

MATLAB中PDE-Toolbox的应用

1、典型偏微分方程的描述

(1) 椭圆型偏微分方程的一般形式为

$$-div(c\nabla u) + a * u = f(x, t)$$

即

$$-c * (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \mathbf{L} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})u + a * u = f(x, t)$$

其中 c, a, f 为给定的函数或者常数

(2) 抛物线型偏微分方程的一般形式

$$d * \frac{\partial u}{\partial t} - div(c\nabla u) + a * u = f(x, t)$$

即

$$d * \frac{\partial u}{\partial t} - c * (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \mathbf{L} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})u + a * u = f(x, t)$$

其中 d, c, a, f 必须是常数

(3) 双曲线型偏微分方程的一般形式

$$d * \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div(c\nabla u) + a * u = f(x, t)$$

即

$$d * \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c * (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \mathbf{L} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})u + a * u = f(x, t)$$

其中 d, c, a, f 必须是常数

(4) 特征值型偏微分方程的一般形式，注意它是(1)的变形，不能算独立的一类

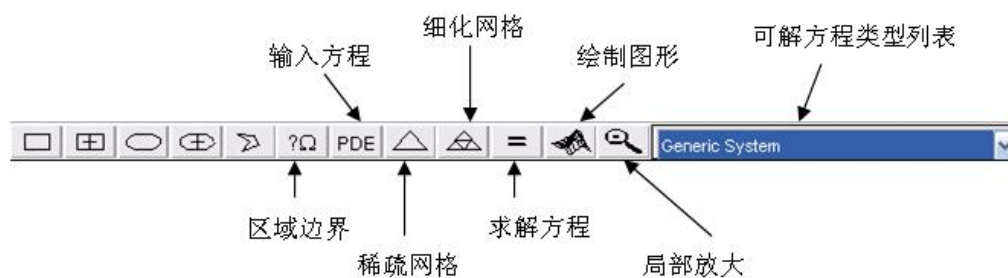
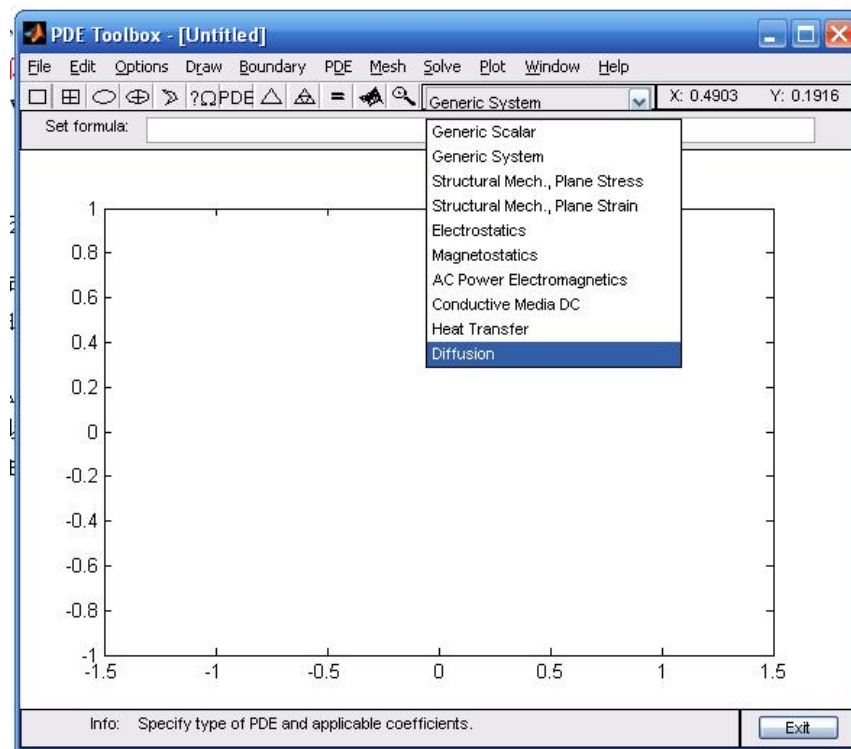
$$-div(c\nabla u) + a * u = l * d * u$$

即

$$-c * (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \mathbf{L} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})u + a * u = l * d * u$$

MATLAB 能够采用有限元的方法求解各种 PDE。MATLAB 为我们提供一个 pdetool 的交互界面，[可以求解二元偏微分 \$u\(x_1, x_2\)\$](#) (注意只能求解二元)。

方程的参数由 a、c、d 和 f 确定，求解域由图形确定，求解域确定好后，需要对求解域进行栅格化(这个自动)。



2、偏微分方程边界条件的描述

一般在 PDE 中边界条件包括 Dirichlet(狄利克莱)条件和 Neumann(纽曼)条件：

(1) Dirichlet 条件

一般描述为

$$h(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) * u|_{\partial\Omega} = r(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}), \text{ 其中 } \partial\Omega \text{ 表示求解域的边界}$$

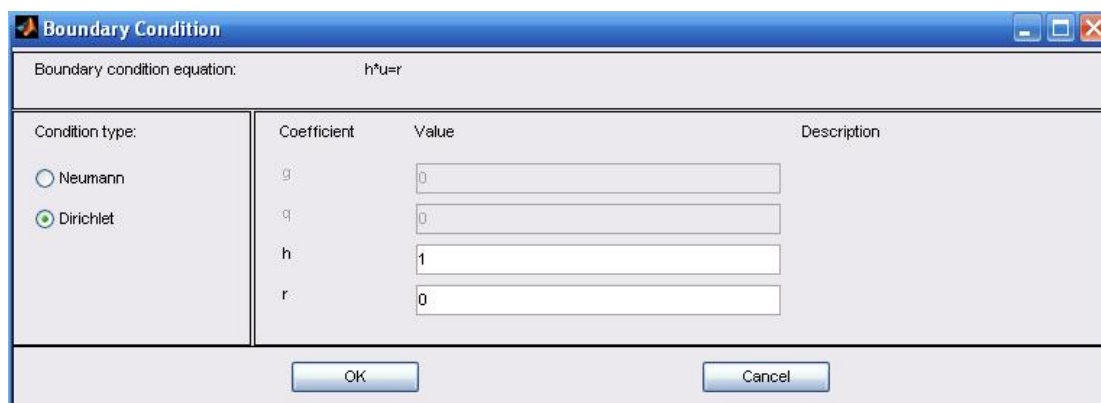
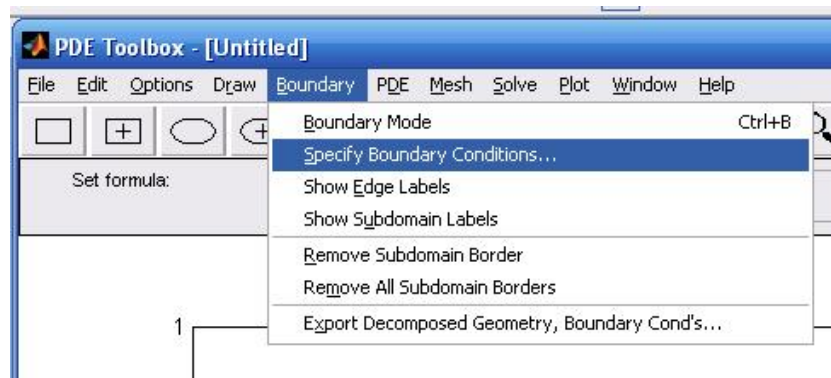
假设在边界上满足该方程，则只需给出 r 和 h 即可，它们可以是常数也可以是给定的函数

(2) Neumann 条件

一般描述为

$$[n \cdot (c \nabla u) + q * u]|_{\partial\Omega} = g, \text{ 其中 } \frac{\partial u}{\partial n} \text{ 表示 } u \text{ 的法向偏导数}$$

通过下面的操作调出边界条件设置，注意在这之前一定要使用【区域边界】按钮制定边界



3、求解实例

试求解双曲线型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u = 10$$

求解域 s 为

$$s1: x^2 + y^2 \leq 9$$

$$s2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1$$

$$s = (s1 \cup s2) - (s1 \cap s2)$$

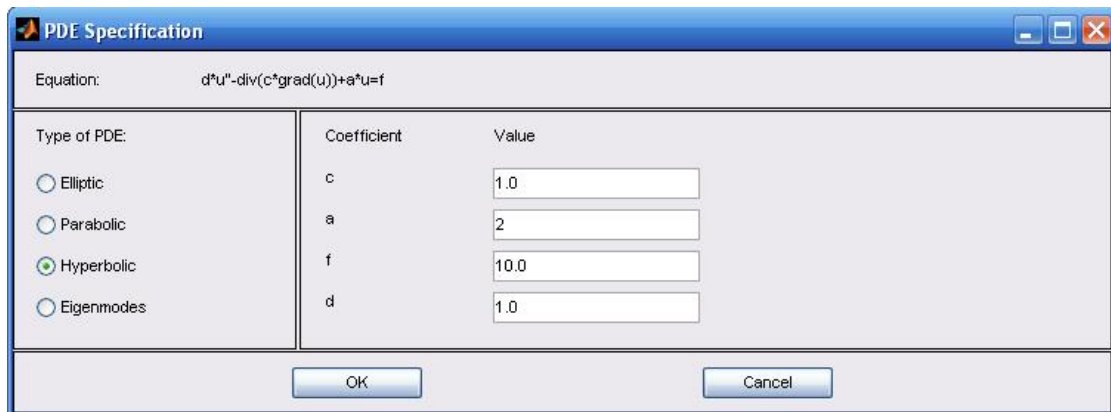
边界条件为

构成求解域的边界值都为 5

【解】

由给定的 PDE，可以令 $d=1, c=1, a=2, f=10$ ，对于抛物线和双曲线型偏微分方程 4 个系数必须是常数

step1: 点击工具栏的【PDE】按钮，如下输入 PDE 的参数，注意选择 Hyperbolic



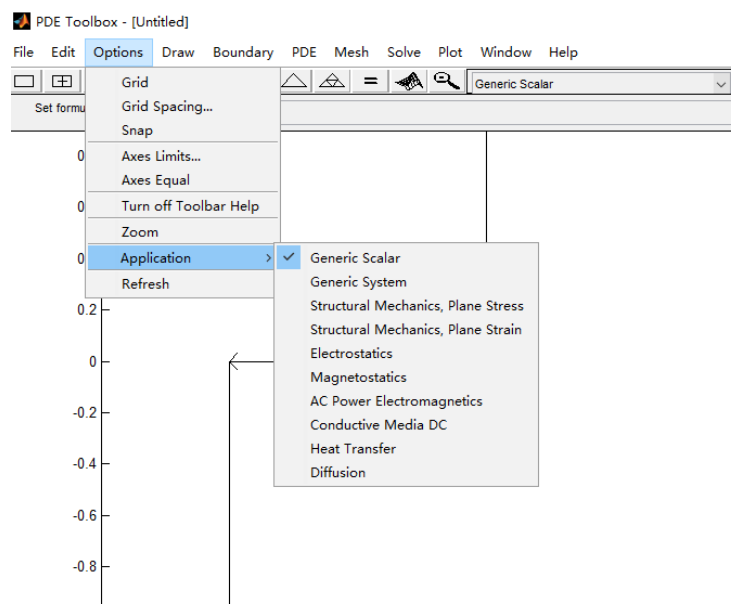
step2: 绘制求解域


对坐标轴的操作可以在【Options】主菜单中操作，包括设置网格、坐标系范围等

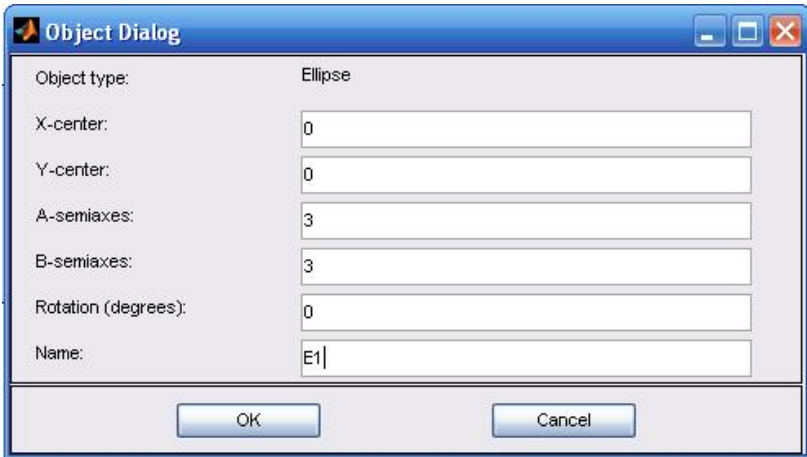
(1) 【Options】->Axis Limits 设置如下



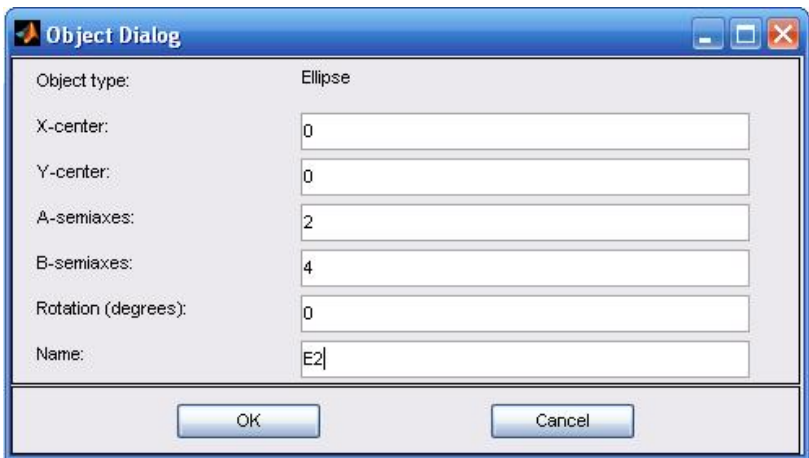
其它设置如下



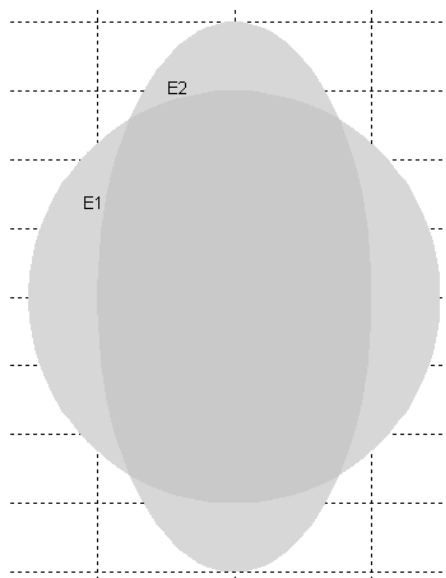
(2)点击工具栏上的第三个按钮  【绘制椭圆】，任意绘制一个椭圆，双击椭圆，设置如下



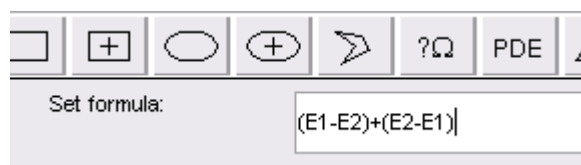
重复上面的操作，参数如下



于是得到



(3)在 set formula 中如下输入，“+”表示求并集，“-”表示求差集，注意没有直接求交接的操作符

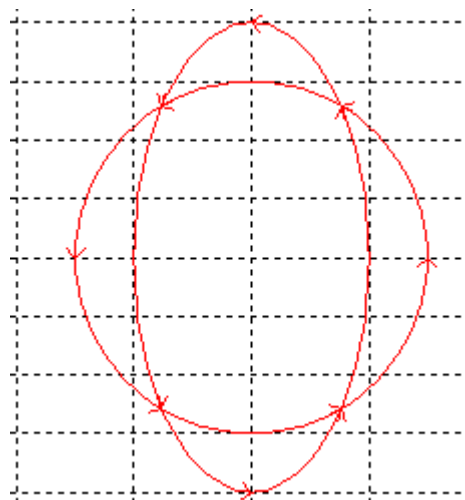


step3:边界条件和初值条件

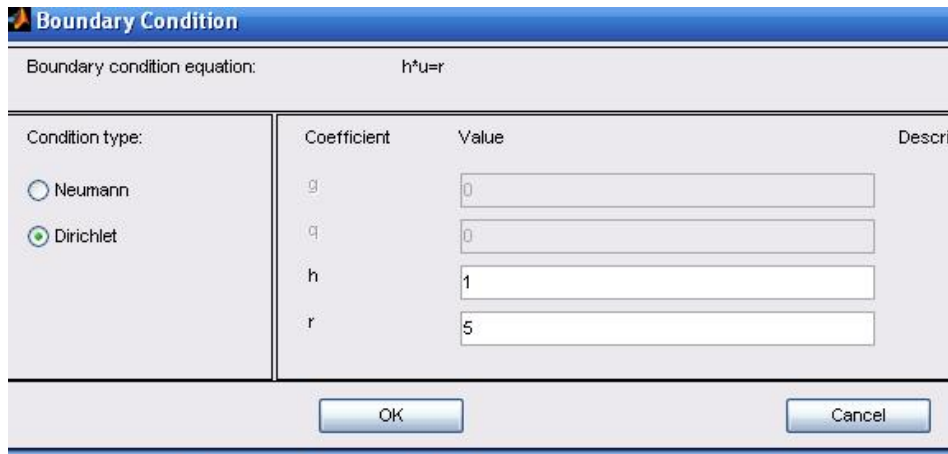
初值条件可以通过【Solve】->【Parameters...】设置

边值条件设置如下

(1)点击工具栏的第 6 个按钮【区域边界】，显示如下



- (2) 【Boundary】->【Remove All Subdomain Borders】移除所有子域的边界，将得到所有子域合并成一个求解域
- (3) 【Boundary】->【Specify Boundary Conditions...】设置边界如下，注意我们这里只有 Dirichlet 条件

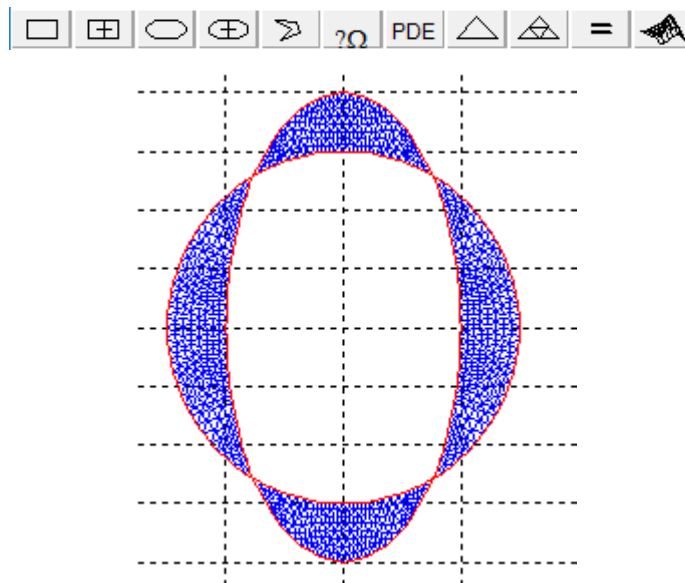


The image shows a 'Boundary Condition' dialog box. At the top, it says 'Boundary condition equation: $h \cdot u = r$ '. Below this, there are two columns: 'Coefficient' and 'Value'. The 'Coefficient' column has four rows with labels g , q , h , and r . The 'Value' column has four corresponding input fields with values 0, 0, 1, and 5. On the left, under 'Condition type:', there are two radio buttons: 'Neumann' (unselected) and 'Dirichlet' (selected). At the bottom, there are 'OK' and 'Cancel' buttons.

Condition type:	Coefficient	Value	Descri
<input type="radio"/> Neumann	g	0	
<input type="radio"/> Dirichlet	q	0	
	h	1	
	r	5	

step4:生成使用有限元方法求解方程所需的栅格

点击工具栏的第 8/9 个按钮，对求解域生成栅格，多次点击可以在原来基础上继续细化栅格，直到自己觉得满意为止，也可以通过【Mesh】主菜单进行精确控制

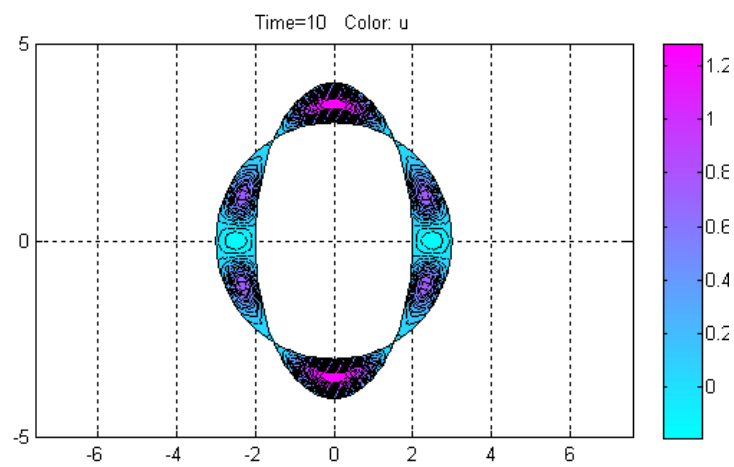


step5:求解方程

点击工具栏的第 10 个按钮 “=” 【求解方程】

step6:求解结果绘图

点击第 11 个按钮【绘制图形】，里面的选项很丰富，可以绘制等高线等好多，甚至播放动画，具体大家可以自己慢慢摸索



动画播放设置:

- (1) **【Solve】** -> **【Parameters】** 设置合适的时间向量 Time
- (2) **【Plot】** -> **【Parameters】** 选中 **【Animation】**，点击后面的 **【Options】**，设置播放速度和次数，比如 6fps 表示每秒 6 帧
- (3) **【Plot】** -> **【Export Movie...】** 输入动画保存的变量名，比如 M
- (4) 在 Command Windows 中直接输入 `movie(M)` 即可播放
- (5) 使用 `movie2ve(M,'demo.avi')` 命令可以将动画保存为 avi 文件