第二节 一阶双曲型方程组 – 微分方程数值解

笔记本：	我的第一个笔记本
创建时间：	2017/6/12 12:23
URL：	https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52850_1

第二节 一阶双曲型方程组

学习指导：E 双曲方程 第二节

本节介绍一阶双曲型方程组。

作业&思考：E 双曲方程 第二节

讲义：E 双曲方程 第二节

6.2.1 一阶线性双曲型方程组

1. 模型问题、特征概念

- **模型问题**（见书中的（5.2.3））

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}=c,\quad (x,t)\in G \qquad (2.1)$$

其中，

$$A=(a_{ij})_{2\times 2},\quad a_{ij}=a_{ij}(x,t)$$

$$c=(c_1,c_2)^T,\quad c_i=c_i(x,t)$$

$$u=(u_1,u_2)^T,\quad u_i=u_i(x,t)$$

称（2.1）在点$(x,t)\in G$为(狭义)**双曲型方程组**，如果矩阵A有2个实的互异特征值：

$$\lambda_1<\lambda_2$$

若（2.1）在G的每一点上均为双曲型的，则称它是G上的双曲型方程组。

例 1 波动方程（1.1）（令$a=1$）可化为一阶双曲型方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad (x,t)\in G \qquad (2.2)$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad u=(v,w)^T.$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

容易求得矩阵 A 的两个实特征值：

$$-1 = \lambda_1 < \lambda_2 = 1$$

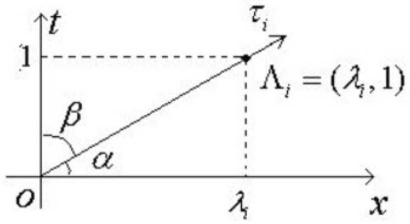
- **特征方向**

令两个特征值 λ_1， λ_2 所对应的两个直线族的斜率(见下图)：

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2$$

特征方向

$$\Lambda_i := (\lambda_i, 1), \quad i = 1, 2$$



设 $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$ 是一个向量函数，其沿**特征方向** Λ_i 的方向导数：

$$\frac{\partial u}{\partial \Lambda_i} = \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.6}$$

对例 1

$$\frac{\partial u}{\partial \Lambda_1} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial \Lambda_1} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

- **Riemann 不变量**

令 A 的两个特征值 λ_1, λ_2 所对应的左特征行向量分别为：

$$\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}), \quad \alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22})$$

引入函数

$$r_i = \alpha_i u = \alpha_{i1} u_1 + \alpha_{i2} u_2, \quad i = 1, 2 \tag{2.9}$$

若（2.1）中的 $a \equiv 0$，且系数矩阵 A 为常矩阵，则有

若（2.1）中的$c=0$，且系数矩阵A为常矩阵，则有

$$\frac{\partial r_i}{\partial \Lambda_i}=0,\quad i=1,2$$

即当(x,t)落在第$\boldsymbol{i}$族的某条特征线时，r_i为常数。

称变量 r_i，$i=1,2$为**Riemann 不变量**。

对例 1，矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

的两个特征值$\lambda_1=-1$和$\lambda_2=1$，所对应的左特征向量分别为：

$\alpha_1=(1,1),\quad \alpha_2=(1,-1)$

Riemann 不变量为：

$r_1=\alpha_1 u=v+w$

$r_2=\alpha_2 u=v-w$

当(x,t)落在斜率为$\dfrac{dt}{dx}=-1$ 的特征线 $x+t=d_1$ （d_1为常数）时： $r_1=v+w$ 为常数

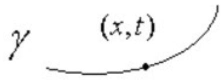
当(x,t)落在斜率为$\dfrac{dt}{dx}=1$ 的特征线时$x-t=d_2$ （d_2为常数）时：$r_2=v-w$为常数

6.2.2 Cauchy 问题的适定性、依存域、决定域、影响域

Cauchy 问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+A\dfrac{\partial u}{\partial x}=c,\quad (x,t)\in G_\gamma\\ u|_\gamma=u^0(\tau)\end{cases}\tag{2.11}$$

其中曲线



G_γ 表示曲线$\boldsymbol{\gamma}$的某一(充分小)邻域, 它对应于充分短时间下的双曲**问题**.

Cauchy 问题适定的定义：如果对某种**初始条件**，问题的解存在、唯一，且连续依赖初值。

结论: 若γ上任一点的切向不与特征方向重合，则 Cauchy 问题**适定**。

对任意一点$P(x,t)(t>0)$，取P的两条特征：

$$\tau_2: \qquad \frac{dx}{dt}=\lambda_2=\lambda_{\max},$$

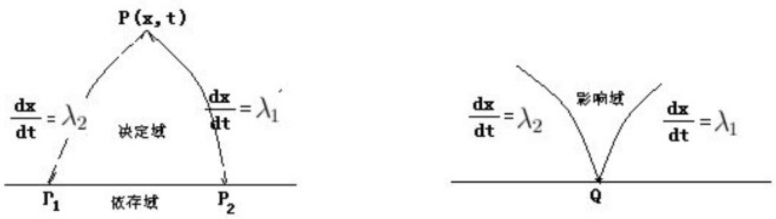
$$\tau_1: \qquad \frac{dx}{dt}=\lambda_1=\lambda_{\min},$$

设它们与x轴依次相交于P_1,P_2。

点$\boldsymbol{P}$的依存域: 区间$\overline{P_1P_2}$；

$\overline{P_1P_2}$的**决定域:** 区域P_1PP_2；

Q点的**影响域:** 由Q点引出的两条特征线在上半平面围成的区域**.**



(a) (b)

2. 其它定解问题

以例 1 说明之

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+A\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\ u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le \mathrm{x}\le 1 \end{cases}$$

这时需要在**边界上**，对 **Riemann** 不变量

$$r_1=v+w,\ r_2=v-w$$

加上适当的**边界条件**，才能保证问题的适定性。

注意: 对于任一点 $P(x,t)$，有

(1) 在过该点且斜率为 $\dfrac{dt}{dx}=-1$ 的特征线 1 上,

$$r_1=v+w \quad \text{为常数}$$

(2) 在过该点且斜率为 $\dfrac{dt}{dx}=1$ 的特征线 2 上,

$$r_2=v-w \quad \text{为常数}$$

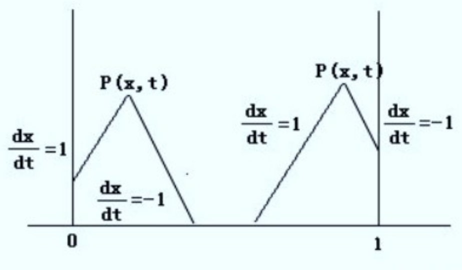
$\Rightarrow$

由于当点 $P(x,t)$ 充分靠近左边界时, 过该点的特征线 2 穿过左边界，所以为了使得问题适定，需要在左边界上加上如下限制条件:

$$r_2=v-w \quad \text{为已知值;}$$

同理，为了使得问题适定，需要在右边界上加上如下限制条件

$$r_1=v+w \text{ 为已知值.}$$



推广到一般的二阶线性双曲型方程组，若求解区域是 $[0,l]\times[0,+\infty)$，要使问题的解适定，不仅需要初始条件，而且需

要边值条件，具体分为三种情况。

（1）$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$，此时随时间$t$的增加，两族特征由左边界进入求解区域，所以此时需要给定左端点的边值条件;

（2）$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$，此时随时间$t$的增加，两族特征由右边界进入求解区域，所以此时需要给定右端点的边值条件;

（3）$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$，此时随时间$t$的增加。一族特征从左边进入求解区域，另一族特征从右边进入求解区域，所以此时两端点的边值条件都需要给定。