2 | Familles de variables aléatoires

Dans tout ce chapitre Ω désigne un univers fini. Ainsi, les variables aléatoires réelles considérées ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

I – Couples de variables aléatoires finies

1 – Loi d'un couple de variables aléatoires

Définition 2.1 – On appelle **couple de variables aléatoires**, tout couple (X, Y) où X et Y désignent deux variables aléatoires définies sur un même espace.

Exemple 2.2 –

1. On lance deux dés équilibrés à 6 faces (l'un est bleu, l'autre blanc). On appelle X (respectivement Y) le numéro obtenu avec le dé bleu (respectivement blanc). Comme X et Y sont des variables aléatoires, alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires.
2. On lance les mêmes dés que dans l'exemple précédent. Cette fois, on appelle X le plus petit des deux numéros obtenus et Y le plus grand numéro obtenu (si les numéros sont égaux, X et Y prennent la valeur commune). Comme X et Y sont des variables aléatoires, alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires.

Définition 2.3 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On appelle **loi conjointe** du couple (X, Y) la donnée des probabilités $P([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Méthode 2.4 – Déterminer la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires

- On donne les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ des valeurs prises par X et Y.
- On calcule toutes les probabilités $P([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

On résume souvent les résultats sous la forme d'un tableau.

Exemple 2.5 – Donner la loi conjointe des couples (X, Y) pour les deux exemples ci-dessus.

1. Pour tous k et l appartenant à $[\![1;6]\!]$, on a $P([X = k] \cap [Y = l]) = \dfrac{1}{36}$.

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$
$Y=1$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$Y=2$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$Y=3$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$Y=4$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$Y=5$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$Y=6$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. Tout d'abord, il est clair que X ne peut être plus grand que Y. Ainsi, si $k > l$, alors $P([X = k] \cap [Y = l]) = 0$.
   Par ailleurs, notons A le résultat du dé bleu et B le résultat du dé blanc. Pour $k < l$, on a :

$$P([X = k] \cap [Y = l]) = P([A = k] \cap [B = l]) + P([A = l] \cap [B = k]) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

   Enfin, si $k = l$, alors $P([X = k] \cap [Y = l]) = \dfrac{1}{36}$. On en déduit le tableau de la loi conjointe.

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$
$Y=1$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
$Y=2$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
$Y=3$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
$Y=4$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0
$Y=5$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0
$Y=6$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Remarque 2.6 –

- On abrège souvent « loi conjointe du couple » en « loi du couple ».
- On note parfois $P([X = x], [Y = y])$ au lieu de $P([X = x] \cap [Y = y])$, ou plus simplement $P(X = x, Y = y)$.

2 – Lois marginales

Définition 2.7 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. La loi de X est appelée **première loi marginale** du couple, et celle de Y est appelée **deuxième loi marginale** du couple.

Proposition 2.8

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. On a les résultats suivants.

- Pour tout réel $x \in X(\Omega)$, on a

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

- Pour tout réel $y \in Y(\Omega)$, on a

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

Méthode 2.9 – Déterminer les lois marginales avec la loi du couple

Une fois que l'on a déterminé la loi du couple, on peut déterminer les lois marginales. La loi de X s'écrit par exemple

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

Lorsque la loi d'un couple (X, Y) est donnée sous la forme d'un tableau à double entrée, on obtient les lois de X et de Y en sommant les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne, selon les cas.

Exemple 2.10 – Déterminer les lois marginales des variables aléatoires X et Y pour les deux exemples ci-dessus.

1. Pour obtenir la loi de X, on fait la somme de chacune des colonnes. On obtient

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Pour obtenir la loi de Y, on fait la somme de chacune des lignes. On obtient

y_i	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Pour obtenir la loi de X, on fait la somme de chacune des colonnes. On obtient

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{6}$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

Pour obtenir la loi de Y, on fait la somme de chacune des lignes. On obtient

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(Y = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

Remarque 2.11 – On ne peut en revanche pas obtenir, en général, la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des lois de X et Y.

3 – Lois conditionnelles

Définition 2.12 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.
Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, on appelle loi de X **conditionnellement à l'évènement** $[Y = y]$ la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$, de

$$P_{[Y=y]}([X = x]) = \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P(Y = y)}.$$

Remarque 2.13 –

- On dit aussi « loi conditionnelle de X sachant que $[Y = y]$ est réalisé », ou plus simplement « loi de X sachant $[Y = y]$ ».
- On définit de manière similaire la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.

Exemple 2.14 – Dans les deux exemples ci-dessus, on a $P(Y=1) \neq 0$. Déterminer alors la loi conditionnelle de X sachant $[Y=1]$ dans les deux cas.

1. On a vu que $P(Y=1) = \frac{1}{6}$ et que pour tout $k \in [\![1;6]\!]$, $P([X=k] \cap [Y=1]) = \frac{1}{36}$. On a donc, pour tout $k \in [\![1;6]\!]$,
$$P_{[Y=1]}([X=k]) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{6},$$
ce que l'on peut résumer par le tableau suivant.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_{[Y=1]}(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. On a vu que $P(Y=1) = \frac{1}{36}$ et que pour tout $k \in [\![2;6]\!]$, $P([X=k] \cap [Y=1]) = 0$. On a donc, pour tout $k \in [\![2;6]\!]$,
$$P_{[Y=1]}([X=k]) = \frac{0}{\frac{1}{36}} = 0.$$
Par ailleurs, $P([X=1] \cap [Y=1]) = \frac{1}{36}$ donc
$$P_{[Y=1]}([X=1]) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{36}} = 1.$$
Tout ceci se résume par le tableau suivant.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_{[Y=1]}(X=x_i)$	1	0	0	0	0	0

Proposition 2.15 – Loi marginale et loi conditionnelle

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires. Si l'on connaît la loi marginale de Y, ainsi que la loi conditionnelle de X sachant $[Y=y]$, alors la loi de X est déterminé par
$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y=y) P_{[Y=y]}(X=x).$$

Exemple 2.16 – On a calculé la loi conditionnelle de X sachant $[Y=1]$. Si on calculait les lois conditionnelles de X sachant $[Y=2]$, $[Y=3]$, etc., dans les deux exemples précédents, alors on pourrait retrouver la loi marginale de X grâce à la proposition ci-dessus.

4 – Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 2.17 – On dit que deux variables aléatoires finies X et Y sont **indépendantes** lorsque

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \qquad P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y).$$

Remarque 2.18 – Ainsi, **dans le cas de deux variables aléatoires indépendantes**, on peut déterminer la loi du couple (X,Y) à partir des lois de X et de Y.

Exemple 2.19 – Tester l'indépendance des variables aléatoires X et Y pour les exemples précédents.

1. Au vu du tableau de la loi conjointe et des tableaux des lois marginales, il est clair que l'on a pour tout k et l appartenant à $[\![1;6]\!]$,

$$P([X=k]\cap[Y=l]) = P([X=k]) \times P([Y=l]).$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

2. On a

$$P([X=2]\cap[Y=1]) = 0$$

mais

$$P([X=2]) = \frac{9}{36} \quad \text{et} \quad P([Y=1]) = \frac{1}{36}.$$

Donc

$$P([X=2]\cap[Y=1]) \neq P([X=2]) \times P([Y=1]),$$

ce qui montre que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition 2.20

Si l'une des deux variables aléatoires X ou Y est constante, alors X et Y sont indépendantes.

II – Espérance

1 – Espérance d'une somme

Proposition 2.21

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. On a l'égalité

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

Exemple 2.22 – Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1;9]\!]$ et Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(8, \frac{1}{4}\right)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Z = X+Y$.

Puisque X suit la loi uniforme sur $[\![1;9]\!]$, on a $E(X) = \frac{9+1}{2} = 5$. Par ailleurs, puisque Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(8, \frac{1}{4}\right)$, on a $E(Y) = 8 \times \frac{1}{4} = 2$. Ainsi,

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 5 + 2 = 7.$$

Proposition 2.23 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω et a et b deux réels. On a l'égalité

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y).$$

Exemple 2.24 – Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1;12]\!]$ et Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(7,\frac{1}{3}\right)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Z=2X-Y$.

On a $E(X)=\frac{12+1}{2}=\frac{13}{2}$ et $E(Y)=7\times\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$. Ainsi,

$$E(Z)=2E(X)-E(Y)=2\times\frac{13}{2}-\frac{7}{3}=13-\frac{7}{3}=\frac{39}{3}-\frac{7}{3}=\frac{32}{3}.$$

2 – Espérance d'un produit

Proposition 2.25

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. On a l'égalité

$$E(XY)=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP(X=x,Y=y).$$

Exemple 2.26 –

- Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs d'une boule, avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus grand des deux numéros obtenus. Compléter les tableaux suivants, donnant les lois des couples (X_1,X_2) et (X_1,Y).

	$X_2=1$	$X_2=2$	$X_2=3$	$X_2=4$
$X_1=1$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X_1=2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X_1=3$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X_1=4$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$Y=4$
$X_1=1$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X_1=2$	0	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X_1=3$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X_1=4$	0	0	0	$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

En déduire $E(X_1X_2)$ et $E(X_1Y)$.

$$\begin{aligned}E(X_1X_2)&=1\times1\times\frac{1}{16}+1\times2\times\frac{1}{16}+\cdots+4\times4\times\frac{1}{16}\\&=\frac{1+2+3+4+2+4+6+8+3+6+9+12+4+8+12+16}{16}\\&=\frac{100}{16}=\frac{25}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X_1Y)&=1\times1\times\frac{1}{16}+1\times2\times\frac{1}{16}+\cdots+4\times4\times\frac{4}{16}\\&=\frac{1+2+3+4+8+6+8+27+12+64}{16}\\&=\frac{135}{16}.\end{aligned}$$

- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires finies tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1;2]\!]^2, \quad P(X=i, Y=j) = \begin{cases} \frac{i}{4} & \text{si } i=j \\ \frac{1}{4} & \text{si } i<j \\ 0 & \text{si } i>j \end{cases}$$

Calculer $E(XY)$.
Récapitulons la loi de (X, Y) dans un tableau.

	$Y=1$	$Y=2$
$X=1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$X=2$	0	$\frac{1}{2}$

On a donc

$$E(XY) = 1\times 1\times \frac{1}{4} + 1\times 2\times \frac{1}{4} + 2\times 1\times 0 + 2\times 2\times \frac{1}{2} = \frac{1+2+8}{4} = \frac{11}{4}.$$

Proposition 2.27

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**. On a l'égalité

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Exemple 2.28 – On reprend l'exemple ci-dessus : un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs d'une boule, avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer les lois marginales de X_1, X_2 et Y.
Grâce aux tableaux des lois conjointes de (X_1, X_2) et de (X_1, Y), on obtient les tableaux des lois marginales de X_1, X_2 et Y.

x_i	1	2	3	4
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

x_i	1	2	3	4
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

y_i	1	2	3	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

2. En déduire les valeurs de $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(Y)$.
On a donc

$$E(X_1) = 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$
$$E(X_2) = 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$
$$E(Y) = 1\times\frac{1}{16} + 2\times\frac{3}{16} + 3\times\frac{5}{16} + 4\times\frac{7}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}.$$

3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Et les variables X_1 et Y ?
   Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes. En effet, on peut facilement vérifier que pour tout k et l dans $[\![1;4]\!]$, on a
   $$P([X_1 = k] \cap [X_2 = l]) = P([X_1 = k]) \times P([X_2 = l]).$$
   Par ailleurs, on a vu que
   $$E(X_1 Y) = \frac{135}{16} \neq E(X_1) \times E(Y) = \frac{5}{2} \times \frac{25}{8} = \frac{125}{16}.$$
   Donc les variables X_1 et Y ne sont pas indépendantes.

ATTENTION ! L'égalité $E(XY) = E(X)E(Y)$ peut être vérifiée sans que les variables aléatoires X et Y ne soient indépendantes.

III – Covariance, corrélation linéaire

1 – Covariance de deux variables aléatoires

Définition 2.29 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On appelle **covariance de** X **et** Y, le réel, noté $\mathrm{Cov}(X, Y)$, défini par
$$\mathrm{Cov}(XY) = E\big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big).$$

Théorème 2.30 – Formule de Huygens

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On a
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Démonstration. On développe le produit à l'intérieur de l'espérance.
$$\begin{aligned} E((X - E(X))(Y - E(Y))) &= E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$
□

Méthode 2.31 – Calculer directement une covariance
Pour calculer la covariance de deux variables aléatoires X et Y,
1. on calcule $E(XY)$, $E(X)$ et $E(Y)$,
2. on applique la formule de Huygens.

Exemple 2.32 – On reprend les deux exemples de l'exemple 2.26.
1. Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, Y)$.
   $$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{25}{4} - \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = 0.$$
   $$\mathrm{Cov}(X_1, Y) = E(X_1 Y) - E(X_1)E(Y) = \frac{135}{16} - \frac{5}{2} \times \frac{25}{8} = \frac{135}{16} - \frac{125}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

2. Calculer $\text{Cov}(X,Y)$.
   À partir du tableau de la loi conjointe, on en déduit les lois marginales de X et Y.

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

x_i	1	2
$P(Y=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

   On en déduit que

$$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\quad\text{et}\quad E(Y)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{4}=\frac{7}{4}.$$

   Ainsi,

$$\text{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{11}{4}-\frac{3}{2}\times\frac{7}{4}=\frac{22}{8}-\frac{21}{8}=\frac{1}{8}.$$

Proposition 2.33 – Propriétés de la covariance

- La covariance est symétrique.
$$\text{Cov}(X,Y)=\text{Cov}(Y,X).$$
- La covariance d'une variable aléatoire avec elle-même est sa variance.
$$\text{Cov}(X,X)=V(X)$$
- Si a est un réel, alors
$$\text{Cov}(X,a)=0.$$

Proposition 2.34 – Linéarité à gauche et à droite de la covariance

Pour tout couple $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, on a

$$\text{Cov}(aX_1+bX_2,Y)=a\text{Cov}(X_1,Y)+b\text{Cov}(X_2,Y),$$

$$\text{Cov}(X,aY_1+bY_2)=a\text{Cov}(X,Y_1)+b\text{Cov}(X,Y_2).$$

Proposition 2.35

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes**, alors $\text{Cov}(X,Y)=0$.

Remarque 2.36 –

- C'est une conséquence directe de la Proposition 2.27.
- La réciproque est fausse. On peut avoir $\text{Cov}(X,Y)=0$ sans que X et Y ne soient indépendantes.

2 – Variance d'une somme

Proposition 2.37

Soient X et Y deux variables aléatoires. On a

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Méthode 2.38 – Calculer la variance d'une somme

Il y a deux options.

- Si on connaît la loi de la somme $X+Y$, on peut utiliser la **formule de König-Huygens** :

$$V(X+Y) = E\big((X+Y)^2\big) - E(X+Y)^2.$$

- Si on ne connaît pas la loi de la somme $X+Y$, on utilise la formule précédente :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Exemple 2.39 – On reprend les deux exemples de l'exemple 2.26.

1. Calculer $V(X_1+X_2)$ et $V(X_1+Y)$.

   On a
   $$V(X_1+X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1,X_2).$$
   On connaît déjà $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$. Il nous reste à calculer $V(X_1)$ et $V(X_2)$. D'après la formule de König-Huygens,
   $$V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 \quad \text{et} \quad V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2.$$
   Il nous reste donc à calculer $E(X_1^2)$ et $E(X_2^2)$. Or on a
   $$E(X_1^2) = E(X_2^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + \cdots + 4^2 \times \frac{1}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}.$$
   Ainsi, $V(X_1) = V(X_2) = \dfrac{15}{2} - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$. Et donc,
   $$V(X_1+X_2) = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + 2\times 0 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$
   De même, pour calculer $V(X_1+Y)$, il nous faut calculer $V(Y)$. Pour cela, on commence par calculer $E(Y^2)$.
   $$E(Y^2) = 1^2 \times \frac{1}{16} + 2^2 \times \frac{3}{16} + 3^2 \times \frac{5}{16} + 4^2 \times \frac{7}{16} = \frac{170}{16} = \frac{85}{8}.$$
   Alors, d'après la formule de König-Huygens,
   $$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{85}{8} - \left(\frac{25}{8}\right)^2 = \frac{55}{64}.$$
   Et donc
   $$V(X_1+Y) = \frac{5}{4} + \frac{55}{64} + 2\times\frac{5}{8} = \frac{215}{64}.$$

2. Calculer $V(X+Y)$).

   On a
   $$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad E(Y^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{3}{4} = \frac{13}{4}.$$

Alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{13}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}.$$

Et donc

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{11}{16}.$$

Remarque 2.40 – À noter que l'on peut également calculer la covariance de X et Y à l'aide de $V(X+Y)$, $V(X)$ et de $V(Y)$ puisque

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{V(X+Y) - V(X) - V(Y)}{2}.$$

Proposition 2.41

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires **indépendantes**. Alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

3 – Coefficient de corrélation linéaire

Proposition 2.42

On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y, le réel, noté $\rho(X,Y)$, défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}.$$

Exemple 2.43 – On reprend les deux exemples de l'exemple 2.26.

1. Calculer $\rho(X_1,X_2)$ et $\rho(X_1,Y)$.

   On a

$$\rho(X_1,X_2) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{5}{4}} \times \sqrt{\frac{5}{4}}} = 0,$$

$$\rho(X_1,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,Y)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{5}{8}}{\sqrt{\frac{5}{4}} \times \sqrt{\frac{55}{64}}} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{5\sqrt{11}}{16}} = \frac{5}{8} \times \frac{16}{5\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

2. Calculer $\rho(X,Y)$.

   On a

$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{16}}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Proposition 2.44

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors

$$\left|\rho(X,Y)\right| \leq 1.$$

Remarque 2.45 – Le coefficient de corrélation mesure la dépendance linéaire entre deux variables.

- S'il est égal à 1 ou -1, X et Y sont corrélées linéairement.
- S'il est égal à 0, X et Y sont dites non-corrélées.

IV – Suites de variables aléatoires discrètes finies

1 – Indépendance d'une famille de variables aléatoires

Définition 2.46 – Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω. On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,

$$P\big([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]\big) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \cdots \times P(X_n = x_n).$$

Définition 2.47 – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω. On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout m de $\mathbf{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont mutuellement indépendantes.

Exemple 2.48 – On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « Pile ». Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si on a obtenu « Pile » au n-ième lancer et égale à 0 sinon.
Alors, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

2 – Espérance et variance d'une famille de variables aléatoires

Théorème 2.49

Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω. On a l'égalité

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k).$$

Autrement dit,

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n).$$

Exemple 2.50 – On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, dont la loi (commune) est donnée, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, par :

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Calculer $E(S_n)$.

Commençons par calculer $E(X_k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

$$E(X_k) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Et donc

$$E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{3} = \frac{5n}{3}.$$

Théorème 2.51

Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires **indépendantes** définies sur Ω. On a l'égalité

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

Autrement dit,

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n).$$

Exemple 2.52 – On reprend l'exemple précédent. Calculer $V(S_n)$.

Commençons par calculer $V(X_k)$. Pour cela, il nous faut calculer $E(X_k^2)$.

$$E(X_k^2) = 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Donc, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

Ainsi, puisque les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, on a

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{9} = \frac{2n}{9}.$$