组合数学引论 第一章

习题解答

1， 设该组有 n 个人，第 i 个人认识的人数为 a_i，则 $0 \le a_i \le n-1$，如果任何两人认识的人数都不相等，则说明这些 a_i 取遍 0,1，…,n-1，不妨设为 $a_i=i-1$，即 $a_1=0$，第 1 个人不认识任何人，但 $a_n=n-1$ 说明他认识所有人，矛盾。故必有两个相等相等。

2， 设这 11 个数为 a_1，a2,….,a_{11},它们除以 10 的余数为 r_1，r_2,…,r_{11},且诸 ri 介于 0 至 9 之间，由鸽巢原理，必有两个相等，不妨设为 $r_i=r_j$，则 $10|a_i-a_j$，即它们的差是 10 的倍数。

3， 3. 设这 n+1 个数为 a_1，a_2,….,a_{n+1},它们除以 10 的余数为 r_1，r_2,…,r_{n+1},且诸 r_i 介于 0 至 n-1 之间，由鸽巢原理，必有两个相等，不妨设为 $r_i=r_j$，则 $n|a_i-a_j$，即它们的差是 n 的倍数。

4.令 b_1，b_2，… ，b_{77} 分别为这 11 周期间他每天下棋的次数，并作部分和

$a_1=b_1$，

$a_2=b_1+b_2$，

… ，

$a_{77}=b_1+b_2+ \dots +b_{77}$.

依题意，$b_i \ge 1 \quad (1 \le i < j \le 77)$，

$b_i+b_{i+1}+ \dots +b_{i+6} \le 12 \ (1 \le I \le 71)$，

故有 $1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_{77} \le 12 \cdot 11= 132$，

当 $1 \le k \le 21$ 时，

考虑数列 a_1，a_2，… ，a_{77} ； a_1+k，a_2+k，… ，$a_{77}+k$，

它们都在 1 与 132+k 之间，共有 154 项。由鸽巢原理，必有两项相等。由于 a_1，a_2，… ，a_{77} 这 77 项互不相等，a_1+k，a_2+k，… ，$a_{77}+k$ 这 77 项也互不相等，所以一定存在 $1 \le i < j \le 77$，使得 $a_j = a_i + 21$.

故而 $k= a_j - a_i$.

而选手不一定能在连续的一些天里下 22 盘。类似如上证明，我们可以构造出 a_1，a_2，… ，a_{77} ； a_1+k，a_2+k，… ，$a_{77}+k$ 这 154 项均不相等的情形。但同时，如果该棋手每天下一盘，则可轻易看出是可能的。

5, 推广：从 1 到 2*n* 的正整数中任取 *n*+1 个，则这 *n*+1 个数中至少有一对数，其中一个是另一个的倍数.

证明：设这 *n*+1 个数是 $a_1,a_2,\dots,a_{n+1}$ ，对此序列中的每一个数去掉一切 2 的因子，直至 剩下一个奇数为止. 例如，68＝2×2×17，则去掉 2×2，只留下 17. 那么我们会得到一个由奇数组成的序列 $b_1,b_2,\dots,b_{n+1}$.

1 到 2*n* 之间只有 *n* 个奇数，故序列{ $b_1,b_2,\dots,b_{n+1}$}中至少有两个是相同的. 设 $b_i = b_j = b$，则 $a_j = 2^p b_i$， $a_j = 2^q b_j$,由于 $a_i \ne a_j$，显然，其中一个是另一个的倍数.

6. 首先，运用抽屉原理将整数 1 至 200 按照 $1*2^n$，$3*2^n$，$5*2^n$，… ，197，199

的形式分成 100 个抽屉，从 1 到 200 中任取 100 个，其中有一数 a 小于 16，假设没有两个构成整除关系，首先按抽屉原理，这 100 个数必须为每个抽屉中仅取且必取 1 个数，否则假设不成立，其次，1、当 a 为小于 16 的奇数时（比如 15），显然有数与其构成整数关系（比如抽屉 15*11=165）结论成立

2、当此数为 $1*2^n$ 时，显然 $n≤3$,考虑抽屉 $3*2^{n1}$，$9*2^{n2}$，$27*2^{n3}$，$81*2^{n4}$，显然若不存在整除关系，则 $n_4 < n_3 < n_2 < n_1 < 3$，即四个数只能在 0、1、2 三个数中选择，此时产生矛盾，必存在两数整除关系;

3、更一般的，当此数为非 2 的幂的偶数时，可写成 $b*2^n$，b 为奇数，且 $1<b≤7$，$n≤2$，考虑抽屉 $3b*2^{n1}$,$9b*2^{n2}$,$27b*2^{n3}$(因 b≤7,27b<200), $n_3<n_2<n_1<2$，即三个数只能在 0、1 两个数中选择，此时产生矛盾，

综上，假设不成立，必存在两数整除关系。

7. 取出 101---200 即可。

8，设此 52 个整数为 $a_1,a_2,\ldots,a_{52}$.被除的余数分别为 $r_1,r_2,\ldots,r_{52}\in\{0,1,\ldots,99\}$.构造鸽子巢为

{0},{1,99},{2,98},{3,97},…,{49,51},{50}

共 51 个，这 52 个余数必有 2 个落入同一个巢，比如说是 r_i, r_j,若它俩相等则 a_i-a_j 被 100 整除，否则 $r_i+r_j=100$，此时 a_i+a_j 被 100 整除。

9，这里需假设任何三点不共线。

设这 13 个点的坐标分别为{（x_1,y_1）,(x_2,y_2)….,(x_{13},y_{13})}，从中任取三点（x_i,y_i）,(x_j,y_j)….,(x_k,y_k)为顶点，形成的三角形的重心坐标为($(x_i+x_j+x_k)/3,(y_i+y_j+y_k)/3$)注意到 x_i，y_i 被 3 除以后的余数为 0,1,2， 根据鸽巢原理，这 13 个点必有至少 $\lceil 13/3\rceil=5$ 个点，其 x 坐标被 3 除以后的余数相同，不妨设为{(x_1,y_1),(x_2,y_2)….,(x_5,y_5)}，

由于这些 xi 除以 3 的余数相同，故从中任取 3 个，其和被 3 整除，再注意到对 y1，y2,…,y5 这 5 个数被 3 除以后的余数为 0,1,2 之一，若其中有 3 个被 3 整除后的余数相同，则取此 3 数，其对应的点构成的三角形重心为整点，否则余数分别为 0,1,2 的数每种至多 2 个，即余数为 0,1，和 2 的都会出现，则取这样的三个 yi，其除以 3 后的余数分别是 0,1,2 则其和除以 3 余数为零，从而对应点组成的三角形满足要求。

10，可以，证明如下：不妨把坐标除以 3，则坐标形式必为（0,0），(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2).

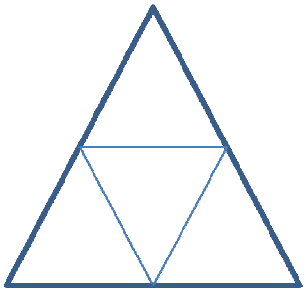
考虑 x 坐标（除以 3 以后）都为 i 的点其数量若大于等于 5，则由上题的证明知道结论为真，故 x 坐标（除以 3 以后）都为 i 的点其数量最多为 4，不妨设 0 时最多，不妨设为（0,0），（0,1）各两个（因若（0,0），(0,1),(0,2),均有，则显然则 3 个点的重心为整点），考虑 x 坐标为 1 和 2 的情形，根据鸽巢原理必有一个的点数至少为 3，不妨设为 x 坐标为 1 的，其三个点的坐标中必是{（1,0)，（1,1）(1,2)}中取 2，不能同时都出现，否则此三点符合要求，不妨设为{（1,0)，（1,1）}则考虑 x 坐标为 2 的点至少一个，若其坐标为（2,0)，则{（0,0）(1,0)，（2,0）}符合要求，若其坐标为（2,1)，则{（0,1）(1,1)，（2,1）}符合要求，若其坐标为（2,2)，则{（0,0）(1,1)，（2,2）}符合要求，故得证。

11. 有理数的分子跟分母都是整数，并且分母不等于零，十进制数展开式相当于一个整数除以另外一个整数 n，所得余数所有可能值有 n－1 个，也就是说最多除 n+1 次余数就会有重复，当余数重复时，就会产生循环。

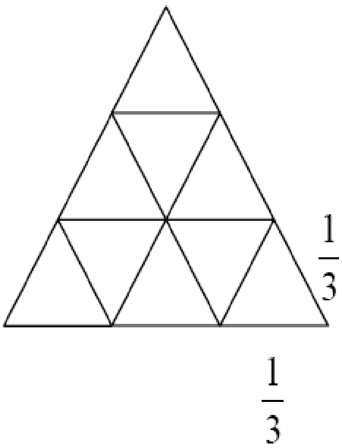
12，做如下数列 7,77,777,7777，…,即第 n 项由 n 个 7 组成，

则这些数除以 N 以后的余数为 0,1，…,n-1，取上述数列的前 N+1 项，则由鸽巢原理，必有两项除以 N 后的余数相等，从而它俩的差是 N 的倍数，而这两数的差是由 0 和 7 组成。

13，将图形做如下划分即可

（1）

（2）



（3）$m_n=n^2+1$,将边长为 1 的正三角形每边 n 等分然后做过分点做平行于边的连线即形成 n^2 个边长为 1/n 的小正三角形.

14, 令 S_i 是第 1 天到第 i 天复习的总时间数(i=1,2,…,37) ，则 $1\le S_1<S_2<\ldots<S_{37}\le 60$，

作序列 $S_1, S_2, \ldots, S_{37}, S_1+13, \ldots, S_{37}+13$.共 74 项．其中最大项 $S_{37}+13\le 60+13=74$

由鸽巢原理，必有两项相等．而且必是前段中某项与后段中某项相等．设

$S_k=S_h+13$，$k>h$　$S_k-S_h=13$

即从第 h+1 天道到第 k 天复习总时间恰好为 13 小时。

15. 选取的 n+1 个数必有两个数相邻，相邻的两个数的最大公因子为 1.

16，如取 m=4，n=6，a=1，b=2，若存在 x=pm+a=qn+b,即有

4p+1=6q+2，这是不可能的，因为左边为奇数，右边为偶数。

17，证明　对 $a+b$ 作归纳.

当 $a+b\le 5$ 时,a=2 或 b=2,故只要证明 r(2,n)=n 即可.对 n 个顶点的完全图,红蓝二色进行边着色，要么有一条红色边，要么全是蓝色边，前者即红色 K2，后者蓝色 Kn，故得证。

假设对一切满足 $5\le a+b<m+n$ 的 a,b，定理成立，由定理 1.3.1 及归纳假设，有

$r(m,n)\le r(m,n-1)+r(m-1,n)\le$

$$\binom{m+n-3}{m-1}+\binom{m+n-3}{m-2}=\binom{m+n-2}{m-1}$$

所以，对任意的正整数 $a\ge 2$，$b\ge 2$，定理的结论成立

18，见图

19，证：用反证法．设命题不真．

即存在划分 $P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6=[1,1978]$，$P_i$ 中不存在一个数是 P_i 中两数之差，$i=1,2,3,4,5,6$

因 $\lfloor(1978-1)/6\rfloor+1=330$，故有一子集，其中至少有 330

个数，设这 330 个数从小到大为 $a_1,\dots,a_{330}$ ．

不妨设 $A=\{a_1,\dots,a_{330}\}\subseteq P_1$。

令 $b_i=a_{i+1}-a_1$，$i=1,\cdots,329$。

设 $B=\{b_1,\cdots,b_{329}\}$，$B\subseteq[1,1978]$。

由反证法假设，$B\cap P_1=\phi$。因而

$$B\subset(P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6)$$

因为 $\lfloor(329-1)/5\rfloor+1=66$，不妨设 $\{b_1,\cdots,b_{66}\}\subseteq P_2$，

令 $c_i=b_{i+1}-b_1$，$i=1,\cdots,65$

设 $C=\{c_1,\cdots,c_{65}\}$，$C\subset[1,1978]$

由反证法假设，$C\cap(P_1\cup P_2)=\phi$，故有

$$C\subset(P_3\cup P_4\cup P_5\cup P_6)$$

因为 $\lfloor(65-1)/4\rfloor+1=17$，不妨设 $\{c_1,c_2,\dots,c_{17}\}\subset P_3$

余下与 20 题同，见 20 题解答。

20，证：用反证法．设命题不真．

即存在划分 $P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4=[1,67]$，$P_i$ 中不存在一个数是 P_i 中两数之差，$i=1,2,3,4$.

因 $\lfloor(67-1)/4\rfloor+1=17$，故有一子集，其中至少有 17

个数，设这 17 个数从小到大为 $a_1,\dots,a_{17}$ ．

不妨设 $A=\{a_1,\dots,a_{17}\}\subseteq P_1$。

令 $b_i=a_{i+1}-a_1$，$i=1,\cdots,16$。

设 $B=\{b_1,\cdots,b_{16}\}$，$B\subseteq[1,67]$。

由反证法假设，$B\cap P_1=\phi$。因而

$$B\subset(P_2\cup P_3\cup P_4)$$

因为 $\lfloor(16-1)/3\rfloor+1=6$，不妨设 $\{b_1,\cdots,b_6\}\subseteq P_2$，

令 $c_i=b_{i+1}-b_1$，$i=1,\cdots,5$

设 $C=\{c_1,\cdots,c_5\}$，$C\subset[1,67]$

由反证法假设，$C\cap(P_1\cup P_2)=\phi$，故有

$$C\subset(P_3\cup P_4)$$

因为 $\lfloor(5-1)/2\rfloor+1=3$，不妨设 $\{c_1,c_2,c_3\}\subset P_3$

令 $d_i=c_{i+1}-c_1$，$i=1,2$

设 $D=\{d_1,d_2\}$，$D\subset[1,67]$。

由反证法假设，$D\cap(P_1\cup P_2\cup P_3)=\phi$，因而

$$\mathbf{D} \subset \mathbf{P}_4$$

由反证法假设，

$$\boldsymbol{d_2 - d_1 \notin \mathrm{P}_1 \cup \mathrm{P}_2 \cup \mathrm{P}_3} \text{ 且 } \boldsymbol{d_2 - d_1 \notin \mathrm{P}_4},$$

故 $\boldsymbol{d_2 - d_1 \notin [1, 67]}$，

但显然 $\boldsymbol{d_2 - d_1 \in [1, 67]}$**，矛盾。**

21，q3，证明与定理 1.4.6 类似，故略

22. 把每个三角形的最短边染成红色，剩下的所有边染成白色，则由 Ramsey 定理可知，必出现同色三角形。又每个三角形都有最短边，即每个三角形都有红色边。于是上述同色三角形是红色的，则它的最长边也是红色的，所以原命题得证。