Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2, laboratorium 1

Grzegorz Rozdzialik (D4, grupa lab. 2)

12 października 2016

1 Zadanie

Rozwiązywanie układu równań z macierzą trójdiagonalną w dziedzinie zespolonej metodą Gaussa-Seidla w tył (Backwards Gauss-Seidel).

2 Opis metody

Metoda Gaussa-Seidla w tył jest iteracyjną metodą rozwiązywania układów równań liniowych. Jest ona podobna do zwykłej metody Gaussa-Seidla, przy czym w tym przypadku obliczenia rozpoczynamy od ostatnich elementów wektora rozwiązań.

Szukamy rozwiązania układu równań $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (A - macierz trójdiagonalna), $b \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Mając przybliżenie początkowe $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ tworzymy ciąg kolejnych przybliżeń rozwiązań $\left\{x^{(k)}\right\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ taki, że

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x$$

Układ $Ax = b$ można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ l_2 & d_2 & u_2 & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & u_3 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & l_4 & d_4 & u_4 & & \dots & & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & l_{n-3} & d_{n-3} & u_{n-3} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & l_{n-2} & d_{n-2} & u_{n-2} & 0 \\ & & & & & 0 & l_{n-1} & d_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & & & 0 & l_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

gdzie $l_i, d_i, u_i, b_i, x_i \in \mathbb{C}^n$ dla każdego $i = 1, \dots, n$.

Po wymnożeniu otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} d_1x_1 + u_1x_2 = b_1 \\ l_2x_1 + d_2x_2 + u_2x_3 = b_2 \\ l_3x_2 + d_3x_3 + u_3x_4 = b_3 \\ \vdots \\ l_ix_{i-1} + d_ix_i + u_ix_{i+1} = b_i \\ \vdots \\ l_{n-1}x_{n-2} + d_{n-1}x_{n-1} + u_{n-1}x_n = b_{n-1} \\ l_nx_{n-1} + d_nx_n = b_n \end{cases}$$

Następnie i-tego równania wyliczamy

$$x_i = \frac{b_i - l_ix_{i-1} - u_ix_{i+1}}{d_i}$$

Wyjątkiem są równania pierwsze oraz ostatnie, ponieważ nie istnieją współczynniki odpowiednio l_1 oraz u_n, stąd:

$$x_1 = \frac{b_1 - u_1x_2}{d_1}$$

$$x_n = \frac{b_n - l_nx_{n-1}}{d_n}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia: oznaczenia na części rzeczywiste, urojone dla l, d, u, x, b

W k-tym kroku obliczamy przybliżenie $x^{(k+1)}$ w taki sposób, że zaczynamy od $x_n^{(k+1)}$, następnie $x_{n-1}^{(k+1)}, \ldots, x_1^{(k+1)}$.

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - l_n x_{n-1}^{(k)}}{d_n}$$

rozpisać na część rzeczywistą i urojoną