1.解：(1) 令$a_n=(\frac{1+2i}{1-i})^n$，则$|a_n|=(\sqrt{\frac{5}{2}})^n$，又$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$，故原级数发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{n^2i^n}{n^4+1}|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+1}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，可知原级数绝对收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{(1+i)^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{(1+i)^n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(n+1)^3}{n^3(1+i)}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，则原级数绝对收敛.

2.证明：(1)当$|z|<3$时，$F_n(z)=1+\frac{1}{(\frac{z}{3})^n-1}$. 由$|z|<3$知$|\frac{z}{3}|<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|(\frac{z}{3})^n|=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(z)=0$.

(2)当$|z|>3$时，$F_n(z)=\frac{1}{1-(\frac{3}{z})^n}$. 由$|z|>3$知$|\frac{3}{z}|<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|(\frac{3}{z})^n|=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(z)=1$.

3.解：$f(z)=e^z$在圆$|z-z_0|\le 1$上解析，不妨设$z_0=x_0+iy_0$，则在$|z-z_0|\le 1$内$x_{\max}=x_0+1$，$|f(z)|=|e^z|\le e^x\le e^{x_0+1}$，由最大模原理可知$|e^z|$在圆周$|z-z_0|=1$的点$(x_0+1,y_0)$处取得最大值，且最大值为$e^{x_0+1}$.

4.解：$|z^2+3z-1|$的最大值在圆盘边界$|z|=1$上取得，设$|z|=1$的参数方程为：$z=e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$. 则$|z^2+3z-1|^2=(e^{2it}+3e^{it}-1)(e^{-2it}+3e^{-it}-1)=11-2\cos 2t$，当$z=\pm i$时，$|z^2+3z-1|$取得最大值，故$|z^2+3z-1|$的最大值为$\sqrt{13}$.

5.证明：设$g(z)=\frac{f(z)}{3z^2}$由条件可知$g(z)$在$1\le|z|\le 2$内解析，由最大模原理可知$|g(z)|$的最大值只能在圆盘$1\le|z|\le 2$的边界上取得，当$|z|=1$时，$|g(z)|=\frac{|f(z)|}{3}\le 1$，当$|z|=2$时，$|g(z)|=\frac{|f(z)|}{12}\le 1$. 故$\frac{|f(z)|}{|3z^2|}\le 1$.

6.解：$\frac{z}{z^2-2z+5}=\frac{z-1}{4}\frac{1}{1+(\frac{z-1}{2})^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+(\frac{z-1}{2})^2}=\frac{z-1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n}}{4^n}$

$+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n}}{4^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n+1}+(z-1)^{2n}}{4^{n+1}}$. 收敛范围：$|z-1|<2$.

7.证明：$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\cdot\overline{f(re^{i\theta})}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nr_ne^{in\theta})\cdot$
$(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}r_ne^{-in\theta})d\theta$，对$\forall m\ne k\in\mathbb{N}$，有$\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}\cdot e^{-im\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{i(k-m)\theta}d\theta=0$，则$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}d\theta=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}$.

8.解：因为$1<|z|<\infty$，所以$|\frac{1}{z}|<1$. 则$\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{z+1}{z^3}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2})\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\frac{1}{z^2}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+3}}$.

9.解：令$\xi=\frac{1}{z}$，则$e^{\frac{1}{1-z}}=e^{\frac{\xi}{\xi-1}}=e^{-\xi(1+\xi+\xi^2+\cdots+\xi^n+\cdots)}=(1-\xi+\frac{\xi^2}{2!}-\frac{\xi^3}{3!}+\frac{\xi^4}{4!}+\cdots)(1-\xi^2+\frac{\xi^4}{2!}+\cdots)(1-\xi^3+\cdots)\cdots=1-\xi-\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{6}\xi^3\cdots=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}\cdots$.

10.解：(1)当$z=(2k+1)\pi i$时，分母$1+e^z=0$，且$(1+e^z)'|_{z=(2k+1)\pi i}\ne 0$，则$z=(2k+1)\pi i$是分母的一阶零点，故$z=(2k+1)\pi i$是原函数的一级极点. 又$z=(2k+1)\pi i\to\infty$, $k\to\infty$即$z=\infty$为函数的非孤立奇点.

(2)当$z=2k\pi i$时，分母$e^z-1=0$，且$(e^z-1)'|_{z=2k\pi i}\ne 0$，则$z=2k\pi i$是分母的一阶零点，故$z=(2k+1)\pi i$是原函数的一级极点. 又$z=2k\pi i\to\infty$, $k\to$

∞即$z=\infty$ 为函数的非孤立奇点. $\lim\limits_{z\to1+}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}=+\infty$，$\lim\limits_{z\to1-}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}=0$，则$z=1$为原函数的本性奇点.

(3) $\tan^2 z=\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}$，分子分母均在$z$平面解析且无公共零点，所以分母的零点即为原函数的极点. 又$(\cos^2 z)'|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=0$，$(\cos^2 z)''|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}\neq 0\ (k=0,\pm1,\cdots)$，所以$z=k\pi+\frac{\pi}{2}$为原函数的二级极点.

(4) 因为函数为有理函数，且分子分母无公共零点，所以分母的零点就是函数的极点，令分母$z(z^2+4)^2=0$，则$z=0$和$z=\pm2i$ 分别是分母的一阶和二阶零点，所以分别是原函数的一级和二级极点. 又$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z-1}{(z^2+4)^2}=0$，则$z=\infty$ 为原函数可去奇点.

11. 刘维尔定理的几何意义：非常数整函数的值不能全含于一圆之内.

证明：设$w=f(z)$为整函数且非常函数，若全含于一圆之外，即$\exists w_0$及$\varepsilon_0>0$，对$\forall z$，恒有$|f(z)-w_0|>\varepsilon_0$，则有非常数整函数$g(z)=\frac{1}{f(z)-w_0}$，则在z平面上，分母$f(z)-w_0\neq0$，从而$g(z)$在z平面上解析，则$g(z)$为整函数，又$f(z)$是非常值函数，则$g(z)$非常数整函数且其值全含于一圆$|g(z)|<\frac{1}{\varepsilon_0}$之内，与刘维尔定理矛盾.

12.证明：由孤立奇点的定义和$f(z)$在点a解析，可知a为$g(z)$的孤立奇点. 且$\lim\limits_{z\to a}g(z)=\lim\limits_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=f'(a)=g(a)$，则$a$为$g(z)$的可去奇点，故$g(z)$在点$a$也解析.

13.证明：(1)必要性：由于$f(z)$在扩充z平面上只有一个一级极点. 当$z=\infty$为极点时，$f(z)=az+b$. 当$z\neq\infty$为极点时，$f(z)=\frac{A}{z-z_0}+B(A\neq0)=\frac{Bz+(A-Bz_0)}{z-z_0}$，又$-Bz_0-(A-Bz_0)=-A\neq0$.

(2)充分性：若$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$，$ad-bc\neq0$，所以a,c不同时为零. 当$c\neq0$时，$f(z)$只有一个一级极点$z=-\frac{d}{c}$. 当$c=0$时，则$a\neq0$且$d\neq0$，$f(z)$只有一个一级极点$z=\infty$.