1 解：因为$z_1=\frac{1+i}{2}=e^{\frac{\pi}{4}}$,$z_2=\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}}$
所以$z_1\cdot z_2=2e^{\frac{\pi i}{12}}$,$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}e^{\frac{5\pi i}{12}}$
2 解：当$z=x+iy$时，
$w_1=\frac{z}{z^2+1}=\frac{x+iy}{x^2-y^2+1+2xyi}=\frac{x^3+xy^2+x+(y-x^2y-y^3)i}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$;
当$z=x-iy$时，
$w_2=\frac{z}{z^2+1}=\frac{x-iy}{x^2-y^2+1-2xyi}=\frac{x^3+xy^2+x-(y-x^2y-y^3)i}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$.
又$\overline{\frac{x+iy}{x^2-y^2+1+2xyi}}=\frac{\overline{x+iy}}{\overline{x^2-y^2+1+2xyi}}=\frac{z}{z^2+1}=\frac{x-iy}{x^2-y^2+1-2xyi}$
所以w_1与w_2共轭。
3 解：(1)令$w^4=i$ 则$w=e^{\frac{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}{4}}(k=0,1,2,3)$
故$w_1=e^{\frac{\pi}{8}i}$,$w_2=e^{\frac{5\pi}{8}i}$,$w_3=e^{\frac{9\pi}{8}i}$,$w_4=e^{13\frac{\pi}{8}i}$
(2)令$w^4=i$ 则$w=e^{\frac{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)}{4}}(k=0,1,2,3)$.
故$w_1=e^{-\frac{\pi}{8}i}$,$w_2=e^{\frac{3\pi}{8}i}$,$w_3=e^{\frac{7\pi}{8}i}$,$w_4=e^{11\frac{\pi}{8}i}$.
4 解：由$z^4+a^4=0$得$z^4=-a^4$则二项式方程的根为
$w_k=(\sqrt[4]{-1})_k\cdot a=e^{i\frac{2k\pi}{4}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot a,(k=0,1,2,3)$.
因此$w_0=\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)$,$w_1=\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i)$,
$w_2=\frac{a}{\sqrt{2}}(-1-i)$,$w_3=\frac{a}{\sqrt{2}}(1-i)$.
5 解：$\frac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)^2}=\frac{(e^{i5\varphi})^2}{(e^{i(-3\varphi)})^3}=e^{19\varphi i}$,
$e^{19\varphi i}=\cos 19\varphi+i\sin 19\varphi$.
6 解：(1)$x_n+iy_n=(1-i\sqrt{3})^n=2^ne^{-\frac{n\pi}{3}i}$,
(2)$x_{n-1}+iy_{n-1}=(1-i\sqrt{3})^{n-1}=2^{n-1}e^{-\frac{(n-1)\pi}{3}i}$
$x_{n-1}-iy_{n-1}=(1-i\sqrt{3})^{n-1}=2^{n-1}e^{\frac{(n-1)\pi}{3}i}$
则$(x_n+iy_n)(x_{n-1}-iy_{n-1})=2^{2n-1}e^{-\frac{\pi}{3}i}$
取上式虚部得$x_ny_{n-1}-x_{n-1}y_n=4^{n-1}\sqrt{3}$.
7 解：因为$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|^2=k^2$，从而$(\frac{z-z_1}{z-z_2})(\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}-\bar{z}_2})=k^2$
所以$|z|^2-z_1\bar{z}-\bar{z}_1z+|z_1|^2=k^2(|z|^2-z_2\bar{z}+|z_2|^2)$,
即$|z|^2(1-k^2)-\bar{z}(z_1-k^2z_2)-z(\bar{z}_1-k^2\bar{z}_2)=k^2|z|^2-|z_1|^2$,
进一步计算$\left|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right|^2=\frac{k^2(|z_2|^2+|z_1|^2-z_2\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2)}{(1-k^2)^2}=\frac{k^2|z_1-z_2|^2}{(1-k^2)^2}$,
故$\left|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right|=k\left|\frac{z_1-z_2}{1-k^2}\right|$, 此为圆的方程。