

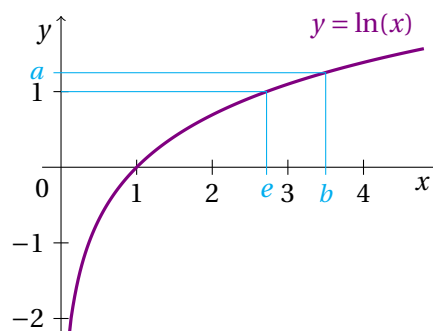
13 | Fonction exponentielle

I – Définition et premières propriétés

Il est possible de généraliser la démarche qui a permis d'introduire dans le chapitre pr  c  dent le nombre e : il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre réel a quelconque.

Il existe un unique nombre réel b tel que $\ln(b) = a$. Et

- pour $a = 1$, $b = e$,
- pour $a = 2$, $b = e^2$,
- pour $a = -1$, $b = e^{-1} = \frac{1}{e}$,
- et pour $a = n$, où $n \in \mathbb{Z}$, $b = e^n$.



Définition 13.1 – Le nombre b tel que $\ln(b) = a$ est appelé **exponentielle de a** et noté e^a .

On définit ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée \exp , définie sur \mathbb{R} et prenant ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

Pour des raisons évidentes, on note le plus souvent $\exp(x) = e^x$.

Remarque 13.2 – La fonction exponentielle est la **bijection réciproque** de la fonction logarithme népérien :

$$]0, +\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \quad \text{et en sens inverse} \quad]0, +\infty[\xleftarrow{\exp} \mathbb{R}.$$

Proposition 13.3

Puisque les deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre :

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout réel strictement positif $y \in \mathbb{R}_+^*$, $y = e^x \iff x = \ln(y)$.
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel strictement positif $y \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(y)} = y$.

Remarque 13.4 – Toujours en raison de la réciprocité et parce que $\ln(1) = 0$, alors $e^0 = 1$.

Exemple 13.5 – Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$\bullet \quad e^x = 1$$

$$e^x = 1 \iff x = \ln(1) \iff x = 0$$

$$\bullet \quad e^{2t-1} = 1$$

$$\begin{aligned} e^{2t-1} = 1 &\iff 2t-1 = \ln(1) = 0 \\ &\iff 2t = 1 \iff t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \ln(x) = 2$$

$$\ln(x) = 2 \iff x = e^2$$

$$\bullet \quad \ln(3x) = \frac{1}{2}$$

$$\ln(3x) = \frac{1}{2} \iff 3x = e^{\frac{1}{2}} \iff x = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 13.6 – Propriété fondamentale de l'exponentielle

Pour tous nombres réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Corollaire 13.7

De cette propriété algébrique fondamentale découle plusieurs conséquences.

- Pour tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.
- Pour tous nombres réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, $e^{na} = (e^a)^n$.

Démonstration.

- Grâce à la proposition précédente, je sais que $e^a \times e^{-a} = e^{a-a} = e^0 = 1$ donc $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.
- De la même manière, $e^{a-b} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \frac{1}{e^b} = \frac{e^a}{e^b}$.
- Enfin en itérant, $e^{na} = \exp\left(\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{e^a \times e^a \times \dots \times e^a}_{n \text{ fois}} = (e^a)^n$.

□

Exemple 13.8 – Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\frac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$
2. $\frac{(e^x)^2}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$
3. $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{x-(-x)} = e^{x+x} = e^{2x}$
4. $(e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2 = e^{6x} \times e^{-2x} = e^{6x-2x} = e^{4x}$
5. $e^0 \times e^{-x} \times (e^x)^2 = 1 \times e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x$
6. $\frac{e^x}{e^y} \times e^{y-x} = e^{x-y} \times e^{y-x} = e^{x-y+y-x} = e^0 = 1$

II – Étude de la fonction exponentielle

1 – Ensemble de définition

Proposition 13.9

La fonction exponentielle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et a ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* , i.e. dans $]0, +\infty[$.

2 – Dérivée et variations

Proposition 13.10

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration. En considérant la fonction composée f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(\exp(x))$,

alors $f'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)}$. Mais aussi $\ln(\exp(x)) = x$, i.e. $f(x) = x$. Donc également $f'(x) = 1$. Ainsi

$$1 = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} \iff \exp'(x) = \exp(x).$$

□

Proposition 13.11

La fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** sur \mathbb{R} .

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} donc continue sur cet intervalle.

Et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$. Donc la dérivée de la fonction est strictement positive et la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} . \square

Proposition 13.12

Pour tous réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$e^a = e^b \iff a = b \quad \text{et} \quad e^a > e^b \iff a > b.$$

Exemple 13.13 – Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes.

1. $\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$

$$\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1} \iff e^{5x+2} = e^{2x^2-1} \iff 5x+2 = 2x^2-1 \iff 2x^2-5x-3 = 0$$

Je calcule alors le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0$.

Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+7}{4} = 3.$$

2. $e^{x^2+x-1} = 1$

$$e^{x^2+x-1} = 1 \iff e^{x^2+x-1} = e^0 \iff x^2+x-1 = 0$$

Je calcule le discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. $e^{2x} \leq e^x$

$$e^{2x} \leq e^x \iff 2x \leq x \iff x \leq 0$$

Donc $S =]-\infty, 0]$.

4. $e^{2x}e^{x^2} < 1$

$$e^{2x}e^{x^2} < 1 \iff e^{2x+x^2} < e^0 \iff 2x+x^2 < 0 \iff x(2+x) < 0$$

J'établis le tableau de signe du produit :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x		$-$	$-$	0 $+$
$x+2$		$-$	0	$+$ $+$
x^2+2x		$+$	0	$-$ 0 $+$

Et donc $S =]-2, 0[$.

3 – Limites

Proposition 13.14

La fonction exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

La fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

L'axe des abscisses est **asymptote horizontale** à la courbe d'équation $y = e^x$ en $-\infty$.

Exemple 13.15 – Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Je raisonne par composition :

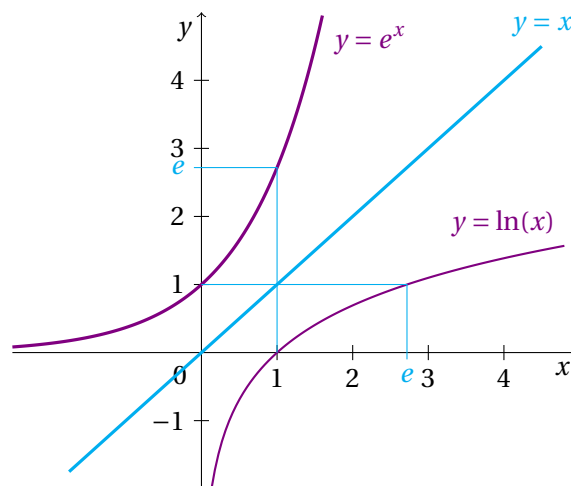
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1 \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

4 – Courbe représentative

- La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$.
- Connaître l'allure des courbes des fonctions logarithme et exponentielle permet de retrouver graphiquement toutes les informations importantes à propos de ces deux fonctions.



5 – Croissances comparées

Proposition 13.16

Pour tout entier naturel non nul n ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

En particulier lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Remarque 13.17 – Ces limites sont normalement des **formes indéterminées**. Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de *croissances comparées*.
On retient que l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances.

Exemple 13.18 – Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x$.

Par croissances comparées, et en réécrivant $e^x - x = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty.$$

III – Étude d'une fonction de la forme $\exp(u)$

Proposition 13.19

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction composée $f = e^u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = u'(x) e^{u(x)}.$$

On note parfois pour simplifier $(e^u)' = u' e^u$.

Exemple 13.20 – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^3 - 4x^2 + 2x - 3}$. Calculer $f'(x)$.

La fonction f est de la forme $f = e^u$ avec $u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$. Alors $u'(x) = 3x^2 - 8x + 2$ et donc

$$f'(x) = u'(x) e^{u(x)} = (3x^2 - 8x + 2) e^{x^3 - 4x^2 + 2x - 3}.$$

Exemple 13.21 – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25} = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25} = +\infty.$$

2. Étudier les variations de la fonction f .

La fonction f est de la forme $f = e^u$ avec $u(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25$.


Puisque $u'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$, alors

$$f'(x) = 6(x^2 - 5x + 6) e^{2x^3 - 15x^2 + 36x - 25}.$$

Comme l'exponentielle est toujours positive, il ne reste plus qu'à étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$.
Le discriminant vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 = 1^2 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$6(x^2-5x+6)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$e^{2x^3-15x^2+36x-25}$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

IV – Primitives et fonction exponentielle

La fonction exponentielle étant désormais connue, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les deux lignes suivantes :

f est définie sur I par	une primitive F est donnée par
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f = u' e^u$	$F = e^u$

Remarque 13.22 – On peut remarquer en particulier qu’une primitive d’une fonction de la forme $f(x) = e^{ax}$ (avec $a \neq 0$) est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

Exemple 13.23 – Calculer les primitives des fonctions suivantes sur \mathbb{R} .

- $f(x) = e^{2x}$
- $f(x) = e^{3x} - e^{-x}$
- $f(x) = x e^{x^2}$

- La fonction f est de la forme $f(x) = e^{ax}$ avec $a = 2$, donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

- La fonction f est la somme de deux fonctions dont je peux calculer une primitive.

En effet, une primitive de $f_1(x) = e^{3x}$ est donnée par $F_1(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$

et une primitive de $f_2(x) = e^{-x}$ est donnée par $F_2(x) = -e^{-x}$.

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{3} e^{3x} - (-e^{-x}) = \frac{1}{3} e^{3x} + e^{-x}.$$

- La fonction f semble être de la forme $u' e^u$ avec $u(x) = x^2$. Puisque $u'(x) = 2x$ alors

$$u'(x) e^{u(x)} = 2x e^{x^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{u(x)} = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$