

## 第一节 两点边值模型问题的差分方法 – 微分方程数值解

笔记本： 我的第一个笔记本

创建时间： 2017/6/12 12:20

URL： [https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course\\_id=\\_11052\\_1&content\\_id=\\_52786\\_1](https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52786_1)

### 第一节 两点边值模型问题的差分方法



#### 学习指导：C 椭圆方程 第一节

本节介绍两点边值模型问题的差分方法。



#### 作业&思考：C 椭圆方程 第一节



#### 讲义：C 椭圆方程 第一节

### § 4.2 一维差分格式

#### 4.2.1 模型问题

考虑如下的两点边值模型问题

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{d}\left(p\frac{du}{dx}\right) + r\frac{du}{dx} + qu = f, & a < x < b \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

其中,  $p \in C^1[I], p \geq p_{\min} > 0, r, q, f \in C(I), q(x) \geq 0, I = [a, b], \alpha, \beta$  是给定的常数。

特别, 通常还有如下两个简化模型, 问题(4.2.2) 以及比 (4.2.2) 更一般的问题(4.2.3):

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d^2u}{dx^2} + qu = f, & a < x < b \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{d}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu = f, & a < x < b \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \quad (4.2.3)$$

本节中我们将以(4.2.1)、(4.2.2)和(4.2.3)为模型问题介绍构造差分格式的方法, 以及边值条件的逼近方法。

和常微分方程初值问题一样，我们可以构造出许多逼近模型问题(4.2.1)、(4.2.2)和(4.2.3)的差分格式，但并非任何差分格式都是可取的。一个好的差分格式应该是以尽可能的工作量（包括程序准备和计算机运算）得到所需精度的结果。由此我们对一个好的差分格式有如下两点要求：一方面，差分格式应该结构简单，便于求解；另一方面，差分格式应具有尽可能高的精确阶。

## 4.2.2 差分格式的推导

构造差分格式的方法有两种：直接差分法和积分插值法。这里首先以模型问题(4.2.2)为例介绍构造差分格式的直接差分方法。

第一步先将求解区域的离散化。

最常见的离散化是均匀网格剖分，在区间 $[a, b]$ 中插入 $N-1$ 个分点，即

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

其中，分点为 $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 1, 2, \cdots, N$ ，剖分步长 $h = (b-a)/N$ ，就得到区间 $[a, b]$ 的一个网格剖分。

更一般的剖分形式为：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

其中，分点 $x_i = x_{i-1} + h_i$ ,  $i = 1, 2, \cdots, N$ ，第 $i$ 个剖分单元的剖分步长为

$$h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, N$$

称 $h = \max_i h_i$ 为网格最大步长。

为了讨论各种离散化方法，需引入对偶剖分。取相邻两节点 $x_{i-1}$ ,  $x_i$ 的中点 $x_{i-1/2} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$  ( $i = 1, 2, \cdots, N$ )称为半整数点。则由节点

$$a = x_0 < x_{1/2} < \cdots < x_{N-1/2} < x_N = b$$

又构成了区间 $[a, b]$ 的一个网格剖分，称为对偶剖分。如图 4.2.1 所示。

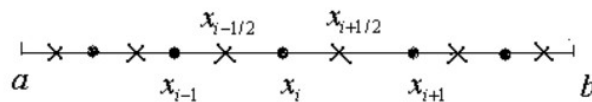


图 4.2.1

其中，图 4.2.1 中标记为“·”的节点是原剖分节点，标记为“×”的节点表示对偶剖分节点。

采用均匀网格剖分，对模型问题(4.2.2)，在节点 $x_i$ 处的微分方程为：

$$[Lu]_i = \left[ -\frac{d^2 u}{dx^2} + qu \right]_{x_i} = f(x_i)$$

构造差分格式的关键是建立二阶微分

$$\left[ \frac{d^2 u}{dx^2} \right]$$

$$\left[ \overline{dx^2} \right]_{x_i}$$

的离散（近似）公式。

对于充分光滑的  $u(x)$ ，利用 Taylor 展开式，有

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} \\ &= \left[ \frac{d^2 u}{dx^2} \right]_{x_i} + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{d^4 u}{dx^4} \right]_{x_i} + O(h^3) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

其中  $\left[ \quad \right]_{x_i}$  表示方括号内的函数在  $x_i$  点取值。由此可得

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + qu(x_i) = f(x_i) + R_i(u) \quad (4.2.5)$$

其中

$$R_i(u) = -\frac{h^2}{12} \left[ \frac{d^4 u}{dx^4} \right]_{x_i} + O(h^3) \quad (4.2.6)$$

在步长  $h$  足够小时， $R_i(u)$  为  $h$  的二阶无穷小。舍弃小量  $R_i(u)$ ，并记  $f_i = f(x_i)$ ， $u(x)$  在  $x_i$  点的数值解为  $u_i$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ ，则有

$$L_h u_i := -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + q_i u_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.2.7)$$

其中  $L_h$  为差分算子，上式称为逼近问题(4.2.2)的差分方程或差分格式。将差分算子  $L_h$  作用在  $u(x)$  得

$$L_h u(x_i) := -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + qu(x_i)$$

由(4.2.5)有

$$L_h u(x_i) := f(x_i) + R_i(u) \quad (4.2.8)$$

所以，有

$$R_i(u) = L_h u(x_i) - [Lu]_{x_i}$$

表示用差分算子  $L_h$  代替微分算子  $L$  产生的误差，称之为(局部)截断误差。它关于  $h$  的阶为  $O(h^2)$ 。

由于  $[Lu]_{x_i} = f(x_i)$ ，所以由(4.2.8)可得

$$R_i(u) = L_h u(x_i) - f(x_i) \quad (4.2.9)$$

由此知：(局部)截断误差可视为差分格式(方程)(4.2.7)，将数值解换成相应真解值后，左端减右端，再做 Taylor 展开获得的（可作为计算公式）。

**例4.2.1** 求差分格式

$$u'' = -2u + u''$$

$$-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+q_i u_i=f_i,$$

的局部截断误差。

$$\begin{aligned} R(u)_i &= -\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1}))}{h^2}+q(x_i)u(x_i)-f(x_i) \\ \text{解:} \\ &= -u''(x_i)+O(h^2)+q_i u_i-f(x_i) \\ &= -u''(x_i)+q_i u_i-f(x_i)+O(h^2) \\ &= O(h^2) \end{aligned}$$

考虑边值条件，得到方程 (4.2.7) 的联立形式 (中心差分格式)

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+q_i u_i=f_i, i=1,2,\cdots,N-1 \\ u_0=\alpha, \\ u_N=\beta, \end{cases} \quad (4.2.10)$$

方程(4.2.10)可化为  $N-1$  阶的线性方程组，即

$$\begin{cases} (q_1+\frac{2}{h^2})u_1-\frac{1}{h^2}u_2=f_1+\frac{\alpha}{h^2}, \\ (q_i+\frac{2}{h^2})u_i-\frac{1}{h^2}u_{i-1}-\frac{1}{h^2}u_{i+1}=f_i, i=2,3,\cdots,N-2 \\ (q_{N-1}+\frac{2}{h^2})u_{N-1}-\frac{1}{h^2}u_{N-2}=f_{N-1}+\frac{\beta}{h^2} \end{cases} \quad (4.2.11)$$

若将节点次序按照从左到右排列，记  $U=(u_1, u_2, \cdots, u_{N-1})^T$ ，则差分格式(4.2.11)可以记成如下的矩阵形式：

$$AU=b$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} q_1+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & q_2+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & q_{N-2}+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & -\frac{1}{h^2} & q_{N-1}+\frac{2}{h^2} \end{bmatrix}$$

以及

$$\mathbf{b} = (f_1 + \alpha / h^2, f_2, f_3, \dots, f_{N-2}, f_{N-1} + \beta / h^2)^T$$

系数矩阵  $A$  是三对角矩阵, 且为对称矩阵。求解该方程组就可得到  $u(x)$  在  $x_i$  点的数值解为  $u_i$ 。

下面讨论模型问题 (4.2.1):

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + r\frac{du}{dx} + qu = f, \quad a < x < b$$

采用一般的网格剖分, 即

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

其中, 分点  $x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$ , 第  $i$  个剖分单元的剖分步长为

$h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N$ 。在节点  $x_i$  处, 相应的微分方程为:

$$\left[ -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + r\frac{du}{dx} + qu \right]_{x_i} = f(x_i) \quad (4.2.12)$$

同样, 建立上问题差分格式的关键是建立

$$\left[ -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) \right]_{x_i} \text{ 和 } \left[ r\frac{du}{dx} \right]_{x_i}$$

的离散 (近似) 公式。

和上述等距剖分不同 (它是直接对 2 阶导数作离散近似)。这时离散公式的基本思想是用一阶 (近似) 中心差商代替二阶导数。

令函数 (Flux Function)

$$W(x) = p(x)\frac{du}{dx}$$

则

$$\left[ -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) \right]_{x_i} = -\left[ \frac{dW}{dx} \right]_{x_i}$$

首先用一阶中心差商近似一阶导数, 可得

$$\left[ -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) \right]_{x_i} = -\left[ \frac{dW}{dx} \right]_{x_i} \approx -2\frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h_i + h_{i+1}} \quad (4.2.13)$$

对于 (4.2.13) 中的  $W$  函数再次用一阶中心差商近似一阶导数, 可得

$$w_{i+1/2} = p(x_{i+1/2})\left[ \frac{du}{dx} \right]_{x_{i+1/2}} \approx p_{i+1/2}\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}}a \quad (4.2.14)$$

$$w_{i-1/2} = p(x_{i-1/2})\left[ \frac{du}{dx} \right]_{x_{i-1/2}} \approx p_{i-1/2}\frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \quad (4.2.15)$$

则由 (4.2.13), (4.2.14) 和 (4.2.15) 有

$$\left[ -\frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_i} \approx -\frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left[ p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - p_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] \quad (4.2.16)$$

类似有:

$$\left[ r \frac{du}{dx} \right]_{x_i} \approx r_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h_i + h_{i+1}} \quad (4.2.17)$$

将(4.2.16)和(4.2.17)代入(4.2.12)式, 我们可得到相应的差分方程

$$\begin{aligned} L_h u_i \equiv & -\frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left[ p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - p_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] + \\ & r_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h_i + h_{i+1}} + q_i u_i = f_i, i = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

$$u_0 = \alpha,$$

$$u_N = \beta$$

模型问题(4.2.1)的差分格式(4.2.18)也可以由 Taylor 展开式推导得到。由  $u(x)$  在  $x_i$  点的 Taylor 展开式有

$$\begin{aligned} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{h_i + h_{i+1}} &= \left[ \frac{du}{dx} \right]_{x_i} + \frac{h_{i+1} - h_i}{2} \left[ \frac{d^2 u}{dx^2} \right]_{x_i} + O(h^2) \\ p(x_{i-1/2}) \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_i} &= \left[ p \frac{du}{dx} \right]_{x_{i-1/2}} + \frac{h_i^2}{24} \left[ p \frac{d^3 u}{dx^3} \right]_{x_i} + O(h^3) \\ p(x_{i+1/2}) \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} &= \left[ p \frac{du}{dx} \right]_{x_{i+1/2}} + \frac{h_{i+1}^2}{24} \left[ p \frac{d^3 u}{dx^3} \right]_{x_i} + O(h^3) \end{aligned}$$

由上两式可得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_i + h_{i+1}} \left( p(x_{i-1/2}) \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} - p(x_{i-1/2}) \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_i} \right) \\
&= \frac{1}{h_i + h_{i+1}} \left( \left[ p \frac{du}{dx} \right]_{x_{i+1/2}} - \left[ p \frac{du}{dx} \right]_{x_{i-1/2}} \right) \\
&+ \frac{1}{h_i + h_{i+1}} \left( \frac{h_{i+1}^2}{24} - \frac{h_i^2}{24} \right) \left[ p \frac{d^3 u}{dx^3} \right]_{x_i} + O(h^2) \\
&= \left[ \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_i} + \frac{h_{i+1} - h_i}{4} \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( p \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_i} \\
&+ \frac{h_{i+1} - h_i}{12} \left[ p \frac{d^3 u}{dx^3} \right]_{x_i} + O(h^2).
\end{aligned}$$

令  $u_i = u(x_{i+1})$ ,  $p_{i+1/2} = p(x_{i+1/2})$ ,  $p_{i-1/2} = p(x_{i-1/2})$  以及  $f_i = f(x_i)$ , 有

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left[ p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - p_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] \\
& + r_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h_i + h_{i+1}} + q_i u_i = f_i + R_i(u)
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

其中  $R_i(u)$  为

$$R_i(u) = -(h_{i+1} - h_i) \left( \frac{1}{4} \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( p \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_i} + \frac{1}{12} \left[ p \frac{d^3 u}{dx^3} \right]_{x_i} - \frac{1}{2} \left[ r \frac{d^2 u}{dx^2} \right]_{x_i} \right) + O(h^2) \tag{4.2.20}$$

舍去  $R_i(u)$ , 可得到相应的差分方程, 即为(4.2.18),

$$\begin{aligned}
L_h u_i &\equiv -\frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left[ p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - p_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] + \\
r_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h_i + h_{i+1}} + q_i u_i &= f_i, i = 1, 2, \dots, N-1
\end{aligned}$$

$$u_0 = \alpha,$$

$$u_N = \beta$$

可见,  $R_i(u)$  为差分格式的局部截断误差。

方程(4.2.18)可化为  $N-1$  阶的线性方程组, 即

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \Gamma_{N-1} & \\ & & & \Gamma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}
\left[ q_1 + \frac{2}{(h_1 + h_2)} \left( \frac{p_{1+1/2}}{h_2} + \frac{p_{1/2}}{h_1} \right) \right] u_1 - \left[ \frac{2p_{1+1/2}}{(h_1 + h_2)h_2} - \frac{r_1}{(h_1 + h_2)} \right] u_2 \\
= f_1 + \alpha \left[ \frac{2p_{1/2}}{(h_1 + h_2)h_1} + \frac{r_1}{(h_1 + h_2)} \right], \\
\left[ q_i + \frac{2}{(h_i + h_{i+1})} \left( \frac{p_{i+1/2}}{h_{i+1}} + \frac{p_{i-1/2}}{h_i} \right) \right] u_i - \left[ \frac{2p_{i-1/2}}{(h_i + h_{i+1})h_i} + \frac{r_i}{(h_i + h_{i+1})} \right] u_{i-1} \\
- \left[ \frac{2p_{i+1/2}}{(h_i + h_{i+1})h_{i+1}} - \frac{r_i}{(h_i + h_{i+1})} \right] u_{i+1} = f_i, i = 2, 3, \dots, N-2 \\
\left[ q_{N-1} + \frac{2}{(h_{N-1} + h_N)} \left( \frac{p_{N-1/2}}{h_N} + \frac{p_{N-3/2}}{h_{N-1}} \right) \right] u_{N-1} - \left[ \frac{2p_{N-3/2}}{(h_{N-1} + h_N)h_{N-1}} + \frac{r_{N-1}}{(h_{N-1} + h_N)} \right] u_{N-2} \\
= f_{N-1} + \beta \left[ \frac{2p_{N-1/2}}{(h_{N-1} + h_N)h_N} - \frac{r_{N-1}}{(h_{N-1} + h_N)} \right]
\end{cases} \quad (4.2.21)$$

该方程组可以写成矩阵形式:  $AU = b$  这里, 矩阵  $A = (a_{ij})_{N-1 \times N-1}$ ,

$$a_{ij} = \begin{cases} q_i + \frac{2}{(h_i + h_{i+1})} \left( \frac{p_{i+1/2}}{h_{i+1}} - \frac{p_{i-1/2}}{h_i} \right), j = i, i = 1, 2, \dots, N-1 \\
- \left[ \frac{2p_{i-1/2}}{(h_i + h_{i+1})h_i} + \frac{r_i}{(h_i + h_{i+1})} \right], j = i-1, i = 2, \dots, N-1 \\
- \left[ \frac{2p_{i+1/2}}{(h_i + h_{i+1})h_{i+1}} - \frac{r_i}{(h_i + h_{i+1})} \right], j = i+1, i = 1, \dots, N-2 \\
0, \quad \text{else} \end{cases}$$

及  $b = F + G$ , 其中  $F = (f_j)_{j=1, \dots, N-1}$ ,

$$G = \left( \alpha \left[ \frac{2p_{1/2}}{(h_1 + h_2)h_1} + \frac{r_1}{(h_1 + h_2)} \right], 0, \dots, 0, \beta \left[ \frac{2p_{N-1/2}}{(h_{N-1} + h_N)h_N} - \frac{r_{N-1}}{(h_{N-1} + h_N)} \right] \right)^T$$

若节点次序从左到右排列, 系数矩阵  $A$  是三对角矩阵。由于  $r \neq 0$ , 故矩阵  $A$  是非对称的。当  $r = 0$  时, 若网格均匀, 则系数矩阵  $A$  是对称的, 若网格不均匀, 系数矩阵  $A$  仍是非对称的, 但是可以对称化。只要在(4.2.21)两端乘以  $(h_i + h_{i+1})$  即可得到(4.2.22), 此时系数矩阵为对称形式。

$$\begin{cases}
\left[ q_1 + 2 \left( \frac{p_{1+1/2}}{h_2} + \frac{p_{1/2}}{h_1} \right) \right] u_1 - \left[ \frac{2p_{1+1/2}}{h_2} - r_1 \right] u_2 = (h_1 + h_2)f_1 + \alpha \left[ \frac{2p_{1/2}}{h_1} + r_1 \right], \\
\left[ q_i + 2 \left( \frac{p_{i+1/2}}{h_{i+1}} + \frac{p_{i-1/2}}{h_i} \right) \right] u_i - \left[ \frac{2p_{i-1/2}}{h_i} + r_i \right] u_{i-1} - \left[ \frac{2p_{i+1/2}}{h_{i+1}} - r_i \right] u_{i+1} = (h_i + h_{i+1})f_i \\
i = 2, 3, \dots, N-2
\end{cases}$$



$$\begin{aligned} & \left[ q_{N-1} + 2 \left( \frac{p_{N-1/2}}{h_N} + \frac{p_{N-3/2}}{h_{N-1}} \right) \right] u_1 - \left[ \frac{2p_{N-3/2}}{h_{N-1}} + r_{N-1} \right] u_{N-2} = (h_{N-1} + h_N) f_{N-1} \\ & + \beta \left[ \frac{2p_{N-1/2}}{h_N} - r_{N-1} \right] \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

由(4.2.20)可知, 截断误差  $R_i(u)$  按照  $\|\cdot\|_C$  范数和  $\|\cdot\|_0$  范数的阶都是  $O(h)$ . 当网格均匀时, 即  $h_i \equiv h, i=1, 2, \dots, N$  时, 截断误差  $R_i(u)$  按照  $\|\cdot\|_C$  范数和  $\|\cdot\|_0$  范数的阶都提高到  $O(h^2)$ . 此时, 差分方程(4.2.18)简化为

$$\begin{aligned} L_h u_i &\equiv -\frac{1}{h^2} [p_{i+1/2} u_{i+1} - (p_{i+1/2} + p_{i-1/2}) u_i + p_{i-1/2} u_{i-1}] + \\ r_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i &= f_i, i=1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

$$u_0 = \alpha,$$

$$u_N = \beta$$

这相当于用一阶中心差商、二阶中心差商依次代替方程(4.2.1)的一阶微商和二阶微商的结果。将边界条件代入, 写成矩阵形式 (4.2.21)后, 其对应的系数矩阵  $A = (a_{ij})_{N-1 \times N-1}$  为

$$a_{ij} = \begin{cases} q_i + \frac{2}{h^2} (p_{i+1/2} + p_{i-1/2}), j=i, i=1, 2, \dots, N-1 \\ -\left[ \frac{p_{i-1/2}}{h^2} + \frac{r_i}{2h} \right], j=i-1, i=2, \dots, N-1 \\ -\left[ \frac{p_{i+1/2}}{h^2} - \frac{r_i}{2h} \right], j=i+1, i=1, \dots, N-2 \\ 0, \quad \text{else} \end{cases} \quad (4.2.24)$$

下面我们以前面模型问题(4.2.3)为例, 介绍用积分插值法构造差分格式。此时, 引入微分算子  $L$  微分方程表示如下:

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu = f, \quad a < x < b \quad (4.2.25)$$

我们采用一般的网格剖分, 即

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

其中, 分点  $x_i = x_{i-1} + h_i, i=1, 2, \dots, N$ , 第  $i$  个剖分单元的剖分步长为  $h_i = x_i - x_{i-1}, i=1, 2, \dots, N$ . 如果把(4.2.25)看成分布在一根杆上的稳定温度场的方程, 这在  $[a, b]$  区间内任意一小区间  $[x, x + \Delta x]$  上的热量守恒定律具有形式

$$r_{x+\Delta x} \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + q_{x+\Delta x} u = f_{x+\Delta x}$$

$$-\int_x \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) dx + \int_x q u dx = \int_x f dx$$

若令函数  $W(x) = p(x) \frac{du}{dx}$ ，则由上式等价于

$$W(x) - W(x + \Delta x) + \int_x^{x+\Delta x} q u dx = \int_x^{x+\Delta x} f dx \quad (4.2.26)$$

将微分方程(4.2.25)写成积分守恒型(4.2.26)以后，最高阶的微商从二阶降到了一阶，从而可以减弱对  $p(x), u(x)$  光滑性的要求。既然具有守恒形式的微分方程反映了物理、力学的某些守恒定律，那么，我们构造的差分格式也应保持这一性质。我们以后还会看到，从积分守恒型方程出发构造差分格式，便于推广到任意网格和处理自然边界条件。

考虑微分方程节点  $x_i$  处的离散化，积分插值法构造守恒型差分格式的步骤如下：

Step 1. 将微分方程

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu = f, \quad a < x < b$$

在节点  $x_i$  所属的对偶单元  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  上积分，得积分方程

$$W(x_{i-1/2}) - W(x_{i+1/2}) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q u dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f dx \quad (4.2.27)$$

其中

$$W(x) = p(x) \frac{du}{dx}.$$

Step 2. 对(4.2.27)式中含未知函数的三项进行离散化。

在一般的问题中，要求函数  $W(x), u(x)$  连续，但  $p(x), q(x)$  允许间断。所以我们不对  $W(x), q(x)u(x)$  直接离散化。以  $W(x) = p(x)u'$  为例讨论，我们可以将该式改写成为

$$u' = \frac{W(x)}{p(x)}$$

在区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上积分，利用积分的中矩形公式可得

$$u_i - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{p(x)} dx \approx W(x_{i-1/2}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{p(x)} dx \quad (4.2.28)$$

在式(4.2.28)中的  $W(x_{i-1/2})$  不应该视为  $W(x)$  在点  $x_{i-1/2}$  处的值，而应视为  $W(x)$  在单元  $[x_{i-1}, x_i]$  上的平均值。即

$$W(x_{i-1/2}) \approx a_i \frac{(u_i - u_{i-1})}{h_i} \quad (4.2.29)$$

其中

$$a_i = \left[ \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{p(x)} dx \right]^{-1} \quad (4.2.30)$$

类似地，利用区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上积分的中矩形公式，我们也可以得到

关系，利用区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的积分的中矩形公式，我们可以得到

$$W(x_{i+1/2}) \approx a_{i+1} \frac{(u_{i+1} - u_i)}{h_{i+1}} \quad (4.2.31)$$

以及

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q u dx \approx \frac{h_i + h_{i+1}}{2} d_i u_i \quad (4.2.32)$$

其中

$$d_i = \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx \quad (4.2.33)$$

将(4.2.29), (4.2.31)和(4.2.32)代入方程(4.2.27)，可得微分方程在节点  $x_i$  处的离散化格式（差分方程）为

$$-\left[ a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] + \frac{1}{2} (h_i + h_{i+1}) d_i u_i = \frac{1}{2} (h_i + h_{i+1}) \varphi_i, i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.2.34)$$

其中

$$\varphi_i = \frac{2}{(h_i + h_{i+1})} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx. \quad (4.2.35)$$

差分格式(4.2.33)的矩阵形式为  $AU = b$ ，其中系数矩阵  $A$  形如

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & -\frac{a_2}{h_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_2}{h_2} & \tilde{a}_2 & -\frac{a_3}{h_3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{a_3}{h_3} & \tilde{a}_3 & -\frac{a_4}{h_4} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_4}{h_4} & \tilde{a}_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{a_{N-1}}{h_{N-1}} & \tilde{a}_{N-1} \end{pmatrix} \quad (4.2.36)$$

其中

$$\tilde{a}_i = \frac{a_i}{h_i} + \frac{a_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{1}{2} (h_i + h_{i+1}) d_i, i = 1, \dots, N-1.$$

显然，系数矩阵  $A$  是三对角矩阵，且为对称的。

如果系数  $q(x)$ ， $p(x)$  以及右端函数  $f(x)$  光滑，可利用数值积分公式直接计算(4.2.30)，(4.2.33)和(4.2.35)。如果用中矩形公式计算，有

$$\begin{cases} a_i = p_{i-1/2} = p(x_{i-1/2}) \\ d_i = q_i = q(x_i) \\ \varphi_i = f_i = f(x_i) \end{cases} \quad (4.2.37)$$

积分守恒型(4.2.27)的差分格式就是直接差分化方法的结果:

$$-\left[ p(x_{i+1/2}) \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - p(x_{i-1/2}) \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] + \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})q(x_i)u_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})f_i, \\ i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.2.38)$$

如果用梯形公式直接计算积分, 此时

$$\begin{cases} a_i = \frac{2p_{i-1}p_i}{p_{i-1} + p_i} \\ d_i = \frac{q_{i-1/2} + q_{i+1/2}}{2} \\ \varphi_i = \frac{f_{i-1/2} + f_{i+1/2}}{2} \end{cases} \quad (4.2.39)$$

积分守恒型(4.2.27)的差分格式为:

$$-\left[ \frac{2p_{i+1}p_i}{p_{i+1} + p_i} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{2p_{i-1}p_i}{p_{i-1} + p_i} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] + \frac{1}{4}(h_i + h_{i+1})(q_{i-1/2} + q_{i+1/2})u_i \\ = \frac{1}{4}(h_i + h_{i+1})(f_{i-1/2} + f_{i+1/2}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.2.40)$$

我们推导了模型问题(4.2.3)在  $x_i$  点处微分方程的离散化, 若考虑第一边值条件, 处理方式同模型问题(4.2.1)和(4.2.2), 这里就不再赘述。

**注:** 对于系数具有第一类间断点的微分方程, 系数公式(4.2.37) 和(4.2.39)也适用。此时, 若公式中的函数在间断点取值, 则应取左右极限的算术平均值。对于这种具有间断系数的微分方程, 保持守恒性尤其重要。例如微分方程

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) = 0$$

若把它写成非守恒形式

$$p(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{dp}{dx} \frac{du}{dx} = 0$$

再用中心差分格式

$$p_i \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2h} \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0$$

则差分解有可能不收敛。

综上所述, 积分插值法(有限体积分法)相比直接差分法有如下的优点: 首先积分差分对系数的光滑性要求低, 其次该方法便于推广到任意网格和任意的边界条件, 此外该方法保(局部)守恒性。

