

南京大学

2016 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题 科目名称：高等代数

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、(20 分) 证明：如果多项式

$$(x^3 + x^2 + x + 1) \mid (f_1(x^4) + xf_2(x^4) + x^2f_3(x^4))$$

则对任意的 $1 \leq i \leq 3$ 我们总有

$$(x-1) \mid f_i(x)$$

二、(20 分) 求 n 级行列式

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \sin \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \sin \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \sin \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

三、(15 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵 T 使得 $T'AT$ 成对角矩阵.

四、(15 分) 讨论当 a, b 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解. 并在有解的情况下求一般解.

五、(20 分) 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型和有理标准型.

六、(20 分) 对于全体正实数 \mathbb{R}^+ , 定义其上的加法和数量乘法为

$$a \oplus b = ab, k \circ a = a^k, (a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R})$$

(1) 证明 \mathbb{R}^+ 在上述两种运算下成为 \mathbb{R} 上的一个线性空间;

(2) 叙述欧式空间的定义, 并说明 \mathbb{R}^+ 可以成为欧式空间.

七、(20 分) 设 A 为一个反对称的实矩阵. 证明如果 A 的特征值都是实数, 则 A 必为零矩阵.

八、(20 分) 设 W 为实 n 维向量空间 \mathbb{R}^n 的一个子空间, 且在 W 中每个非零向量 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ 中零分量的个数不超过 r . 证明 $\dim W \leq r + 1$.

注: 非常感谢南大考研群小碎花提供的真题, 老骥伏枥前辈辛勤付出!