

第七届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2015 年 10 月 24 日)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

一、(本题 15 分) 考虑空间中两异面直线 L_1, L_2 , 在标准直角坐标系下, L_1 有一个坐标为 a 的点, 且有一个单位方向向量 v . L_2 有一个坐标为 b 的点且有一个单位方向向量 w . 证明:

1) 存在唯一的两点 $P, Q, P \in L_1, Q \in L_2$, 使得 PQ 同时垂直 L_1 和 L_2 ;

2) 求 P, Q 的坐标.(用 a, b, v, w 表示)

二、(本题 20 分) A 为 4 阶复方阵, 它满足关于迹的关系式: $\operatorname{tr} A^i = i, i = 1, 2, 3, 4$. 求 A 的行列式.

三、(本题 15 分) 设 A 为 n 阶实方阵, 其 n 个特征值皆为偶数. 试证明关于 X 的矩阵方程

$$X + AX - XA^2 = 0$$

只有零解.

四、(本题 15 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}, a_1 > 0$. 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - n)$ 存在.

五、(本题 15 分) $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 有界且连续, $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续且 $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt = a < 1$. $g_n(x)$ 满足 $g_0(x) = f(x)$, 且

$$g_n(x) = f(x) + \int_0^x h(t) g_{n-1}(t) dt.$$

证明: $g_n(x)$ 收敛于连续函数, 并求出极限函数.

六、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得

$$f(x) + a \int_{x-1}^x f(t) dt$$

为常数. 求证: $f(x)$ 必为常数.