第二节 微分方程基本概念 – 微分方程数值解

笔记本：	我的第一个笔记本
创建时间：	2017/5/9 15:19
URL：	https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52807_1

第二节 微分方程基本概念

学习指导：A 课程导论 第二节

内容介绍：
本小节主要介绍微分方程的基本概念，包括微分方程的定义和分类。

学习方法： 这一节内容以自学为主，课堂上我们将进行简单介绍。

作业&思考：A 课程导论 第二节

讲义：A 课程导论 第二节

微分方程的基本概念

由前面的例子我们看到，在研究某些实际问题时，首先建立微分方程，只要找出满足微分方程的函数（解微分方程）即得到微分方程的解.

定义1.1.6. 含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**. 未知函数为一元函数的微分方程称为**常微分方程**, 未知函数为多元函数的微分方程称为**偏微分方程**. 微分方程中出现的未知函数的导数的最高阶数称为这个**方程的阶**.

定义1.1.7. 对于未知函数和它的各阶导数（偏导数）都是线性的方程称为**线性微分方程**. 在线性方程中，不含未知函数及其偏导数的项称为自由项，若自由项不为零，称方程为**非齐次微分方程**. 若自由项为零，则称方程为**齐次微分方程**. 如果一个方程，对于未知函数的最高阶偏导数是线性的，称它为**拟线性方程**. 在拟线性方程中，由最高阶偏导数所组成的部分称为方程的主部,如果方程的主部的各项系数不含未知函数，就称它为**半线性方程**.不是线性也不是拟线性的方程称为**非线性方程**.

定义1.1.8. 给定一个方程，一般只能描写某种运动的一般规律，还不能确定具体的运动状态，所以把这个方程称为泛定方程. 如果附加一些条件（如已知开始运动的情况或在边界上受到外界的约束）后，就能完全确定具体运动状态，称这样的条件为**定解条件**. 表示开始情况的附加条件称为初始条件，表示在边界上受到约束的条件称为边界条件.

设函数u在区域D 内具有偏微分方程中所出现的各阶的连续偏导数，如果将u代入方程后，能使它在区域D内成为恒等式，就称u为方程在区域D中的解，或称正规解. $u=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$n+1$维空间中$(u,x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一曲面，称它为方程的积分曲面.

定了泛定方程（在区域D内）和相应的定解条件的数学物理问题称为定解问题. 根据不同定解条件，定解问题分为三类:

1. **初值问题** 只有初始条件而没有边界条件的定解问题称为初值问题或柯西问题.

2. **边值问题** 只有边值条件而没有初始条件的定解问题称为边值问题.

3. **混合问题** 既有边界条件也有初始条件的定解问题称为混合问题（有时也称为边值问题）.

定义1.1.9. 如果微分方程的解含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同(这里的任意常数应相互独立, 即：它们不能合并而使得任意常数的个数减少), 这样的解称之为**微分方程的通解**. 在给定初始条件下, 确定了通解中的任意常数之后所得到的解称作满足初始条件条件的**微分方程的特解**.

定义1.1.10. 如果定解条件的微小变化只引起定解问题的解在整个定义域中的微小变化，也就是解对定解条件存在着连续依赖关系，那末称定解问题存在**稳定解**.

定义1.1.11. 如果定解问题的解存在与惟一并且关于定解条件是稳定的，就说定解问题的提法是**适定的**.

在数学上, 微分方程本身是表达同一类物理现象的共性, 是作为解决问题的依据; 定解条件却反映出具体问题的个性, 它提出了问题的具体情况. 方程和定解条件合而为一体, 就叫做定解问题. 求微分方程的定解问题可以先求出它的通解, 然后再用定解条件确定出函数. 但是一般来说, 实际中微分方程的通解, 特别是偏微分方程的通解是不容易求出的, 用定解条件确定函数更是比较困难的.