EXERCICES — CHAPITRE 6

Exercice 1 (⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n + 4.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n > 0$.

Exercice 2 (⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5 - 4u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Exercice 3 (⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 < u_n < 1$.

Exercice 4 (⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leqslant 4$.

Exercice 5 (⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 < u_n \leqslant 3$.

Exercice 6 (⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2^n + n + 1$.

Exercice 7 (⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Exercice 8 (⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} \leqslant u_n$.

Exercice 9 (⋆⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 4$, $\quad u_n \geqslant 0$.
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 5$, $\quad u_n \geqslant n - 3$.

Exercice 10 (⋆⋆⋆) – Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n > n.$$

Exercice 11 (⋆⋆) – Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 12 (⋆⋆⋆) – Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 13 (⋆⋆) – Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 14 (⋆⋆⋆) –

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$