第三节 常微分方程初值问题的线性多步法 – 微分方程数值解

笔记本：	我的第一个笔记本
创建时间：	2017/5/9 15:37
URL：	https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52860_1

第三节 常微分方程初值问题的线性多步法

学习指导：B 初值问题 第三节

本节介绍常微分方程初值问题的线性多步法。

讲义： B 初值问题 第三节

3.4 线性多步法

$Runge-Kutta$法是单步格式, 计算第$n+1$个节点的近似值时, 只用到第n 个节点的计算结果, 在每进行一步都需要先计算几个点上的斜率值（即$K_1, K_2, \cdots, K_m$ 等）, 计算量比较大. 但是, 在计算u_{n+1} 时, $u_n, u_{n-1}, \cdots, u_0$ 的值已经知道了, 能否多利用几个点上的近似值来构造差分格式, 使得不但有可能提高精度, 而且大大减少计算量了？ 这就是本节要介绍的线性多步法.

线性多步法的基本思想

从$Euler$ 格式出发. 在微分方程的离散化过程中, 用向后或者向前差商近似代替微商, 就推导出显式$Euler$格式或隐式$Euler$格式, 且它们的局部截断误差都为$O(h^2)$. 为了提高$Euler$格式的计算精度, 可在微分方程离散化中采用中心数值差分公式, 即

$$u'(t_n) \approx \frac{u(t_{n+1}) - u(t_{n-1})}{2h},$$

从而得到新的差分格式如下:

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2hf(t_n, u_n) \tag{3.4.1}$$

式(3.4.1)在计算u_{n+1}时要用到u_n, u_{n-1} 两步的信息, 称为两步$Euler$ 格式. 在实际计算中, 可用显式$Euler$格式(3.2.1)或隐式$Euler$格式(3.2.5)由已知初值u_0计算出u_1, 再根据式(3.4.1)计算出$u_{n+1}(n \geq 1)$.

由$Taylor$ 展开式, 可证明两步$Euler$ 格式是二阶方法. 将$u(t_{n+1})$和$u(t_{n-1})$ 在$t=t_n$处$Taylor$ 展开, 有

$$u(t_{n-1}) = u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{h^2}{2}u''(t_n) + O_1(h^3)$$

$$u(t_{n-1}) = u(t_n) - hu'(t_n) + \frac{h^2}{2}u''(t_n) + O_2(h^3)$$

故

$$u(t_{n+1}) - u(t_{n-1}) = 2hu'(t_n) + [O_1(h^3) - O_2(h^3)] = 2hu'(t_n) + O(h^3)$$

可得

$$u(t_{n+1}) = u(t_{n-1}) + 2hu'(t_n) + O(h^3)$$

若u_n, u_{n-1}的计算是准确的, 即$u(t_n) = u_n, u(t_{n-1}) = u_{n-1}$, 由上式可得

$$u(t_{n+1}) = u_{n-1} + 2hf(t_n, u_n) + O(h^3) \tag{3.4.2}$$

对比式(3.4.1)和式(3.4.2), 我们知道两步$Euler$ 格式得局部截断误差为$O(h^3)$, 即该格式为二阶的.

两步$Euler$ 格式和改进$Euler$法都是二阶格式, 但是两步$Euler$格式只需要计算一次f函数值, 格式的推导过程说明有可能利用前边已经算出来多个节点的近似值来构造高精度的差分格式. 这种由若干个值$u_n, u_{n-1}, \cdots, u_0$求$u_{n+1}$ 的差分格式称之为多步法. 本节, 只讨论简单实用的线性多步法.

记$t_n = t_0 + nh$, h为步长, $u_n \approx u(t_n)$, $f_n = f(t_n, u_n)$, 则线性多步法可表示为

$$u_{n+1} = \sum_{m=0}^{k-1} \alpha_m u_{n-m} + h \sum_{m=-1}^{k-1} \beta_m f_{n-m}, n = k-1, k, k+1, \cdots \tag{3.4.3}$$

其中$\{\alpha_m\}$, $\{\beta_m\}$为常数, 若$\alpha_{k-1}^2+\beta_{k-1}^2\neq 0$, 称(3.4.3) 线性$k$步法. 计算时用到前面已算出的$k$个值$u_n, u_{n-1}, \cdots, u_{n-k+1}$. 当$\beta_{-1}=0$ 时, 格式(3.4.3)为显式方法, 当$\beta_{-1}\neq 0$, 则称格式(3.4.3)为隐式多步法. 隐式方法与梯形方法一样, 计算时要用迭代法求u_{n+1}. 线性多步法(3.4.3)的局部截断误差定义也与单步法类似, 参见定义3.2.2.

线性多步格式的$Taylor$ 展开法

线性多步法(3.4.3)的推导和其它差分格式一样, 通常有$Taylor$ 展开法和数值积分的方法.

利用$Taylor$ 展开法求线性多步法(3.4.3)的基本思想是将线性多步公式在$t=t_n$处$Taylor$ 展开, 然后与$u(t_{n+1})$在$t=t_n$处$Taylor$ 展开式进行比较, 要求它们l 次幂$h^l(l=0,1,\cdots,p)$的系数相同, 从而推导出p阶的线性多步方法.

考虑$k=2$的情形, 设初始问题(3.1.1)−(3.1.2)的解充分光滑, 待定的两步公式为:

$$u_{n+1}=\alpha_0u_n+\alpha_1u_{n-1}+h[\beta_{-1}f_{n+1}+\beta_0f_n+\beta_1f_{n-1}], n=1,2,3\cdots \tag{3.4.4}$$

记$u_n^k=u^{(k)}(t_n)$, 则$u(t_{n+1})$在$t=t_n$处$Taylor$展开式为

$$u(t_{n+1})=u(t_n)+hu'_n+\frac{h^2}{2}u''_n+\frac{h^3}{6}u'''_n+\cdots+\frac{h^p}{p!}u_n^{(p)}+O(h^{p+1}) \tag{3.4.5}$$

假设前n步的计算结果都是准确的, 即

$$\left\{\begin{array}{l} u_m=u(t_m) \\ u'_m=f(t_m,u_m) \end{array}\right., (m\leq n)$$

利用$t=t_n$ 处$Taylor$ 展开式, 有

$$\begin{aligned}
u_{n-1} &= u_n-hu'_n+\frac{h^2}{2}u''_n-\frac{h^3}{6}u'''_n+\frac{h^4}{4!}u_n^{(4)}-\frac{h^5}{5!}u_n^{(5)}+O(h^6)\\
f_{n-1} &= u'(t_{n-1})=u'_n-hu''_n+\frac{h^2}{2}u'''_n-\frac{h^3}{6}u_n^{(4)}+\frac{h^4}{4!}u_n^{(5)}+O(h^5)\\
f_n &= u'_n\\
f_{n+1} &= u'(t_{n+1})=u'_n+hu''_n+\frac{h^2}{2}u'''_n+\frac{h^3}{6}u_n^{(4)}+\frac{h^4}{4!}u_n^{(5)}+O(h^5)
\end{aligned}$$

将这些展开式代入线性多步公式(3.4.4), 可得

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = {} & \alpha_0u_n+\alpha_1[u_n-hu'_n+\frac{h^2}{2}u''_n-\frac{h^3}{6}u'''_n+\frac{h^4}{4!}u_n^{(4)}-\frac{h^5}{5!}u_n^{(5)}+O(h^6)]\\
&+h\{\beta_{-1}[u'_n+hu''_n+\frac{h^2}{2}u'''_n+\frac{h^3}{6}u_n^{(4)}+\frac{h^4}{4!}u_n^{(5)}+O(h^5)]\\
&+\beta_0u'_n+\beta_1[u'_n-hu''_n+\frac{h^2}{2}u'''_n-\frac{h^3}{6}u_n^{(4)}+\frac{h^4}{4!}u_n^{(5)}+O(h^5)]\}
\end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = {} & (\alpha_0+\alpha_1)u_n+(-\alpha_1+\beta_{-1}+\beta_0+\beta_1)u'_nh\\
&+(\frac{\alpha_1}{2}+\beta_{-1}-\beta_1)u''_nh^2+(-\frac{\alpha_1}{6}+\frac{\beta_{-1}}{2}+\frac{\beta_1}{2})u'''_nh^3\\
&+(\frac{\alpha_1}{24}+\frac{\beta_{-1}}{6}-\frac{\beta_1}{6})u_n^{(4)}h^4+(-\frac{\alpha_1}{120}+\frac{\beta_{-1}}{24}+\frac{\beta_1}{24})u_n^{(5)}h^5+O(h^6)
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

对比(3.4.5)和(3.4.6)可得系数方程组

$$\left\{\begin{array}{l}
\alpha_0+\alpha_1=1\\
-\alpha_1+\beta_{-1}+\beta_0+\beta_1=1\\
\frac{1}{2}\alpha_1+\beta_{-1}-\beta_1=\frac{1}{2}\\
-\frac{1}{6}\alpha_1+\frac{1}{2}\beta_{-1}+\frac{1}{2}\beta_1=\frac{1}{6}\\
\frac{1}{24}\alpha_1+\frac{1}{6}\beta_{-1}-\frac{1}{6}\beta_1=\frac{1}{24}
\end{array}\right. \tag{3.4.7}$$

方程组(3.4.7)含有5 的方程, 5个待定系数. 如果选取前$p+1$ 个方程($p=1,2,3,4$) 求解得到的系数能保证差分格式的局部截断误差为$O(h^{p+1})$, 即多步法(3.4.4)为p 阶方法.

例如, 取$\alpha_0=1, \alpha_1=0, \beta_{-1}=\beta_0=\frac{1}{2}, \beta_1=0$, 满足方程组(3.4.7)的前三个方程, 代入(3.4.4)中可得

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}(f_n+f_{n-1}).$$

这就是梯形格式, 为二阶公式.

解方程组(3.4.7)的前五个方程, 得$\alpha_0=0, \alpha_1=1, \beta_{-1}=\beta_1=\frac{1}{3}, \beta_0=\frac{4}{3}$, 代入(3.4.4)中可得

$$u_{n-1}=u_{n-1}+\frac{h}{3}(f_{n-1}+4f_n+f_{n-1}) \tag{3.4.8}$$

上公式为二步四阶格式, 称之为$Milne$格式. 其截断误差为

$$R_{n+1}=-\frac{1}{90}h^5 u_n(5)+O(h^6).$$

可知, 二步方法至多是四阶的.

一般地, 对于线性k 步法(3.4.3), 利用$t=t_n$处$Taylor$ 展开式, 有

$$u_{n-1}=u_n-hu_n'+\frac{h^2}{2}u_n''-\frac{h^3}{6}u_n'''+\frac{h^4}{4!}u_n^{(4)}+\cdots+(-1)^p\frac{h^p}{p!}u_n^{(p)}+O(h^{p+1});$$

$$u_{n-2}=u_n-2hu_n'+2h^2u_n''-\frac{h^3}{3}u_n'''+\frac{2^4h^4}{4!}u_n^{(4)}+\cdots+(-2)^p\frac{h^p}{p!}u_n^{(p)}+O(h^{p+1});$$

$\cdots\ \cdots$

$$u_{n-k+1}=u_n-(k-1)hu_n'+\frac{(k-1)^2h^2}{2}u_n''+\cdots+(1-k)^p\frac{h^p}{p!}u_n^{(p)}+O(h^{p+1});$$

$$f_{n+1}=u'(t_{n+1})=u_n'+hu_n''+\frac{h^2}{2}u_n'''+\frac{h^3}{6}u_n^{(4)}+\cdots+\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}u_n^{(p)}+O(h^p);$$

$f_n=u_n'$;

$$f_{n-1}=u'(t_{n-1})=u_n'-hu_n''+\frac{h^2}{2}u_n'''-\frac{h^3}{6}u_n^{(4)}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}u_n^{(p)}+O(h^p);$$

$$f_{n-2}=u'(t_{n-2})=u_n'-2hu_n''+2h^2u_n'''-\frac{6h^3}{3}u_n^{(4)}+\cdots+(-2)^{p-1}\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}u_n^{(p)}+O(h^p);$$

$\cdots\ \cdots$;

$$f_{n-k-1}=u'(t_{n-(k-1)})=u_n'-(k-1)hu_n''+\frac{(k-1)^2h^2}{2}u_n'''+\cdots+(k-1)^{p-1}\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}u_n^{(p)}+O(h^p);$$

将它们都代入式(3.4.3), 并和(3.4.5)比较h 同次幂的系数, 有$\{\alpha_m\}, \{\beta_m\}$满足如下的一些方程:

$$\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}=1$$

$$-\alpha_1-2\alpha_2-\cdots-(k-1)\alpha_{k-1}+\beta_{-1}+\beta_0+\cdots+\beta_{k-1}=1$$

$$\alpha_1+2^2\alpha_2+\cdots+(k-1)^2\alpha_{k-1}-2(\beta_{-1}+\beta_1+\cdots+\beta_{k-1})=1$$

$\cdots\ \cdots$

$$\alpha_1+(-2)^p\alpha_2+\cdots+(1-k)^p\alpha_{k-1}+p[\beta_{-1}+(-2)^{p-1}\beta_1+\cdots+(1-k)^{p-1}\beta_{k-1}]=1$$

即:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\alpha_i=1\\ \sum\limits_{l=0}^{k-1}(-l)^m\alpha_l+m\sum\limits_{l=-1}^{k-1}(-l)^{m-1}\beta_l=1 \quad (m=1,2,\cdots,p)\end{cases} \tag{3.4.9}$$

基于$Taylor$ 展开, 利用待定系数法, 可以构造多种形式的线性多步法. 由方程组(3.4.9) 确定的线性多步格式, 其局部截断误差为

$$R_{n+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}[1-\sum_{l=1}^{k-1}(-l)^{p+1}\alpha_l-(p+1)\sum_{l=-1}^{k-1}(-l)^p\beta_l]u_n^{(p+1)}+O(h^{p+2})$$

由此可见, 该方法可以达到p 阶精度, 称为p 阶k 步法. 显然, p 的大小与k 有关.

取$k=4$, 若令$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_{-1}=0$, 由(3.4.8)可解得$\alpha_0=1, \beta_0=\frac{55}{24}, \beta_1=-\frac{59}{24}, \beta_2=\frac{37}{24}, \beta_3=-\frac{9}{24}$, 代入(3.4.3) , 得到$Adams$ 显式公式:

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{24}(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}) \tag{3.4.10}$$

差分格式(3.4.10)是四阶公式, 其局部截断误差为

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \frac{h^5}{5!}[1-\sum_{l=1}^{3}(-l)^5\alpha_l-5\sum_{l=-1}^{3}(-l)^4\beta_l]u_n^{(5)}+O(h^6) \\ &= \frac{251}{720}h^5u_n^{(5)}+O(h^6) \end{aligned}$$

取$k=3$, 若令$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_3=0$, 由(3.4.8)可解得$\alpha_0=1, \beta_{-1}=\frac{9}{24}, \beta_0=\frac{19}{24}, \beta_1=-\frac{5}{24}, \beta_2=\frac{1}{24}$, 代入(3.4.3) , 得到$Adams$ 隐式公式:

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{24}(9f_{n+1}+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2}) \tag{3.4.11}$$

差分格式(3.4.11)是四阶公式, 其局部截断误差为

$$R_{n+1}=-\frac{19}{720}h^5u_n^{(5)}+O(h^6).$$