

# 4 Variables aléatoires discrètes

## I – Généralités sur les variables aléatoires

### 1 – Espace probabilisé

Étant donnée une expérience aléatoire, pour calculer des probabilités :

1. On commence par déterminer l'univers  $\Omega$  de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire.

Cet ensemble peut être **fini** ou **infini** :

- Si l'expérience consiste à lancer un dé à six faces et observer le numéro obtenu, alors  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ .
  - Si l'expérience consiste à lancer une pièce jusqu'à obtention d'un premier PILE, alors  $\Omega = \mathbb{N}^*$ .
  - Si l'expérience consiste à observer la durée de vie d'une ampoule (en minutes), alors  $\Omega = \mathbb{R}_+$ .
  - Etc.
2. On détermine ensuite une probabilité sur  $\Omega$ , c'est-à-dire une application  $P$  qui, à un événement de  $\Omega$  (*i.e.* un sous-ensemble de  $\Omega$ ) associe un réel, compris entre 0 et 1, qui mesure le "degré de vraisemblance" de cet événement.

On débute par rappeler quelques propriétés, vues en première année dans le cas d'un univers fini, et qui restent vraies dans le cas d'un univers infini.

#### Proposition 4.1

Soient  $\Omega$  un espace probabilisé et  $A$  et  $B$  deux événements. Alors

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Si  $A \subset B$ , alors  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles (*i.e.*  $A \cap B = \emptyset$ ), alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

**Exemple 4.2** – Tout au long de ce chapitre, on s'appuie sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. On tire deux boules successivement et avec remise dans une urne contenant trois boules numérotées de 1 à 3. On note  $X$  la somme des deux numéros obtenus.  $X$  est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs 2, 3, 4, 5 ou 6, donc son support est donné par  $X(\Omega) = \llbracket 2, 6 \rrbracket$ .
2. On lance un dé équilibré et on note  $X$  le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un 6.  $X$  est une variable aléatoire qui peut prendre toutes les valeurs entières non nulles, puisqu'il faut au moins un lancer pour obtenir le premier 6 et qu'il n'y a pas de limite théorique au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir le premier 6. Autrement dit, le support de  $X$  est donné par  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

### 2 – Événements associés à une variable aléatoire

**Définition 4.3** – Soient  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$  et  $x \in \mathbb{R}$  un réel. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des issues de l'univers dont l'image par la variable aléatoire  $X$  est  $x$ .

De la même manière, on définit

$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\},$$

$$[X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$

$$[X \geq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\},$$

$$[X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}.$$

Si  $x$  et  $y$  sont deux réels tels que  $x < y$ , alors on note

$$[x \leq X \leq y] = \{\omega \in \Omega \mid x \leq X(\omega) \leq y\}.$$

Plus généralement, si  $I$  désigne une partie de  $\mathbb{R}$ , on note

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}.$$

**Exemple 4.4** – On reprend les deux exemples de l'Exemple 4.2.

1. Calculer  $P([X = 2])$ .

2. Calculer  $P([X = 1])$  et  $P([X \leq 2])$ .

#### Proposition 4.5

Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ . Alors  $\{[X = x] \mid x \in X(\Omega)\}$ , ensemble des événements  $[X = x]$  pour toutes les valeurs  $x$  du support  $X(\Omega)$ , forme un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1.$$

#### Remarque 4.6 –

- Lorsque le support  $X(\Omega)$  est fini, la somme précédente est une somme finie. Dans ce cas, le support se réécrit  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et donc

$$\sum_{k=1}^n P(X = x_k) = 1.$$

- Lorsque le support  $X(\Omega)$  est infini dénombrable, la somme précédente est la somme d'une série convergente. Dans ce cas, le support se réécrit  $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = x_k) = 1.$$

**Exemple 4.7** – On reprend les deux exemples de l'Exemple 4.2.

1. Un système complet d'événements est donné par
2. Un système complet d'événements est donné par

## II – Variables aléatoires discrètes

### 1 – Définition

**Définition 4.8** – Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $\Omega$ . On dit que :

- $X$  est une **variable aléatoire discrète** si son support  $X(\Omega)$  est un ensemble discret.
- $X$  est une **variable aléatoire discrète finie** si son support  $X(\Omega)$  est un ensemble fini.
- $X$  est une **variable aléatoire discrète infinie** si son support  $X(\Omega)$  est un ensemble infini dénombrable.

**Exemple 4.9** – Décrire la variable aléatoire  $X$  dans les deux exemples de l'Exemple 4.2.

- 1.
- 2.

### 2 – Loi d'une variable aléatoire discrète

**Définition 4.10** – Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ . On appelle **loi** de la variable aléatoire  $X$ , la donnée de toutes les probabilités  $P(X = x)$  pour tous les réels  $x \in X(\Omega)$ .



**Méthode 4.11** – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

1. On détermine le support  $X(\Omega)$ , *i.e.* l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .
2. On calcule la probabilité  $P(X = x)$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ .

Lorsque  $X(\Omega)$  est fini, on résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec sur la première ligne l'ensemble des valeurs prises par  $X$  et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

**Exemple 4.12** – Déterminer la loi de  $X$  dans les deux exemples de l'Exemple 4.2.

- 1.

2.

### 3 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

**Définition 4.13** – Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ . On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire  $X$  et on note  $F_X$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Les valeurs de la fonction de répartition sont des probabilités donc **toujours** comprises entre 0 et 1.

#### Proposition 4.14

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. On note le support  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$  avec  $x_1 < x_2 < \dots$ .

Alors

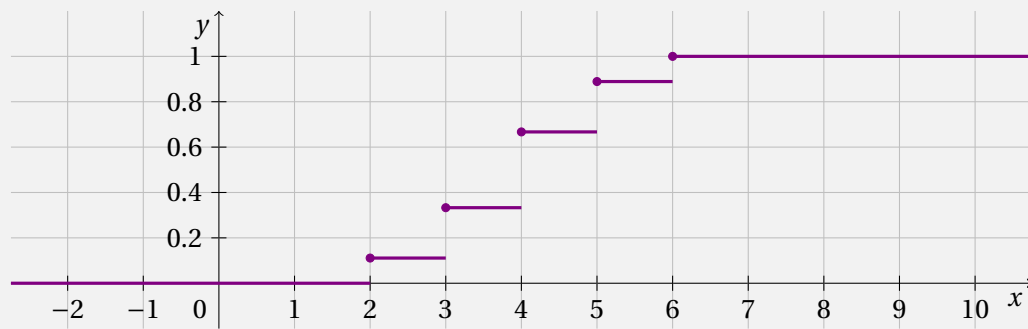
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1, \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_k) & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 1 & \text{si } x \geq \max_{k \in \mathbb{N}} x_k. \end{cases}$$

En particulier  $F_X$  est constante sur chaque intervalle  $[x_k, x_{k+1}[$ .

**Exemple 4.15** – Calculer la fonction de répartition de  $X$  dans les deux exemples de l'Exemple 4.2.

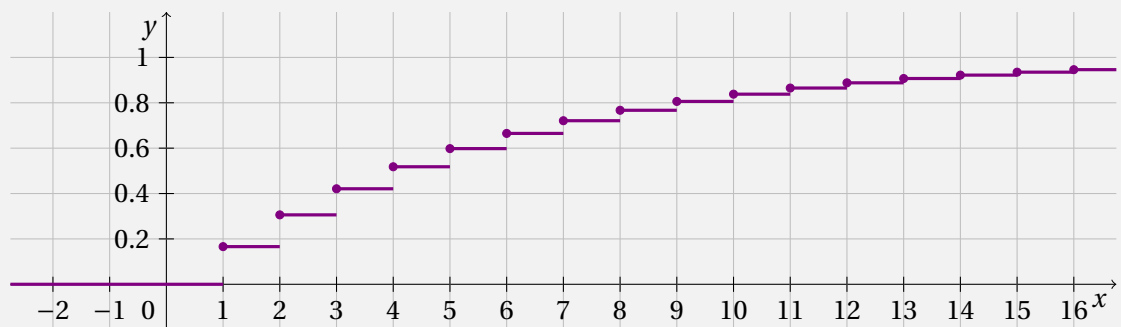
1.

Et voici le tracé de la fonction de répartition :



2.

Et voici le tracé de la fonction de répartition :



#### Proposition 4.16

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé  $\Omega$ . On suppose que  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ , c'est-à-dire que toutes les valeurs prises par  $X$  sont entières. Alors

$$\forall k \in X(\Omega), \quad F_X(k) = F_X(k-1) + P(X=k) \iff P(X=k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

**Remarque 4.17** – La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  détermine parfaitement la loi de  $X$ . En effet, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

## III – Moments d'une variable aléatoire discrète

### 1 – Espérance

**Définition 4.18** – Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $\Omega$ .

- Si  $X$  est une variable aléatoire discrète **finie**, de support  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , alors  $X$  admet une **espérance**, notée  $E(X)$  et définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

- Si  $X$  est une variable aléatoire discrète **infinie**, de support  $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , et que la série de terme général  $x_k P(X = x_k)$  converge, alors  $X$  admet une **espérance**, notée  $E(X)$  et définie par

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X = x_k).$$

**Remarque 4.19** – Il est important de retenir que l'espérance correspond à une notion de moyenne :  $E(X)$  est la valeur que peut prendre  $X$  "en moyenne".

**Exemple 4.20** – Montrer que la variable aléatoire  $X$  du premier exemple de l'Exemple 4.2 admet une espérance et la calculer.

**Remarque 4.21** – Concernant la variable aléatoire  $X$  du second exemple précédent, on peut montrer (*hors-programme*) que la série  $\sum_{n \geq 1} n P(X = n) = \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$  converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = 6.$$

Autrement dit, la variable aléatoire  $X$  admet une espérance et  $E(X) = 6$ .

#### Proposition 4.22 – Linéarité de l'espérance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes définies sur  $\Omega$  qui admettent une espérance et  $a$  et  $b$  deux réels. Alors  $X + Y$  et  $aX + b$  admettent une espérance et

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b.$$

**Exemple 4.23** – Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle  $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ . On considère la variable aléatoire  $Y$  définie par  $Y = 3X - 5$ . Déterminer l'espérance de  $Y$ .

**Théorème 4.24 – Théorème de transfert**

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète **infinie** définie sur  $\Omega$  et  $g$  une application **positive** de  $X(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}_+$ . On note le support  $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Alors la variable aléatoire  $g(X)$  admet une espérance si et seulement si la série de terme général  $g(x_k)P(X = x_k)$  converge. Alors

$$E(g(X)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} g(x_k)P(X = x_k).$$

**Remarque 4.25 –**

- Si  $X$  est une variable aléatoire discrète finie, alors le support est un ensemble fini et la même formule s'applique : l'espérance de  $g(X)$  existe et la somme intervenant dans sa définition est une somme finie. En outre, l'hypothèse de positivité de la fonction  $g$  n'est même plus nécessaire dans ce cas.
- Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de  $g(X)$ , il est inutile de déterminer la loi de  $g(X)$  : il suffit de connaître la loi de  $X$ .

**Exemple 4.26 –** On considère la variable aléatoire  $X$  dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$k$	-3	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

Calculer  $E(X^2)$  et  $E(X^3)$ .

**2 – Variance**

**Définition 4.27 –** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $\Omega$ .

- Si  $X$  est une variable aléatoire discrète **finie**, de support  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , alors  $X$  admet une **variance**, notée  $V(X)$  et définie par

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i).$$

- Si  $X$  est une variable aléatoire discrète **infinie**, de support  $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , et que la série de terme général  $(x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$  converge, alors  $X$  admet une **variance**, notée  $V(X)$  et définie par

$$V(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k).$$

**Remarque 4.28 –**

- Sous réserve d'existence,  $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ .
- La variance, si elle existe, est un réel **positif** ou **nul**.
- La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

**Théorème 4.29 – Formule de König-Huygens**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $\Omega$ . La variable aléatoire  $X$  admet une variance si et seulement si la variable aléatoire  $X^2$  admet une espérance. Dans ce cas,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

**Méthode 4.30 – Répondre à la question "X admet-elle une variance? Si oui, la calculer."**

Une variable aléatoire finie admet toujours une variance. Pour la calculer, on calcule  $E(X)$  et  $E(X^2)$  (grâce au théorème de transfert) puis on applique la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Pour une variable aléatoire infinie :

- Si  $X$  n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.
- Si  $X$  admet une espérance, il faut regarder si  $E(X^2)$  existe (grâce au théorème de transfert).
  - ▷ Si non, alors  $X$  n'admet pas de variance.
  - ▷ Si oui, alors on peut calculer la variance grâce à la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

**Exemple 4.31 –** Montrer que la variable aléatoire  $X$  du premier exemple de l'Exemple 4.2 admet une variance et la calculer.

**Remarque 4.32 –** Concernant la variable aléatoire  $X$  du second exemple, on peut encore montrer

(hors-programme) que la série  $\sum_{n \geq 1} n^2 P(X = n) = \sum_{n \geq 1} n^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$  converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = 66.$$

Autrement dit,  $X^2$  admet une espérance et  $E(X^2) = 66$ .

En conséquence, la variable aléatoire  $X$  admet une variance et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 66 - 6^2 = 66 - 36 = 30.$$



**Proposition 4.33**

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète admettant une variance et  $a$  et  $b$  deux réels.

Alors  $aX + b$  admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

En particulier

$$V(X + b) = V(X).$$

**Remarque 4.34** – Contrairement à l'espérance, la variance n'est **PAS** linéaire.

**Exemple 4.35** – Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle  $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ .

On considère la variable aléatoire  $Y$  définie par  $Y = 3X - 5$ . Déterminer la variance de  $Y$ .

**Définition 4.36** – Soit  $X$  une variable aléatoire discrète admettant une variance.

On appelle **écart-type** de  $X$  et on note  $\sigma(X)$  le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

## IV – Lois discrètes usuelles

### 1 – Rappel de première année : lois discrètes finies usuelles

Loi	Support	Probabilité	Situation modélisée	Espérance Variance
Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	expérience dont toutes les issues ont la même probabilité	$E(X) = \frac{n+1}{2}$ $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	expérience qui n'a que deux issues possibles : « succès » de probabilité $p$ et « échec » de probabilité $1 - p$	$E(X) = p$ $V(X) = p(1 - p)$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ où $q = 1 - p$	répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes où $X$ compte le nombre de succès	$E(X) = np$ $V(X) = np(1 - p)$

Il s'agit d'un tableau récapitulatif des trois lois discrètes finies étudiées en première année.

Tous les détails se trouvent dans le Chapitre 10 de l'an dernier.

## 2 – Loi géométrique

**Définition 4.37** – Une variable aléatoire  $X$  suit une **loi géométrique** de paramètre  $p \in ]0, 1[$  lorsque son support vaut  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

**Remarque 4.38** –

- Une variable aléatoire  $X$  suit une loi géométrique lorsque :
  1. On réalise une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$ .
  2. On note  $X$  le rang de l'épreuve qui a amené le premier succès.  
 $X$  est considérée comme "le temps d'attente du premier succès".
- La somme des probabilités vaut bien  $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$ .

**Exemple 4.39** – Montrer que la variable aléatoire  $X$  du second exemple de l'Exemple 4.2 suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

### Proposition 4.40

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .  
 Alors  $X$  admet une espérance et une variance qui sont données par

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**Exemple 4.41** – En sachant que la variable aléatoire  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p = \frac{1}{6}$ , retrouver son espérance et sa variance.

### 3 – Loi de Poisson

**Définition 4.42** – Soit  $\lambda$  un réel strictement positif. Une variable aléatoire  $X$  suit une **loi de Poisson** de paramètre  $\lambda$  lorsque son support vaut  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ .

**Remarque 4.43** –

- La loi de Poisson est parfois appelée **loi des événements rares**. Elle sert par exemple à modéliser :
  - ▷ le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps donné,
  - ▷ le nombre de véhicules franchissant un poste de péage dans un intervalle de temps donné,
  - ▷ le nombre de fautes de frappe dans les pages d'un cours de maths, etc.
- La somme des probabilités vaut bien  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$  (*hors-programme*).

#### Proposition 4.44

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .  
Alors  $X$  admet une espérance et une variance qui sont données par

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$