Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2, laboratorium 1

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

23 października 2016

1 Zadanie

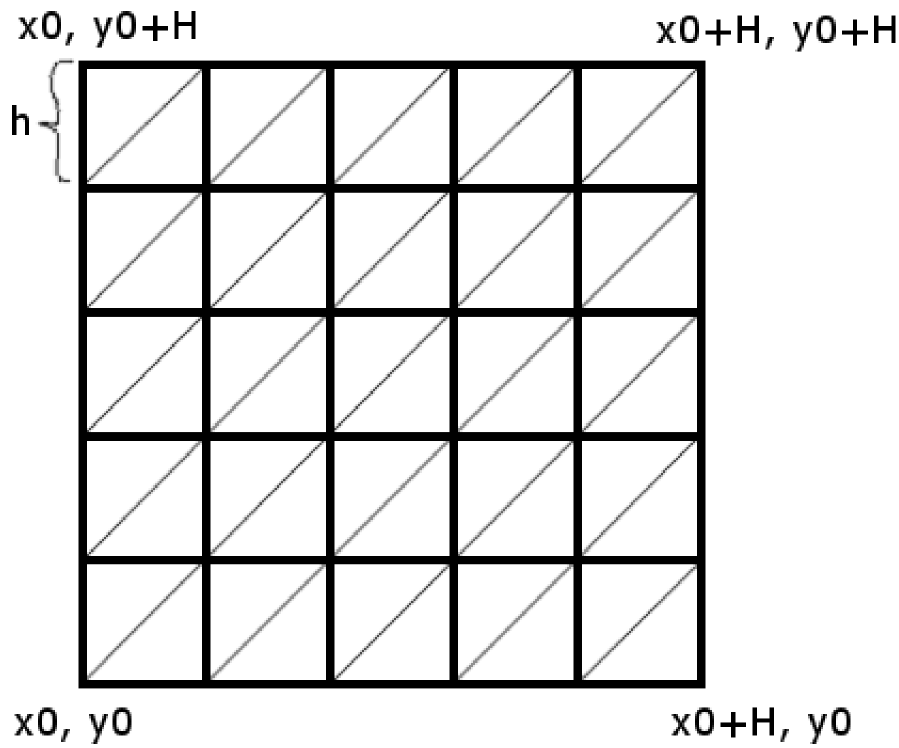
Temat **2**, zadanie **49**:

Interpolacja funkcjami liniowymi na kwadracie podzielonym na $2n^2$ trójkątów przystających. Zagęszczanie podziału kwadratu, aż do osiągnięcia błędu średniokwadratowego, mierzonego w środkach ciężkości trójkątów, mniejszego od ε.

2 Opis metody

Mając funkcję interpolowaną $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H, y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + H\}$, $H, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ opisaną na kwadracie o boku H, którego lewy dolny wierzchołek ma współrzędne (x_0, y_0), należy skonstruować funkcję sklejaną $p : D \to \mathbb{R}$ złożoną z funkcji opisanych na pojedynczych trójkątach przystających, dzielących ten kwadrat.

Dziedzinę funkcji f należy podzielić na n części wzdłuż osi x oraz osi y, co daje n^2 kwadratów, a następnie każdy kwadrat można podzielić względem dowolnej przekątnej na dwa trójkąty. W moim rozwiązaniu użyłem przekątnej o współczynniku kierunkowym równym 1.



Rysunek 1: Przedstawienie podziału dziedziny funkcji f

3 Implementacja metody

Przyjmijmy, że punkt $(x_0, y_0) \in D$ to lewy dolny wierzchołek dziedziny. Startując z parametrem $n = 1$ należy podzielić kwadrat na n^2 kwadratów przystających (n podziałów wzdłuż osi X, n podziałów wzdłuż osi Y), a następnie podzielić każdy z nich na dwa prostokątne trójkąty przystające, których przeciwprostokątną będzie przekątna kwadratu o współczynniku kierunkowym równym 1.

Niech $h = \frac{H}{n}$ będzie długością boku każdego z mniejszych kwadratów.

Rozważmy jeden z kwadratów po podziale, będący w i-tym rzędzie i j-tej kolumnie. Wtedy jego lewy dolny wierzchołek ma współrzędne $(a, b) = (x_0 + j * h, y_0 + i * h)$.

Wierzchołki trójkąta powyżej przekątnej kwadratu mają współrzędne (a, b), $(a + h, b + h)$, $(a, b + h)$, a jego środek ciężkości znajduje się w punkcie $(a + \frac{h}{3}, b + \frac{2}{3}h)$.

Wierzchołki trójkąta poniżej przekątnej kwadratu mają współrzędne (a, b), $(a + h, b)$, $(a + h, b + h)$, a jego środek ciężkości znajduje się w punkcie $(a + \frac{2}{3} * h, b + \frac{h}{3})$.

Interpolacja będzie za pomocą funkcji liniowych, więc każda z funkcji p ma równanie:

$$p(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 * x + \alpha_2 * y$$

gdzie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ są współczynnikami specyficznymi dla danego trójkąta, na którym się odbywa interpolacja.

Biorąc wierzchołki trójkątów za węzły interpolacji i korzystając z założenia, że dla węzłów interpolacji spełniony jest warunek:

$$p(x_i, y_i) = f(x_i, y_i)$$

gdzie (x_i, y_i) jest węzłem interpolacji, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+h & b \\ 1 & a+h & b+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a, b) \\ f(a+h, b) \\ f(a+h, b+h) \end{bmatrix}$$

dla trójkąta powyżej przekątnej, oraz:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+h & b \\ 1 & a+h & b+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a,b) \\ f(a+h,b) \\ f(a+h,b+h) \end{bmatrix}$$

dla trójkąta poniżej przekątnej. Rozwiązując te układy równań otrzymujemy współczynniki potrzebne do wyznaczenia funkcji interpolującej p.

4 Warunek stopu

Podział zagęszczamy (zwiększamy parametr n), dopóki błąd średniokwadratowy mierzony w środkach ciężkości trójkątów jest większy od zadanej dokładności ε.

Obliczenia kontynuujemy dopóki spełniony jest warunek:

$$\frac{\sum_{(x_j,y_i)}(f(x_j,y_i) - p(x_j,y_i))^2}{2n^2} \geqslant \varepsilon$$

gdzie punkty (x_j, y_i) są środkami ciężkości kolejnych trójkątów.

5 Poprawność metody

Metoda na ogół jest poprawna, jednak podczas testów zdarzało się tak, że funkcja interpolująca p nie miała odległych wartości w środkach ciężkości trójkątów, a poza nimi znacznie różniła się od funkcji interpolowanej f. Oznaczało to, że warunek stopu został osiągnięty po zaledwie kilku próbach (n około 3), natomiast interpolacja była niedokładna.

Były to jednak nieliczne przypadki. W większości metoda zachowywała się poprawnie i dawała dobre wyniki.

6 Przykłady

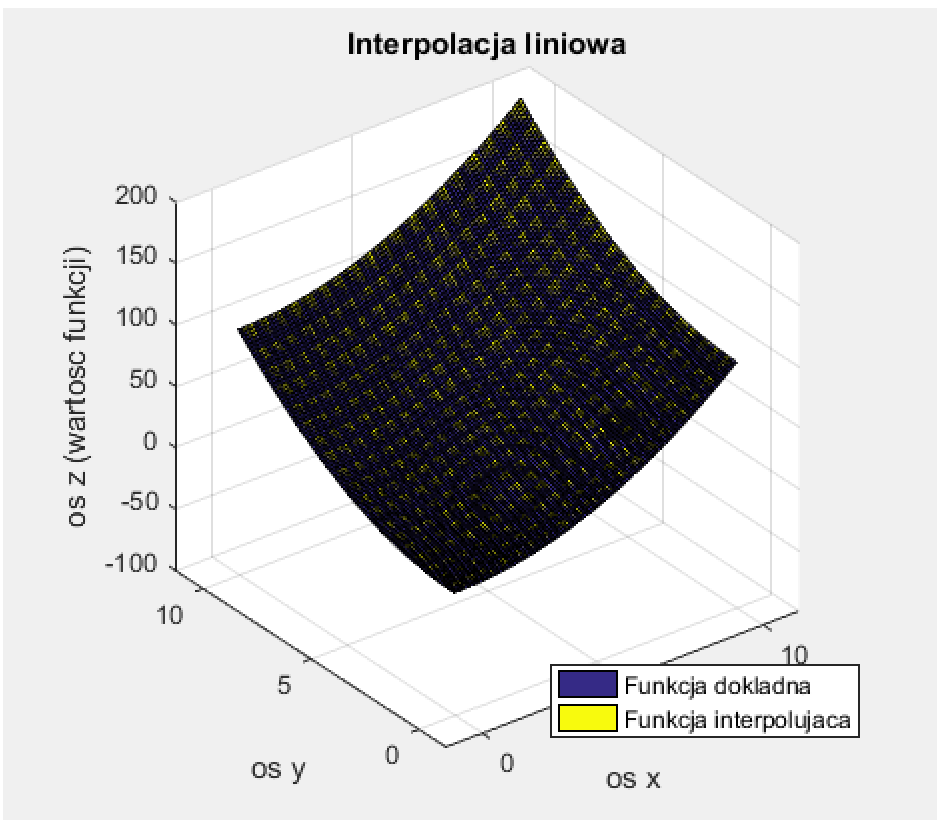
Uzupełnić.

Przykład 1

Przykład 2

Przykład 3

Przykład 4 Funkcja $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 10.
$\varepsilon = 10^{-5}$



Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 119$ (28322 trójkątów przystających).
Podział trwał 17248.057768 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 403.329582 ms. Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 29.678268 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy $9.85025 * 10^{-6}$ (zadano 10^{-5}).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 8.104837 ms.

7 Wnioski

1. Istnieją funkcje, które szybko osiągają warunek stopu, ponieważ funkcja interpolująca osiąga wartości zbliżone do dokładnych w środkach ciężkości, natomiast znacznie inne poza nimi.

2. Osiągnięcie dużej dokładności (poniżej $\varepsilon = 10^{-4}$) na dużym obszarze ($H \geqslant 10$) wymaga sporej ilości obliczeń (przykład 4)

8 Funkcja do testowania

9 Interfejs graficzny

10 Bibliografia