第三节 差分格式 – 微分方程数值解

笔记本：	我的第一个笔记本
创建时间：	2017/6/12 12:30
URL：	https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52854_1

第三节 差分格式

学习指导：E 双曲方程 第三节

本节介绍差分格式。

作业&思考：E 双曲方程 第三节

导出格式（3.6）和格式（3.7）的稳定条件。

讲义：E 双曲方程 第三节

§ 6.3　差分格式

与椭圆型方程不同

双曲型方程：特征和特征关系；初值函数的函数性质（如间断、弱间断）沿特征传播，所以解一般没有光滑性；解对初值局部依赖。

建立差分格式时，要充分考虑这些特性。

下面介绍三种基于不同机理建立起来的差分格式。

6.3.1 迎风格式(Upwind Scheme)

基于特征性质

- 线性标量模型问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (3.1)$$

网格剖分同第一节。

在网格点 (x_j,t_n) 处的三种自然的两层显式差分格式：

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0 \qquad (3.2)$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0 \qquad (3.4)$$

前两个差分格式的局部截断误差：$O(\tau+h)$，

第三个差分格式的局部截断误差：$O(\tau+h^2)$。

记 $r=a\frac{\tau}{h}$，则（3.2）、（3.3）和（3.4）又可以分别写成：

$$u_j^{n+1}=ru_{j-1}^n+(1-r)u_j^n \qquad (3.5)$$

$$u_j^{n+1}=(1+r)u_j^n-ru_{j+1}^n \qquad (3.6)$$

$$u_j^{n+1}=u_j^n+\frac{r}{2}(u_{j-1}^n-u_{j+1}^n) \qquad (3.7)$$

显然，它们都是显式差分格式。

- 稳定性的 Fourier 分析

以格式（3.5）为例说明之.

取通项：

$$u_j^n=v^n e^{i\alpha x_j} \qquad \alpha=2\pi p, x_j=jh$$

代入（3.5）得：

$$v^{n+1}=(re^{-i\alpha h}+(1-r))v^n$$

稳定性的充要条件是增长因子满足 Von Neumann 条件：

$$\left|re^{-i\alpha h}+(1-r)\right|\le 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\left|re^{-i\alpha h}+(1-r)\right|^2\le 1$$

$$\left|r(\cos\alpha h-1)+1+ir\sin\alpha h\right|^2\le 1$$

$$[r(\cos\alpha h-1)+1]^2+r^2\sin^2\alpha h\le 1$$

$$r^2(\cos\alpha h-1)^2+2r(\cos\alpha h-1)+r^2\sin^2 ah\le 0$$

$$2r^2-2r^2\cos\alpha h+2r(\cos\alpha h-1)\le 0$$

$$(r^2-r)(1-\cos\alpha h)\le 0$$

$$r^2 \le r$$

$$(a\frac{\tau}{h})^2 \le a\frac{\tau}{h}$$

$$a \ge 0, \quad |r| = \left|a\frac{\tau}{h}\right| \le 1 \qquad (3.8)$$

同理可证，格式（3.6）稳定的充要条件是：

$$a \le 0, \quad |r| = \left|a\frac{\tau}{h}\right| \le 1 \qquad (3.9)$$

而格式（3.7）对一切 $r \ne 0$ 均不稳定。

习题：导出格式（3.6）和格式（3.7）的稳定条件。

- 下面讨论稳定条件（3.8）与特征性质的关系

方程（3.1）的特征线斜率为：

$$\frac{dt}{dx} = a^{-1}$$

$u(x,t)$ 在该特征线上为常数。

下面，考察点 P_0 处（见下图）的数值解 u_j^{n+1} 的显式差分公式，要求公式中涉及的第 n 个时间层的第 j 和 $j\pm1$ 个点上的值

$$u_j^n, u_{j\pm1}^n$$

因为

$$a \ge 0$$

所以过点 P_0 的特征为：P_0Q．由于 $\boldsymbol{u}$ 在 P_0Q 上为常数，因此，有

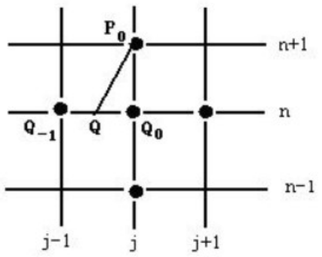
$$u(P_0) = u(Q)$$

$u(P_0)=u(Q)$

由此可知：点 P_0 处的数值解 u_j^{n+1} 用 u_{j-1}^n, u_j^n 作线性插值是合适的，

即

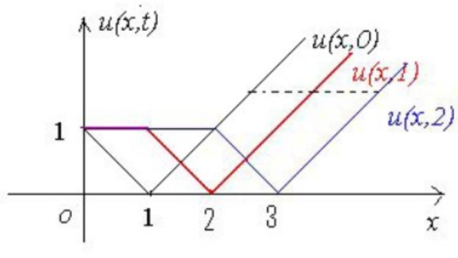
$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= (u_{j-1}^n \cdot QQ_0 + u_j^n \cdot Q_{-1}Q)/h \\
&= (u_{j-1}^n \cdot a\tau + u_j^n \cdot (h - a\tau))/h \\
&= r u_{j-1}^n + (1-r) u_j^n
\end{aligned}
$$



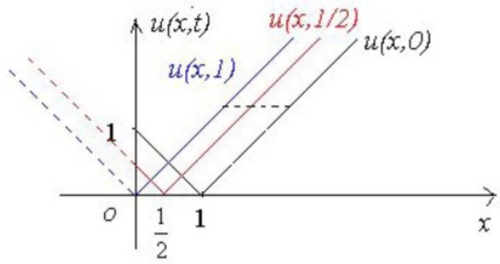
综上可得如下迎风格式（视 a 为速度）：

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a\dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, & a \ge 0 \\
\dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a\dfrac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, & a < 0
\end{cases}
$$

注. 以 P.177 习题 1 为例，当速度 $a=1>0$，解的表达式见下图（波形随着时间向前传播）：



若速度 $a=-1<0$，相应的解的表达式见下图（波形随着时间向后传播）：



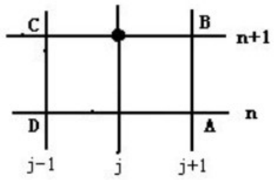
利用局部固定系数法，可给出变系数方程的稳定性条件。类似，还可构造线性双曲型方程组的迎风格式。

6.3.2 积分守恒差分格式

基于积分守恒形式（与有限体积法不同，它是利用原剖分网格得到积分回路，而有限体积法要利用对偶剖分网格得到积分回路）

非线性模型问题（散度型（或守恒型）微分方程）：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{3.10}$$



两边积分，并利用 Green 公式：

$$\iint_G \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=\int_\Gamma (f(u),u)\cdot\vec{n}ds=0$$

或

$$\iint_G \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=\int_\Gamma (f(u)dt-udx)=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_{DA}(-u)dx+\int_{AB}f(u)dt+\int_{BC}(-u)dx+\int_{CD}f(u)dt=0 \tag{3.11}$$

【

如在直线 DA 上，$\vec{n}=(0,-1)$，所以

$$\int_{DA}(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=\int_{DA}(f(u),u)\cdot(0,-1)dx=\int_{DA}-udx$$

】

左端第一个积分用梯形公式，第三个积分用中矩形公式，第二、四个积分用下矩形公式，即

$$\int_{DA}(-u)dx\approx-\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)\cdot 2h$$

$$\int_{BC}(-u)dx\approx-u_j^{n+1}\int_{BC}dx=u_j^{n+1}\cdot 2h$$

(注意反时针方向)

$$\int_{AB}f(u)dx\approx f(u_{j+1}^n)\cdot\tau$$

$$\int_{CD}f(u)dx\approx-f(u_{j-1}^n)\cdot\tau$$

得 Lax 格式（Lax-Friedrichs）

$$\frac{u_j^{n+1}-\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)}{\tau}+\frac{f_{j+1}^n-f_{j-1}^n}{2h}=0$$

或

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)-\frac{r}{2}\left(f_{j+1}^n-f_{j-1}^n\right) \qquad (3.12)$$

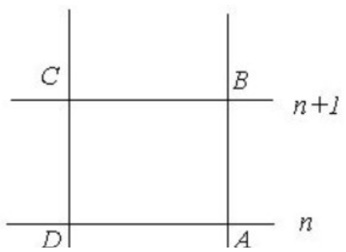
局部截断误差：$O(\tau+h^2)$

特别当 $f(u)=au$ 时（线性问题），利用 Fourier 分析知：

Lax 格式稳定的充要条件是：

$$\frac{|a|\tau}{h}\le 1$$

类似的思想，可建立 Box 格式（隐格式）。



这时山（3.11）知

$$\int_{DA}(-u)dx+\int_{AB}f(u)dt+\int_{BC}(-u)dx+\int_{CD}f(u)dt=0$$

左端各项积分用梯形公式

$$\int_{DA}(-u)dx\approx-\frac{1}{2}(u_j^n+u_{j-1}^n)\cdot h$$

$$\int_{BC}(-u)dx\approx-\frac{1}{2}(u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})\cdot(-h)$$

$$\int_{AB}f(u)dx\approx\frac{1}{2}(f_j^n+f_j^{n+1})\cdot\tau$$

$$\int_{CD}f(u)dx\approx\frac{1}{2}(f_{j-1}^n+f_{j-1}^{n+1})\cdot(-\tau)$$

将上面四个式子代入（3.11），两边除$\dfrac{h\tau}{2}$有

$$-\frac{u_j^n+u_{j-1}^n}{\tau}+\frac{u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\tau}+\frac{f_j^n+f_j^{n+1}}{h}-\frac{f_{j-1}^n+f_{j-1}^{n+1}}{h}=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^n}{\tau}+\frac{f_j^n-f_{j-1}^n}{h}-\frac{f_j^{n+1}-f_{j-1}^{n+1}}{h}=0 \quad (3.13)$$

特别当$f(u)=au$时，是形式上的隐格式(利用边界条件，可化为显式计算). 无条件稳定.

局部截断误差（点为$(x_{j-1/2},t_{n+1/2})$）：

$$O(\tau^2+h^2)$$

注：当$f(u)$是非线性时，相应差分格式的稳定性判别尚无一般方法和理论，通常用

线性化方法+Fourier 方法

作为相应的处理方法(数学上虽然不够严格，但常常是有效的).

下面以 Lax 格式为例说明之. 这时（见（3.12））

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)-\frac{r}{2}\left(f_{j+1}^n-f_{j-1}^n\right)$$

其中 $r=\dfrac{\tau}{h}$.

$\Rightarrow$ (对数值解分量做小扰动)

$$u_j^{n+1}+\delta u_j^{n+1}=\frac{1}{2}\left[\left(u_{j+1}^n+\delta u_{j+1}^n\right)+\left(u_{j-1}^n+\delta u_{j-1}^n\right)\right]$$
$$-\frac{r}{2}\left[f\left(u_{j+1}^n+\delta u_{j+1}^n\right)-f\left(u_{j-1}^n+\delta u_{j-1}^n\right)\right] \quad (3.14)$$

将（3.14）与（3.12）相减， 并对 $f(u)$ 作 Taylor 展开到一次项 (忽略高阶项), 则得到关于数值解扰动量 δu_j^n 所满足的差分格式(或线性代数方程)

$$\delta u_j^{n+1}=\frac{1}{2}\left(\delta u_{j-1}^n+\delta u_{j+1}^n\right)-\frac{r}{2}\left[\frac{\partial f\left(u_{j+1}^n\right)}{\partial u}\delta u_{j+1}^n-\frac{\partial f\left(u_{j-1}^n\right)}{\partial u}\delta u_{j-1}^n\right] \quad (3.15)$$

$\Leftrightarrow$

$$\delta u_j^{n+1}\approx\frac{1}{2}\left(\delta u_{j-1}^n+\delta u_{j+1}^n\right)-\frac{\tilde{r}}{2}(\delta u_{j+1}^n-\delta u_{j-1}^n) \quad (3.16)$$

其中 $\tilde{r}=\dfrac{\partial f\left(u_{j-1}^n\right)}{\partial u}$ 或 $\tilde{r}=\dfrac{\partial f\left(u_{j+1}^n\right)}{\partial u}$

由（3.16）知格式（3.15）稳定的充要条件可以近似为：

$$|\tilde{r}|=\left|\frac{\partial f\left(u_{j-1}^n\right)}{\partial u}\right|\frac{\tau}{h}\le 1 \quad 或 \quad |\tilde{r}|=\left|\frac{\partial f\left(u_{j+1}^n\right)}{\partial u}\right|\frac{\tau}{h}\le 1$$

6.3.3 粘性差分格式

基于人工粘性法：通过引入含二阶空间偏导数的小参数项，称为粘性项，使双曲型方程成为一带小参数的抛物方程。 再利用中心差商代替导数，以及小参数（粘性系数）的选取，可建立相应的差分格式。

（1）对线性模型问题（3.1），该抛物方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \varepsilon>0 \quad (3.16)$$

特别，取

$$\varepsilon = \frac{h}{2}\left|a(x)\right|$$

并利用中心差商代替导数，可得格式

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a_j \dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \dfrac{h}{2} a_j \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2}, & a \ge 0 \\ \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a_j \dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = -\dfrac{h}{2} a_j \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2}, & a < 0 \end{cases}$$

写成统一形式为

$$\frac{u_j^{n-1}-u_j^n}{\tau} + a_j \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{h}{2}\left|a_j\right| \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2}$$

容易验证它等价迎风格式。

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a \dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, & a \ge 0 \\ \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a \dfrac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, & a < 0 \end{cases}$$

（2）对非线性模型问题（3.10），这里给出了两种抛物方程。

第一种：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon > 0 \qquad (3.17)$$

特别，取

$$\varepsilon = \frac{h^2}{2\tau}$$

可得到 Lax 格式。

第二种：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(u)\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad (3.18)$$

注意：当 $a = 1$，$f(u) = u$ 时，方程（3.16）可以视为（3.18）的特款

下面将从方程（3.18）出发，导出一种新格式（称为

下面将从方程（3.18）出发，导出一种新格式（称为Lax-wendroff 格式）。

利用中心差商代替导数，有

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} \approx \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2h} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(u)\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&\approx \frac{\left(f'(u)\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{j+1/2}^n - \left(f'(u)\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n}{h} \\
&\approx h^{-1}\frac{f'(u_{j+1/2}^n)\left(f_{j+1}^n - f_j^n\right)}{h} - \frac{f'(u_{j-1/2}^n)\left(f_j^n - f_{j-1}^n\right)}{h} \\
&\approx h^{-2}\left[a_{j+1/2}^n\left(f_{j+1}^n - f_j^n\right) - a_{j-1/2}^n\left(f_j^n - f_{j-1}^n\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

其中

$$a_{l+1/2}^n = f'\left(\frac{u_{l+1}^n + u_l^n}{2}\right)$$

把（3.19）、（3.20）和（3.21）代入（3.18），并取 $\varepsilon = \tau/2$，则有

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2h} = \frac{\tau}{2h^2}\left[a_{j+1/2}^n\left(f_{j+1}^n - f_j^n\right) - a_{j-1/2}^n\left(f_j^n - f_{j-1}^n\right)\right]$$

$\Leftrightarrow$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\frac{\tau}{h}\left(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\left[a_{j+1/2}^n\left(f_{j+1}^n - f_j^n\right) - a_{j-1/2}^n\left(f_j^n - f_{j-1}^n\right)\right]$$

上式称为**Lax-wendroff 格式**，其中

$$a_{l+1/2}^n = f'\left(\frac{u_{l+1}^n + u_l^n}{2}\right)$$

局部截断误差：$O(\tau^2 + h^2)$

稳定性条件：$r|a| \le 1$