

南京大学

2016 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题 科目名称：数学分析

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1. (20 分) 计算：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right); \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

2. (20 分) 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

其中 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}$.

3. (15 分) 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在每一点附近都单调递增, 即 $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$, 使 f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中单调递增. 证明 f 在整个 \mathbb{R} 中单调递增.

4. (15 分) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} a_n$ 收敛. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

5. (20 分) 方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^3 + 2xy - z = 7$ 在 $(1, -2, 1)$ 附近决定了隐函数 $z = z(x, y)$. 计算二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2)$.

6. (20 分) 证明: 存在常数 $c > 0$, 使得当 $f \in C^1[0, 1]$ 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$ 时成立

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq c \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

7. (20 分) 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实正定对称方阵, $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为实数. 考虑 \mathbb{R}^n 中的函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^n b_i x_i.$$

证明: f 在 \mathbb{R}^n 中有唯一的最小值点.

8. (20 分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数. 证明: f 为凸函数当且仅当对任意区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, 均有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

注：本试题由南大考研群小碎花提供.