

# Sprawozdanie

## Metody Numeryczne 2, laboratorium 3

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

8 listopada 2016

### 1 Zadanie

Temat **3**, zadanie **33**:

Obliczanie całek

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

na obszarze

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

przez podział  $D$  na  $4n^2$  trójkątów przystających i zastosowanie na każdym z nich kwadratury rzędu 4-go.

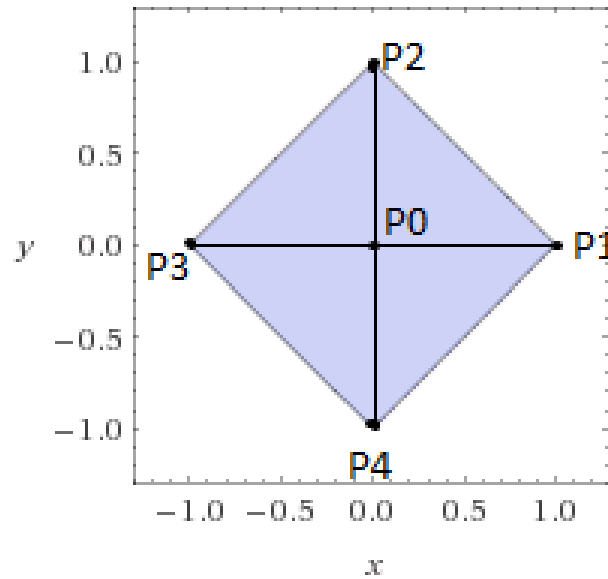
Obszar  $D$  został przedstawiony na rysunku nr 1, jest to romb o środku  $P_0 = (0, 0)$  i wierzchołkach

$$P_1 = (1, 0)$$

$$P_2 = (0, 1)$$

$$P_3 = (-1, 0)$$

$$P_4 = (0, -1)$$

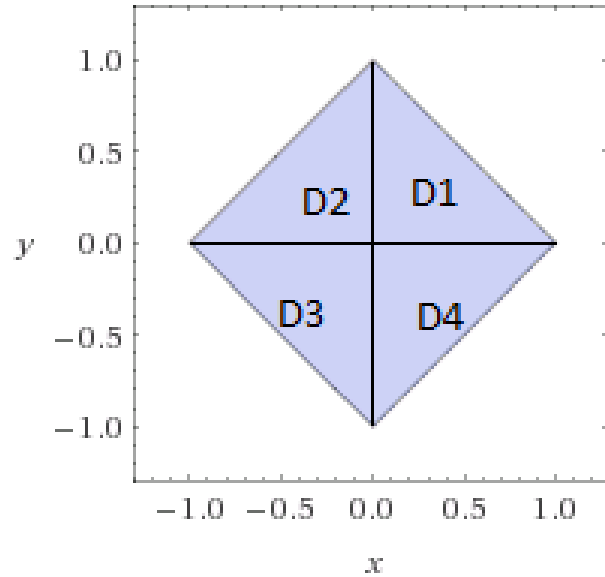


Rysunek 1: Obszar  $D$

## 2 Opis metody

### 2.1 Podział rombu na $4n^2$ trójkątów

W celu podzielenia obszaru  $D$  na  $4n^2$  trójkątów użyto podział na 4 ćwiartki  $D_1, D_2, D_3, D_4$  na podstawie osi układu współrzędnych. Podział ten został przedstawiony na rysunku nr 2.

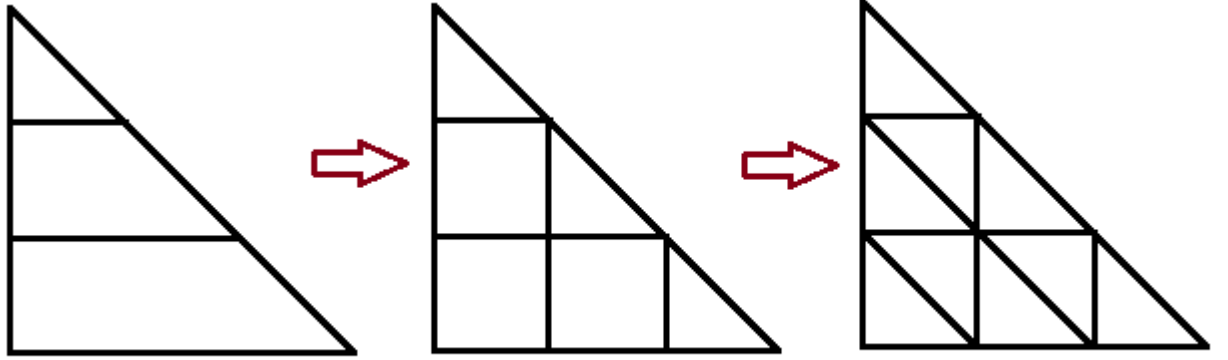


Rysunek 2: Podział  $D$  na ćwiartki

Następnie każdą z ćwiartek podzielono na  $n^2$  trójkątów według następującej reguły:

1. Każdy bok podzielono na  $n$  równych części (punkty podziału nazwijmy węzłami).
2. Węzły leżące na dwóch różnych bokach trójkąta i równoodległe od trzeciego z boków łączymy prostymi. Proste te będą wtedy równoległe do jednego z boków.

Przykładowy schemat podziału ćwiartki  $D_1$  z  $n = 3$  ( $D_1$  podzielono na 9 trójkątów przystających) został umieszczony na rysunku nr 3.



Rysunek 3: Podział  $D_1$  na 9 ( $= 3^2$ ) trójkątów

Wszystkie  $n^2$  trójkątów po podziale mają takie samo pole, równe  $p = \frac{P}{n^2}$ , gdzie  $P = |D_1| = |D_2| = |D_3| = |D_4|$ .

Na każdym z tych trójkątów obliczamy wartość kwadratury 4-go rzędu:

$$S(f) = \frac{p}{60} \left[ 27f(P_{012}) + 3 \left( f(P_{01}) + f(P_{02}) + f(P_{12}) \right) + 8 \left( f(P_0) + f(P_1) + f(P_2) \right) \right] \quad (1)$$

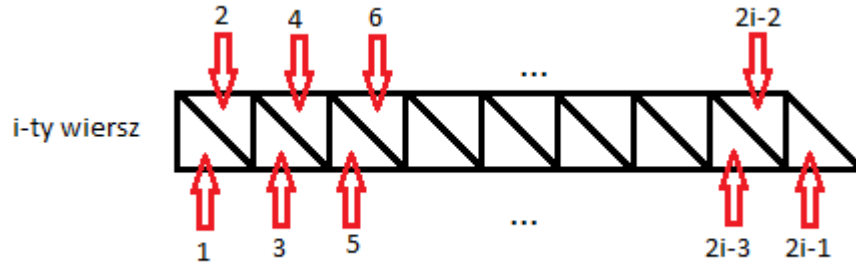
gdzie  $f$  jest zadaną funkcją podcałkową,  $p$  zdefiniowane jak poprzednio,  $P_0, P_1, P_2$  są wierzchołkami trójkąta po podziale,  $P_{i,j} = \frac{P_i + P_j}{2}$  są środkami boków trójkąta,  $P_{012} = \frac{P_0 + P_1 + P_2}{3}$  jest środkiem ciężkości trójkąta.

## 2.2 Wyznaczanie współrzędnych wierzchołków trójkątów po podziale

Aby zastosować kwadraturę (1) należy znać współrzędne wierzchołków. Załóżmy, że trójkąty po podziale można pogrupować w wiersze tak, że w

pierwszym wierszu znajduje się jeden trójkąt, a w każdym kolejnym są o 2 więcej. Ostatni wiersz ( $n$ -ty) posiada  $2n - 1$  trójkątów.

W  $i$ -tym wierszu jest  $2i - 1$  trójkątów. Podział  $i$ -tego wiersza wraz z numerami kolejnych trójkątów został pokazany na rysunku nr 4.



Rysunek 4: Podział  $i$ -tego wiersza

Niech  $P_0, P_1, P_2$  będą współrzędnymi wierzchołków trójkąta przed podziałem zdefiniowanym analogicznie jak na rysunku 1. Podział na wiersze rozpoczynamy od  $P_2$ , zatem trójkąt po podziale, którego jednym z wierzchołków będzie  $P_2$  znajdzie się w pierwszym wierszu.

Zdefiniujmy następujące zmienne:

$$h_x = \frac{P_1 - P_0}{n}$$

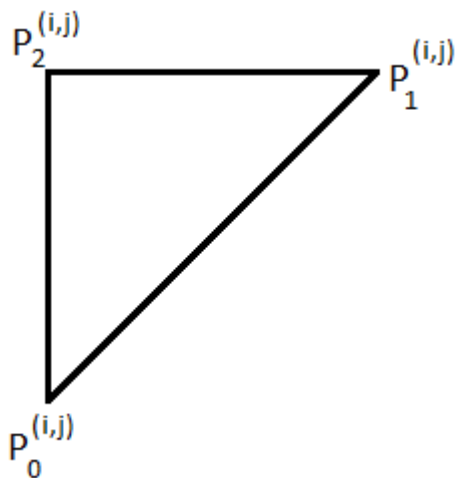
$$h_y = \frac{P_0 - P_2}{n}$$

Wtedy  $h_x$  będzie wektorem, o jaki należy się przesunąć, aby uzyskać współrzędne kolejnej kolumny, natomiast  $h_y$  będzie wektorem, o jaki należy się przesunąć, aby uzyskać współrzędne kolejnego wiersza. Zakładam, że każda kolumna oprócz ostatniej w danym wierszu posiada 2 trójkąty.

Zatem jeżeli trójkąt ma nieparzysty indeks, to znajduje się bliżej kolejnego wiersza ("na dole"), a te z indeksem parzystym są bliżej poprzedniego wiersza ("na górze"), jak na rysunku 4.

Aby wyznaczyć współrzędne trójkąta o indeksach  $(i, j)$ , gdzie  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, 2i - 1\}$ , w oparciu o współrzędne wierzchołka  $P_2$  należy rozważyć dwa przypadki:

I  $2 \mid j$



Rysunek 5: Trójkąt po podziale, gdy  $j$  - parzyste

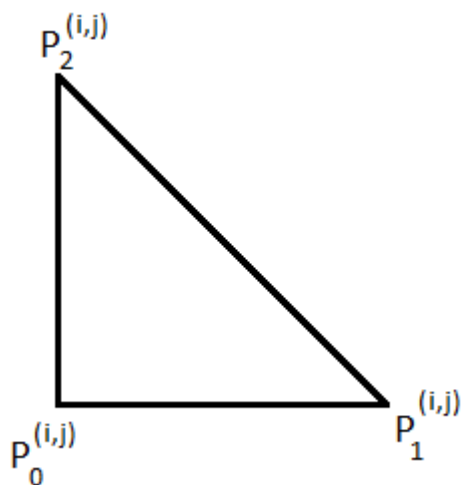
Wtedy

$$P_2^{(i,j)} = P_2 + (i - 1)h_y + \frac{j - 2}{2}h_x$$

$$P_0^{(i,j)} = P_2^{(i,j)} + h_y$$

$$P_1^{(i,j)} = P_2^{(i,j)} + h_x$$

II 2 //  $j$



Rysunek 6: Trójkąt po podziale, gdy  $j$  - nieparzyste

Wtedy

$$P_2^{(i,j)} = P_2 + (i-1)h_y + \frac{j-1}{2}h_x$$

$$P_0^{(i,j)} = P_2^{(i,j)} + h_y$$

$$P_1^{(i,j)} = P_0^{(i,j)} + h_x$$

gdzie  $P_k^{(i,j)}$  oznacza współrzędne  $k$ -tego wierzchołka trójkąta o indeksach  $(i, j)$  po podziale (analogicznie do rysunków w podpunktach).

### 3 Implementacja metody

Metoda zaimplementowana jest na podstawie czterech funkcji oraz jednego skryptu pozwalającego na łatwe jej wykorzystanie i porównanie z funkcją *integral2* z MATLABa:

- $[h_x, h_y, P] = \text{computeDivisionProperties}(P_0, P_1, P_2, n)$   
Funkcja oblicza własności podziału trójkąta o wierzchołkach  $P_0, P_1, P_2$  na  $n^2$  trójkątów przystających (zgodnie z powyższym opisem metody). Zwraca wektory  $h_x, h_y$  oraz pole trójkąta  $P$  po podziale.
- $[P_0^{(i,j)}, P_1^{(i,j)}, P_2(i, j)] = \text{computeSingleTriangleCoordinates}(P_2, h_x, h_y, i, j)$   
Funkcja oblicza współrzędne trójkąta o indeksie  $(i, j)$  po podziale na podstawie współrzędnej  $P_2$  trójkąta przed podziałem oraz wektorów  $h_x, h_y$ .
- $S = \text{integrateSingleTriangle}(f, P_0, P_1, P_2, P)$   
Funkcja przybliża wartość całki z funkcji podcałkowej  $f$  na trójkącie o polu  $P$  i wierzchołkach  $P_0, P_1, P_2$ , używając do tego kwadratury (1).
- $S = \text{numericalInterpolationTriangle}(f, P_0, P_1, P_2, n)$   
Funkcja przybliża wartość całki z funkcji podcałkowej  $f$  na trójkącie o wierzchołkach  $P_0, P_1, P_2$ , dzieląc go na  $n^2$  trójkątów przystających.  
Funkcja używa *computeDivisionProperties* do uzyskania własności podziału  $(h_x, h_y, P)$ , a następnie wykonuje przybliżenie całki na każdym z trójkątów po podziale używając funkcji *computeSingleTriangleCoordinates* do uzyskania współrzędnych tego trójkąta, oraz *integrateSingleTriangle* do uzyskania wartości kwadratury.
- *integrateDiamond*  
Skrypt pozwalający określić funkcję podcałkową  $f$  oraz parametr  $n$  określający liczbę podziałów. Wykonuje zadanie - przybliża całkę na obszarze  $D$  (rysunek 1).  
Skrypt dodatkowo podaje informacje o szybkości działania metody oraz porównuje ją z funkcją *integral2* dostępną w MATLABie.

Funkcji można używać do przybliżania całki na dowolnym trójkącie, zatem nie musi być to romb podzielony na 4 trójkąty. Wystarczy zmodyfikować skrypt *integrateDiamond*.

Nie jest to jednak tematem zadania, więc postanowiono zostawić to jako zadanie dla ciekawego czytelnika.



## 4 Poprawność metody

TODO

## 5 Przykłady

Przykład 1 TODO

## 6 Wnioski

1. TODO

## 7 Funkcja do testowania

TODO

## 8 Bibliografia

1. Informacje z wykładu *Metod numerycznych 2* (wydział MiNI PW, dr Iwona Wróbel) (w szczególności wzór na kwadraturę rzędu 4 na trójkącie)