Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2, laboratorium 5

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

10 grudnia 2016

1 Zadanie

Temat **5**, zadanie **22**:

Stosując metodę potęgową (z normowaniem) oraz deflację $A_1 = A - \lambda x x^*$ oblicz wszystkie wartości własne macierzy trójdiagonalnej A, gdzie $a_{k,k} = 5, a_{k,k-1} = 2 + i, a_{k,k+1} = 2 - i$.

Niech $n \in \mathbb{N}$. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2-i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2+i & 5 & 2-i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 5 & 2-i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+i & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2+i & 5 & 2-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2+i & 5 \end{bmatrix}$$

Łatwo zauważyć, że macierz A jest diagonalnie silnie dominująca kolumnowo i wierszowo.

Należy znaleźć wszystkie własności własne λ macierzy A, czyli takie, że:

$$\exists x \in (\mathbb{C} \setminus 0) \quad Ax = \lambda x$$

Wartości własne λ są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego macierzy A:

$$X(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Z podstawowego twierdzenia algebry wiemy, że pierwiastków wielomianu $X(\lambda)$ jest n, co do krotności.

2 Opis metody

Niech $A_0 = A$.

Ponieważ metoda potęgowa znajduje dominującą wartość własną macierzy A_i ($i = 0, \ldots, n-1$), należy zastosować deflację. Po znalezieniu dominującej wartości własnej λ_i macierzy A_i oraz wektora własnego $x_i \in \mathbb{C}^n$ związanego z wartością własną λ_i macierz A_{i+1} otrzymujemy w następujący sposób:

$$A_{i+1} = A_i - \lambda_i x_i x_i^*$$

Wartość własna λ_{i+1} macierzy A_{i+1} jest mniejsza co do modułu od wartości własnej λ_i ($|\lambda_{i+1}| < |\lambda_i|$), więc metoda potęgowa zastosowana na macierzy A_{i+1} znajdzie wartość własną λ_{i+1}.

Niech $\delta \in \mathbb{R}$ będzie zadaną dokładnością przybliżenia wartości własnej λ_i. Mając przybliżenie początkowej $x_i^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ wektora własnego odpowiadającego wartości własnej λ_i mamy:

$$\begin{aligned} y_i^{(k)} &= A_i x_i^{(k-1)} \\ x_i^{(k)} &= \frac{y_i^{(k)}}{||y_i^{(k)}||_2} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\lambda_i^{(k)} = \langle y_i^{(k)}, x_i^{(k-1)} \rangle \tag{2}$$

gdzie równania (1) przybliżają wektor początkowy związany z dominującą wartością własną macierzy A_i, a równanie (2) przybliża tą dominującą wartość własną.

Przybliżanie kontynuujemy, aż zostanie spełniony warunek stopu:

$$|\lambda_i^{(k)} - \lambda_i^{(k-1)}| < \delta$$

Obliczenia powtarzamy dla $i = 0, \ldots, n-1$.

Po znalezieniu wszystkich wartości i wektorów własnych można sprawdzić jak dokładne obliczone przybliżenia. W tym celu zdefiniujmy:

$$e_i = Ax_i - \lambda_i x_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$E = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & \ldots & e_{n-1} \end{bmatrix}$$

Licząc normę z macierzy E otrzymujemy konkretną wartość oznaczającą dokładność znalezionych wartości i wektorów własnych.

3 Implementacja metody

Implementacja metody podzielona jest na następujące kroki:

1. Konstruowanie macierzy A rozmiaru $n \times n$ (funkcja `constructMatrix`)
2. Wykonanie metody potęgowej z normowaniem w celu znalezienia dominującej wartości własnej λ_i macierzy A_i (funkcja `powerIteration`)
3. Powtarzanie kroku związanego z metodą potęgową oraz deflacja po znalezieniu λ_i w celu znalezienia wszystkich wartości własnych macierzy A (funkcja `findEigenvaluesAndVectors`)
4. Obliczenie macierzy błędu E (funkcja `calculateErrorMatrix`)

4 Poprawność metody

TODO

5 Przykłady

TODO

Przykład 1 **TODO**

6 Wnioski

1. **TODO**

7 Funkcja do testowania metody

TODO

8 Bibliografia

1. Informacje z wykładu *Metod numerycznych 2* (wydział MiNI PW, dr Iwona Wróbel), w szczególności temat dotyczący *metody potęgowej z normowaniem*, wraz z algorytmem.