组合数学引论第四章答案

3. 记$A=\{1,2,\cdots,1000\}$,

A_1: 1到1000之间的平方数的集合,

A_2：1到1000之间的立方数的集合.

$\therefore |A|=1000$,

$|A_1|=\left\lfloor\sqrt{1000}\right\rfloor=31$,

$|A_2|=\left\lfloor\sqrt[3]{1000}\right\rfloor=10$,

$|A_1\cap A_2|=\left\lfloor\sqrt[6]{1000}\right\rfloor=3$,

$\therefore \left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right|=|A|-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|=1000-(31+10)+3=962$.

4.令$S_\infty=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c,\infty\cdot d\}$,则$S_\infty$的10组合数为$\binom{4+10-1}{10}=286$,

设集合A是S_∞的10组合全体，$|A|=286$,

定义性质集合$P=\{P_1,P_2,P_3\}$.

P_1 :10组合中b的个数大于或等于4；

P_2 :10组合中c的个数大于或等于6；

P_3 :10组合中d的个数大于或等于8；

将满足性质P_i的10组合全体记为A_i.

$$|A_1| = \binom{10-4+4-1}{10-4} = 84,$$
$$|A_2| = \binom{10-6+4-1}{10-6} = 35,$$
$$|A_3| = \binom{10-8+4-1}{10-8} = 10,$$

$|A_1 \cap A_2| = 1,$

$|A_1 \cap A_3| = 0,$

$|A_2 \cap A_3| = 0,$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0.$

$\therefore$ $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 158.$

5. 该方程的所有正整数解的个数为$\binom{11+3-1}{11} = 78.$

定义性质集合$P_i(1 \leq i \leq 3) : x_i$的值超过8.

A_i为满足P_i的所有数值的集合。

$|A_1|=|A_2|=|A_3|=10,$

$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=0,$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0.$

$\therefore$不超过8的正整数解的个数$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|A|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-|A_1\cap A_2\cap A_3|=48.$

6. (1)即7人错排,方案数为$7!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!})=1854;$
(2)全排列数减去错排即至少一人接到自己帽子的数目，故为$7!-1854=3186;$
(3)等于至少有一人接到自己帽子的数目减去恰好一人接到帽子的数目，前者等于(2)的答案，后者等于固定一个人，其余错排，有$7!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!})=1855$种，从而有$3186-1855=1331$种.
8. 记A为S的全排列全体，则$|A|=\frac{9!}{3!4!2!}=1260.$

定义性质集合$P=\{P_1,P_2,P_3\}$.

P_1 :全排列中全体a相邻；

P_2 :全排列中全体b相邻；

P_3 :全排列中全体c相邻；

用A_i表示A中具有性质P_i的全排列全体$(1\le i\le 3)$,则

$|A_1| = \frac{7!}{1!4!2!} = 105,$

$|A_2| = \frac{6!}{3!1!2!} = 60,$

$|A_3| = \frac{8!}{3!4!1!} = 280,$

$|A_1 \cap A_2| = \frac{4!}{1!1!2!} = 12,$

$|A_1 \cap A_3| = \frac{6!}{1!4!1!} = 30,$

$|A_2 \cap A_3| = \frac{5!}{3!1!1!} = 20,$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{3!}{1!1!1!} = 6.$

$\therefore$所求全排列数$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 871.$

13.(1)此题有两种理解。一种是部分包含，此时计算如下：计算$1 \sim 100000$之间有多少个不包含1,2,3,4的整数：

一位数：5个；

两位数：$5 \times 6 = 30$个；

三位数：$5 \times 6 \times 6 = 180$个；

四位数：$5 \times 6 \times 6 \times 6 = 1080$个；

五位数：$5 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6480$个；

$\therefore 1 \sim 100000$之间包含了数字1,2,3,4的整数有$100000-(5+30+180+1080+6480)=92225$个。

另一种理解是要包含全部1,2,3,4,此时有$4+4*5/2+5*5!+4*4!=960$种.

(2) 计算$1 \sim 100000$之间有多少个只包含1,2,3,4的整数：

一位数：4个；

两位数：$4 \times 4 = 16$个；

三位数：$4 \times 4 \times 4 = 64$个；

四位数：$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$个；

五位数：$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$个；

$\therefore 1 \sim 100000$之间只包含数字1,2,3,4的整数有$4+16+64+256+1024=1364$个。

15. 定义性质集合$P=\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$.

P_i :一对a_i相邻的字$(1 \leq i \leq n)$；

用A_i表示A中具有性质P_i的字的全体$(1 \leq i \leq n)$,则

$|A| = \frac{(2n)!}{2^n}$,

$|A_i| = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$,

$\left|A_i \cap A_j\right| = \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}$,

$\cdots$

$|A_{k1} \cap A_{k2} \cap \cdots \cap A_{km}| = \frac{(2n-m)!}{2^{n-m}}, 0 < m \leq n$

$\therefore$这种字的个数总共$\frac{(2n)!}{2^n} - C_n^1\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} + C_n^2\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} - \cdots + (-1)^n \cdot n!$.

17. (1) m层的错排数为：

$D_m = m![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^m\frac{1}{m!}]$.

每层的n册书进行全排列，有$n!$种；有m层，共有$(n!)^m$种.

$\therefore$方案数共有$(n!)^m \cdot D_m$种.

(2) 先在m层中任取k层进行错排，对该k层中的书进行全排列；剩下的$(m-k)$层中对应原层不变，对每层中的n本书要进行错排。

$\therefore$ 方案数共有$\sum_{k=0}^{m}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \cdot (n!)^k \cdot D_k \cdot (D_n)^{m-k}$种。

24.棋盘多项式为$1 + 8x + 21x^2 + 20x^3 + 6x^4$

25. $R(x,B) = R(x,B_1) \cdot R(x,B_2) \cdot R(x,B_3)$,

$R(x,B_1) = 1 + 4x + 2x^2$,

$R(x,B_2) = 1 + 3x + x^2$,

$R(x,B_3) = 1 + x$,

$\therefore R(x,B)=1+8x+22x^2+25x^3+12x^4+2x^5.$

$\therefore N(0)=w(0)-w(1)+w(2)-w(3)+w(4)-w(5)=5!-8\cdot 4!+22\cdot 3!-25\cdot 2!+12\cdot 1!-2\cdot 0!=20.$

若已知P_1去C_5,

$R(x,B)=R(x,B_1)\cdot R(x,B_2)\cdot R(x,B_3),$

$R(x,B_1)=1+2x,$

$R(x,B_2)=1+2x,$

$R(x,B_3)=1+x,$

$\therefore R(x,B)=1+5x+8x^2+4x^3.$

$\therefore N(0)=w(0)-w(1)+w(2)-w(3)+w(4)=4!-5\cdot 3!+8\cdot 2!-4\cdot 1!+0\cdot 0!=6.$

$\therefore P_1$去C_5的概率为$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

29. (1),等价于n个不同的球放入6个不同的盒子中，盒子内球数量不限的放球问题，方案数为6^n;

(2),设$A_i, i=5,6,\cdots,10$为第i层无人离开的乘电梯方案的集合，则问题即求$|\bigcap_{i=5}^{10}\overline{A_i}|$，利用容斥原理公式计算得结果为$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{6}{k}(6-k)^n$