

Sprawozdanie

Metody Numeryczne 2, laboratorium 3

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

8 listopada 2016

1 Zadanie

Temat **3**, zadanie **33**:

Obliczanie całek

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

na obszarze

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

przez podział D na $4n^2$ trójkątów przystających i zastosowanie na każdym z nich kwadratury rzędu 4-go.

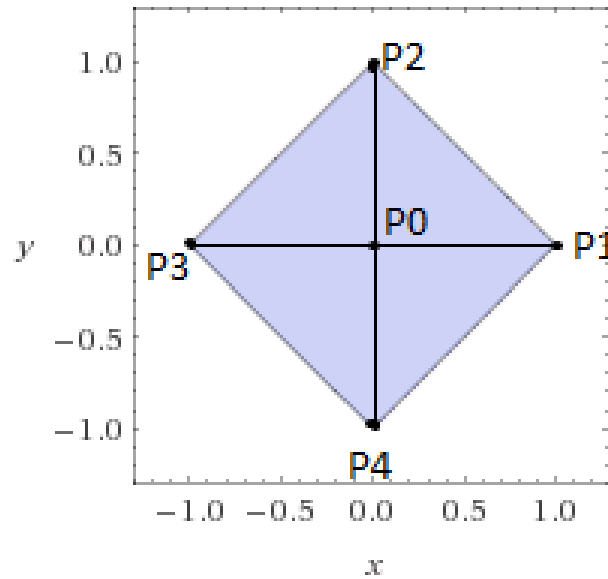
Obszar D został przedstawiony na rysunku nr 1, jest to romb o środku $P_0 = (0, 0)$ i wierzchołkach

$$P_1 = (1, 0)$$

$$P_2 = (0, 1)$$

$$P_3 = (-1, 0)$$

$$P_4 = (0, -1)$$

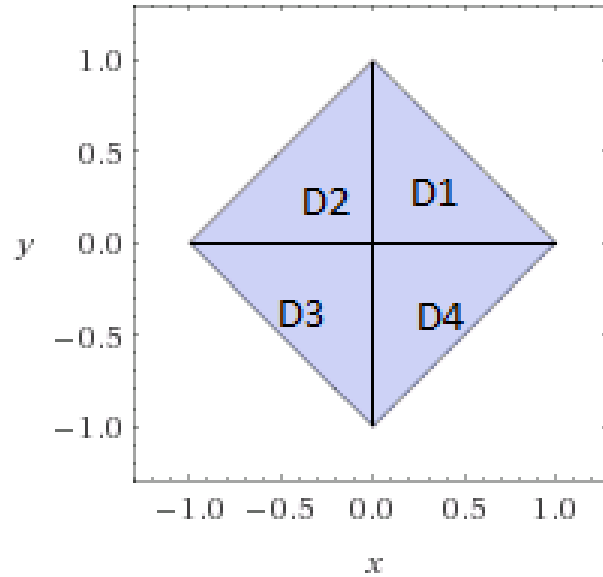


Rysunek 1: Obszar D

2 Opis metody

2.1 Podział rombu na $4n^2$ trójkątów

W celu podzielenia obszaru D na $4n^2$ trójkątów użyto podział na 4 ćwiartki D_1, D_2, D_3, D_4 na podstawie osi układu współrzędnych. Podział ten został przedstawiony na rysunku nr 2.

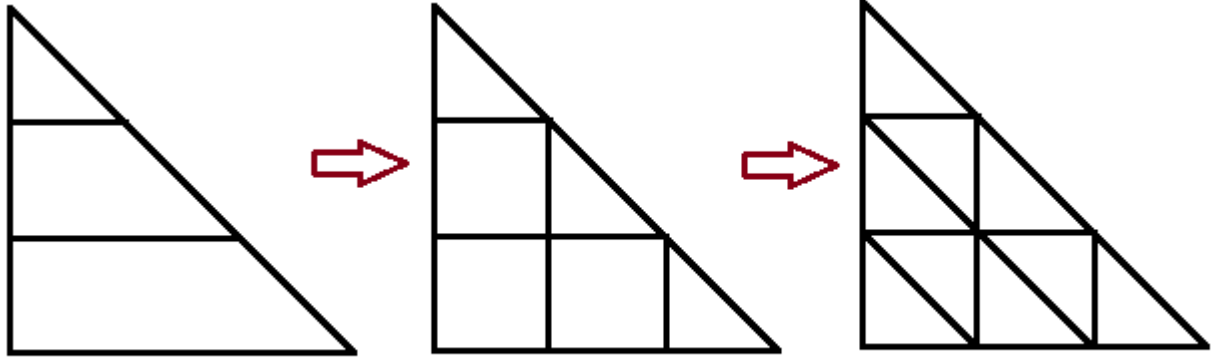


Rysunek 2: Podział D na ćwiartki

Następnie każdą z ćwiartek podzielono na n^2 trójkątów według następującej reguły:

1. Każdy bok podzielono na n równych części (punkty podziału nazwijmy węzłami).
2. Węzły leżące na dwóch różnych bokach trójkąta i równoodległe od trzeciego z boków łączymy prostymi. Proste te będą wtedy równoległe do jednego z boków.

Przykładowy schemat podziału ćwiartki D_1 z $n = 3$ (D_1 podzielono na 9 trójkątów przystających) został umieszczony na rysunku nr 3.



Rysunek 3: Podział D_1 na 9 ($= 3^2$) trójkątów

Wszystkie n^2 trójkątów po podziale mają takie samo pole, równe $p = \frac{P}{n^2}$, gdzie $P = |D_1| = |D_2| = |D_3| = |D_4|$.

Na każdym z tych trójkątów obliczamy wartość kwadratury 4-go rzędu:

$$S(f) = \frac{p}{60} \left[27f(P_{012}) + 3 \left(f(P_{01}) + f(P_{02}) + f(P_{12}) \right) + 8 \left(f(P_0) + f(P_1) + f(P_2) \right) \right] \quad (1)$$

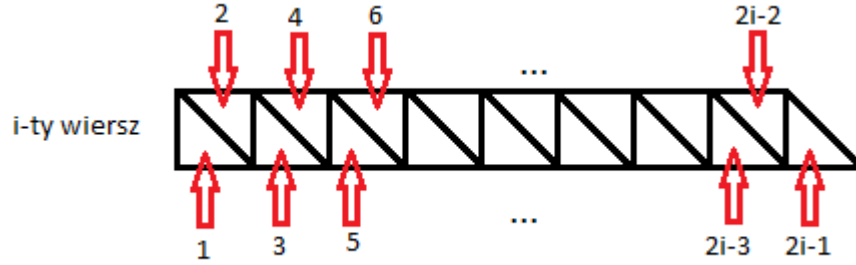
gdzie f jest zadaną funkcją podcałkową, p zdefiniowane jak poprzednio, P_0, P_1, P_2 są wierzchołkami trójkąta po podziale, $P_{i,j} = \frac{P_i + P_j}{2}$ są środkami boków trójkąta, $P_{012} = \frac{P_0 + P_1 + P_2}{3}$ jest środkiem ciężkości trójkąta.

2.2 Wyznaczanie współrzędnych wierzchołków trójkątów po podziale

Aby zastosować kwadraturę (1) należy znać współrzędne wierzchołków. Zauważmy, że trójkąty po podziale można pogrupować w wiersze tak, że w

pierwszym wierszu znajduje się jeden trójkąt, a w każdym kolejnym są o 2 więcej. Ostatni wiersz (n -ty) posiada $2n - 1$ trójkątów.

W i -tym wierszu jest $2i - 1$ trójkątów. Podział i -tego wiersza wraz z numerami kolejnych trójkątów został pokazany na rysunku nr 4.



Rysunek 4: Podział i -tego wiersza

Niech P_0, P_1, P_2 będą współrzędnymi wierzchołków trójkąta przed podziałem zdefiniowanym analogicznie jak na rysunku 1. Podział na wiersze rozpoczynamy od P_2 , zatem trójkąt po podziale, którego jednym z wierzchołków będzie P_2 znajdzie się w pierwszym wierszu.

Zdefiniujmy następujące zmienne:

$$h_x = \frac{P_1 - P_0}{n}$$

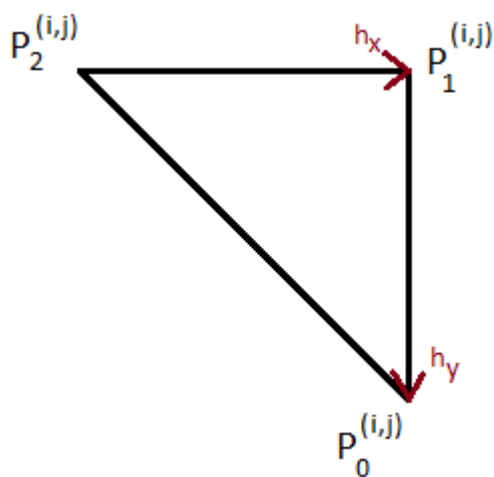
$$h_y = \frac{P_0 - P_2}{n}$$

Wtedy h_x będzie wektorem, o jaki należy się przesunąć, aby uzyskać współrzędne kolejnej kolumny, natomiast h_y będzie wektorem, o jaki należy się przesunąć, aby uzyskać współrzędne kolejnego wiersza. Zakładam, że każda kolumna oprócz ostatniej w danym wierszu posiada 2 trójkąty.

Zatem jeżeli trójkąt ma nieparzysty indeks, to znajduje się bliżej kolejnego wiersza ("na dole"), a te z indeksem parzystym są bliżej poprzedniego wiersza ("na górze"), jak na rysunku 4.

Aby wyznaczyć współrzędne trójkąta o indeksach (i, j) , gdzie $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 2i - 1\}$, w oparciu o współrzędne wierzchołka P_2 należy rozważyć dwa przypadki:

I $2 \mid j$



Rysunek 5: Trójkąt po podziale, gdy j - parzyste

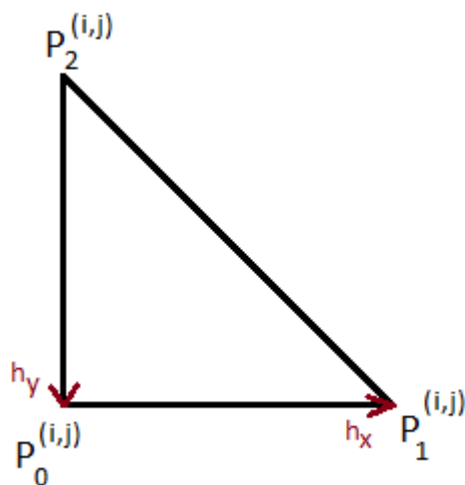
Wtedy

$$P_2^{(i,j)} = P_2 + (i - 1)h_y + \frac{j - 2}{2}h_x$$

$$P_1^{(i,j)} = P_2^{(i,j)} + h_x$$

$$P_0^{(i,j)} = P_1^{(i,j)} + h_y$$

II 2/ j



Rysunek 6: Trójkąt po podziale, gdy j - nieparzyste

Wtedy

$$P_2^{(i,j)} = P_2 + (i-1)h_y + \frac{j-1}{2}h_x$$

$$P_0^{(i,j)} = P_2^{(i,j)} + h_y$$

$$P_1^{(i,j)} = P_0^{(i,j)} + h_x$$

gdzie $P_k^{(i,j)}$ oznacza współrzędne k -tego wierzchołka trójkąta o indeksach (i, j) po podziale (analogicznie do rysunków w podpunktach).

3 Implementacja metody

Metoda zaimplementowana jest na podstawie czterech funkcji oraz jednego skryptu pozwalającego na łatwe jej wykorzystanie i porównanie z funkcją *integral2* z MATLABa:

- $[h_x, h_y, P] = \text{computeDivisionProperties}(P_0, P_1, P_2, n)$
Funkcja oblicza własności podziału trójkąta o wierzchołkach P_0, P_1, P_2 na n^2 trójkątów przystających (zgodnie z powyższym opisem metody). Zwraca wektory h_x, h_y oraz pole trójkąta P po podziale.
- $[P_0^{(i,j)}, P_1^{(i,j)}, P_2(i, j)] = \text{computeSingleTriangleCoordinates}(P_2, h_x, h_y, i, j)$
Funkcja oblicza współrzędne trójkąta o indeksie (i, j) po podziale na podstawie współrzędnej P_2 trójkąta przed podziałem oraz wektorów h_x, h_y .
- $S = \text{integrateSingleTriangle}(f, P_0, P_1, P_2, P)$
Funkcja przybliża wartość całki z funkcji podcałkowej f na trójkącie o polu P i wierzchołkach P_0, P_1, P_2 , używając do tego kwadratury (1).
- $S = \text{numericalInterpolationTriangle}(f, P_0, P_1, P_2, n)$
Funkcja przybliża wartość całki z funkcji podcałkowej f na trójkącie o wierzchołkach P_0, P_1, P_2 , dzieląc go na n^2 trójkątów przystających.
Funkcja używa *computeDivisionProperties* do uzyskania własności podziału (h_x, h_y, P) , a następnie wykonuje przybliżenie całki na każdym z trójkątów po podziale używając funkcji *computeSingleTriangleCoordinates* do uzyskania współrzędnych tego trójkąta, oraz *integrateSingleTriangle* do uzyskania wartości kwadratury.
- *integrateDiamond*
Skrypt pozwalający określić funkcję podcałkową f oraz parametr n określający liczbę podziałów. Wykonuje zadanie - przybliża całkę na obszarze D (rysunek 1).
Skrypt dodatkowo podaje informacje o szybkości działania metody oraz porównuje ją z funkcją *integral2* dostępną w MATLABie.

Funkcji można używać do przybliżania całki na dowolnym trójkącie, zatem nie musi być to romb podzielony na 4 trójkąty. Wystarczy zmodyfikować skrypt *integrateDiamond*.

Nie jest to jednak tematem zadania, więc postanowiono zostawić to jako zadanie dla ciekawego czytelnika.

4 Poprawność metody

Kwadratura (1) jest rzędu 4, zatem dla wielomianów stopnia co najwyżej 3 metoda daje poprawne wyniki, nawet z $n = 1$. Dla wielomianów stopnia wyższego przybliżenie nie jest dokładne, ale dokładność wzrasta wraz ze wzrostem parametru n .

5 Przykłady

Przykład 1 TODO

6 Wnioski

1. TODO

7 Skrypt do testowania

Skrypt *integrateDiamond* pozwala na ustalanie funkcji podcałkowej f oraz parametru n określającego ilość podziałów obszaru D . Wyświetla on także czas przybliżania całki tą metodą oraz porównuje wyniki z funkcją *integral2* dostępną w MATLABie.

Skrypt zgodnie z opisem metody dzieli obszar D na 4 trójkąty przystające, a następnie każdy z nich na n^2 trójkątów przystających i na nich stosuje kwadraturę.

Pokazuje on także jak używać funkcji stworzonych na potrzeby tej metody do przybliżania całki na dowolnym trójkącie.

8 Bibliografia

1. Informacje z wykładu *Metod numerycznych 2* (wydział MiNI PW, dr Iwona Wróbel) (w szczególności wzór na kwadraturę rzędu 4 na trójkącie)