Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2, laboratorium 1

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

24 października 2016

1 Zadanie

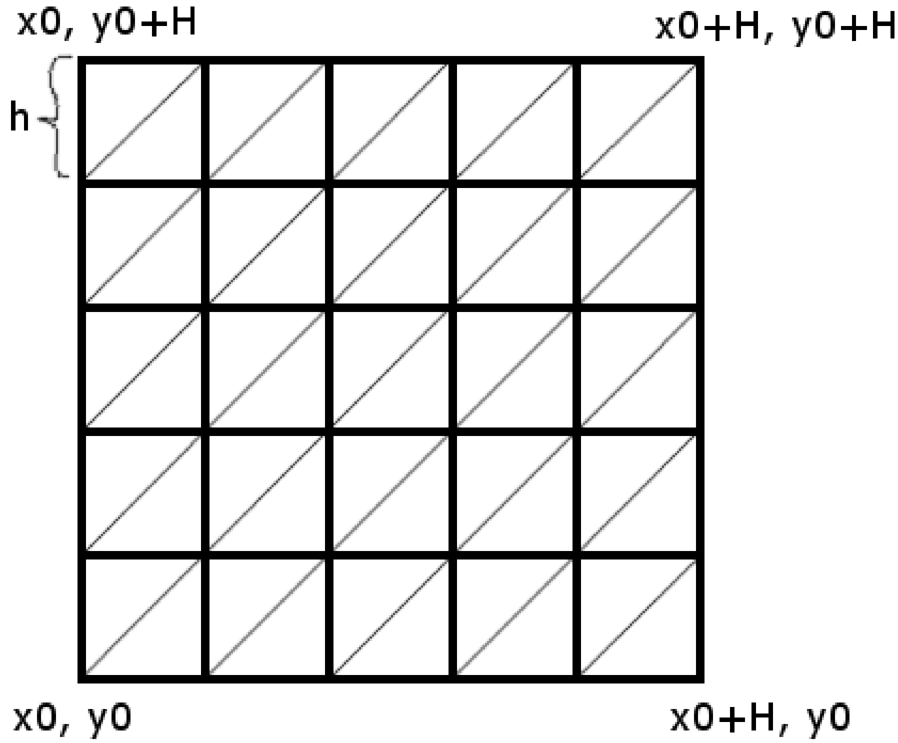
Temat **2**, zadanie **49**:

Interpolacja funkcjami liniowymi na kwadracie podzielonym na $2n^2$ trójkątów przystających. Zagęszczanie podziału kwadratu, aż do osiągnięcia błędu średniokwadratowego, mierzonego w środkach ciężkości trójkątów, mniejszego od ε.

2 Opis metody

Mając funkcję interpolowaną $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H, y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + H\}$, $H, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ opisaną na kwadracie o boku H, którego lewy dolny wierzchołek ma współrzędne (x_0, y_0), należy skonstruować interpolującą funkcję sklejaną $p : D \to \mathbb{R}$ złożoną z funkcji opisanych na pojedynczych trójkątach przystających, dzielących ten kwadrat.

Dziedzinę funkcji f należy podzielić na n części wzdłuż osi X oraz osi Y, co daje n^2 kwadratów, a następnie każdy kwadrat można podzielić względem dowolnej przekątnej na dwa trójkąty. W moim rozwiązaniu użyłem przekątnej o współczynniku kierunkowym równym 1.



Rysunek 1: Podział dziedziny funkcji f

3 Implementacja metody

Przyjmijmy, że punkt $(x_0, y_0) \in D$ to lewy dolny wierzchołek dziedziny. Startując z parametrem $n = 1$ należy podzielić kwadrat na n^2 kwadratów przystających (n podziałów wzdłuż osi X, n podziałów wzdłuż osi Y), a następnie podzielić każdy z nich na dwa prostokątne trójkąty przystające, których przeciwprostokątną będzie przekątna kwadratu o współczynniku kierunkowym równym 1.

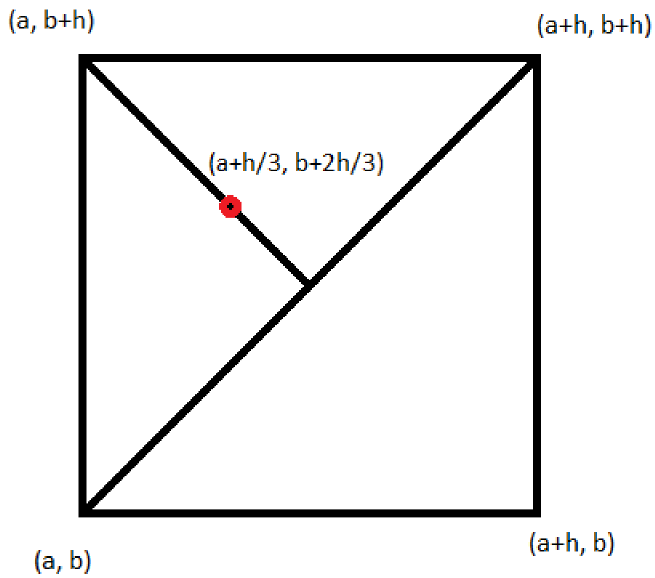
Niech $h = \frac{H}{n}$ będzie długością boku każdego z mniejszych kwadratów.

Rozważmy jeden z kwadratów po podziale, będący w i-tym rzędzie i j-tej kolumnie. Wtedy jego lewy dolny wierzchołek ma współrzędne $(a, b) = (x_0 + (j-1)h, y_0 + (i-1)h)$.

Wierzchołki trójkąta powyżej przekątnej kwadratu mają współrzędne (a, b), $(a + h, b + h)$, $(a, b + h)$, a jego środek ciężkości znajduje się w punkcie $(a + \frac{h}{3}, b + \frac{2}{3}h)$.

Wierzchołki trójkąta poniżej przekątnej kwadratu mają współrzędne (a, b), $(a + h, b)$, $(a + h, b + h)$, a jego środek ciężkości znajduje się w punkcie $(a + \frac{2}{3}h, b + \frac{h}{3})$.

Na rysunku 2 został przedstawiony podział kwadratu na dwa trójkąty przystające, oraz środek ciężkości jednego z trójkątów.



Rysunek 2: Środek ciężkości trójkąta dzielącego kwadrat

Interpolacja będzie za pomocą funkcji liniowych, więc każda z funkcji p ma równanie:

$$p(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

gdzie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ są współczynnikami specyficznymi dla danego trójkąta, na którym się odbywa interpolacja.

Biorąc wierzchołki trójkątów za węzły interpolacji i korzystając z założenia, że dla węzłów interpolacji spełniony jest warunek:

$$p(x_i, y_i) = f(x_i, y_i)$$

gdzie (x_i, y_i) są węzłami interpolacji, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+h & b \\ 1 & a+h & b+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a, b) \\ f(a+h, b) \\ f(a+h, b+h) \end{bmatrix}$$

dla trójkąta powyżej przekątnej, oraz:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+h & b \\ 1 & a+h & b+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a,b) \\ f(a+h,b) \\ f(a+h,b+h) \end{bmatrix}$$

dla trójkąta poniżej przekątnej. Rozwiązując te układy równań otrzymujemy współczynniki potrzebne do wyznaczenia funkcji interpolującej p.

4 Warunek stopu

Podział zagęszczamy (zwiększamy parametr n), dopóki błąd średniokwadratowy mierzony w środkach ciężkości trójkątów jest większy od zadanej dokładności ε.

Obliczenia kontynuujemy dopóki spełniony jest warunek:

$$\frac{\sum_{(x_j,y_i)}(f(x_j,y_i) - p(x_j,y_i))^2}{2n^2} \geqslant \varepsilon$$

gdzie punkty (x_j, y_i) są środkami ciężkości kolejnych trójkątów.

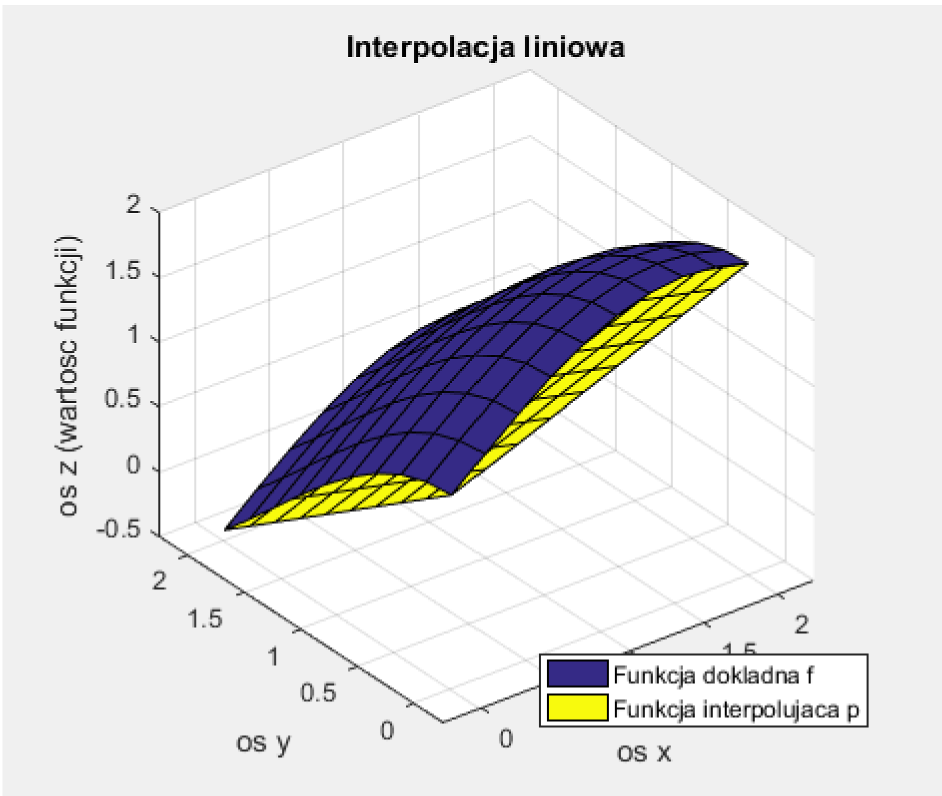
5 Poprawność metody

Metoda ta jest w ogólnym przypadku dość dokładna i spełnia założenia interpolacji (wartości w węzłach funkcji p równe wartościom funkcji f).

Mogą zdarzyć się przypadki funkcji, których wartości w środkach ciężkości trójkątów od razu będą bliskie wartościom dokładnym, przez co interpolacja się zakończy po pierwszym podziale, ale jest to wtedy wina warunku stopu, a nie samej metody. Niestety nie udało mi się znaleźć przykładu, który by to zobrazował.

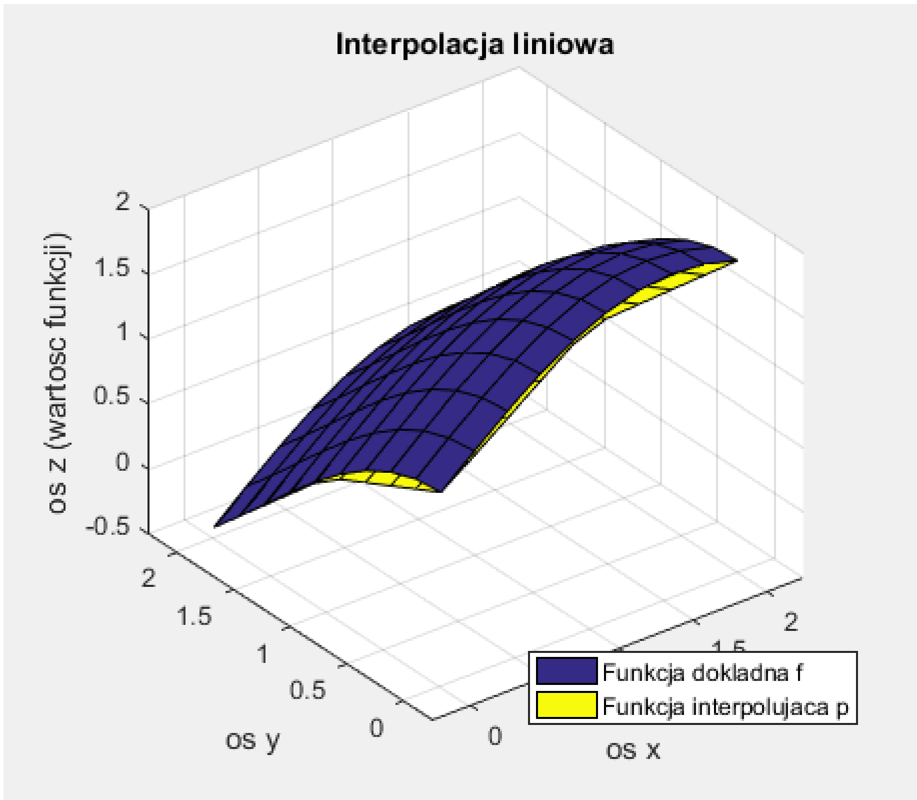
6 Przykłady

Przykład 1 Funkcja $f(x, y) = \sin x + \cos y$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 2.
$\varepsilon = 10$



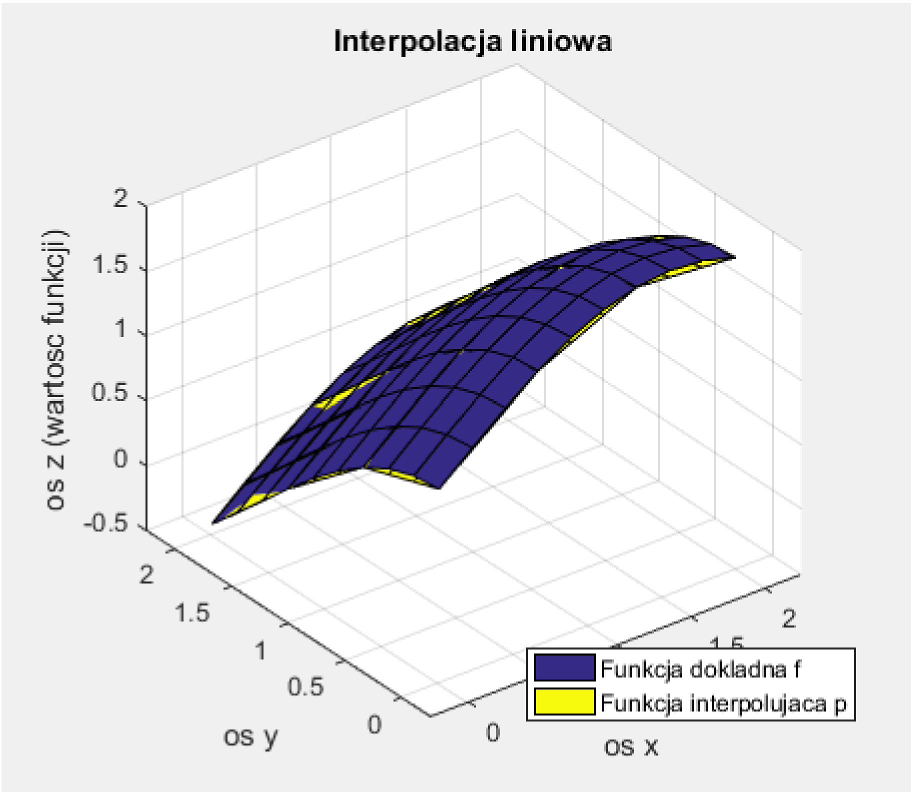
Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 1$ (2 trójkątów przystających).
Podział trwał 0.290355 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 0.155429 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.061506 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 1.52815 (zadano 10).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 2.520103 ms.

Przykład 2 Funkcja $f(x, y) = \sin x + \cos y$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 2.
$\varepsilon = 1$



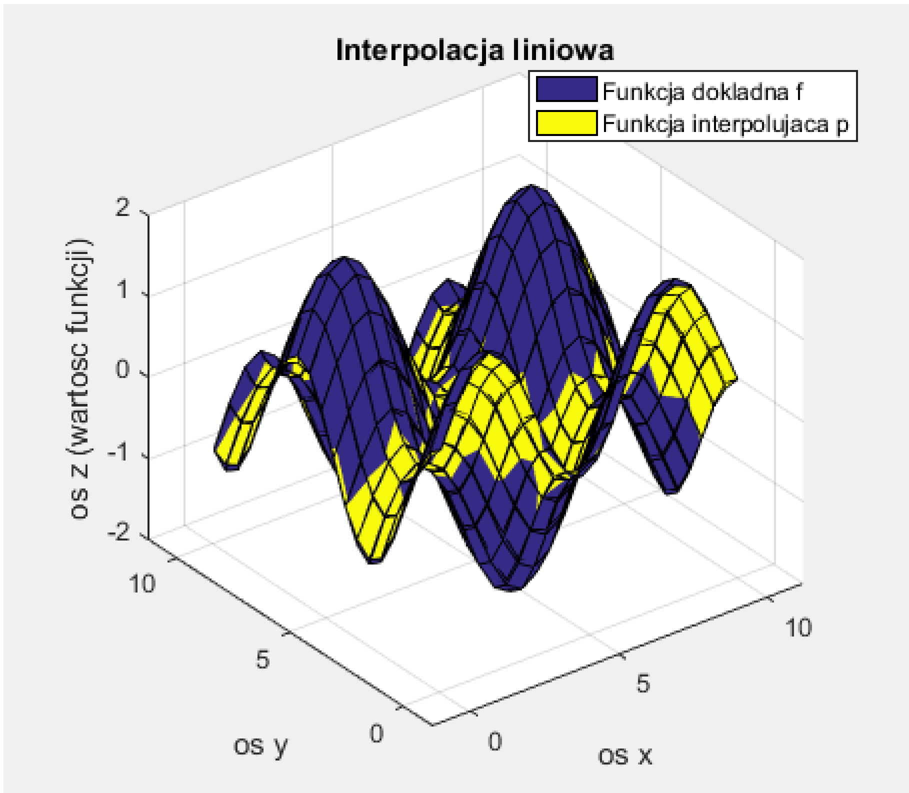
Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 2$ (8 trójkątów przystających).
Podział trwał 2.069056 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 0.305593 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.181749 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 0.199071 (zadano 1).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 1.307705 ms.

Przykład 3 Funkcja $f(x, y) = \sin x + \cos y$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 2.
$\varepsilon = 0.1$



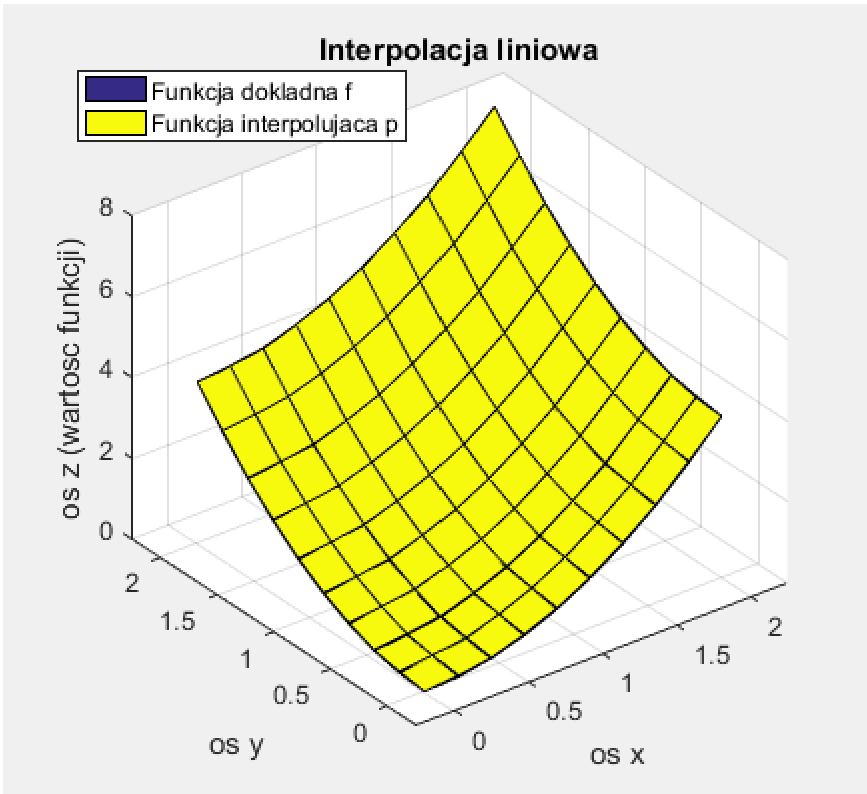
Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 3$ (18 trójkątów przystających).
Podział trwał 0.530563 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 0.215273 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.025766 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 0.0446367 (zadano 0.1).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 0.212779 ms.

Przykład 4 Funkcja $f(x, y) = \sin x + \cos y$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 10.
$\varepsilon = 0.1$



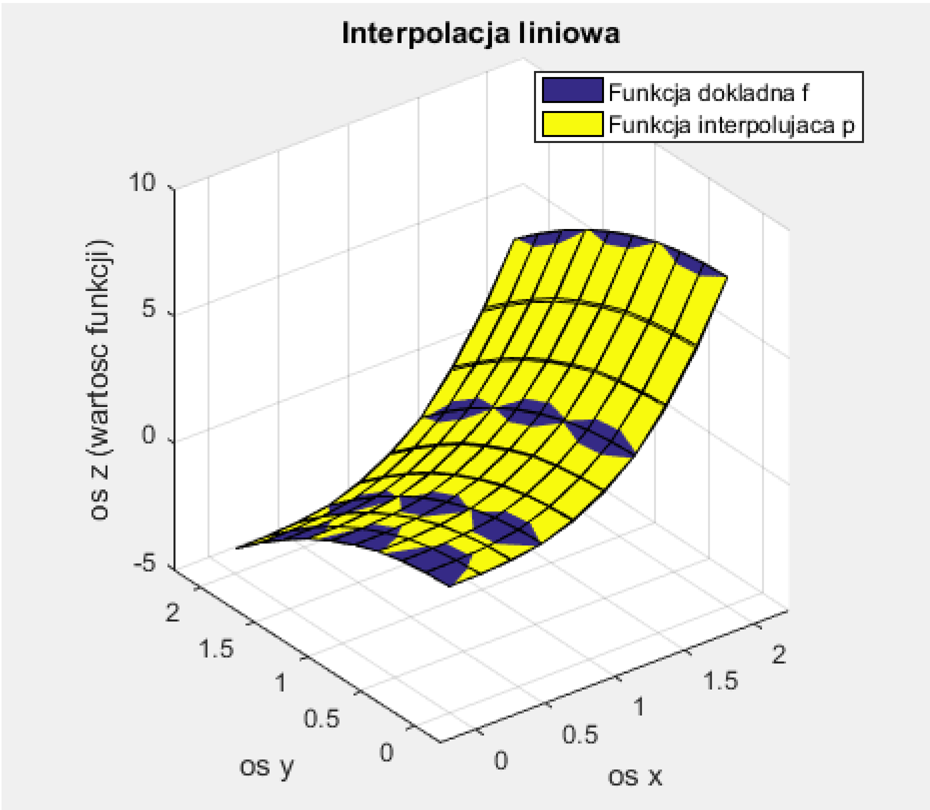
Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 12$ (288 trójkątów przystających).
Podział trwał 14.155078 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 2.846198 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.210563 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 0.0778761 (zadano 0.1).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 0.280104 ms.

Przykład 5 Funkcja: $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 2.
$\varepsilon = 0.1$



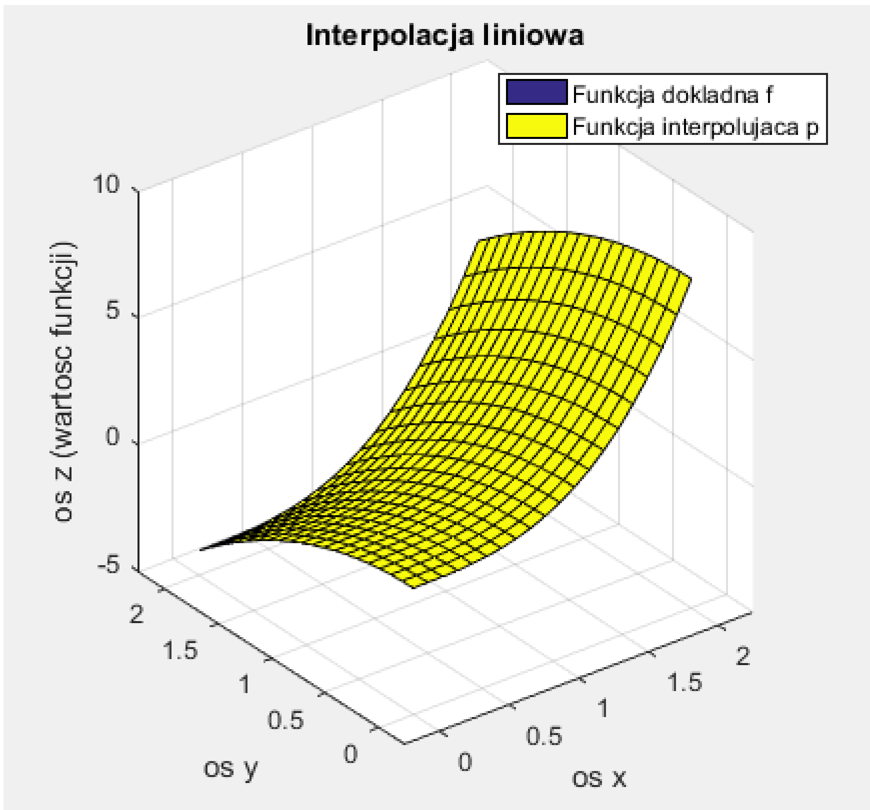
Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 5$ (50 trójkątów przystających).
Podział trwał 1.406614 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 0.547463 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.037957 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 0.0619457 (zadano 0.1).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 0.243809 ms.

Przykład 6 Funkcja: $f(x, y) = x^3 - y^2$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 2.
$\varepsilon = 0.1$



Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 6$ (72 trójkątów przystających).
Podział trwał 2.642008 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 0.755809 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.065385 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 0.0946013 (zadano 0.1).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 0.144623 ms.

Przykład 7 Funkcja: $f(x, y) = x^3 - y^2$.
Lewy dolny wierzchołek kwadratu: $(0, 0)$.
Długość boku kwadratu: 2.
$\varepsilon = 0.001$



Wyniki:
Osiągnięto zadaną dokładność przy $n = 19$ (722 trójkątów przystających).
Podział trwał 54.771794 ms.
Obliczanie ostatecznych współczynników dla funkcji interpolujących trwało 7.175479 ms.
Sprawdzanie ostatecznego błędu interpolacji trwało 0.567688 ms.
Osiągnięto błąd interpolacji równy 0.000829049 (zadano 0.001).
Obliczanie wartości do wykresu trwało 0.313351 ms.

7 Wnioski

1. Wraz ze zmniejszaniem parametru ε wykres funkcji interpolującej p zbliża się do wykresu funkcji interpolowanej f (przykłady 1, 2 oraz 3).

2. Osiągnięcie dużej dokładności (poniżej $\varepsilon = 10^{-4}$) na dużym obszarze ($H \geqslant 10$) wymaga sporej ilości obliczeń.

3. Interpolacja ta ma podobne wyniki do interpolacji z podziałem na n^2 kwadratów, ponieważ układy równań liniowych rozwiązywane dla każdego kwadratu okazują się być bardzo podobne.

8 Funkcja do testowania

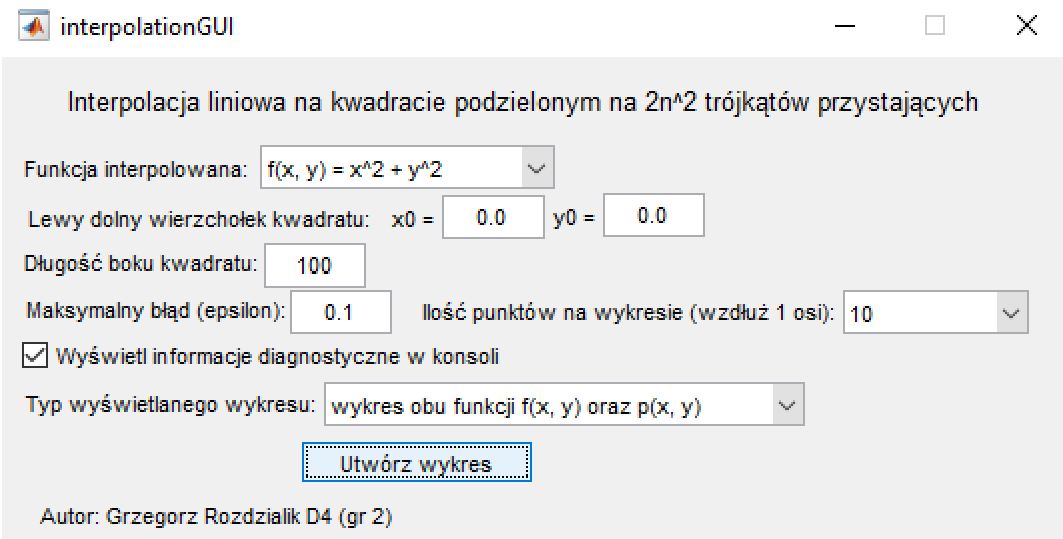
Do sprawdzenia funkcji, które nie zostały udostępnione w interfejsie graficznym należy wykorzystać funkcję *interpolateSquare*. Ta funkcja udostępnia funkcjonalność analogiczną do interfejsu graficznego.

Więcej informacji dotyczących wykorzystania funkcji *interpolateSquare* znajduje się w pliku z funkcją (*interpolateSquare.m*).

9 Interfejs graficzny

Do metody został dodany interfejs graficzny, umożliwiający wygodne testowanie metody dla różnych parametrów i różnych funkcji interpolowanych f. Aby go wywołać należy uruchomić komendę *interpolationGUI* w MATLABie.

Został on przedstawiony na rysunku 5-tym.



Rysunek 3: Interfejs graficzny

10 Bibliografia

1. P. Tatjewski *Metody numeryczne*, Warszawa: Oficyna Wydawnicza PW, 2013

2. Informacje z wykładu *Metod numerycznych 2* (wydział MiNI PW, dr Iwona Wróbel)