \frac{1}{2\left(1+e^M\right)^2} = \frac{1}{8}$ donc l'intégrale impropre converge et $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}$.

Je fixe désormais $m \leqslant 0$ et calcule l'intégrale $\int_m^0 \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t$:

$$\int_m^0 \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\left(1+e^t\right)^2}\right]_m^0 = -\frac{1}{2\left(1+e^0\right)^2} + \frac{1}{2\left(1+e^m\right)^2} = \frac{1}{2\left(1+e^m\right)^2} - \frac{1}{8}.$$

Or $\lim\limits_{m\to-\infty} \frac{1}{2\left(1+e^m\right)^2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ donc l'intégrale impropre converge et $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$.

Finalement l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t$ converge et par la relation de Chasles,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Remarque 6.32 – Toutes les propriétés vues précédemment pour les intégrales définies sur un segment (relation de Chasles, linéarité, positivité, croissance, etc.) restent valables pour les intégrales impropres **à condition que les intégrales manipulées convergent**.