

Sprawozdanie

Metody Numeryczne 2, laboratorium 3

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

14 listopada 2016

1 Zadanie

Temat **3**, zadanie **33**:

Obliczanie całek

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

na obszarze

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

przez podział D na $4n^2$ trójkątów przystających, i zastosowanie na każdym z nich kwadratury rzędu 4-go.

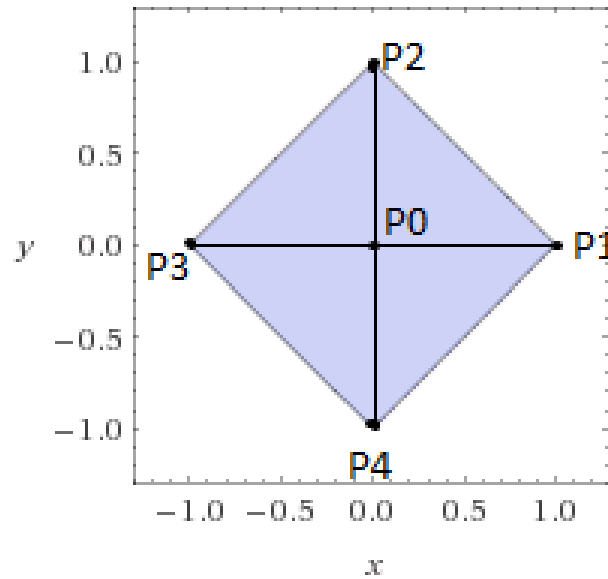
Obszar D został przedstawiony na rysunku nr 1, jest to romb o środku $P_0 = (0, 0)$ i wierzchołkach

$$P_1 = (1, 0)$$

$$P_2 = (0, 1)$$

$$P_3 = (-1, 0)$$

$$P_4 = (0, -1)$$

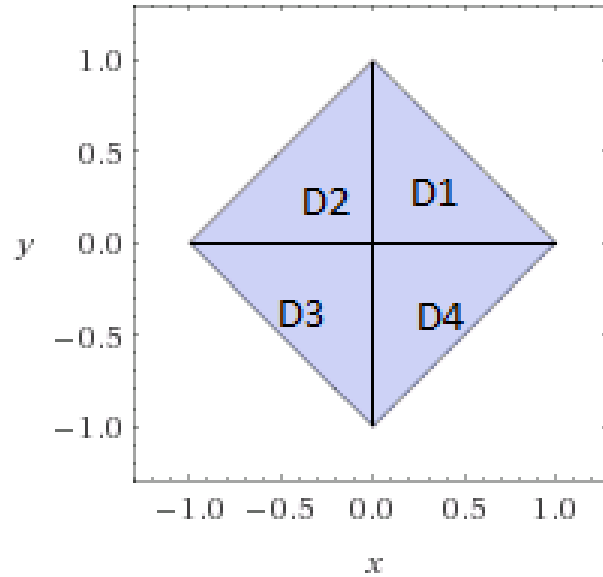


Rysunek 1: Obszar D

2 Opis metody

2.1 Podział rombu na $4n^2$ trójkątów

W celu podzielenia obszaru D na $4n^2$ trójkątów użyto podział na 4 ćwiartki D_1, D_2, D_3, D_4 na podstawie osi układu współrzędnych. Podział ten został przedstawiony na rysunku nr 2.

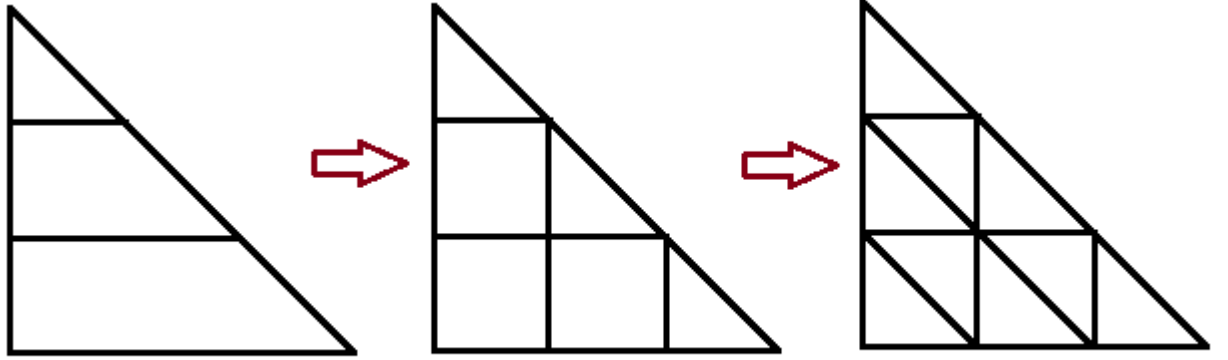


Rysunek 2: Podział D na ćwiartki

Następnie każdą z ćwiartek podzielono na n^2 trójkątów według następującej reguły:

1. Każdy bok podzielono na n równych części (punkty podziału nazwijmy węzłami).
2. Węzły leżące na dwóch różnych bokach trójkąta i równoodległe od trzeciego z boków łączymy prostymi. Proste te będą wtedy równoległe do jednego z boków.

Przykładowy schemat podziału ćwiartki D_1 z $n = 3$ (D_1 podzielono na 9 trójkątów przystających) został umieszczony na rysunku nr 3.



Rysunek 3: Podział D_1 na 9 ($= 3^2$) trójkątów

Wszystkie n^2 trójkątów po podziale mają takie samo pole, równe $p = \frac{P}{n^2}$, gdzie $P = |D_1| = |D_2| = |D_3| = |D_4|$.

Na każdym z tych trójkątów obliczamy wartość kwadratury 4-go rzędu:

$$S(f) = \frac{p}{60} \left[27f(P_{012}) + 8 \left(f(P_{01}) + f(P_{02}) + f(P_{12}) \right) + 3 \left(f(P_0) + f(P_1) + f(P_2) \right) \right] \quad (1)$$

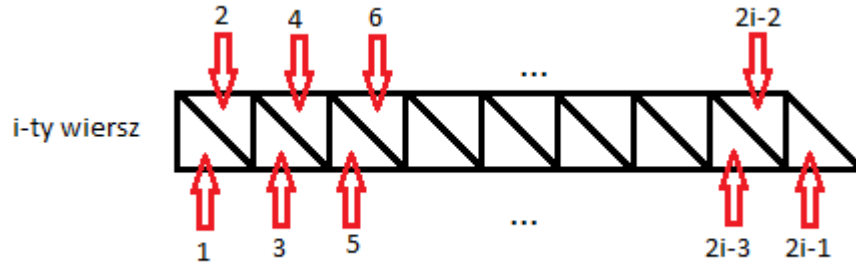
gdzie f jest zadaną funkcją podcałkową, p zdefiniowane jak poprzednio, P_0, P_1, P_2 są wierzchołkami trójkąta po podziale, $P_{i,j} = \frac{P_i + P_j}{2}$ są środkami boków trójkąta, $P_{012} = \frac{P_0 + P_1 + P_2}{3}$ jest środkiem ciężkości trójkąta.

2.2 Wyznaczanie współrzędnych wierzchołków trójkątów po podziale

Aby zastosować kwadraturę (1) należy znać współrzędne wierzchołków. Zauważmy, że trójkąty po podziale można pogrupować w wiersze tak, że w

pierwszym wierszu znajduje się jeden trójkąt, a w każdym kolejnym są o 2 więcej. Ostatni wiersz (n -ty) posiada $2n - 1$ trójkątów.

W i -tym wierszu jest $2i - 1$ trójkątów. Podział i -tego wiersza wraz z numerami kolejnych trójkątów został pokazany na rysunku nr 4.



Rysunek 4: Podział i -tego wiersza

Niech P_0, P_1, P_2 będą współrzędnymi wierzchołków trójkąta przed podziałem zdefiniowanym analogicznie jak na rysunku 1. Podział na wiersze rozpoczynamy od P_2 , zatem trójkąt po podziale, którego jednym z wierzchołków będzie P_2 znajdzie się w pierwszym wierszu.

Zdefiniujmy następujące zmienne:

$$h_x = \frac{P_1 - P_0}{n}$$

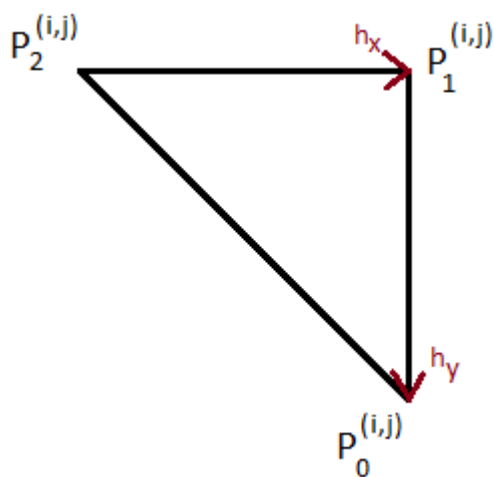
$$h_y = \frac{P_0 - P_2}{n}$$

Wtedy h_x będzie wektorem, o jaki należy się przesunąć, aby uzyskać współrzędne kolejnej kolumny, natomiast h_y będzie wektorem, o jaki należy się przesunąć, aby uzyskać współrzędne kolejnego wiersza. Zakładam, że każda kolumna oprócz ostatniej w danym wierszu posiada 2 trójkąty.

Zatem jeżeli trójkąt ma nieparzysty indeks, to znajduje się bliżej kolejnego wiersza ("na dole"), a te z indeksem parzystym są bliżej poprzedniego wiersza ("na górze"), jak na rysunku 4.

Aby wyznaczyć współrzędne trójkąta o indeksach (i, j) , gdzie $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 2i - 1\}$, w oparciu o współrzędne wierzchołka P_2 należy rozważyć dwa przypadki:

I $2 \mid j$



Rysunek 5: Trójkąt po podziale, gdy j - parzyste

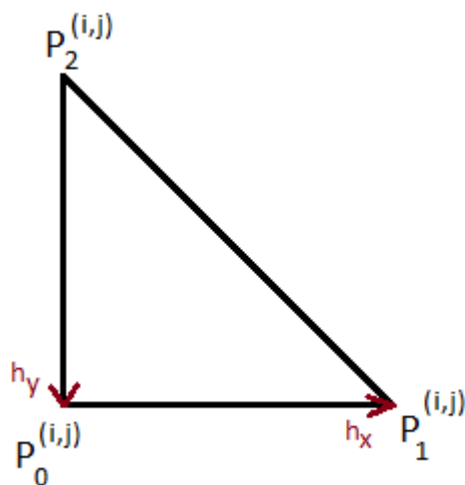
Wtedy

$$P_2^{(i,j)} = P_2 + (i - 1)h_y + \frac{j - 2}{2}h_x$$

$$P_1^{(i,j)} = P_2^{(i,j)} + h_x$$

$$P_0^{(i,j)} = P_1^{(i,j)} + h_y$$

II 2 // j



Rysunek 6: Trójkąt po podziale, gdy j - nieparzyste

Wtedy

$$P_2^{(i,j)} = P_2 + (i-1)h_y + \frac{j-1}{2}h_x$$

$$P_0^{(i,j)} = P_2^{(i,j)} + h_y$$

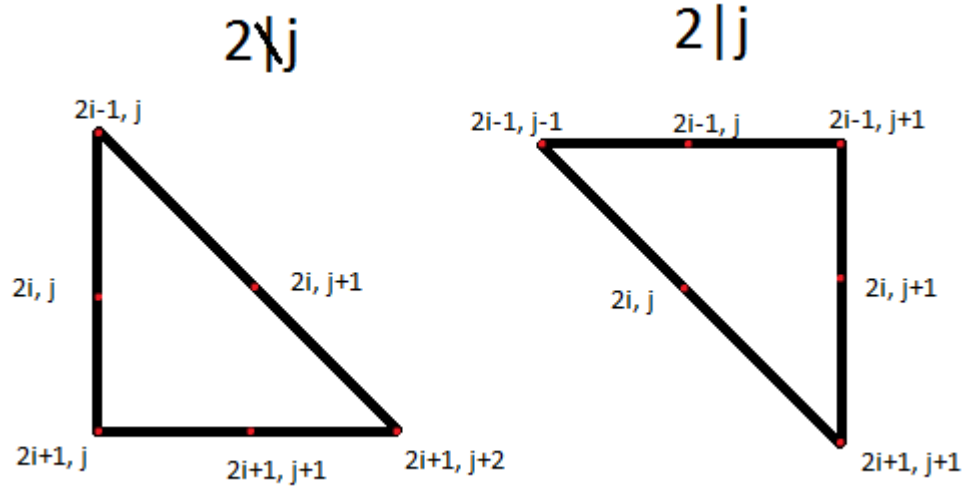
$$P_1^{(i,j)} = P_0^{(i,j)} + h_x$$

gdzie $P_k^{(i,j)}$ oznacza współrzędne k -tego wierzchołka trójkąta o indeksach (i, j) po podziale (analogicznie do rysunków w podpunktach).

3 Implementacja metody

Metoda zaimplementowana jest na podstawie czterech funkcji oraz jednego skryptu pozwalającego na łatwe jej wykorzystanie i porównanie z funkcją *integral2* z MATLABa:

- $[h_x, h_y, P] = \text{computeDivisionProperties}(P_0, P_1, P_2, n)$
 Funkcja oblicza własności podziału trójkąta o wierzchołkach P_0, P_1, P_2 na n^2 trójkątów przystających (zgodnie z powyższym opisem metody). Zwraca wektory h_x, h_y oraz pole trójkąta P po podziale.
- $[P_0^{(i,j)}, P_1^{(i,j)}, P_2(i, j)] = \text{computeSingleTriangleCoordinates}(P_2, h_x, h_y, i, j)$
 Funkcja oblicza współrzędne trójkąta o indeksie (i, j) po podziale na podstawie współrzędnej P_2 trójkąta przed podziałem oraz wektorów h_x, h_y .
- $\text{nodeValues} = \text{tabulateIntegrationNodeValues}(f, P_2, n, h_x, h_y)$
 Funkcja tablicuje wartości w wierzchołkach oraz środkach boków trójkątów w celu późniejszego wielokrotnego wykorzystania. Jest to rozwiązanie bardziej efektywne niż obliczanie tych wartości każdorazowo dla poszczególnych trójkątów. Korzysta z wcześniej obliczonych parametrów h_x, h_y , ilości podziałów n oraz współrzędnej P_2 trójkąta, na którym stosowana jest kwadratura. Zwraca macierz rozmiaru $2n + 1 \times 2n + 1$.
 Powiązanie wartości z tej macierzy z współrzędnymi trójkąta zostało zilustrowane na rysunku 7.



Rysunek 7: Indeksy w stablicowanej macierzy dla trójkąta o indeksach (i, j)

- $S = \text{integrateSingleTriangle}(f, P_0, P_1, P_2, P, i, j, \text{nodeValues})$

Funkcja przybliża wartość całki z funkcji podcałkowej f na trójkącie o polu P i wierzchołkach P_0, P_1, P_2 , używając do tego kwadratury (1). Trójkąt znajduje się na j -tej pozycji w i -tym wierszu podziału. Stablicowane wartości funkcji są przekazane w macierzy *nodeValues* (jest to macierz zwrócona przez funkcję *tabulateIntegrationNodeValues*).

- $S = \text{numericalIntegrationTriangle}(f, P_0, P_1, P_2, n)$

Funkcja przybliża wartość całki z funkcji podcałkowej f na trójkącie o wierzchołkach P_0, P_1, P_2 , dzieląc go na n^2 trójkątów przystających.

Funkcja używa *computeDivisionProperties* do uzyskania własności podziału (h_x, h_y, P) , a następnie wykonuje przybliżenie całki na każdym z trójkątów po podziale używając funkcji *computeSingleTriangleCoordinates* do uzyskania współrzędnych tego trójkąta, oraz *integrateSingleTriangle* do uzyskania wartości kwadratury.

- *integrateDiamond*

Skrypt pozwalający określić funkcję podcałkową f oraz parametr n określający liczbę podziałów. Wykonuje zadanie - przybliża całkę na obszarze D (rysunek 1).

Skrypt dodatkowo podaje informacje o szybkości działania metody oraz porównuje ją z funkcją *integral2* dostępną w MATLABie.

Funkcji można używać do przybliżania całki na dowolnym trójkącie, zatem nie musi być to romb podzielony na 4 trójkąty. Wystarczy zmodyfikować skrypt *integrateDiamond*.

Nie jest to jednak tematem zadania, więc postanowiono zostawić to jako zadanie dla ciekawego czytelnika.

4 Poprawność metody

Kwadratura (1) jest rzędu 4, zatem dla wielomianów stopnia co najwyżej 3 metoda daje poprawne wyniki, nawet z $n = 1$. Dla wielomianów stop-

nia wyższego przybliżenie nie jest dokładne, ale dokładność wzrasta wraz ze wzrostem parametru n .

5 Przykłady

W przykładach najpierw została obliczona prawdziwa wartość całki, a następnie porównane w tabeli wyniki metody z zadania oraz funkcji *integral2*.

Przykład 1 Całka z wielomianu stopnia 3.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D x^3 dx dy = 0$$

$n = 1$

	metoda z zadania	funkcja <i>integral2</i>
przybliżenie całki	0	1.47451×10^{-17}
czas obliczania	0.76 ms	4.13 ms

Metoda z zadania jest dokładna (i powinna być, gdyż rząd kwadratury jest równy 4, a funkcja podcałkowa jest wielomianem stopnia 3), a także szybsza.

Przykład 2 Całka z wielomianu stopnia 4.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D x^4 dx dy = \frac{2}{15} \approx 0.133333$$

$n = 1$

	metoda z zadania	funkcja <i>integral2</i>
przybliżenie całki	0.144444	0.133333
czas obliczania	0.71 ms	4.7 ms

W tym przypadku metoda z zadania okazała się gorsza od funkcji dostępnej w MATLABie, zarówno pod względem dokładności, jak i szybkości działania.

Przykład 3 Zwiększenie parametru n w stosunku do poprzedniego przykładu.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D x^4 dx dy = \frac{2}{15} \approx 0.133333$$

$n = 10$

	metoda z zadania	funkcja <i>integral2</i>
przybliżenie całki	0.133334	0.133333
czas obliczania	12.45 ms	6.06 ms

Przy zwiększeniu ilości podziałów metoda osiąga lepszą dokładność, jednakże zmniejsza się jej szybkość. W tym przypadku nadal jest gorsza od funkcji *integral2*.

Podobną dokładność osiąga dopiero dla $n = 17$, jednakże wtedy jej czas działania około dziesięciokrotnie większy od MATLABowej alternatywy.

Przykład 4 Funkcja podcałkowa nie będąca wielomianem.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (\sin x + \cos y) dx dy = 4 - 4 \cos 1 \approx 1.83879$$

$n = 1$

	metoda z zadania	funkcja <i>integral2</i>
przybliżenie całki	1.8392	1.83879
czas obliczania	1.06 ms	2.9 ms

Po raz kolejny funkcja dostępna w MATLABie jest dokładniejsza, ale przy małej wartości parametru n metoda z zadania jest szybsza.

Dla $n = 4$ metoda z zadania osiąga podobną dokładność.

	metoda z zadania	funkcja <i>integral2</i>
przybliżenie całki	1.83879	1.83879
czas obliczania	2.96 ms	3.13 ms

Przykład 5 Wielomian stopnia 7.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (x^7 + x^6 + y^4 + y^3) dx dy = \frac{43}{210} \approx 0.204762$$

$n = 1$

	metoda z zadania	funkcja <i>integral2</i>
przybliżenie całki	0.254012	0.204762
czas obliczania	0.65 ms	6.96 ms

W tym przypadku metoda z zadania okazała się być szybsza, ale nie dokładniejsza. Podobną dokładność osiąga dla $n = 16$:

	metoda z zadania	funkcja <i>integral2</i>
przybliżenie całki	0.204762	0.204762
czas obliczania	27.04 ms	7.05 ms

6 Wnioski

1. Czas działania wzrasta kwadratowo wraz ze wzrostem parametru n .
2. Metoda z zadania osiąga gorsze wyniki od funkcji *integral2* dostępnej w MATLABie. Jest w stanie osiągnąć podobną dokładność, jednak kosztem znacznego zwiększenia się czasu potrzebnego na obliczenia.
3. Jeżeli nie zależy nam na dokładności, można użyć metody z zadania z $n = 1$, wtedy jest bardzo prawdopodobnym, że będzie ona szybsza od funkcji *integral2*.

7 Skrypt do testowania

Skrypt *integrateDiamond* pozwala na ustalanie funkcji podcałkowej f oraz parametru n określającego ilość podziałów obszaru D . Wyświetla on także

czas przybliżania całki tą metodą oraz porównuje wyniki z funkcją *integral2* dostępną w MATLABie.

Skrypt zgodnie z opisem metody dzieli obszar D na 4 trójkąty przystające, a następnie każdy z nich na n^2 trójkątów przystających i na nich stosuje kwadraturę.

Pokazuje on także jak używać funkcji stworzonych na potrzeby tej metody do przybliżania całki na dowolnym trójkącie.

```
1      % Parametry:
2      % Funkcja podcałkowa
3      f = @(x, y)(x.^2 + y.^2);
4      % Liczba okreslajaca ilosc podzialow
5      n = 1;
6
7      % Srodek rombu
8      P0 = [0 0];
9      % Wierzcholki rombu
10     P1 = [1 0];
11     P2 = [0 1];
12     P3 = [-1 0];
13     P4 = [0 -1];
14
15     % Kwadratura dla trojkatow w poszczegolnych
16     % cwiartkach ukladu wspolrzednych
17     S1 = numericalIntegrationTriangle(f, P0, P1, P2
18     , n); % I cwiartka
19     S2 = numericalIntegrationTriangle(f, P0, P2, P3
20     , n); % II cwiartka
21     S3 = numericalIntegrationTriangle(f, P0, P3, P4
22     , n); % III cwiartka
23     S4 = numericalIntegrationTriangle(f, P0, P4, P1
24     , n); % IV cwiartka
25
26     S = S1 + S2 + S3 + S4;
```

8 Bibliografia

1. Informacje z wykładu *Metod numerycznych 2* (wydział MiNI PW, dr Iwona Wróbel) (w szczególności wzór na kwadraturę rzędu 4 na trójkącie)