组合数学引论第五章答案

2.(1)已知数列$\{n^2\}$的生成函数为

$A(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$,

其中$a_k=k^2$. 记$b_k=k^3$

$B(x)=x[A(x)]^{'}=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$,

记$c_k=\sum_{i=1}^{k}b_k$,

$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=(x^3+4x^2+x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}k+4\\k\end{pmatrix}x^k$,

$\therefore 1^3+2^3+\cdots+n^3=\begin{pmatrix}n+1\\n-3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}n+2\\n-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n+3\\n-1\end{pmatrix}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. (1)证明：序列$\{\frac{1}{n+1}\}$的指数型生成函数为$A(x)=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^i}{(i+1)!}+\cdots$,

$A^2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(i+1)!}\cdot\frac{1}{(n-i+1)!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(i+1)!(n-i+1)!}\cdot\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{x^2}[e(x)-1]^2$.

$\therefore$得证。

(2)$\frac{1}{x^2}[e(x)-1]^2=\frac{1}{x^2}[e(2x)-2e(x)+1]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{x^n}{n!}=$

$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(i+1)!(n-i+1)!}\cdot\frac{x^n}{n!}$,

于是$\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(i+1)!(n-i+1)!}=\frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}$.

5.这样的字只有两类：一类包括偶数个a和偶数个b；另一类包括奇数个a和奇数个b。

$\therefore g^{(e)}(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3+\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3=\frac{1}{2}(e^{5x}+e^x)=\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}5^n\cdot\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!})$,

$\therefore$这些字的个数为$\frac{1}{2}(5^n+1)$.

7. (1)$g(x)=(x+x^3+x^5+\cdots)^4=\frac{x^4}{(1-x^2)^4}\quad |x|<1$

(2)$g(x)=(1+x^3+x^6+\cdots)^4=\frac{1}{(1-x^3)^4}\quad |x|<1$

(3)$g(x)=(1+x+x^2+\cdots)^2(1+x)=\frac{1+x}{(1-x)^2}\quad |x|<1$

(4)$g(x)=(x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)(1+x+x^2+\cdots)^2=\frac{x^3(1+x^2+x^{10})(1+x^2+x^3)}{(1-x)^2}\quad |x|<1$

(5)$g(x)=(x^{10}+x^{11}+\cdots)^4=\frac{x^{40}}{(1-x)^4}\quad |x|<1$

8.生成函数为$(1+x+x^2+\cdots+x^k)\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})^{n-1}$,

$\therefore x^n$系数为$k(k-1)^{n-1}$.

10.(2)等式左边的生成函数为$A(x)=(1+x)^{n+2}-2(1+x)^{n+1}+(1+x)^n=x^2(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$.

即有$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-2} = (1+x)^n$,

$\therefore a_k = \begin{pmatrix} n \\ r-2 \end{pmatrix}$,

$\therefore$得证

11.(1)$g(x) = (x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots)^k = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^k$

(2)$g(x) = (\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots)^k = [e - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})]^k$

(3)$g(x) = (e^x - 1)(e^x - 1 - x)(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}) \cdots (e^x - 1 - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!})$

(4)$g(x) = (1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!}) \cdots (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!})$

16.(1)给工人A指定一项工作：$(1+x)^3$中项x的系数：3；

给工人B指定一项工作：$(1+x)^2$中项x的系数：2；

给工人C指定一项工作：$(1+x)^2$中项x的系数：2；

$\therefore$共7种方法。

(2)给工人A和B指定工作：$(1+x)^3 \cdot (1+y)^2 - xy$中项$xy$的系数：5；

给工人A和C指定工作：$(1+x)^3 \cdot (1+y)^2 - xy$中项$xy$的系数：5；

给工人B和C指定工作：$(1+x)^2 \cdot (1+y)^2$中项xy的系数：4；

$\therefore$共14种方法。

(3)给工人A,B和C指定工作：$(1+x)^3\cdot(1+y)^2\cdot(1+z)^2-x\cdot y\cdot 2z-x\cdot 2y\cdot z$中项$xyz$的系数：8；

$\therefore$共8种方法。