Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2, laboratorium 1

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

23 października 2016

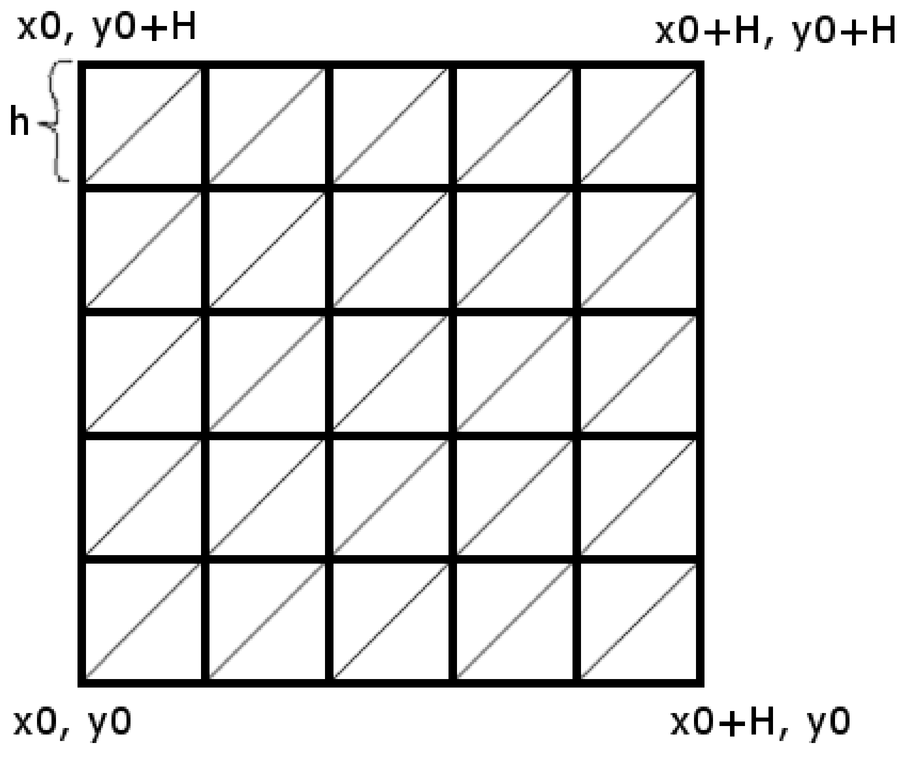
1 Zadanie

Temat **2**, zadanie **49**:
Interpolacja funkcjami liniowymi na kwadracie podzielonym na $2n^2$ trójkątów przystających. Zagęszczanie podziału kwadratu, aż do osiągnięcia błędu średniokwadratowego, mierzonego w środkach ciężkości trójkątów, mniejszego od ε.

2 Opis metody

Mając funkcję interpolowaną $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H, y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + H\}$, $H, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ opisaną na kwadracie o boku H, którego lewy dolny wierzchołek ma współrzędne (x_0, y_0), należy skonstruować interpolującą funkcję sklejaną $p : D \to \mathbb{R}$ złożoną z funkcji opisanych na pojedynczych trójkątach przystających, dzielących ten kwadrat.

Dziedzinę funkcji f należy podzielić na n części wzdłuż osi X oraz osi Y, co daje n^2 kwadratów, a następnie każdy kwadrat można podzielić względem dowolnej przekątnej na dwa trójkąty. W moim rozwiązaniu użyłem przekątnej o współczynniku kierunkowym równym 1.



Rysunek 1: Podział dziedziny funkcji f

3 Implementacja metody

Przyjmijmy, że punkt $(x_0, y_0) \in D$ to lewy dolny wierzchołek dziedziny. Startując z parametrem $n = 1$ należy podzielić kwadrat na n^2 kwadratów przystających (n podziałów wzdłuż osi X, n podziałów wzdłuż osi Y), a następnie podzielić każdy z nich na dwa prostokątne trójkąty przystające, których przeciwprostokątną będzie przekątna kwadratu o współczynniku kierunkowym równym 1.

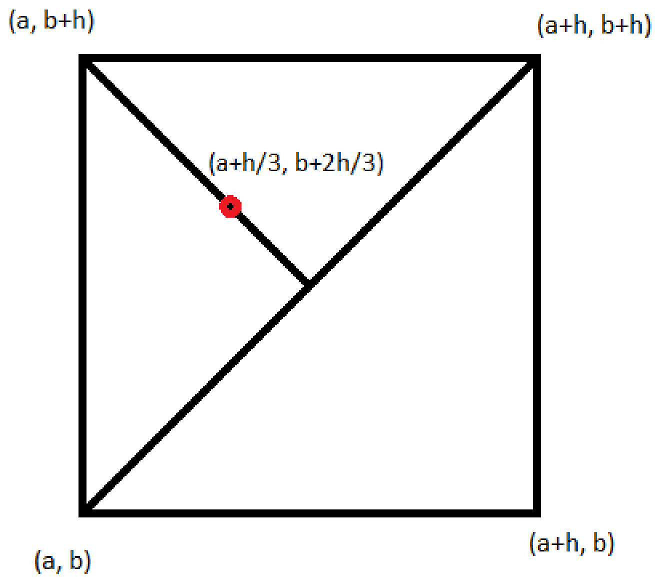
Niech $h = \frac{H}{n}$ będzie długością boku każdego z mniejszych kwadratów.

Rozważmy jeden z kwadratów po podziale, będący w i-tym rzędzie i j-tej kolumnie. Wtedy jego lewy dolny wierzchołek ma współrzędne $(a, b) = (x_0 + (j - 1) * h, y_0 + (i - 1) * h)$.

Wierzchołki trójkąta powyżej przekątnej kwadratu mają współrzędne (a, b), $(a + h, b + h)$, $(a, b + h)$, a jego środek ciężkości znajduje się w punkcie $(a + \frac{h}{3}, b + \frac{2}{3}h)$.

Wierzchołki trójkąta poniżej przekątnej kwadratu mają współrzędne (a, b), $(a + h, b)$, $(a + h, b + h)$, a jego środek ciężkości znajduje się w punkcie $(a + \frac{2}{3}h, b + \frac{h}{3})$.

Na rysunku 2 został przedstawiony podział kwadratu na dwa trójkąty przystające, oraz środek ciężkości jednego z trójkątów.



Rysunek 2: Środek ciężkości trójkąta dzielącego kwadrat

Interpolacja będzie za pomocą funkcji liniowych, więc każda z funkcji p ma równanie:

$$p(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

gdzie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ są współczynnikami specyficznymi dla danego trójkąta, na którym się odbywa interpolacja.

Biorąc wierzchołki trójkątów za węzły interpolacji i korzystając z założenia, że dla węzłów interpolacji spełniony jest warunek:

$$p(x_i, y_i) = f(x_i, y_i)$$

gdzie (x_i, y_i) są węzłami interpolacji, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+h & b \\ 1 & a+h & b+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a, b) \\ f(a+h, b) \\ f(a+h, b+h) \end{bmatrix}$$

dla trójkąta powyżej przekątnej, oraz:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+h & b \\ 1 & a+h & b+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a,b) \\ f(a+h,b) \\ f(a+h,b+h) \end{bmatrix}$$

dla trójkąta poniżej przekątnej. Rozwiązując te układy równań otrzymujemy współczynniki potrzebne do wyznaczenia funkcji interpolującej p.

4 Warunek stopu

Podział zagęszczamy (zwiększamy parametr n), dopóki błąd średniokwadratowy mierzony w środkach ciężkości trójkątów jest większy od zadanej dokładności ε.

Obliczenia kontynuujemy dopóki spełniony jest warunek:

$$\frac{\sum_{(x_j,y_i)}(f(x_j,y_i) - p(x_j,y_i))^2}{2n^2} \geqslant \varepsilon$$

gdzie punkty (x_j, y_i) są środkami ciężkości kolejnych trójkątów.

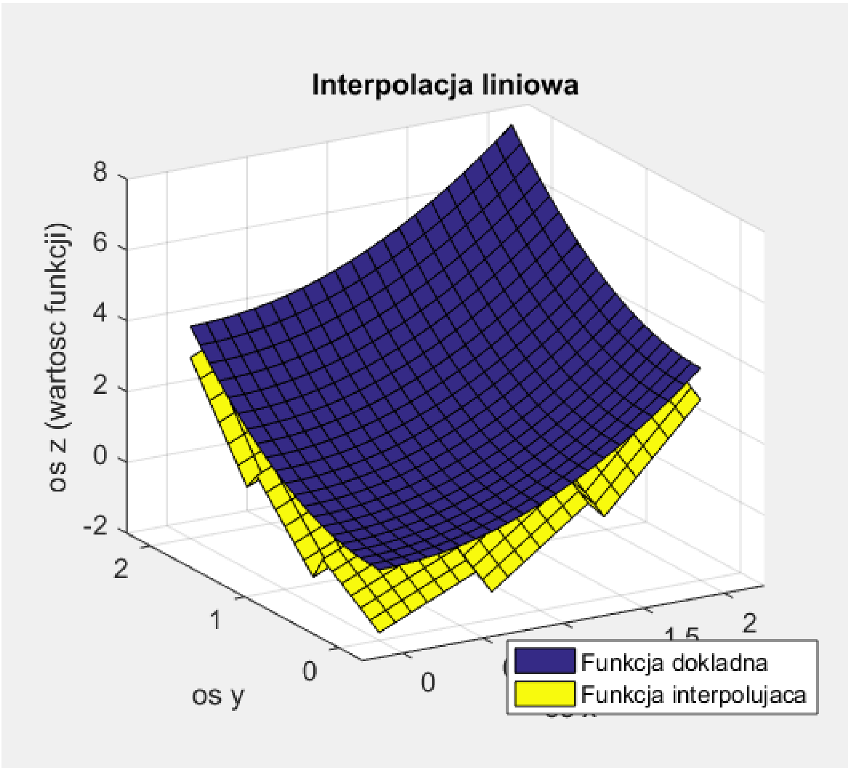
5 Poprawność metody

Metoda na ogół jest poprawna, jednak podczas testów zdarzało się tak, że funkcja interpolująca p nie miała odległych wartości w środkach ciężkości trójkątów, a poza nimi znacznie różniła się od funkcji interpolowanej f. Oznaczało to, że warunek stopu został osiągnięty od razu ($n = 1$), natomiast interpolacja była niedokładna (przykład 5).

Były to jednak nieliczne przypadki. W większości metoda zachowywała się poprawnie i dawała dobre wyniki.

6 Przykłady

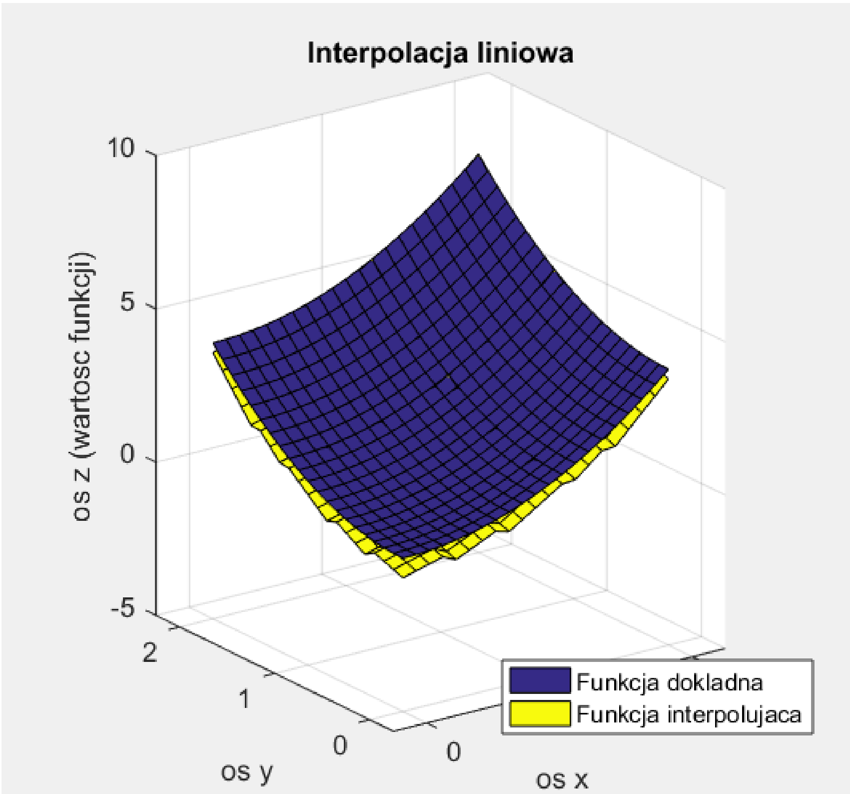
Przykład 1 Funkcja $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 2.
$\varepsilon = 0.1$



Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 3$ (18 trójkątów przystających).
Podział trwał 1.006080 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 0.316587 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.025173 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 0.0390184 (zadano 0.1).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 0.468480 ms.

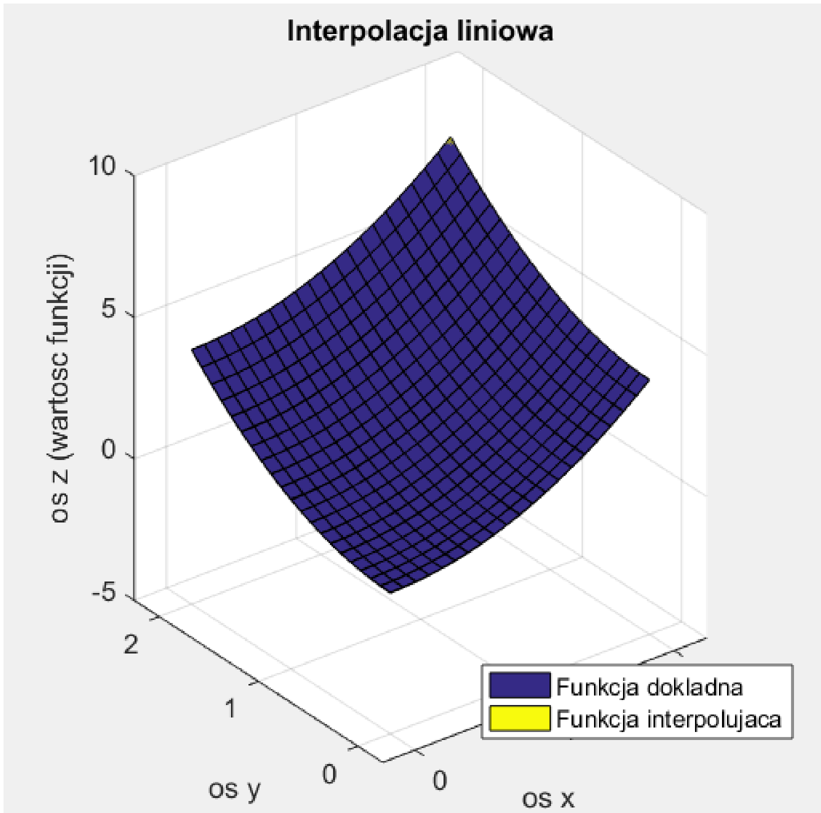
Przykład 2 Funkcja $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 2.
$\varepsilon = 0.01$



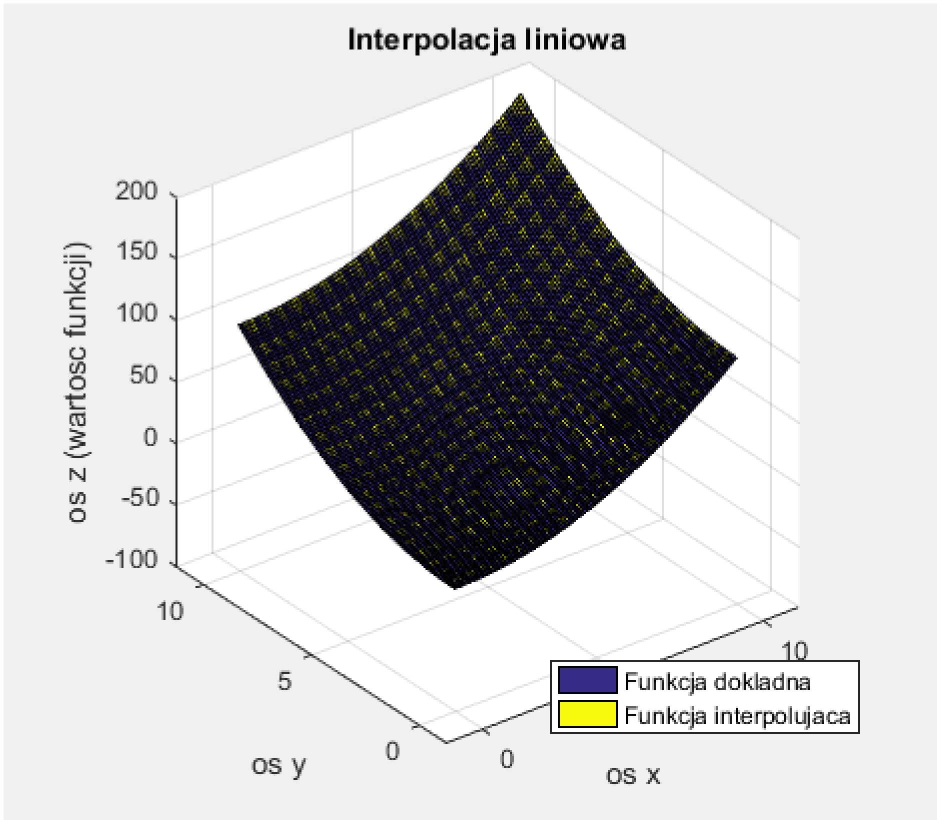
Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 5$ (50 trójkątów przystających).
Podział trwał 5.291949 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 1.093547 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.121600 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 0.00505679 (zadano 0.01).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 0.713387 ms.

Przykład 3 Funkcja $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 2.
$\varepsilon = 10^{-5}$



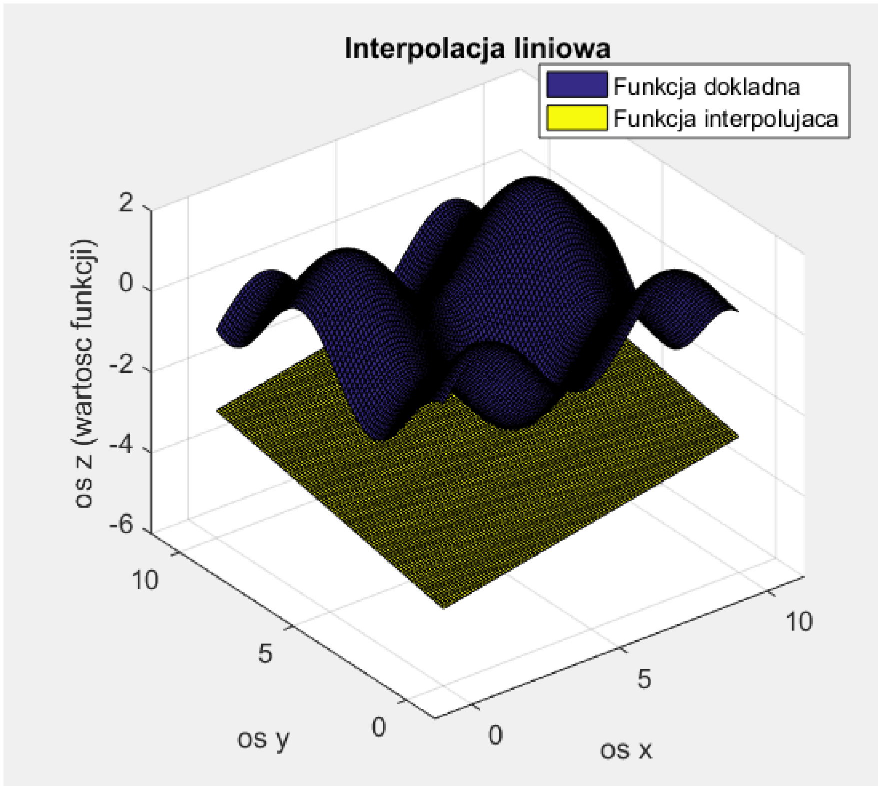
Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 24$ (1152 trójkątów przystających).
Podział trwał 187.255973 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 23.461557 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 1.129387 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy $9.52599e-06$ (zadano $1e-05$).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 0.538027 ms.

Przykład 4 Funkcja $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 10.
$\varepsilon = 10^{-5}$



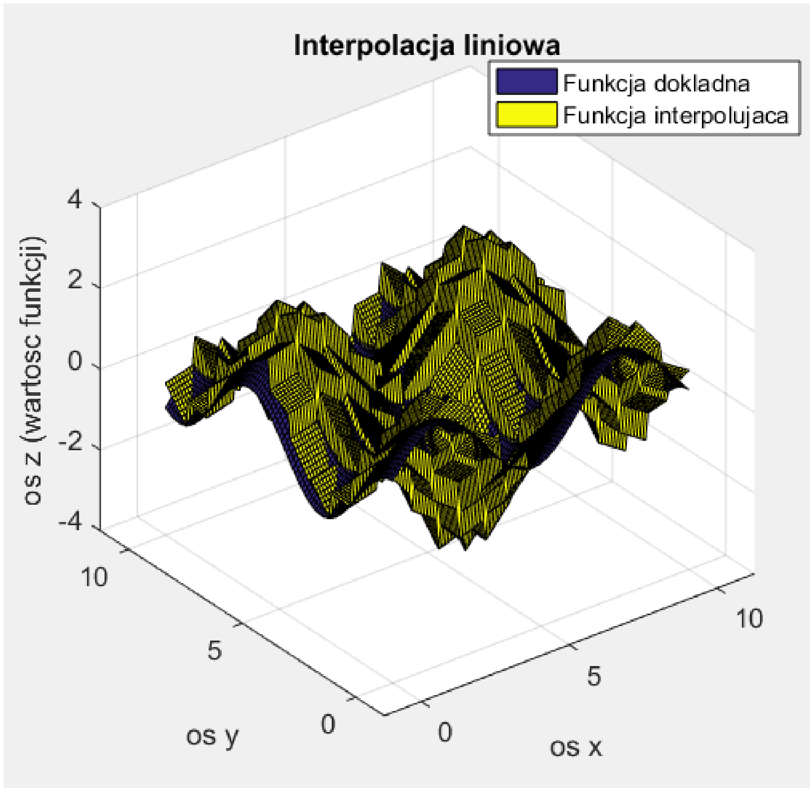
Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 119$ (28322 trójkątów przystających).
Podział trwał 17248.057768 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 403.329582 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 29.678268 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy $9.85025 * 10^{-6}$ (zadano 10^{-5}).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 8.104837 ms.

Przykład 5 Funkcja: $f(x, y) = \sin x + \cos y$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 10.
$\varepsilon = 0.1$



Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 1$ (2 trójkąty przystające).
Podział trwał 0.212907 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 0.145067 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.023893 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 0.0224202 (zadano 0.1).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 9.846618 ms.

Przykład 6 Funkcja: $f(x, y) = \sin x + \cos y$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 10.
$\varepsilon = 0.01$



Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 11$ (242 trójkątów przystających).
Podział trwał 22.700810 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 4.952749 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.351147 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 0.00791773 (zadano 0.01).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 11.321605 ms.

7 Wnioski

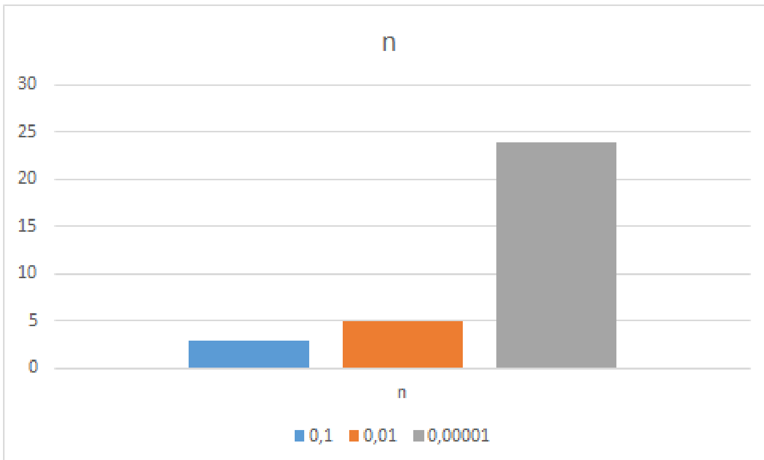
1. Wraz ze zmniejszaniem parametru ε wykres funkcji interpolującej p zbliża się do wykresu funkcji interpolowanej f (przykłady 1, 2 oraz 3).

Wraz ze zwiększaniem się dokładności, czas potrzebny na otrzymanie zadanej dokładności wygląda, jakby wzrastał wykładniczo.

Zależności z tych przykładów te zostały pokazane na wykresach znajdujących się na rysunkach 3 oraz 4.

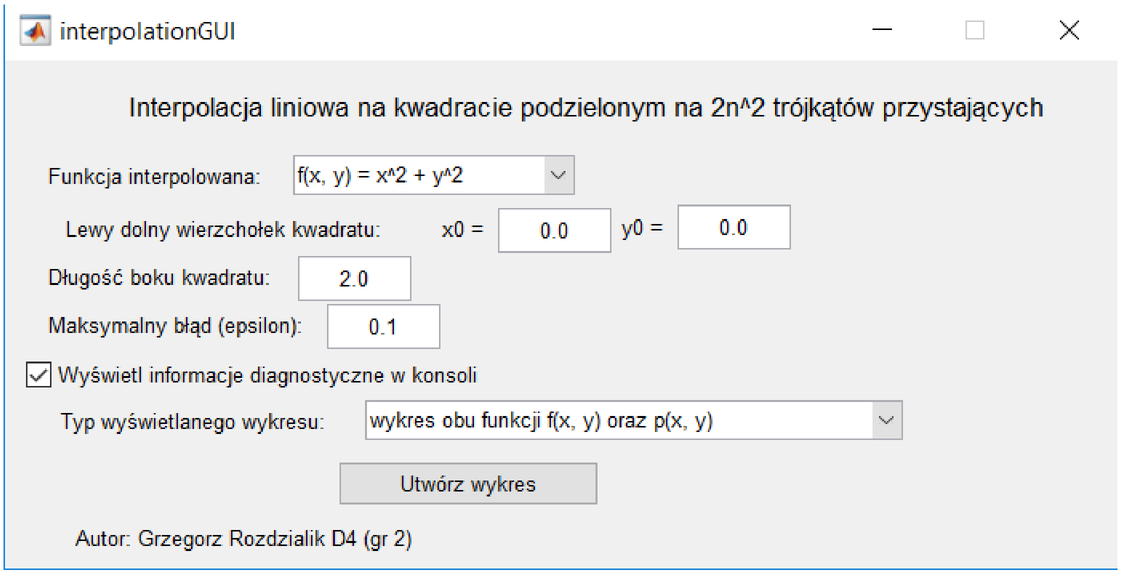
2. Osiągnięcie dużej dokładności (poniżej $\varepsilon = 10^{-4}$) na dużym obszarze ($H \geqslant 10$) wymaga sporej ilości obliczeń (przykład 4).

3. Istnieją funkcje, które szybko osiągają warunek stopu, ponieważ funkcja interpolująca osiąga wartości zbliżone do dokładnych w środkach ciężkości, natomiast znacznie inne poza nimi. Prezentujące to przykłady mają numery 5 oraz 6. W przykładzie 5-tym funkcja interpolująca p w ogóle nie przypomina funkcji interpolowanej f, ponieważ kwadrat, na którym odbywała się interpolacja został podzielony jedynie na dwa trójkąty, dla których warunek stopu został od razu spełniony. Funkcja interpolująca z przykładu 6 dużo lepiej odwzorowuje funkcję interpolowaną.



Rysunek 3: Wykres liczby n w zależności od zadanej dokładności ε

Rysunek 4: Wykres czasu podziału kwadratu w zależności od zadanej dokładności ε



Rysunek 5: Interfejs graficzny

8 Funkcja do testowania

Do sprawdzenia funkcji, które nie zostały udostępnione w interfejsie graficznym należy wykorzystać funkcję *interpolateSquare*. Ta funkcja udostępnia funkcjonalność analogiczną do interfejsu graficznego.

Więcej informacji dotyczących wykorzystania funkcji *interpolateSquare* znajduje się w pliku z funkcją (*interpolateSquare.m*).

9 Interfejs graficzny

Do metody został dodany interfejs graficzny, umożliwiający wygodne testowanie metody dla różnych parametrów i różnych funkcji interpolowanych f. Aby go wywołać należy uruchomić komendę *interpolationGUI* w MATLABie.

Został on przedstawiony na rysunku 5-tym.

10 Bibliografia

1. P. Tatjewski *Metody numeryczne*, Warszawa: Oficyna Wydawnicza PW, 2013

2. Informacje z wykładu *Metod numerycznych 2* (wydział MiNI PW, dr Iwona Wróbel)