北京邮电大学 2015——2016 学年第 1 学期

《组合数学》期末考试试题（A 卷）答案

1,（18 分）(1) 从 1 到 30 的整数中不重复的选取 3 个数组成有序 3 元组(x,y, z),使得 x+y+z 是奇数,问可组成多少种这种 3 元组？
(2) 求 50! 尾部有多少个 0？

解:（1）， 要使得 x+y+z 是奇数，则可能的方案是这三个数都是奇数，这三个数中 2 个偶数，一个奇数。第一种情形有 P(15,3)种可能，第二种情形有 C(15,2)C(15,1)*3！种，故共有

P(15,3)+ C(15,2)C(15,1)*3！ 种这种 3 元组 ----10 分

（2），要乘积出现 0，则必是偶数与 5 相乘得到或者该数是 10 的倍数，其中 10 的倍数有 10,20,30,40,50， 共 5 个，而个位数是 5 的数有 5 个，5,15,25,35,45，个位数非 0 的偶数共有 20 个，注意到 25 与 4 乘积为 100， 50 与偶数乘积会产生两个 0，故共有 12 个 0。---18 分

2,（16 分）凸 10 边形的任意 3 条对角线不共点，求该凸 10 边形的对角线的交点数？这些交点把对角线分成多少段？

解:（1）由于没有三条对角线共点，所以这凸多边形任取 4 点，组成的多边形内唯一的一个四边形，确定唯一一个交点，
从而总的交点数为 C(10,4)=210 ----8 分

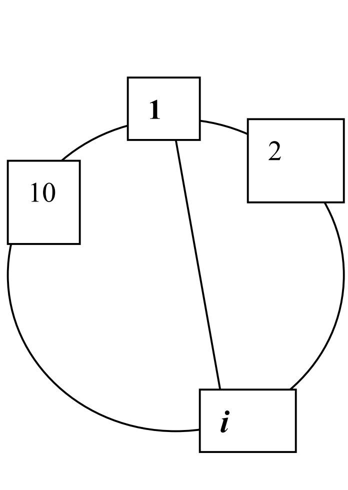
（2）如图，不妨取顶点 1，考察由 1 出发的对角线被其他对角线剖分的总数。不妨设顶点标号按顺时针排列，取定对角线 *1 i*

一个在右侧，则与对角线 1i 相交的
其他对角线
必定一个顶点在左侧，
于是，这种交点总数为

（10-i）(i-2)

从而此对角线被剖分成

（10-i）(i-2)+1 段



从而由顶点 1 出发的所有对角线被分割成的小段总数为

$$\sum_{j=3}^{9}((10-i)(i-2)+1)=91$$

从而全体对角线被分割的小段总数为：

$\dfrac{10\times 91}{2}=455$ 条　　----16 分

3，(14 分) 求解如下递推关系

$$\begin{cases} a_n\text{-}4a_{n-1}+4a_{n-2}=4\cdot 2^n+n \\ a_0=1, a_1=4 \end{cases}$$

解：先求 $4*2^n$ 的特解，注意到 2 是对应的齐次递推关系的 2 重特征根，故特解形如 $p*n^2*2^n$。 代入求得 p=2　4---分
再求 n 的特解，形如 an+b，代入求得 a=1，b=4　---8 分

容易知道齐次递推关系的特征方程为 x^2-4x+4=0，特征根为 2（2 重），于是问题的通解为

$a_n=(a+bn+2n^2)*2^n+n+4$，----12 分

代入初始条件，求得 a=-3,b= 1/2
于是问题的解为：$a_n=(-3+n/2+2n^2)*2^n+n+4$　　---14 分

4, （12 分）设 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\infty\cdot e_3,\infty\cdot e_4\}$，令 a_n 是从 S 中取出的满足元素 e_1 和 e_2 出现的次数同为偶数或同为奇数, 其它元素任意的 **n 位数**的个数;求序列 $\{a_n\}$ 的普通或指数型生成函数并由此求出 a_n 的表达式。

解：法 1：根据题意，满足元素 e_1 和 e_2 出现的次数同为偶数或同为奇数相当于元素 e_1 和 e_2 出现总次数为偶数次，其所对应的枚举子为 $1+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}+...+\frac{2^nx^n}{n!}+...$，易得指数型母函数如下

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^2\left(1+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}+\ldots+\frac{2^nx^n}{n!}+\ldots\right)$$

$$=e^{2x}\frac{(e^{2x}+e^{-2x})}{2}=\frac{e^{4\mathrm{x}}+e^0}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(4^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore a_n=\begin{cases}1,n=0\\ \frac{1}{2}4^n,n\geq 1\end{cases}$$

法 2：容易知道同为偶数时的母函数为

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)^2,$$

同为奇数时的母函数为

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^2\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)^2。$$

于是问题的母函数为

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{2n!}+\ldots\right)^2+$$

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^2\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)^2$$

$$=e^{2x}\frac{(e^x+e^{-x})^2}{2}+e^{2x}\frac{(e^x\text{-}e^{-x})^2}{2}=\frac{e^{4\mathrm{x}}+e^0}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(4^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore a_n=\begin{cases}1,n=0\\ \frac{1}{2}4^n,n\geq 1\end{cases}$$

---12 分

5，（10 分）设 n 为正整数，证明：

$$\binom{n}{k}-\binom{n-3}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}$$

证明：法 1：

$$左边=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}-\binom{n-3}{k}$$

---4 分

$$=\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}-\binom{n-3}{k}$$

$$=\binom{n-3}{k}+\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}-\binom{n-3}{k}$$

=右边

---10 分

法 2：考虑如下问题：n 个不同的数 a1,a2,…,an 从中取 k 个做组合，要计算 a1，a2,a3 中至少取一个的方案数。
显然任取时的组合数为 C(n,k), 不符合要求的即 a1，a2,a3 均未选取的方案，有 C(n-3,k)种，由补则，总方案数为 C(n,k)-C(n-3,k).
下面考虑利用加法法则计算：a1，a2,a3 三个数至少取一，有以下三种可能：
取 a1，有 C(n-1,k-1)种方案，不取 a1 取 a2,有 C(n-2,k-1)种可能，不取 a1，a2,取 a3，有 C(n-3,k-1)种可能，由加法原理，总的方案数为 C(n-1,k-1)+C(n-2,k-1)+C(n-3,k-1).
这两种方法无重复无遗漏的计算出了问题的解，故应相等，从而得证。

6，（10 分）某班有五位学生来安排周一到周五一周的值日，使得每人恰好值日一天，其中，甲不能排在周五，乙不能排在周三和周四，丙不能排在周一和周二，丁不能排在周四和周五，戊不能排在周二，问有多少种安排方法？

解：根据题意，上述问题等价于如下的带禁区的排列。

				X
		X	X	
X	X			
			X	X
	X			

禁区的棋盘多项式是
$[x(1+x)^2+(1+2x)^2](1+3x+x^2)=1+8x+22x^2+24x^3+9x^4+x^5$ ----7 分
所以，方案数为 5!-8*4!+22*3!-24*2!+9*1!-1=20----10 分

7，（10 分）证明：一个有理数的十进制数展开式自某一位后必是循环的。

证明：有理数 r 可以表示成分数，即 r=p/q，且不妨假设分子跟分母互素，有理数的十进制数展开式即利用辗转相除发对 p 用 q 来做除法运算。一个整数除以另外一个整数 n，如果整除，则显然结论成立，否则，不整除的话，所得余数所有可能值有 n－1 个（余数为 1,2，…,n-1），也就是说最多除 n+1 次余数就会有重复，当余数重复时，就会产生循环。----10 分

8. （10 分）利用容斥原理证明下列恒等式

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n+m-k-1}{n}=\binom{n-1}{m-1} \qquad (n\geq 1, m\geq 1)$$

证明：考虑如下组合问题：从 m 个不同的物体 a1,a2,…,am 中取出 n 个做可重组合，要求 a1,a2,…,am 都选取的这种方案数显然为 C(n-m+m-1,n-m)=右边，下面考虑用容斥原理的方法求解该问题的方案数，从而证得上述恒等式。-----5 分

令 Ai 表示从 m 个不同的物体 a1,a2,…,am 中取出 n 个做组合但 ai 不被选出的组合的全体，i=1,2,…,m

U 为从 m 个不同的物体 a1,a2,…,am 中取出 n 个做可重组合的全体，则

|U|=C(n+m-1,n), |Ai|=C(n+m-1-1,n), |Ai∩Aj|=C(n+m-2-1,n),....,

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| = C(n+m-k-1, n), \ldots$$ ----8 分

于是由容斥原理得，方案数为

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k}\binom{n+m-k-1}{n} = \binom{n-1}{m-1} \qquad (n \geq 1, m \geq 1)$$

----10 分