Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2, laboratorium 1

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

13 października 2016

1 Zadanie

Rozwiązywanie układu równań z macierzą trójdiagonalną w dziedzinie zespolonej metodą Gaussa-Seidla w tył (Backwards Gauss-Seidel).

Szukamy rozwiązania układu równań $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (A - macierz trójdiagonalna, $\det A \neq 0$), $b \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Układ $Ax = b$ można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ l_2 & d_2 & u_2 & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & u_3 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & l_4 & d_4 & u_4 & & \dots & & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & l_{n-3} & d_{n-3} & u_{n-3} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & l_{n-2} & d_{n-2} & u_{n-2} & 0 \\ & & & & & 0 & l_{n-1} & d_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & & & 0 & l_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie $l_i, d_i, u_i, b_i, x_i \in \mathbb{C}^n$ dla każdego $i = 1, \dots, n$.

2 Opis metody

Metoda Gaussa-Seidla w tył jest iteracyjną metodą rozwiązywania układów równań liniowych. Jest ona podobna do zwykłej metody Gaussa-Seidla, przy czym w tym przypadku obliczenia rozpoczynamy od ostatnich elementów wektora rozwiązań.

Mając przybliżenie początkowe $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ tworzymy ciąg kolejnych przybliżeń rozwiązań $\left\{x^{(k)}\right\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ taki, że

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x$$

Po wymnożeniu lewej strony układu (1) otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} d_1 x_1 + u_1 x_2 = b_1 \\ l_2 x_1 + d_2 x_2 + u_2 x_3 = b_2 \\ l_3 x_2 + d_3 x_3 + u_3 x_4 = b_3 \\ \vdots \\ l_i x_{i-1} + d_i x_i + u_i x_{i+1} = b_i \\ \vdots \\ l_{n-1} x_{n-2} + d_{n-1} x_{n-1} + u_{n-1} x_n = b_{n-1} \\ l_n x_{n-1} + d_n x_n = b_n \end{cases}$$

Następnie z i-tego równania wyliczamy:

$$x_i = \frac{b_i - l_i x_{i-1} - u_i x_{i+1}}{d_i} \qquad \text{dla } i = 2, \dots, n-1$$

Wyjątkiem są równania pierwsze oraz ostatnie, ponieważ nie istnieją współczynniki odpowiednio l_1 oraz u_n, stąd:

$$x_1 = \frac{b_1 - u_1 x_2}{d_1}$$

$$x_n = \frac{b_n - l_n x_{n-1}}{d_n}$$

W k-tym kroku obliczamy przybliżenie $x^{(k+1)}$ w taki sposób, że najpierw obliczamy $x_n^{(k+1)}$, następnie zmniejszamy indeks dolny, obliczając kolejno $x_{n-1}^{(k+1)}, \ldots, x_1^{(k+1)}$.

Przy wyliczaniu $x_i^{(k+1)}$ używamy najbardziej aktualnych przybliżeń (zamiast $x_{i+1}^{(k)}$ używamy $x_{i+1}^{(k+1)}$, wyjątkiem jest $x_n^{(k)}$).

Należy oddzielnie przybliżać część rzeczywistą oraz część urojoną.

3 Implementacja metody

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$
\begin{aligned}
u_{r,j} &= \mathrm{Re}(u_j) & \qquad u_{i,j} &= \mathrm{Im}(u_j) \\
d_{r,j} &= \mathrm{Re}(d_j) & \qquad d_{i,j} &= \mathrm{Im}(d_j) \\
l_{r,j} &= \mathrm{Re}(l_j) & \qquad l_{i,j} &= \mathrm{Im}(l_j) \\
x_{r,j}^{(k)} &= \mathrm{Re}(x_j^{(k)}) & \qquad x_{i,j}^{(k)} &= \mathrm{Im}(x_j^{(k)}) \\
b_{r,j} &= \mathrm{Re}(b_j) & \qquad b_{i,j} &= \mathrm{Im}(b_j)
\end{aligned}
$$

dla $j = 1, \ldots, n$.

Poniższe wzory opisują sposób obliczenia kolejnego przybliżenia $x^{(k+1)}$:

$$x_{r,n}^{(k+1)} = \frac{b_{r,n} + d_{i,n}x_{i,n}^{(k)} - l_{r,n}x_{r,n-1}^{(k)} + l_{i,n}x_{i,n-1}^{(k)}}{d_{r,n}}$$

$$x_{i,n}^{(k+1)} = \frac{b_{i,n} - d_{i,n}x_{r,n}^{(k)} - l_{r,n}x_{i,n-1}^{(k)} - l_{i,n}x_{r,n-1}^{(k)}}{d_{r,n}}$$

dla $j = (n-1), \dots, 2$

$$x_{r,j}^{(k+1)} = \frac{b_{r,j} + d_{i,j}x_{i,j}^{(k)} - l_{r,j}x_{r,j-1}^{(k)} + l_{i,j}x_{i,j-1}^{(k)} - u_{r,j}x_{r,j+1}^{(k+1)} + u_{i,j}x_{i,j+1}^{(k+1)}}{d_{r,j}}$$

$$x_{i,j}^{(k+1)} = \frac{b_{i,j} - d_{r,j}x_{i,j}^{(k)} - l_{r,j}x_{i,j-1}^{(k)} - l_{i,j}x_{r,j-1}^{(k)} - u_{i,j}x_{r,j+1}^{(k+1)} - u_{r,j}x_{i,j+1}^{(k+1)}}{d_{r,j}}$$

$$x_{r,1}^{(k+1)} = \frac{b_{r,1} + d_{i,1}x_{i,1}^{(k)} - u_{r,1}x_{r,2}^{(k+1)} + u_{i,1}x_{i,2}^{(k+1)}}{d_{r,1}}$$

$$x_{i,1}^{(k+1)} = \frac{b_{i,1} - d_{r,1}x_{i,1}^{(k)} - u_{i,1}x_{r,2}^{(k+1)} - u_{r,1}x_{i,2}^{(k+1)}}{d_{r,1}}$$

4 Warunek stopu

Z możliwych warunków stopu wybrałem warunek Gill'a. Obliczenia trwają dopóki spełniona jest nierówność

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \geqslant \varepsilon \|x^{(k)}\| + \delta$$

gdzie $\varepsilon, \delta > 0$.

Dodatkowo w implementacji nałożyłem restrykcję na maksymalną ilość iteracji. Po 10000 iteracjach obliczenia nie będą kontynuowane.

5 Poprawność algorytmu

W ogólności metoda Gaussa-Seidla, a więc i metoda Gaussa-Seidla w tył, jest zbieżna globalnie dla macierzy diagonalnie silnie dominujących (kolumnowo lub wierszowo) oraz macierzy dodatnio określonych.

Po przeprowadzeniu testów odkryłem, że zaimplementowany algorytm działa dobrze, jeżeli część rzeczywista elementów z diagonali dominuje w rzędzie lub kolumnie, a część urojona tego elementu jest znacznie mniejsza od części rzeczywistej.

Jeżeli część urojona elementów z diagonali jest porównywalna do części rzeczywistej, to algorytm daje złe wyniki.

6 Przykłady

Układ 1 $n = 5$

Elementy na diagonali są znacznie większe od elementów na dwóch innych pasmach. Dodatkowo nie zawierają części urojonej.

$$\begin{bmatrix} 61354 & 44+59\,\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 60+88\,\mathrm{i} & 83844 & 54+27\,\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 84+40\,\mathrm{i} & 89650 & 4+42\,\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 81+84\,\mathrm{i} & 48721 & 55+50\,\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 80+63\,\mathrm{i} & 25148 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 20+62\,\mathrm{i} \\ 38+10\,\mathrm{i} \\ 71+37\,\mathrm{i} \\ 2+50\,\mathrm{i} \\ 28+32\,\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Znalezione rozwiązanie:

$$x = \begin{bmatrix} 0.000325764927490767 + 0.00101000840330470i \\ 0.000453671976952820 + 0.000117676750075580i \\ 0.000792072530469199 + 0.000411492905043098i \\ 4.04854673760366e-05 + 0.00102061129748172i \\ 0.00111583663410018 + 0.00126911883695549i \end{bmatrix}$$

Liczba iteracji: 9
Rząd błędu: -6
Czas działania: 0.290354ms

Układ 2 $n = 4$

Elementy na diagonali są znacznie większe od elementów na dwóch innych pasmach. Ich część urojona jest porównywalna z rzeczywistą.

$$\begin{bmatrix} 12339 + 18978\,\mathrm{i} & 22 + 91\,\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 39 + 74\,\mathrm{i} & 17852 + 19484\,\mathrm{i} & 60 + 64\,\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 95 + 35\,\mathrm{i} & 18710 + 12993\,\mathrm{i} & 24 + 14\,\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 94 + 34\,\mathrm{i} & 15539 + 14995\,\mathrm{i} \end{bmatrix} x \quad = \begin{bmatrix} 79 + 40\,\mathrm{i} \\ 80 + 56\,\mathrm{i} \\ 35 + 70\,\mathrm{i} \\ 33 + 83\,\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Znalezione rozwiązanie: **brak** - przekroczono liczbę iteracji.
Czas działania: 97.203925ms