第四节 线性方程组及高阶方程的数值解法 – 微分方程数值解

笔记本：	我的第一个笔记本
创建时间：	2017/5/9 15:11
URL：	https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52864_1

第四节 线性方程组及高阶方程的数值解法

学习指导：B 初值问题 第四节

本节介绍线性方程组及高阶方程的数值解法。

作业&思考：B 初值问题 第四节

讲义： B 初值问题 第四节

3.5 线性方程组及高阶方程的数值解法

一阶方程组的数值解法

一阶常微分方程初值问题(3.1.1)–(3.1.2)只是一类最简单的常微分方程模型，而在实际中我们可能遇到含多个未知函数的常微分方程组，或者遇到含未知函数高阶导数的高阶常微分方程。通常的求解思路是将一阶常微分方程求解的数值方法直接推广到多个方程的情形，由此数值求解一阶方程组；而对于高阶微分方程，则可通过变化化为一阶常微分方程组来求解。这里，我们先介绍一阶常微分方程组的解法。考虑如下的一阶常微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, \cdots u_m) \\ \dfrac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, \cdots u_m) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{du_m}{dt} = f_m(t, u_1, \cdots u_m) \end{cases} \tag{3.5.1}$$

其中函数$f_1, f_2, \cdots, f_m$ 为$m+1$个变元的连续函数，且未知函数$u_1, u_2, \cdots, u_m$ 满足如下的初值条件

$$u_k(t_0) = u_{0k}, \quad k = 1, 2, \cdots, m \tag{3.5.2}$$

引入向量记号

$$\vec{u} = (u_1, \cdots, u_m)^T; \vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)^T; \vec{u_0} = (u_{01}, \cdots, u_{0m})^T;$$

则初值问题(3.5.1)–(3.5.2)可以记为

$$\begin{cases} \vec{u}' = \vec{f}(t, \vec{u}^T) \\ \vec{u}|_{t=t_0} = \vec{u_0} \end{cases} \tag{3.5.3}$$

和一阶常微分方程初值问题类似，若向量函数$\vec{f}(t, \vec{u})$ 关于向量$\vec{u}$满足$Lipschitz$ 条件，则问题(3.5.3)的解存在且唯一。

求解常微分方程的数值方法可以直接推广到一阶方程组，只需用向量代替相应的标量。所有关于相容性、稳定性和收敛性的定义和结论都可推广到方程组。下面仅以改进$Euler$ 格式和四阶经

典$Runge-Kutta$格式为例说明一阶常微分方程组的求解.

对于初值问题(3.5.3), 由常微分方程的改进$Euler$ 格式(3.2.10) 可得求解一阶常微分方程组的$Euler$ 格式如下:

$$\begin{cases} \vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \dfrac{h}{2}(\vec{K}_1 + \vec{K}_2) \\ \vec{K}_1 = \vec{f}(t_n, \vec{u}_n^T) \\ \vec{K}_2 = \vec{f}(t_n + h, \vec{u}_n^T + h\vec{K}_1^T) \end{cases} \tag{3.5.4}$$

由格式(3.3.11)可得求解一阶常微分方程组的4 阶$RungeKutta$格式如下:

$$\begin{cases} \vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \dfrac{h}{6}(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4) \\ \vec{K}_1 = \vec{f}(t_n, \vec{u}_n^T) \\ \vec{K}_2 = \vec{f}(t_n + \dfrac{h}{2}, \vec{u}_n^T + \dfrac{h}{2}\vec{K}_1^T) \\ \vec{K}_3 = \vec{f}(t_n + \dfrac{h}{2}, \vec{u}_n^T + \dfrac{h}{2}\vec{K}_2^T) \\ \vec{K}_4 = \vec{f}(t_n + h, \vec{u}_n^T + h\vec{K}_3^T) \end{cases} \tag{3.5.5}$$

高阶常微分方程的数值求解

对于高阶常微分方程, 可通过变量替换的方式化为一阶方程组. 例如, m阶微分方程初值问题:

$$\begin{cases} u^{(m)} = f(t, u, u', u'', \cdots, u^{(m-1)}) \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \cdots, u^{(m-1)}(0) = u_{m-1} \end{cases}$$

引入新的变量$v_1 = u, v_2 = u', \cdots, v_m = u^{(m-1)}$,则$m$阶微分方程可以化为如下的一阶方程组:

$$\begin{cases} v'(1) = v_2 \\ v'(2) = v_3 \\ \cdots\cdots \\ v'(m) = f(t, v_1, v_2, \cdots, v_m) \end{cases} \tag{3.5.6}$$

初始条件化为

$$v_1(0) = u_0, v_2(0) = u_1, \cdots, v_m(0) = u_{m-1} \tag{3.5.7}$$

初值问题(3.5.6)−(3.5.7)可以用一阶常微分方程组的数值方法(譬如用(3.5.4), (3.5.5))求解. 当然, 高阶常微分方程组也可按此方法求解.

刚性问题

考虑微分方程组

$$\begin{cases} u_1' = -0.01u_1 - 99.99u_2 \\ u_2' = -100u_2 \\ u_1(0) = 2; u_2(0) = 1 \end{cases} \tag{3.5.8}$$

其解析解为

$$\begin{cases} u_1 = e^{-0.01x} + e^{-100x} \end{cases}$$

$$u_2 = e^{-100x}$$

考虑$x \to \infty$时, 函数u_1 和u_2 都会趋于0, 但是两者趋向于0的速度相差悬殊, u_2 下降的速度很快, 而u_1 下降的速度很慢, 如$u_2(0.1) \approx 4.5400e-005$, 而$u_1(100) \approx 0.3679$. 由于函数u_1 和u_2 要同步计算, 则要兼顾两个函数的特点. 一方面由于u_2 下降的速度很快, 为了保证数值方法的稳定性, 步长h 要取得足够小, 如用$Euler$格式, 步长$h < 2/100 = 0.02$; 另一方面, 由于u_1 下降的速度很慢, 可能需要求解较大的区间才能反映出系统(3.5.8)解的特点, 若取步长0.01计算到100, 就需要计算10000步, 这样会造成计算速度很慢. 这个问题就是在微分方程计算中遇到的刚性问题. 产生这个问题的主要困难来自方程的系数矩阵（或一般方程的$Jacobi$ 矩阵）的特征值分布, 方程组(3.5.8)的两个特征值按照绝对值相差悬殊, 这类方程称为刚性方程（$Stiff$ 方程）.

一般地, 对于线性常微分方程组

$$\overrightarrow{u}' = A\overrightarrow{u} + \overrightarrow{\phi}(t) \tag{3.5.9}$$

如果矩阵A 的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的实部$Re(\lambda_i)$ 均小于0, 则称

$$S = \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} |Re(\lambda_i)|}{\min\limits_{1 \le i \le n} |Re(\lambda_i)|} \tag{3.5.10}$$

为方程组(3.5.9)的刚性比. 若刚性比很大时, 则称方程组(3.5.9) 为刚性方程组. 对于初值问题(3.5.8)可计算其刚性比为10000, 为刚性方程组.

对于一般的常微分方程组(3.5.1), 可以用$Jacobi$ 矩阵

$$\overrightarrow{J}_u(t,u) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u_j}\right)_{m \times m}$$

代替(3.5.9)中的A 进行分析. 此外, 对于刚性方程组要采用绝对稳定性较好的方法, 如隐式$Euler$格式, 隐式$Runge-Kutta$格式等.

求解方程组和高阶方程的上机实习

例3.5.1. 用改进的$Euler$ 法求解常微分方程组

$$\begin{cases} u_1' = -0.01u_1 - 99.99u_2 \\ u_2' = -100u_2 \\ u_1(0) = 2; u_2(0) = 1 \end{cases}$$

求解区间为[0,500], 分别取步长 $h = 0.1, h = 0.02, h = 0.01$.

例3.5.2. 用四阶 $Runge-Kutta$ 格式求解一阶常微分方程组

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = 2u_3 \\ u_1(0) = 1, u_2(0) = 1, u_3(0) = 1 \end{cases} \tag{3.5.11}$$

求解区间为[0, 2], 分别取步长$h_1 = 0.5$和$h_2 = 0.1$.

例3.5.3. 川四阶$Runge-Kutta$格式求解2 阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} u''-2u^3=0 \\ u(1)=-1 \\ u'(1)=-1 \end{cases} \tag{3.5.12}$$