组合数学引论第六章答案

1.当有$n-1$条这样的直线时，它们所构成的无限区域数为$f(n-1)$.现加入第n条直线，则它将$f(n-1)$个区域中的某两个区域一分为二。因此，

$f(n)=f(n-1)+2$

3.$f(n)=3f(n-1)+(n-1)f(n-2)$,

$g(n)=2g(n-1)+2(n-1)g(n-2)$

5.最后三位是"010"的序列共有2^{n-3}个。包括以下情况：

$f(n)$包含了在最后三位第一次出现010的个数；

$f(n-2)$包含了从n-4到n-2位第一次出现010的个数；

$f(n-3)$包含了从n-5到n-3位第一次出现010的个数；

$2f(n-4)$包含了从n-6到n-4位第一次出现010的个数；

类似地，当$k\geq 3$时，$2^{k-3}f(n-k)$包含了从n-k-2到n-k位第一次出现010的个数。

所以，满足条件的递推关系为

$$\begin{cases} f(n)+f(n-2)+f(n-3)+\cdots+2^{n-6}f(3)=2^{n-3} \quad n\geq 6 \\ f(3)=1, f(4)=2, f(5)=3 \end{cases}$$

6.(1)特征方程$x^3-x^2-9x+9=0$的根为1,3，-3，故一般解为

$$f(n)=c_1 1^n+c_2 3^n+c_3(-3)^n$$

由初始值得

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_1+3c_2-3c_3=1 \\ c_1+9c_2+9c_3=2 \end{cases}$$

解得$c_1=-\frac{1}{4}, c_2=\frac{1}{3}, c_3=-\frac{1}{12}$,

$$\therefore f(n)=-\frac{1}{4}+3^{n-1}-\frac{1}{12}(-3)^n$$

(2)特征方程$x^3-3x+2=0$的根为1,1，-2，故一般解为

$$f(n)=(c_1+c_2 n)\cdot 1^n+c_3(-2)^n$$

由初始值,解得$c_1=\frac{8}{9}, c_2=-\frac{2}{3}, c_3=\frac{1}{9}$,

$$\therefore f(n)=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}(-2)^n$$

(3)$f(n)-4f(n-1)+3f(n-2)=3^n$,

由于特征方程的两根为1,3，所以该递推关系的特解为

$f'(n) = an \cdot 3^n.$

将它代入递推关系，得到$a = \frac{3}{2}$,

而相应齐次递推关系的通解为$c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 3^n$,从而非齐次递推关系的通解为

$f(n) = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 3^n + \frac{3}{2} n \cdot 3^n.$

再由初值$f(0) = 1, f(1) = 2$,求得$c_1 = \frac{11}{4}, c_2 = -\frac{7}{4}.$

$\therefore f(n) = \frac{11}{4} - \frac{7}{4} \cdot 3^n + \frac{3}{2} n \cdot 3^n.$

7.(1)令$h(n) = nf(n)$,

当$n \geq 1$时，

$h(n) + h(n-1) = 2^n,$

$h(n-1) + h(n-2) = 2^{n-1},$

$\therefore h(n) + h(n-1) = 2h(n-1) + 2h(n-2),$

解得$h(n) = \frac{2^{n+1}}{3} - (-1)^n \cdot \frac{2}{3},$

$$\therefore \begin{cases} f(n) = \frac{2^{n+1}}{3n} - (-1)^n \cdot \frac{2}{3n} & n \geq 1 \\ f(0) = 789 \end{cases}$$

(2)$lnf(x) = ln2 + lnf(n-1),$

令$h(n)=lnf(n)$,得

$$\begin{cases}2h(n)=ln2+h(n-1),\\h(0)=ln4.\end{cases}$$

解得$h(n)=(1+\frac{1}{2^n})ln2$,

$\therefore f(n)=2^{1+\frac{1}{2^n}}$.

$(3)f(1)=f(0)+1!$,

$f(2)=2!(f(0)+2)$,

$f(3)=3!(f(0)+3)$,

$\cdots$

$f(n)=n!(f(0)+n)=n!(n+2)$

11.若第一格着红色，则第二格只能着白色或蓝色，设余下$n-2$个格的涂色方法数为$f(n-2)$。若第一格不着红色，则或着白色或着蓝色，余下$n-1$个格的涂色方法数为$f(n-1)$。又当$n=1$时，$f(1)=3$.定义$f(0)=1$.

$\therefore \quad f(n)=2f(n-1)+2f(n-2) \quad f(0)=1,f(1)=3$,

解得$f(n)=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$

13. (1)考虑n在所选的k个数中和不在所选的k个数中两种情况。

如果n在这k个数中，则其余k-1个数在$1, 2, \cdots, n-2$中选，有$f(n-2, k-1)$种选法。

$\therefore f(n, k) = f(n-1, k) + f(n-2, k-1)$

(2)对$n \geq 1, f(n, 1) = n = \binom{n+1-1}{1}$;

对$n \geq 2, f(n, n) = 0 = \binom{n+1-n}{n}$.

假设对$i \leq j \leq n, f(j, i) = \binom{j+1-i}{i}$成立,则

$f(n+1, k) = f(n, k) + f(n-1, k-1)$

$= \binom{n+1-k}{k} + \binom{n+1-k}{k-1}$

$= \binom{n+2-k}{k}$

$= \binom{(n+1)-k+1}{k}$

$\therefore f(n, k) = \binom{n+1-k}{k}$

(3)考虑n或者在这k个数中，或者不在其中两种情况。如果n在这k个数中，则其余k-1个数在$2, 3, \cdots, n-2$中选，有$f(n-3, k-1)$种选法。如果n不在这k个数中，则这k个数在$1, 2, \cdots, n-1$中选，有$f(n-1, k)$种选法。

$\therefore g(n, k) = f(n-1, k) + f(n-3, k-1) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-1-k}{k-1}$

20. $f(n) = \frac{4^n+2^n}{2} - 3^n$.