# 北京大学

# 2016 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

# 科目名称：高等代数与解析几何

**考生须知：**

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (10') 在 $R^3$ 上定义线性变换 $A$, $A$ 在自然基 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
求 $R^3$ 的一组基, 使得 $A$ 在这组基下具有 Jordan 型.

2. (10') 3 阶实矩阵 $A$ 的特征多项式为 $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. 证明 $A$ 不是对称阵也不是正交阵.

3. (15') 在所有 2 阶实方阵上定义二次型 $f : X \to Tr(X^2)$. 求 $f$ 的秩和符号差.

4. (15') 设 $V$ 是有限维线性空间, $A, B$ 是 $V$ 上线性变换满足下面条件:
(1)$AB = O$. 这里 $O$ 是 0 变换;
(2) $A$ 的任意不变子空间也是 $B$ 的不变子空间;
(3) $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = O$.
证明 $BA = O$.

5. (15') 设 $V$ 是全体次数不超过 $n$ 的实系数多项式组成的线性空间. 定义线性变换 $A$ : $f(x) \to f(1-x)$, 求 $A$ 的特征值和对应的特征子空间.

6. (15') 计算行列式. 各行底数为等差数列, 各列底数也为等差数列, 所有指数都是 50,
$$\begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & 4^{50} & \cdots & 101^{50} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & 102^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}.$$

7. (20') 设 $V$ 是复数域上有限维线性空间 $A$ 是 $V$ 上可线性变换, $A$ 在一组基下矩阵为 $F$.
(1) 若 $A$ 可对角化对任意 $A$ 的不变子空间 $U$, 存在 $U$ 的一个补空间 $W$ 是 $A$ 的不变子空间;
(2) 若对任意 $A$ 的不变子空间 $U$, 存在 $U$ 的一个补空间 $W$ 是 $A$ 的不变子空间, 证明 $F$ 可对角化.

8. (20') 平面上一个可逆仿射变换将一个圆映为椭圆或圆. 详细论证这一点.

9. (15') 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 与双曲抛物面 $2z = x^2 - y^2$ 交于两条直线. 证明 $A^2 - B^2 - 2CD = 0$.

10. (15') 正十二面体有 12 个面, 每个面为正五边形, 每个顶点连接 3 条棱. 求它的内切球与外接球半径比.

注：题目来源于博士数学论坛里的 TangSong .