博士数学论坛首发:

北京大学2016数学分析

*

作者：TangSong

1

1.(15′)用开覆盖定理证明闭区间上连续函数必一致连续

2.(15′)$f(x)$是$[a,b]$上的实函数.叙述关于Riemann和

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

的Cauchy准则(不用证明)并用你叙述的Cauchy准则证明闭区间上的单调函数可积

3.(15′)(a,b)上的连续函数$f(x)$有反函数.证明反函数连续

4.(15′)$f(x_1,x_2,x_3)$是C^2映射,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0,x_3^0) \neq 0$$

证明关于f的隐函数定理$x_1 = x_1(x_2,x_3)$

证明$x_1 = x_1(x_2,x_3)$二次可微并求出

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_3}$$

的表达式

5.(15′)$n \geq m, f: U \subseteq R^n \to R^m$是$C^1$映射,$U$为开集且$f$的Jacobi矩阵秩处处为$m$

证明f将U中的开集映为开集

6.(15′)

$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

证明x_n收敛并求极限值

7.(15′)证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛并求值.写出计算过程

*$www.math.org.cn$

8.$(15')$(A)证明存在$[a,b]$上的多项式序列$p_n(x)$使得

$$\int_a^b p_i(x)p_j(x)dx = \delta_{i,j}$$

并使得对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$若

$$\int_a^b f(x)p_n(x)dx = 0, \forall n$$

必有$f \equiv 0$

(B)设$g(x)$在$[a,b]$平方可积,g关于A中p_n的展式为

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b g(x)p_n(x)dx$$

问

$$\int_a^b g^2(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_a^b g(x)p_n(x)dx\right]^2$$

是否成立

9.$(15')$

$$\text{正项级数}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\text{收敛}, \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

$$c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1, \text{证明}c_n\text{收敛并求}\lim_{n\to+\infty} c_n$$

10.$(15')$幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_nx^n$$

收敛半径为$R, 0 < R < +\infty$,证明

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_nR^n\text{收敛的充要条件为}\sum_{n=1}^{+\infty} a_nx^n\text{在}[0,R)\text{一致收敛}$$

水题就很水，除了水题就是课本上超麻烦定理的证明。3元隐函数定理，反函数的连续性，Parseval等式