1.解：因为$f(z),g(z)$ 在z_0点解析，则$f'(z_0),g'(z_0)$ 均存在。

所以$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=\lim\limits_{z\to 0}e^z=1$

2.解：(1)$u(x,y)=x,v(x,y)=0$, 且$u_x=1,v_y=0,u_y=0,v_x=0$

故$f(z)$ 在复平面上不可微，在复平面上处处不解析。

(2) $u(x,y)=xy^2,v(x,y)=x^2y$, 此时仅当$x=y=0$ 时有

$u_x=y^2=v_y=x^2,u_y=2xy=-v_x=-2xy$, 且这四个偏导数在原点连续，

故$f(z)$ 只在原点可微，在复平面上处处不解析。

(3)$u(x,y)=\cos x\cosh y,v(x,y)=-\sin x\sinh y$, 则有

$u_x=-\sin x\cosh y,u_y=\cos x\sinh y,v_x=-\cos x\sinh y,v_y=-\sin x\cosh y$

故u_x,u_y,v_x,v_y 连续，且满足$C-R$ 条件，所以$f(z)$ 在复平面上处处解析且

$f'(z)=u_x+v_xi=-\sin x\cosh y-\cos x\sinh yi=-\sin z$

3.解:

(1) $e^{z^2}=e^{x^2-y^2+2xyi}$, $\left|e^{z^2}\right|=\left|x^2-y^2+2xyi\right|=e^{x^2-y^2}$.

(2)$e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}}=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\frac{y}{x^2+y^2}-i\sin\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ 故$Re(e^{\frac{1}{z}})=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}$.

4. 证明:$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$

$$\begin{aligned}\cos a+\cos(a+b)+\cdots+\cos(a+nb) &= \frac{e^{ia}+e^{i(a+b)}+\cdots+e^{i(a+nb)}+e^{-ia}+e^{-i(a+b)}+\cdots+e^{-i(a+nb)}}{2}\\ &= \frac{e^{ia}\left(\frac{1-e^{i(n+1)b}}{1-e^{ib}}\right)+e^{-ia}\left(\frac{1-e^{-i(n+1)b}}{1-e^{-}}\right)}{2}\\ &= \frac{\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}}{2}e^{i(a+\frac{n}{2}b)}+\frac{\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}}{2}e^{-i(a+\frac{n}{2}b)}\\ &= \frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}\cos(a+\frac{nb}{2})\end{aligned}$$

5.解：$z=\ln(1+i\sqrt{3})=\ln\left|1+i\sqrt{3}\right|+i\arg(1+i\sqrt{3})$

$=\ln 2+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)$ $(k=0,\pm1,\cdots)$

6.解:

(1) $(1+i)^i=e^{i\ln(1+i)}=e^{i[\ln|1+i|+i(\arg(1+i)+2k\pi)]}$

$=e^{i\ln\sqrt{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}=e^{i\ln\sqrt{2}}\cdot e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(2) $3^i=e^{i\ln 3}=e^{i[\ln 3+i(\arg 3+2k\pi)]}=e^{i\ln 3}\cdot e^{-2k\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

7.解: $w_k(z)=\sqrt[3]{r(z)}e^{i\frac{\theta(z)+2k\pi}{3}},(0<\theta(z)<2\pi,k=0,1,2)$

由$w(i)=e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}=-i$, 可得$k=2$.

则$w(-i)=e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3}}=e^{i\frac{11}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

8.解: $w_k(z)=\sqrt[3]{r(z)}e^{i\frac{\theta(z)+2k\pi}{3}},(-\pi<\theta(z)<\pi,k=0,1,2)$

由$w(-2)=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}=-\sqrt[3]{2}$, 可得$k=1$.

则$w(i)=e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}}=e^{i\frac{5}{6}\pi}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

9.证明：若$f(z)$ 在$z=z_0$ 处解析, 则$\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z+z_0)-f(z_0)}{z}$ 存在，$\lim\limits_{\bar{z}\to 0}\frac{\overline{f(z+z_0)}-\overline{f(z_0)}}{\bar{z}}$ 存在。记$w=\bar{z}$, $w_0=\bar{z_0}$, 则$\lim\limits_{w\to 0}\frac{\overline{f(\bar{w}+\bar{w_0})}-\overline{f(\bar{w_0})}}{w}$ 存在，则$\overline{f(\bar{w})}$ 在$w=w_0$ 处解析。同理由$\overline{f(\bar{z})}$ 解析可得$f(z)$ 解析。故$f(z)$与$\overline{f(\bar{z})}$ 是同时解析的。

思考题：1.复变函数的解析性与可微性都满足$C-R$方程. 可微性的定义域可以是点也可以是区域，解析性的定义域只能是区域，函数在一点解析是针对一个局部邻域，而函数在一点可微是针对一个点而言.

2.根据解析函数的定义判断；利用柯西黎曼方程判断.