第一节 边值问题的变分形式 – 微分方程数值解

笔记本：	我的第一个笔记本
创建时间：	2017/6/12 12:24
URL：	https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52794_1

第一节 边值问题的变分形式

学习指导：F 有限元法 第一节

本节介绍边值问题的变分形式。

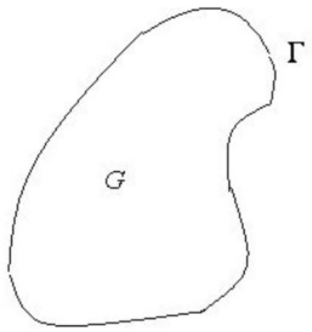
作业&思考：F 有限元法 第一节

讲义：F 有限元法 第一节

§7.3 二阶椭圆边值问题

3.1 Sobolev 空间 $H^m(G)$

本节总假定G 为平面上的有界开区域，其边界Γ是分段光滑的简单闭曲线(如下图所示)，$\overline{G}=G\bigcup\Gamma$ 是G 的闭包。



对于$\overline{G}$ 上的任一函数$u(x,y)$，称集合

$$\{(x,y)\in\overline{G}\mid u(x,y)\neq 0\}$$

的闭包为u的**支集, 记作**$spt(u)$。如果$spt(u)\subset G$，则说u于G 具有**紧(致)支集**。显然，具有紧(致)支集的函数必在Γ 的某一邻域内恒等于零。

注： u的支集为闭集，而G 为开集，因此，若u于G 具有紧(致)支集，那么，u的支集与G 的边界Γ 有一定的间隙。

1．引入如下函数空间

类似于一维情形，我们首先引入两个空间

(1) $C_0^\infty(G)$：表示于G无穷次可微并具有紧(致)支集的函数类；

(2) $L^2(G)$：表示G上平方可积的可测函数全体。

空间$L^2(G)$上的内积和范数分别为：

$$(f,g)=\int_G fg\,dxdy,\ \ \forall f,g\in L^2(G)$$

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=(\int_G |f|^2 dxdy)^{\frac{1}{2}}$$

有了上述空间，我们就可以定义一阶广义偏导数。

2. 一阶广义导数

首先我们回顾一下 **Green 公式**。

定理 3.1：假设$D\subset R^2$是平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线所围的单连通区域，如果函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在D上连续，且有连续的一阶偏导数，那么

$$\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})dxdy=\int_{\partial D}(P,Q)\cdot\bar{n}ds=\int_{\partial D}(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds \qquad (3.1)$$

其中，边界∂D取正方向(∂D的正方向是这样规定的：如果一个人沿这个方向行走时，D总在他的左边，这个方向也称为D的诱导方向)，$\bar{n}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$表示曲线边界$\partial D$的单位外法向。

注 1：对于三维的情形，我们有如下**定理**：

定理 3.2：假设$V\subset R^3$是空间上由光滑或分片光滑的简单闭曲面所围的三维单连通闭区域，如果函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，

$R(x,y,z)$在V上连续，且有连续的一阶偏导数，那么

$$\begin{aligned}&\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz\\&=\int_{\partial V}(P,Q,R)\cdot\bar{n}ds\\&=\int_{\partial V}(P\cos\alpha_1+Q\cos\alpha_2+R\cos\alpha_3)ds\end{aligned}$$

其中，边界∂V的定向为外侧，$\bar{n}=(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\cos\alpha_3)$表示边界$\partial V$的外法线方向的方向余弦。

若记

$$\bar{F}=(P,Q,R),\ \ div\bar{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\ \ ,$$

则上述 Green 公式可以写成

$$\iiint_V div\vec{F}\ dxdydz = \iint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\ \ ds. \tag{3.2}$$

事实上，公式(3.1)可以推广到多维情况，这就是一般的 **Gauss－Green 公式(或散度定理)**：

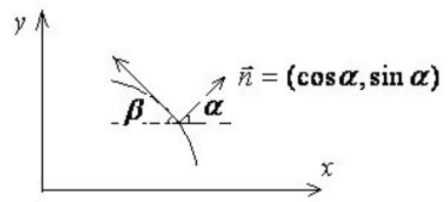
定理 3.3：假设Ω是R^n中一个有界开集，且$\partial\Omega \in C^1$。如果$\vec{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_n):\overline{\Omega}\to R^n$属于$C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$，则

$$\int_\Omega div\vec{F}\ dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\ ds \tag{3.3}$$

注 2：数学分析中，常将 Green 公式写为：

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\partial D}(-Q)dx + Pdy \tag{3.4}$$

下面我们证明(3.1)和(3.4)的等价性。



观察上图并利用$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，易知

$$dx = -\cos\beta ds = -\sin\alpha ds$$

$$dy = \sin\beta ds = \cos\alpha ds$$

代入（3.4），便可得（3.1）。

对$\forall\phi\in C_0^\infty(G)$，我们有如下积分恒等式：

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x}\phi dxdy = -\int_G f\frac{\partial\phi}{\partial x}dxdy, \tag{3.5}$$

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial y}\phi dxdy = -\int_G f\frac{\partial\phi}{\partial y}dxdy \tag{3.6}$$

这里我们只对(3.5)进行证明，(3.6)类似可证。

事实上，

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x}\phi dxdy = \int_G \frac{\partial (f\phi)}{\partial x} dxdy - \int_G \frac{\partial \phi}{\partial x} f dxdy \qquad (3.7)$$

利用 Green 公式以及$\varphi \big|_{\partial G} = 0$，可得

$$\int_G \frac{\partial (f\phi)}{\partial x}\ dxdy = \int_{\partial G} (f\phi, 0)\cdot \vec{n}\ ds = 0 \qquad (3.8)$$

将(3.8)代入(3.7)可知，(3.5)成立。

下面利用上述积分恒等式，导出**一阶广义偏导数**的概念。设$f \in L^2(G)$，若存在$g, h \in L^2(G)$，使等式

$$\int_G g\phi dxdy = -\int_G f\frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy,$$

$$\int_G h\phi dxdy = -\int_G f\frac{\partial \phi}{\partial y} dxdy$$

对$\forall \phi \in C_0^\infty(G)$恒成立，则说$f(x)$有对$x$的一阶广义偏导数$g$和对$y$的一阶广义偏导数$h$，记为

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = g, f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = h.$$

3. 2D 一阶 Sobolev 空间$H^1(G)$

同一维情形一样，我们定义

$$H^1(G) := \{f(x,y) \big| f, f_x, f_y \in L^2(G)\},$$

其中，f_x, f_y为f的广义偏导数。

在$H^1(G)$中引进内积和范数分别为

$$(f,g)_1 = \int_G \left[fg + f_x g_x + f_y g_y \right] dxdy$$

$$\|f\|_1 = \sqrt{(f,f)_1} = \left[\int_G \left[|f|^2 + |f_x|^2 + |f_y|^2 \right] dxdy \right]^{\frac{1}{2}}$$

$H^1(G)$构成完备内积空间----Hilbert 空间,称之为**一阶** Sobolev 空间。

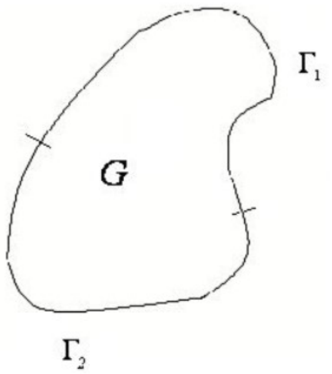
类似地，可以定义二维m**阶广义偏导数**和相应的m**阶** Sobolev 空间$H^m(G)$ 。

3.2　二阶椭圆边值问题的虚功原理和极小位能原理

作为二阶椭圆边值问题的一个经典模型，我们考虑 Poisson 方程的混合边值问题(A)：

$$\begin{cases} Lu := -\Delta u = f(x,y),(x,y)\in G \\ u|_{\Gamma_1}=0, \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}+\alpha\cdot u|_{\Gamma_2}=0, \alpha\geq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

其中，$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ (称为 **Laplace 算子**)，右端 $f\in L^2(G)$，边界 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ (见下图)，$\vec{n}$ 表示 ∂G 的单位外法向。



引入解 $u(x)$ 所属函数空间----**试探函数空间(trival)**：

$$H_E^1(G):=\{u: u\in H^1(G), u\big|_{\Gamma_1}=0\}$$

一．建立问题(A)的第一种等价变分问题(**虚功原理**)

1. 形式上推导

　　取**检验函数空间(test)**为 $H_E^1(G)$，形式上得到如下**问题**（B）的描述：

求 $u\in H_E^1(G)$，使得

$$a(u,v)=(f,v),\quad \forall v\in H_E^1(G)$$

称上述方程为**虚功方程**。

其中，

$$\begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_G \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}dxdy+\int_{\Gamma_2}\alpha uvds \\ (f,v)=\displaystyle\int_G fv\,dxdy \end{cases}$$

这里，我们详细推导泛函 $a(u,v)$ 的表达式。

记 $Du=(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y})$, $Dv=(\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y})$, $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，易验算

$$div(vDu) = Du \cdot Dv + v\Delta u \tag{3.10}$$

两边在G上积分，得

$$\int_G div(vDu)dxdy = \int_G Du \cdot Dvdxdy + \int_G v\Delta udxdy \tag{3.11}$$

由 Gauss－Green 公式(3.3)，有

$$\int_G div(vDu)dxdy = \int_{\partial G} vDu \cdot \vec{n}ds = \int_{\partial G} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds \tag{3.12}$$

由(3.11)和(3.12)，有

$$-\int_G v\Delta udxdy = \int_G Du \cdot Dvdxdy - \int_{\partial G} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds \tag{3.13}$$

$a(u,v)$是通过将微分方程(3.9)的左端Lu与检验函数空间$H_E^1(G)$中的任一元素v作L^2内积得到的，即

$$\begin{aligned} a(u,v) &= (Lu,v) \\ &= -\int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)vdxdy = -\int_G v\Delta udxdy \\ &= \int_G Du \cdot Dvdxdy - \int_{\partial G} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds \qquad (\text{由 } (3.13)) \end{aligned} \tag{3.14}$$

利用$v\big|_{\Gamma_1} = 0$以及$(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha \cdot u)|_{\Gamma_2} = 0$，可得

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds &= \int_{\Gamma_1} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds + \int_{\Gamma_2} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds \\ &= -\int_{\Gamma_2} \alpha uvds \end{aligned}$$

(3.15)

将(3.15)代入(3.14)，得

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_G Du \cdot Dvdxdy + \int_{\Gamma_2} \alpha uvds \\ &= \int_G \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}dxdy + \int_{\Gamma_2} \alpha uvds \end{aligned} \tag{3.16}$$

2. 等价性证明(变分原理)

希望建立问题(B)与问题(A)的解的等价性.

◆ 定理(**虚功原理**) 设$u \in C^2(\overline{G})$，则u是问题(A)的解的充分必要条件是，u是问题(B)的解。

二． 建立问题(A)的第二种等价变分问题 **(极小位能原理)**

首先定义泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v)$$

及变分问题：求$u\in H_E^1(G)$，使得

$$J(u)=\min_{v\in H_E^1(G)} J(v)$$

记上述极小问题为**问题(C)**。

◆ 定理 **(极小位能原理)** 设$u\in H_E^1(G)\bigcap C^2(\overline{G})$，则$u$是问题(A)的解的充分必要条件是，$u$是问题(C)的解。

§7.4 Ritz-Galerkin 方法

目标：分别从边值问题的两种等价变分问题出发，求变分问题的数值解。

Ritz: 德国光学家，Ritz 方法：19 世纪末提出

Galerkin：俄国工程师，Galerkin 方法：1906 年提出，是 Ritz 方法的推广

(基于残量)Least-square method: 较 Galerkin 法更早, 据说可以追溯到 Gauss.

● Galerkin 方法

(1) 边值问题的等价变分问题(B)

求$u\in H_E^1(I)$，使得

$$a(u,v)=(f,v),\forall v\in H_E^1(I).$$

求上述**虚功方程**数值解的基本思想：将试探函数空间和检验函数空间分别用其有限维子空间近似代替。

(2) 无限计算问题化为有限计算问题

设我们已经知道如何构造$H_E^1(I)$的子空间-----这是 Ritz-Galerkin 法的关键技术，下章的**有限元方法**，提供了该构造技术，它是计算数学

近几十年(60 年代以来)**最重要的方法之一。**

设 n 维子空间 $V_n \subset H_E^1(I)$，$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 是 V_n 的一组基底，则对 $\forall u_n \in V_n$，有

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x).$$

变分问题(B)的**近似变分问题**为：

求 $u_n \in V_n$，使得

$$a(u_n,v_n)=(f,v_n),\forall v_n \in V_n$$

上述问题等价于

求系数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得

$$a(u_n,\phi_i)=(f,\phi_i),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{D}$$

其中，$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)$

问题(D)又等价于

求系数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得

$$\sum_{j=1}^{n} a(\phi_j,\phi_i)\cdot c_j=(f,\phi_i),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{E}$$

- **Ritz 法**

(1) 边值问题的等价变分问题(C)

求 $u \in H_E^1(I)$，使

$$J(u)=\min_{v\in H_E^1(I)} J(v)$$

将试探函数空间用其**有限维**子空间 $V_n \subset H_E^1(I)$ 近似代替，则可得到上述极小问题(**无限**计算问题)化为其近似极小问题(**有限**计算问题)：

求 $u_n \in V_n$，使得

$$J(u_n)=\min_{v_n\in V_n} J(v_n) \tag{F}$$

注意

$$J(u_n)=\frac{1}{2}a(u_n,u_n)-(u_n,f)$$
$$=\frac{1}{2}a(\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i,\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i)-(\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i,f)$$

是 $c_1,c_2,\cdots c_n$ 的二次函数，则极小问题(F)等价于

求 $c_1,c_2,\cdots c_n$，满足

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial c_j}=\sum_{i=1}^{n}c_i a(\phi_i,\phi_j)-(\phi_j,f)=0,\ \ j=1,2,\cdots,n$$

(

事实上，由$a(\cdot,\cdot)$的双线性性和对称性，有

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial c_j}=\frac{\partial}{\partial c_j}[\frac{1}{2}a(\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i,\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i)-(\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i,f)]$$

$$=\frac{1}{2}[a(\frac{\partial}{\partial c_j}\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i,\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i)+a(\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i,\frac{\partial}{\partial c_j}\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i)]-(\phi_j,f)$$

$$=\frac{1}{2}[a(\phi_j,\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i)+a(\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i,\phi_j)]-(\phi_j,f)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}c_i a(\phi_i,\phi_j)-(\phi_j,f)$$

)

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n}a(\phi_j,\phi_i)c_j=(f,\phi_i),\ \ i=1,2,\cdots,n$$

即满足方程(E)(**Galerkin 法**)，我们称方程(E)为 **Ritz-Galerkin 方程**。

- **Ritz 法和 Galerkin 法的比较与适定性**

Galerkin 法：适用面更广(不要求$a(u,v)$对称)，方法推导更直接；

Ritz 法：力学意义更明确，理论基础比较容易建立。

定理：基于 Ritz 法和 Galerkin 法的**近似变分问题**的解是适定的。

证明：我们只需证明方程(E)的系数矩阵A对称正定，下面我们按对称正定矩阵的定义：

$$(Ax,x)\geq 0,\ \forall x\in R^n$$

且

$$(Ax,x)=0\Leftrightarrow x=0$$

来进行证明。

令$u_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\phi_i$，则

$$Ax=(\sum_{j=1}^{n}a_{1,j}x_j,\sum_{j=1}^{n}a_{2,j}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n}a_{n,j}x_j)^T$$

$$= (\sum_{j=1} a(\phi_1, \phi_j) x_j, \cdots, \sum_{j=1} a(\phi_n, \phi_j) x_j)^T$$

$$= (a(\phi_1, \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j), \cdots, a(\phi_n, \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j))^T$$

$$= (a(\phi_1, u_n), \cdots, a(\phi_n, u_n))^T$$

因此，

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a(\phi_i, u_n) = a(\sum_{i=1}^{n} x_i \phi_i, u_n) = a(u_n, u_n) \geq 0 .$$

另一方面，若 $(Ax, x) = 0$，则

$$a(u_n, u_n) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi_i(x) \equiv 0$$

由于 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 是 V_n 的一组基底，所以

$$x_i = 0, i = 1(1)n$$

- **收敛性**

设 u 是变分问题(B)或(C)的解，即满足

$$a(u, v) = (f, v), \forall v \in H_E^1(I) \qquad (*1)$$

是 Ritz 法或 Galerkin 法**的近似变分问题，即满足**

$$a(u_n, v_n) = (f, v_n), \forall v_n \in V_n \qquad (*2)$$

利用(*1)和(*2)，可得如下正交投影性质：

$$a(u - u_n, v_n) = 0, \forall v_n \in V_n$$

由此，并利用双线性泛函 $a(u,v)$ 满足性质 1--性质 4，

$$\|u - u_n\|_1^2 \leq \gamma^{-1} a(u - u_n, u - u_n)$$
$$= \gamma^{-1} a(u - u_n, u) = \gamma^{-1} a(u - u_n, u - v_n)$$
$$\leq \gamma^{-1} M \|u - u_n\|_1 \|u - v_n\|_1$$

$$\|u - u_n\|_1 \leq C \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_1$$

若 $\{\phi_i\}_1^\infty$ 于 $H_E^1(I)$ 中是完全的，即 $\{\phi_i\}_1^\infty$ 的一切可能的线性组合于 $H_E^1(I)$ 中稠密(在范数 $\|\cdot\|_1$ 下)，则有

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_1=0$$

事实上，由于$\{\phi_i\}_1^\infty$的一切可能的线性组合于$H_E^1(I)$中稠密，所以

对于给定的函数u，存在函数序列$\{\varphi_n\}$，其中

$$\varphi_n\in V_n=span\{\phi_1,\cdots,\phi_n\}$$

使得它在范数$\|\bullet\|_1$下，收敛于u.

由于

$$\|u-u_n\|_1\le C\inf_{v_n\in V_n}\|u-v_n\|_1\le C\|u-\varphi_n\|_1$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_1=0$$

这样就证得了**定理 4.1.**

注 1 齐次化处理

当 Ritz-Galerkin 方法用于非齐次边值问题时, 要根据边值条件的两种不同类型(本质的和自然的)作相应处理.

注 2 Galerkin 法适用面更广(不要求$a(u,v)$对称正定)

例如两点边值问题:

$$\begin{cases} Lu=-\dfrac{d}{dx}(p\dfrac{du}{dx})+r\dfrac{du}{dx}+qu=f, & a<x<b \\ u(a)=0, \quad u'(b)=\alpha \end{cases} \tag{1.4.15}$$

其中$p\in C^1(\overline{I}),p(x)\ge p_{\min}>0,r,q\in C(\overline{I}),f\in L^2(I),I=(a,b)$，与之相对应的双线性形式为

$$a(u,v)=\int_a^b\left[p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+r\frac{du}{dx}v+quv\right]dx$$

显然$a(u,v)$非对称正定, 除非$r\equiv 0,q\ge 0$。因此不能用 Ritz 法解(1.4.15)，但是 Galerkin 法仍然适用.

例：用 Galerkin 方法解边值问题

$$\begin{cases} u''+u=-x, & 0<x<1 \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{1.4.16}$$

其精确解为 $u_*(x)=\dfrac{\sin x}{\sin 1}-x$ (注意该问题中的微分方程不是椭圆型微分方程，该例子告诉我们，即便如此也可以用 Galerkin 方法求解)。

等价的变分描述为:

求 $u\in H_0^1(I)=\{u\in H^1(I),u(0)=u(1)=0\}$，使得

$$a(u,v)=(f,v),\forall v\in H_0^1(I) \qquad (*)$$

都成立, 其中

$$a(u,v)=\int_0^1(-u'v'+uv)dx,(f,v)=\int_0^1 fvdx$$

2 种 n 维近似子空间的引入

(1) $U=\{\phi_1,\cdots,\phi_n\}$, 其中

$$\phi_i=\sin(i\pi x),i=1,\ldots,n$$

(2) $U=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$, 其中

$$\varphi_i=\omega(x)x^{i-1},i=1,\ldots,n,\omega(x)=x(1-x)$$

注意：由于上述两种近似子空间的元素均充分光滑，且满足齐次边值条件，所以 $a(u,v)$ 可以用下面的等价计算式(因为 2 阶导数连续)

$$a(u,v)=\int_0^1(-u'v'+uv)dx=\int_0^1(u''+u)vdx$$

下面取 $U=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$，这时(*)的**近似变分问题**为

求 $u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i\in U$，使得

$$a(u_n,\varphi_i)=(f,\varphi_i),\forall\varphi_i\in U,i=1,\cdots,n$$

上述问题等价

求 $c=(c_1,\cdots c_n)^T\in R^n$ 是下列线性方程组的解

$$Ac=b \qquad (**)$$

其中：n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n},a_{ij}=a(\varphi_j,\varphi_i)$

n 阶向量 $b=(b_1,\cdots b_n)^T,b_j=(f,\varphi_j)$

以 $n=2$ 为例，

$$\varphi_1=x(1-x),\qquad \varphi_2=x^2(1-x)$$

经过简单计算有

经过简单计算有

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{3}{10} & -\frac{3}{20}\\ -\frac{3}{20} & -\frac{13}{105}\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{20}\end{pmatrix}$$

代入(**)可计算得到

$$c=\begin{pmatrix}-\frac{71}{369}\\ \frac{7}{41}\end{pmatrix}$$

于是

$$u_2(x)=-\frac{71}{369}x(1-x)+\frac{7}{41}x^2(1-x)$$

相应的误差见书 P27，至少有 2 位有效数字。

Ritz 法或 Galerkin 法数值求解的主要困难:

(1).基函数的选取

(2).数值积分

(3).代数方程组求解(条件数大)