**第一节 两点边值模型问题的差分方法 – 微分方程数值解**

| | |
|---|---|
| **笔记本：** | 我的第一个笔记本 |
| **创建时间：** | 2017/5/9 15:12 |
| **URL：** | https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52786_1 |

# 第一节 两点边值模型问题的差分方法

学习指导：C 椭圆方程 第一节

本节介绍两点边值模型问题的差分方法。

作业&思考：C 椭圆方程 第一节

讲义：C 椭圆方程 第一节

## § 4.2 一维差分格式

### 4.2.1 模型问题

考虑如下的两点边值模型问题

$$\begin{cases} Lu = -\dfrac{d}{d}(p\dfrac{du}{dx}) + r\dfrac{du}{dx} + qu = f, \quad a < x < b \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

其中，$p \in C^1[I], p \ge p_{\min} > 0, r, q, f \in C(I),\ q(x) \ge 0, I = [a,b]$，$\alpha, \beta$ 是给定的常数。

特别，通常还有如下两个简化模型，问题(4.2.2) 以及比 (4.2.2) 更一般的问题(4.2.3)：

$$\begin{cases} Lu = -\dfrac{d^2u}{dx^2} + qu = f, \quad a < x < b \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

$$\begin{cases} Lu = -\dfrac{d}{d}(p\dfrac{du}{dx}) + qu = f, \quad a < x < b \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

本节中我们将以(4.2.1)、(4.2.2)和(4.2.3)为模型问题介绍构造差分格式的方法，以及边值条件的逼近方法。

和常微分方程初值问题一样，我们可以构造出许多逼近模型问题(4.2.1)、(4.2.2)和(4.2.3)的差分格式，但并非任何差分格式都是可取的。一个好的差分格式应该是以尽小的工作量（包括程序准备和计算机运算）得到所需精度的结果。由此我们对一个好的差分格式有如下两点要求：一方面，差分格式应该结构简单，便于求解；另一方面，差分格式应具有尽可能高的精确阶。

### 4.2.2 差分格式的推导

构造差分格式的方法有两种：直接差分化法和积分插值法。这里首先以模型问题(4.2.2)为例介绍构造差分格式的直接差分化方法。

第一步先将求解区域的离散化。

最常见的离散化是均匀网格剖分，在区间 $[a,b]$ 中插入 $N-1$ 个分点，即

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

其中，分点为 $x_i = x_0 + ih, \quad i = 1,2,\cdots,N$ ，剖分步长 $h = (b-a)/N$ ，就得到区间 $[a,b]$ 的一个网格剖分。

更一般的剖分形式为：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

其中，分点 $x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = 1,2,\cdots,N$ ，第 i 个剖分单元的剖分步长为

$$h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,\cdots,N$$

称 $h = \max\limits_i h_i$ 为网格最大步长。

为了讨论各种离散化方法，需引入对偶剖分。取相邻两节点 $x_{i-1}$ ， $x_i$ 的中点 $x_{i-1/2} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)\ (i = 1,2,\cdots,N)$ 称为半整数点。则由节点

$$a = x_0 < x_{1/2} < \cdots < x_{N-1/2} < x_N = b$$

又构成了区间 $[a,b]$ 的一个网格剖分，称为对偶剖分。如图 4.2.1 所示。

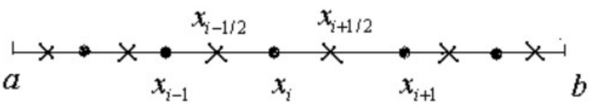


图 4.2.1

其中，图 4.2.1 中标记为“·”的节点是原剖分节点，标记为“×”的节点表示对偶剖分节点。

采用均匀网格剖分，对模型问题(4.2.2)，在节点 $x_i$ 处的微分方程为：

$$[Lu]_i = \left[ -\frac{d^2u}{dx^2} + qu \right]_{x_i} = f(x_i)$$

构造差分格式的关键是建立二阶微分

$$\left[ d^2u \right]$$

$\left[\dfrac{}{dx^2}\right]_{x_i}$

的离散（近似）公式。

对于充分光滑的$u(x)$，利用 Taylor 展开式，有

$$\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}$$
$$=\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_{x_i}+\frac{h^2}{12}\left[\frac{d^4u}{dx^4}\right]_{x_i}+O(h^3) \tag{4.2.4}$$

其中 $[\ ]_{x_i}$ 表示方括号内的函数在$x_i$点取值。由此可得

$$-\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}+qu(x_i)=f(x_i)+R_i(u) \tag{4.2.5}$$

其中

$$R_i(u)=-\frac{h^2}{12}\left[\frac{d^4u}{dx^4}\right]_{x_i}+O(h^3) \tag{4.2.6}$$

在步长$h$足够小时，$R_i(u)$为$h$的二阶无穷小。舍弃小量$R_i(u)$，并记$f_i=f(x_i)$，$u(x)$在$x_i$点的数值解为$u_i$，$i=1,2,\cdots,N$，则有

$$L_hu_i:=-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+q_iu_i=f_i,\quad i=1,2,\cdots,N \tag{4.2.7}$$

其中$L_h$为差分算子，上式称为逼近问题(4.2.2)的差分方程或差分格式。将差分算子$L_h$作用在$u(x)$得

$$L_hu(x_i):=-\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}+qu(x_i)$$

由(4.2.5)有

$$L_hu(x_i):=f(x_i)+R_i(u) \tag{4.2.8}$$

所以，有

$$R_i(u)=L_hu(x_i)-\left[Lu\right]_{x_i}$$

表示用差分算子$L_h$代替微分算子$L$产生的误差，称之为**(局部)截断误差**. 它关于$h$的阶为$O(h^2)$.

由于$\left[Lu\right]_{x_i}=f(x_i)$，所以由(4.2.8)可得

$$R_i(u)=L_hu(x_i)-f(x_i) \tag{4.2.9}$$

由此知：（局部）**截断误差**可视为**差分格式**(方程)(4.2.7)，将数值解换成相应真解值后，左端减右端，再做 Taylor 展式获得的（可作为计算公式）。

**例.4.2.1** 求差分格式

$$-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+q_iu_i=f_i,$$

的局部截断误差。

解:

$$R(u)_i=-\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}+q(x_i)u(x_i)-f(x_i)$$

$$=-u''(x_i)+O(h^2)+q_iu_i-f(x_i)$$

$$=-u''(x_i)+q_iu_i-f(x_i)+O(h^2)$$

$$=O(h^2)$$

考虑边值条件，得到方程（4.2.7）的联立形式（中心差分格式）

$$\begin{cases}-\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+q_iu_i=f_i, i=1,2,\cdots,N-1\\ u_0=\alpha,\\ u_N=\beta,\end{cases} \tag{4.2.10}$$

方程(4.2.10)可化为 $N-1$ 阶的线性方程组，即

$$\begin{cases}(q_1+\dfrac{2}{h^2})u_1-\dfrac{1}{h^2}u_2=f_1+\dfrac{\alpha}{h^2},\\ (q_i+\dfrac{2}{h^2})u_i-\dfrac{1}{h^2}u_{i-1}-\dfrac{1}{h^2}u_{i+1}=f_i, i=2,3,\cdots N-2\\ (q_{N-1}+\dfrac{2}{h^2})u_{N-1}-\dfrac{1}{h^2}u_{N-2}=f_{N-1}+\dfrac{\beta}{h^2}\end{cases} \tag{4.2.11}$$

若将节点次序按照从左到右排列，记 $U=(u_1,u_2,\cdots,u_{N-1})^T$，则差分格式(4.2.11)可以记成如下的矩阵形式：

$$AU=b$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} q_1+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{h^2} & q_2+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & q_{N-2}+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & -\frac{1}{h^2} & q_{N-1}+\frac{2}{h^2} \end{bmatrix}$$

以及

$$b=(f_1+\alpha/h^2,f_2,f_3,\cdots,f_{N-2},f_{N-1}+\beta/h^2)^T$$

系数矩阵 A 是三对角矩阵，且为对称矩阵。求解该方程组就可得到 $u(x)$ 在 $x_i$ 点的数值解为 $u_i$.

下面讨论模型问题 (4.2.1):

$$Lu=-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})+r\frac{du}{dx}+qu=f,\quad a<x<b$$

采用一般的网格剖分，即

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$$

其中，分点 $x_i=x_{i-1}+h_i,\quad i=1,2,\cdots,N$，第 i 个剖分单元的剖分步长为

$h_i=x_i-x_{i-1},i=1,2,\cdots,N$. 在节点 $x_i$ 处，相应的微分方程为：

$$\left[-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})+r\frac{du}{dx}+qu\right]_{x_i}=f(x_i) \qquad (4.2.12)$$

同样，建立上问题差分格式的关键是建立

$$\left[-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})\right]_{x_i}\text{ 和 }\left[r\frac{du}{dx}\right]_{x_i}$$

的离散（近似）公式。

和上述等距剖分不同(它是直接对 2 阶导数作离散近似)。这时离散公式的基本思想是用一阶(近似）中心差商代替一阶导数。

令函数（Flux Function）

$$W(x)=p(x)\frac{du}{dx}$$

则

$$\left[-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})\right]_{x_i}=-\left[\frac{dW}{dx}\right]_{x_i}$$

首先用一阶中心差商近似一阶导数，可得

$$\left[-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})\right]_{x_i}=-\left[\frac{dW}{dx}\right]_{x_i}\approx-2\frac{W_{i+1/2}-W_{i-1/2}}{h_i+h_{i+1}} \qquad (4.2.13)$$

对于(4.2.13)中的 $W$ 函数再次用一阶中心差商近似一阶导数，可得

$$w_{i+1/2}=p(x_{i+1/2})\left[\frac{du}{dx}\right]_{x_{i+1/2}}\approx p_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}}a \qquad (4.2.14)$$

$$w_{i-1/2}=p(x_{i-1/2})\left[\frac{du}{dx}\right]_{x_{i-1/2}}\approx p_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i} \qquad (4.2.15)$$

则由(4.2.13)，(4.2.14) 和(4.2.15)有

$$\left[-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})\right]_{x_i} \approx -\frac{2}{h_i+h_{i+1}}\left[p_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - p_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right] \tag{4.2.16}$$

类似有：

$$\left[r\frac{du}{dx}\right]_{x_i} \approx r_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{h_i+h_{i+1}} \tag{4.2.17}$$

将(4.2.16)和(4.2.17)代入(4.2.12)式、我们可得到相应的差分方程

$$\begin{aligned} L_h u_i \equiv -\frac{2}{h_i+h_{i+1}}\left[p_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - p_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right] + \\ r_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{h_i+h_{i+1}} + q_i u_i = f_i, i = 1,2,\cdots,N-1 \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

$$u_0 = \alpha,$$

$$u_N = \beta$$

模型问题(4.2.1)的差分格式(4.2.18)也可以由 Taylor 展开式推导得到。由 $u(x)$ 在 $x_i$ 点的 Taylor 展开式有

$$\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{h_i+h_{i+1}} = \left[\frac{du}{dx}\right]_{x_i} + \frac{h_{i+1}-h_i}{2}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_{x_i} + O(h^2)$$

$$p(x_{i-1/2})\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h_i} = \left[p\frac{du}{dx}\right]_{x_{i-1/2}} + \frac{h_i^2}{24}\left[p\frac{d^3u}{dx^3}\right]_{x_i} + O(h^3)$$

$$p(x_{i-1/2})\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h_{i+1}} = \left[p\frac{du}{dx}\right]_{x_{i+1/2}} + \frac{{h_{i+1}}^2}{24}\left[p\frac{d^3u}{dx^3}\right]_{x_i} + O(h^3)$$

由上两式可得

$$\frac{1}{h_i+h_{i+1}}\left(p(x_{i-1/2})\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h_{i+1}}-p(x_{i-1/2})\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h_i}\right)$$

$$=\frac{1}{h_i+h_{i+1}}\left(\left[p\frac{du}{dx}\right]_{x_{i+1/2}}-\left[p\frac{du}{dx}\right]_{x_{i-1/2}}\right)$$

$$+\frac{1}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{h_{i+1}{}^2}{24}-\frac{h_i^2}{24}\right)\left[p\frac{d^3u}{dx^3}\right]_{x_i}+O(h^2)$$

$$=\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)\right]_{x_i}+\frac{h_{i+1}-h_i}{4}\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{du}{dx}\right)\right]_{x_i}$$

$$+\frac{h_{i+1}-h_i}{12}\left[p\frac{d^3u}{dx^3}\right]_{x_i}+O(h^2).$$

令$u_i=u(x_{i+1})$，$p_{i+1/2}=p(x_{i+1/2})$，$p_{i-1/2}=p(x_{i-1/2})$以及$f_i=f(x_i)$，有

$$-\frac{2}{h_i+h_{i+1}}\left[p_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}}-p_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right]$$

$$+r_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{h_i+h_{i+1}}+q_iu_i=f_i+R_i(u) \tag{4.2.19}$$

其中$R_i(u)$为

$$R_i(u)=-(h_{i+1}-h_i)\left(\frac{1}{4}\left[\frac{d^2}{dx^2}(p\frac{du}{dx})\right]_{x_i}+\frac{1}{12}\left[p\frac{d^3u}{dx^3}\right]_{x_i}-\frac{1}{2}\left[r\frac{d^2u}{dx^2}\right]_{x_i}\right)+O(h^2) \tag{4.2.20}$$

舍去$R_i(u)$，可得到相应的差分方程，即为(4.2.18)，

$$L_hu_i\equiv-\frac{2}{h_i+h_{i+1}}\left[p_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}}-p_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right]+$$

$$r_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{h_i+h_{i+1}}+q_iu_i=f_i,i=1,2,\cdots,N-1$$

$$u_0=\alpha,$$

$$u_N=\beta$$

可见，$R_i(u)$为差分格式的局部截断误差。

方程(4.2.18)可化为$N-1$阶的线性方程组，即

$$
\begin{cases}
\left[q_1+\dfrac{2}{(h_1+h_2)}\left(\dfrac{p_{1+1/2}}{h_2}+\dfrac{p_{1/2}}{h_1}\right)\right]u_1-\left[\dfrac{2p_{1+1/2}}{(h_1+h_2)h_2}-\dfrac{r_1}{(h_1+h_2)}\right]u_2 \\
=f_1+\alpha\left[\dfrac{2p_{1/2}}{(h_1+h_2)h_1}+\dfrac{r_1}{(h_1+h_2)}\right], \\
\left[q_i+\dfrac{2}{(h_i+h_{i+1})}\left(\dfrac{p_{i+1/2}}{h_{i+1}}+\dfrac{p_{i-1/2}}{h_i}\right)\right]u_i-\left[\dfrac{2p_{i-1/2}}{(h_i+h_{i+1})h_i}+\dfrac{r_i}{(h_i+h_{i+1})}\right]u_{i-1} \\
-\left[\dfrac{2p_{i+1/2}}{(h_i+h_{i+1})h_{i+1}}-\dfrac{r_i}{(h_i+h_{i+1})}\right]u_{i+1}=f_i, i=2,3,\cdots N-2 \\
\left[q_{N-1}+\dfrac{2}{(h_{N-1}+h_N)}\left(\dfrac{p_{N-1/2}}{h_N}+\dfrac{p_{N-3/2}}{h_{N-1}}\right)\right]u_1-\left[\dfrac{2p_{N-3/2}}{(h_{N-1}+h_N)h_{N-1}}+\dfrac{r_{N-1}}{(h_{N-1}+h_N)}\right]u \\
=f_{N-1}+\beta\left[\dfrac{2p_{N-1/2}}{(h_{N-1}+h_N)h_N}-\dfrac{r_{N-1}}{(h_{N-1}+h_N)}\right]
\end{cases}
$$
(4.2.21)

该方程组可以写成矩阵形式：$AU=b$ 这里，矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{N-1\times N-1}$，

$$
a_{ij}=\begin{cases}
q_i+\dfrac{2}{(h_i+h_{i+1})}\left(\dfrac{p_{i+1/2}}{h_{i+1}}-\dfrac{p_{i-1/2}}{h_i}\right), j=i, i=1,2,\cdots,N-1 \\
-\left[\dfrac{2p_{i-1/2}}{(h_i+h_{i+1})h_i}+\dfrac{r_i}{(h_i+h_{i+1})}\right], j=i-1, i=2,\cdots,N-1 \\
-\left[\dfrac{2p_{i+1/2}}{(h_i+h_{i+1})h_{i+1}}-\dfrac{r_i}{(h_i+h_{i+1})}\right], j=i+1, i=1,\cdots,N-2 \\
0, \quad \quad \textit{else}
\end{cases}
$$

及 $b=F+G$，其中 $F=(f_j)_{j=1,\cdots N-1}$，

$$
G=\left(\alpha\left[\frac{2p_{1/2}}{(h_1+h_2)h_1}+\frac{r_1}{(h_1+h_2)}\right],0,\cdots,0,\beta\left[\frac{2p_{N-1/2}}{(h_{N-1}+h_N)h_N}-\frac{r_{N-1}}{(h_{N-1}+h_N)}\right]\right)^T
$$

若节点次序从左到右排列，系数矩阵 $A$ 是三对角矩阵。由于 $r\neq 0$，故矩阵 $A$ 是非对称的。当 $r\equiv 0$ 时，若网格均匀，则系数矩阵 $A$ 是对称的，若网格不均匀，系数矩阵 $A$ 仍是非对称的，但是可以对称化。只要在(4.2.21)两端乘以 $(h_i+h_{i+1})$ 即可得到(4.2.22)，此时系数矩阵为对称形式。

$$
\begin{cases}
\left[q_1+2\left(\dfrac{p_{1+1/2}}{h_2}+\dfrac{p_{1/2}}{h_1}\right)\right]u_1-\left[\dfrac{2p_{1+1/2}}{h_2}-r_1\right]u_2=(h_1+h_2)f_1+\alpha\left[\dfrac{2p_{1/2}}{h_1}+r_1\right], \\
\left[q_i+2\left(\dfrac{p_{i+1/2}}{h_{i+1}}+\dfrac{p_{i-1/2}}{h_i}\right)\right]u_i-\left[\dfrac{2p_{i-1/2}}{h_i}+r_i\right]u_{i-1}-\left[\dfrac{2p_{i+1/2}}{h_{i+1}}-r_i\right]u_{i+1}=(h_i+h_{i+1})f_i \\
i=2,3,\cdots N-2
\end{cases}
$$

$$
\left[q_{N-1}+2\left(\frac{p_{N-1/2}}{h_N}+\frac{p_{N-3/2}}{h_{N-1}}\right)\right]u_1-\left[\frac{2p_{N-3/2}}{h_{N-1}}+r_{N-1}\right]u_{N-2}=(h_{N-1}+h_N)f_{N-1}
$$

$$
+\beta\left[\frac{2p_{N-1/2}}{h_N}-r_{N-1}\right]
$$

(4.2.22)

由(4.2.20)可知，截断误差 $R_i(u)$ 按照 $\|\bullet\|_C$ 范数和 $\|\bullet\|_0$ 范数的阶都是 $O(h)$ .当网格均匀时，即 $h_i\equiv h, i=1,2,\cdots,N$ 时，截断误差 $R_i(u)$ 按照 $\|\bullet\|_C$ 范数和 $\|\bullet\|_0$ 范数的阶都提高到 $O(h^2)$ 。此时，差分方程(4.2.18)简化为

$$
L_h u_i \equiv -\frac{1}{h^2}\left[p_{i+1/2}u_{i+1}-(p_{i+1/2}+p_{i-1/2})u_i+p_{i-1/2}u_{i-1}\right]+
$$

$$
r_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+q_i u_i=f_i, i=1,2,\cdots,N-1
$$

(4.2.23)

$$
u_0=\alpha,
$$

$$
u_N=\beta
$$

这相当于用一阶中心差商、二阶中心差商依次代替方程(4.2.1)的一阶微商和二阶微商的结果。将边值条件代入，写成矩阵形式 (4.2.21)后，其对应的系数矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{N-1\times N-1}$ 为

$$
a_{ij}=\begin{cases}
q_i+\frac{2}{h^2}\left(p_{i+1/2}+p_{i-1/2}\right), j=i, i=1,2,\cdots,N-1\\
-\left[\frac{p_{i-1/2}}{h^2}+\frac{r_i}{2h}\right], j=i-1, i=2,\cdots,N-1\\
-\left[\frac{p_{i+1/2}}{h^2}-\frac{r_i}{2h}\right], j=i+1, i=1,\cdots,N-2\\
0, \qquad\qquad\qquad\qquad else
\end{cases}.
$$

(4.2.24)

下面我们以模型问题(4.2.3)为例，介绍用积分插值法构造差分格式。此时，引入微分算子 $L$ 微分方程表示如下：

$$
Lu\equiv -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})+qu=f,\ \ a<x<b
$$

(4.2.25)

我们采用一般的网格剖分，即

$$
a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b
$$

其中，分点 $x_i=x_{i-1}+h_i$， $i=1,2,\cdots,N$ ，第 i 个剖分单元的剖分步长为 $h_i=x_i-x_{i-1}, i=1,2,\cdots,N$ . 如果把(4.2.25)看成分布在一根杆上的稳定温度场的方程，这在 $[a,b]$ 区间内任意一小区间 $[x,x+\Delta x]$ 上的热量守恒定律具有形式

$$
\int^{x+\Delta x} d \quad du \qquad \int^{x+\Delta x} \qquad \int^{x+\Delta x}
$$

$$-\int_{x} \frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})dx + \int_{x} qudx = \int_{x} fdx$$

若令函数 $W(x) = p(x)\dfrac{du}{dx}$，则由上式等价于

$$W(x) - W(x+\Delta x) + \int_{x}^{x+\Delta x} qudx = \int_{x}^{x+\Delta x} fdx \tag{4.2.26}$$

将微分方程(4.2.25)写成积分守恒型(4.2.26)以后，最高阶的微商从二阶降到了一阶，从而可以减弱对 $p(x), u(x)$ 光滑性的要求。既然具有守恒形式的微分方程反映了物理、力学的某些守恒定律，那么，我们构造的差分格式也应保持这一性质。我们以后还会看到，从积分守恒型方程出发构造差分格式，便于推广到任意网格和处理自然边界条件。

考虑微分方程节点 $x_i$ 处的离散化，积分插值法构造守恒型差分格式的步骤如下：

Step 1. 将微分方程

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f, \quad a < x < b$$

在节点 $x_i$ 所属的对偶单元 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 上积分，得积分方程

$$W(x_{i-1/2}) - W(x_{i+1/2}) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} qudx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} fdx \tag{4.2.27}$$

其中

$$W(x) = p(x)\frac{du}{dx}.$$

**Step 2.** 对(4.2.27)式中含未知函数的三项进行离散化。

在一般的问题中，要求函数 $W(x), u(x)$ 连续，但 $p(x), q(x)$ 允许间断.所以我们不对 $W(x), q(x)u(x)$ 直接离散化。以 $W(x) = p(x)u'$ 为例讨论，我们可以将该式改写成为

$$u' = \frac{W(x)}{p(x)}$$

在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上积分，利用积分的中矩形公式可得

$$u_i - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{p(x)}dx \approx W(x_{i-1/2})\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{p(x)}dx \tag{4.2.28}$$

在式(4.2.28)中的 $W(x_{i-1/2})$ 不应该视为 $W(x)$ 在点 $x_{i-1/2}$ 处的值，而应视为 $W(x)$ 在单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的平均值。即

$$W(x_{i-1/2}) \approx a_i \frac{(u_i - u_{i-1})}{h_i} \tag{4.2.29}$$

其中

$$a_i = \left[\frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{p(x)}dx\right]^{-1} \tag{4.2.30}$$

类似地，利用区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上积分的中矩形公式，我们可以得到

类似地，利用区间[illegible]上积分的中矩形公式，我们可以得到

$$W(x_{i+1/2}) \approx a_{i+1} \frac{(u_{i+1} - u_i)}{h_{i+1}} \tag{4.2.31}$$

以及

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} qu\,dx \approx \frac{h_i + h_{i+1}}{2} d_i u_i \tag{4.2.32}$$

其中

$$d_i = \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx \tag{4.2.33}$$

将(4.2.29), (4.2.31)和(4.2.32)代入方程(4.2.27)，可得微分方程在节点 $x_i$ 处的**离散化格式**（**差分方程**）为

$$-\left[a_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - a_i\frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}\right] + \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})d_i u_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})\varphi_i, i = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{4.2.34}$$

其中

$$\varphi_i = \frac{2}{(h_i + h_{i+1})} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx. \tag{4.2.35}$$

差分格式(4.2.33)的矩阵形式为 $AU = b$， 其中系数矩阵 $A$ 形如

$$\begin{pmatrix}
\tilde{a}_1 & -\frac{a_2}{h_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\frac{a_2}{h_2} & \tilde{a}_2 & -\frac{a_3}{h_3} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -\frac{a_3}{h_3} & \tilde{a}_3 & -\frac{a_4}{h_4} & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -\frac{a_4}{h_4} & \tilde{a}_4 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{a_{N-1}}{h_{N-1}} & \tilde{a}_{N-1}
\end{pmatrix} \tag{4.2.36}$$

其中

$$\tilde{a}_i = \frac{a_i}{h_i} + \frac{a_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})d_i,\ i = 1, \cdots, N-1.$$

显然，系数矩阵 $A$ 是三对角矩阵，且为对称的。

如果系数 $q(x)$， $p(x)$ 以及右端函数 $f(x)$ 光滑，可利用数值积分公式直接计算(4.2.30), (4.2.33)和(4.2.35)。如果用中矩形公式计算，有

$$\begin{cases} a_i = p_{i-1/2} = p(x_{i-1/2}) \\ d_i = q_i = q(x_i) \\ \varphi_i = f_i = f(x_i) \end{cases} \tag{4.2.37}$$

积分守恒型(4.2.27)的差分格式就是直接差分化方法的结果：

$$-\left[p(x_{i+1/2})\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - p(x_{i-1/2})\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right] + \frac{1}{2}(h_i+h_{i+1})q(x_i)u_i = \frac{1}{2}(h_i+h_{i+1})f_i,$$
$$i=1,2,\cdots,N-1 \tag{4.2.38}$$

如果用梯形公式直接计算积分，此时

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{2p_{i-1}p_i}{p_{i-1}+p_i} \\ d_i = \dfrac{q_{i-1/2}+q_{i+1/2}}{2} \\ \varphi_i = \dfrac{f_{i-1/2}+f_{i+1/2}}{2} \end{cases} \tag{4.2.39}$$

积分守恒型(4.2.27)的差分格式为：

$$-\left[\frac{2p_{i+1}p_i}{p_{i+1}+p_i}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - \frac{2p_{i-1}p_i}{p_{i-1}+p_i}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right] + \frac{1}{4}(h_i+h_{i+1})(q_{i-1/2}+q_{i+1/2})u_i$$
$$= \frac{1}{4}(h_i+h_{i+1})(f_{i-1/2}+f_{i+1/2}),\quad i=1,2,\cdots,N-1 \tag{4.2.40}$$

我们推导了模型问题(4.2.3)在 $x_i$ 点处微分方程的离散化，若考虑第一边值条件，处理方式同模型问题(4.2.1)和(4.2.2)，这里就不再赘述。

**注：** 对于系数具有第一类间断点的微分方程，系数公式(4.2.37) 和(4.2.39)也适用。此时，若公式中的函数在间断点取值，则应取左右极限的算术平均值。对于这种具有间断系数的微分方程，保持守恒性尤其重要。例如微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)=0$$

若把它写成非守恒形式

$$p(x)\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{dp}{dx}\frac{du}{dx}=0$$

再用中心差分格式

$$p_i\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+\frac{p_{i+1}-p_{i-1}}{2h}\cdot\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}=0$$

则差分解有可能不收敛。

综上所述，积分插值法（有限体积法）相比直接差分法有如下的优点：首先积分差分对系数的光滑性要求低，其次该方法便于推广到任意网格和任意的边界条件，此外该方法保(局部)守恒性。