第一节 波动方程的差分逼近 – 微分方程数值解

笔记本： 我的第一个笔记本
创建时间： 2017/6/12 12:22
URL： https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52846_1

第一节 波动方程的差分逼近

学习指导：E 双曲方程 第一节

本节介绍波动方程的差分逼近。

作业&思考：E 双曲方程 第一节

讲义：E 双曲方程 第一节

§6.1. 波动方程的差分逼近

6.1.1 波动方程及其特征

最简单**模型**（**波动方程初值问题**）

其中 $a>0$ 是常数， (1.1) 相应的**特征方程**为

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - a^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ **特征方向：**

$$\frac{dt}{dx} = \pm\frac{1}{a}$$

$\Rightarrow$ **两族（特征）直线：**

$$x - at = c_1, \quad x + at = c_2$$

利用上述变量代换

方程（1.1）变为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c_1 \partial c_2} = 0$$

方程（1.1）的通解：

$$u = f_1(c_1) + f_2(c_2) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \qquad (1.3)$$

利用（**1.3**）和初值条件（**1.2**）可导出模型问题的解析解表示式

d' Alembert 公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi_0(x-at)+\phi_0(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\phi_1(\xi)d\xi \qquad (1.4)$$

证明：由初值条件（1.2）和（1.3）有：

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\phi_0(x), & (*1) \\ -af_1'(x)+af_2'(x)=\phi_1(x), & (*2) \end{cases}$$

分别作 $a\cdot(*1)'+(*2)$，以及 $a\cdot(*1)'-(*2)$，得

$$\begin{cases} af_2'(x)=\frac{1}{2}(a\phi_0'(x)\ +\phi_1(x)\ ) \\ af_1'(x)=\frac{1}{2}(a\phi_0'(x)\ -\phi_1(x)\ ) \end{cases}$$

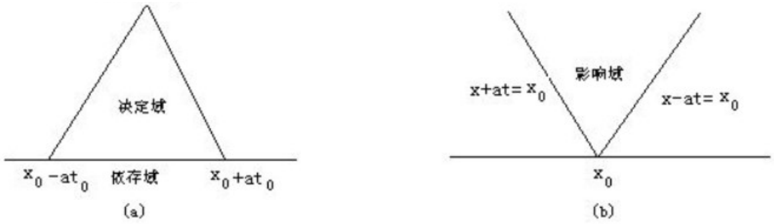
$$\begin{cases} f_1(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x(a\phi_0'(\xi)\ -\phi_1(\xi)\ )\mathrm{d}\xi+f_1(0) \\ f_2(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x(a\phi_0'(\xi)\ +\phi_1(\xi)\ )\mathrm{d}\xi+f_2(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x)=\frac{1}{2}(\phi_0(x)-\phi_0(0))-\frac{1}{2a}\int_0^x\phi_1(\xi)\ \mathrm{d}\xi+f_1(0) \\ f_2(x)=\frac{1}{2}(\phi_0(x)-\phi_0(0))+\frac{1}{2a}\int_0^x\phi_1(\xi)\ \mathrm{d}\xi+f_2(0) \end{cases}$$

(注意： $f_1(0)+f_2(0)=\phi_0(0)$)

$$\begin{aligned} u(x,t)&=f_1(x-at)+f_2(x+at) \\ &=\frac{1}{2}[\phi_0(x-at)+\phi_0(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\phi_1(\xi)d\xi \end{aligned} \qquad (1.5)$$

(x_0, t_0)



依存域: 在点(x_0,t_0)处的解仅依赖于初始函数在该（局部）区间上的值. (见上图(a))

说明了双曲型方程的重要特征：解的局部依赖性；

利用该特性知：$t=t_n$时间层上的某个空间点x_j的数值解只与$t=t_{n-1}$上的x_j的小邻域上的值有关，并且时间步长越小，该小邻域就越小.

决定域：依存域决定该三角域中的解函数的值. (见上图(a))

影响域: 初始函数在点x_0处的值影响该区域中的解函数的值. (见上图(b))

点x_0处的数值解，随着时间t的增大，在t时间层的影响区间越来越大. 大家设想，将一块石头投入水中时，水窝随着时间的增大，越来越大. 所以波动方程反映了水波的特性.

从 **d' Alembert 公式**还可见：解函数关于x变量的光滑性较初始函数ϕ_1高 (因为解的表达式中出现的是关于ϕ_1的积分项).

6.1.2 显格式

（1）对求解域作**网格剖分**：

$$\text{节点：}\quad x_j = jh, \quad j=0,\pm1,\cdots$$

$$t_n = n\tau, \quad n=0,1,\cdots$$

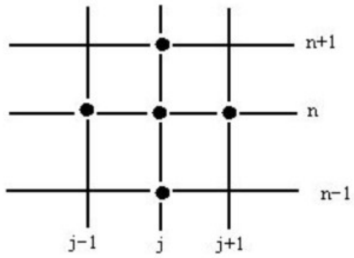
空间和时间步长：$h,\quad \tau$

（2）在节点(x_j,t_n)处

偏导数离散：二阶中心差商.

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2}=a^2\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2} \tag{1.6}$$

$$j = 0, \pm 1, \cdots; n = 0, 1, \cdots$$



局部截断误差：$O(\tau^2 + h^2)$

利用初始条件可导出在**前两个时间层**上的离散格式（P.160）：

$$u_j^0 = \phi_0(x_j), \qquad (1.8)$$

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \phi_1(x_j) \qquad (1.9)$$

相应局部截断误差为$O(\tau)$

改进方案：

$$\frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\tau} = \phi_1(x_j) \qquad (1.9)'$$

在（1.6）中令$n = 0$，

$$\frac{u_j^1 - 2u_j^0 + u_j^{-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{h^2}$$

利用(1.9)', 消去u_j^{-1}，得到格式

$$u_j^1 = \frac{r^2}{2}\left[\varphi_0(x_{j-1}) + \varphi_0(x_{j+1})\right] + (1 - r^2)\varphi_0(x_j) + \tau\varphi_1(x_j) \qquad (1.10)$$

其局部截断误差为$O(\tau^2 + h^2)$

上述格式可用于求解**混合问题(初边值问题)**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \ x < 0 < L, \ 0 < t \le T \\ u(x,0) = \phi_0(x), \quad u_t(x,0) = \phi_1(x), \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(t). \end{cases} \qquad (1.13)$$