第一节 微分方程模型 – 微分方程数值解

笔记本：	我的第一个笔记本
创建时间：	2017/5/9 15:38
URL：	https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52806_1

第一节 微分方程模型

学习指导：A 课程导论 第一节

内容介绍：
本小节主要介绍一些微分方程模型。
给出了本课程要讨论的常微分方程系统，椭圆型偏微分方程系统，抛物型偏微分方程系统和双曲型偏微分方程系统的例子。

学习方法： 这一节内容以自学为主，并完成相应的课后作业。课堂上我们将结合微分方程的定义和分类进行简单介绍。

讲义：A 课程导论 第一节

微分方程的引例

1.1.1 目标跟踪问题

设位于坐标原点的甲舰向位于 x 轴上点 A(1, 0)处的乙舰发射导弹，导弹头始终对准乙舰。如果乙舰以最大的速度 v0(是常数)沿平行于 y 轴的直线行驶，导弹的速度是 5v0，求出导弹运行的曲线方程，并指出乙舰行驶多远时，导弹将它击中。

解

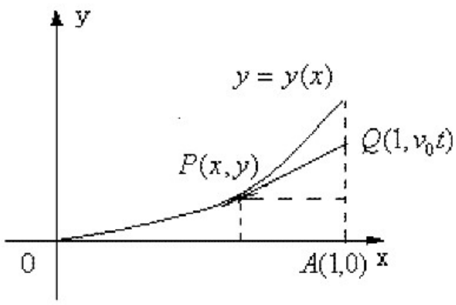

图 1.1.1

假设导弹在 t 时刻的位置为 P(x(t), y(t))，乙舰位于 $Q(1,v_0t)$．由于导弹头始终对准乙舰，故此时直线 PQ 就是导弹的轨迹曲线弧 OP 在点 P 处的切线，即有

$$y' = \frac{v_0 t - y}{1-x} \quad 即 \quad v_0 t = (1-x)y' + \qquad (1.1.1)$$

又根据题意，弧曲线 OP 的长度为 $|AQ|$ 的 5 倍， 即

$$\int^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = 5v_0 t$$

(1.1.2)

由(1.1.1)和(1.1.2)，消去 t 整理得到模型：

$$(1-x)y''=\frac{1}{5}\sqrt{1+y'^2}$$

由于甲舰是位于坐标原点，所以初值条件为：

$$y(0)=0;\quad y'(0)=($$

由此可得，导弹的轨迹曲线满足如下的微分初值问题：

$$\begin{cases}(1-x)y''=\frac{1}{5}\sqrt{1+y'^2}\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases} \tag{1.1.3}$$

问题(1.1.3) 中的方程含有未知函数的二阶导数，且自变量只有一个，为二阶常微分方程。由积分的方法可以求出该方程的通解，通解中由两个待定常数，而给定的两个初始条件又称为定解条件，由定解条件可以确定待定常数，从而得到曲线方程。这里我们略去求解过程，解析求解得到的曲线方程为：

$$y=-\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}}+\frac{5}{24} \tag{1.1.4}$$

已知乙舰是以最大的速度沿平行于 y 轴的直线行驶，要回答导弹击中乙舰时它行驶多远的问题，只要求解出(1.1.4)所表示的曲线与直线 x=1 的交点即可。

将 x=1 代入式(1.1.4)，可求出

$$y(1)=5/24$$

即乙舰行使到 5/24≈0.2083 时被集中，此时，乙舰逃跑的时间为 5/(24 v0)。

1.1.2 平面波的反射问题

设一均匀平面波入射到一金属衬底的非均匀介质片上，介质片的厚度为 L，相对介电常数和磁导率分别为 ε_r 和 μ_r .这两个介质参数随着 x 变化。周围媒质为自由空间，即 $\varepsilon_r=\mu_r=1$。试从 Maxwell 方程组出发，导出该金属衬底介质片对平面波反射的电磁场满足的方程。

解：由于场和有关的媒质不随 z 坐标变化，在没有外加电流和自由电荷的情况下，由时谐场的 Maxwell 方程组：

$$\begin{cases}\nabla\times E+i\omega B=0\\ \nabla\times H-i\omega D=0\end{cases}$$

以及本构关系

$$\begin{cases}D=\varepsilon_0\varepsilon_r E\\ B=\mu_0\mu_r H\end{cases}$$

可以推导出电场和磁场的 z 分量满足如下的 Helmholtz 方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial}{\partial y}\right)+k_0^2\varepsilon_r\right]E_z=0$$

以及

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial}{\partial y}\right)+k_0^2\mu_r\right]H_z=0$$

这里，E 为电场强度，D 为电通量密度，H 为磁场强度，B 为磁通量密度。电常数 ε_0 和磁常数 μ_0 分别为自由空间的介电常数和磁导率。

考虑如题描述的金属衬底介质片对平面波反射问题，众所周知，任意平面波均能分解成只有 z 方向电场 E_z 的极化平面波和只有 z 方向磁场的 H_z 的极化平面波。所以，只要考虑这两种情形就够了。

对于 E_z 极化情形，入射波能够表示成为

$$E_z^{inc}(x,y)=E_0e^{i(k_0x\cos\theta-k_0y\sin\theta)}$$

上式中，E_0 是表示入射场大小的常数，θ 是入射角（如图 1.1.2 所示）。

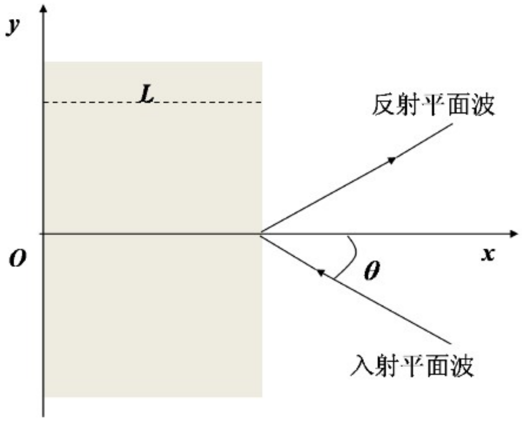

图 1.1.2

在金属衬底介质片对平面波反射问题中，为了满足垂直于 x 轴界面处的场连续性方程，总场必须有一共同因子 $e^{-ik_0y\sin\theta}$。因此，支配电场 E_z 的标量 Helmholtz 方程退化为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+k_0^2(\varepsilon_r-\frac{1}{\mu_r}\sin^2\theta)E_z=0 \tag{1.1.5}$$

在边界 $x=0$ 处，E_z 满足

$$E_z\big|_{x=0}=0 \tag{1.1.6}$$

在边界 $x=L$ 处，由于

$$E_z\big|_{x=L-0}=E_z\big|_{x=L+0},\frac{1}{\mu_r}\frac{dE_z}{dx}\bigg|_{x=L-0}=\frac{1}{\mu_r}\frac{dE_z}{dx}\bigg|_{x=L+0}$$

可得在介质片表面内侧成立如下的边界条件

$$\left[\frac{1}{\mu_r}\frac{dE_z}{dx}+ik_0\cos\theta E_z(x)\right]_{x=L-0}=2ik_0\cos\theta E_0e^{ik_0L\cos\theta} \tag{1.1.7}$$

综上所述，对于 E_z 极化情形，电场 E_z 满足由(1.1.5)、(1.1.6)和(1.1.7)确定的模型问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\mu_r}\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)+k_0^2(\varepsilon_r-\dfrac{1}{\mu_r}\sin^2\theta)E_z=0,\\ E_z\big|_{x=0}=0,\\ \left[\dfrac{1}{\mu_r}\dfrac{dE_z}{dx}+ik_0\cos\theta E_z(x)\right]_{x=L-0}=2ik_0\cos\theta E_0e^{ik_0L\cos\theta}\end{cases} \tag{1.1.8}$$

问题(1.1.8)为一维的两点边值问题。

同样，对于 H_z 极化情形，入射波能够表示成为

$$H_z^{inc}(x,y)=H_0e^{i(k_0x\cos\theta-k_0y\sin\theta)}$$

的形式，由此总磁场满足如下的 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+k_0^2(\mu_r-\frac{1}{\varepsilon_r}\sin^2\theta)H_z=0 \tag{1.1.9}$$

以及边界条件

$$\left.\frac{dH_z}{dx}\right|_{x=0}=0 \tag{1.1.10}$$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{dH_z}{dx}+ik_0\cos\theta H_z(x)\right]_{x=L-0}=2ik_0\cos\theta H_0e^{ik_0L\cos\theta} \tag{1.1.11}$$

磁场 H_z 满足由(1.1.9)、(1.1.10)和(1.1.11)确定的模型问题，该问题为一维的两点边值问题。

1.1.3 两端固定弦的振动问题

给定一根两端固定的拉紧的均匀柔软的弦，其长为 l，其线密度为 ρ，在垂直于 x 轴的外力（设 $f(x,t)$ 是时刻 t 在 x 处的单位长度上的力）作用下在平衡位置作微小的横振动，如图 1.1.3 选择坐标系，用 $u(x,t)$ 表示弦上各点在时刻 t 沿垂直于 x 方向的位移，求出 $u(x,t)$ 应满足的方程。

解：弦上各点在时刻 t 沿垂直于 x 方向的位移函数 $u(x,t)$ 所满足的方程可基于**能量守恒定律**用微元法求出。

在弦上任取一弦段 $(x,x+\Delta x)$，其弧长约为 Δx。弦在 x 点处的张力记为 $T(x)$，其方向沿着弦在 x 点处的切线方向，在 $x+\Delta x$ 点处的张力记为 $T\left(x+\Delta x\right)$，其方向沿着弦在 $x+\Delta x$ 点处的切线方向。α_1 表示 $T(x)$ 与水平线的夹角，α_2 表示 $T\left(x+\Delta x\right)$ 与水平线的夹角。

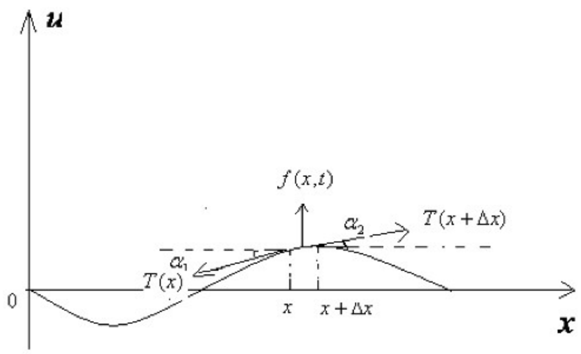

图 1.1.3

在 x 点处作用于弦段 $(x,x+\Delta x)$ 的张力在 x 、u 两个方向上的分力分别为 $-T(x)\cos\alpha_1$, $-T(x)\sin\alpha_1$；在 $x+\Delta x$ 点处作用于弦段 $(x,x+\Delta x)$ 的张力在 x 、u 两个方向上的分力分别为 $-T(x+\Delta x)\cos\alpha_2$, $-T(x+\Delta x)\sin\alpha_2$；由于弦只在 x 轴的垂直方向作横振动，所以水平方向的合力为零。

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = 0 \tag{1.1.12}$$

由于弦仅在平衡位置作微小振动，α_1 和 α_2 近似为 0，从而 $\cos\alpha_1 \approx 1$, $\cos\alpha_2 \approx 1$；于是（1.1.5）变为

$$T(x+\Delta x) - T(x) = 0 \tag{1.1.13}$$

故 $T(x+\Delta x) = T(x) = T$ 为常数。

利用“$\sin t \sim \tan t (t \to 0)$”，有

$$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$

所以张力在 x 轴的垂直方向的合力为

$$T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1 + \int_x^{x+\Delta x} f(x,t)dx$$

$$= T(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) + \int_x^{x+\Delta x} f(x,t)dx$$

从而在时间段 $(t,t+\Delta t)$ 中该合力产生的冲量（**对应外力和体力所作的的功**）为

$$\int_t^{t+\Delta t}\left[T(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) + \int_x^{x+\Delta x} f(x,t)dx\right]dt$$

令一方面，在时刻 t 和时刻 $t+\Delta t$，弦段 $(x,x+\Delta x)$ 的动量分别为

$\int_x^{x+\Delta x}\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx$，$\int_x^{x+\Delta x}\rho\frac{\partial u(x,t+\Delta t)}{\partial t}dx$.所以，从时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$，弦段 $(x,x+\Delta x)$ 的动量增加量（对应动能）为

$$\int_x^{x+\Delta x}\rho\left[\frac{\partial u(x,t+\Delta t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]dx$$

由于在时间段 $(t,t+\Delta t)$ 中的冲量应等于动量的增加量（对应物理学基本原理：**能量守恒定律**），故

$$\int_x^{x+\Delta x}\left[T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)+\int_x^{x+\Delta x}f(x,t)dx\right]dt$$
$$=\int_x^{x+\Delta x}\rho\left[\frac{\partial u(x,t+\Delta t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]dx$$

从而有

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x}\left[T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+f(x,t)\right]dtdx=0 \tag{1.1.14}$$

由 $\Delta x,\Delta t$ 的任意性知，（0.3）中的被积函数必为零，从而得到

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+f(x,t)=0 \tag{1.1.15}$$

记 $\frac{T}{\rho}=a^2$ ，$\frac{f(x,t)}{\rho}=\tilde{f}(x,t)$ ，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\tilde{f}(x,t) \tag{1.1.16}$$

1.1.4 弦的平衡问题

以弦振动方程为基础，我们可以研究两端固定弦的平衡问题。从数学上来说，弦平衡状态 $u(x)$ 为弦振动方程的稳态解。

设方程（1.1.16）有稳态解 $u(x)$，即当 $t\to\infty$，有

$$u(x,t)\to u(x)$$

即有

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\to 0,\ \ t\to\infty$$

这样，若令 $t\to\infty$，则由波动方程（1.1.16），有如下弦平衡方程

$$-a^2\frac{d^2u(x)}{dx^2}=\tilde{f}(x)$$

其中

$$\tilde{f}(x)=\lim_{t\to\infty}\tilde{f}(x,t)$$

上式等价于

$$-T\frac{d^2u(x)}{dx^2}=f(x) \tag{1.1.17}$$

这里，$f(x)=\rho\tilde{f}(x)$ 其中 $\tilde{f}(x)$ 是在 x 处的单位质量所受的力。

若设弦的一端位于坐标系的原点，x 轴的正项指向弦的另一端。显然，弦平衡问题满足如下的边值条件：

$$\begin{cases} u(0)=0 \\ u(l)=0 \end{cases} \qquad (1.1.18)$$

即弦平衡问题的位置函数 $u(x)$ 由(1.1.17)和(1.1.18)确定，该模型问题也为两点边值问题。

热传导问题

考虑在物体 G 中任取一封闭曲面 S（如图 1.1.4），以函数 $u(x,y,z,t)$ 表示物体 G 在位置 (x,y,z) 及时刻 t 的温度。求 $u(x,y,z,t)$ 满足的微分方程系统。

解：依据 Fourier 热传导定律。在无穷小时段 dt 内流过物体的一个无穷小面积 dS 的热量 dQ 与时间 dt，曲面面积 dS，以及物体温度 u 沿曲面 dS 的法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 三者成正比，即

$$dQ=-k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt$$

其中 $k=k(x,y,z)$ 是物体在点 (x,y,z) 处的热传导系数，取正值。负号的出现是由于热量的流向和温度梯度的方向（$gradu$）相反。

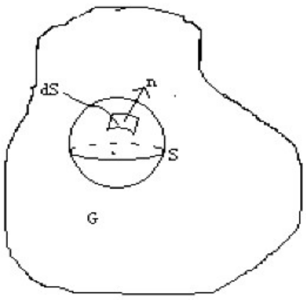

图 1.1.4

对于物体 G 内任取一闭曲面 S，它所包括的空间区域为 V，则从时刻 t_1 到时刻 t_2 经曲面流出的热量为

$$Q_1=-\int_{t_2}^{t_1}[\iint_s k\frac{\partial u}{\partial n}dS]dt$$

设物体的比热为 c，密度为 ρ，则无穷小体积 $dV=dxdydz$ 的温度由 $u(x,y,z,t_1)$ 升高到 $u(x,y,z,t_1)$ 所需的热量为

$$dQ=c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]dV$$

因此，使 V 内各点温度由 $u(x,y,z,t_1)$ 变化为 $u(x,y,z,t_1)$ 所需热量为

$$Q_2=\iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]dV$$

根据热量守恒定律，有

$$Q_2=-Q_1$$

即

$$\iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]dV=\int_{t_2}^{t_1}\iint_s k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt$$

假设函数$u(x,y,z,t)$关于x,y,z具有二阶连续偏导数，关于t具有一阶连续偏导数，则由$Gauss$公式可得

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z})]dVdt=0$$

由于时间间隔$[t_1,t_2]$及区域V是任意取的，且被积函数是连续的，因此在任意时刻在G内任意一点都有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z}) \quad (1.1.19)$$

方程（1.1.19）称为非均匀的各向同性体的热传导方程。如果物体是均匀的，此时k,c及ρ均为常数，令$a^2=\frac{k}{c\rho}$，则方程（1.1.19）化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \quad (1.1.20)$$

若考虑物体内有热源，其热源密度为$F(x,y,z,t)$，则有热源的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})+f(x,y,z,t) \quad (1.1.21)$$

其中$f=\frac{F}{c\rho}$.

假设所考虑的物体是一根细杆（或一块薄板）或者温度u只与x,t（或x,y,t）有关，则（1.1.20）就变成一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.22)$$

和二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \quad (1.1.23)$$