北京邮电大学 2013——2014 学年第 1 学期

《组合数学》期末考试试题（A 卷）参考答案

姓名__________班级________学号________成绩_____

1，（15 分）(1) 从 1 到 200 的整数中不重复的选取两个数组成有序对(x,y),使得 x 与 y 的乘积不能被 3 整除，问可组成多少种这种有序对？ (2) 从 1 到 200 的整数中选取两个数组成有序对(x,y),使得|x-y|=7，问可组成多少种这种有序对？

解：(1) 注意到 3| xy 当且仅当 3|x 或 3|y，于是 3 不整除 xy 当且仅当 3 不整除 x 且 3 不整除 y，即 x，y∈{1,2,…,200}\A

其中 A={3,6,9,…,198}则|A|=66。

于是总的序偶有：134*134 -----8 分

（2）由|x-y|=7 知若 x>7,则 $y = x \pm 7$，给定这样的 x，y 有两种取法；否则 y=x+7，y 只有一种取法。

于是总的方案数为 7+186*2=379 ------7 分

2，（15 分）设 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\infty\cdot e_3,\infty\cdot e_4\}$，求序列 $\{a_n\}$ 的指数型母函数并由此求出 a_n 的表达式。其中 a_n 是从 S 中取出的满足下列条件的 n 位数。

（1）元素 e_1 出现奇数次,其它元素任意；

（2）S 的每个元素都出现偶数次，且 e_2 必需出现。

解：

（1） 指数型母函数为

$$(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^3(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)$$

$$=e^{3x}\frac{(e^x-e^{-x})}{2}=\frac{e^{4x}-e^{2x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(4^n-2^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2}\left(4^n-2^n\right)$$

-------7 分

（2） 指数型母函数为

$$(1+\frac{x^2}{2!}+\ldots\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots)^3(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)$$

$$=\left(\frac{(e^x+e^{-x})}{2}\right)^3\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right)=\left(\frac{(e^x+e^{-x})}{2}\right)^4-\left(\frac{(e^x+e^{-x})}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4x}+4e^{2x}+6+4e^{-2x}+e^{-4x}-2e^{3x}-6e^{x}-6e^{-x}-2e^{-3x}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8}\left(4^{2n}-2\cdot 3^{2n}+2^{2n+2}-6\right)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{8}\left(4^{2n}-2\cdot 3^{2n}+2^{2n+2}-6\right)$$

-----8 分

3，(20 分) 求解如下递推关系

（1），$\begin{cases} a_n+5a_{n-1}+6a_{n-2}=4\cdot 3^n \\ a_0=1,a_1=2 \end{cases}$

（2）$a_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_{n\text{-}1}}$，$a_0=4,a_1=2$

解：（1） 对应齐次递推关系的特征方程为 $x^2+5x+6=0$,

特征根为 r1=-2，r2=-3

对应齐次递推关系的通解为 $A(-2)^n+B(-3)^n$

设特解为 $p*3^n$ 代入求得 p=6/5

于是问题的通解为 $6*3^n/5+A(-2)^n+B(-3)^n$

代入初始条件求得 A=-11/5，B=2.

$a_n=6*3^n/5-11*(-2)^n/5+2*(-3)^n$ -----10 分

(2) 注意到 an 均为正数，于是两边取以 2 为底的对数，得

$$\lg a_n=\lg a_{n-2}\text{-}\lg a_{n\text{-}1}$$

令 $b_n=\lg a_n$，得 $b_n+b_{n-1}-b_{n-2}=0,b_0=2,b_1=1$

特征方程 $x^2+x-1=0$，特征根为

$$r_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},r_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

通解
$$b_n=\alpha\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

代入初始值得
$$\alpha=1+\frac{2}{\sqrt{5}},\ \ \beta=1-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

所以$a_n=2^{b_n}=2^{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

------10 分

4, （12 分）给定多重集 $S=\{5\cdot a,4\cdot b,3\cdot c\}$, (1)求 S 的全排列中不允许同一个字母全排在一起的排列数。(2)若从 S 中取 7 个做可重组合，则有多少种方案？

解:（1）令 U 为多重集 $S=\{5\cdot a,4\cdot b,3\cdot c\}$上的全排列集合， A 为多重集 $S=\{5\cdot a,4\cdot b,3\cdot c\}$上的 a 全排在一起的全排列集合，B 为多重集 $S=\{5\cdot a,4\cdot b,3\cdot c\}$上的 b 全排在一起的全排列集合，C 为多重集 $S=\{5\cdot a,4\cdot b,3\cdot c\}$上的 c 全排在一起的全排列集合。则

$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$即为所求。

$$|\mathrm{U}|=\frac{12!}{5!4!3!}=,|\mathrm{A}|=\frac{8!}{1!4!3!},|B|=\frac{9!}{5!1!3!},|C|=\frac{10!}{5!4!1!}$$

$$|A\cap B|=\frac{12!}{5!4!3!},|A\cap C|=\frac{12!}{5!4!3!},|B\cap C|=\frac{12!}{5!4!3!}$$

$$|A\cap B\cap C|=3!$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|U|-|\mathrm{A}|-|B|-|C|+|A\cap B|$$
$$+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$$
$$=\frac{12!}{5!4!3!}-\frac{8!}{1!4!3!}-\frac{9!}{5!1!3!}-\frac{10!}{5!4!1!}$$ -------7 分
$$+\frac{5!}{1!1!3!}+\frac{6!}{1!4!1!}+\frac{7!}{5!1!1!}-3!=574$$

（2）构造母函数

$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$ $(1+x+x^2+x^3+x^4)$ $(1+x+x^2+x^3)=$

$$\frac{1-x^6}{1-x}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x}$$

$$=\frac{1-x^4-x^5-x^6+x^{11}+x^{20}+x^{24}-x^{44}}{(1-x)^3}$$

$$=\left(1-x^4-x^5-x^6+x^{11}+x^{20}+x^{24}-x^{44}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n\right)$$

其中 x^7 的系数即为所求，计算得其系数 17.　----5 分

5，（10 分）设 n 为正整数，证明：

$$1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\frac{1}{4}\binom{n}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

证明：

$$1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\frac{1}{4}\binom{n}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

$$=\frac{n+1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\frac{1}{4}\binom{n}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{1}\binom{n}{0}+\frac{n+1}{2}\binom{n}{1}+\frac{n+1}{3}\binom{n}{2}+\frac{n+1}{4}\binom{n}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n+1}\binom{n}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}-\binom{n+1}{0}\right)$$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

------10 分

6，（10 分）在 1 到 10000 的整数中包含了多少个整数，其每个位上的数字之和等于 15。

解：二位数有 4 个：96, 69，78，87

三位数 xyz 要满足 $x+y+z=15$，$1\le x\le 9$, $0\le y\le 9$,$0\le z\le 9$,

满足上述不定方程的整数解的个数有

$$\binom{16}{2}-\binom{7}{2}-2\binom{6}{2}=69$$

四位数 xyzw 要满足 $x+y+z+w=15$，$1\le x\le 9$, $0\le y\le 9$,$0\le z\le 9$,$0\le w\le 9$

满足上述不定方程的整数解的个数有

$$\binom{17}{3}-\binom{8}{3}-3\binom{7}{3}=519$$

总数为 4+69+519=592. ----10 分

7，（10 分）证明：在任意给出的 n+1（n>1）个正整数中必有两个数，它们的差能被 n 整除。

证明：设取出的 n+1 个数为 a_1，a_2，…., a_{n+1},其被 n 整除以后的余数为 r_1，r_2，…., r_{n+1}，均取值于 0,1，2,…，n-1,根据鸽巢原理，必有两个相等。不妨设 ri=rj，于是 n|ai-aj，得证。

----10 分

8, （8 分）证明行和与列和都是 r 的三阶非负整数矩阵的个数等于

$$\binom{r+2}{2}^2-3\binom{r+3}{4}$$

证明：首先对 1、2 行数字任意放，使得行和为 r，这等价于将 r 个球放入 3 个无标志的盒子，每盒任意，由可重排列知，有 C(r+3-1,3-1)种，于是总的为 $C(r+2,2)^2$ 种，注意到第一、二行排好后，第三行完全确定。但注意到上述放法有不满足要求的，即某一列前两个数字和大于 r，且仅一列出现（因否则前两行的和大于 2r）。于是要减除这种情形，而后一情形可以计算如下。

从 3 列中任取一列，其前两个数之和为 $r+k(1\le k\le r)$，于是前面两行剩下的 4 个数字总和是 r-k,这相当于将 r-k 个球放入 4 个无标志的盒子，每盒任意，由可重排列知，有 C(r-k+4-1,4-1)种，于是这

种情形的方案为 3C(r-k+3,3)种，对 k=1,2…,r 求和得总的方案数

3[C(r+2,3)+ C(r+1,3) +…+ C(3,3)]=3(r+3,4)

于是满足要求的矩阵的个数是

$$\binom{r+2}{2}^2 - 3\binom{r+3}{4}$$

命题得证 -----8 分