直接法—单纯形法

寇彩霞

目录

一、引入

1. 问题

求解无约束优化问题

$$\min f(x) \tag{1}$$

导数不可求、非常难计算

2. 直接法

仅利用函数值，不需要导数的方法，也称无导数方法。单纯形法就是一种直接法。

二、单纯形法

1. 单纯形定义:

$\mathcal{R}^n$ 中$n+1$ 个点为顶点的凸包。$\mathcal{R}^2$中的单纯形是三角形。

2. 方法思想:

利用已有的单纯形去寻找一个函数值更小的点:

$$\begin{cases} \text{找到} \longrightarrow \text{构造新的单纯形} \\ \text{否则} \longrightarrow \text{缩小当前单纯形} \end{cases}$$

3. 基本步骤($n=2$):

- S1 给出三个点x^1, x^2, x^3，设$f(x^3) \geq f(x^2) \geq f(x^1)$
- S2 计算最坏点的反射点
- S3 确定新的单纯形，记为$< \cdot, \ \cdot, \ \cdot >$
- S4 判断终止准则

3. 基本步骤($n=2$):

S1 给出三个点x^1, x^2, x^3，设$f(x^3) \geq f(x^2) \geq f(x^1)$

S2 计算最坏点的反射点 $x = x^1 + x^2 - x^3$

S3 确定新的单纯形，记为$< \cdot, \quad \cdot, \quad \cdot >$

S4 判断终止准则

3. 基本步骤($n=2$):

S1 给出三个点x^1, x^2, x^3，设$f(x^3) \geq f(x^2) \geq f(x^1)$

S2 计算最坏点的反射点

S3 确定新的单纯形，记为$< \cdot,\ \cdot,\ \cdot >$

S4 判断终止准则

3. 基本步骤($n=2$):

S1 给出三个点x^1, x^2, x^3，设$f(x^3) \geq f(x^2) \geq f(x^1)$

S2 计算最坏点的反射点

S3 确定新的单纯形，记为$< \cdot, \quad \cdot, \quad \cdot >$

S4 判断终止准则

$$\begin{cases} \left(f(x^1) - f(x^2)\right)^2 + \left(f(x^1) - f(x^3)\right)^2 + \left(f(x^2) - f(x^3)\right)^2 \leq \epsilon \\ \|x^1 - x^2\| + \|x^1 - x^3\| + \|x^2 - x^3\| \leq \epsilon \end{cases}$$

3. 基本步骤($n=2$):

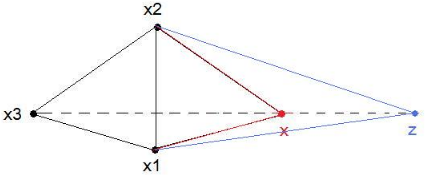
S1 给出三个点x^1, x^2, x^3，设$f(x^3) \ge f(x^2) \ge f(x^1)$

S2 计算最坏点的反射点

S3 确定新的单纯形，记为$<\cdot,\ \cdot,\ \cdot>$

S4 判断终止准则

3. 基本步骤($n=2$):

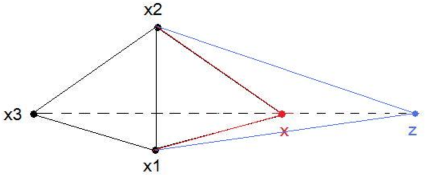


S3 确定新的单纯形，记为$<\cdot,\ \cdot,\ \cdot>$

- $f(x) \le f(x^1)$：考虑更远的一点z，比较x和z两点的函数值，
- $f(x^1) \le f(x) \le f(x^2)$：新的单纯形为$<x^1, x^2, x>$
- $f(x^2) \le f(x)$：缩小单纯形为

$$\begin{cases} <x^1, x^2, y>, \text{如果} f(y) \le f(x) \\ <x^1, s, t>, \quad \text{否则} \end{cases}$$

3. 基本步骤($n=2$):



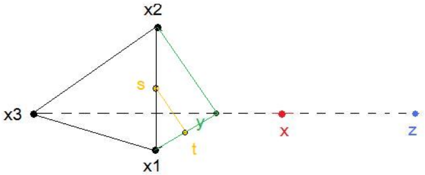
S3 确定新的单纯形，记为$<\cdot, \ \cdot, \ \cdot>$

- $f(x) \leq f(x^1)$：考虑更远的一点z, 比较x和z两点的函数值,
- $f(x^1) \leq f(x) \leq f(x^2)$：新的单纯形为$<x^1, x^2, x>$
- $f(x^2) \leq f(x)$：缩小单纯形为

$$\begin{cases} <x^1, x^2, y>, \text{如果} f(y) \leq f(x) \\ <x^1, s, t>, \quad \text{否则} \end{cases}$$

二、单纯形法

3. 基本步骤($n=2$):

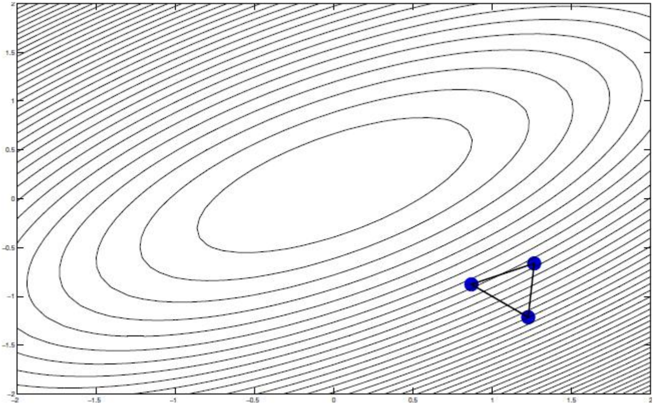


S3 确定新的单纯形，记为$<\cdot,\ \cdot,\ \cdot>$

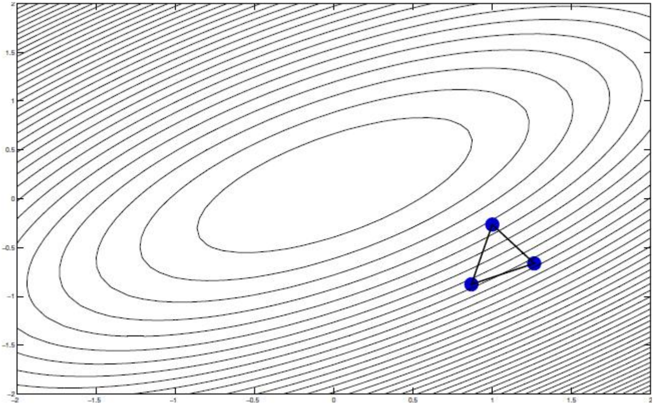
- $f(x) \le f(x^1)$：考虑更远的一点z，比较x和z两点的函数值，
- $f(x^1) \le f(x) \le f(x^2)$：新的单纯形为$<x^1, x^2, x>$
- $f(x^2) \le f(x)$：缩小单纯形为

$$\begin{cases} <x^1, x^2, y>, \text{如果} f(y) \le f(x) \\ <x^1, s, t>, \quad \text{否则} \end{cases}$$

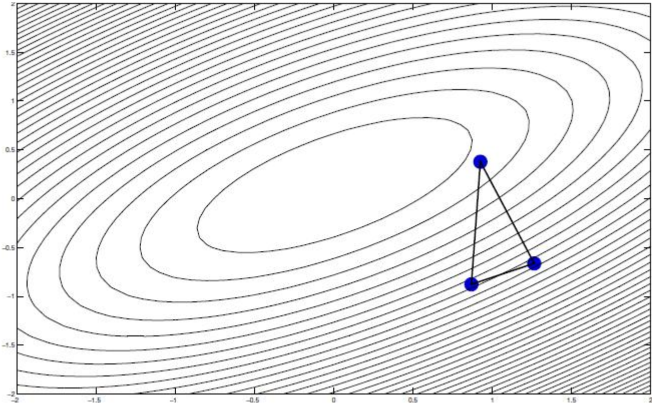
4. 演示:



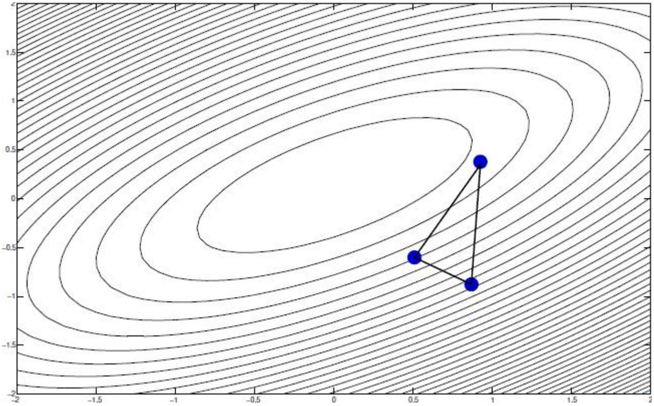
4. 演示:



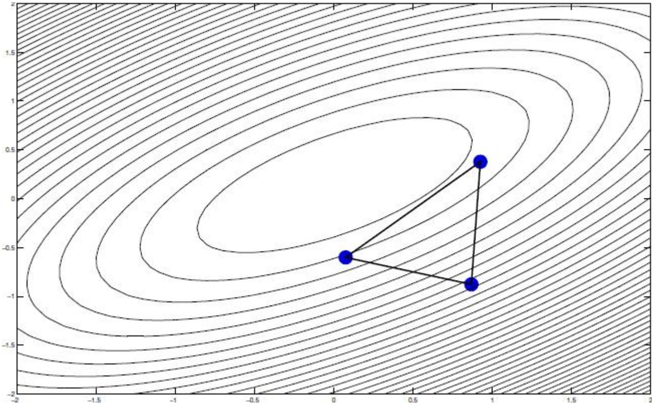
4. 演示：



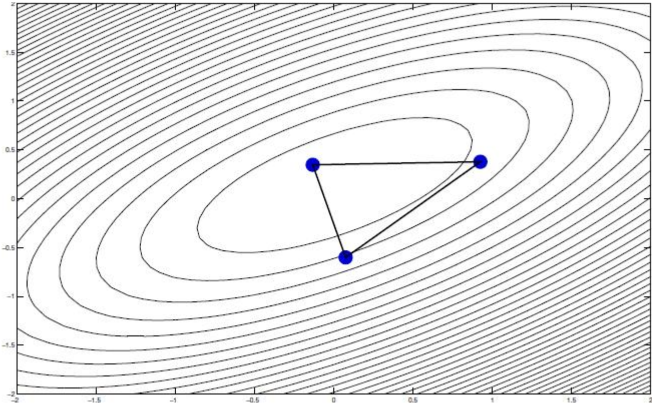
4. 演示：



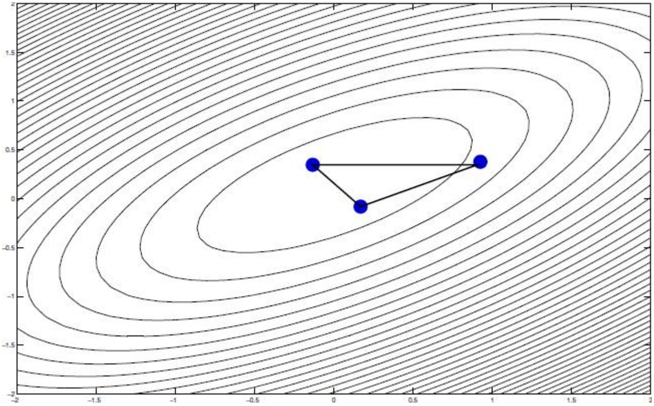
4. 演示：



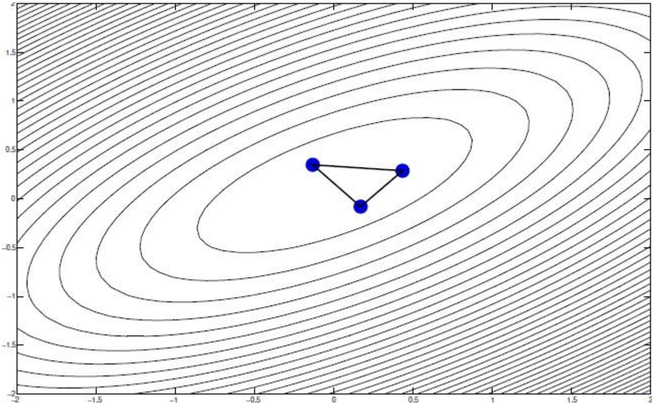
4. 演示:



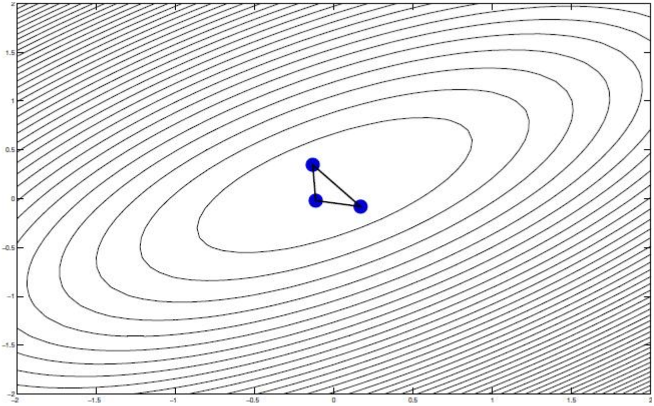
4. 演示：



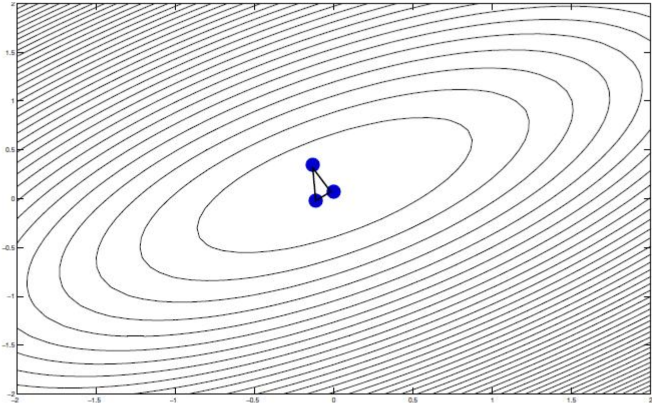
4. 演示：



4. 演示：



4. 演示:



5.优缺点

- 优点：
  - 实用，特别适用于函数值变化剧烈的问题
  - 如果允许一次替换多个顶点，适合并行，参（Dennis et al. 1991）
- 缺点：无很好的收敛理论，
  反例（McKinnon 1998）

三、总结及拓展

单纯形法:

1. 定义; 2. 方法思想; 3. 算法步骤; 4. 算法演示; 5. 优缺点

J. A. Nelder and R. Mead, *A simplex method for function minimization*, The Computer Journal, 7 (1965), pp. 308-313.

J. E. Dennis and V. Torczon *Direct search methods on parallel machines*, SIAM J. Optim., 1 (1991), pp. 448-474.

K. I. M. Mckinnon, *Convergence of the Nelder-Mead simplex method to a nonstationary point*, SIAM J. Optim., 9 (1998), pp. 148-158.