

Problema 8

Taxa de chegada:

$$\lambda = 33 \frac{\text{utilizadores}}{\text{hora}}$$

Tempo médio de serviço:

$$\frac{1}{\mu} = 3 \frac{\text{minutos}}{\text{utilizador}} = \frac{1}{20} \frac{\text{horas}}{\text{utilizador}}$$

Taxa de atendimento:

$$\mu = 20 \frac{\text{utilizadores}}{\text{hora}}$$

Custo de cada servidor (fotocopiadora) por hora:

$$\frac{12}{40} \frac{\text{contos}}{\text{hora}} = 0.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$$

(a) Número de servidores:

$$S = 2 \Rightarrow \text{Fila M/M/2}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{33}{20} = 1.65$$

$$P_0 = 0.1111 - \frac{0.1111 - 0.0526}{4} = 0.0965$$

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{33}{2 \times 20} = 0.825$$

Nº médio de pessoas aguardando a utilização duma fotocopiadora:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.0965(1.65)^2 0.825}{2!(1-0.825)^2} = 3.5387 \text{ pessoas.}$$

Tempo médio duma pessoa na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.5387}{33} = 0.1072 \text{ horas} = 6.4 \text{ minutos.}$$

Tempo médio duma pessoa no sistema.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.1072 + 0.05 = 0.1572 \text{ horas} = 9.4 \text{ minutos.}$$

- (b) • Com o número de fotocopiadoras existente (duas), o custo do serviço é de $2 \times 0.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}} = 0.6 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$ e o custo dos clientes (espera e atendimento) é de $33 \times 0.1572 \times 1.8 = 9.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$. Assim o custo total para a empresa é $9.9 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$

- Com três fotocopadoras ...

Número de servidores:

$$S = 3 \Rightarrow \text{Fila M/M/3}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{33}{20} = 1.65$$

$$P_0 = 0.1872 - \frac{0.1872 - 0.1460}{4} = 0.1769$$

$$\rho = \frac{\lambda}{3\mu} = \frac{33}{3 \times 20} = 0.55$$

Nº médio de pessoas aguardando a utilização duma fotocopadora:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.1769(1.65)^3 0.55}{3!(1-0.55)^2} = 0.3597 \text{ pessoas.}$$

Tempo médio duma pessoa na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.7994}{33} = 0.0109 \text{ horas.}$$

Tempo médio duma pessoa no sistema.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0109 + 0.05 = 0.0609 \text{ horas.}$$

Com 3 fotocopadoras, o custo do serviço é de $3 \times 0.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}} = 0.9 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$ e o custo dos clientes (espera e atendimento) é de $33 \times 0.0609 \times 1.8 = 3.6175 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$. Assim o custo total para a empresa é $4.5175 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$

- Com quatro fotocopadoras ...

Número de servidores:

$$S = 4 \Rightarrow \text{Fila M/M/4}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{33}{20} = 1.65$$

$$P_0 = 0.1953 - \frac{0.1953 - 0.1616}{4} = 0.1899$$

$$\rho = \frac{\lambda}{4\mu} = \frac{33}{4 \times 20} = 0.4125$$

Nº médio de pessoas aguardando a utilização duma fotocopadora:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.1899(1.65)^4 0.4125}{4!(1-0.4125)^2} = 0.0701 \text{ pessoas.}$$

Tempo médio numa pessoa na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.0701}{33} = 0.0021 \text{ horas.}$$

Tempo médio numa pessoa no sistema.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0021 + 0.05 = 0.0521 \text{ horas.}$$

Com 4 fotocopiadoras, o custo do serviço é de $4 \times 0.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}} = 1.2 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$ e o custo dos clientes (espera e atendimento) é de $33 \times 0.0521 \times 1.8 = 3.0962 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$. Assim o custo total para a empresa é $4.2962 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$.

- Com cinco fotocopiadoras ...

Número de servidores:

$$S = 5 \Rightarrow \text{Fila M/M/5}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{33}{20} = 1.65$$

$$P_0 = 0.2014 - \frac{0.2014 - 0.1646}{4} = 0.1922$$

$$\rho = \frac{\lambda}{5\mu} = \frac{33}{4 \times 20} = 0.33$$

Nº médio de pessoas aguardando a utilização numa fotocopiadora:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.1922(1.65)^5 0.33}{5!(1-0.33)^2} = 0.0144 \text{ pessoas.}$$

Tempo médio numa pessoa na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.0144}{33} = 0.0004 \text{ horas.}$$

Tempo médio numa pessoa no sistema.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0004 + 0.05 = 0.0504 \text{ horas.}$$

Com 5 fotocopiadoras, o custo do serviço é de $5 \times 0.3 \frac{\text{contos}}{\text{hora}} = 1.5 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$ e o custo dos clientes (espera e atendimento) é de $33 \times 0.0504 \times 1.8 = 2.9938 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$. Assim o custo total para a empresa é $4.4938 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$.

- A quantidade de fotocopiadoras que minimiza o custo total da empresa é 4, com um custo de $4.2962 \frac{\text{contos}}{\text{hora}}$.