MATLAB中PDE-Toolbox的应用

1、典型偏微分方程的描述

（1）椭圆型偏微分方程的一般形式为

$$-div(c\nabla u)+a*u=f(x,t)$$

即

$$-c*(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2})u+a*u=f(x,t)$$

其中c,a,f为给定的函数或者常数

（2）抛物线型偏微分方程的一般形式

$$d*\frac{\partial u}{\partial t}-div(c\nabla u)+a*u=f(x,t)$$

即

$$d*\frac{\partial u}{\partial t}-c*(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2})u+a*u=f(x,t)$$

其中d,c,a,f必须是常数

（3）双曲线型偏微分方程的一般形式

$$d*\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-div(c\nabla u)+a*u=f(x,t)$$

即

$$d*\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c*(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2})u+a*u=f(x,t)$$

其中d,c,a,f必须是常数

（4）特征值型偏微分方程的一般形式，注意它是（1）的变形，不能算独立的一类

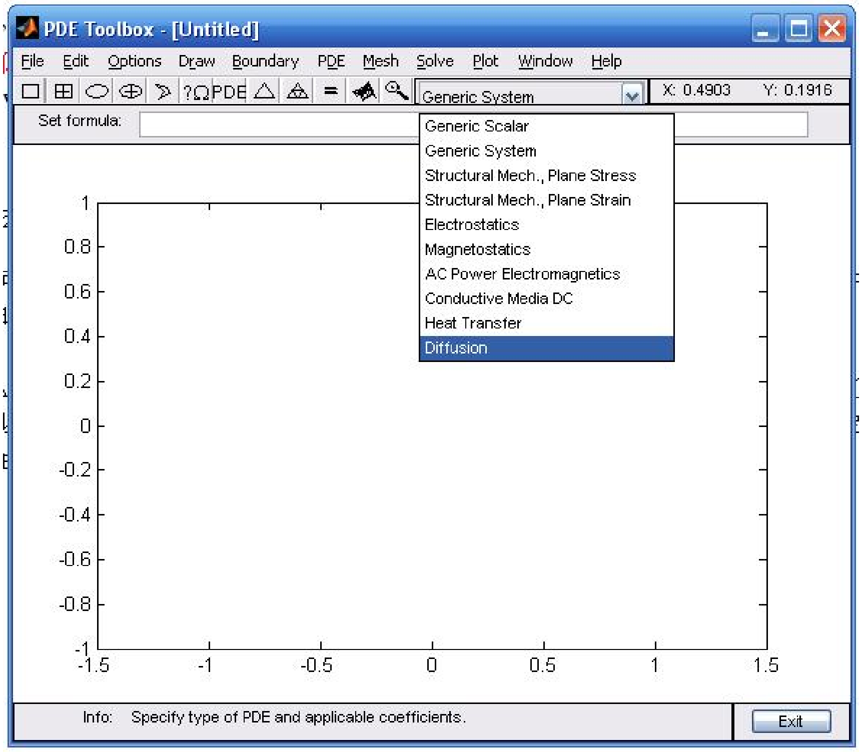
$$-div(c\nabla u)+a*u=\lambda*d*u$$

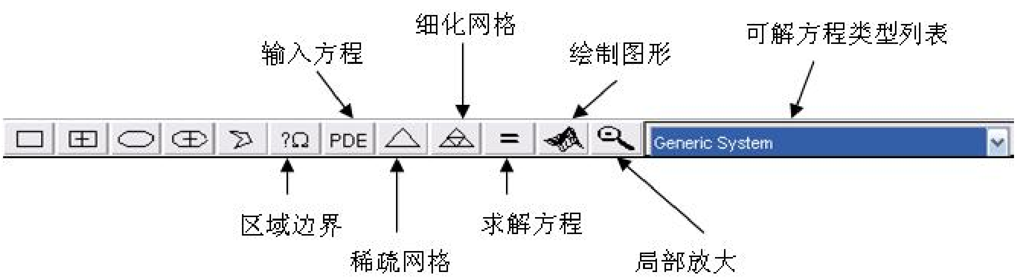
即

$$-c*(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2})u+a*u=\lambda*d*u$$

MATLAB 能够采用有限元的方法求解各种 PDE。MATLAB 为我们提供一个 pdetool 的交互界面，可以求解二元偏微分 u(x1,x2)(注意只能求解二元)。

方程的参数由 a、c、d 和 f 确定，求解域由图形确定，求解域确定好后，需要对求解域进行栅格化(这个是自动)。





2、偏微分方程边界条件的描述

一般在 PDE 中边界条件包括 Dirichlet(狄利克莱)条件和 Neumann(纽曼)条件：

（1）Dirichlet 条件

一般描述为

$h(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})*u|_{\partial\Omega}=r(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})$，其中$\partial\Omega$表示求解域的边界

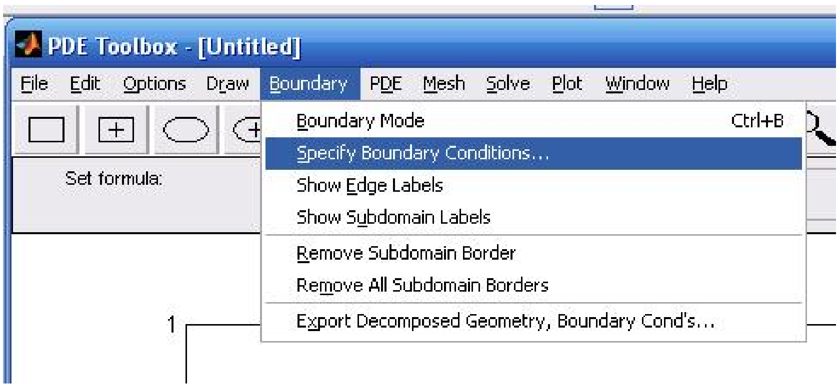
假设在边界上满足该方程，则只需给出 r 和 h 即可，它们可以是常数也可以是给定的函数

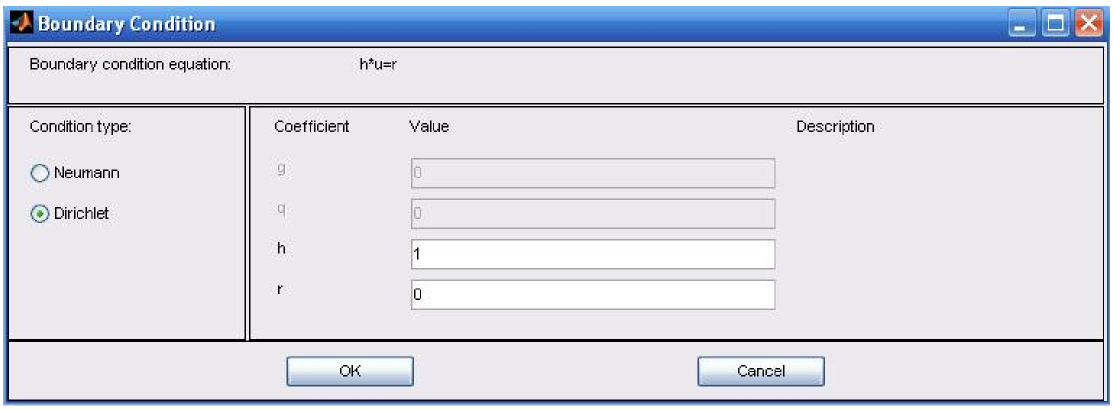
（2）Neumann 条件

一般描述为

$[n\ \ (c\nabla u)+q*u]|_{\partial\Omega}=g$，其中$\frac{\partial u}{\partial n}$表示$u$的法向偏导数

通过下面的操作调出边界条件设置，注意在这之前一定要使用【区域边界】按钮制定边界





3、求解实例

试求解双曲线型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2u=10$$

求解域 s 为

$$s1: x^2+y^2 \le 9$$

$$s2: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16} \le 1$$

$$s=(s1 \cup s2)-(s1 \cap s2)$$

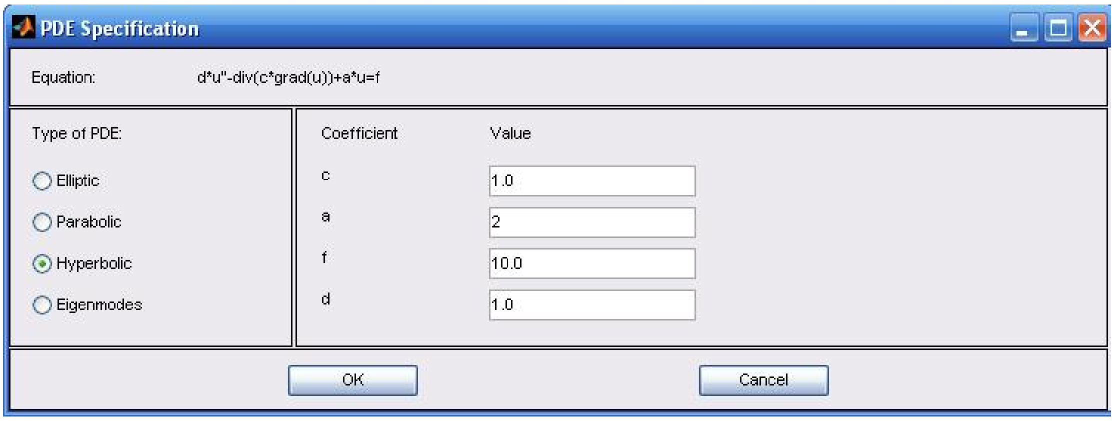
边界条件为

构成求解域的边界值都为 5

【解】

由给定的 PDE，可以令 d=1,c=1,a=2,f=10，对于抛物线和双曲线型偏微分方程 4 个系数必须是常数

step1:点击工具栏的【PDE】按钮，如下输入 PDE 的参数，注意选择 Hyperbolic

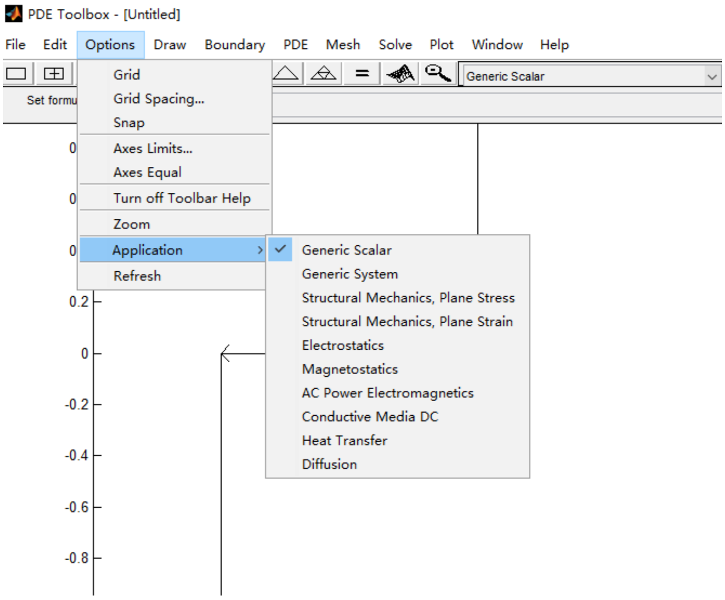


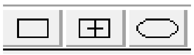
step2:绘制求解域

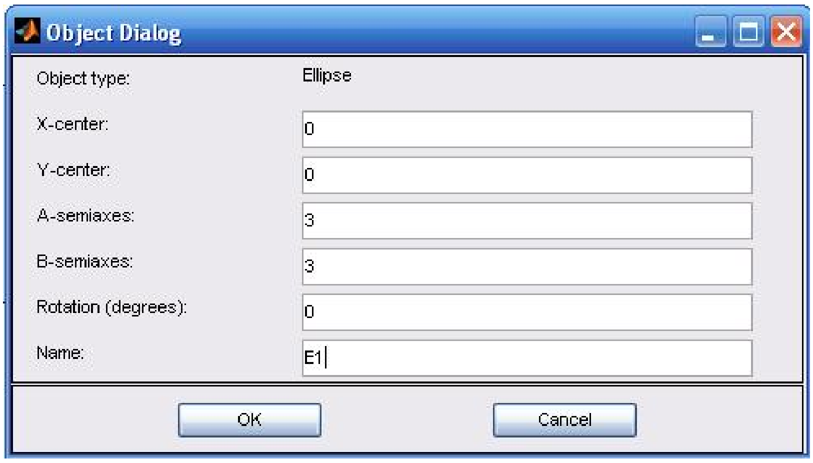
对坐标轴的操作可以在【Options】主菜单中操作，包括设置网格、坐标系范围等

(1)【Options】->Axis Limits 设置如下

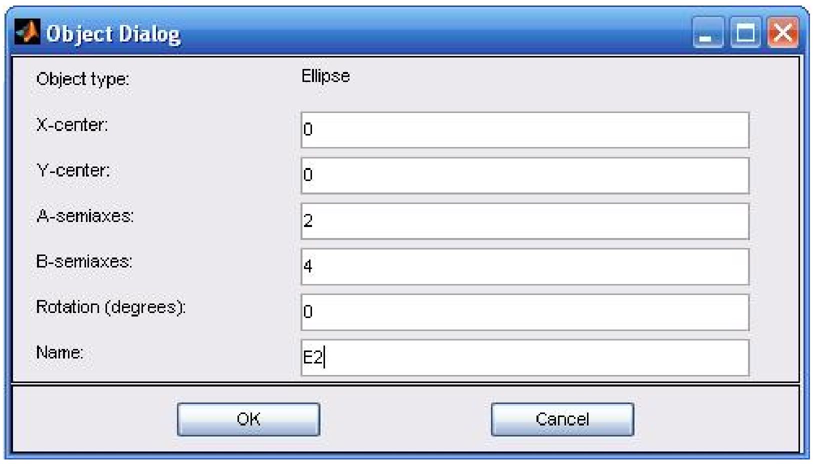
其它设置如下



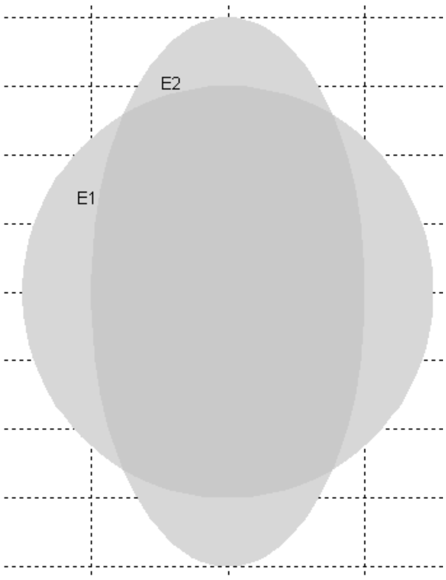
(2)点击工具栏上的第三个按钮  【绘制椭圆】，任意绘制一个椭圆，双击椭圆，设置如下



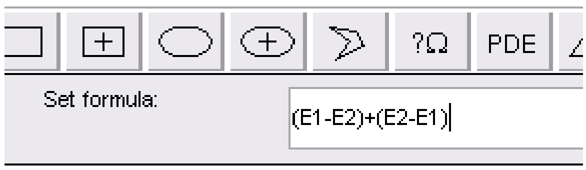
重复上面的操作，参数如下



于是得到

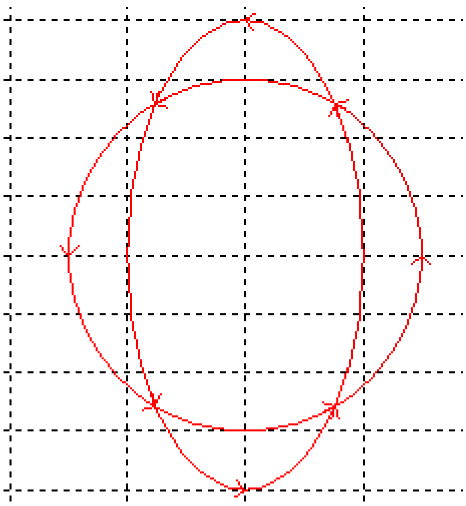


(3)在 set formula 中如下输入，“+”表示求并集，“-”表示求差集，注意没有直接求交接的操作符



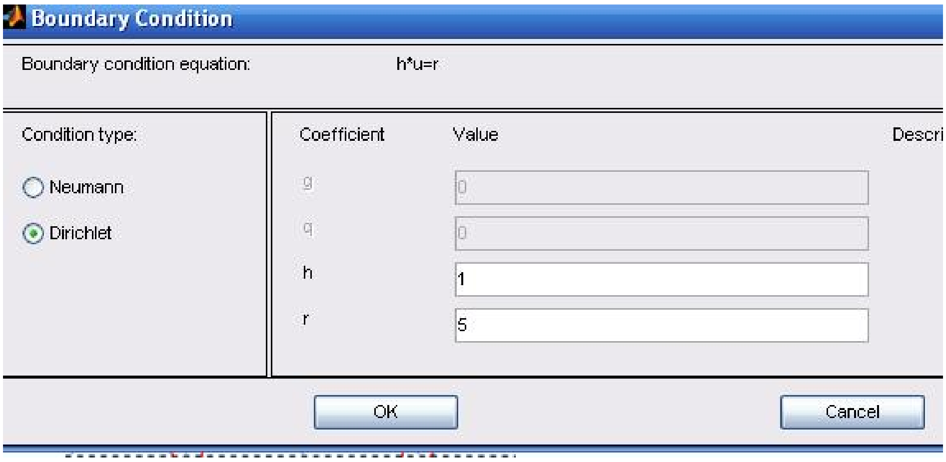
step3:边界条件和初值条件

初值条件可以通过【Solve】->【Parameters…】设置
边值条件设置如下
(1)点击工具栏的第 6 个按钮【区域边界】，显示如下



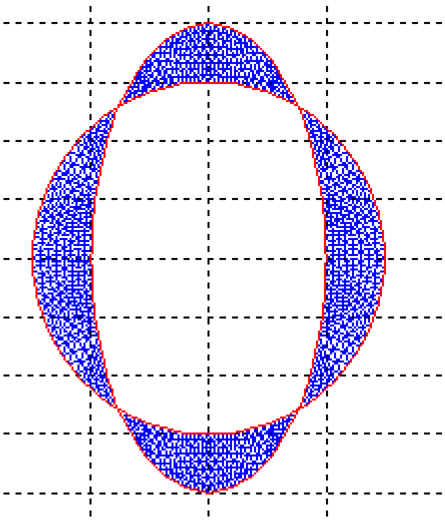
(2)【Boundary】->【Remove All Subdomain Borders】移除所有子域的边界，将得到所有子域合并成一个求解域

(3) 【Boundary】->【Secify Boundary Conditons…】设置边界如下，注意我们这里只有 Dirichlet 条件



step4:生成使用有限元方法求解方程所需的栅格

点击工具栏的第 8/9 个按钮，对求解域生成栅格，多次点击可以在原来基础上继续细化栅格，直到自己觉得满意为止，也可以通过【Mesh】主菜单进行精确控制

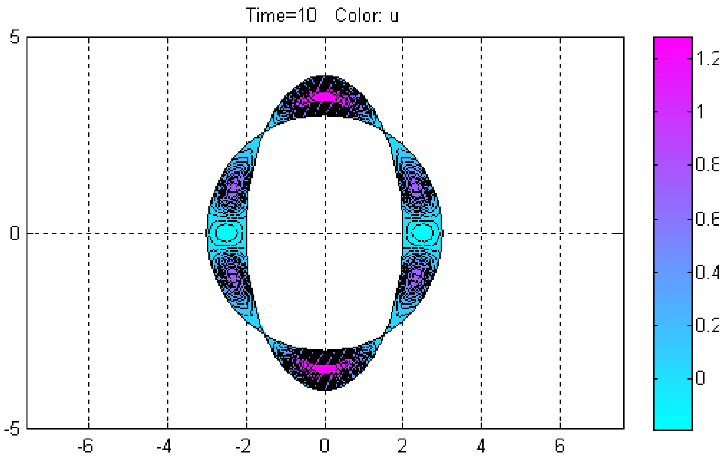


step5:求解方程

点解工具栏的第 10 个按钮“=”【求解方程】

step6:求解结果绘图

点击第 11 个按钮【绘制图形】，里面的选项很丰富，可以绘制等高线等好多，甚至播放动画，具体大家可以自己慢慢摸索



动画播放设置：

(1)【Solve】->【Parameters】设置合适的时间向量 Time

(2)【Plot】->【Parameters】选中【Animation】，点击后面的【Options】，设置播放速度和次数，比如 6fps 表示每秒 6 帧

(3)【Plot】->【Export Movie…】输入动画保存的变量名，比如 M

(4)在 Command Windows 中直接输入 movie(M)即可播放

(5)使用 movie2ve(M,’demo.avi’)命令可以将动画保存为 avi 文件