第一节 一维抛物型方程的差分方法 - 微分方程数值解

笔记本：	我的第一个笔记本
创建时间：	2017/6/12 12:21
URL：	https://iclass.bupt.edu.cn/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_11052_1&content_id=_52930_1

第一节 一维抛物型方程的差分方法

学习指导：D 抛物方程 第一节

本节介绍抛物型方程的最简差分格式。

作业&思考：D 抛物方程 第一节

讲义： D 抛物方程 第一节

§5.1. 最简差分格式

5.1.1 模型问题

1. 常系数线性抛物型方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases} \qquad (5.1.1)\ (5.1.2)\ (5.1.3)$$

其中a是正常数，$f(x,t)$是已知的连续函数。

注意：教材中$f(x,t) := f(x)$，即与t无关。

2. 常系数线性抛物型方程初值问题（Cauchy 问题）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \phi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \qquad (5.1.4)$$

5.1.2 初边值问题的数值求解

设问题相容（$\phi(0) = 0 = \phi(l)$），解适定且满足一定的光滑性。

1. 离散格式的建立（利用差分方法步骤）

（1）求解区域的离散化

做网格剖分，对 2D 求解域做均匀剖分：

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_N=l,\quad 0=t_0<t_1<\cdots<t_M=T,$$

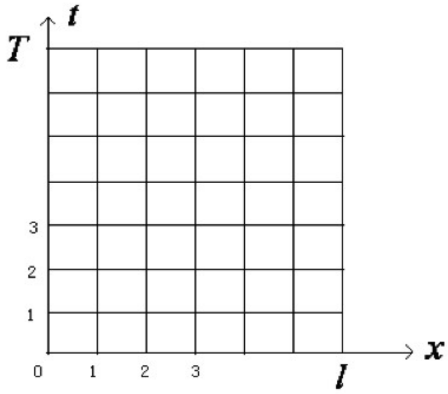
其中

$$x_i=ih,\quad t_k=k\tau .$$

空间步长和时间步长分别为

$$h=\frac{l}{N},\quad \tau=\frac{T}{M}.$$

矩形网格如下图所示



用 u_j^k 表示定义在网格结点 (x_j,t_k) 处的**数值解**。设 u_j^i, $i=0(1)k$; $j=0(1)N$ 的值已经求得，现在要建立第 $k+1$ 个时间层上的节点 (x_j,t_{k+1}), $j=1(1)N-1$ 处的数值解 u_j^{k+1}, $j=1(1)N-1$ 所满足的计算公式（差分格式）。

基本思想：通过对对微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

离散化来得到。常见方法：

（a）直观方法：数值微商近似代替导函数；

（b）待定系数法。

（2）差分格式的建立

◆ **二层格式：** u_j^{k+1}, $j=1(1)N-1$ 的差分格式中仅涉及当前时间层和第 k 个时间层上数值解 u_j^k, $j=0(1)N$。

例 1 向前差分格式

在网格节点 (x_j,t_k) 处对

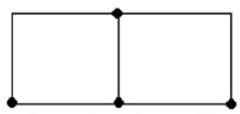
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

作近似（一种直接差分化方法）：

$$\frac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)}{\tau}\approx\frac{\partial u(x_j,t_k)}{\partial t} \qquad (5.1.5)$$

$$\frac{u(x_{j+1},t_k)-2u(x_j,t_k)+u(x_{j-1},t_k)}{h^2}\approx\frac{\partial^2 u(x_j,t_k)}{\partial x^2} \tag{5.1.6}$$

公式（5.1.5）和（5.1.6）涉及到的网格结点：



记 $f_j^k=f(x_j,t_k)$，则有

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}+f_j^k \tag{5.1.7}$$

或

$$\begin{cases}u_j^{k+1}=ru_{j-1}^k+(1-2r)u_j^k+ru_{j-1}^k+\tau f_j^k, \quad k=0,1,\cdots,M-1;\ j=1,\cdots,N-1\\ u_j^0=u(x_j,0)=\phi(x_j),\ \ u_0^k=u(0,t_k)=0,\ \ u_N^k=u(l,t_k)=0\end{cases} \tag{5.1.8}$$

其中，$r=a\dfrac{\tau}{h^2}$ 称为**网格比**。

显然，向前差分格式（5.1.8）是一种显格式，它无需求解线性代数方程组。

例 2 向后差分格式

在网格节点 (x_j,t_{k+1}) 处对

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

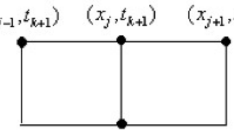
作近似（一种直接差分化方法），得

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a\frac{u_{j-1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j+1}^{k+1}}{h^2}+f_j^{k-1} \tag{5.1.9}$$

或

$$-ru_{j-1}^{k+1}+(1+2r)u_j^{k+1}-ru_{j+1}^{k+1}=u_j^k+\tau f_j^{k-1} \tag{5.1.10}$$

公式（5.1.10）中涉及到的网格结点：



显然，向后差分格式（5.1.10）是一种隐格式：需求解线性代数方程组。

注意：由（5.1.10）得到的线性代数方程组为对称三对角阵（对角占优），因此可以用“追赶法”进行求解，其运算复杂度为 $O(N-1)$。

例 3 **六点对称格式（Grank-Nicholson 格式）**

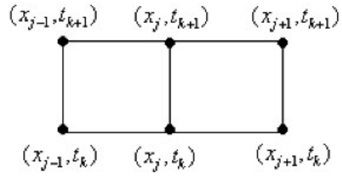
将向前、向后差分格式（5.1.7）和（5.1.9）做**算术平均**，可得

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=\frac{a}{2}[\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}]+\frac{1}{2}[f_j^{k+1}+f_j^k] \qquad (5.1.11)$$

或

$$-\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1}+(1+r)u_j^{k+1}-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1}=\frac{r}{2}u_{j-1}^k+(1-r)u_j^k+\frac{r}{2}u_{j+1}^k+\frac{\tau}{2}[f_j^k+f_j^{k+1}] \qquad (5.1.12)$$

公式（5.1.12）中涉及到的网格结点：



显然，Grank-Nicholson 格式（5.1.12）也是是一种隐格式。

◆ **三层格式**（多步法）：u_j^{k+1}，$j=1(1)N-1$ 的差分格式中涉及当前时间层以及第 k 和第 $k-1$ 个时间层上数值解 u_j^{k-1},u_j^k，$j=0(1)N$。

例 4 **Richardson 格式**

在网格节点 (x_j,t_k) 处对

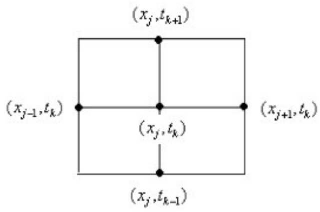
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

作近似（一种直接差分化方法），可得

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}=a\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}+f_j^k \qquad (5.1.13)$$

或

$$u_j^{k+1}=2r(u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k)+u_j^{k-1}+2\tau f_j^k \qquad (5.1.14)$$



显然，公式（5.1.14）是一种显格式，但需预先算出 $t=t_1$ 时间层上的数值解。

2. 上述各例的矩阵表示

令 $N-1$ 维向量

$$U^k=(u_1^k,u_2^k,\cdots,u_{N-1}^k)^T,\quad F^k=(f_1^k,f_2^k,\cdots,f_{N-1}^k)^T \qquad (5.1.15)$$

例 1 向前差分格式

$$u_j^{k+1}=ru_{j-1}^k+(1-2r)u_j^k+ru_{j+1}^k+\tau f_j^k$$

矩阵表示

$$A_1U^{k-1}=A_0U^k+\tau F^k \tag{5.1.16}$$

其中

$$A_0=\begin{bmatrix}1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r\end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}, \tag{5.1.17}$$

A_1 为单位矩阵。

例 2 向后差分格式

$$-ru_{j-1}^{k+1}+(1+2r)u_j^{k+1}-ru_{j+1}^{k+1}=u_j^k+\tau f_j^{k-1}$$

矩阵表示

$$A_1U^{k+1}=A_0U^k+\tau F^{k+1} \tag{5.1.18}$$

其中

$$A_1=\begin{bmatrix}1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+2r\end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}, \tag{5.1.19}$$

A_0 为单位矩阵。

例 3 六点对称格式（Grank-Nicholson 格式）

$$-\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1}+(1+r)u_j^{k-1}-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k-1}=\frac{r}{2}u_{j-1}^k+(1-r)u_j^k+\frac{r}{2}u_{j+1}^k+\frac{\tau}{2}[f_j^k+f_j^{k+1}]$$

矩阵表示

$$A_1U^{k+1}=A_0U^k+\frac{\tau}{2}(F^k+F^{k+1}) \tag{5.1.20}$$

其中

$$A_0=\begin{bmatrix}1-r & \frac{r}{2} & & \\ \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2}\end{bmatrix} \tag{5.1.21}$$

$$\begin{bmatrix} & & \frac{r}{2} & 1-r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & & & \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ & & & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} \qquad (5.1.22)$$

例 4 Richardson 格式

$$u_j^{k-1} = 2r(u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k$$

矩阵表示

$$A_2 U^{k-1} = A_1 U^k + A_0 U^{k-1} + 2\tau F^k \qquad (5.1.23)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4r & 2r & & & \\ 2r & -4r & 2r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 2r & -4r & 2r \\ & & & 2r & -4r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} \qquad (5.1.24)$$

A_0, A_1 均为单位阵。