

3 | Séries numériques

I – Convergence

1 – Définitions

Définition 3.1 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La série de terme général u_n est notée $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou parfois simplement $\sum u_n$.

Le réel $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est appelé **somme partielle d'indice** n de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Remarque 3.2 – Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0 , la série de terme général u_n n'est également définie qu'à partir de n_0 , ce que l'on note $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

La suite des **sommes partielles** est alors notée $(S_n)_{n \geq n_0}$, avec $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$.

Exemple 3.3 –

1. On considère la série $\sum_{n \geq 0} n$. Son **terme général** est donné par

Les premières **sommes partielles** sont données par

De manière générale, je peux montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**. Son terme général est donné par

Les premières sommes partielles sont données par

Il n'existe pas de formule simple pour exprimer la somme partielle S_n d'indice n .

2 – Séries convergentes

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est en réalité une suite. On peut donc s'intéresser à sa convergence.

Définition 3.4 – Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique et S_n sa somme partielle d'indice n .

- Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **convergente**.

La limite S de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors appelée **somme de la série** $\sum_{n \geq 0} u_n$ et on note

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

- Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **divergente**.
- Déterminer la **nature** d'une série consiste à déterminer si celle-ci est convergente ou divergente.

Remarque 3.5 –

- L'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série **converge**! Alors que l'écriture $\sum_{n \geq 0} u_n$ a toujours un sens, puisque celle-ci désigne une suite.
- Tout comme on ne confond pas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, le terme u_n d'indice n de cette suite et sa limite éventuelle ℓ , il convient de ne pas confondre la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ d'indice n et la somme éventuelle $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ de la série.
- Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies (puisque en réalité ce sont des limites, il faut donc toujours s'assurer de la convergence). C'est pourquoi on calcule (*presque*) toujours les sommes partielles, qui sont des sommes finies, avant de passer à la limite.

Exemple 3.6 –

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0$. Alors la somme partielle d'indice n est donnée par
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1$. Alors la somme partielle d'indice n est donnée par

3 – Premiers exemples

1. On considère la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Son terme général est donné par

La **somme partielle d'indice** n est

La série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

Or $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =$

La série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc **convergente** et $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k =$

2. On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

3. La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

II – Sommes de séries

1 – Opérations sur les séries

Les opérations sur les sommes finies se transposent, sous certaines conditions, aux séries.

Théorème 3.7

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et λ un réel non nul.

- Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \lambda u_n$ sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles sont ou bien toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux divergentes). Si elles sont convergentes, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda \times u_k) = \lambda \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right).$$

- Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont toutes les deux convergentes, alors la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est également convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$



ATTENTION ! La réciproque du second point n'est pas vraie ! La convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ n'assure pas du tout la convergence des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$.

Exemple 3.8 – Si l'on pose pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$, alors la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge alors que ni $\sum_{n \geq 0} u_n$ ni $\sum_{n \geq 0} v_n$ ne convergent (voir les exemples précédents).

2 – Suites et séries

Théorème 3.9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge. Dès lors, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, en notant ℓ sa limite, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0.$$

Théorème 3.10 – Condition nécessaire de convergence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.



ATTENTION ! On peut très bien avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ sans que $\sum_{n \geq 0} u_n$ ne converge !
Par exemple, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Corollaire 3.11

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Exemple 3.12 – Les séries $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$, $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{2^n - 3^n}$ sont divergentes.

3 – Séries géométriques

Définition 3.13 – Pour tout réel q , la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ s'appelle la **série géométrique** de raison q .

On a montré précédemment que la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge et que sa somme vaut 2. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 3.14

Soit $q \in \mathbb{R}$ un réel. La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$, i.e. $q \in]-1, 1[$.

Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Exemple 3.15 – Déterminer si les séries $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ et $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ convergent et le cas échéant, donner la somme de la série.



Méthode 3.16 – Étudier la nature d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ et/ou calculer sa somme éventuelle

- On regarde si le terme général tend vers 0 :
 - Si la réponse est **non**, la série est **divergente**.
 - Si la réponse est oui, on ne peut pas conclure, il faut poursuivre l'étude.
- On essaie d'exprimer la série à l'aide d'une série géométrique.
- Si ce n'est pas possible, on poursuit l'étude en écrivant la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On regarde si on peut simplifier S_n , en utilisant un changement d'indice, une mise en facteur ou un "télescopage des termes". Puis on conclut à l'aide des résultats de convergence des suites.