

## MASTER'S OF QUANTITATIVE AND FINANCIAL MODELING

Cours : Méthodes de calcul avancées

---

### Mini-Projet

### Etude et application de quelques schémas aux différences finies pour deux lois de conservation

---

February 6, 2024

**Student :**

Géofroid LONMADON    Geofroid.LONMADON@um6p.ma

**Tutor :**

Imad EL Mahi

# Contents

<b>1</b>	<b>Equation de transport</b>	<b>1</b>
1.1	Résolution par la méthode des caractéristiques . . . . .	1
1.2	Etudes de la consistance, la stabilité et la convergence des schémas numériques . . .	2
1.2.1	Schéma 1 (centré) . . . . .	2
1.2.2	Schéma 2 (décentré) . . . . .	4
1.2.3	Schéma 3 (Lax-Friedrichs) . . . . .	6
1.2.4	Schéma 4 (Lax-Wendroff) . . . . .	8
1.3	Implémentation des schémas numériques . . . . .	11
1.3.1	Schéma 1 (centré) . . . . .	11
1.3.2	Schéma 2 (décentré) . . . . .	12
1.3.3	Schéma 3 (Lax-Friedrichs) . . . . .	13
1.3.4	Schéma 4 (Lax-Wendroff) . . . . .	14
1.4	Evaluation de l'erreur . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Equation de Burgers</b>	<b>16</b>
2.1	Résolution par la méthode des caractéristiques . . . . .	16
2.2	Implémentation du schéma numérique . . . . .	17
2.2.1	Schéma 1 (centré) . . . . .	18
2.2.2	Schéma 2 (décentré) . . . . .	19
2.2.3	Schéma 3 (Lax-Friedrichs) . . . . .	20
2.2.4	Schéma 4 (Lax-Wendroff) . . . . .	22
2.3	Evaluation de l'erreur . . . . .	23

# 1 Equation de transport

$$(E_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \text{pour } x \in ]0, L[, t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \text{pour } x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t), & \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

## 1.1 Résolution par la méthode des caractéristiques

A l'aide de la méthode des caractéristiques, déterminons la solution exacte  $u(x, t)$  du problème  $(E_1)$

Trouvons la courbe caractéristique  $\Gamma = \Gamma(x(s), t(s))$ ,  $s$  étant le paramètre qui décrit la courbe, le long de laquelle l'EDP devient un système d'EDO.

Dérivons  $u$  le long de la courbe  $\Gamma$  :

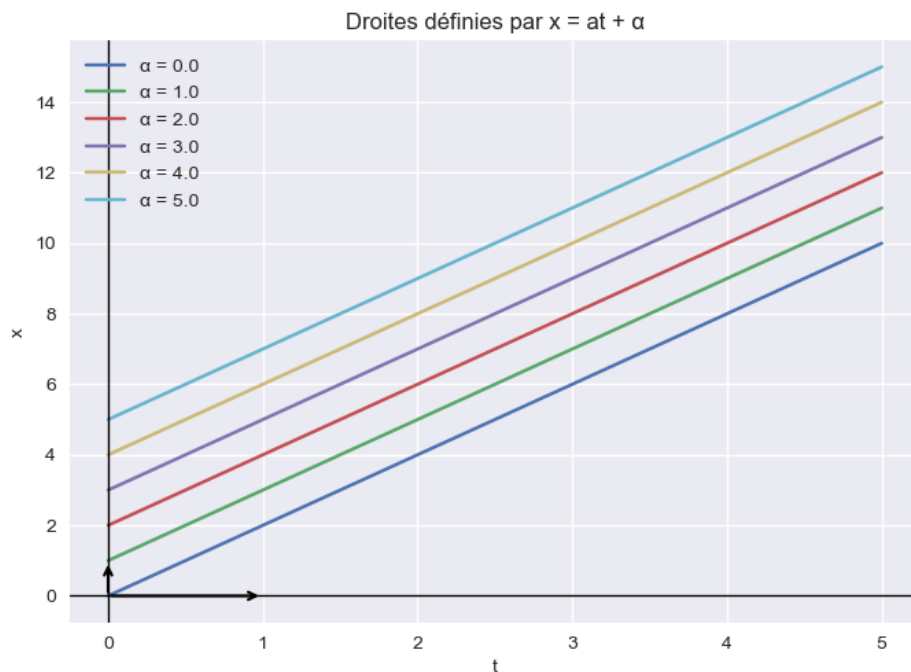
$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \text{Or } \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \implies \frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \\ \text{Ainsi } \frac{du}{ds} &= -a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= \left( \frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

En posant  $\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} = 0$  on a  $\frac{dx}{dt} = a$  et  $\frac{du}{ds} = 0$

Les courbes caractéristiques sont les droites d'équation  $x = at + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Et sur ces courbes caractéristiques la solution vérifie :  $du = 0$

Les courbes caractéristiques sont pour  $a = 2\text{m/s}$  fixé:



- Résolution le long des courbes caractéristiques  $x = at + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$du = 0 \implies u \text{ est une constante}$$

$$\text{Donc } u(x, t) = f(\alpha) \quad \text{Avec } f \text{ de classe } C^1 \quad \alpha = x - at, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$u(x, t) = f(x - at)$$

$$\text{Or } u(x, 0) = u_0(x) = f(x)$$

$$\text{Ainsi } u(x, t) = u_0(x - at)$$

La solution générale de l'EDP (E1) est :  $u(x, t) = u_0(x - at)$

## 1.2 Etudes de la consistance, la stabilité et la convergence des schémas numériques

On discrétise l'intervalle  $[0, L]$  en  $(N - 1)$  sous-intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ) de tailles égales  $\Delta x$  ( $\Delta x = \frac{L}{N-1}$  ;  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ ), et on note par  $u_i^n$  la solution approchée au nœud  $x_i$  à l'instant  $t^n = n\Delta t$  ( $\Delta t$  étant le pas de temps).

Etudions la consistance, la stabilité et la convergence de chacun des schémas numériques suivants :

### 1.2.1 Schéma 1 (centré)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- On commence par faire le développement limité de  $u(x, t + \Delta t)$  à l'ordre 1 c'est-à-dire avec un reste  $O((\Delta t)^2)$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + O((\Delta t)^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\text{donc } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad \text{Ordre 1 en temps}$$

- On fait les développements limités de  $u(x + \Delta x, t)$  et de  $u(x - \Delta x, t)$  à l'ordre 2 c'est-à-dire avec un reste  $O((\Delta x)^3)$

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O((\Delta x)^3) \quad (A)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O((\Delta x)^3) \quad (B)$$

$$A - B \implies u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O((\Delta x)^3)$$

$$\implies \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

$$\implies \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \text{Ordre 2 en espace}$$

L'équation (E1) s'écrit

$$(E1) : \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta t) + O((\Delta x)^2)$$

Ainsi le schéma est à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace.

L'équation approchée est

$$(E_h) : \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- Consistance

On déduit l'erreur de troncature  $ET$

$$ET = E1 - E_h$$

$$ET = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)$$

$$ET = O(\Delta t) + O((\Delta x)^2)$$

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} ET = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} (O(\Delta t) + O((\Delta x)^2))$$

$$\text{or } |O(\Delta t)| \leq \lambda_1 |\Delta t| \quad \text{lorsque } \Delta t \rightarrow 0 \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t) = 0$$

$$\text{et } |O((\Delta x)^2)| \leq \lambda_2 |(\Delta x)^2| \quad \text{lorsque } \Delta x \rightarrow 0 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} O((\Delta x)^2) = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} ET = 0$$

Ainsi le schéma est consistant.

- Stabilité

Le schéma 1 s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \\ \implies & u_j^{n+1} - u_j^n + a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0 \\ \implies & u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \text{ avec } \lambda = a \frac{\Delta t}{2\Delta x} \end{aligned}$$

En posant  $u_j^n = C^n e^{i\alpha j \Delta x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et en injectant cette solution dans le schéma on a:

$$\begin{aligned} C^{n+1} e^{i\alpha j \Delta x} &= C^n e^{i\alpha j \Delta x} + \lambda (C^n e^{i\alpha(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\alpha(j-1)\Delta x}) \\ C^{n+1} &= C^n + \lambda C^n (e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x}) \\ C^{n+1} &= C^n + \lambda C^n \times 2i \sin(\alpha \Delta x) \quad \text{car } \sin(\alpha \Delta x) = \frac{e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x}}{2i} \\ C^{n+1} &= C^n (1 + 2\lambda i \sin(\alpha \Delta x)) \\ C^{n+1} &= A C^n \text{ avec } A = 1 + 2\lambda i \sin(\alpha \Delta x) \\ C^{n+1} &= A^n C^0 \end{aligned}$$

Avec une condition initiale  $C^0$  bornée, le schéma est stable si et seulement si la suite  $(C^n)_{n \in \mathbb{R}}$  est bornée, c'est-à-dire si et seulement si  $|A| \leq 1$

$$|A| = |1 + 2\lambda i \sin(\alpha \Delta x)|$$

$$\text{donc } |A|^2 = 1 + 4\lambda^2 \sin^2(\alpha \Delta x) \geq 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ainsi le schéma n'est pas stable.

### 1.2.2 Schéma 2 (décentré)

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } a > 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } a < 0 \end{aligned}$$

- Si  $a > 0$ , pour avoir l'information au noeud  $j$ , on le reçoit du noeud  $j-1$ .  
Donc on fait le développement limité de  $u(x - \Delta x, t)$  à l'ordre 1

$$\begin{aligned} u(x - \Delta x) &= u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O((\Delta x)^2) \\ \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= -u(x - \Delta x, t) + u(x, t) + O((\Delta x)^2) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n &= \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$

- Si  $a < 0$  on fait le développement limité de  $u(x + \Delta x, t)$  à l'ordre 1

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O((\Delta x)^2) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$

De plus on a  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$

Ainsi l'équation de transport s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta t) + O(\Delta x) = 0, & a > 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta t) + O(\Delta x) = 0, & a < 0 \end{cases}$$

• Consistance

$$\begin{cases} ET = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right), & a > 0 \\ ET = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right), & a < 0 \\ \begin{cases} ET = O(\Delta t) + O(\Delta x), & a > 0 \\ ET = O(\Delta t) + O(\Delta x), & a < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} ET = 0, & a > 0 \\ \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} ET = 0, & a < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Puisque  $|O(\Delta t)| \leq \lambda_1 |\Delta t|$ , lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$   $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t) = 0$ ,

et  $|O(\Delta x)| \leq \lambda_2 |\Delta x|$ , lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$   $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} O(\Delta x) = 0$ ,

Donc  $\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} ET = 0$ .

Par conséquent le schéma 2 qui est de l'ordre 1 en temps et de l'ordre 1 en espace est consistant quelque soit le signe de la vitesse  $a$ .

- Stabilité

Le schéma s'écrit

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, & a > 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0, & a < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n), & a > 0 \\ u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n), & a < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda (u_{j-1}^n - u_j^n), & a < 0 \\ u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda (u_j^n - u_{j+1}^n), & a < 0 \end{cases}, \lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \end{aligned}$$

En injectant la solution  $u_j^n = C^n e^{i\alpha j \Delta x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  dans ces equations, on a:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} C^{n+1} e^{i\alpha j \Delta x} = C^n e^{i\alpha j \Delta x} + \lambda (C^n e^{i\alpha(j-1)\Delta x} - C^n e^{i\alpha j \Delta x}), & a > 0 \\ C^{n+1} e^{i\alpha j \Delta x} = C^n e^{i\alpha j \Delta x} + \lambda (C^n e^{i\alpha j \Delta x} - C^n e^{i\alpha(j+1)\Delta x}), & a < 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} C^{n+1} = C^n + \lambda C^n (e^{-i\alpha \Delta x} - 1), & a > 0 \\ C^{n+1} = C^n + \lambda C^n (1 - e^{i\alpha \Delta x}), & a < 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} C^{n+1} = C^n [1 + \lambda (-1 + e^{-i\alpha \Delta x})], & a > 0 \\ C^{n+1} = C^n [1 + \lambda (1 - e^{i\alpha \Delta x})], & a < 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} C^{n+1} = AC^n, & a > 0 \text{ avec } A = [1 + \lambda (-1 + e^{-i\alpha \Delta x})] \\ C^{n+1} = BC^n, & a < 0, \text{ avec } B = [1 + \lambda (1 - e^{i\alpha \Delta x})] \end{cases} \\ & \begin{cases} C^{n+1} = A^n C^0, & a > 0 \\ C^{n+1} = B^n C^0, & a < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

Avec une condition initiale  $C^0$  bornée, la suite  $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $|A| \leq 1$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} |A|^2 = |1 - \lambda + \lambda e^{-i\alpha\Delta x}|^2, & a > 0 \\ |B|^2 = |1 + \lambda - \lambda e^{i\alpha\Delta x}|^2, & a < 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} |A|^2 = |1 - \lambda + \lambda [\cos(\alpha\Delta x) - i \sin(\alpha\Delta x)]|^2, & a > 0 \\ |B|^2 = |1 + \lambda - \lambda [\cos(\alpha\Delta x) + i \sin(\alpha\Delta x)]|^2, & a < 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} |A|^2 = ((1 - \lambda) + \lambda \cos(\alpha\Delta x))^2 + \lambda^2 \sin^2(\alpha\Delta x), & a > 0 \\ |B|^2 = ((1 + \lambda) - \lambda \cos(\alpha\Delta x))^2 + \lambda^2 \sin^2(\alpha\Delta x), & a < 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} |A|^2 = (1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cos(\alpha\Delta x) + \lambda^2 \cos^2(\alpha\Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\alpha\Delta x), & a > 0 \\ |B|^2 = (1 + \lambda)^2 - 2\lambda(1 + \lambda) \cos(\alpha\Delta x) + \lambda^2 \cos^2(\alpha\Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\alpha\Delta x), & a < 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} |A|^2 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cos(\alpha\Delta x) + \lambda^2, & a > 0 \\ |B|^2 = 1 + 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda(1 + \lambda) \cos(\alpha\Delta x) + \lambda^2, & a < 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} |A|^2 = 1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cos(\alpha\Delta x), & a > 0 \\ |B|^2 = 1 + 2\lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda(1 + \lambda) \cos(\alpha\Delta x), & a < 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} |A|^2 = 1 - 2\lambda(1 - \lambda) + 2\lambda(1 - \lambda) \cos(\alpha\Delta x), & a > 0 \\ |B|^2 = 1 + 2\lambda(1 + \lambda) - 2\lambda(1 + \lambda) \cos(\alpha\Delta x), & a < 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} |A|^2 = 1 - 2\lambda(1 - \lambda)(1 - \cos(\alpha\Delta x)), & a > 0 \\ |B|^2 = 1 + 2\lambda(1 + \lambda)(1 - \cos(\alpha\Delta x)), & a < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} |A|^2 \leq 1, & a > 0 \\ |B|^2 \leq 1, & a < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 - 2\lambda(1 - \lambda)(1 - \cos(\alpha\Delta x)) \leq 1, & a > 0 \\ 1 + 2\lambda(1 + \lambda)(1 - \cos(\alpha\Delta x)) \leq 1, & a < 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} 2\lambda(1 - \lambda)(1 - \cos(\alpha\Delta x)) \geq 0, & a > 0 \\ 2\lambda(1 + \lambda)(1 - \cos(\alpha\Delta x)) \leq 0, & a < 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} 1 - \lambda \geq 0, & \text{car } a > 0, \quad \lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 0, & \text{et } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad 1 - \cos(\alpha\Delta x) \geq 0 \\ 1 + \lambda \geq 0, & \text{car } a < 0, \quad \lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 0, & \text{et } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad 1 - \cos(\alpha\Delta x) \geq 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} \lambda \leq 1, & a > 0 \\ -\lambda \leq 1, & a < 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, & a > 0 \\ -a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, & a < 0 \end{cases} \implies |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1
\end{aligned}$$

Par conséquent le schéma 2 est stable si et seulement si  $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

- **Covergence**

Le schéma est consistant et stable sous la condition  $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ , alors le schéma converge.

### 1.2.3 Schéma 3 (Lax-Friedrichs)

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2} (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

On a :



$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\begin{cases} u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O((\Delta x)^2) \\ u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O((\Delta x)^2) \end{cases}$$

$$\implies u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u(x, t) + O((\Delta x)^2)$$

$$\implies u(x, t) = \frac{1}{2} (u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)) + O((\Delta x)^2)$$

$$\implies u_j^n = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + O((\Delta x)^2)$$

$$\text{Donc } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + O\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) + O(\Delta t)$$

$$\begin{cases} u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O((\Delta x)^3) \\ u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O((\Delta x)^3) \end{cases}$$

$$\implies u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O((\Delta x)^3)$$

$$\implies \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

$$\implies \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

- Consistance

$$ET = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left[ \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right]$$

$$ET = O\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) + O(\Delta t) + O((\Delta x)^2)$$

$$ET = O\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) + O(\Delta t)$$

- Si  $\Delta t$  tend vers 0 plus vite que  $\Delta x$ ,  $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$  va tendre vers  $\infty$ , dans ce cas le schéma est non consistant.

- Si  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \beta$  une constante, alors

$$ET = O(\beta \Delta x) + O(\Delta t) = O(\Delta x) + O(\Delta t)$$

ainsi le schéma serait d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace et on a :

$$|O(\Delta t)| \leq \lambda_1 |\Delta t|, \quad \text{lorsque } \Delta t \rightarrow 0 \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t) = 0$$

$$\text{et } |O(\Delta x)| \leq \lambda_2 |\Delta x|, \quad \text{lorsque } \Delta x \rightarrow 0 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} O(\Delta x) = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} ET = 0.$$

Par conséquent, si  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  est une constante, alors le schéma est consistant.

- Stabilité

Le schéma est :

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2} (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

On peut écrire :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

En posant  $u_j^n = C^n e^{i\alpha j \Delta x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et en injectant cette solution dans l'équation, on a :

$$\begin{aligned} C^{n+1} e^{i\alpha j \Delta x} &= \frac{1}{2} C^n (e^{i\alpha(j-1)\Delta x} + e^{i\alpha(j+1)\Delta x}) - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (C^n e^{i\alpha(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\alpha(j-1)\Delta x}) \\ C^{n+1} &= \frac{1}{2} C^n (e^{i\alpha \Delta x} + e^{-i\alpha \Delta x}) - \lambda C^n (e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x}) \quad \text{avec } \lambda = a \frac{\Delta t}{2\Delta x} \\ C^{n+1} &= C^n [\cos(\alpha \Delta x) - 2\lambda i \sin(\alpha \Delta x)] \\ C^{n+1} &= A C^n \quad \text{avec } A = \cos(\alpha \Delta x) - 2\lambda i \sin(\alpha \Delta x) \\ C^{n+1} &= A^n C^0 \end{aligned}$$

Avec une condition initiale  $C^0$  bornée, la suite  $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $|A| \leq 1$

$$|A|^2 = |\cos(\alpha \Delta x) - 2\lambda i \sin(\alpha \Delta x)|^2$$

$$|A|^2 = \cos^2(\alpha \Delta x) + 4\lambda^2 \sin^2(\alpha \Delta x)$$

$$|A|^2 = 1 - \sin^2(\alpha \Delta x) + 4\lambda^2 \sin^2(\alpha \Delta x)$$

$$|A|^2 = 1 - (1 - 4\lambda^2) \sin^2(\alpha \Delta x)$$

$$|A|^2 \leq 1 \implies 1 - (1 - 4\lambda^2) \sin^2(\alpha \Delta x) \leq 1$$

$$\implies (1 - 4\lambda^2) \sin^2(\alpha \Delta x) \geq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\implies 1 - 4\lambda^2 \geq 0$$

$$\implies \lambda^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\implies |\lambda| \leq \frac{1}{2}$$

$$\implies |a| \frac{\Delta t}{2\Delta x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\implies |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Par conséquent le schéma 3 est stable si et seulement si  $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

- **Covergence**

Le schéma est consistant et stable sous la condition  $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ , alors le schéma converge d'après le théorème de Lax.

#### 1.2.4 Schéma 4 (Lax-Wendroff)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) = 0$$

L'équation de transport est  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (A)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0 \\ -a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (B)$$

$$A + B \implies \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Donc l'équation de transport vérifie  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Ainsi  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + O((\Delta x)^4) \\ u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + O((\Delta x)^4) \\ u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) &= 2u(x, t) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O((\Delta x)^4) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Par suite, pour tout  $(x, t)$  fixé, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{a^2}{(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)] + O((\Delta x)^2)$$

Le développement limité à l'ordre 2 de  $u(x, t + \Delta t)$  au voisinage de  $(x, t)$  donne:

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) &= u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + O((\Delta t)^3) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + O((\Delta t)^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - \frac{a^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)] + O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{a^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O((\Delta x)^3) \\ u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O((\Delta x)^3) \\ u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) &= 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O((\Delta x)^3) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

- Consistance

$$ET = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left[ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{a^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{a}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right]$$

$$ET = O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2)$$

$$|O(\Delta t)| \leq \lambda_1 |\Delta t|, \quad \text{lorsque } \Delta t \rightarrow 0 \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t) = 0$$

$$\text{et } |O(\Delta x)| \leq \lambda_2 |\Delta x|, \quad \text{lorsque } \Delta x \rightarrow 0 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} O(\Delta x) = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} ET = 0.$$

Par conséquent le schéma est consistant.

- Stabilité

Le schéma s'écrit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{a^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{a}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{a^2}{2} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2} \lambda^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad \text{avec } \lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

En posant  $u_j^n = C^n e^{i\alpha j \Delta x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et en injectant cette solution dans l'équation, on a:

$$C^{n+1} e^{i\alpha j \Delta x} = C^n e^{i\alpha j \Delta x} + \frac{1}{2} \lambda^2 \left( C^n e^{i\alpha(j+1)\Delta x} - 2C^n e^{i\alpha j \Delta x} + C^n e^{i\alpha(j-1)\Delta x} \right) -$$

$$\frac{1}{2} \lambda \left( C^n e^{i\alpha(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\alpha(j-1)\Delta x} \right)$$

$$C^{n+1} = C^n + \frac{1}{2} \lambda^2 C^n (e^{i\alpha \Delta x} + e^{-i\alpha \Delta x} - 2) - \frac{1}{2} \lambda C^n (e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x})$$

$$C^{n+1} = C^n [1 + \lambda^2 (\cos(\alpha \Delta x) - 1) - \lambda i \sin(\alpha \Delta x)]$$

$$C^{n+1} = A C^n \quad \text{avec } A = 1 + \lambda^2 (\cos(\alpha \Delta x) - 1) - \lambda i \sin(\alpha \Delta x)$$

Pour une condition initiale  $C^0$  bornée, la suite  $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $|A| \leq 1$ .

$$|A|^2 = |1 + \lambda^2 (\cos(\alpha \Delta x) - 1) - \lambda i \sin(\alpha \Delta x)|^2$$

$$= (1 + \lambda^2 (\cos(\alpha \Delta x) - 1))^2 + \lambda^2 \sin^2(\alpha \Delta x)$$

$$= \left( 1 - 2\lambda^2 \sin^2 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right) \right)^2 + \lambda^2 \sin^2(\alpha \Delta x) \quad \text{car } \forall a \in \mathbb{R}, \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 1 - 4\lambda^2 \sin^2 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right) + 4\lambda^4 \sin^4 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right) + 4\lambda^2 \sin^2 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)$$

$$\text{car } \forall a \in \mathbb{R}, \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$|A|^2 = 1 - 4\lambda^2 \sin^2 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right) \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right) \right) + 4\lambda^4 \sin^4 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)$$

$$= 1 - 4\lambda^2 \sin^4 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right) + 4\lambda^4 \sin^4 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)$$

$$= 1 + 4\lambda^2 (\lambda^2 - 1) \sin^4 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)$$

$$|A|^2 \leq 1 \implies 1 + 4\lambda^2 (\lambda^2 - 1) \sin^4 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right) \leq 1$$

$$\implies 4\lambda^2 (\lambda^2 - 1) \sin^4 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right) \leq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\implies \lambda^2 - 1 \leq 0$$

$$\implies \lambda^2 \leq 1$$

$$\implies |\lambda| \leq 1$$

$$\implies |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Ainsi le schéma est stable si et seulement si  $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

- Convergence

Le schéma est consistant et stable sous la condition  $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ , alors le schéma converge d'après le théorème de Lax.

### 1.3 Implémentation des schémas numériques

On discrétise l'intervalle  $[0, L]$  en  $(N - 1)$  sous-intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ) de tailles égales  $\Delta x$  ( $\Delta x = \frac{L}{N-1}$  ;  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ ), et on note par  $u_i^n$  la solution approchée au nœud  $x_i$  à l'instant  $t^n = n\Delta t$  ( $\Delta t$  étant le pas de temps).

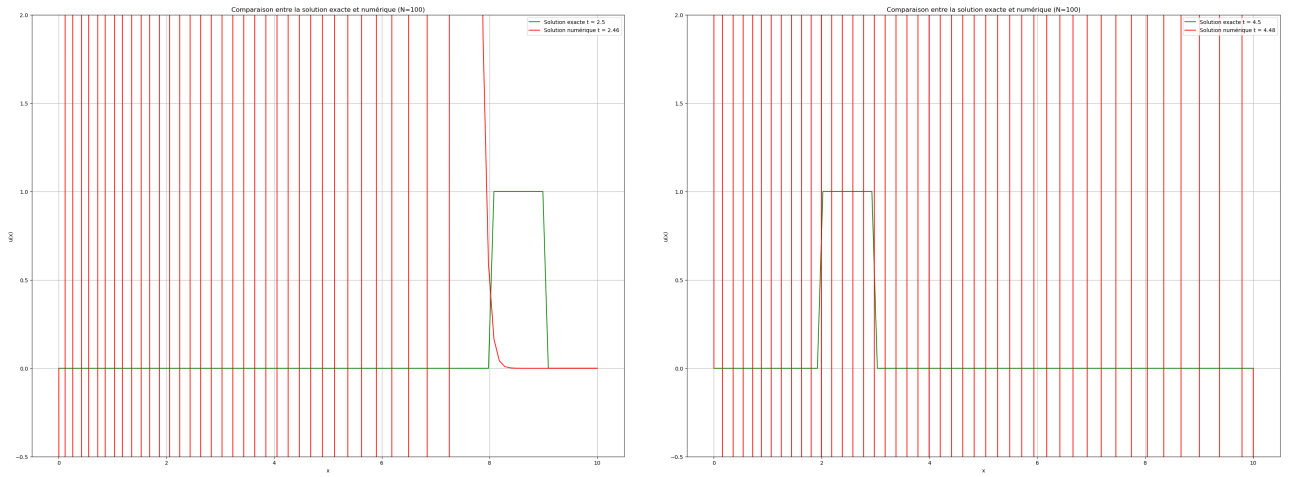
#### 1.3.1 Schéma 1 (centré)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

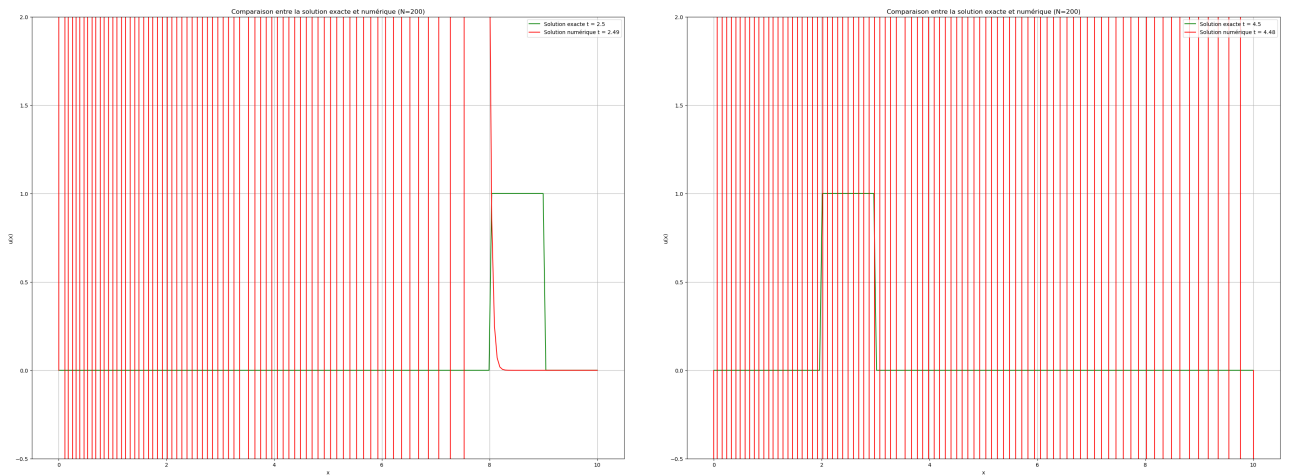
Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 100$  points.



Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 200$  points.



#### Interprétation :

Les deux figures présentent les tracés des solutions exacte et approchée par différences finies pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles du système ( $E_1$ ) avec le schéma centré. Ce schéma est instable.

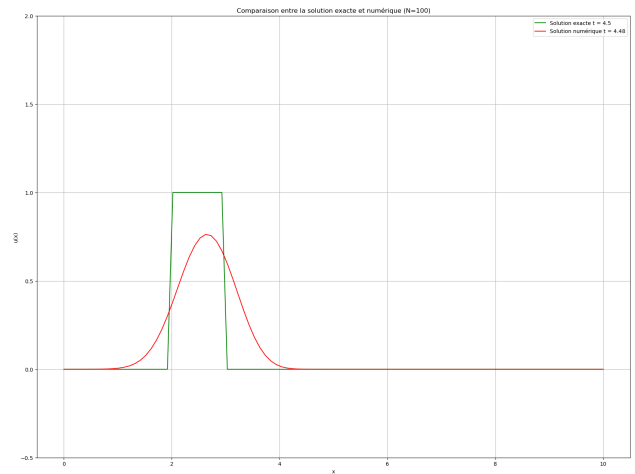
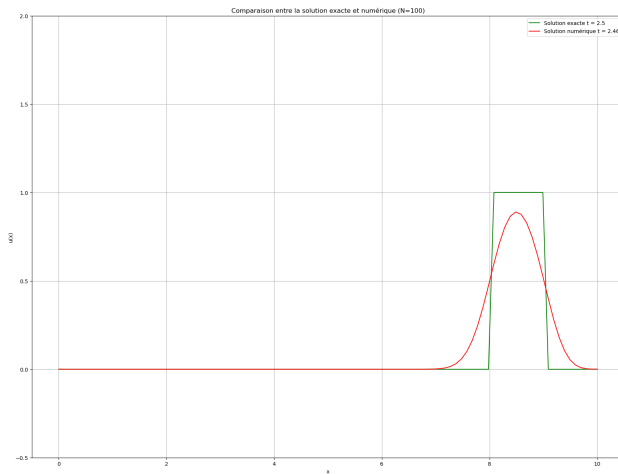
### 1.3.2 Schéma 2 (décentré)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{Puisque } a > 0$$

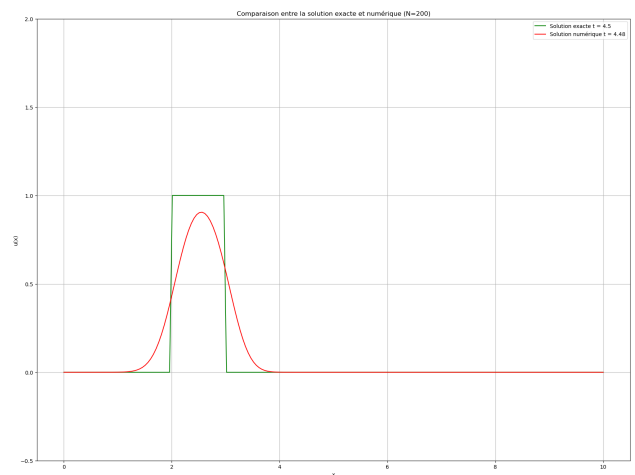
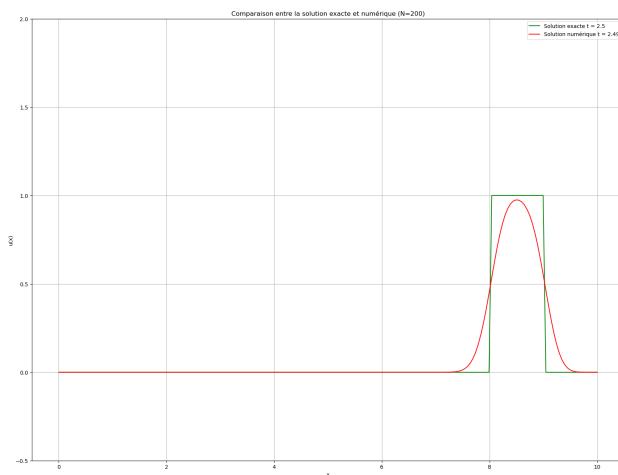
Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad \text{Puisque } a > 0$$

Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 100$  points.



Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 200$  points.



#### Interprétation :

Les deux figures présentent les tracés des solutions exacte et approchée par différences finies pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles du système ( $E_1$ ) avec le schéma décentré en amont. On remarque que la solution approchée est stable et se déplace avec la solution exacte (le schéma est donc stable). On remarque cependant une légère diffusion dans les coins supérieur gauche et droit, ce qui est expliquée par l'erreur de troncature et le choix de la condition  $CFL = 0.8$ . De plus on remarque qu'avec plus de points de maillage, il y a moins de diffusion et que la solution approche plus à la solution exacte.

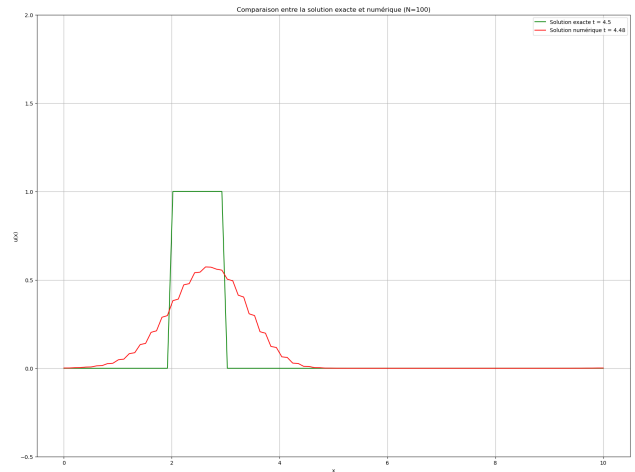
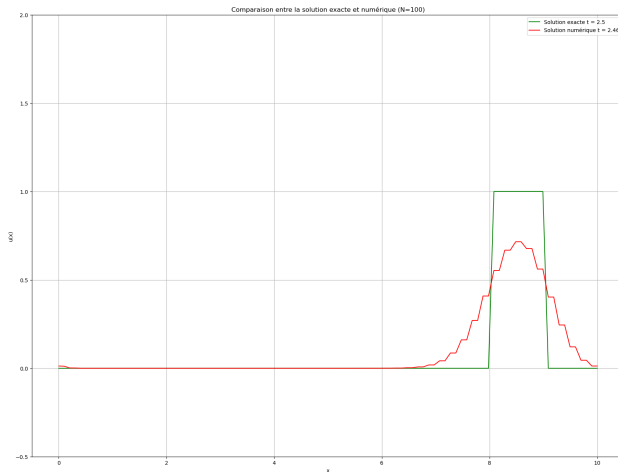
### 1.3.3 Schéma 3 (Lax-Friedrichs)

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

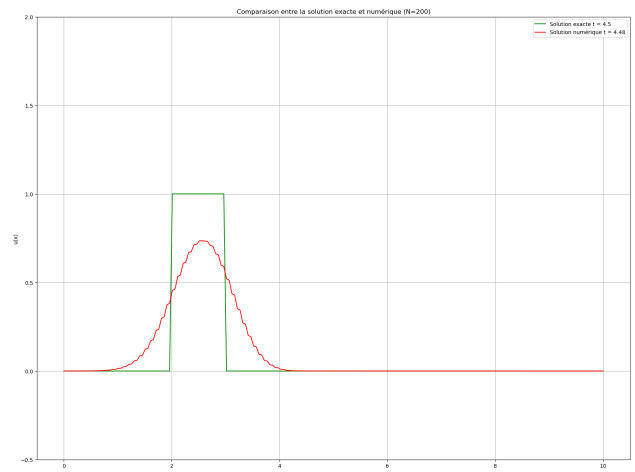
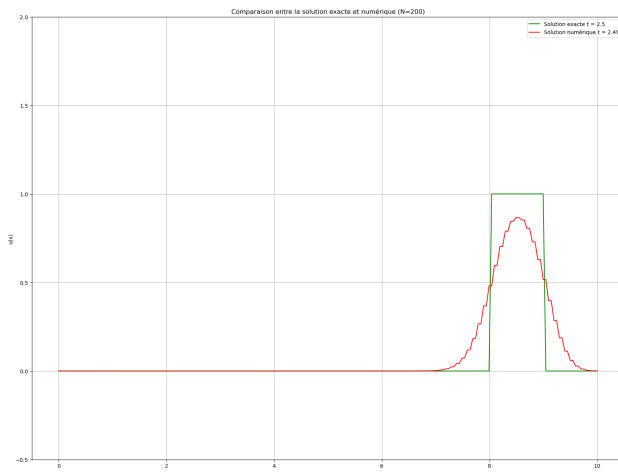
Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - a \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 100$  points.



Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 200$  points.



#### Interprétation :

Les deux figures présentent les tracés des solutions exacte et approchée par différences finies pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles du système ( $E_1$ ) avec le schéma de Lax-Friedrichs. On remarque que la solution approchée est stable et se déplace avec la solution exacte (le schéma est donc stable). On remarque cependant une légère diffusion dans les coins supérieur gauche et droit, ce qui est expliquée par l'erreur de troncature et le choix de la condition  $CFL = 0.8$ . De plus on remarque qu'avec plus de points de maillage, il y a moins de diffusion et que la solution approche plus à la solution exacte.

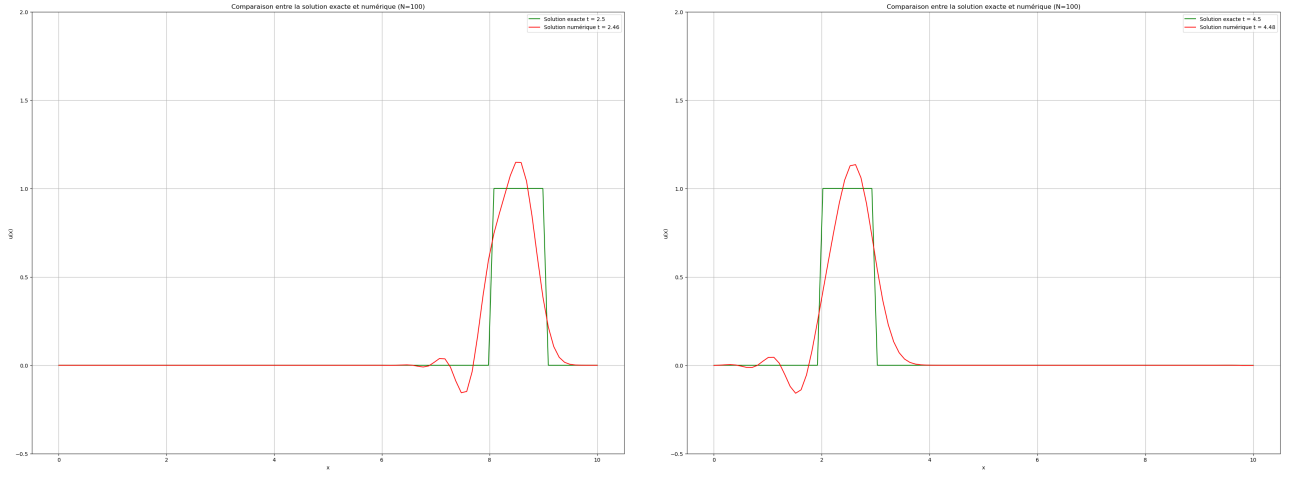
### 1.3.4 Schéma 4 (Lax-Wendroff)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) = 0$$

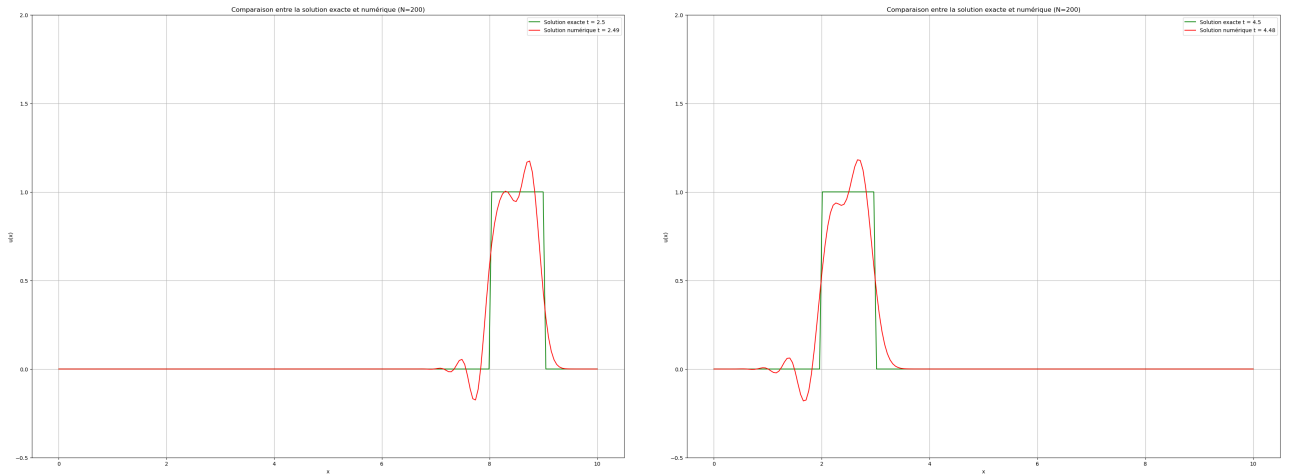
Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2 (\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 100$  points.



Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 200$  points.



#### Interprétation :

Les deux figures présentent les tracés des solutions exacte et approchée par différences finies pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles du système ( $E_1$ ) avec le schéma de Lax-Wendroff. On remarque que la solution approchée est stable et se déplace avec la solution exacte (le schéma est donc stable). On remarque cependant une légère diffusion dans les coins supérieur gauche et droit, ce qui est expliquée par l'erreur de troncature et le choix de la condition  $CFL = 0.8$ . De plus on remarque qu'avec plus de points de maillage, il y a moins de diffusion et que la solution approche plus à la solution exacte.



## 1.4 Evaluation de l'erreur

Evaluons l'erreur en norme L1 de la solution numérique obtenue par chaque schéma au temps  $t_1 = 2.5$  s et pour  $N = 100$ .

Schémas Numériques	Erreurs
Schéma 1 (centré)	8193799.98209779
Schéma 2 (décentré)	5.007643310207005
Schéma 3 (Lax-Friedrichs)	7.325774940114558
Schéma 4 (Lax-Wendroff)	4.096807032307505

Table 1: Erreurs des schémas numériques.

Ce tableau présente les erreurs calculées en norme L1 e la solution numérique obtenue par chaque schéma au temps  $t_1 = 2.5$  s et pour  $N = 100$ . On constate donc que le Schéma 4 (Lax-Wendroff) présente la plus petite valeur de l'erreur. Ainsi on déduit que le Schéma 4 (Lax-Wendroff) est le meilleur pour la résolution de ce problème.

## 2 Equation de Burgers

On considère l'équation de Burgers suivante

$$(E_2) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall x \in ]0, L[, \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L[ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, & \forall t > 0 \end{cases}$$

### 2.1 Résolution par la méthode des caractéristiques

A l'aide de la méthode des caractéristiques, déterminons la solution exacte  $u(x, t)$  du problème (E2)

Trouvons la courbe caractéristique  $\Gamma = \Gamma(x(s), t(s))$ ,  $s$  étant le paramètre qui décrit la courbe, le long de laquelle l'EDP devient un système d'EDO.

Dérivons  $u$  le long de la courbe  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \quad \text{or} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= -u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ &= \left( \frac{dx}{ds} - u \frac{dt}{ds} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

En posant  $\frac{dx}{ds} - u \frac{dt}{ds} = 0$  on a  $\frac{dx}{dt} = u$  et  $\frac{du}{ds} = 0$

Les courbes caractéristiques vérifient donc l'équation  $x = ut + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

et sur ces courbes caractéristiques la solution vérifie :  $du = 0$

Sur chacune de ces courbes caractéristiques  $x = ut + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ , la solution  $u$  est une constante.

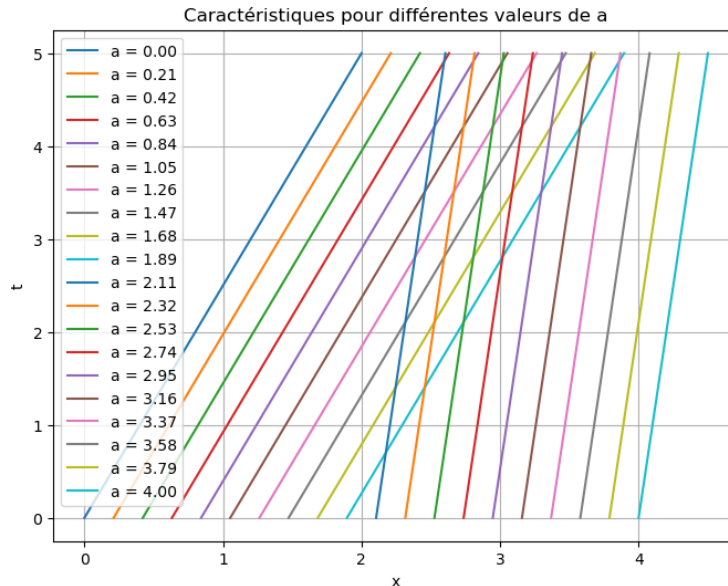
Donc  $u(x, t) = f(\alpha)$  avec  $\alpha = x - ut, \alpha \in \mathbb{R}$

Ainsi  $u(x, t) = f(x - tu)$

or  $u(x, 0) = u_0(x) \implies f(x) = u_0(x)$

Par conséquent la solution générale de l'équation de Burgers est  $u(x, t) = u_0(x - tu_0(\alpha))$

Les courbes caractéristiques vérifient  $x = t \times u_0(\alpha) + \alpha$



Dans la pratique, l'expression exacte de la solution générale de l'équation de Burgers dépend de la condition initiale  $u_0$ .

Soit la condition initiale  $u_0$  définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < 0 \\ u_2 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans notre cas, la condition initiale est définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0,4 & \text{si } x < 2 \\ 0,1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0,4 & \text{si } x - 2 < 0 \\ 0,1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons  $u_1 = 0,4$  et  $u_2 = 0,1$

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x - 2 < 0 \\ u_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a  $u_1 > u_2$ , et on constate d'après le graphe des courbes caractéristiques des droites caractéristiques qui se croisent dans le demi-plan  $t > 0$ . Il s'agit donc de trouver une solution discontinue (propagation de discontinuité). La solution est donnée par  $u_1$  à gauche des courbes caractéristiques  $\Gamma(\gamma(t), t)$  et par  $u_2$  à droite. L'équation de cette courbe est donné par la condition de Rankine-Hugoniot et dans le cas de l'équation de Burgers on a :

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$$

où  $u_+$  (resp.  $u_-$ ) désigne la valeur de  $u$  à droite (resp. à gauche). Dans le cas du problème de Riemann à deux états ( $u_1 > u_2$ ), c'est le cas de notre problème, on obtient la solution dite onde de choc :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ u_2 & \text{si } \frac{x}{t} > \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \end{cases}$$

Car  $\gamma(t) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)t$

Par conséquent la solution exacte de l'équation de Burgers (dans le cas de notre problème) est donnée par :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0,4 & \text{si } \frac{x-2}{t} < 0,25 \\ 0,1 & \text{si } \frac{x-2}{t} > 0,25 \end{cases}$$

Car  $\frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{1}{2}(0,4 + 0,1)$

## 2.2 Implémentation du schéma numérique

On discrétise l'intervalle  $[0, L]$  en  $(N - 1)$  sous-intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ) de tailles égales  $\Delta x$  ( $\Delta x = \frac{L}{N-1}$  ;  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ ), et on note par  $u_i^n$  la solution approchée au nœud  $x_i$  à l'instant  $t^n = n\Delta t$  ( $\Delta t$  étant le pas de temps).

L'équation de Burgers est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad f = \frac{1}{2}u^2$$

### 2.2.1 Schéma 1 (centré)

Développement limité de  $u(x, t + \Delta t)$  au voisinage de  $u(x, t)$  à l'ordre 1

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

Dans le cas du schéma centré, nous n'allons pas considérer le changement de variable dans l'équation. Développement limité de  $u(x + \Delta x, t)$  et  $u(x - \Delta x, t)$  au voisinage de  $u(x, t)$  à l'ordre 2

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O((\Delta x)^3)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O((\Delta x)^3)$$

$$u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O((\Delta x)^3)$$

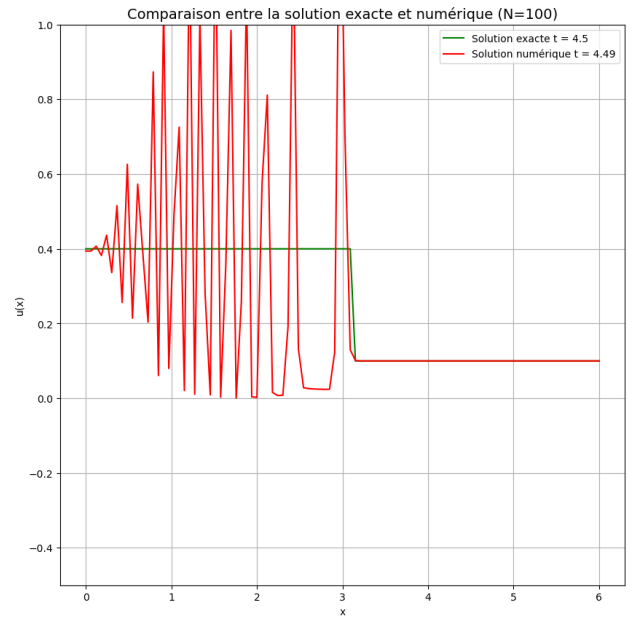
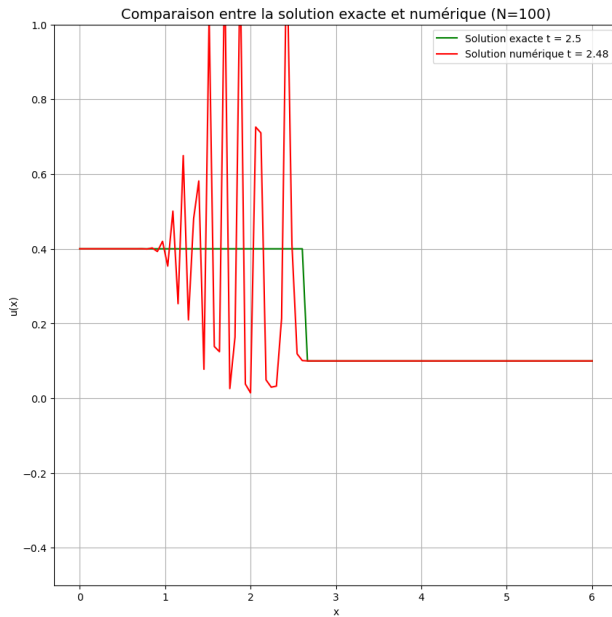
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

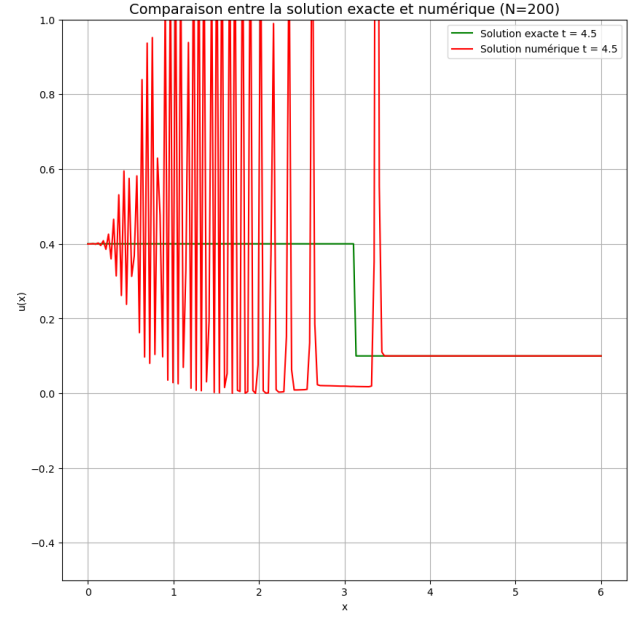
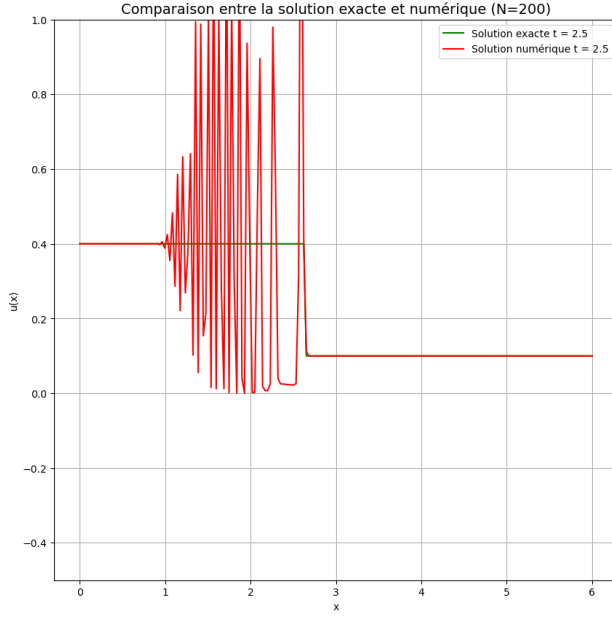
$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n \simeq \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

On a ainsi  $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$

$$\Rightarrow u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 100$  et  $N = 200$  points.





### Interprétation :

Les deux figures présentent les tracés des solutions exacte et approchée par différences finies pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles du système ( $E_2$ ) avec le schéma centré. On remarque que la solution approchée présente beaucoup de difusions et n'approche pas la solution exacte (le schéma est donc instable).

### 2.2.2 Schéma 2 (décentré)

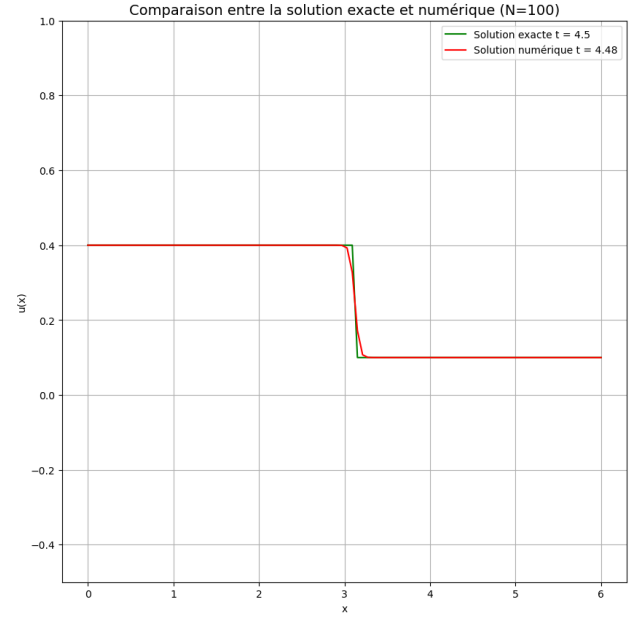
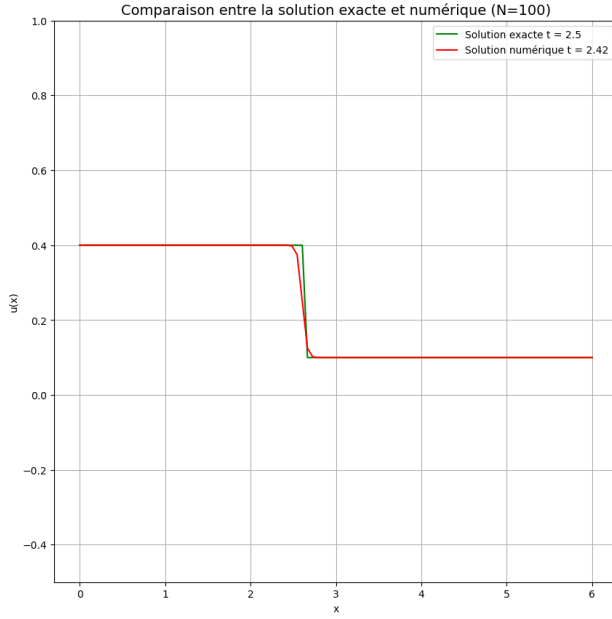
Le schéma décentré pour l'équation de Burgers s'exprime comme suit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{avec} \quad f_j^n = \frac{1}{2}(u_j^n)^2$$

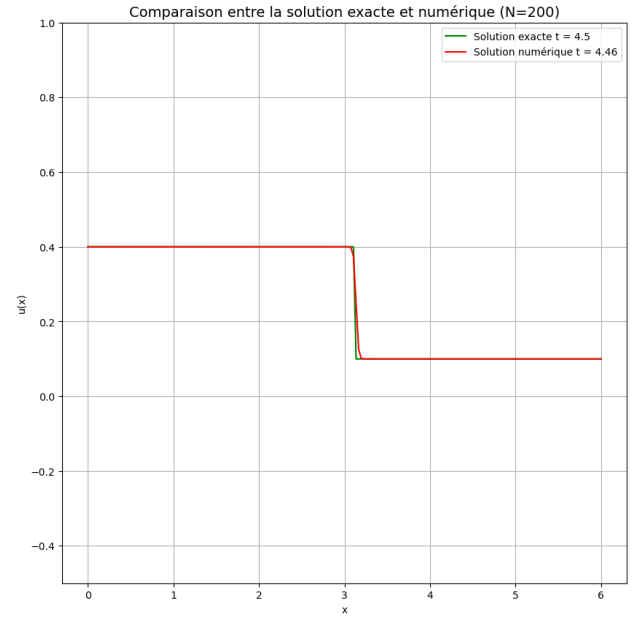
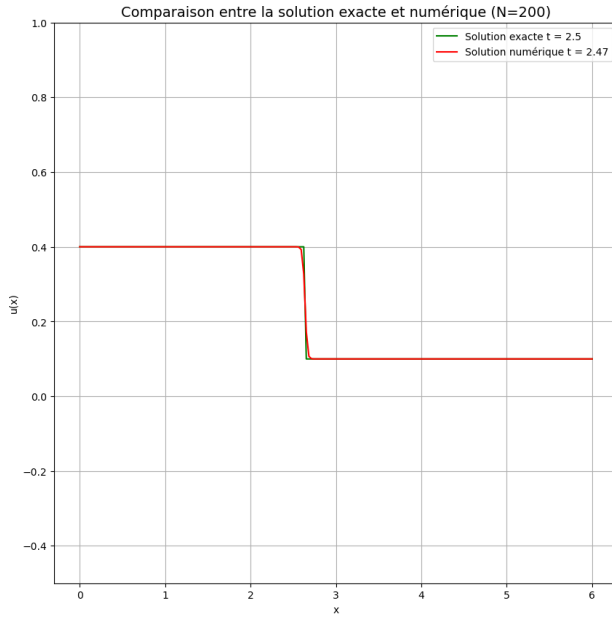
Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f_j^n - f_{j-1}^n) \quad \text{avec} \quad f_j^n = \frac{1}{2}(u_j^n)^2$$

Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s en avec deux maillages différents formés de  $N = 100$  points.



Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 200$  points.



### Interprétation :

Les deux figures présentent les tracés des solutions exacte et approchée par différences finies pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles du système ( $E_2$ ) avec le schéma décentré en amont. On remarque que la solution approchée est stable et se déplace avec la solution exacte (le schéma est donc stable). On remarque cependant une légère diffusion, ce qui est expliquée par l'erreur de troncature et le choix de la condition  $CFL = 0.8$ . De plus on remarque qu'avec plus de points de maillage, il y a moins de diffusion et que la solution approche plus à la solution exacte.

### 2.2.3 Schéma 3 (Lax-Friedrichs)

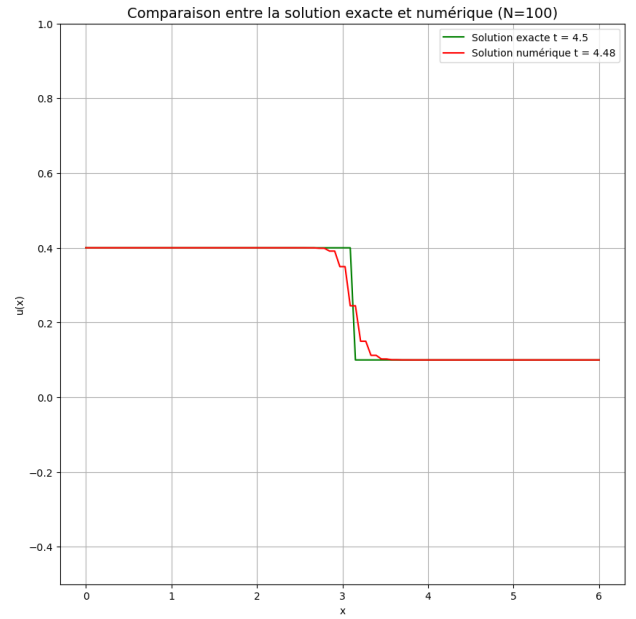
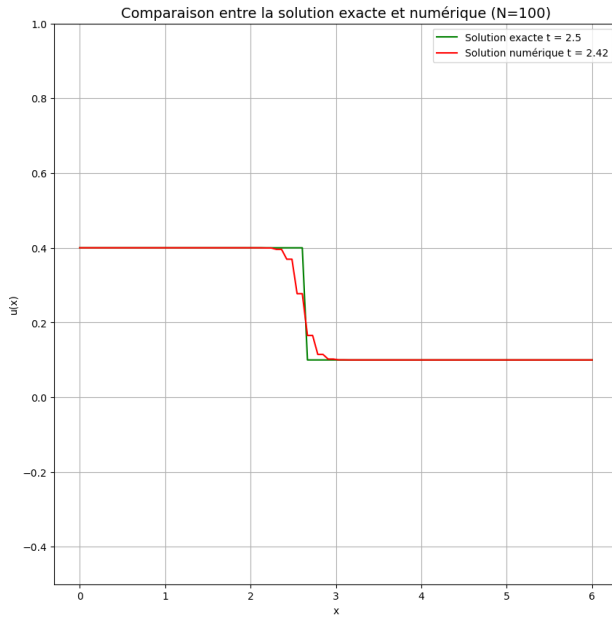
Le schéma numérique de Lax-Friedrichs pour l'équation de Burgers s'exprime comme suit:

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{avec} \quad f_j^n = \frac{1}{2}(u_j^n)^2$$

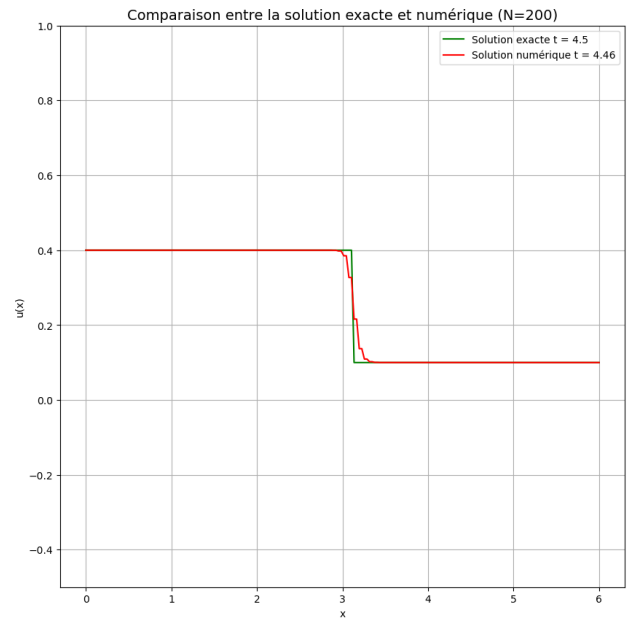
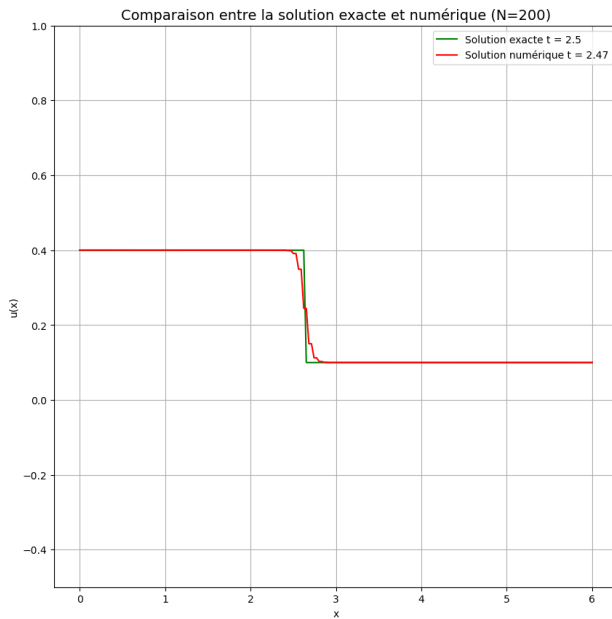
Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \quad \text{avec} \quad f_j^n = \frac{1}{2}(u_j^n)^2$$

Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 100$  points.



Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 200$  points.



### Interprétation :

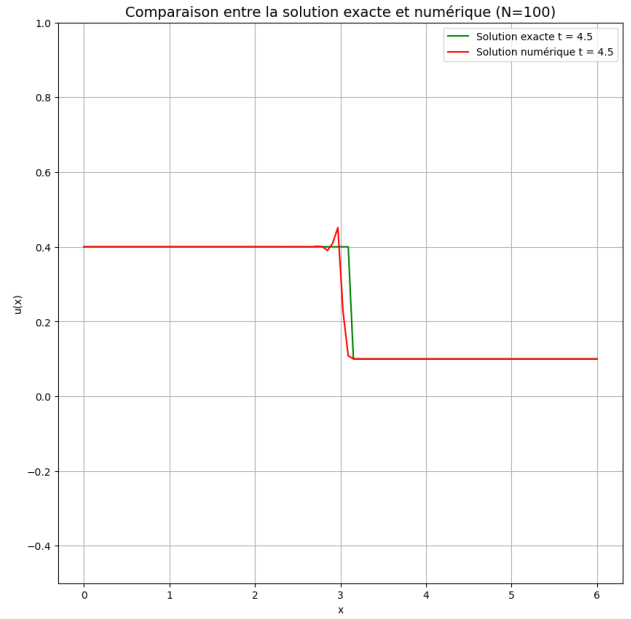
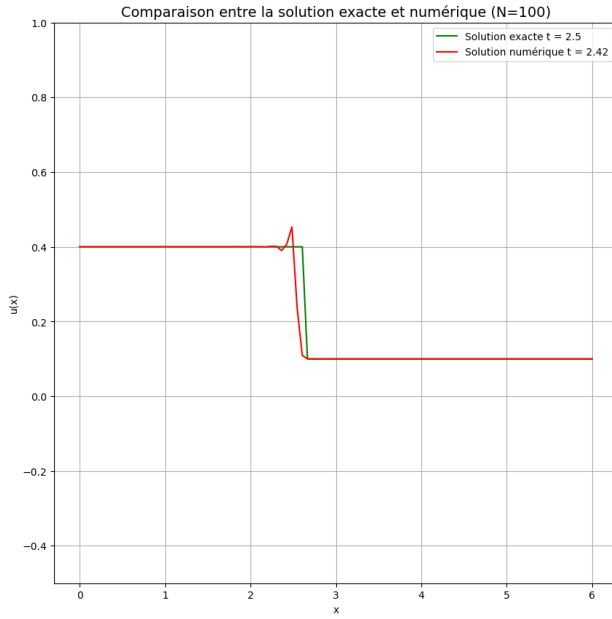
Les deux figures présentent les tracés des solutions exacte et approchée par différences finies pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles du système ( $E_2$ ) avec le schéma de Lax-Friedrichs. On remarque que la solution approchée est stable et se déplace avec la solution exacte (le schéma est donc stable). On remarque cependant une légère diffusion, ce qui est expliquée par l'erreur de troncature et le choix de la condition CFL = 0.8. De plus on remarque qu'avec plus de points de maillage, il y a moins de diffusion et que la solution approche plus à la solution exacte.

#### 2.2.4 Schéma 4 (Lax-Wendroff)

Le schéma numérique de Lax-Wendroff pour l'équation de Burgers s'exprime comme suit:

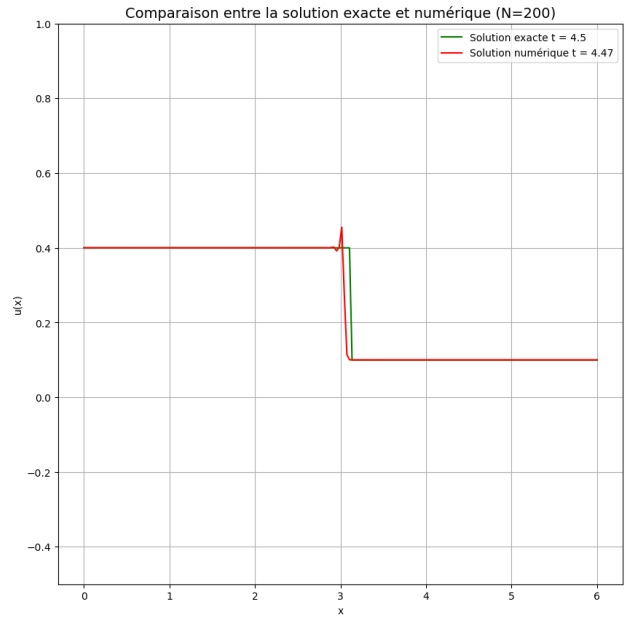
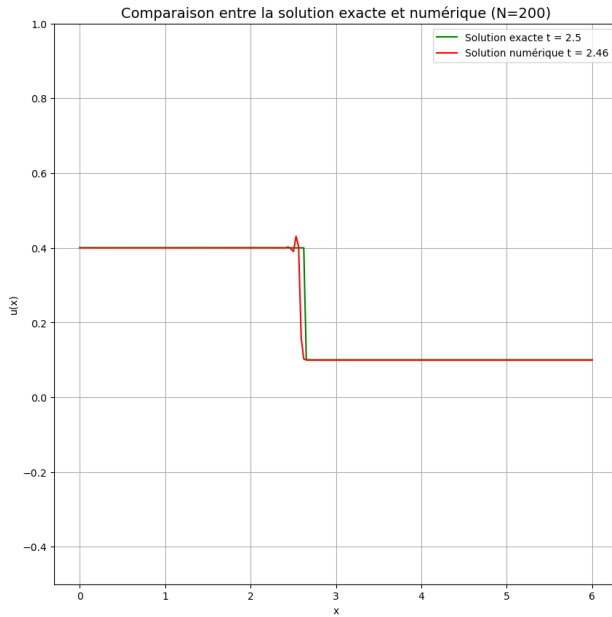
$$\alpha = 1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n)$$
$$u_j^{n+1} = u_j^n + u_j^n \frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} (f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n) - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \quad \text{avec} \quad f_j^n = \frac{1}{2}(u_j^n)^2$$

Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 100$  points.



Traçons les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s avec deux maillages différents formés de  $N = 200$  points.





### Interprétation :

Les deux figures présentent les tracés des solutions exacte et approchée par différences finies pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles du système ( $E_2$ ) avec le schéma de Lax-Wendroff. On remarque que la solution approchée est stable et se déplace avec la solution exacte (le schéma est donc stable). On remarque cependant une légère diffusion, ce qui est expliquée par l'erreur de troncature et le choix de la condition  $CFL = 0.8$ . De plus on remarque qu'avec plus de points de maillage, il y a moins de diffusion et que la solution approche plus à la solution exacte.

## 2.3 Evaluation de l'erreur

Evaluation de l'erreur en norme  $L^1$  de la solution numérique obtenue pour le schéma au temps  $t_1 = 2.5$  s et pour  $N = 100$ .

Schémas Numériques	Erreurs
Schéma 1 (centré)	8.74347727014451
Schéma 2 (décentré)	0.20433295247922767
Schéma 3 (Lax-Friedrichs)	0.48137602289154297
Schéma 4 (Lax-Wendroff)	0.5268916127766456

Table 2: Erreurs des schémas numériques

Ce tableau présente les erreurs calculées en norme  $L^1$  et la solution numérique obtenue par chaque schéma au temps  $t_1 = 2.5$  s et pour  $N = 100$ . On constate donc que le Schéma 2 (décentré en amont) présente la plus petite valeur de l'erreur. Ainsi on déduit que le Schéma 2 (décentré) est le meilleur pour la résolution de ce problème.