ECRICOME 2022

Exercice 1 –

Partie A – Calcul matriciel et suites

1. a) Je calcule le produit $P \times Q$:

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1-1 & 1-1 \\ 1-2+1 & 1+1+1 & 1+1-2 \\ 1-1 & 1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I.$$

b) Comme $P \times Q = 3I$, alors en particulier $P \times \left(\frac{1}{3}Q\right) = I$.

Donc la matrice P est inversible et son inverse est donnée par $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule le produit MX_n :

$$MX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + 2c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{4} + \frac{c_n}{4} \\ \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{4} \\ \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{4} + \frac{c_n}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Grâce aux formules de récurrences des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
je retrouve bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = M^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 X_0 = I \times X_0 = X_0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = M \times X_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_0.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0.$$

3. a) Je calcule chaque matrice puis le produit :

$$4M - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 4M - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\big(4M - I\big)\big(4M - 4I\big) = \begin{pmatrix} -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \\ -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \\ -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que la matrice $\big(4M - I\big)\big(4M - 4I\big)$ est la matrice nulle.

b) Comme $(4M-I)(4M-4I)$ est la matrice nulle, alors $(4X-1)(4X-4)$ est un polynôme annulateur de la matrice M. Ainsi les valeurs propres possibles pour M sont parmi les racines de ce polynôme. Je cherche donc les racines :

$$(4X-1)(4X-4)=0 \iff 4X-1=0 \text{ ou } 4X-4=0 \iff 4X=1 \text{ ou } 4X=4$$
$$\iff X=\frac{1}{4} \text{ ou } X=\frac{4}{4}=1.$$

Ainsi les valeurs propres possibles pour la matrice M sont $\frac{1}{4}$ et 1.

4. a) Je cherche la matrice D telle que $M=PDP^{-1}$. Comme P est inversible, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, j'obtiens que

$$P^{-1}\times M\times P=P^{-1}\times PDP^{-1}\times P=I\times D\times I=D, \qquad \textit{i.e.} \quad D=P^{-1}\times M\times P.$$

Ainsi je calcule les produits :

$$MP=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2+1+1&2-1&1-1\\1+2+1&1-2&2-1\\1+1+2&1-1&1-2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&1&0\\4&-1&1\\4&0&-1\end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}\times MP=\frac{1}{3}Q\times MP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&1&0\\4&-1&1\\4&0&-1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}4+4+4&1-1&1-1\\8-4-4&2+1&-1+1\\4+4-8&1-1&1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Alors la matrice D est bien diagonale et $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

b) Puisque $M=PDP^{-1}$, alors par récurrence, j'obtiens que $M^n=PD^nP^{-1}$.

c) Comme la matrice D est diagonale, alors pour tout entier $n\in\mathbb{N}$,

$$D^n=\begin{pmatrix}1^n&0&0\\0&\left(\frac{1}{4}\right)^n&0\\0&0&\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\left(\frac{1}{4}\right)^n&0\\0&0&\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}.$$

Puis je calcule les produits :

$$PD^n=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\left(\frac{1}{4}\right)^n&0\\0&0&\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\left(\frac{1}{4}\right)^n&0\\1&-\left(\frac{1}{4}\right)^n&\left(\frac{1}{4}\right)^n\\1&0&-\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}$$

et

$$PD^n \times P^{-1} = PD^n \times \frac{1}{3}Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré que la matrice M^n est donnée par

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

d) D'après la question **2.b)**, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = X_n = M^n X_0 = M^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$a_n = \frac{1}{3}\times\left(1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\times\left(1+2\times\frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{3}\times\left(1+\frac{2}{4^n}\right),$$

$$b_n = \frac{1}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

e) Comme $4 > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{4^n} = 0$.
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}(1+0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

5. Voici le script complété.

```
n=0
a=1; b=0
while a>0.0334 and b<0.333
    n=n+1
    a=1/3*(1+(2/4∧n))
    b=1/3*(1-(1/4∧n))
end
disp(n)
```

Partie B – Application à un jeu de hasard

6. Selon l'énoncé, au début du jeu, le pion est sur la case 0. Donc directement,

$$P(A_0) = 1, \qquad P(B_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(C_0) = 0,$$

ce qui corrobore bien le fait que A_0 est l'événement certain et que B_0 et C_0 sont des événements impossibles, comme annoncé en fin d'énoncé.
Puis le joueur avance son pion de 0, 1, 2 ou 3 cases en fonction du chiffre tiré de manière équiprobable. Je remarque que s'il tire 0 ou 3, le pion ne bouge pas ou avance de trois cases, ce qui le ramène à la même case.
Donc à l'issue du premier coup, le joueur sera encore sur la case 0 avec probabilité $\frac{2}{4}$, sur la case 1 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et sur la case 2 avec probabilité $\frac{1}{4}$. Ainsi j'ai montré que

$$P(A_1) = P\big(\{0,3\}\big) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad P(B_0) = P\big(\{1\}\big) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(C_0) = P\big(\{1\}\big) = \frac{1}{4}.$$

7. a) Pour les mêmes raisons qu'au premier coup, si à l'issue du n-ième coup, le pion est sur la case 0, alors il y sera encore à l'issue du coup suivant si le joueur a tiré 0 (ne bouge pas) ou 3 (fait un tour complet). Il s'agit de deux possibilités sur quatre dans une situation d'équiprobabilité, donc

$$P_{A_n}\big(A_{n+1}\big) = P\big(\{0,3\}\big) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Si à l'issue du n-ième coup, le pion est sur la case 1, alors il sera sur la case 0 à l'issue du coup suivant si le joueur a tiré 2. Donc

$$P_{B_n}\big(A_{n+1}\big) = P\big(\{2\}\big) = \frac{1}{4}.$$

Et si à l'issue du n-ième coup, le pion est sur la case 2, alors il sera sur la case 0 à l'issue du coup suivant si le joueur a tiré 1. Donc

$$P_{C_n}\big(A_{n+1}\big) = P\big(\{1\}\big) = \frac{1}{4}.$$

b) D'après la formule des probabilités totales, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big\{A_n, B_n, C_n\big\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} P\big(A_{n+1}\big) &= P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(C_n \cap A_{n+1}\big) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}\big(A_{n+1}\big) + P(B_n) \times P_{B_n}\big(A_{n+1}\big) + P(C_n) \times P_{C_n}\big(A_{n+1}\big) \\ &= P(A_n) \times \frac{1}{2} + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Je peux montrer exactement de la même façon que

$$P\big(B_{n+1}\big) = P(A_n) \times \frac{1}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{2} + P(C_n) \times \frac{1}{4}$$

et

$$P\big(C_{n+1}\big) = P(A_n) \times \frac{1}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times \frac{1}{2}.$$

c) Les formules de récurrences des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les mêmes que celles vérifiées par les suites $\big(P(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(P(B_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(P(C_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Aussi, les termes initiaux a_0, b_0 et c_0 correspondent aux probabilités initiales $P(A_0)$, $P(B_0)$ et $P(C_0) = 0$.

Donc ces suites possèdent la même définition, *i.e.* pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$P(A_n) = a_n = \frac{1}{3}\times\left(1+\frac{2}{4^n}\right), \qquad P(B_n) = b_n = \frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad P(C_n) = c_n = \frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

8. J'ai montré à la question **4.e)** que la limite de chacune des trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut $\frac{1}{3}$. En terme de probabilités, cela signifie qu'après un grand nombre de coups, la probabilité d'être sur n'importe quelle case du plateau est proche de $\frac{1}{3}$.
La situation tend à se rapprocher d'une situation d'équiprobabilité.

Exercice 2 –

1. a) Je raisonne par composition puis par produit :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-1} 1+x = \quad 0\\ \lim\limits_{X\to0} \ln(X) = -\infty\end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-1} x = \ -1\\ \lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty\end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to-1} x\ln(1+x) = +\infty.$$

Graphiquement, je peux en déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.

b) De même, par composition puis par produit :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x = +\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty\end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty\end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln(1+x) = +\infty.$$

c) Pour étudier une éventuelle branche parabolique, il me faut étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$.
Or $\dfrac{f(x)}{x} = \ln(1+x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet bien une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, de direction (Oy).

2. a) La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$. f est de la forme $f = u\times v$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+x)$. Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{w'(x)}{w(x)}$, avec $w(x) = 1+x$.
Comme $w'(x) = 1$, alors $v'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et donc pour tout $x \in\,]-1,+\infty[$,

$$f'(x) = x\times\frac{1}{1+x} + 1\times\ln(1+x) = \frac{x}{1+x} + \ln(1+x).$$

b) Je dérive de nouveau f' pour trouver f''. La fonction f' est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
f' est une somme donc je dérive terme à terme :

- Je connais déjà la dérivée de $v(x) = \ln(1+x)$, qui est $v'(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
- La dérivée de $u(x) = \dfrac{x}{1+x}$ est donnée par $u'(x) = \dfrac{1\times(1+x) - x\times1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Alors pour tout $x \in\,]-1,+\infty[$, j'ai bien montré que

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1+(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{x+2}{(1+x)^2}.$$

c) Pour étudier les variations de f', il me faut étudier le signe de la dérivée f''.
Or pour $x \in\,]-1,+\infty[$, $x \geqslant -1 \iff x+2 \geqslant 1 > 0$. Et comme le dénominateur est un carré, il est positif. Ainsi pour tout $x \in\,]-1,+\infty[$, $f''(x) \geqslant 0$ donc la fonction f' est croissante sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

3. a) Je calcule $f'(0)$ en remplaçant x par 0 dans la formule obtenue en question **2.a)** :

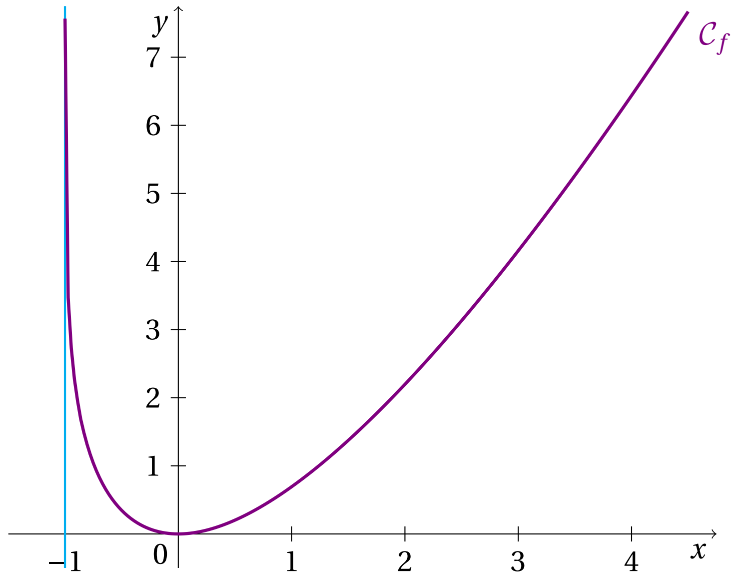
$$f'(0) = \frac{0}{1+0} + \ln(1+0) = 0 + \ln(1) = 0.$$

Comme f' est croissante et que $f'(0) = 0$, alors je peux en déduire que $f'(x)$ est négatif pour $x \leqslant 0$ et positif pour $x \geqslant 0$.

b) D'après la question précédente, je connais le signe de la dérivée f'.
Je peux donc déduire les variations de la fonction f. Voici le tableau de variation de f, complété avec les limites trouvées en question **1.** et $f(0) = 0 \times \ln(1+0) = 0$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Grâce au tableau de variation et à l'asymptote $x = -1$, je peux tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Je note qu'en 0, la courbe passe par l'axe des abscisses et la tangente est horizontale.



5. a) Je cherche à calculer $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$. Je pose

$$u'(x) = x \qquad u(x) = \frac{x^2}{2}$$
$$v(x) = \ln(1+x) \qquad v'(x) = \frac{1}{1+x}$$

Alors par intégration par parties,

$$\int_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1^2}{2}\ln(1+1) - \frac{0^2}{2}\ln(1+0) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

J'ai bien montré que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

b) Pour vérifier cette égalité, il me suffit de partir du terme de droite puis de tout mettre au même dénominateur :

$$x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}.$$

c) En réécrivant l'intégrande selon l'expression trouvée précédemment puis en primitivant terme à terme, j'obtiens que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{1^2}{2}-1+\ln(1+1)\right)-\left(\frac{0^2}{2}-0+\ln(1+0)\right)=\frac{1}{2}-1+\ln(2)-0=\ln(2)-\frac{1}{2}.$$

d) Finalement, en combinant les résultats des questions précédentes,

$$I=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{\ln(2)}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

6. Voici le script complété.

```
function y=f(x)
    y=x∧n*log(1+x)
endfunction
for n=1:50
    x=linspace(0,1,100)
    fplot2d(x,f)
end
```

7. a) Graphiquement, l'intégrale I_n représente l'aire sous la courbe de la fonction f_n, au-dessus de l'axe des abscisses, entre les droites verticales d'équations $x=0$ et $x=1$.

b) À l'aide du graphique proposé, je conjecture que la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle. En effet, l'aire sous la courbe semble se réduire indéfiniment.

8. a) Soit un entier $n\in\mathbb{N}^*$ et un réel $x\in[0,1]$. Alors par croissance de la fonction logarithme,

$$0\leqslant x\leqslant 1 \iff 1\leqslant 1+x\leqslant 2 \iff 0=\ln(1)\leqslant\ln(1+x)\leqslant\ln(2).$$

Puis comme $x\geqslant 0$, alors $x^n\geqslant 0$ et en multipliant l'inégalité précédente,

$$0\leqslant x^n\ln(1+x)\leqslant x^n\ln(2).$$

b) Grâce à la question précédente et par linéarité de l'intégrale, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\ln(2)\,\mathrm{d}x.$$

Puis $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=0$ et

$$\int_0^1 x^n\ln(2)\,\mathrm{d}x=\ln(2)\times\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\ln(2)\times\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\ln(2)\times\left(\frac{1^{n+1}}{n+1}-\frac{0^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{\ln(2)}{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{\ln(2)}{n+1}$.

c) D'après la question précédente, je connais un encadrement de I_n : $0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{\ln(2)}{n+1}$.

Puis $\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(2)}{n+1}=0$.
Je conclus grâce au théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}I_n=0.$$

Exercice 3 –

1.
2.
3. a)
   b)
4.
5.
6. a)
   b)
   c)
   d)
7. a)
   b)
   c)