

## 第二章 插值法

### 1 引言

我们先看三个具体的问题:

**问题1:** 假设已知某个函数在一些离散点的值

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline f(x) & f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{array}.$$

能不能有一个简单的公式能近似计算出这个函数在其他点的值?

一个更具体的例子如下: 假定我们已经测出水在一些不同温度下的粘度如下,

$$\begin{array}{c|cccc} \text{temperature} & 0^\circ & 5^\circ & 10^\circ & 15^\circ \\ \hline \text{viscosity} & 1.792 & 1.519 & 1.308 & 1.140 \end{array}.$$

能不能由此估计出水在8°时的粘度?

利用本章介绍的多项式插值, 我们可以得到一个多项式, 该多项式在这些温度的取值刚好就是测量值. 由此可以近似计算出水在8°的粘度为1.386.

**问题2:** 这个问题与问题1类似, 不同之处在于表中的测量值包含有误差. 我们希望能找到一个公式近似的匹配这些数据, 并给出误差估计.

**问题3:** 给定一个函数 $f(t)$ 的表达式, 但是它可能很复杂, 难以计算, 比如很难计算 $\sin(0.8)$ . 我们希望用另一个较简单较容易计算的函数 $g(t)$ 来近似 $f$ .

在所有这些问题中, 我们都要找一个简单的函数 $p$ 来表示或近似表示给定的离散数据或连续函数.

几种常见的近似函数 $p(x)$

(i) 多项式:  $p(x) = \sum_{r=0}^n a_r x^r$ ;

(ii) 分段定义的多项式;

(iii) 指数函数:  $p(x) = \sum_{r=1}^n a_r e^{b_r x^r}$ ;

(iv) Fourier级数:  $p(x) = \sum_{r=1}^n \{a_r \sin(rx) + b_r \cos(rx)\}$ ;

(v) 有理函数:  $p(x) = p_n(x)/p_m(x)$

这一章我们只考虑前两类的 $p(x)$ .

下面我们来解释什么叫用 $p(x)$ 去“近似”一个只给定离散点值的函数或连续函数. 当然我们希望这个近似的误差越小越好. 误差的定义不同, 结果和计算方法也不同.

1. 给定 $n+1$ 个离散数据 $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ , 定义函数 $p(x)$ 的近似误差 $E$ 为

$$E = \sum_{i=1}^n |p(x_i) - f_i|.$$

如果取 $p(x)$ 为一个 $n$ 次多项式, 且满足

$$p(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

则可以使得 $E = 0$ . 这就是本章介绍的**多项式插值问题**.

2. 给定离散数据 $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ , 其中 $n$ 很大, 我们希望找一个 $k(k \ll n)$ 次多项式使得近似误差 $E$ 尽可能小. 如果我们取

$$E = \sum_{i=0}^n \{p(x_i) - f_i\}^2.$$

则最小化 $E$ 的问题就是下一章介绍的**最小二乘问题**.

3. 给定区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ , 定义函数 $p(x)$ 的近似误差 $E$ 为

$$E = \max_{a \leq x \leq b} |p(x) - f(x)|.$$

一般把 $p(x)$ 取作多项式. 使得 $E$ 最小的问题就是下一章介绍的**函数逼近问题**. 根据误差 $E$ 定义的不同, 有最佳一致逼近和最佳平方逼近.

### 为什么是多项式

**定理2.1** (Weierstrass逼近定理) 设 $f$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 则对于任意的 $\epsilon > 0$ , 存在 $[a, b]$ 上的多项式 $P(x)$ , 满足

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

因此, 对于任意闭区间上的连续函数, 都可以找到一个多项式, 使得该多项式与这个函数任意接近.

另一个用多项式的重要原因是多项式的导数和原函数都仍是多项式, 且容易计算.

## 2 拉格朗日插值

给定 $n+1$ 组数据 $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ , 我们要找一个 $n$ 次多项式 $p_n(x)$ 经过这些给定点, 即

$$p_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

如果我们把多项式 $p_n(x)$ 写成

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

则系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 要满足

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n &= f_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n &= f_1, \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n &= f_n, \end{aligned}$$

写成矩阵形式即为

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

这个线性方程组中的系数矩阵就是范德蒙Vandermonde矩阵. 可以证明如果  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  都互不相同, 则这个矩阵非奇异, 上面的方程组有唯一解. 设这个解为  $(a_0^*, a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)^T$ , 则

$$p_n(x) = a_0^* + a_1^*x + a_2^*x^2 + \dots + a_n^*x^n$$

就是要求的插值多项式, 且从上面的证明可知这个多项式是唯一的. 当然唯一性也可以用下面的方式证明.

### 唯一性

假设  $q_n(x)$  是另一个满足要求的次数不超过  $n$  的多项式, 则

$$\phi(x) = p_n(x) - q_n(x)$$

是次数不超过  $n$  的多项式, 且

$$\phi(x_i) = p_n(x_i) - q_n(x_i) = f_i - f_i = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

即  $\phi(x)$  有  $n+1$  个零点, 因此必有

$$\phi(x) = 0,$$

所以  $p_n(x) = q_n(x)$ .

### $p_n(x)$ 的计算

前面已经介绍可以通过求解线性方程组来计算插值多项式, 下面介绍更简单的方法. 我们把  $p_n(x)$  写成

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \alpha_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \\ &\quad + \alpha_1(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n) \\ &\quad + \dots + \alpha_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

计算这些  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  会更简单. 注意到

$$p_n(x_i) = \alpha_i(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n) = f_i,$$

则有

$$\alpha_i = \frac{f_i}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

代回(2.1), 则有

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f_i, \quad (2.2)$$

其中

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}. \quad (2.3)$$

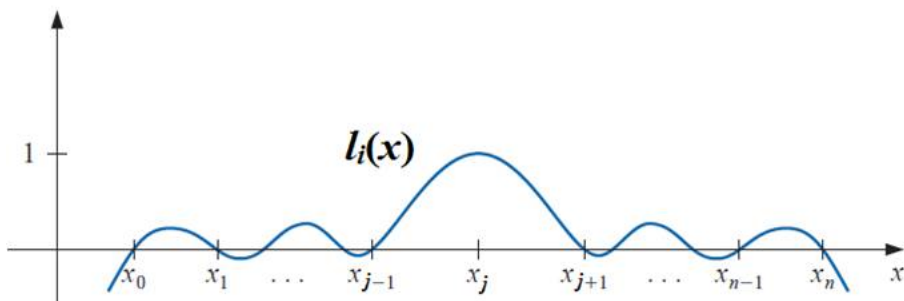
这里  $l_i(x)$  是一个满足

$$l_i(x_i) = 1$$

$$l_i(x_j) = 0 \quad \text{for } j \neq i$$

的  $n$  次多项式, 被称作插值基函数. (2.2) 中形式的多项式被称作拉格朗日 Lagrange 插值多项式.

下图是一个典型的基函数  $l_i(x)$  的图像.



设  $\psi(x)$  为

$$\psi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

则

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + (x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n) \\ &\quad + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}), \end{aligned}$$

从而有

$$\psi'(x_i) = (x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n).$$

利用上面的记号,

$$l_i(x) = \frac{\psi(x)}{(x-x_i)\psi'(x_i)}.$$

从而  $p_n(x)$  可以写成

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\psi(x)}{(x-x_i)\psi'(x_i)} f_i.$$

**例1** 计算经过点  $(-2,6)$ ,  $(-1,4)$ ,  $(0,3)$ , and  $(1,3)$  的3次拉格朗日插值多项式.

**解:** 在这个例子里,  $n = 3$ ,  $x_0 = -2$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ .

$$\psi(x) = (x+2)(x+1)(x-0)(x-1)$$

$$\psi'(x_0) = (-2+1)(-2)(-2-1) = -6$$

$$\psi'(x_1) = (-1+2)(-1)(-1-1) = 2$$

$$\psi'(x_2) = (0+2)(0+1)(0-1) = -2$$

$$\psi'(x_3) = (1+2)(1+1)(1) = 6$$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{x(x+1)(x-1)}{-6}(6) + \frac{x(x+2)(x-1)}{2}(4) \\ &\quad + \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{-2}(3) + \frac{x(x+2)(x+1)}{6}(3) \\ &= -x(x+1)(x-1) + 2x(x+2)(x-1) \\ &\quad - \frac{2}{3}(x+2)(x+1)(x-1) + \frac{1}{2}x(x+2)(x+1). \end{aligned}$$

如果要近似计算 $f$ 在 $x^* = \frac{1}{2}$ 的值, 则

$$\begin{aligned} f(1/2) &\approx p_3(x^*) = p_3(\frac{1}{2}) \\ &= (-\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(-\frac{1}{2}) + 1(\frac{5}{2})(-\frac{1}{2}) - \frac{2}{3}(\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}(\frac{5}{2})(\frac{3}{2}) = \frac{21}{16}. \end{aligned}$$

**例2** 利用函数 $f(x) = 1/x$ 在 $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 2.5$  和 $x_2 = 4$ 点的值计算 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式.

**解:** 由于

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = (x-6.5)x + 10, \\ l_1(x) &= \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}, \\ l_2(x) &= \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{(x-4.5)x+5}{3}, \end{aligned}$$

且

$$f(x_0) = f(2) = 0.5, \quad f(x_1) = f(2.5) = 0.4, \quad f(x_2) = f(4) = 0.25,$$

因此有

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k)l_k(x) = (0.05x - 0.425)x + 1.15.$$

如果要近似 $f(3) = 1/3$ , 则有

$$f(3) \approx p_2(3) = 0.325.$$

我们还可以利用 $f(x)$ 的Taylor展开来得到 $f(x)$ 的近似多项式. 对于某些 $f(x)$ 这样确实可以得到很好的近似多项式. 但并不都是如此. 例如如果用 $f(x) = 1/x$ 在 $x_0 = 1$ 的Taylor展开式来近似计算 $f(3) = 1/3$ . 由于

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-k-1},$$

其Taylor展开为

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k.$$

对于不同的 $n$ , 用 $q_n(3)$ 来近似 $f(3) = 1/3$ 的结果如下表:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$q_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85

可以看到结果完全错误. 这表明利用Taylor多项式来做近似并不好. 这其实很容易理解, 因为Taylor展开主要是在某个点附近的近似.

### 3 插值多项式的截断误差

下面我们来考虑 $p_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似的截断误差. 定义

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x),$$

我们希望知道 $e_n(x)$ 有多大? 下面的定理给出了一个结果.

**定理2.2** 设 $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$ , 即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $(n+1)$ 连续可微. 令 $p_n(x)$ 是利用 $f(x)$ 在 $(n+1)$ 个不同的点 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ 上的取值得到的拉格朗日插值多项式. 则对任意 $x \in [a, b]$ ,  $x \neq x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ , 有

$$f(x) - p_n(x) = \left\{ \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right\} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

其中 $\xi \in \text{Spr}\{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . 这里 $\text{Spr}\{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 表示包含 $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ 的最小区间.

**证明:** 当 $x = x_k$ 时 $f(x_k) = p_n(x_k)$ , 此时定理显然成立, 因此下面只考虑

$$x \neq x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

的情形. 下面假设 $x$ 已经**取定**, 而 $t$ 是变量.

记

$$\psi(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j),$$

则

$$f(x) = p_n(x) + \psi(x) \frac{f(x) - p_n(x)}{\psi(x)},$$

即,

$$f(t)|_{t=x} = [p_n(t) + \psi(t) \frac{f(t) - p_n(t)}{\psi(t)}]_{t=x},$$

也就是说,

$$[f(t) - p_n(t) - \psi(t) \frac{f(x) - p_n(x)}{\psi(x)}]_{|t=x} = 0,$$

由此我们定义函数  $\Phi(t)$  为

$$\Phi(t) = f(t) - p_n(t) - \psi(t)g(x), \quad g(x) = \frac{f(x) - p_n(x)}{\psi(x)}.$$

显然有

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) = \Phi(x_1) = \dots = \Phi(x_n) = 0,$$

这表明  $\Phi(t)$  在区间  $[a, b]$  上有  $n+2$  个互不相同的零点  $t = x_i$   $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , 和  $t = x$ . 利用罗尔定理可知  $\Phi'(t)$  在  $\text{Spr}\{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$  内至少有  $n+1$  个互不相同的零点. 类似的有,  $\Phi''(t)$  至少有  $n$  个不同的零点. 反复利用罗尔定理可知  $\Phi^{(n+1)}(t)$  至少有一个零点, 设其为  $t = \xi$ , 则

$$f^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!g(x),$$

因此就有

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\psi(x) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

注意这里  $\xi$  的取值与  $x$  有关. □

从计算角度讲, 由于  $\xi$  是  $x$  的未知函数, 上式并不能用来精确计算误差. 不过由于  $f^{(n+1)}(x)$  是连续函数, 我们可以得到如下的误差上界估计:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\psi(x)|,$$

其中

$$M = \max_{a \leq \xi \leq b} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

**例3** 用一个二次多项式来近似计算函数  $f(x) = \cos(x)$  在  $x^* = 1.5$  的取值, 这里用到的点是  $(x_0, f_0) = (0, \cos 0)$ ,  $(x_1, f_1) = (1, \cos 1)$ ,  $(x_2, f_2) = (2, \cos 2)$ .

**解:** 其拉格朗日插值多项式为:

$$\phi_2(x) = (\cos 0) \frac{(x-1)(x-2)}{2} - (\cos 1)x(x-2) + (\cos 2) \frac{x(x-1)}{2}.$$

所以有

$$\phi_2(1.5) = -\frac{1}{8} + (\cos 1)\frac{3}{4} + (\cos 2)\frac{3}{8} \approx 0.124.$$

下面来估计误差. 由于

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x.$$

$$M = \max_{0 \leq x \leq 2} |\sin x| = 1.$$

所以

$$\delta(\cos x) \leq \frac{1}{3!} |x(x-1)(x-2)| \leq 1.$$

特别的当  $x^* = 1.5$ , 时

$$\delta(\cos x^*) \leq \frac{1}{6} |1.5 \times 0.5 \times 0.5| = 0.0625.$$

真实误差  $\approx 0.124 - 0.071 = 0.053$ .

**例4** 利用  $(0, 0)$ ,  $(1, e)$ ,  $(2, 4e^2)$ ,  $(3, 9e^3)$ ,  $(4, 16e^4)$  近似计算  $f(x) = x^2e^x$  在  $x^* = \frac{5}{2}$  的取值.

**解:** 拉格朗日插值多项式为

$$\begin{aligned}\phi_4(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}(0) + \frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{1(-1)(-2)(-3)}(e) \\ &\quad + \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{(2)(1)(-1)(-2)}(4e^2) + \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{3(2)(1)(-1)}(9e^3) \\ &\quad + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4(3)(2)(1)}(16e^4).\end{aligned}$$

因此有

$$\phi_4\left(\frac{5}{2}\right) \approx 70.969004.$$

下面来估计误差, 由于

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x \quad f''(x) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x$$

$$f'''(x) = 2e^x + 4e^x + 4xe^x + 2xe^x + x^2e^x$$

$$f^{(4)}(x) = 6e^x + 6e^x + 6xe^x + 2xe^x + x^2e^x$$

$$f^{(5)} = 20e^x + 10xe^x + x^2e^x.$$

$$M = \max_{0 \leq x \leq 4} |f^{(5)}(x)| \approx 4149.4594.$$

因此有

$$\delta(f(\frac{5}{2})) \leq \frac{1}{5!} \left| \frac{5}{2} \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} \right) \right| 4149.4594$$

$$48.626477.$$

真实误差  $\approx |70.969004 - 76.140587| = 5.1715833$ .

## 4 均差与牛顿插值公式

利用插值基函数很容易得到拉格朗日插值多项式, 公式结构紧凑, 在理论分析中甚为方便, 但当插值节点增减时全部插值基函数  $l_k(x)$  均要随之变化, 整个公式也将发生变化.

### 4.1 均差

设  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f(x_1))$ , ...,  $(x_n, f(x_n))$  是  $n+1$  个给定的数据点, 定义  $f(x)$  关于点  $x_0$  和  $x_1$  的一阶均差  $f[x_0, x_1]$  为:

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

类似的, 函数  $f(x)$  关于点  $x_1$  和  $x_2$  的一阶均差为

$$f[x_1, x_2] := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$



进一步, 还可以定义关于点  $(x_0, x_1, x_2)$  的二阶均差

$$f[x_0, x_1, x_2] := \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

一般的, 函数  $f(x)$  在点  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  的  $n$  阶均差可以由  $(n-1)$  阶均差定义如下:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] := \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

**例5** 设  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ .

$$f(x_0) = \cos 0$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{\cos 1 - \cos 0}{1 - 0}$$

$$f(x_1) = \cos 1$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{\cos 2 - \cos 1}{2 - 1}$$

$$f(x_2) = \cos 2$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{(\cos 2 - \cos 1) - (\cos 1 - 1)}{2 - 0} = -0.25.$$

当  $x_i = x_{i+1}$  时, 如果  $f'(x_i)$  存在, 则我们定义  $f[x_i, x_i]$  为

$$f[x_i, x_i] = \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(x_i).$$

类似的, 如果  $f''(x_i)$  存在, 则定义  $f[x_i, x_i, x_i]$  为

$$\begin{aligned} f[x_i, x_i, x_i] &= \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} f[x_i, x_{i+1}, x_{i+1}] \\ &= \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} \frac{f'(x_{i+1}) - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+1} - x_i} \\ &= \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} \frac{\frac{d}{dx_{i+1}}[(x_{i+1} - x_i)f'(x_{i+1}) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))]}{\frac{d}{dx_{i+1}}(x_{i+1} - x_i)^2} \\ &= \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1})}{2(x_{i+1} - x_i)} \\ &= \frac{1}{2}f''(x_i). \end{aligned}$$

类似继续下去, 可以得到

$$f[x_i, x_i, \dots, x_i] = \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_i).$$

例如对于函数  $f(x) = \cos x$ , 有

$$f[0, 0, 0] = \frac{1}{2!} f''(0) = -\frac{1}{2} \cos 0 = -\frac{1}{2}.$$

## 4.2 牛顿插值公式

利用前面的记号,

$$f[x, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x},$$

因此就有

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x, x_0].$$

进一步, 由于

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x, x_0]}{x_1 - x},$$

因此有

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1)f[x, x_0, x_1].$$

将上式代入前面的公式, 即有

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x, x_0, x_1].$$

继续进行下去可以得到

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &\quad + R_n(x), \end{aligned}$$

其中

$$R_n(x) = \psi(x)f[x, x_0, x_1, \dots, x_n].$$

如果我们记  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , 并记  $p_n(x)$  为

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

则  $p_n(x)$  是次数不超过  $n$  的多项式, 而且由于  $\psi(x_i) = 0 (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ , 因此有  $R_n(x_i) = 0$ , 这说明

$$p_n(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

由于插值多项式唯一, 因此  $p_n(x)$  就是由  $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$  得到的插值多项式. 上式就是牛顿插值公式.

**例6** 仍然是上例, 给定点为  $(0, \cos 0)$ ,  $(1, \cos 1)$ ,  $(2, \cos 2)$ , 则利用牛顿插值公式有

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \cos 0 + (x-0)(\cos 1 - 1) + x(x-1)\frac{\cos 2 - 2\cos 1 + 1}{2} \\ &= 1 - 0.46x - 0.25x(x-1). \end{aligned}$$

**例7** 利用牛顿插值公式完成下表:

$x$	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
$f(x)$	0	3	7	?	1	-2	0

利用均差公式:

$$f(x_0) = 0$$

$$f[x_0, x_1] = 3$$

$$f(x_1) = 3$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2}$$

$$f[x_1, x_2] = 4$$

$$f(x_2) = 7$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = -5$$

$$f[x_2, x_3] = -6$$

$$f(x_3) = 1$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{3}{2}$$

$$f[x_3, x_4] = -3$$

$$f(x_4) = -2$$

$$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{5}{2}$$

$$f[x_4, x_5] = 2$$

$$f(x_5) = 0$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -\frac{11}{6}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 1$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{13}{6}$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = -\frac{11}{24}$$

$$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{1}{3}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = -\frac{7}{24}.$$

因此就有

$$\begin{aligned} p_5(x) &= 0 + (x-0)(3) + (x-0)(x-1)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\quad + (x-0)(x-1)(x-2)\left(-\frac{11}{6}\right) \\ &\quad + (x-0)(x-1)(x-2)(x-3)(1) \\ &\quad + (x-0)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\left(-\frac{7}{24}\right). \end{aligned}$$

从而可得

$$p_5\left(\frac{5}{2}\right) = 4.58984375000\dots$$

牛顿插值多项式的优点还在于它的递进性, 当增加插值节点时, 只要在原来插值多项式的基础上增加一项即可:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + (x - x_0) \cdots (x - x_n) f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}].$$

也就是说, 如果我们想要增加数据点来获得更好的近似, 利用牛顿插值公式来计算的话, 以前的计算结果仍然可以用. 注意拉格朗日插值并没有这个性质, 如果增加一个数据点, 那么所有的基函数  $l_i(x)$  都要重新计算. 从这个角度讲, 牛顿插值公式更有效.

## 5 埃尔米特插值

有些实际的插值问题不但要求在节点上函数值相等, 而且还要求对应的导数值也相等, 甚至要求高阶导数也相等. 满足这种要求的插值多项式就是**埃尔米特Hermite插值多项式**.

下面只讨论函数值与导数值个数相等的情况. 设在节点  $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$  上,  $y_j = f(x_j)$ ,  $m_j = f'(x_j)$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ), 问题是求插值多项式  $H(x)$ , 满足条件

$$H(x_j) = y_j, \quad H'(x_j) = m_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

这里共有  $2n + 2$  个插值条件, 可以唯一确定一个次数不超过  $2n + 1$  的多项式  $H_{2n+1}(x)$ , 其形式为

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1}.$$

我们仍然采用基函数的方法, 即先求  $2n + 2$  个插值基函数  $\alpha_j(x), \beta_j(x)$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ), 每一个都是  $2n + 1$  次多项式, 且满足条件

$$\begin{aligned} \alpha_j(x_k) &= \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} & \alpha'_j(x_k) &= 0, \\ \beta_j(x_k) &= 0, & \beta'_j(x_k) &= \delta_{jk}. \end{aligned}$$

这样要求的多项式可以表示为

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n (y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)).$$

下面来看如何计算这些基函数. 为此可以利用拉格朗日基函数  $l_j(x)$ . 令

$$\alpha_j(x) = (ax + b)l_j^2(x),$$

则有

$$\begin{aligned} \alpha_j(x_j) &= (ax_j + b)l_j^2(x_j) = 1, \\ \alpha'_j(x_j) &= l_j(x_j)(al_j(x_j) + 2(ax_j + b)l'_j(x_j)) = 0, \end{aligned}$$

整理可得

$$\begin{aligned} ax_j + b &= 1, \\ a + 2l'_j(x_j) &= 0. \end{aligned}$$

由此解得

$$a = -2l'_j(x_j), \quad b = 1 + 2x_j l'_j(x_j).$$

可以计算出

$$l'_j(x_j) = \sum_{k=0, k \neq j}^n \frac{1}{x_j - x_k},$$

于是

$$\alpha_j(x) = \left( 1 - 2(x - x_j) \sum_{k=0, k \neq j}^n \frac{1}{x_j - x_k} \right) l_j^2(x).$$

类似可以计算出

$$\beta_j(x) = (x - x_j) l_j^2(x).$$

还可以证明满足上述条件的插值多项式是唯一的. 令  $\tilde{H}_{2n+1}(x)$  是另一个满足条件的次数不超过  $2n+1$  的多项式, 于是

$$\phi(x) = H_{2n+1}(x) - \tilde{H}_{2n+1}(x)$$

在每个节点  $x_k$  上都有二重根, 即有  $2n+2$  重根. 但它的次数不超过  $2n+1$ , 因此必有  $\phi(x) \equiv 0$ .

与拉格朗日插值余项的证明类似, 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的  $2n+2$  阶导数存在, 则其误差为

$$R_n(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2.$$

**例8** 求满足  $P(x_j) = f(x_j) (j = 0, 1, 2)$  和  $P'(x_1) = f'(x_1)$  的插值多项式及其余项表达式.

**解:** 由于给定4个插值条件, 可以确定次数不超过3的插值多项式. 由于其经过三个点  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ , 故其形式为

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

其中  $A$  是待定系数, 可以由条件  $P'(x_1) = f'(x_1)$  确定, 容易计算出

$$A = \frac{f'(x_1) - f[x_0, x_1] - (x_1 - x_0)f[x_0, x_1, x_2]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}.$$

为了计算余项  $R(x) = f(x) - P(x)$  的表达式, 令

$$R(x) = k(x)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2),$$

其中  $k(x)$  是待定函数. 构造

$$\varphi(t) = f(t) - R(t) - k(x)(t - x_0)(t - x_1)^2(t - x_2).$$

显然  $\varphi(x_j) = 0 (j = 0, 1, 2)$ ,  $\varphi(x) = \varphi'(x_1) = 0$ , 反复利用罗尔定理可知至少存在一个  $\xi$ , 使得

$$0 = \varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!k(x) = 0,$$

即  $k(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$ , 余项表达式为

$$R(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2).$$

## 6 分段低次插值

### 6.1 高次插值的病态性质

一般来说, 较多的插值点可以得到更好的近似. 但是并不是越高越好. 下面是一个例子. 下面的图是一只鸟.

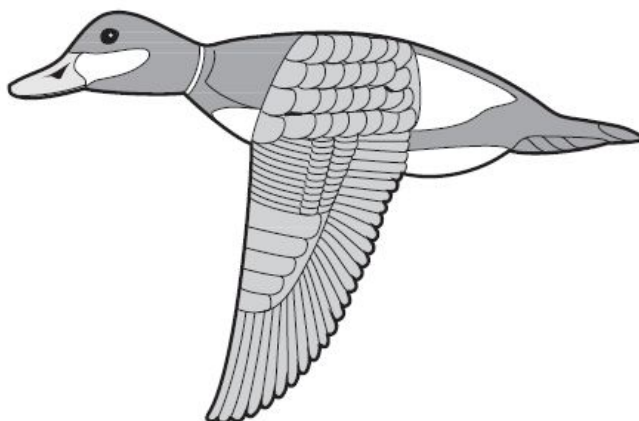


Figure 1

为了近似鸟的后背, 我们选取了21个点作为插值点. 注意在变化较剧烈的地方点取得比较密, 而变化较平缓的地方点取得比较稀疏.

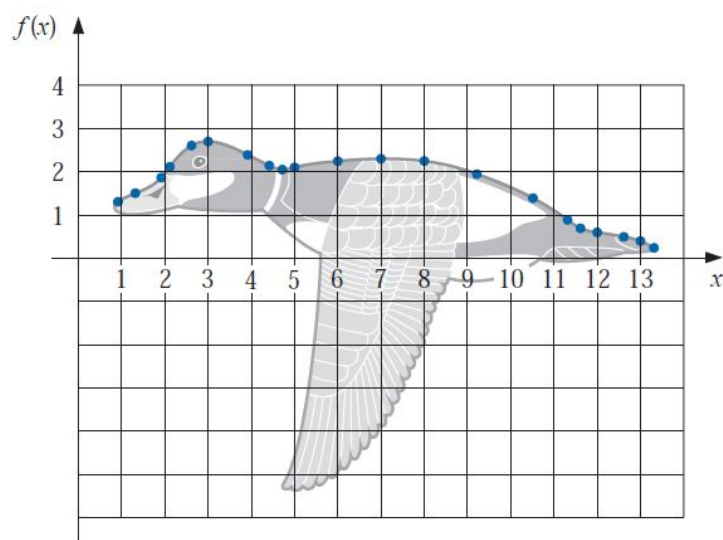


Figure 2

$x_i$	0.9	1.3	1.9	2.1	2.6	3.0	3.9	4.4	4.7	5.0	6.0
$f_i = f(x_i)$	1.3	1.5	1.85	2.1	2.6	2.7	2.4	2.15	2.05	2.1	2.25

$x_i$	7.0	8.0	9.2	10.5	11.3	11.6	12.0	12.6	13.0	13.3
$f_i = f(x_i)$	2.3	2.25	1.95	1.4	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.25

利用上面两个表中的数据进行拉格朗日插值可得

$$p_{20}(x) = \sum_{i=0}^{20} l_i(x) f_i,$$

其中

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_{20})}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_{20})}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{20} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}.$$

下图是 $p_{20}(x)$ 的图像:

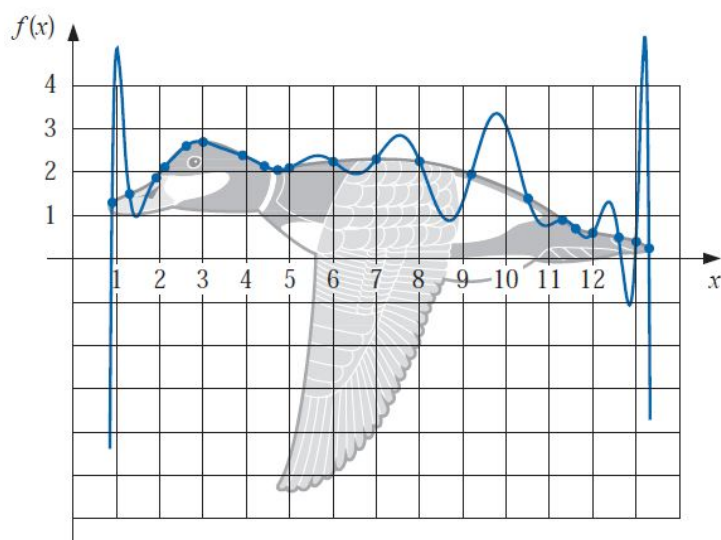


Figure 3

显然 $p_{20}(x)$ 是一个非常差的近似, 振动非常剧烈.

## 6.2 分段低次插值

针对这个问题, 一般使用分段低次插值, 而不是高次插值. 最简单的分段低次插值就是分段线性插值, 就是用一些直线把各个点

$$\{(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)\}$$

连起来, 如下图所示:

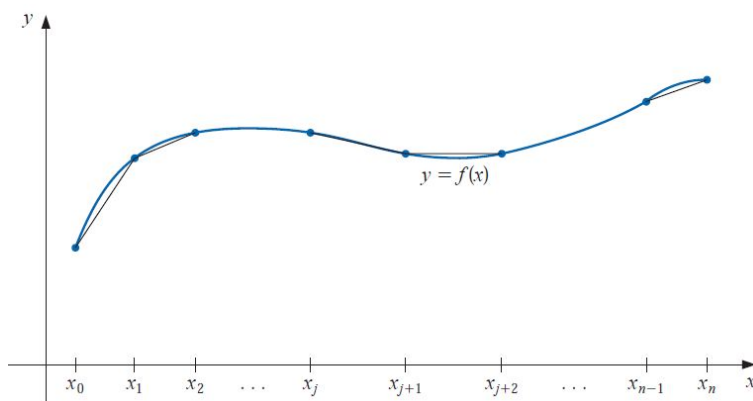


Figure 4

分段线性插值的缺点是在每个小区间的端点处一般是不可微的, 即不够光滑. 通常物理或工程实际上要求一定的光滑性. 一种解决方法是下面介绍的分段Hermite插值. 另一种是下一节介绍的样条插值.

分段Hermite插值就是在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上根据在端点处的函数值 $f(x_k), f(x_{k+1})$  和导数值 $f'(x_k), f'(x_{k+1})$ 构造三次Hermite插值多项式. 这样分段定义的插值函数就是一阶连续可微的.

## 7 三次样条插值

早期工程师制图时, 把富有弹性的细长木条(所谓样条)固定在样点上, 在其他地方让它自由弯曲, 然后划下长条的曲线, 这就是样条曲线. 样条曲线实际上是由分段三次曲线拼接而成, 在连接点上还要求二阶导数连续. 下面讨论最常用的三次样条函数.

**定义:** 给定 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , 上的取值, 如果 $S(x)$ 满足下面的条件, 则称 $S(x)$ 为三次样条插值函数:

- (1)  $S$ 在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ )的取值 $S_j(x)$ 是一个三次多项式;
- (2)  $S(x_j) = f(x_j), (j = 0, 1, \dots, n)$ ;
- (3)  $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1}) \quad j = 0, 1, \dots, n-2$ ;
- (4)  $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1}) \quad i = 0, 1, \dots, n-2$ ;
- (5) 满足下面其中之一的边界条件:
  - (a) 给定两端的一阶导数值, 即 $S'(x_0) = f'(x_0), S'(x_n) = f'(x_n)$ ;
  - (b) 给定两端的二阶导数值, 即 $S''(x_0) = f''(x_0), S''(x_n) = f''(x_n)$ . 一种特殊情况是 $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (自然边界条件);
  - (c) 当 $f(x)$ 是周期函数时, 常见的是如下的周期边界条件:

$$S(x_0 + 0) = S(x_n - 0), S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0), S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0).$$



注意此时  $f(x_0) = f(x_n)$ .

我们先通过一个简单的例子来看如何构造三次样条插值.

**例9** 利用函数  $f(x) = x^4$  在 -1, 0, 1 点的值构造三次样条插值函数, 其中边界条件为(a), 即  $S'(-1) = f'(-1), S'(1) = f'(1)$ .

**解:** 在这个例子中  $n = 2$ , 且

$$x_0 = -1, f(x_0) = 1; x_1 = 0, f(x_1) = 0; x_2 = 1, f(x_2) = 1.$$

又由  $f'(x) = 4x^3$ , 可知

$$f'(x_0) = -4 \quad f'(x_2) = 4.$$

令

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1]; \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

由条件(1)可知  $S_0(x)$  和  $S_1(x)$  都是三次多项式, 即

$$S_0(x) = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3,$$

$$S_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3.$$

容易计算出

$$S'_0(x) = b_0 + 2c_0x + 3d_0x^2, \quad S'_1(x) = b_1 + 2c_1x + 3d_1x^2$$

$$S''_0(x) = 2c_0 + 6d_0x, \quad S''_1(x) = 2c_1 + 6d_1x$$

利用条件(2)可得

$$S_0(x_0) = f(x_0), \implies S_0(-1) = a_0 - b_0 + c_0 - d_0 = 1$$

$$S_0(x_1) = f(x_1), \implies S_0(0) = a_0 = 0$$

$$S_1(x_1) = f(x_1), \implies S_1(0) = a_1 = 0$$

$$S_1(x_2) = f(x_2), \implies S_1(1) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1$$

由条件(3)可得

$$S'_0(0) = S'_1(0), \quad = b_0 = b_1, \quad = b_0 - b_1 = 0,$$

利用条件(4)可得

$$S''_0(0) = S''_1(0), \quad = 2c_0 = 2c_1, \quad = c_0 - c_1 = 0,$$

最后利用条件(5)(a)有

$$S'_0(-1) = b_0 - 2c_0 + 3d_0 = -4$$

$$S'_1(1) = b_1 + 2c_1 + 3d_1 = 4$$

把这些方程综合在一起即得到一个关于8个未知数  $a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1$  的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

求解这个线性方程组可得

$$a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 0,$$

$$c_0 = c_1 = -1, \quad d_0 = -2, \quad d_1 = 2.$$

因此要求的三次样条插值函数为

$$S(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2x^3 - x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

这种方法需要求解一个  $4n \times 4n$  的线性方程组, 而且没有充分利用系数矩阵的稀疏性. 下面我们会介绍其他的构造样条插值函数的方法, 只要求解一个  $n+1$  阶线性方程组, 而且系数矩阵是对称正定的三对角矩阵.

### 一种构造 $s(x)$ 的方法

$s(x)$  在小区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的取值  $s_i(x)$  是一个三次多项式, 即  $s''_i(x)$  是线性函数. 令

$$M_i = s''_i(x_i) \quad \text{and} \quad M_{i+1} = s''_i(x_{i+1}) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

由条件(4)可知  $s''(x)$  在节点上连续, 即

$$s''_{i-1}(x_i) = M_i = s''_i(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

利用拉格朗日插值多项式, 可知  $s''_i(x)$  可以写成

$$\begin{aligned} s''_i(x) &= l_i(x) M_i + l_{i+1}(x) M_{i+1} \\ &= \left( \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \right) M_i + \left( \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) M_{i+1} \\ &= \frac{x-x_{i+1}}{-h_i} M_i + \frac{x-x_i}{h_i} M_{i+1}, \end{aligned}$$

其中  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . 注意这里  $h_i$  是已知的, 而  $M_i$  是未知的.

对  $s_i''(x)$  积分两次可得,

$$s_i(x) = \frac{(x - x_{i+1})^3}{-6h_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} + A_i x + B_i,$$

其中  $A_i$  和  $B_i$  是待定常数. 利用条件

$$s_i(x_i) = f_i, \quad s_i(x_{i+1}) = f_{i+1},$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{h_i^2}{6} M_i + A_i x_i + B_i &= f_i, \\ \frac{h_i^2}{6} M_{i+1} + A_i x_{i+1} + B_i &= f_{i+1}. \end{aligned}$$

由此解得

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i+1}), \\ B_i &= \frac{x_{i+1} f_i - x_i f_{i+1}}{h_i} + \frac{h_i}{6} (x_i M_{i+1} - x_{i+1} M_i). \end{aligned}$$

因此就有

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} \\ &\quad + \left( \frac{f_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6} \right) (x_{i+1} - x) + \left( \frac{f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i+1}}{6} \right) (x - x_i), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \frac{1}{6h_i} [(x_{i+1} - x)^3 M_i + (x - x_i)^3 M_{i+1}] \\ &\quad - \frac{h_i}{6} [(x_{i+1} - x) M_i + (x - x_i) M_{i+1}] \\ &\quad + \frac{1}{h_i} [(x_{i+1} - x) f_i + (x - x_i) f_{i+1}]. \end{aligned}$$

注意到这里  $M_i$  仍然是未知的. 从上面的推导过程可知(1)(2)(4)已经满足. 上式求导可得

$$\begin{aligned} s_i'(x) &= \frac{1}{2h_i} [-(x_{i+1} - x)^2 M_i + (x - x_i)^2 M_{i+1}] \\ &\quad - \frac{h_i}{6} (-M_i + M_{i+1}) + \frac{1}{h_i} (-f_i + f_{i+1}), \end{aligned}$$

把上式中的  $i$  换成  $i - 1$  可得

$$\begin{aligned} s_{i-1}'(x) &= \frac{1}{2h_{i-1}} [-(x_i - x)^2 M_{i-1} + (x - x_{i-1})^2 M_i] \\ &\quad - \frac{h_{i-1}}{6} (-M_{i-1} + M_i) + \frac{1}{h_{i-1}} (-f_{i-1} + f_i). \end{aligned}$$

利用条件(3)

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h_{i-1}}(h_{i-1}^2 M_i) - \frac{1}{6}h_{i-1}(-M_{i-1} + M_i) + \frac{1}{h_{i-1}}(-f_{i-1} + yf_i) \\ &= \frac{1}{2h_i}(-h_i^2 M_i) - \frac{h_i}{6}(-M_i + M_{i+1}) + \frac{1}{h_i}(-f_i + f_{i+1}), \end{aligned}$$

上式可以改写成, 对所有的  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , 有

$$\frac{1}{6}h_{i-1}M_{i-1} + \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)M_i + \frac{1}{6}h_iM_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}.$$

注意上面是关于  $n+1$  个未知数  $M_0, M_1, \dots, M_n$  的  $n-1$  个线性方程, 剩下的两个方程由边界条件得到.

如果采用的是自然边界条件 $M_0 = s_0''(x_0) = 0, M_n = s_{n-1}''(x_n) = 0$ , 那么就可以得到如下的 $n-1$ 阶线性方程组

$$\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{b}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = 6 \begin{bmatrix} \frac{f_0}{h_0} - \frac{f_1}{h_0} - \frac{f_1}{h_1} + \frac{f_2}{h_1} \\ \frac{f_1}{h_1} - \frac{f_2}{h_1} - \frac{f_2}{h_2} + \frac{f_3}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{f_i}{h_{i-1}} - \frac{f_i}{h_i} + \frac{f_{i+1}}{h_i} \\ \vdots \\ \frac{f_{n-3}}{h_{n-3}} - \frac{f_{n-2}}{h_{n-3}} - \frac{f_{n-2}}{h_{n-2}} + \frac{f_{n-1}}{h_{n-2}} \\ \frac{f_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{f_{n-1}}{h_{n-2}} - \frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{f_n}{h_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

如果采用边界条件

$$s'_0(x_0) = f'_0 \quad \text{and} \quad s'_{n-1}(x_n) = f'_n,$$

那么就有

$$2h_0M_0 + h_0M_1 = 6\left(-\frac{f_0}{h_0} + \frac{f_1}{h_0} - f'_0\right)$$

$$h_{n-1}M_{n-1} + 2h_{n-1}M_n = 6\left(\frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_n}{h_{n-1}} + f'_n\right)$$

这两个方程跟前面的 $n-1$ 个方程一起就得到了一个关于 $n+1$ 个未知数 $M_i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ )的 $n+1$ 个线性方程:

$$2h_0M_0 + h_0M_1 = 6\left(-\frac{f_0}{h_0} + \frac{f_1}{h_0} - f'_0\right),$$

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{h_i} - 6\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}},$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$h_{n-1}M_{n-1} + 2h_{n-1}M_n = 6\left(\frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_n}{h_{n-1}} + f'_n\right),$$

写成矩阵形式 $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{b}$ , 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & & & \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = (M_0, M_1, M_2, \dots, M_n)^T$$

$$\mathbf{b} = 6 \begin{bmatrix} -\frac{f_0}{h_0} + \frac{f_1}{h_0} - f'_0 \\ \frac{f_0}{h_0} - \frac{f_1}{h_0} - \frac{f_1}{h_1} + \frac{f_2}{h_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{f_i}{h_{i-1}} - \frac{f_i}{h_i} + \frac{f_{i+1}}{h_i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{f_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{f_{n-1}}{h_{n-2}} - \frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{f_n}{h_{n-1}} \\ \frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_n}{h_{n-1}} + f'_n \end{bmatrix}.$$

**例10** 利用下表的数据构造自然样条插值函数 $S(x)$ , 并计算 $S(0.5)$ ,  $S(1.5)$ :

$x_i$	0	1	2	3
$f(x_i)$	-1	2	1	4

**解:** 在这个例子中 $n = 3, h_i = 1$ . 因此线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{b}$ 是

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -24 \\ 24 \end{bmatrix},$$

由此解出 $M_1 = -8, M_2 = 8$ . 再由 $M_0 = M_3 = 0$ 可知要求的自然样条插值函数为

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \frac{1}{6h_i}[(x_{i+1} - x)^3 M_i + (x - x_i)^3 M_{i+1}] \\ &\quad - \frac{h_i}{6}[(x_{i+1} - x) M_i + (x - x_i) M_{i+1}] \\ &\quad + \frac{1}{h_i}[(x_{i+1} - x) f_i + (x - x_i) f_{i+1}], \end{aligned}$$

即

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{13}{3}x - 1, & 0 \leq x < 1, \\ s_1(x) = \frac{8}{3}x^3 - 12x^2 + \frac{49}{3}x - 5, & 1 \leq x < 2, \\ s_2(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 12x^2 - \frac{95}{3}x + 27, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

由此可以计算出

$$S(0.5) = s_0(0.5) = 1, \quad S(1.5) = s_1(1.5) = 1.5.$$

**例11** 利用函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 在 $0, 0.5, 1, 1.5, 2$ 的取值和边界条件(a)构造三次样条插值函数.

**解:** 在这个例子中 $h = 0.5, n = 4$ .

$x_i$	$f(x_i)$	, $\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2}, \\ f'(x_0) &= f'(0) = 0, \\ f'(x_n) &= f'(2) = -0.0733. \end{aligned}$
0	1.0000	
0.5	0.7788	
1.0	0.3679	
1.5	0.1054	
2.0	0.0183	

对应的线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{b}$ 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & & & \\ 0.5 & 2 & 0.5 & & \\ & 0.5 & 2 & 0.5 & \\ & & 0.5 & 2 & 0.5 \\ & & & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = ???$$

解出  $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4$  后, 即可求出所要求的样条插值函数为

$$\begin{aligned}
 s_i(x) = & \quad \frac{1}{6h_i}[(x_{i+1} - x)^3 M_i + (x - x_i)^3 M_{i+1}] \\
 & - \frac{h_i}{6}[(x_{i+1} - x) M_i + (x - x_i) M_{i+1}] \\
 & + \frac{1}{h_i}[(x_{i+1} - x) f_i + (x - x_i) f_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$