驻定问题：椭圆方程

非驻定问题：随时间t改变 $\begin{cases}\text{抛物型方程}\\ \text{双曲型方程}\end{cases}$

抛物型方程

常系数线性抛物型方程初边值问题

$$\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & 0<t\leq T, & (1)\\
 & 0<x<l & (2)\\
u(x,0) = \phi(x) & & (3)\\
u(0,t) = u(l,t) = 0 & &
\end{array}\right.$$

a 正常数 $f(x,t)$ 已知连续函数

数值求解

设问题相容 $\phi(0)=\phi(l)=0$，解适定且满足一定的光滑性.

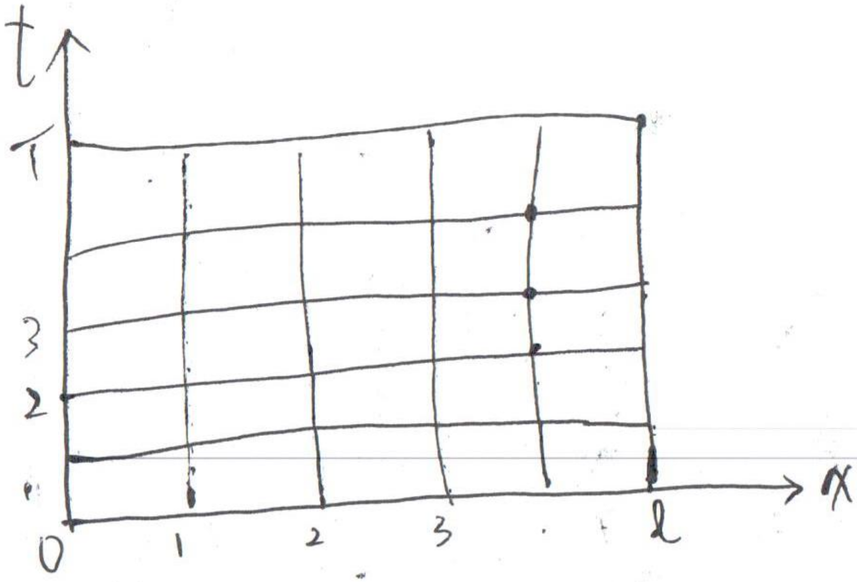
1. 求解区域的离散化

做网格剖分 对2D求解域做均匀剖分

$0=x_0<x_1<\cdots<x_N=l$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_M=T$

其中 $x_i=ih$, $t_k=k\tau$.

空间步长：$h=\frac{l}{N}$, 时间步长 $\tau=\frac{T}{M}$.



u_j^k 表示在网格节点 (x_j, t_k) 处的数值解.

设 u_j^i, $i=0,\cdots,k$, $j=0,\cdots,N$ 的值已经求出,

现在要建立第 $k+1$ 个时间层上的节点 (x_j, t_{k+1}), $j=1,\cdots,N-1$

处的数值解 u_j^{k+1}, $j=1,\cdots,N-1$ 所满足的计算公式.

2、差分格式的建立

二层格式：u_j^{k+1}，$j=1,\cdots,N-1$ 的差分格式中仅涉及当前时间层和第 k 个时间层上的数值解 u_j^k，$j=0,\cdots,N$

在网格节点 (x_j, t_k) 处对 $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$ 作近似：

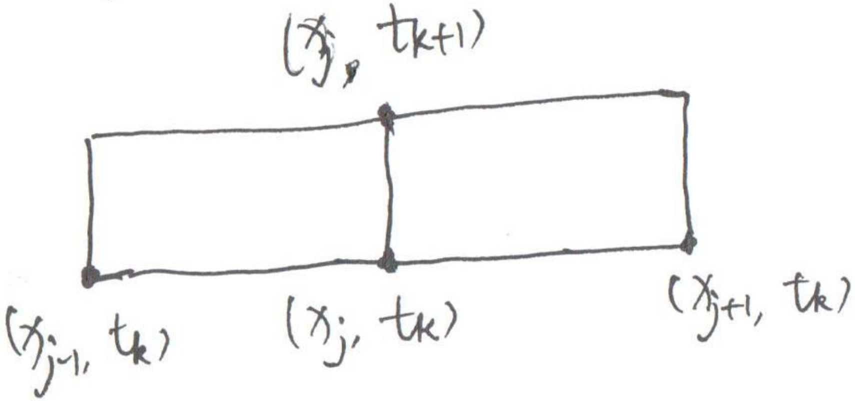
$$\frac{u(x_j, t_{k+1})-u(x_j, t_k)}{\tau} \approx \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t}.$$

$$\frac{u(x_{j+1}, t_k)-2u(x_j, t_k)+u(x_{j-1}, t_k)}{h^2} \approx \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2}.$$

记 $f_j^k = f(x_j, t_k)$，则

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\,\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j^k \qquad (4)$$

向前差分格式



显格式 (5)

记 $r = \frac{a\tau}{h^2}$ 称为网格比

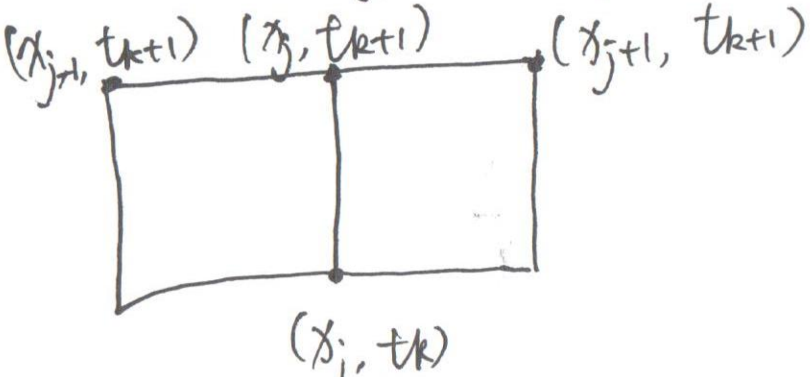
$$\begin{cases} u_j^{k+1} = r u_{j-1}^k + (1-2r) u_j^k + r u_{j+1}^k + \tau f_j^k & k=0,\cdots,M-1 \quad j=1,\cdots,N-1 \\ u_j^0 = u(x_j, 0) = \varphi(x_j). & u_0^k = u(0, t_k) = 0, \quad u_N^k = u(l, t_k) = 0. \end{cases}$$

向后差分格式

在节点(x_j, t_{k+1})对 $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ 作近似，有

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + f_j^{k+1} \qquad (6)$$

或 $$-ru_{j-1}^{k+1} + (1+2r)u_j^{k+1} - ru_{j+1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j^{k+1} \qquad (7)$$

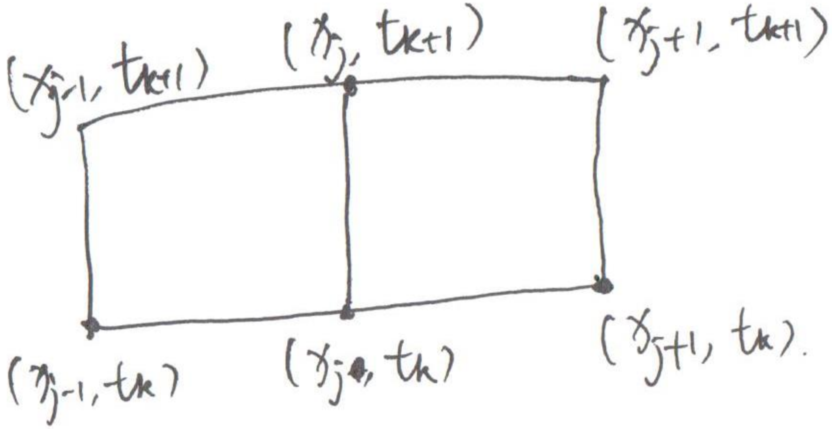


隐格式：需求解线性代数方程组.

(4) + (6)

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} = \frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^{k}-2u_j^{k}+u_{j-1}^{k}}{h^2}\right] + \frac{1}{2}\left[f_j^{k+1}+f_j^k\right]. \quad (8)$$

或: $$-\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1} + (1+r)u_j^{k+1} - \frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1} = \frac{r}{2}u_{j-1}^{k} + (1-r)u_j^k + \frac{r}{2}u_{j+1}^k + \frac{\tau}{2}\left(f_j^{k+1}+f_j^k\right). \quad (9)$$



六点对称格式.　　隐格式.

Grank-Nichaolson 格式.

三层格式：u_j^{k+1}，$j=1,\cdots,N-1$ 的差分格式中涉及当前时间层即第 k 个和 $k-1$ 个时间层上数值解 u_j^{k-1}，u_j^k，$j=0,\cdots,N$.

Richardson 格式.

在节点 (x_j, t_k) 处对 $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ 作近似.

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j^k. \qquad (10)$$

或 $$u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k.$$

显格式. 需预先算出 $t=t_1$ 时间层上的数值解.

上述各例的矩形表示.

令 $N-1$ 维向量 $U^k=(u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k)^T$.

$$F^k=(f_1^k, f_2^k, \cdots, f_{N-1}^k)^T.$$

向前差分格式

$$u_j^{k+1} = r u_{j-1}^k + (1-2r) u_j^k + r u_{j+1}^k + \tau f_j^k.$$

矩形表示 $\underset{\sim}{A_1} U^{k+1} = \underset{\sim}{A_0} U^k + \tau F^k$

$A_1 = I$ (单位矩形).

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{pmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

向后差分格式

$$-ru_{j-1}^{k+1}+(1+2r)u_j^{k+1}-ru_{j+1}^{k+1}=u_j^k+\tau f_j^{k+1}$$

矩形表示 $A_1U^{k+1}=A_0U^k+\tau F^{k+1}$.

$$A_1=\begin{pmatrix}1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+2r\end{pmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

$A_0=I$ (单位矩形)

六点对称格式

$$-\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1}+(1+r)u_j^{k+1}-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1}=\frac{r}{2}u_{j-1}^k+(1-r)u_j^k+\frac{r}{2}u_{j+1}^k+\frac{\tau}{2}[f_j^k+f_j^{k+1}]$$

矩阵表示 $A_1 U^{k+1} = A_0 U^k + \frac{\tau}{2}[F^k + F^{k+1}]$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & & & \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ & & & -\frac{r}{2} & 1+r \end{pmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1-r & \frac{r}{2} & & & \\ \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\ & & & \frac{r}{2} & 1-r \end{pmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

Richardson 格式

$$u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k$$

矩阵表示 $A_2 U^{k+1} = A_1 U^k + A_0 U^{k-1} + 2\tau F^k$.

其中 $A_2 = I$. $A_0 = I$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4r & 2r & & & \\ 2r & -4r & 2r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 2r & -4r & 2r \\ & & & 2r & -4r \end{pmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

局部截断误差.

方法：将真解代入差分格式，左端减去右端，再利用 Taylor 展开及真解满足的微分方程进行估计.

向前差分格式. 简记 $x_i := x_j$，$t_i := t_k$

在 (x_j, t_k) 处局部截断误差

$$R_j^k(u) = \frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} - a\frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} - f(x, t)$$

利用 Taylor 展开，并且 $f(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. 有

$$R_j^k(u) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,\xi)}{\partial t^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\eta,t)}{\partial x^4} - f(x,t)$$

$$= \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,\xi)}{\partial t^2} - a\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 (\eta,t)}{\partial x^4}.$$

$$= O(\tau + h^2).$$

$\xi \in (t, t+\tau)$

$\eta \in (x, x+h)$

双曲型方程

波动方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \begin{matrix} 0<x<L \\ -\infty<x<+\infty \end{matrix},\ 0<t\le T \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

1. 对求解域作网格剖分

节点：$x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \cdots$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \cdots$

空间步长 h. 时间步长 τ.

2. 在节点 (x_j, t_n) 处偏导数离散：二阶中心差商

$$\frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\tau} = \phi_1(x_j) \qquad (12')$$

在(10)中令 $n=0$.

$$\frac{u_j^1 - 2u_j^0 + u_j^{-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{h^2} \qquad (13)$$

利用 $\binom{(12')}{(13)}$ 消去 u_j^{-1}.

$$u_j^1 = \frac{r^2}{2}\left[\phi_0(x_{j-1}) + \phi_0(x_{j+1})\right] + (1-r^2)\phi_0(x_j) + \tau\phi_1(x_j)$$

$O(\tau^2 + h^2)$

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2}=a^2\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}. \qquad (10)$$

$j=0,\pm1,\cdots\cdots$

$n=0,1,\cdots$

局部截断误差 $O(\tau^2+h^2)$

利用初始条件可导出在前2个时间层上的离散格式.

$$u_j^0=\phi_0(x_j). \qquad (11)$$

$$\frac{u_j^1-u_j^0}{\tau}=\phi_1(x_j). \qquad (12)$$

(12) 局部截断误差为 $O(\tau)$.

混合问题：初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad 0<x<L. \quad 0<t<T. \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x). \\ u(0,t) = \alpha(t). \quad u(L,t) = \beta(t). \end{cases}$$