第二节 稳定性和收敛性 – 微分方程数值解

笔记本：	我的第一个笔记本
创建时间：	2017/6/12 12:22
URL：	https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52934_1

第二节 稳定性和收敛性

学习指导：D 抛物方程 第二节

本节介绍抛物型方程的稳定性和收敛性。

作业&思考：D 抛物方程 第二节

讲义： D 抛物方程 第二节

§5.2. 稳定性和收敛性

下面设 r 为常数(即系数 a 为常数)，$l=1$, $N=n$，且 $f(t,x)=f(x)$ (即与 t 无关)，记 $n-1$ 维向量

$$U^k=(u_1^k,u_2^k,\cdots,u_{n-1}^k)^T,\quad F=(f_1,f_2,\cdots,f_{n-1})^T. \tag{5.2.1}$$

考虑二层格式的一般矩阵形式

$$AU^{k+1}=BU^k+\tau F \tag{5.2.2}$$

（1）向前差分格式

$$A=I,\quad B=\begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

（2）向后差分格式

$$A=\begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+2r \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)},\quad B=I.$$

（3）Grank-Nicholson 差分格式

$$A=\begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & & & \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ & & & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1-r & \frac{r}{2} & & & \\ \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\ & & & \frac{r}{2} & 1-r \end{bmatrix}.$$

$\llcorner \quad 2 \quad \lrcorner_{(n-1)\times(n-1)} \qquad \llcorner \quad 2 \quad \lrcorner_{(n-1)\times(n-1)}$

5.2.1 稳定性

记矩阵$C=A^{-1}B$，其中C是增长矩阵，则（5.2.2）可以等价写成

$$U^{k+1}=CU^k+\tau A^{-1}F \tag{5.2.3}$$

1. 关于初值稳定

定义：设任给两初值W^0和V^0，按公式（5.2.3）分别求得数值解W^k和V^k. 若存在正常数τ_0和K，使得对一切$0<\tau\le\tau_0$和$0<k\tau\le T$，均有

$$\left\|W^k-V^k\right\|\le K\left\|W^0-V^0\right\|, \tag{5.2.4}$$

则称（5.2.3）关于初值稳定。

注：在初值稳定的定义中虽然没有显式地出现h，但由于$r=a\dfrac{\tau}{h^2}$是常数，所以h^2与τ的变化是同步的。

由（5.2.3），有

$$W^k=CW^{k-1}+\tau A^{-1}F \tag{5.2.5}$$

$$V^k=CV^{k-1}+\tau A^{-1}F \tag{5.2.6}$$

两式相减，得

$$E^k:=W^k-V^k=C(W^{k-1}-V^{k-1}):=CE^{k-1}$$

（5.2.7）

因此，可递归地得到

$$E^k=C^kE^0 \tag{5.2.8}$$

上式两边取矩阵的某种从属范数，则

$$\left\|E^k\right\|\le\left\|C^k\right\|\cdot\left\|E^0\right\| \tag{5.2.9}$$

由（5.2.9）可知，要（5.2.3）关于初值稳定，则要求（传递）矩阵族$\{C^k\}$一致有界，即存在正常数τ_0和K，使得

$$\left\|C^k\right\|\le K,\ \ 0<\tau\le\tau_0,0<k\tau\le T \tag{5.2.10}$$

2. 关于右端稳定

定义：设任意给定F_1和F_2，从初值U^0出发，按公式（5.2.3）分别求得数值解W^k和V^k. 若存在正常数τ_0和K，使得对一切$0<\tau\le\tau_0$和$0<k\tau\le T$，均有

$$\left\|W^k-V^k\right\|\le K\left\|F_1-F_2\right\|, \tag{5.2.11}$$

则称（5.2.3）关于右端稳定。

由（5.2.3），有

$$W^k=CW^{k-1}+\tau A^{-1}F_1 \tag{5.2.12}$$

$$V^k=CV^{k-1}+\tau A^{-1}F_2 \tag{5.2.13}$$

两式相减，得

$$W^k - V^k = C(W^{k-1} - V^{k-1}) + \tau A^{-1}(F_1 - F_2) \qquad (5.2.14)$$

记 $X^k := W^k - V^k$，$F := F_1 - F$，则（5.2.14）可以写为

$$X^k = CX^{k-1} + \tau A^{-1}F \qquad (5.2.15)$$

因此，可递归地得到（注意 $X^0=0$）

$$\begin{aligned} X^k &= CX^{k-1} + \tau A^{-1}F \\ &= C(CX^{k-2} + \tau A^{-1}F) + \tau A^{-1}F \\ &= C^2X^{k-2} + \tau(C+I)A^{-1}F \\ &= \cdots\cdots \\ &= C^kX^0 + \tau(C^{k-1} + C^{k-2} + \cdots + C + I)A^{-1}F \\ &= \tau(C^{k-1} + C^{k-2} + \cdots + C + I)A^{-1}F \end{aligned} \qquad (5.2.16)$$

下面我们证明一个重要结论。

定理 1 如果格式（5.2.3）按初值稳定，则它亦按右端稳定。

证明 若格式（5.2.3）按初值稳定，则有（5.2.10）成立，即存在正常数 τ_0 和 K，使得

$$\left\|C^k\right\| \le K,\ 0 < \tau \le \tau_0, 0 < k\tau \le T.$$

由（5.2.16）并利用上式，有

$$\begin{aligned} \left\|X^k\right\| &= \tau\left\|(C^{k-1} + \cdots + C + I)A^{-1}F\right\| \\ &\le \tau\left(\left\|C^{k-1}\right\| + \cdots + \|C\| + 1\right)\cdot\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|F\| \\ &\le \tau k\tilde{K}\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|F\| \qquad (\tilde{K} = \max\{K, 1\}) \\ &\le T\tilde{K}\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|F\| \end{aligned} \qquad (5.2.17)$$

上式说明，格式（5.2.3）按右端稳定。 □

注： 在此处 f 与时间 t 无关，否则上述证明需要进一步讨论(因为 F 与 t 有关)。

3. 判定稳定性的直接方法

下面仅讨论按初值稳定。

直接利用 $\left\|C^k\right\| \le K,\ 0 < \tau \le \tau_0, 0 < k\tau \le T$ 来判定稳定性。

命题 1（必要条件） 差分格式(5.2.3)稳定的必要条件是，存在与 τ 无关的常数 M，使得

$$\rho(C) \le 1 + M\tau \qquad (5.2.18)$$

这里，$\rho(C)$ 为矩阵 C 的谱半径。

证明 由（5.2.10）知

$$\rho^k(C) \le \left\|C^k\right\| \le K,\ \ 0<k\le \frac{T}{\tau},\ \ 0<\tau\le\tau_0 \qquad (5.2.19)$$

不妨设$K>1$，并取

$$k=\left[\frac{T}{\tau}\right]>\frac{T}{\tau}-1=\frac{T-\tau}{\tau}$$

则有

$$\rho(C)\le K^{\frac{1}{k}}\le K^{\frac{\tau}{T-\tau}}=e^{\frac{\tau}{T-\tau}\ln K}\le e^{\frac{\ln K}{T-\tau_0}\cdot\tau}\le 1+M\tau.$$

这里利用了

$e^x=1+xe^{\xi},\ \xi\in(0,x)$, 而当 $x\to 0^+$时, $|e^{\xi}|\le e$。

注：（5.2.19）中用到了

$$\rho^k(C)\le\left\|C^k\right\|,$$

这里，$\|\cdot\|$表示矩阵范数的从属范数。事实上，由谱半径的定义易知

$$\rho^k(C)=\rho(C^k)$$

因此，只需说明，对于任意一种从属范数，都有

$$\rho(C^k)\le\left\|C^k\right\|$$

而上式显然（参考《数值计算方法》）。

下面我们考虑判断稳定性的充要条件。

定义 若$A\in C^{m\times n}$满足

$$A^H A=AA^H$$

则称A为正规矩阵，这里A^H表示A的共轭转置，即$A^H=\overline{A}^T$。

定理 2（详见“矩阵分析引论”，罗家洪，华南理工大学出版社） A为正规矩阵的充要条件是：存在酉矩阵Q，使得A酉相似于对角形（对角元为特征值）矩阵，即

$$Q^H AQ=Q^{-1}AQ=J:=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}. \qquad (5.2.20)$$

注意：若A为正规矩阵，则$\|A\|_2=\rho(A)$。

【

设C是正规矩阵，则存在酉阵Q，使得

$$\left\|C^k\right\|=\left\|QJ^kQ^{-1}\right\|\le\|Q\|\cdot\left\|J^k\right\|\cdot\left\|Q^{-1}\right\| \qquad (5.2.21)$$

其中

$$J^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_{n-1}^k)$$

取$\|\cdot\|$为矩阵的 2 范数，则由（5.2.21）知

$$\|C^k\| \le \|Q\| \cdot \|J^k\| \cdot \|Q^{-1}\| = \|J^k\| \le \|J\|^k = \rho^k(J) = \rho^k(C) \qquad (5.2.22)$$

注意：上式用到了“酉矩阵的 2 范数等于 1”。

】

命题 2（充分条件） 若$C(\tau)$是正规矩阵，则条件（5.2.18）也是差分格式（5.2.3）稳定的充分条件。

证明 若$C(\tau)$是正规矩阵，则$C^k(\tau)$也为正规矩阵，取$\|\cdot\|$为矩阵 2 范数，则

$$\|C^k\| = \rho(C^k) = \rho^k(C) \le (1+M\tau)^k \le (1+M\tau)^{\frac{T}{\tau}} \le e^{MT}$$

这里利用了$(1+x)^{\frac{1}{x}} \le e$, 当$x \to 0^+$。 □

注：条件（5.2.18）称为 Von Neumann 条件。

下面，利用 Von Neumann 条件判定向前差分格式的稳定性。此时

$$C = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= (1-2r)I + rS$$

为正规矩阵，其中

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

由第六章第一节，可求得S的的特征值为

$$\lambda_j^S = 2\cos j\pi h,\ j = 1(1)n-1, h = \frac{1}{n},$$

所以C的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_j &= (1-2r) + r\lambda_j^S \\ &= 1-2r(1-\cos j\pi h) \\ &= 1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2},\quad j = 1(1)n-1 \end{aligned} \qquad (5.2.23)$$

因此，条件（5.2.18）等价于

$$\left|1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}\right| \le 1+M_0\tau,\ j = 1(1)n-1$$

$$\Leftrightarrow \qquad -1-M_0\tau \le 1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le 1+M_0\tau$$

$$\Leftrightarrow \qquad -M_0\tau \le 4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le 2+M_0\tau$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le 1+\frac{M_0}{2}\tau \qquad (5.2.24)$$

$$\Leftrightarrow \qquad r \le \frac{1}{2} \qquad (5.2.25)$$

【

关于（5.2.24）$\Rightarrow$（5.2.25）的证明。

反证法。设 $r=\frac{1}{2}+\varepsilon\ \ (\varepsilon>0)$，代入（5.2.24）得

$$2(\frac{1}{2}+\varepsilon)\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le 1+\frac{M_0}{2}\tau,\ \ \forall 0<\tau<\tau_0,\ j=1,2,\cdots,n-1$$

即

$$(1+2\varepsilon)\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le \frac{M_0}{2}\tau,\ \ \forall 0<\tau<\tau_0,\ j=1,2,\cdots,n-1 \qquad (5.2.26)$$

显然上式不成立，如取 $j=n-1\approx h^{-1}$ 代入上式，左边大于 1，而右边可任意小。

】

（5.2.25）就是向前差分格式按初值稳定的充要条件。

注：当模型问题换成含**低阶项**情形，不影响上述稳定性结果（当 $h,\tau\to 0$）。

5.2.2 收敛性

记由格式（5.2.3）$U^{k+1}=CU^k+\tau A^{-1}F$ 求得的数值解在点 (x_j,t_k) 的值为 u_j^k，当 $\tau\to 0$ 时，若 $u_j^k\to u(x_j,t_k)$，则称差分格式是收敛的。

注：因为网比固定，所以由 $\tau\to 0\Rightarrow h\to 0$。

记

$$\varepsilon_j^k=u(x_j,t_k)-u_j^k \qquad (5.2.27)$$

为（整体）截断误差。

作向量

$$\Delta_k=(\varepsilon_1^k,\varepsilon_2^k,\cdots,\varepsilon_{n-1}^k)^T$$

则收敛性等价于

$$\|\Delta_k\|\to 0(\tau\to 0).$$

由局部截断误差的概念，知

$$\Delta_{k+1}=C\Delta_k+R_k \qquad (5.2.28)$$

其中

$$R_k=(R_1^k,R_2^k,\cdots,R_{n-1}^k)^T.$$

如对向前差分格式，其矩阵表示形式

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1^{k+1}\\ \varepsilon_2^{k+1}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1-2r & r & & \\ r & 1-2r & r & \\ & r & 1-2r & r\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\varepsilon_1^{k}\\ \varepsilon_2^{k}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}R_1^{k}\\ R_2^{k}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1}^{k} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} R_2 \\ \vdots \\ R_{n-1}^{k} \end{pmatrix}$$

若格式（5.2.3）满足稳定性的判定条件（如对向前差分格式要求$r \le \dfrac{1}{2}$）：

$$\left\|C^k\right\| \le K,\ \ 0 < \tau \le \tau_0, 0 < k\tau \le T,$$

则（注意 $\Delta_0 = 0$ ）

$$\begin{aligned} \Delta_k &= C\Delta_{k-1} + \tau R_{k-1} = C(C\Delta_{k-2} + \tau R_{k-2}) + \tau R_{k-1} \\ &= C^2\Delta_{k-2} + \tau(CR_{k-2} + R_{k-1}) = \cdots\cdots \\ &= C^k\Delta_0 + \tau(\sum_{j=1}^{k} C^{j-1}R_{k-j}) \qquad (5.2.29) \\ &= \tau(\sum_{j=1}^{k} C^{j-1}R_{k-j}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $$\left\|\Delta_k\right\| \le \tau \cdot k \cdot K \cdot \left\|R\right\| = TK \cdot \left\|R\right\|.$$

这里，设 $\left\|R_j\right\| \le \left\|R\right\|,\quad j = 0(1)k-1.$

若格式（5.2.3）满足相容性

$$R_j^k(u) = O(\tau^\alpha + h^\beta),\ \ \alpha, \beta \ge 1$$

（如对向前差分格式$\alpha = 1, \beta = 2$），则有误差估计

$$\left\|\Delta_k\right\| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$$

特别，当$\tau \to 0$，格式收敛。