第一节 常微分方程初值问题的Euler法－微分方程数值解

笔记本：	我的第一个笔记本
创建时间：	2017/5/9 15:10
URL：	https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52832_1

第一节 常微分方程初值问题的Euler法

学习指导：B 初值问题 第一节

本节介绍常微分方程初值问题的Euler算法。

掌握Euler法的基本思想，算法的基本步骤，局部截断误差的概念和推导。

作业&思考：B 初值问题 第一节

1. 证明梯形格式和改进的欧拉格式都是2阶精度的。
2. 写出梯形格式和改进的欧拉格式的算法描述。
3. 编写程序求下面微分方程的数值解

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^2 - y^3, \quad 0 \le t \le 2000; \\ y(0) = 0.0001 \quad . \end{cases}$$

讲义： B 初值问题 第一节

常微分方程初值问题

常微分方程的初值问题(*Initial Value Problem*)就是寻找满足

$$\frac{du}{dt} = f(t,u) \quad 0 < t \le T \tag{3.1.1}$$

和初始条件

$$u(0) = u_0 \tag{3.1.2}$$

的函数$u(t)$. 对于常微分方程问题(3.1.1)–(3.1.2)进行数值求解, 就是对应一系列自变量$t_0, t_1, \cdots t_N$求出未知函数$\{u(t_i)\}_{0\le i\le N}$的的近似值$\{u_i\}_{0\le i\le N}$.

为使问题(3.1.1)–(3.1.2)的解存在、唯一且连续依赖初值u_0，即该初值问题适定，还必须对方程(3.1.1)右端函数$f(t,u)$适当限制. 用数值方法求解时，我们总是认为(3.1.1)–(3.1.2)的解存在且唯一，这个性质可由以下定理保证（参见[?]）：

定理3.1.1. 如果函数$f(t,u)$在带形区域$R = \{0 < t \le T, -\infty < u < +\infty\}$ 内连续且关于u满足李普希兹(*Lipschitz*)条件，即存在与t,u无关的常数L使得

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le L|u_1 - u_2|$$

对R内任意两个$u_1 u_2$都成立，则常微分方程初值问题(3.1.1)–(3.1.2) 的解$u(t)$在$[0,T]$上存在且唯一.

虽然常微分方程初值问题(3.1.1)–(3.1.2)对很大一类右端函数都有解，但是求出所需的解却绝非易事. 除了极特殊的情形外，人们很多时候都求不出方程(3.1.1)的精确解（解析解），例如:

$$\frac{du}{dt} = u^2 + t^2$$

这个一阶常微分方程就不能用初等函数及其积分来表达它的解，只能利用近似方法求解.

欧拉法

欧拉格式的推导

欧拉($Euler$)法是最简单的数值解法, 常对于精度要求不高的微分方程数值求解问题. 从欧拉法出发可领悟建立差分格式的基本思想和方法.

从(3.1.2)式出发, 由于$u(t_0)=u_0$已给定, 可得

$$u'(t_0)=f(t_0,u_0)$$

设$t_1=h$充分小, 则用差商近似代替微商, 有:

$$\frac{u(t_1)-u(t_0)}{h}\approx u'(t_0)=f(t_0,u_0)$$

用u_1近似$u(t_1)$, 由上式可得

$$u_1=u_0+hf(t_0,u_0)$$

依次, 利用差商近似代替微商, 由u_1及$f(t_1,u_1)$又可以算出$u(t_2)$的近似值u_2:

$$u_2=u_1+hf(t_1,u_1)$$

一般地, 设解函数$u(t)$在节点的近似值为$\{u_n\}$, 则$u'(t_n)=f(t_n,u(t_n))$, 由数值微分的向前差商近似代替微商, 得

$$\frac{u(t_{n+1})-u(t_n)}{h}\approx u'(t_n)=f(t_n,u(t_n))$$

用u_n近似$u(t_n)$以及u_{n+1}近似$u(t_{n+1})$, 由上式可得

$$u_{n+1}=u_n+hf(t_n,u_n), n=0,1,\cdots,N-1 \tag{3.2.1}$$

差分格式(3.2.1)就是$Euler$格式, 给定初值, 就可以用(3.2.1)式求出所有的$\{u_n\}$. 用格式(3.2.1)求解初值问题的数值解法就称为$Euler$ 法.

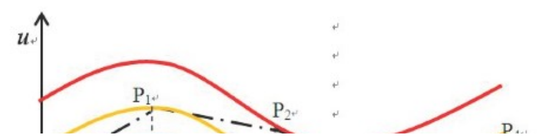
$Euler$法的几何意义在于用折线近似曲线. 实际上, 方程(3.1.1)的解是t,u平面上的一族积分曲线, 曲线上任一点(t,u)上的斜率等于已知函数$f(t,u)$. 按$Euler$ 法求解初值问题(3.1.1)–(3.1.2)是从初始点$P_0(t_0,u_0)$开始, 过P_0作经过此点的积分曲线的切线, 沿切线取到$(t_1,u(t_1))$的近似点$P_1(t_1,u_1)$, 其中$u_1=u_0+hf(t_0,u_0)$. 然后再过点P_1作经过此点的积分曲线的切线, 沿切线取到$(t_2,u(t_2))$的近似点$P_2(t_2,u_2)$, 其中$u_2=u_1+hf(t_1,u_1)$. 如此下去, 即可得一条以$P_n(t_n,u_n)$为顶点的折线, 这就是$Euler$法求得的近似积分曲线（图3.2.1中的虚折线）. 从几何上看, 步长h越小, 此折线逼近积分曲线越好. 因此, $Euler$ 法也被称为$Euler$折线法.

$Euler$格式(3.2.1)除了用差商近似微商的方法推导外, 还可以利用数值积分和$Taylor$ 级数展开式的方法推导. 现用数值积分推导$Euler$法. 将方程(3.1.1)在区间$[t_n,t_{n+1}]$上积分, 有

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}u'(t)dt=\int_{t_n}^{t_{n+1}}f(t,u(t))dt$$

即

$$u(t_{n+1})-u(t_n)=\int_{t_n}^{t_{n+1}}f(t,u(t))dt$$



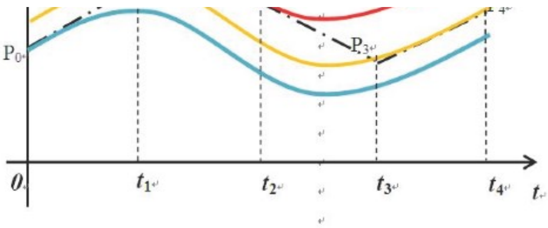


图 3.2.1: 欧拉法的几何意义

一般地, 上式右端的积分可用数值积分计算, 若用左矩形公式, 有

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \approx (t_{n+1} - t_n)f(t_n, u(t_n)) = hf(t_n, u(t_n))$$

用u_n近似$u(t_n)$, u_{n+1} 近似$u(t_{n+1})$, 由上式可得

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), n = 0, 1, \cdots, N-1$$

这就是$Euler$格式(3.2.1).

同样, 利用$Taylor$级数展开式也可以推导出$Euler$格式(3.2.1). 在$t = t_n$处作$u(t_{n+1})$的$Taylor$展开式, 有

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{h^2}{2}u''(t_n) + \frac{h^3}{6}u'''(\xi) = u(t_n) + hf(t_n, u(t_n)) + R_n,$$

其中 $\xi \in (t_n, t_{n+1})$. 用u_n近似$u(t_n)$, u_{n+1}近似$u(t_{n+1})$, 并略去二阶小量R_n, 由上式可得

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), n = 0, 1, \cdots, N-1,$$

即得到$Euler$格式(3.2.1).