Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2, laboratorium 5

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

11 grudnia 2016

1 Zadanie

Temat **5**, zadanie **22**:

Stosując metodę potęgową (z normowaniem) oraz deflację $A_1 = A - \lambda x x^*$ oblicz wszystkie wartości własne macierzy trójdiagonalnej A, gdzie $a_{k,k} = 5, a_{k,k-1} = 2+i, a_{k,k+1} = 2-i$.

Niech $n \in \mathbb{N}$. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2-i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2+i & 5 & 2-i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 5 & 2-i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+i & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2+i & 5 & 2-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2+i & 5 \end{bmatrix}$$

Łatwo zauważyć, że macierz A jest diagonalnie silnie dominująca kolumnowo i wierszowo.

Należy znaleźć wszystkie własności własne λ macierzy A, czyli takie, że:

$$\exists x \in (\mathbb{C}^n \setminus 0) \quad Ax = \lambda x$$

Wartości własne λ są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego macierzy A:

$$X(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Z podstawowego twierdzenia algebry wiemy, że pierwiastków wielomianu $X(\lambda)$ jest n, co do krotności.

2 Opis metody

Niech $A_0 = A$.

Ponieważ metoda potęgowa znajduje dominującą wartość własną macierzy A_i ($i = 0, \ldots, n-1$), należy zastosować deflację. Po znalezieniu dominującej wartości własnej λ_i macierzy A_i oraz wektora własnego $x_i \in \mathbb{C}^n$ związanego z wartością własną λ_i macierz A_{i+1} otrzymujemy w następujący sposób:

$$A_{i+1} = A_i - \lambda_i x_i x_i^*$$

Dominująca wartość własna λ_{i+1} macierzy A_{i+1} jest mniejsza co do modułu od wartości własnej λ_i ($|\lambda_{i+1}| < |\lambda_i|$), więc metoda potęgowa zastosowana na macierzy A_{i+1} znajdzie wartość własną λ_{i+1}.

Niech $\delta \in \mathbb{R}$ będzie zadaną dokładnością przybliżenia wartości własnej λ_i. Mając przybliżenie początkowej $x_i^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ wektora własnego odpowiadającego wartości własnej λ_i mamy:

$$\begin{aligned} y_i^{(k)} &= A_i x_i^{(k-1)} \\ x_i^{(k)} &= \frac{y_i^{(k)}}{||y_i^{(k)}||_2} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\lambda_i^{(k)} = \langle y_i^{(k)}, x_i^{(k-1)} \rangle \tag{2}$$

gdzie równania (1) przybliżają wektor początkowy związany z dominującą wartością własną macierzy A_i, a równanie (2) przybliża tą dominującą wartość własną.

Przybliżanie kontynuujemy, aż zostanie spełniony warunek stopu:

$$|\lambda_i^{(k)} - \lambda_i^{(k-1)}| < \delta$$

Obliczenia powtarzamy dla $i = 0, \ldots, n-1$.

Po znalezieniu wszystkich wartości i wektorów własnych można sprawdzić jak dokładne obliczone przybliżenia. W tym celu zdefiniujmy wektory błędów $e_i \in \mathbb{C}^n$:

$$e_i = Ax_i - \lambda_i x_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$
$$E = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & \ldots & e_{n-1} \end{bmatrix}$$

Licząc normę z macierzy E otrzymujemy konkretną wartość oznaczającą dokładność znalezionych wartości i wektorów własnych.

3 Implementacja metody

Implementacja metody podzielona jest na następujące kroki:

1. Konstruowanie macierzy A rozmiaru $n \times n$ (funkcja `constructMatrix`)
2. Wykonanie metody potęgowej z normowaniem w celu znalezienia dominującej wartości własnej λ_i macierzy A_i (funkcja `powerIteration`)
3. Powtarzanie kroku związanego z metodą potęgową oraz deflacja po znalezieniu λ_i w celu znalezienia wszystkich wartości własnych macierzy A (funkcja `findEigenvaluesAndVectors`)
4. Obliczenie macierzy błędu E (funkcja `calculateErrorMatrix`)

4 Poprawność metody

Biorąc wektor $x_i^{(0)} = [1\ 1\ 1\ \ldots\ 1]^{\mathrm{T}}$ za przybliżenie początkowe metoda jest poprawna, ponieważ wektor ten ma każdą składową niezerową, zatem daje się przybliżyć do dowolnego wektora w przestrzeni wektorów własnych.

Po wykonaniu testów stwierdzam, że metoda jest poprawna, znajduje wszystkie wartości własne macierzy A oraz odpowiadające im wektory własne, a jej wyniki są zbliżone do tych z funkcji `eig` dostępnej w Matlabie, która realizuje to samo zadanie.

5 Przykłady

Z powodu niewielkiej liczby parametrów w zadaniu przykłady pokazują porównanie metody potęgowej z normowaniem oraz metody `eig` dostępnej w Matlabie.

W każdym przykładzie przyjęty jest limit iteracji równy 100, ale w większości przypadków nie został on osiągnięty.

Przykład 1 $n = 5, \delta = 0.1$

	metoda potęgowa	funkcja `eig`
maksymalny błąd $Ax_i - \lambda_i x_i$	16.0	14.7
norma macierzy błędu E	22.2	22.5
czas przybliżania	0.4330 ms	0.0912 ms

Pod względem dokładności obie metody są podobne, jednak funkcja `eig` dominuje pod względem szybkości - jest ponad czterokrotnie szybsza.

Przykład 2 $n = 5, \delta = 10^{-5}$

Zwiększenie dokładności spowodowało zmniejszenie maksymalnego błędu $Ax_i - \lambda_i x_i$ metody potęgowej do 14.7 (wynik podobny do funkcji `eig`) przy jednoczesnym wydłużeniu czasu przybliżania do 2.61 ms (ponad sześciokrotny wzrost).

Przykład 3 $n = 20, \delta = 0.1$

	metoda potęgowa	funkcja `eig`
maksymalny błąd $Ax_i - \lambda_i x_i$	39.0	29.6
norma macierzy błędu E	108.7	110.2
czas przybliżania	6.7451 ms	0.9639 ms

Zwiększenie rozmiaru macierzy zmniejszyło dokładność obu metod oraz wydłużyło ich czas działania. Funkcja `eig` nadal dominuje pod względem szybkości działania.

Przykład 4 $n = 20, \delta = 10^{-5}$

	metoda potęgowa	funkcja `eig`
maksymalny błąd $Ax_i - \lambda_i x_i$	26.3	29.6
norma macierzy błędu E	110.0	110.2
czas przybliżania	14.4620 ms	0.4081 ms

Zmniejszenie parametru δ spowodowało zredukowanie maksymalnego błędu $Ax_i - \lambda_i x_i$ o około 30%, jednak norma macierzy błędu nie odniosła podobnych zmian. Ogólnie dokładność jest porównywalna z tą funkcji `eig`, podczas gdy czas działania został znacznie zwiększony.

Przykład 5 $n = 100, \delta = 0.1$

	metoda potęgowa	funkcja `eig`
maksymalny błąd $Ax_i - \lambda_i x_i$	89.2	66.9
norma macierzy błędu E	577.2	583.2
czas przybliżania	48.9731 ms	1.8216 ms

Przy dużych macierzach ($n = 100$) i $\delta = 0.1$ zastosowanie metody potęgowej skutkuje uzyskaniem podobnej dokładności co po zastosowaniu funkcji `eig`, jednakże czas działania znowu jest krótszy w przypadku funkcji z Matlaba.

Przykład 6 $n = 1000, \delta = 0.1$

	metoda potęgowa	funkcja `eig`
maksymalny błąd $Ax_i - \lambda_i x_i$	284.3	205.8
norma macierzy błędu E	5850.4	5907.6
czas przybliżania	33457.7 ms	424.8 ms

Dla bardzo dużej macierzy ($n = 1000$) występuje odczuwalna różnica, pomiędzy czasem działania obu funkcji. Metoda potęgowa w tej sytuacji działała ponad pół minuty, podczas gdy funkcja `eig` poradziła sobie z zadaniem w poniżej pół sekundy, dając podobne (o ile nawet nie dokładniejsze) wyniki.

6 Wnioski

1. Dla małych macierzy ($n < 20$) i parametru δ rzędu 0.1 obie funkcje dają podobne wyniki, a różnica w działaniu jest mało znacząca dla pojedynczej operacji, jednakże mimo wszystko na korzyść funkcji `eig`.
2. Obie metody dają w miarę poprawne, jednakże nie do końca dokładne wyniki, co można zaobserwować analizując normę macierzy błędu E. Minimum dla tego parametru osiągała częściej metoda potęgowa.
3. Dla bardzo dużych macierzy (n rzędu 1000) czas działania metody potęgowej jest długi (ponad pół minuty, przykład 6.).
4. Faworytem w kwestii czasu działania podczas testów okazywała się funkcja `eig`.
5. Metoda potęgowa poprawnie obliczała wszystkie wartości własne i wektory własne zadanej macierzy, więc realizowała dobrze swoje zadanie.

7 Funkcja do testowania metody

Dla wygodnego testowania metody potęgowej, która jest tematem zadania, został przygotowany skrypt testowy `testMethod`. Pozwala on na ustawienie parametru δ, rozmiaru macierzy A (parametr n), oraz maksymalnej liczby iteracji.

Skrypt najpierw konstruuje zadaną macierz A, następnie stosuje metodę potęgową z normowaniem i deflacją do przybliżenia wartości własnych i wektorów własnych tej macierzy, później oblicza macierz błędu E i jej normę. Takie same operacje zostają wykonane z wynikami otrzymanymi z funkcji `eig`.

Następnie w konsoli zostaje wypisane porównanie obu metod, wraz z normami macierzy E oraz czasem działania.

Obliczone wartości własne dostępne są w zmiennej `eigenvalues`, a wektory własne w macierzy `eigenvectors` (ustawione kolumnowo).

8 Bibliografia

1. Informacje z wykładu *Metod numerycznych 2* (wydział MiNI PW, dr Iwona Wróbel), w szczególności temat dotyczący *metody potęgowej z normowaniem*, wraz z algorytmem.