一、(10 分)设 x_1, x_2 是线性空间 V 的一组基,线性变换 T 在这组基下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 。y_1, y_2 是另一组基，且 $(y_1, y_2) = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 。（1）求 T 在 y_1, y_2 下的矩阵 B ；(2) 计算 A^{100} 。

二、（10 分）计算 $\ln A$ ，其中 $A = \begin{bmatrix} e & 1 & & \\ & e & 1 & \\ & & e & 1 \\ & & & e \end{bmatrix}$ 。

四、（10 分）设 $A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ ，计算 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$ 。

五、（10 分）设矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 满足 $A^3 = A$ ，证明存在非奇异矩阵 X 使得 $X^{-1}AX = \begin{bmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0_t \end{bmatrix}$。

六、（10 分）设矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 是对称正定矩阵，证明存在唯一的对称正定矩阵 B 满足 $B^4 = A$ 。

七、（15 分）（1）证明矩阵 A 为收敛矩阵（即 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$）的充分必要条件是 $\rho(A) < 1$ 。

（2）设三个实矩阵 B, C, D 满足 $B = C - D^{\mathrm{T}}CD$ ，其中 B 和 C 都对称正定，证明 D 是收敛矩阵。

八、（20 分）设矩阵 $A \in R^{m\times n}$ 列满秩，即 $\mathrm{rank}(A) = n < m$。

（1） 写出 A 的奇异值分解的形式（不需证明）;

（2） 利用（1）中的奇异值分解给出 A 的 Moore-Penrose 广义逆 A^+ 的表达式;

（3） 证明最小二乘问题 $\min\limits_x \|Ax - b\|_2$ 的解为$x = A^+b$。