

北京邮电大学 2014——2015 学年第 2 学期

《组合数学》期末考试试题 (A 卷)

1, (10 分) 从 1 到 300 的整数中不重复的选取两个数组成有序对 (x,y) , 使得乘积 xy 不能被 3 整除, 问可组成多少种这种有序对?

2, (15 分) 设 $S = \{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \infty \cdot e_3, \infty \cdot e_4\}$, 求序列 $\{a_n\}$ 的普通型生成函数并由此求出 a_n 的表达式。其中 a_n 是从 S 中取出的满足下列条件的 n 个元素的方案数。

- (1) 元素 e_1 与 e_2 都出现奇数次, 其它元素任意;
- (2) e_1 和 e_2 出现的次数总和为 3 的倍数, 其它元素任意。

3, (15 分) 给定多重集 $S = \{2 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$, (1) 求 S 的 **5-排列** 的排列数, 要求 a 不能相邻。(2) 从 S 中取 5 个做可重组合, 则有多少种方案?

4, (10 分) 求解如下递推关系

$$\begin{cases} a_n + 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 4^n \\ a_0 = 1, a_1 = 4 \end{cases}$$

5, (10 分) 求满足条件

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30, \quad 5 \leq x_1 \leq 13, \quad 0 \leq x_2 \leq 15, \quad 7 \leq x_3 \leq 17$$

的整数解的数目。

6, (10 分) 求数列 $\left\{ \frac{1}{k+1} \right\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数。

7, (10 分) 证明: 在 2 到 $2n+1$ 这 $2n$ 个正整数中任意选取 $n+1$ 个

不同的正整数，则必有两个数 a 和 b ，它们互素。

8, (10 分) 现要把 ABCD 四项任务分配给甲乙丙丁四位工人，要求刚好每位工人一项任务，但甲不安排任务 B 或 C，乙不安排任务 B，丙不安排任务 A，丁不安排任务 A 或 D，有多少种可能的分配方案？

9, (10 分) 用红蓝两种颜色去涂 $1 \times n$ 棋盘，每格涂一种颜色，使得涂红色的格子不能相邻，求涂色方法数.