Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2, laboratorium 6

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

7 stycznia 2017

1 Zadanie

Temat **6**, zadanie **11**:

Metoda Rungego-Kutty rzędu 4-go (wzór "3/8") dla układu dwóch równań.

Niech $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Dane zagadnienie początkowe do rozwiązania:

$$\begin{cases} y_1' & = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' & = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(a) & = y_{1,a} \\ y_2(a) & = y_{2,a} \end{cases} \tag{1}$$

Niech $n \in N$ będzie liczbą oznaczającą ilość podprzedziałów, na jakie należy podzielić odcinek $[a, b]$ tak, że:

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$x_0 = a$$
$$x_i = x_{i-1} + h \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n$$

2 Opis metody

Metoda Rungego-Kutty rzędu 4 dla pojedynczego równania różniczkowego określa się wzorem:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{4} w_i K_i \tag{2}$$

gdzie:

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$K_i = hf(x_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{i,j} K_j), \quad i > 1$$

$w_i, a_i, b_{i,j}$ - stałe.

Dla metody "trzech ósmych" te stałe wynoszą:

$$w = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}^T$$
$$a = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Licząc rozwiązanie w punkcie $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ należy oddzielnie obliczać wektor K dla y_1 oraz y_2.

3 Implementacja metody

Implementacja metody podzielona jest na następujące kroki:

1. `[x, y1, y2] = solveDifferentialSystem(f1, f2, a, b, n, y1a, y2a)` - podział odcinka $[a, b]$ na n podprzedziałów, wykorzystanie zagadnienia początkowego do uzupełnienia $y_{1,a}, y_{2,a}$, iteracyjne obliczenie kolejnych rozwiązań funkcją `calculateSolutionValue`

2. `[y1n, y2n] = calculateSolutionValue(f1, f2, y1, y2, x, n)` - obliczenie rozwiązań $y_{1,n}$ oraz $y_{2,n}$ wykorzystując metodę Rungego Kutty rzędu 4 (wzór (2))

3. `plotResults(x, y1, y2, y1Exact, y2Exact, joinPlots)` - naniesienie wartości rozwiązania obliczonych metodą (2) oraz wartości dokładnych na wykres. Dodatkowo utworzenie wykresu z modułem błędów dla obu metod.

4 Poprawność metody

Z rozdziału dotyczącego *Metod Rungego-Kutty* w książce Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski *Metody numeryczne* wiadomo, że wzór "trzech ósmych" jest absolutnie stabilny dla dostatecznie małych h, zatem zwiększając parametr n, a co za tym idzie zmniejszając długość każdego z podprzedziałów (czyli zmniejszając h) otrzymujemy absolutną stabilność tej metody.

Można to łatwo zauważyć zwiększając parametr n w skrypcie testowym (opisanym w sekcji 7).

5 Przykłady

W przykładach znajdują się fragmenty konfiguracji skryptu do testowania metody (opisany w sekcji 7).

Przykładowo, zagadnieniu początkowemu:

$$\begin{cases} y_1' & = y_2 \\ y_2' & = 3e^{\frac{x}{2}} - y_2 \\ y_1(0) & = 4 \\ y_2(0) & = 3 \end{cases}$$

odpowiada następująca konfiguracja:

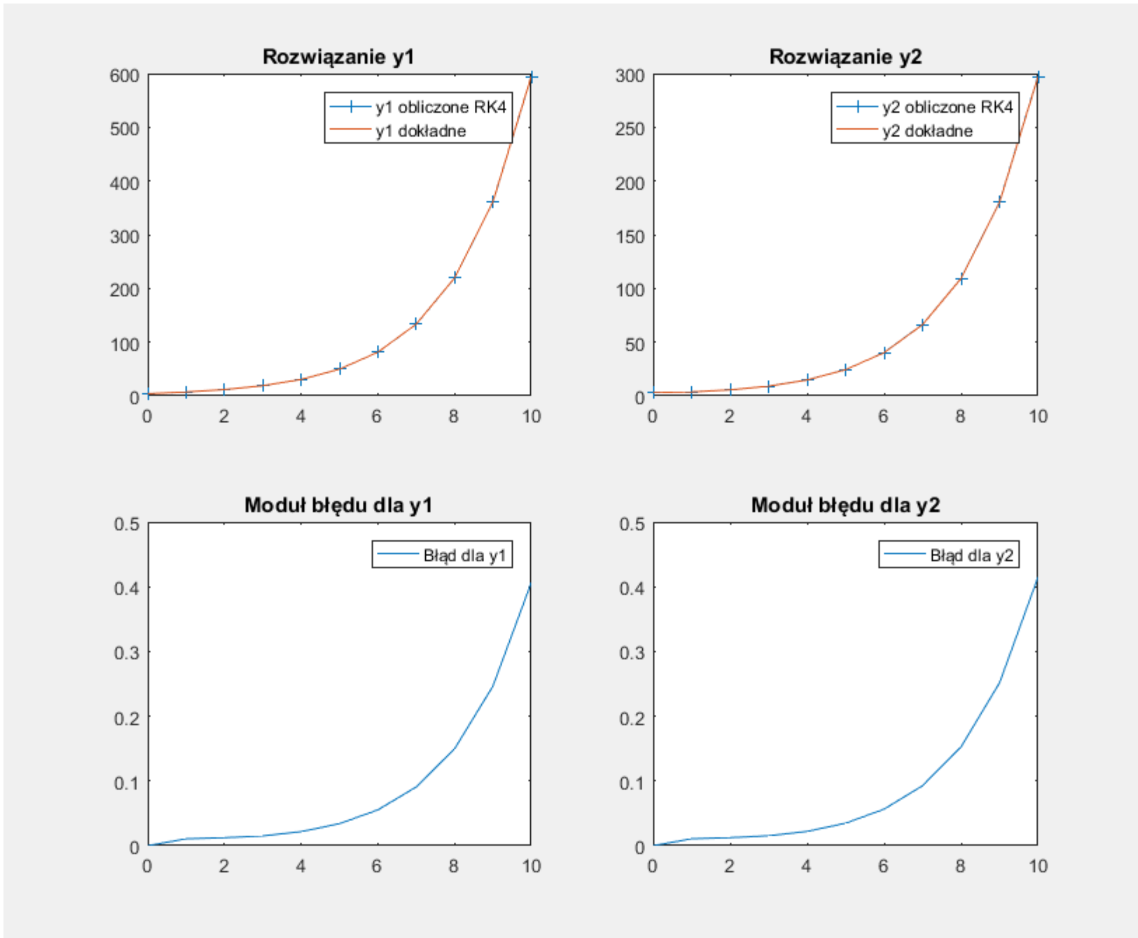
```
f1 = @(x, y1, y2)(y2);
```

```
f2 = @(x, y1, y2)(3 * exp(x / 2) - y2);
a = 0;
b = 10;
y1a = 4;
y2a = 3;
```

Przykład 1 Zagadnienie początkowe utworzone z przekształcenia równania różniczkowego 2-go rzędu na układ równań różniczkowych 1-go rzędu.

```
 f1 = @(x, y1, y2)(y2);
f2 = @(x, y1, y2)(3 * exp(x / 2) - y2);
a = 0;
b = 10;
y1a = 4;
y2a = 3;
y1Solution = @(x)(-exp(-x) + 4 * exp(x / 2) + 1);
y2Solution = @(x)(exp(-x) + 2 * exp(x / 2));
```

$n = 10$



Czas rozwiązywania zagadnienia początkowego: 0.000003 ms
Maksymalny moduł błędu między rozwiązaniem dokładnym a obliczonym metodą:

- dla y1: 0.4060596
- dla y2: 0.4145344

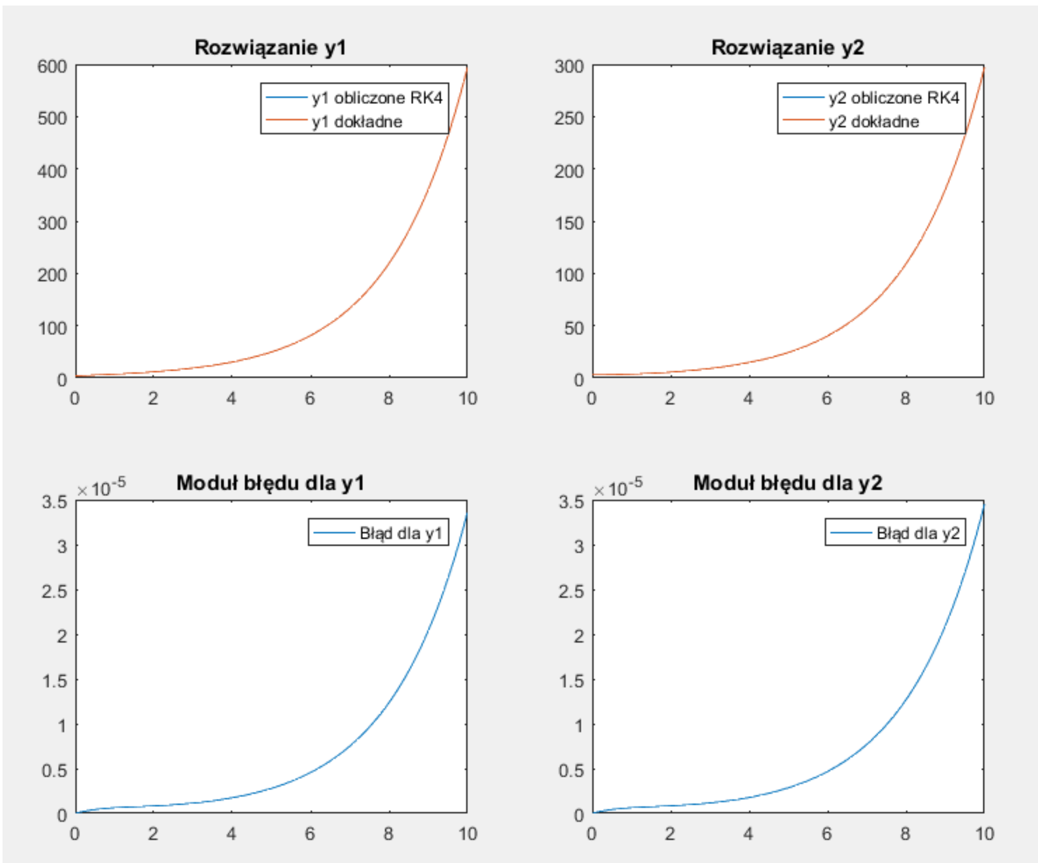
Jak widać obliczenia zajmują bardzo mało czasu i są dość dokładne już dla małych wartości n.

Przykład 2 To samo zagadnienie początkowe co w poprzednim przykładzie.

```
 f1 = @(x, y1, y2)(y2);
f2 = @(x, y1, y2)(3 * exp(x / 2) - y2);
```

```
a = 0;
b = 10;
y1a = 4;
y2a = 3;
y1Solution = @(x)(-exp(-x) + 4 * exp(x / 2) + 1);
y2Solution = @(x)(exp(-x) + 2 * exp(x / 2));
```

10-krotnie zwiększona liczba przedziałów: $n = 100$



Czas rozwiązywania zagadnienia początkowego: 0.000006 ms
Maksymalny moduł błędu między rozwiązaniem dokładnym a obliczonym metodą:

- dla y1: $3.362839 * 10^{-5}$
- dla y2: $3.448142 * 10^{-5}$

Maksymalny błąd zmalał 10000-krotnie, a czas obliczeń wzrósł jedynie 2-krotnie.

Przykład 3 To samo zagadnienie początkowe co w poprzednim przykładzie.

10-krotnie zwiększona liczba przedziałów: $n = 1000$

Wykresy wyglądają bardzo podobnie, zmienia zmienia się jedynie skala na wykresie błędów, więc nie zostały tu umieszczone, ponieważ nic nie wnoszą do przykładu.

Czas rozwiązywania zagadnienia początkowego: 0.000041 ms
Maksymalny moduł błędu między rozwiązaniem dokładnym a obliczonym metodą:

- dla y1: $3.274067 * 10^{-9}$
- dla y2: $3.359560 * 10^{-9}$

Znowu błąd zmalał 10000-krotnie. Czas obliczeń tym razem wzrósł około 7 razy.

6 Wnioski

1. Na podstawie porównań maksymalnego modułu błędu można zauważyć, że metoda (2) jest faktycznie rzędu 4, ponieważ przy 10-krotnym zwiększeniu liczby przedziałów błąd zmalał 10000-krotnie (**Przykład 1** oraz **Przykład 2**).

2. Metoda ma złożoność O(n). Można to zauważyć zwiększając parametr n. Ponadto, w metodzie występuje jedynie jedna pętla zależna od ilości podprzedziałów, w której jest stała liczba obliczeń (w każdej iteracji).

3. Metoda działa bardzo szybko nawet dla dużych n ($n = 1000$ w przykładzie **Przykład 3**).

7 Skrypt do testowania metody

Do testowania metody został utworzony skrypt znajdujący się w pliku `textScript.m`.

Pozwala on na wpisanie własnego zagadnienia początkowego, rozwiązania tego zagadnienia (w celu obliczenia wartości dokładnych oraz wektora błędów), a także określenie ilości podprzedziałów, na jakie ma zostać podzielony odcinek $[a, b]$ (parametr n, zazwyczaj im większy, tym lepsza dokładność i mniejszy błąd rozwiązania).

Dodatkowo można określić, czy rozwiązania mają zostać naniesione na dwóch oddzielnych wykresach, czy na jednym (parametr `joinPlots`, opis w skrypcie).

8 Bibliografia

1. Informacje z wykładu *Metod numerycznych 2* (wydział MiNI PW, dr Iwona Wróbel), w szczególności temat dotyczący *metody Rungego-Kutty* oraz *rozwiązywania układu równań różniczkowych*.

2. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski *Metody numeryczne* - rozdział 7 *Metody rozwiązywania zagadnień początkowych dla równań różniczkowych zwyczajnych*, podrozdział 7.4 *Metody typu Rungego-Kutty*.