

## 第二节 二维椭圆边值问题的差分方法 – 微分方程数值解

笔记本：我的第一个笔记本

创建时间：2017/5/9 15:12

URL：[https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course\\_id=\\_11052\\_1&content\\_id=\\_52790\\_1](https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52790_1)

## 第二节 二维椭圆边值问题的差分方法



### 学习指导：C 椭圆方程 第二节

本节介绍二维椭圆边值问题的差分方法。



### 作业&思考：C 椭圆方程 第二节

例 4.4.1 用差分法求解平面波反射问题

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + k_0^2 (\epsilon_r - \frac{1}{\mu_r} \sin^2 \theta) E_z = 0, \\ E_z|_{x=0} = 0, \\ \left[ \frac{1}{\mu_r} \frac{dE_z}{dx} + ik_0 \cos \theta E_z(x) \right]_{x=L-0} = 2ik_0 \cos \theta E_0 e^{ik_0 L \cos \theta} \end{cases}$$

其中  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ,  $\omega = \frac{\lambda}{2\pi}$  给定  $\lambda = 1.55$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 13$ ,  $L = 1$ ,  $E_0 = 1$  及入

射角  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

例 4.4.2 用差分法求解边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \cos 3x \sin \pi y, (x, y) \in G = (0, \pi) \times (0, 1); \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0, 0 \leq x \leq \pi; \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, 0 \leq y \leq 1; \end{cases}$$

该问题的精确解为  $u = (9 + \pi^2)^{-1} \cos 3x \sin \pi y$ .



### 讲义：C 椭圆方程 第二节

## § 4.3 二维椭圆边值问题的差分格式

### 4.3.1 求解区域的离散化

本节我们考虑 Poisson 方程

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in G \quad (4.3.1)$$

的有限差分求解。其中,  $G$  是  $xOy$  平面上的一有界区域, 其边界为  $\Gamma$ ,  $f(x, y)$  是连续函数。

在边界  $\Gamma$  上  $u$  满足下列的边界条件之一:

$$u|_{\Gamma} = \alpha(x, y) \quad (4.3.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \beta(x, y) \quad (4.3.3)$$

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + ku \right]_{\Gamma} = \gamma(x, y) \quad (4.3.4)$$

其中,  $\alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y)$  以及  $k(x, y)$  都是连续函数, 且  $k \geq 0$ 。

从原理上来说, 我们可以把一维的方法平行地推广到二维边值问题, 但是随着维数的增加, 求解区域的几何形状将更加复杂, 因此要合理地作网格剖分及处理好边值条件。

对于二维平面区域  $G$  的网格剖分, 通常有如下三种:

#### 1. 矩形剖分

取定沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的步长为  $h_1$  和  $h_2$ , 令  $h = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$ , 作两族与坐标轴平行的直线:

$$x = ih_1, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$y = jh_2, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

两族直线的交点  $(ih_1, jh_2)$  称为网点或节点, 记为  $(x_i, y_j)$  或  $(i, j)$ 。如果两个节点  $(x_i, y_j)$  和  $(x_{i'}, y_{j'})$  满足

$$\left| \frac{x_i - x_{i'}}{h_1} \right| + \left| \frac{y_j - y_{j'}}{h_2} \right| = 1 \quad \text{或} \quad |i - i'| + |j - j'| = 1$$

称两个节点  $(x_i, y_j)$  和  $(x_{i'}, y_{j'})$  是相邻的。

为了便于后面的讨论, 我们引入一些定义和记号。所有属于  $G$  内部的节点称为内点, 记为  $G_h = \{(x_i, y_j) \in G\}$ 。所有网线  $x = x_i$  或  $y = y_j$  与  $\Gamma$  的交点称为界点, 记为  $\Gamma_h$ 。令  $\overline{G}_h = G_h + \Gamma_h$ , 则  $\overline{G}_h$  就是代替域  $\overline{G} = G \cup \Gamma$  的网点集合。若内点  $(x_i, y_j)$  的四个相邻点都属于  $G_h$ , 就称为正则内点, 否则就称为非正则内点, 如图 4.3.1 所示。

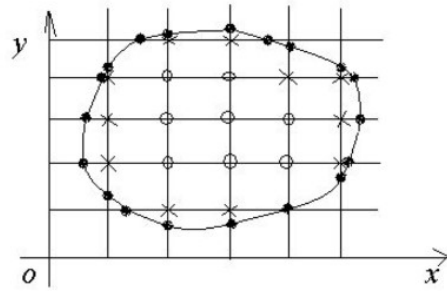


图 4.3.1

图 4.3.1 中标记为“.”的节点是界点, 标记为“×”的节点表示非正则内点, 标记为“O”的节点表示正则内点。

## 2. 三角剖分

不妨设  $G$  是多边形域, 将  $G$  分割成有限个三角形之和, 使不同的三角形无重叠的内部, 且任一三角形的顶点不属于其它三角形边的内部, 称每个三角形为一个单元, 它的顶点称为节点, 属于同一单元的两个顶点称为相邻节点, 有公共边的两个三角形称为相邻单元。如图 4.3.2 所示。

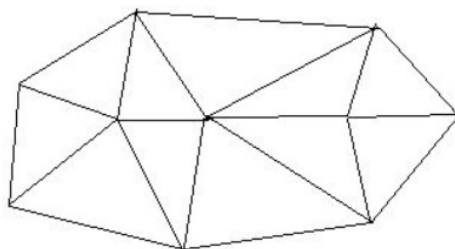


图 4.3.2

若求解区域  $G$  不为多边形区域, 则可先取一个多边形域  $\tilde{G}$  逼近求解区域  $G$ , 再对  $\tilde{G}$  分割成有限个三角形, 如图 4.3.3 所示。

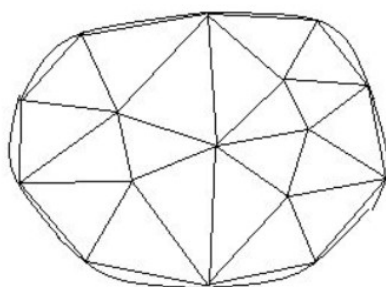


图 4.3.3

将所有三角形都编上号:  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_M$ , 同时将所有节点也编上号:  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , 并记所有单元的最大边长为  $h$ 。

适应于各向同性问题的几种常见的网格:

- (1) Uniform
- (2) Quasi-Uniform
- (3) Shape-Regular
- (4) Regular

对于任一节点, 考虑所有以它为顶点的三角形单元或以它为端点的三角形的边。一般我们有如下两种对偶剖分。

### (1) 外心对偶剖分

过每边作中垂线, 它们依次交于相应三角形的外心 (外接圆的中心), 从而得到围绕该节点的小多边形域, 称为外心对偶单元, 这些对偶单元全体构成区域  $G$  的一个新的网格剖分, 称为外心对偶

剖分。如图 4.3.4 所示，内点  $p_0 \in \tilde{G}$  的外心对偶剖分单元是七边形域；若  $p_0$  是界点，则  $p_0$  是其外心对偶剖分的一个顶点。

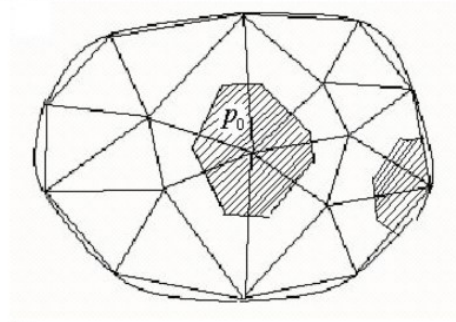


图 4.3.4

## (2) 重心对偶剖分

设  $q$  是以  $p_0$  为顶点的三角形单元  $\Delta_k$  的重心，将  $q$  和三角形  $\Delta_k$  中以  $p_0$  为端点的所在边的中点相连接，可得到一围绕  $p_0$  的小多边形域，称为重心对偶单元，这些对偶单元全体构成区域  $\tilde{G}$  的一个新的网格剖分，称为重心对偶剖分。如图 4.3.5 所示，内点  $p_0 \in \tilde{G}$  的重心对偶剖分单元是七边形域；若  $p_0$  是界点，则  $p_0$  是其重心对偶剖分的一个顶点。

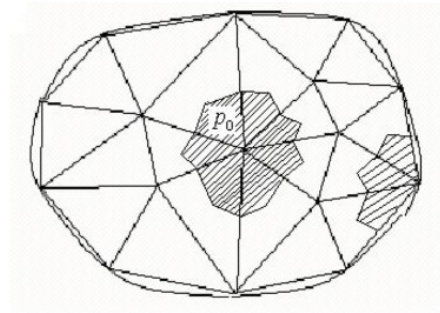


图 4.3.5

## 3. 六边形剖分

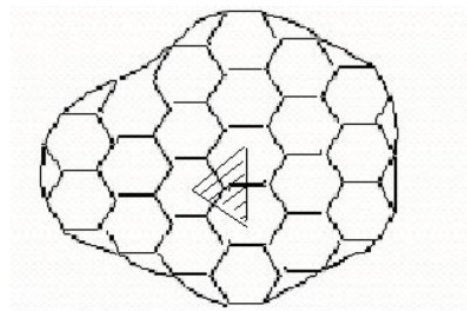


图 4.3.6

图 4.3.6 是正六边形网格，边长为  $h$ 。设  $p_0$  是任一内节点，与之相邻的三个节点为  $p_1, p_2, p_3$ 。过  $\overrightarrow{p_0 p_i}$  的中点作中垂线，彼此相交于六边形的中点  $q_1, q_2, q_3$ 。三角形  $\Delta q_1 q_2 q_3$  是围绕  $p_0$  的对偶单

元, 显然  $|\overline{p_0 p_i}| = h$ ,  $|\overline{p_i q_{i+1}}| = \sqrt{3}h$ , 对偶单元  $\Delta q_1 q_2 q_3$  的面积是  $3\sqrt{3}h^2/4$ .

### 4.3.2 五点差分格式

同一维情形类似, 我们也可以用直接差分方法将方程的离散化, 直接差分化的方法一般仅适应于矩形剖分。下面以该剖分为例, 简单介绍一种最常用二维椭圆微分方程(4.3.1)满足第一边界条件(4.3.2)时的差分格式: 五点差分格式。

将求解作矩形剖分。现假定  $(x_i, y_j)$  为正则内点, 沿  $x, y$  轴方向分别用二阶中心差商代替(4.3.1)式中的二阶微商  $u_{xx}$  和  $u_{yy}$ , 则得到如下差分方程

$$L_h u_{ij} = - \left[ \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} \right] = f_{ij} \quad (4.3.5)$$

其中  $u_{ij}$  表示微分方程(4.3.1)和边界条件(4.3.2)的解函数在点  $(x_i, y_j)$  处的近似, 且  $f_{ij} = f(x_i, y_j)$ .

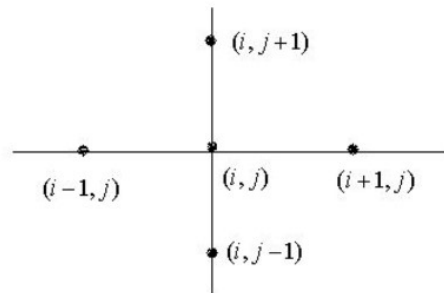


图 4.3.7

由于差分方程(4.3.5)中只出现  $u(x)$  在  $(i, j)$  及其四个邻点上的值, 故该格式被称为五点差分格式, 如图 4.3.7 所示。

由二元函数的 Taylor 展开式可分析差分格式(4.3.5)的截断误差。将  $u(x, y)$  在点  $(x_i, y_j)$  处展开, 可得

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h_1^2} = \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + O(h_1^4) \quad (4.3.6)$$

$$\frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h_2^2} = \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} + O(h_2^4) \quad (4.3.7)$$

在差分方程(4.3.5)中将数值解换成相应真解值  $u(x_i, y_j)$  后, 可得

$$L_h [u(x_i, y_j)] = - \left[ \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h_1^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h_2^2} \right] = f_{ij} \quad (4.3.8)$$

由(4.3.6)和(4.3.7)得

$$L_h[u(x_i, y_j)] = -\Delta u(x_i, y_j) - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + O(h_1^4) - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} + O(h_2^4) = f_{ij} \quad (4.3.9)$$

比较(4.3.5)和(4.3.9)可得到差分格式(4.3.5)的截断误差为

$$\begin{aligned} R_{ij}(u) &= \Delta u(x_i, y_j) - \Delta_h u(x_i, y_j) \\ &= -\frac{1}{12} \left[ h_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2} + h_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2} \right]_{ij} + O(h^4) = O(h^2) \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

即当  $h$  充分小时，差分格式的（局部）截断误差为二阶的。

类似于一维差分格式的讨论，我们相应给出上述差分方程(4.3.5)的适定性、收敛性和稳定性分析

**定理 4.3.9 (极值定理):** 若  $\{u_{ij}\}$  为节点函数值集合，且  $L_h u_{ij} \leq 0$  ( $L_h u_{ij} \geq 0$ )，对  $\forall (x_i, y_j) \in G_h$

成立，则  $u_{ij}$  不可能在内点取正的极大（负的极小），除非  $u_{ij} \equiv$  常数。

**推论 4.3.10.** 差分方程 (4.3.5) 是适定的（存在唯一性）。

**推论 4.3.11.** 若  $L_h u_{ij} = f_{ij} \geq 0$ ，对  $\forall (x_i, y_j) \in G_h$  成立，且节点函数值  $u_{ij} \geq 0$ ，对  $\forall (x_i, y_j) \in \Gamma_h$  成立，则

$$u_{ij} \geq 0, \quad \forall (x_i, y_j) \in G_h \text{ 成立。}$$

**定理 4.3.12 (比较定理)** 设两个序列（网函数） $\{u_{ij}\}$ ， $\{U_{ij}\}$  满足

$$|L_h u_{ij}| \leq L_h U_{ij}, \quad \forall (x_i, y_j) \in G_h,$$

且

$$|u_{ij}| \leq U_{ij}, \quad \forall (x_i, y_j) \in \Gamma_h$$

则

$$|u_{ij}| \leq U_{ij}, \quad \forall (x_i, y_j) \in G_h$$

**推论 4.3.13 (关于边界值的稳定性)** 差分方程

$$L_h u_{ij} = 0, \quad \forall (x_i, y_j) \in G_h$$

$$u_{ij} = \alpha_{ij}, \quad \forall (x_i, y_j) \in \Gamma_h$$

的解  $u_{ij}$  满足估计式

$$\max_{U_h} |u_{ij}| \leq \max_{\Gamma_h} \{|\alpha_{ij}|\}$$

由此可知，五点差分格式(4.3.5)的解存在唯一，局部截断误差为  $O(h^2)$ ，且关于初值是稳定的。

### 4.3.3 边界条件的处理

先讨论第一边值问题(4.3.2)

$$u|_{\Gamma} = \alpha(x, y)$$

以  $G_h^*$  表示非正则内点集合,  $\Gamma_h$  表示界点集合。因为  $\Gamma_h \subset \Gamma$ , 所以当  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in \Gamma_h$  时, 令

$$u_{ij} = \alpha(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \quad (4.3.11)$$

当  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in G_h^*$ , 即该点为非正则内点时, 将它和正则内点一样, 在  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$  建立逼近 Poisson 方程的不等距差分格式。例如在节点  $O$  处有(见图 4.3.8)

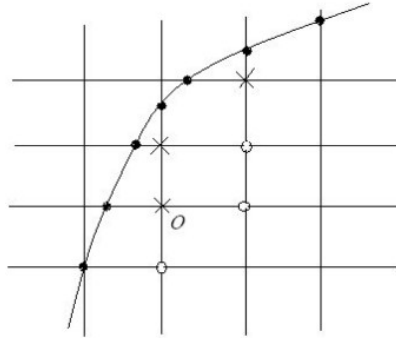


图 4.3.8

$$-\left[ \frac{1}{h_1} \left( \frac{u_1 - u_0}{h_1} - \frac{u_0 - u_3}{h_1^-} \right) + \frac{1}{h_2^2} (u_2 - 2u_0 + u_4) \right] = f_0 \quad (4.3.12)$$

其中

$$h_1^- = x_0 - x_3, \quad \bar{h}_1 = \frac{1}{2}(h_1 + h_1^-)$$

其截断误差的阶为  $O(h)$ .

按(4.3.12)处理边值条件有一个缺点, 那就是它破坏了五点差分格式所固有的对称性, 为了保持对称性, 可用

$$-\left[ \frac{1}{h_1} \left( \frac{u_1 - u_0}{h_1} - \frac{u_0 - u_3}{h_1^-} \right) + \frac{1}{h_2^2} (u_2 - 2u_0 + u_4) \right] = f_0 \quad (4.3.13)$$

来代替(4.3.13)。此时截断误差的阶降为  $O(1)$ , 但是可以证明, 在最大模的意义下差分分解的收敛阶仍是  $O(h^2)$ .

下面我们讨论第二, 第三边值条件。

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = \beta(x, y)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} + ku \right]_{\Gamma} = \gamma(x, y) \quad (4.3.14)$$

的差分逼近。

这里我只讨论一种特殊的情况，假定  $\Gamma_k$  中的节点（界点）是两族网格线的交点（作网格时，我们尽量使得界点是两族网格线的交点）。如图 4.3.9 所示， $P_0(x_{i_0}, y_{j_0})$  是界点， $P_1(x_{i_0+1}, y_{j_0})$  和  $P_0(x_{i_0}, y_{j_0+1})$  是与该界点相邻的内点，过  $(x_{i_0+1/2}, y_{j_0})$ ， $(x_{i_0+1/2}, y_{j_0+1})$  分别作平行于  $y$  轴和  $x$  轴平行的直线，它们与外界  $\Gamma$  一起截出一曲边三角形  $\hat{\Delta}ABC$ 。

图 4.3.9

将方程(4.3.1)两边在曲边三角形  $\hat{\Delta}ABC$  上积分，有

$$-\iint_{\Delta ABC} \Delta u dx dy = \iint_{\Delta ABC} f(x, y) dx dy$$

利用 Green 公式，有

$$-\iint_{\Delta ABC} \Delta u dx dy = - \int_{\widehat{ABC}A} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

故

$$- \int_{\widehat{ABC}A} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{\Delta ABC} f(x, y) dx dy \quad (4.3.15)$$

上式左端的线积分可分段近似计算，即

$$\begin{aligned} \int_{AB} \frac{\partial u}{\partial n} ds &\approx \frac{u_{P_2} - u_{P_0}}{h_2} \cdot \overline{AB} \\ \int_{BC} \frac{\partial u}{\partial n} ds &\approx \frac{u_{P_1} - u_{P_0}}{h_1} \cdot \overline{BC} \\ \int_{CA} \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \int_{CA} (\gamma - ku) ds \approx (\gamma_{P_0} - k_{P_0} u_{P_0}) \cdot \widehat{CA} \end{aligned}$$

代入(4.3.15)，由此可得逼近(4.3.14)的差分方程

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} + ku \right]_{\Gamma} = \gamma(x, y) + \frac{1}{h_1} (u_{P_1} - u_{P_0}) + \frac{1}{h_2} (u_{P_2} - u_{P_0}) - \gamma_{P_0} + k_{P_0} u_{P_0} \quad (4.3.16)$$



$$-\left[\frac{u_{p_2}-u_{p_0}}{h_2}\cdot\overline{AB}+\frac{u_{p_1}-u_{p_0}}{h_1}\cdot\overline{BC}+(\gamma_{p_0}-k_{p_0}u_{p_0})\cdot\overline{CA}\right]=\int_{\Delta ABC}f(x,y)dxdy \quad (4.3.16)$$

可见用积分插值法处理第二、第三边界条件特别方便。对于非正则内点，仍然可以像前面一样建立形如(4.3.12)和(4.3.13)的方程。

#### 4.3.4 三角网格的差分格式

前面介绍的差分法仅限于矩形网格。用矩形网格逼近一般区域不够灵活，集合误差大，在处理第二、第三类边界条件时比较麻烦，而且该法不容易提高数值解的精度。在上世纪七十年代，人们从积分插值法出发将差分法推广到三角形网格，不仅克服了上述缺点，而且还有积分守恒的优点。在我国这一方法称为广义差分法，在国外稍后的文献中称之为广义体积法。现在该方法是求解偏微分方程，特别是流体力学方程的重要方法。这里我们以边值问题(4.3.1)-(4.3.2)为例，介绍三角剖分上的有限体积法。

有限体积法的基本步骤如下：

##### Step 1. 做三角形剖分

不妨设  $G$  是多边形域（否则可用多边形域逼近它），将  $G$  分割成有限个三角形之和，使不同的三角形无重叠的内部，且任一三角形的顶点不属于其它三角形边的内部。设三角剖分为  $T_h$ ，将所有三角形都编上号： $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_M$ ，同时将所有节点也编上号： $A_1, A_2, \dots, A_N$ ，并记所有单元的最大边长为  $h$ 。以  $G_h$  表示剖分  $T_h$  的节点的集合， $G_h^0$  表示内节点集合， $\Gamma_h$  表示界点集合。

我们采用外心对偶剖分，如图 4.3.10 所示。设  $p_0$  是内点， $p_1, \dots, p_6$  是  $p_0$  和相邻的节点， $q_i$  为  $\Delta p_0 p_i p_{i+1}$  的外心（这里规定  $p_7 = p_1$ ）， $m_i$  是线段  $\overline{p_0 p_i}$  的中点， $K_{p_0}^*$  是由六边形  $q_1 q_2 \dots q_6$  围成的对偶单元。

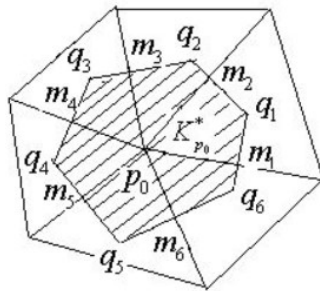


图 4.3.10

##### Step 2. 选取具有一定光滑性的分片线性多项式的全体作为试探函数和检验函数空间。

这里我们考虑边值问题(4.3.1)–(4.3.2)。设  $U_h$  是和三角剖分  $T_h$  相对应的线性有限元空间，即  $\forall u_h \in U_h$  分片线性多项式，整体连续，且在  $\Gamma_h$  上为零，称  $U_h$  为试探函数空间。

在介绍有限元方法时，我们会详细介绍有限元空间和试探函数空间的概念，这里简单地说明线性有限元空间的基本概念。

令

$$P_1 = \{ p(x, y) = a + bx + cy \mid a, b, c \in R \} \quad (4.3.17)$$

是二维空间上次数不超过 1 的完全多项式的全体。

令

$$V_E^h = \{ u_h \in C(\bar{G}) : u_h|_{\Delta_i} \in P_1(\Delta_i), 1 \leq i \leq M; u_h|_{\Gamma} = 0 \} \quad (4.3.18)$$

该空间被称为线性 **Lagrange 型** 有限元空间，简称  $V_E^h$  为线性元空间。

这里给出上述线性元空间  $V_E^h$  的某些性质。

(1) 线性元空间  $V_E^h$  的 **维数** 和 **待定系数** 的设定

空间  $V_E^h$  维数或自由度数可以视为：对  $\forall u_h \in V_E^h$ ，唯一确定它，所需要的 **独立** 待定系数的个数。

首先设定  $u_h$  的独立待定系数。与 1D 情形类似，我们将  $u_h(x)$  在某些点上的函数值（有确定的几何意义）作为其 **待定系数**。由于  $u_h|_{\Delta_i} \in P_1(\Delta_i)$ ，所以  $u_h(x)$  在  $\Delta_i$  上可以由它在 **3 个不共线** 的点上的函数值唯一确定。这 **3 个点** 可以在剖分单元  $\Delta_i$  内部选取，但这样可能会使得  $u_h(x)$  在整个求解区域上待定系数的个数达不到 **最少**（它们不能为相邻单元所 **共用**），最多为  $3M$ （见图 4.3.11）。

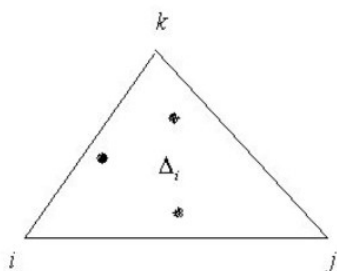


图 4.3.11

这时，这些待定系数所确定的线性元函数  $u_h(x)$  不会自然满足连续性条件，所以连续性条件要产生附加约束方程，从而导致将建立的有限元方程的规模不能达到最小。

下面，我们取上述的三个点为  $\Delta_i$  三个端点  $i, j, k$ （见图 4.3.12）。

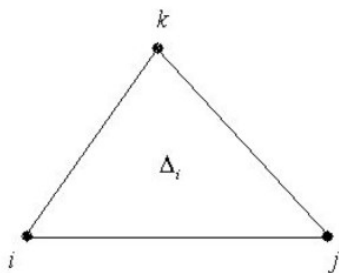


图 4.3.12

这些点上的函数值可以为  $u_h(x)$  在相邻单元上进行表示所共用，显然这些待定系数彼此独立，且所确定的线性元函数  $u_h(x)$  自然满足连续性条件。事实上，只要说明上述  $u_h(x)$  在任意两个相邻单元上连续即可。见下图 4.3.13，这时只需注意  $u_h(x)$  在三角形单元  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$  的交界线  $\overline{jk}$  上为一元线性多项式，它由其在  $\overline{jk}$  上的两个端点值唯一确定。

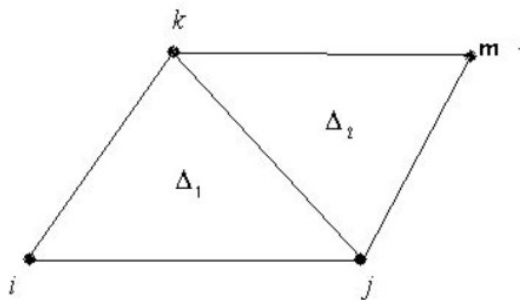


图 4.3.13

因此连续性条件不会产生附加约束方程，即将建立的有限元方程的规模是最小的。易知：这些待定系数的个数 =  $N$ 。

上述讨论并没有考虑边界条件，由于这些待定系数在边界上的节点处的值已知 ( $= 0$ )，所以实际待定系数的个数 =  $N_1$ ，它等于所有节点数减去边界上的节点数，即等于  $G$  内部节点的个数。

综上所述：线性元空间  $V_E^h$  的维数

$$m := \dim V_E^h = N_1$$

(2)  $V_E^h$  中元素 (函数) 的表示式

记待定系数为  $u_i = u_h(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ，下面，给出  $u_h(x)$  用这些未知数所表示的两种表示式。

首先，我们先引入面积坐标及有关公式

设  $\Delta(i, j, k)$  是以  $i, j, k$  为顶点的任意三角形单元，面积为  $S$ ，

$i, j, k$  的次序按逆时针方向排列, 于是  $\Delta(i, j, k)$  内任取一点  $P(x, y)$ , 坐标为  $(x, y)$ , 分别连结  $P$  和三个顶点, 把  $\Delta(i, j, k)$  分成三个三角形  $\Delta(i, j, P)$ ,  $\Delta(j, k, P)$ ,  $\Delta(k, i, P)$  (如下图 4.3.14)。

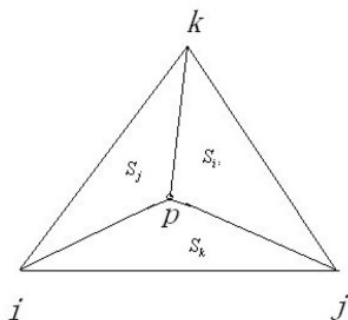


图 4.3.14

其面积分别记为  $S_k, S_i, S_j$ , 显然有  $S_k + S_i + S_j = S$ 。

令

$$L_i = \frac{S_j}{S}, \quad L_j = \frac{S_k}{S}, \quad L_k = \frac{S_i}{S}$$

则可知  $\Delta(i, j, k)$  内的任一点  $P$  的直角坐标  $(x, y)$  与  $(L_i, L_j, L_k)$  是一一对应的, 我们称

$(L_i, L_j, L_k)$  为点  $P$  的面积坐标 (显然面积坐标与坐标系的选取无关)。

由几何知识, 我们知道

$$\begin{cases} 2S = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, & 2S_i = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \\ 2S_j = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, & 2S_k = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \end{cases}$$

由此可建立面积坐标与直角坐标的下列转换关系

$$\begin{cases} L_i = \frac{1}{2S} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y] \\ L_j = \frac{1}{2S} [(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] \\ L_k = \frac{1}{2S} [(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y] \end{cases} \quad (4.3.19)$$

$$\begin{cases} x = x_i L_i + x_j L_j + x_k L_k \\ y = y_i L_i + y_j L_j + y_k L_k \end{cases} \quad (4.3.20)$$

在由某两个面积坐标（因为另外一个不独立）所构成的坐标系下，任意三角形单元  $\Delta(i, j, k)$  为一标准三角形单元，所以上述转换关系 (4.3.20) 也可以视为从标准三角形单元到  $\Delta(i, j, k)$  的仿射变换。 $L_i, L_j, L_k$  可以视为三角形单元  $\Delta(i, j, k)$  的关于节点  $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$  和  $(x_k, y_k)$  的线性 Lagrange 因子（或形函数），如线性多项式  $L_i$  满足

$$L_i(x_j, y_j) = \delta_{i,j}$$

下面，我们给出形函数在单元上的分片表示，以及其整体表示。

(a) 分片表示（单元形状函数）

$V_E^h$  中的函数在第  $i$  个剖分单元  $\Delta_i = \Delta(i_1, i_2, i_3)$  上形如：

$$c_0 + c_1 x + c_2 y$$

取  $\Delta_i = \Delta(i_1, i_2, i_3)$  上的三个顶点  $i_1, i_2, i_3$  上的值  $u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}$  为待定系数，可得到  $u_h(x, y)$

限制在  $\Delta_i$  上的具体表达式

$$u_h^i(x, y) = L_{i1}(x, y)u_{i1} + L_{i2}(x, y)u_{i2} + L_{i3}(x, y)u_{i3} \quad (4.3.21)$$

其中， $L_{ij}(x, y), j = 1, 2, 3$  由 (4.3.19) 确定。

由此可以得到  $u_h(x, y)$  的分片表示形式如下：

$$u_h(x, y) = \begin{cases} u_h^1(x, y), x \in \Delta_1 \\ u_h^2(x, y), x \in \Delta_2 \\ \vdots \\ u_h^n(x, y), x \in \Delta_n \end{cases} \quad (4.3.22)$$

称  $u_h^i(x, y)$  为单元形状函数，它是  $u_h(x)$  在单元  $\Delta_i$  上的限制。

(b) 整体表示

在每个（插值）节点  $(x_l, y_l)$  处引入函数

$$\phi_l(x, y) \in V_E^h$$

满足

$$\phi_l(x_s, y_s) = \delta_{l,s}$$

易知： $\phi_l(x, y)$  的支集为与节点  $(x_l, y_l)$  相邻的三角形单元的集合，且在任一与  $(x_l, y_l)$  相

邻的三角形单元  $\Delta_l(i_1, i_2, i_3)$  中

$$\phi_l(x, y) = L_{i_l}(x, y)$$

这里，设三角形单元  $\Delta_l(i_1, i_2, i_3)$  中的节点编号  $i_l = l$ 。

显然

$$u_h(x) = \sum_{k=1}^3 u_{i_k} \phi_{i_k}(x, y)$$

$$k=1 \quad (4.3.23)$$

可知, 对于外心对偶剖分为  $T_h^*$ , 以  $\psi_{p_0}$  表示对偶单元  $K_{p_0}^*$  上的特征函数, 由上述分析可知

$$\psi_{p_0}(p) = \begin{cases} 1, & \text{当 } p \in K_{p_0}^* \\ 0, & \text{当 } p \notin K_{p_0}^* \end{cases} \quad (4.3.24)$$

所有  $\psi_{p_0} (p_0 \in \overset{0}{G}_h)$  张成  $T_h^*$  上的分片常数函数空间  $V_h$  称为检验函数空间。

**Step 3.** 推导微分方程(4.3.1)的广义差分形式。

将微分方程(4.3.1)在  $K_{p_0}^*$  上积分

$$-\iint_{K_{p_0}^*} \Delta u dx dy = \iint_{K_{p_0}^*} f dx dy$$

运用 Green 公式, 可得如下的积分形式方程

$$-\int_{\partial K_{p_0}^*} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{K_{p_0}^*} f dx dy \quad (4.3.25)$$

其中  $\partial K_{p_0}^*$  是  $K_{p_0}^*$  的边界,  $n$  是  $\partial K_{p_0}^*$  的单位外法向量, 则(4.3.25)可写成如下变分形式。

求  $u \in U_h$ , 满足

$$a_h(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.3.26)$$

其中

$$a_h(u_h, v_h) = - \sum_{p_0' \in \overset{0}{G}_h} v_{p_0'} \int_{\partial K_{p_0}^*} \frac{\partial u_h}{\partial n} \psi_{p_0'} ds$$

$$v_h = \sum_{p_0' \in \overset{0}{G}_h} v_{p_0'} \psi_{p_0'}$$

我们称(4.3.26)为有限体法或广义差分法。

下面我们证明(4.3.26)等价于(4.3.25)

由于  $\psi_{p_0} (p_0 \in \overset{0}{G}_h)$  构成  $V_h$  的一组基, 所以(4.3.26)等价于变分问题

$$a_h(u_h, \psi_{p_0}) = (f, \psi_{p_0}), \quad \forall \psi_{p_0} (p_0 \in \overset{0}{G}_h) \quad (4.3.27)$$

利用  $\psi_{p_0}$  及  $a_h(u_h, v_h)$  的定义, 显然(4.3.27)等价于积分问题

$$-\int_{\partial K_{p_0}^*} \frac{\partial u_h}{\partial n} ds = \iint_{K_{p_0}^*} f dx dy$$

同样, 可由积分插值的方法推导方程(3.3.1)的差分方程。同样采用外心对偶剖分 (图 4.3.10)。

将方程(4.3.1)在子区域  $K_{p_0}^*$  上积分得

$$-\iint_{K_{p_0}^*} \Delta u dx dy = \iint_{K_{p_0}^*} f dx dy \quad (4.3.28)$$

利用 Green 公式, 有

$$-\int_{\partial K_{p_0}^*} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{K_{p_0}^*} f dx dy \quad (4.3.29)$$

其中  $\partial K_{p_0}^*$  是  $K_{p_0}^*$  的边界,  $\mathbf{n}$  是  $\partial K_{p_0}^*$  的单位外法向量. 由于

$$\int_{\partial K_{p_0}^*} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \sum_{i=1}^6 \int_{q_i q_{i+1}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (4.3.30)$$

对每个边  $q_i q_{i+1}$  上的积分应用中矩形公式, 有

$$\int_{q_i q_{i+1}} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \overline{q_i q_{i+1}} \frac{[u(p_{i+1}) - u(p_0)]}{p_0 p_{i+1}} \quad (4.3.31)$$

结合(4.3.29)(4.3.30)(4.3.31), 则得到如下差分格式

$$-\sum_i \overline{q_i q_{i+1}} \frac{[u(p_{i+1}) - u(p_0)]}{p_0 p_{i+1}} = m(K_{p_0}^*) \varphi_0, \quad (4.3.32)$$

其中  $m(K_{p_0}^*)$  是  $K_{p_0}^*$  的面积,

$$\varphi_0 = \frac{1}{m(K_{p_0}^*)} \iint_{K_{p_0}^*} f dx dy \quad (4.3.33)$$

**Step 4.** 建立界点的差分方程。

对于变分问题(4.3.26), 强加边界条件, 就可求解得到网格点上  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  的近似解. 设  $p_0$  是界点, 相应的对偶单元为多边形区域  $G_0$ . 若在边界  $\Gamma$  上给定的是第一边值条件(4.3.2), 则令

$$u_{p_0} = \alpha(p_0) \quad (4.3.34)$$

若给定的是第二或者第三边值条件, 则需补充一个方程, 类似于内点时的处理方式, 可以将方程(4.3.1)在其相应的对偶单元  $G_0$  上积分, 并推导差分方程. 例如, 若边界条件为

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + ku \right]_{\Gamma} = \gamma$$

其中  $k, \gamma$  都为常数,  $\mathbf{u}$  用三角单元边上的线性函数去逼近, 利用梯形公式去计算相应的积分, 可得

$$-\Lambda = \iint_{G_0} f dx dy$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{\overline{m_1 q_1}}{p_0 p_1} (u_1 - u_0) + \frac{\overline{q_1 q_2}}{p_0 p_2} (u_2 - u_0) + \frac{\overline{q_2 q_3}}{p_0 p_3} (u_3 - u_0) + \frac{\overline{m_4 q_3}}{p_0 p_4} (u_4 - u_0) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\overline{p_0 p_4}}{p_0 p_4} (\gamma - \frac{1}{4} k (3u_0 + u_4)) + \frac{1}{2} \frac{\overline{p_0 p_1}}{p_0 p_1} (\gamma - \frac{1}{4} k (3u_0 + u_1)) \end{aligned}$$

显然, 广义差分法或积分插值法得到的所有内点、界点的差分方程组成一个封闭的代数方程组, 其系数矩阵是对称的稀疏矩阵。

从前面的推导可以看出, 用广义差分法构造三角形网格上的差分格式和矩形网格上完全类似, 而边值条件的处理则更灵活方便, 特别对于第二、第三边值条件, 界点的处理方式与内点没有实际区别. 还应指出的是, 积分方程(4.3.25)是微分方程(4.3.1)的积分形式, 表示某一物理量在单元  $K_{p_0}^*$  内守恒, 而差分方程(4.3.26)或(4.3.32)是守恒律的离散形式。

