# 北京邮电大学 2005——2006 学年第一学期

# 《数学模型》期末考试试题

班级：___________学号（学校统一六位）：_____________姓名：_______________

## 一.　　综合建模（以下二题任选其一）

### 农民下种问题

**问题一**、在播种诸如小麦、高粱等农作物，单位面积的土地的下种量既不能太多，也不能太少。一方面，因为单株作物的结果是有上限的，下种太少会导致减产；另一方面，下种亦不能太多，这是因为土地的田力是有限的，比方土壤养分、水分、阳光等，下种太多，作物由于得不到充足养分而不能充分发育，最终同样导致减产。

**问题二**、农民们在种像玉米之类的作物时，通常采用另外一种作业方式—**“株式作业”**：在经过平整的田地上，每隔一定的行距和株距做一“土窝”，往里投放若干粒玉米种子。下种不宜太多，因为每窝通过选苗最终只剩一株较好的来培植，下种太多会造成种子浪费以及增加选苗劳动；下种同样不宜太少，因为很难保证播下的种子最终都能正常发芽，下种太少会因缺株而造成减产。

这里为问题一的下种方式取名**“垄式作业”**，试就以上二问题建立适当的数学模型，并做分析。

### 长江的水质预测问题

2005 年全国大学生数学建模竞赛 A 题是一道基于历史观测数据对长江未来年份的水质进行预测分析的题目（题目见 http://www.mcm.edu.cn 或 http://www.sci.bupt.cn/sxjm ）。我们只考虑对某种特定的有害物质进行分析，以 $\rho_0(x,t)$（ $x\in[0,X]$、$t\in[0,T]$，其中 $X$ 表示（所关心）长江干流总长度，$T$ 表示一年的时长）表示某年时刻 $t$ 在长江干流上位置 $x$ 处水样的污染物浓度。我们在后续的讨论中设定 $\rho_0(x,t)$（ $x\in[0,X]$、$t\in[0,T]$）已知：

**问题一**、若 $P_i(i=1..5)>0$ 是一组给定的参考值，若 $0\le\rho_0(x,t)<P_1$，则认定在该年时刻 $t$ 在长江干流上位置 $x$ 处水样是一类水；若 $P_{i-1}\le\rho_0(x,t)<P_i$（ $i=2..5$ ），则认定在该年时刻 $t$ 在长江干流上位置 $x$ 处水样是 $i$ 类水；特别若 $\rho_0(x,t)\ge P_5$，则认定在该年时刻 $t$ 在长江干流上位置 $x$ 处水样是劣五类水。请你给出在一个观测年从总体上评价长江水质的模型或方式；

**问题二**、如果我们能够预测第 $k$ 年长江流域总流量 $L_k$、污染物排放量 $W_k$，而在观测年的数据 $L_0$、$W_0$ 已知，你能否基于这些数据信息尝试给出第 $k$ 个预测年 $\rho_k(x,t)$ 的表达式（以 $\rho_k(x,t)$（ $x\in[0,X]$、$t\in[0,T]$）表示某年时刻 $t$ 在长江干流上位置 $x$ 处水样的污染物浓度），当然你需要就你建立的模型所作简化假设论述清楚。

## 二.　　模型解释

1）在允许缺货的存贮策略分析中，按“成本最小化”建模，从得到的结果中发现在一个存贮周期中确有一段时期为“零贮存”，且又不积极再进货。试分析该模型的缺陷以及改进的方向。

2）以 $x(t)$ 表示时刻 $t$ 的人口，下面是阻滞增长（Logistic）模型：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r(1-\dfrac{x}{x_m})x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

若记 $S(x) = 1-\dfrac{x}{x_m}$ ，试解释模型中涉及的所有变量、参数，并用尽可能简洁的语言表述清楚该模型的建模思想。

3） 报童的诀窍：报童每天可卖出报纸的份数 $x$ 是随机的，以 $P(x)$ 表示报童每天可卖出 $x$ 份报纸的概率密度函数，以 $a,b,c$ 分别表示卖出、买入、退回一份报纸的价格，则报童一天早晨购入的具有最大利润预期的份数 $x^*$ 须满足：$(b-c)\int_0^{x^*} P(r)dr = (a-b)\int_{x^*}^{+\infty} P(r)dr$ 。试解释该最优性条件的经济意义。

4） 已知某双种群生态系统的数学模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & r_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1/N_1 - \sigma_1 \cdot x_2/N_2) \\ \dot{x}_2 = & r_2 \cdot x_2 \cdot (1 - \sigma_2 \cdot x_1/N_1 - x_2/N_2) \end{cases}$$

其中以 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 表示两个不同种群在时刻 $t$ 的数量，$r_i, \sigma_i, N_i (> 0, i = 1,2)$ 为模型参数。请问该模型表示哪类生态（共存、竞争、捕食）系统模型，并说明平衡点 $P_4\left(\dfrac{1-\sigma_1}{1-\sigma_1\cdot\sigma_2}\cdot N_1, \dfrac{1-\sigma_2}{1-\sigma_1\cdot\sigma_2}\cdot N_2\right)$ 的稳定性条件。

## 三. 计算与论证

**$n$ 人合作对策问题**

记 $I = \{1,2\cdots n\}$，$2^I = \{s | s \subseteq I\}$ 为 $I$ 的幂集合，$v: 2^I \to R$ 为 $2^I$ 到实数集的一个函数，$v$ 是 $n-$ 人合作对策问题的某个**特征函数**，若以 $\varphi(v) = (\varphi_1(v),\ \ \varphi_2(v)\ \ \cdots\ \ \varphi_n(v))$ 表示 $n-$ 人合作对策问题关于特征函数 $v$ 的算法，以下是著名的 ***Shapley*** 值方法：

$$\begin{cases} \varphi_i(v) = \sum\limits_{i \in s \subseteq I} w(|s|) \cdot [v(s) - v(s \setminus \{i\})] \quad i = 1..n \\ w(|s|) = \dfrac{(n-|s|)! \cdot (|s|-1)!}{n!} \end{cases}$$

这里，$|s|$ 表示集合 $s$ 中元素数目：

1） 试用排列组合的观点解释 $w(|s|)$ 的意义；

2） 显然对 $\forall s \in 2^I$ ，均有 $w(|s|) \geq 0$ 。请您论证 $\sum\limits_{i \in s \subseteq I} w(|s|) = 1 (\forall i = 1..n)$ ；

3） 试着解释 ***Shapley*** 值方法的合理性及其局限性（不足）；

**$(s,S)$ 随机贮存模型：**

在 $(s,S)$ 随机贮存模型中，我们得到在决定进货，最优的进货量应当考虑上一周期的剩余货物，使得本周期期初的总供量 $S$ 满足：$\int_0^S \rho(r)dr=\frac{b-a}{c_1+(b-a)}$。这里顾客在一周时间内对该物品的需求量 $r$ 是一随机变量，$\rho(r)$ 表示随机变量 $r$ 的概率密度函数；商店在一周可能支付的费用有：每次的订货费 $c_0$，其取值与进货数量无关；每件商品在一周的贮存费 $c_1$。$a$、$b$ 分别表示一件商品的购进价格和售出价格。

我们发现 $S$ 的确定与订货费 $c_0$ 无关，这与实际情况不一致。你试着解释其原因。

我们倾向于将盘点周期与进货周期（这里从统计意义上加以理解），你试着通过计算机模拟的方法计算如下算例的最优进货策略：

需求量 $r$ 服从期望值为 1000、均方差为 200 的正态分布，$b-a=1$，$c_0$ 分别取 10、100、10000，$c_1$ 分别取 0.1、0.3、0.7、2.0 时，即总共 $3\times4=12$ 种情形下最优的 $(s,S)$ 取值。

参考程序：

```
<<Statistics`NormalDistribution`
ndist=NormalDistribution[1000,100];
cost={1000,4,10}; NUM=1000;
TT=Table[Random[ndist],{i,1,NUM}];
pp[x_,y_]:=(Ppp=0;qq=0;    For[ii=1,ii≤NUM,ii=ii+1, If[qq<x,Ppp=Ppp-cost[[1]];qq=y];
  If[qq<TT[[ii]],Ppp=Ppp+cost[[3]]*qq; qq=0,Ppp=Ppp+cost[[3]]*TT[[ii]]-cost[[2]]*(qq-TT[[ii]]);
qq=qq-TT[[ii]]] ];       Return[Ppp]);
```

# 四. 以下三题任选其一

1. 在 97 年前后，我国的一些大中城市出现了产品的直销和分销热。安利公司是美国一家主要生产清洁产品的大公司，在许多国家开设分公司，据说“分销”是安利产品的主要销售方式，产品的“分销员”从公司代理处提取产品并直接送到顾客手中，公司从产品的销售收入中让利作为“分销员”的报酬。显然一个大而好的“分销网络”对公司是重要的，公司鼓励“分销员”一方面挖掘产品的潜在消费群，一方面不断地壮大“分销网络”本身—即不断地吸引新的成员加入并给予指导，而公司同样依据由“你”发展起来“分销网络”的销售业绩给予适当的报酬。

假设你 $O$ 与你相关的一个人群 $I=\{1,2,...n\}$ 合作从事某项经营活动，整体效益表现为 $I$ 中每一成员的成绩 $x_i$ 之和 $s=\sum_{i=1}^{n}x_i$， 而 $O$ 的所有工作是帮助 $I$ 中每个成员取得尽可能大的成绩， 即 $O$ 的成绩需要根据 $x_i\,(i=1,2,...n)$ 作出综和评定，不妨将之设计为 $\left(x_1,\quad x_2\quad\cdots\quad x_n\right)$ 的一个函数：

$$O=f\left(x_1,\quad x_2\quad\cdots\quad x_n\right)$$

定性分析 $f$ 应满足：1）非负性：$0 \le f(x_1, \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \le s$；2）单调性：$\frac{\partial f}{\partial x_i} \ge 0$，$i = 1,2,\ldots n$；3）对称性：对任意$(x_1, \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$、$(y_1, \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)$，若经有限次对换可将$(x_1, \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$化为$(y_1, \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)$，即存在 $I = \{1,2,\ldots n\}$ 上的一全排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 满足：$x_k = y_{i_k}$ $,(k = 1..n)$，则有 $f(x_1, \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = f(y_1, \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)$；4）无考性：若 $f(x_1, \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$有 $n-1$ 个分量为 $0$，则 $f(x_1, \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = 0$.

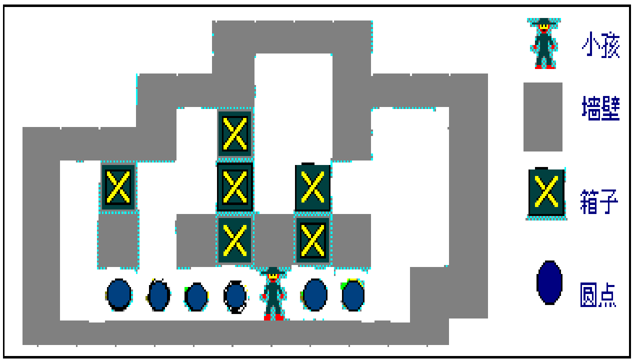
为简化起见，只须设计两个一元函数 $\alpha(t)$，$f^*(t)$ 即可，要求 a）非负性：$0 \le \alpha(t) \le 1$，$0 \le f^*(t) \le t$；b）单调性：$\frac{d}{dt}\alpha(t) \ge 0$，$\frac{d}{dt} f^*(t) \ge 0$；c）无考性：$\alpha(0) = 0$.

令 $f(x_1, \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(s - x_i) \times f^*(x_i)$

**试着证明：由满足条件 a，b，c 的 $\alpha(t)$、$f^*(t)$ 定义的 $f(x_1, \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$ 满足条件 1）~4）；**

**若将$(x_1, \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$、$O$ 表示收入，试解释 $\alpha(s - x_i)$、$f^*(x_i)$ 的经济意义，并阐明构造 $f(x_1, \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(s - x_i) \times f^*(x_i)$ 的合理性.**

2. 你可能玩儿过“搬箱子”的游戏：如图所示，设想你处在“小孩”的位置，在不越过障碍物（“墙壁”、“箱子 ”）的前提下，你可以“上、下、左、右”一个方格一个方格地自由移动，亦可推着一个箱子向前挪动，目标：最终将箱子都放置在指定“ 圆点”处。你试着采用适当的数据形式将该问题及游戏过程描述出来。（注意：要你描述的是一类问题，所给图示只是一个具体例子；你可以参考“




3. 通过将近半年的学习，你对本课程从整体上有何体会或认识，你认为你对本课程的投入值不值得，它对你有何帮助，可能期间你思考了一些相关的问题你愿意与人分享讨论，也可能你对本课程的教学有好的建议，一并作文以记之。

**说明：**

1）本次考试采用开卷方式，答卷时间为一周，请按时交卷；

2）本课程的考试是一学期课程学习结束的一次综合复习，因此在答题时务必独立完成，除了查阅有关资料外，请避免同学间相互抄袭，如发现雷同答卷，一并作废！

3）答题纸建议使用 A4 或 16 开版式，不要用太小版式或作业本。请在答卷卷首写清姓名、班级、学号（学校统一 6 位编号）、选课班级等。