北京邮电大学 2014——2015 学年第 1 学期

《组合数学》期末考试试题答案（A 卷）

1，（16 分）(1) 从 1 到 300 的整数中不重复的选取两个数组成有序对(x,y),使得 x+y 不能被 3 整除，问可组成多少种这种有序对？ (2) 从 1 到 100 的整数中选取 10 个数,使得任何两个数之间的间隔不小于 5，问有多少种选法？

解:（1）根据补的原理，只要求出 x+y 被 3 整除的数目 z，然后全部的(x,y)序偶数量减去该数目 z 即得问题的解。 注意到

x+y 被 3 整除当且仅当 x mod 3+y mod 3=0 或 3，

于是，将 1 到 300 根据被 3 整除分成 3 个子集 A={1,4,7,…298},B={2,5,8,…299}, C={3,6,9,…,300}，每个集合均含 100 个元素，x+y 被 3 整除，当且仅当 x,y∈C 或者 x∈A,y∈B 或者 y∈A,x ∈B, 于是这样的方案有 100*99+2*100*100=29900， 而总的序偶有 300*299 个，

---6 分

于是问题的解为

Z=89700-29900=59800 ----- 8 分

（2）令 $x_i=\begin{cases}1, & i\text{被选取}\\ 0, & i\text{不选}\end{cases}$ ，则一个合理的选择方案是 100 位的 0-1 序列，其中恰 10 个 1，且任何两个 1 之间至少 5 个 0，于是将 1 后面捆绑 5 个 0，使其为一个元素，与剩余的 0 参与排列即得满足要求的方案，但必须考虑最后一个 1 的位置，最后的 1 后面跟的 0 数量可以小于 5.根据最后一个 1 所在的位置，该 0-1 序列可以分为如下 5 类：

1， 以 1 结尾，等价于 9 个 100000，和 45 个 0 的全排列，有 C(54,9)种；

2，以 10 结尾，等价于 9 个 100000，和 44 个 0 的全排列，有 C(53,9)种；

3，以 100 结尾，等价于 9 个 100000，和 43 个 0 的全排列，有 C(52,9)种；

4，以 1000 结尾，等价于 9 个 100000，和 42 个 0 的全排列，

有 C(51,9)种；

5，以 10000 结尾，等价于 9 个 100000，和 41 个 0 的全排列，有 C(50,9)种；

6，每个 1 后面至少 5 个 0，等价于 10 个 100000，和 40 个 0 的全排列，有 C(50,9)种；故总数为

C(50,9)+C(50,9)+C(51,9)+C(52,9)+C(53,9)+C(54,9)

=C(50,9)+C(55,10)-C(50,10)　　　----- 8 分

2，（16）设 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\infty\cdot e_3,\infty\cdot e_4\}$，求序列$\{a_n\}$的普通或指数型生成函数并由此求出 a_n 的表达式。其中

（1）a_n 是从 S 中取出的满足元素 e_1 和 e_2 出现总次数为偶数次，其它元素任意的 **n 位数**的个数；

（2）a_n 是从 S 中取出的 **n 个元素**中包含至少 1 个 e_1 的方案数。

解：（1） 根据题意，元素 e_1 和 e_2 出现总次数为偶数次所对应的枚举子为 $1+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}+...+\frac{2^nx^n}{n!}+...$，易得指数型母函数如下

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...\right)^2\left(1+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}+...+\frac{2^nx^n}{n!}+...\right)$$

$$=e^{2x}\frac{(e^{2x}+e^{-2x})}{2}=\frac{e^{4x}+e^0}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(4^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore a_n=\begin{cases}1, n=0\\ \frac{1}{2}4^n, n\geq 1\end{cases}$$

-------8 分

（2）易得母函数如下

$$\left(1+x+x^2+x^3+...+x^n+...\right)^3\left(x+x^2+x^3+...+x^n+...\right)$$

$$=\frac{1}{(1-x)^3}\cdot\frac{x}{(1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{n}x^{n+1}$$

------5 分

所以 $a_n=\binom{n+2}{3}$ ------- 8 分

3，(10 分) 求解如下递推关系

$$\begin{cases} a_n-6a_{n-1}+8a_{n-2}=4^n \\ a_0=1, a_1=4 \end{cases}$$

解：对应齐次递推关系的特征方程为 x^2-6x+8=0,

特征根为 r_1=2，r_2=4 ----- 5 分

对应齐次递推关系的通解为 $A(2)^n+B(4)^n$

设特解为 $p*n*4^n$ 代入求得 p=2 ---8 分

于是问题的通解为 $2*n*4^n+A(2)^n+B(4)^n$

代入初始条件求得 A=4，B=-3.

$a_n=2*n*4^n+4(2)^n-3*(4)^n$ -----10 分

4, （10 分）给定多重集 *S*={5 *a*,2 *b*,2 *c*,1 *d*, 1 *e*}, (1)求 S 的全排列中不允许同一个字母全排在一起的排列数。(2)若从 S 中取 7 个做可重组合，则有多少种方案？

解：（1）令 U 为多重集 *S*={5 *a*,2 *b*,2 *c*,1 *d*, 1 *e*}上的全排列集合，A 为多重集 *S*={5 *a*,2 *b*,2 *c*,1 *d*, 1 *e*}上的 a 全排在一起的全排列集合，B 为多重集 *S*={5 *a*,2 *b*,2 *c*,1 *d*, 1 *e*}上的 b 全排在一起的全排列集合，C 为多重集 *S*={5 *a*,2 *b*,2 *c*,1 *d*, 1 *e*}上的 c 全排在一起的全排列集合。则 $|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|$即为所求。

$$|U|=\frac{11!}{5!2!2!}=,|A|=\frac{7!}{2!2!},|B|=|C|=\frac{10!}{5!2!},|A\cap B|=\frac{6!}{2!}=|A\cap C|,$$

$$|B\cap C|=\frac{9!}{5!},|A\cap B\cap C|=5!$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|U|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|$$
$$-|A\cap B\cap C|$$
$$=\frac{11!}{5!2!2!}-\frac{7!}{4}-2\frac{10!}{5!2!}+2\frac{6!}{2!}+\frac{9!}{5!}-5!=110748$$

（2）构造母函数如下

$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)^2(1+x)^2$=

------ 5 分

$$\frac{1-x^6}{1-x}\cdot\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)^2\cdot\left(1+2x+x^2\right)$$
$$=\frac{1+2x+x^2-2x^3-4x^4-2x^5+2x^9+4x^{10}+2x^{11}-x^{12}-2x^{13}-x^{14}}{\left(1-x\right)^3}$$
$$=\left(1+2x+x^2-2x^3-4x^4-2x^5+2x^9+4x^{10}+2x^{11}-x^{12}-2x^{13}-x^{14}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n\right)$$

-----8 分

其中 x^7 的系数即为所求，计算得其系数 31.　----10 分

5，（10 分）设 n 为正整数，证明：

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{3}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

证明：做如下组合证明，考虑 n 个不同的蓝球和 n 个不同的红球中取出 n 个球的组合方案数，显然为 C(2n,n)，而左边即对选取的球的个数分类，设取 k 个蓝球，则必有 k 个红球不取，这种取法的方案数为 C(n,k)C(n,k)，k=0,1，…，n.于是由加法原理立得总的方案数为

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{3}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2$$

从而 $$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{3}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

----- 10 分

6，（10 分）某班有五位学生来安排周一到周五一周的值日，使得每人恰好值日一天，其中，甲不能排在周四和周五，乙不能排在周三，丙不能排在周一和周二，丁不能排在周五，戊不能排在周二，问有多少种安排方法？

解：根据题意，上述问题等价于如下的带禁区的排列。

			x	x
		x		
x	X			
				X
	X			

禁区的棋盘多项式是

$(1+x)(1+3x+x^2)^2=1+7x+17x^2+17x^3+7x^4+x^5$ ----7 分

所以，方案数为 5!-7*4!+17*3!-17*2!+7*1!-1=26----10 分

7，（10 分）某校有 200 个学生，每位学生至少选数学、物理、化学这三门课程中的一门。已知选数学、物理、化学的学生分别有 140、120、100 个，同时选数学和物理的 80 个，同时选数学和化学的 60 个，同时选物理和化学的 70 个。只选一门课的学生有多少个？只选两门课的学生有多少个？

解：令 U 表示全体学生，A 为选数学的学生，B 为选物理的学生，C 为选化学的学生，则有 $|U|=200$， $|A|=140$，$|B|=120$, $|C|=100$,

$|A\cap B|=80$,$|A\cap C|=60$, $|B\cap C|=70$,

$w(0)=200, w(1)=360, w(2)=210, w(3)=|A\cap B\cap C|$

$N(0)=200-360+210-w(3)=0$ 知 $w(3)=50$ -----6 分

$N(1)= w(1)-2w(2)+3w(3)= 360-420+150=90$ ----8 分

$N(2)=w(2)-3w(3)=210-150=60$

从而只选一门课的学生有 90 个，只选两门课的学生有 60 个。

----10 分

8. （10 分） 证明：把 1 至 26 十个数随机地写成一个圆圈，则必有某三个相邻数之和大于或等于 41。

证明：设按顺时针排列的这 26 个数为 a1,a2,..,a26,

记 W(i)=ai-1+ai+ai+1, i=2,3,…25, W(1)=a1+a2+a26, W(26)=a25+a26+a1,

于是

W(1)+W(2)+…+W(26)=3(a1+a2+…+a26)=3(1+2+…+26)=1053

(W(1)+W(2)+…+W(26))/26=1053/26>40

由加强形式的鸽巢原理，存在至少一个 W(i)≥41，命题得证。

----- 10 分

9, （8 分）利用容斥原理证明下列恒等式

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n-k}{r}=\binom{n-m}{r-m} \qquad n\geq r\geq (m\geq$$

证明：考虑如下组合问题：从 n 个不同的物体 a1,a2,…,an 中取出 r 个做组合，要求 a1,a2,…,am 都选取的这种方案数显然为 C(n-m,r-m)，下面考虑用容斥原理的方法求解该问题的方案数，从而证得上述恒等式。-----5 分

令 Ai 表示从 n 个不同的物体 a1,a2,…,an 中取出 r 个做组合但 ai 不被选出的组合的全体，i=1,2,…,n

U 为从 n 个不同的物体 a1,a2,…,an 中取出 r 个做组合的全体，则

|U|=C(n,r), |Ai|=C(n-1,r), |Ai∩Aj|=C(n-2,r),....,

$\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|=C(n-k,r),\ldots$ ----5 分

于是由容斥原理得，方案数为

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n-k}{r}$$

从而 $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n-k}{r}=\binom{n-m}{r-m}$ $(n\geq r\geq m\geq 0)$ -----8 分