北京邮电大学 2013——2014 学年第 2 学期

《组合数学》期末考试试题（A 卷）

姓名__________班级_______学号_______成绩_____

1，（15 分）(1) 从 1 到 300 的整数中不重复的选取两个数组成有序对(x,y),使得联结 xy（即把 x 放在前，y 紧跟其后所组成的新的数，如 x=35，y=8，xy=358）不能被 5 整除，问可组成多少种这种有序对？ (2) 从 1 到 200 的整数中选取两个数组成有序对(x,y),使得|x-y|=5x，问可组成多少种这种有序对？

解:（1）xy 被 5 整除当且仅当 y 的最后一位是 0 或者 5，也即 y 被 5 整除，这样的 y 共有 60 个，当 y 确定后再确定 x，有 299 种，故有 299*240 种。

（2）|x-y|=5x 蕴含 x-y= -5x，即 y=6x，易知，x 可取 1 到 33 中的任何整数，故这样的序对有 33 对。

2，（15 分）设 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\infty\cdot e_3,\infty\cdot e_4\}$，求序列$\{a_n\}$的普通型母函数并由此求出 a_n 的表达式。其中 a_n 是从 S 中取出的满足下列条件的 n 个元素的方案数。

（1）元素 e_1 出现偶数次, e_2 出现奇数次，其它元素任意；

（2）e_1 和 e_2 出现的次数总和为偶数次，其它元素任意。

解：设满足要求的方案数为 an，则其对应的母函数分别为

(1) $(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots)(x+x^3+x^5+\ldots x^{2n+1}+\ldots)(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^2$

$=x/[(1-x^2)(1-x)]^2$

$$=\frac{-1}{16}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{4}{(1-x)^4}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}\right]$$

对其进行展开，求得其系数 an 为

$$a_n=\frac{-1}{16}\left[1+(\mathrm{n}+1)-4\binom{n+3}{2}+(-1)^n+(n+1)(-1)^n\right]$$

$$=\frac{-1}{16}\left[(\mathrm{n}+2)(1+(-1)^n)-4\binom{n+3}{2}\right]$$

（2）e_1和e_2出现的次数总和为偶数次，设出现 2k 次，则选择这两种元素的方式有 2k+1 种，故对应的枚举子为

$(1+3x^2+5x^4+\ldots+(2n+1)x^{2n}+\ldots)$

于是对应的母函数为

$(1+3x^2+5x^4+\ldots+(2n+1)x^{2n}+\ldots)\ (1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^2$

$$=\frac{1+x^2}{\left[(1-x^2)(1-x)\right]^2}\ \frac{1}{8}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{4}{(1-x)^4}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}\right]$$

对其进行展开，求得相应的系数为

$$a_n=\frac{1}{8}\left[1+(n+1)+4\binom{n+3}{2}+(-1)^n+(n+1)(-1)^n\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[(n+2)(1+(-1)^n)+4\binom{n+3}{2}\right]$$

3，(12 分) 给定多重集 S={5 a,4 b,5 c}, (1)求 S 的 5-排列的排列数，要求 a 出现奇数次。(2)从 S 中取 6 个做可重组合，则有多少种方案？

解：: 记 S 的 n-排列数为 an，则其指数型母函数为

$$\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^5}{5!}\right)$$

其展开式中 $\frac{x^5}{5!}$ 的系数为

$$5!\left(\frac{1}{5\,!}+\frac{1}{3!}\left(1+2\cdot\frac{1}{2!}\right)+\frac{1}{1\,!}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}+\right)+\frac{1}{1\,!}\cdot\frac{1}{2\,!}\cdot\frac{1}{2\,!}\right)$$ -----6 分

=121

（2）记 S 的 n-组合数为 a_n，则其母函数为

$$\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^2\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)$$

$$\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^2\cdot\frac{1-x^5}{1-x}=\frac{1-x^5-2x^6+2x^{11}+x^{12}-x^{17}}{(1-x)^3}$$

其展开式中 x^6 的系数即所求：其系数等于 28-3-2=23

------12 分

4, (12 分) 求解如下递推关系

$$\begin{cases} a_n+6a_{n-1}+8a_{n-2}=4^n \\ a_0=1, a_1=4 \end{cases}$$

解：对应齐次递推关系的特征方程为 $x^2+6x+8=0$ --3 分

特征根 $x_1=-2$，$x_2=-4$

对应齐次通解为 $b(-2)^n+c(-4)^n$

设特解 $a_n*=p*4^n$

代入递推关系得 p=1/3 ---8 分

于是该递推关系通解为 $a_n=b(-2)^n+c\cdot(-4)^n+\frac{1}{3}4^n$

代入初始条件得 b=8/3， c=-2

所以 $a_n=\frac{8}{3}(-2)^n-2(-4)^n+\frac{1}{3}4^n$ -----12 分

5，（10 分）设 n 为正整数，用组合分析的方法证明：

$$\binom{n}{1}+14\binom{n}{2}+36\binom{n}{3}+24\binom{n}{4}=n^4$$

证明：用 n 种颜色对 1×4 的棋盘着色，显然有 n^4 种方案。根据使用的颜色数分类可得：

只用一种颜色，有 C(n,1)种选择；

用两种颜色，有 C(n,2)种选择，2 种颜色对棋盘着色有 14 种方案，故此情形有 14C(n,2)种可能的方案；

用 3 种颜色，有 C(n,3)种选择，3 种颜色对棋盘着色有 14 种方案，故此情形有 36C(n,3)种可能的方案；

用 4 种颜色，有 C(n,2)种选择，4 种颜色对棋盘着色有 14 种方案，故此情形有 4!C(n,4)种可能的方案；

利用加法原理，立明。

6，（10 分）设平面内有 *n* 条直线两两相交，且无三线共点。问这样的 *n* 条直线把平面分割成多少个不重叠的区域？

解：设这样的区域数为 an，注意到，第 n 条直线与前面每条直线均相交，故它被切成 n 段，每一段把原来区域一分为二，即增加 n 个区域，于是易得递推关系

$a_n=a_{n-1}+n$

$a_1=2$

解此递推关系得 $a_n=(n^2+n+2)/2$ -----10 分

7，（10 分）证明：任意选取 7 个不同的个正整数中必有两个数 a 和 b，它们的和 a+b 或差 a-b 能被 10 整除。

证明：注意到任意的正整数被 10 除，其余数介于 0-9 之间，做鸽子巢如下“

{0}，{1，9}，{2，8}，{3，7}，{4，6}，{5}

任取 7 个数，被 10 除以后，其余数必落在这些巢里，注意到有 7 个数，6 个巢，故一定有两个数落在同一巢内，不妨设为 a 和 b，则 a 与 b 要么被 10 除余数相同，从而 a-b 被 10 整除，要么其余数之和为 10， 即 a+b 被 10 整除，从而得证。

----10 分

8, （10 分）将 5 个相同的棋子布局到 8×8 的棋盘上，要求每一行每一列最多一个棋子，且第一行与第一列不为空，问这种放棋子方案有多少种？

解：设 A 为第一行空的任意布局的全体，B 为第一列空的任意布局的全体，则 $\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|$ 即为所求。显然

|A|=C(7,5)P(8,5)

|B|=C(8,5)P(7,5)

|AB|=C(7,5)P(7,5)

|U|=C(8,5)P(8,5)

故 $\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|$= C(8,5)P(8,5)- 2C(8,5)P(7,5)+ C(7,5)P(7,5)

=147000 ----10 分

9，（6 分）设 $n>3,a_1,a_2,..,a_n$ 是开区间(0,2n)内互不相同的整数，证明：存在$\{a_1,a_2,..,a_n\}$的一个子集，它的所有元素之和被 2n 整除。

证明：情形 1：n 不等于任何 ai，则有 $a_1,a_2,..,a_n$, 2n-a1,2n-a2,…,2n-an 均在[1,2n-1]之间，根据鸽巢原理，必有两个数相等，且是前一段中的一个等于后一段中的一个，即 ai=2n-aj，于是 ai+aj=2n 显然被 2n 整除。

情形 2：某个 ai=n，不妨设 an=n，从 $a_1,a_2,..,a_{n-1}$ 中任取 3 个数 ai<aj<ak,

则 aj-ai，ak-aj 中至少一个不能被 n 整除，因否则，ak-ai=ak-aj+aj-ai 被 2n 整除，从而大于等于 2n，矛盾。故 ai，aj，ak 中至少有两个数，其差不能被 n 整除，不妨设其为 a2-a1，它不能被 n 整除，于是做 a1,a2,a1+a2,a1+a2+a3,….,a1+a2+…+an-1;

（1） 若这 n 个数关于 n 的余数两两不同，则其中必有一个被 n 整除，从而其形如 kn，若 k 为偶数，则该数被 2n 整除，否则该数加上 an=n 被 2n 整除。

（2） 若这 n 个数关于 n 的余数有两个相同，则其差被 n 整除，又注意到 a2-a1 不被 2n 整除，故其差必是 a1，a2,…an-1 中若干个之和，类（1）之证明，结论为真。

-----6 分