

组合数学引论第三章答案

2. x^5y^{13} 的系数是: $C_{18}^5 \cdot 3^5 \cdot (-2)^{13} = -C_{18}^5 \cdot 3^5 \cdot 2^{13},$

x^8y^{10} 的系数是: $C_{18}^8 \cdot 3^8 \cdot (-2)^{10} = C_{18}^8 \cdot 3^8 \cdot 2^{10}.$

$$\begin{aligned} 3(2). \text{等式左边} &= \frac{1}{n+1} [(n+1) \binom{n}{0} + \frac{n+1}{2} \binom{n}{1} + \frac{n+1}{3} \binom{n}{2} + \frac{n+1}{4} \binom{n}{3} + \\ &\cdots + \frac{n+1}{n+1} \binom{n}{n}] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1) \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

8. 令 $m = 1$ 代入上式得 $c = 1$, 再令 $m = 2$ 代入上式得 $b = 6$, 再令 $m = 3$ 代入上式得 $a = 6$,

$$\begin{aligned} &1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \\ &= [(6 \binom{1}{3} + 6 \binom{1}{2} + \binom{1}{1}) + (6 \binom{2}{3} + 6 \binom{2}{2} + \binom{2}{1}) + \cdots + \\ &(6 \binom{n}{3} + 6 \binom{n}{2} + \binom{n}{1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6\left(\binom{1}{3} + \binom{2}{3} + \cdots + \binom{n}{3}\right) + 6\left(\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \cdots + \binom{n}{2}\right) + \\
&\cdots + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{1}\right) \\
&= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\
&= 6\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

10.(1)利用数学归纳法证明：

或者利用后章的递推关系证明：

设长度为 n 的字符串中，0出现偶数次的字符串个数为 $f(n)$ 个，出现奇数次的字符串个数为 $g(n)$ 个，那么，有

$$f(n) = g(n-1) + 2f(n-1) = 3^{n-1} - f(n-1) + 2f(n-1) = 3^{n-1} + f(n-1),$$

$$f(n) = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^1 + f(1) = \frac{3}{2}(3^{n-1} - 1) + 2 = \frac{3^n + 1}{2}$$

(2)等式左边可以理解为长度为 n 的字符串中，0出现偶数次的字符串个数总和，即同第(1)问,根据0出现的次数分类，再用加法原理即得左式。右边即(1)所得结果，从而两者相等

14. $\binom{10}{3, 1, 4, 2}$

15.做组合证明如下：考虑如下组合问题的解：给定 n 个物体 a_1, a_2, \cdots, a_n ,从中取出 k 个物体，要求 a_1, a_2, a_3 中至少有一个被选中，求其方案数。

等式左边是上述问题的如下求解方法所得的方案数：先取出 k 个物体，再减去不符合要求的方案（即 a_1, a_2, a_3 都没有被选中）

等式右边是根据取出的 a_1, a_2, a_3 分类，右边第一项表示包含 a_1 的方案数，第二项是不包含 a_1 ,包含 a_2 的方案数，第三项是不包含 a_1, a_2 ,包含 a_3 的方案数，由加法原理立得右式。

16.考虑组合方法：设有红球 m_1 个,黄球 a_2 个,绿球 a_3 个，求从中取出 n 个的方案数。本题式子即按取出的各类球的个数分类。

而直接算即得结果为 $\binom{m_1 + m_2 + m_3}{n}$

18. (组合证明)考虑如下组合问题：从 n 名学生中选出一个委员会（人数不限），并选出该委员会的主席和秘书长，假设主席可以兼任秘书长。求其方案数

左边表示先选定主席和秘书长，再选其他成员（非主席和秘书长的委员），右边是根据委员会的人数进行分类，先选定委员会成员，再从成员中选定主席和秘书长。两种方法都无重复无遗漏的选出了符合要求的委员会，从而相等。