**北京邮电大学2015——2016学年第一学期**

《矩阵论》期末考试试题评分参考标准

**一、**（10分）设 是线性空间 的一组基，线性变换 在这组基下的矩阵为 。 是另一组基，且 。 （1）求 在 下的矩阵 ；(2) 计算 。

解：（1）。 （5分）

（2）。 （5分）

**二、**（10分）计算 ，其中 。

解：。 （10分）

**三、**（15分） 设 。 （1）计算Givens变换 使得 ；

（2）计算Givens变换 使得 。

解：（1），或。 （7分）

（2），或。

（8分）

**四、**（10分）设 ，计算 。

解：。 （10分）

**五、**（10分）设矩阵

满足 ，证明存在非奇异矩阵 使得 。

证明：设矩阵的Jordan分解为。则由可知，即。从而可知每个必须是一个标量，且只能为1或-1或0.从而得证。 （10分）

**六、**（10分）设矩阵 是对称正定矩阵，证明存在唯一的对称正定矩阵 满足 。

证明：由于是对称正定矩阵，从而存在正交矩阵，使得，其中，且。令，则可以验证是对称正定矩阵，且满足。假设是另一个对称正定矩阵满足。设多项式满足，则，于是有。从而和可交换。于是存在正交矩阵使得和同时是对角阵，且对角元都为正。由于，于是有，从而有，即。唯一性得证。（10分）

**七、**（15分）（1）证明矩阵 为收敛矩阵（即 ）的充分必要条件是 。

（2）设三个实矩阵 满足 ，其中 和 都对称正定，证明 是

收敛矩阵。

证明：（1）设矩阵的Jordan分解为，则等价于，而这等价于，从而等价于。 （10分）

（2）设是的任一特征值，对应的特征向量为，即。由有。由于 和 都对称正定，于是有，从而有，即。从而有，即 是收敛矩阵。 （5分）

**八、**（20分）设矩阵 列满秩，即 。

（1） 写出 的奇异值分解的形式（不需证明）；

（2） 利用（1）中的奇异值分解给出 的Moore-Penrose广义逆 的表达式；

（3） 证明最小二乘问题 的解为。

解：（1），其中都是正交矩阵，是对角元都是正数的对角阵。（6分）

（2）。 （7分）

（3）分块，其中，则最小二乘问题 的解为=。

（7分）