Valutazione sulle Componenti Strettamente Connesse nei grafi

Relazione esercizio 3

Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati

Gemma Vaggelli
6348717

Ingegneria Informatica
Università degli studi di Firenze

1 Introduzione

In questa relazione andrò a descrivere i risultati ottenuti dalla sperimentazione dell'algoritmo per la ricerca delle componenti fortemente connesse all'interno di un grafo orientato.
Vedremo cosa cambia all'aumentare del numero di nodi e della probabilità di presenza di archi tra i nodi. Ci aspettiamo di vedere una convergenza a una sola componente connessa al crescere della probabilità e della dimensione.

2 Caratteristiche

2.1 Caratteristiche di un Grafo

Un grafo orientato è una raccolta di due insiemi (V, E).
V è un insieme finito mentre E è una relazione binaria in V.
V è un insieme dei nodi e E l'insieme degli archi. Un arco è un insieme u,v dove u,v appartengono a V e u != v. Poiché è orientato ogni arco ha una direzione, quindi un nodo di partenza e un nodo di arrivo.

Un grafo orientato si dice **fortemente connesso** se due vertici qualsiasi sono raggiungibili l'uno dall'altro

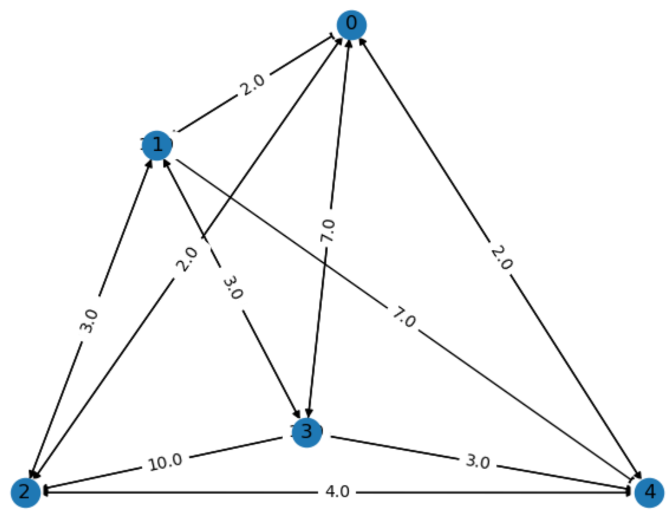

Figura 1: Esempio di un grafo orientato fortemente connesso

Un grafo viene rappresentato comunemente con:

- **Liste di adiacenza**
- **Matrice di incidenza**

In questo esercizio ho scelto la prima rappresentazione.

2.2 Depht First Search

Per trovare le componenti fortemente connesse è necessario introdurre un algoritmo di esplorazione in profondità del grafo. In particolare la DFS, che appena scopre un arco continua a esplorare da questo, e se necessario re-inizia da diversi nodi.

```
DFS(G)
    for ogni vertice u in G.V
        u.color = WHITE
        u.pi = NIL
    time = 0
    for ogni vertice u in G.V
        if u.color = WHITE
            DFS - VISIT(G, u)

DFS - VISIT(G, u)
    time = time + 1
    u.d = time
    u.color = GRAY
    for ogni v in G.Adj[u]
        if v.color = WHITE
            v.pi = u
            DFS - VISIT(G, v)
    u.color = BLACK
    time = time + 1
    u.f = time
```

Questo algoritmo di esplorazione ha un costo in termini di tempo di $\Theta(|V| + |E|)$

2.3 Componenti Strettamente Connesse

Dato un grafo G lo pseudoalgoritmo per trovare le componenti fortemente connesse di G è il seguente:

Strongly Connected Components of G:

1. DFS(G)
2. si calcola la trasposta di G

3. si esegue la DFS(G^T) però prendendo i nodi in ordine decrescente rispetto ai tempi u.f
4. si restituiscono le radici delle componenti fortemente connesse

Strongly Connected Components of G impiega $\Theta(|V| + |E|)$

3 Documentazione

Andiamo adesso a vedere come si comporta la SCC al crescere della probabilità di presenza di archi e al crescere della dimensione. In particolare andrò a differenziare la probabilità di un fattore 10, quindi andrò a elencare un grafico per ogni incremento nella probabilità. Gli esperimenti vengono svolti in questo caso 20 volte, e viene fatta una media per avere risultati più attendibili e precisi. I plot rappresentano i valori medi dei 20 esperimenti. La dimensione dei grafi viene incrementata fino a un numero pari a 100 nodi. Qui nelle figure vediamo sull'asse delle x la dimensione che aumenta di 1 nodo alla volta, mentre sulla y abbiamo due funzioni: la prima rappresenta il numero di SCC trovate per il grafo casuale con la propria probabilità di presenza di archi; la seconda è il tempo impiegato per trovare il numero di SCC.Nella colonna di destra andiamo a zoomare per vedere meglio i tempi.

Hardware I test sono stati eseguiti su un PC Desktop con sistema operativo Windows 10 Home a 64 bit, un processore Intel Core i5-7200U con 8Gb di RAM e Visual Studio Code come IDE.

3.1 Grafici

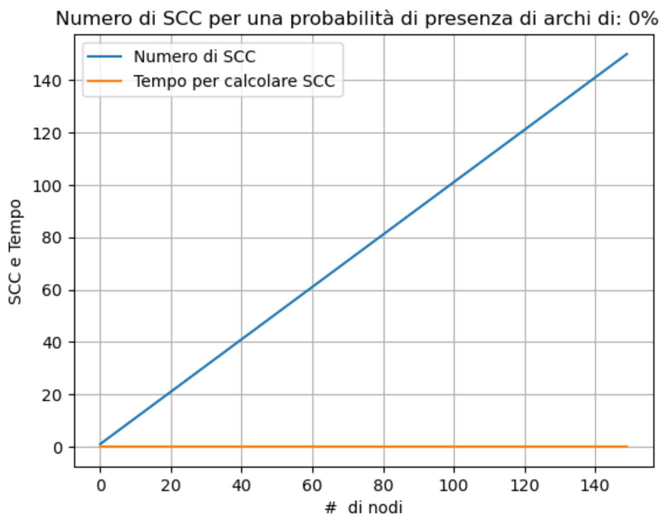

Figura 2: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi dello 0%

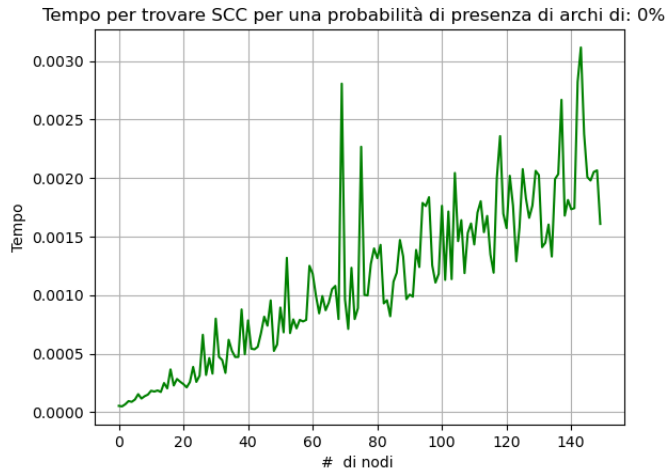

Figura 3: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi dello 0%

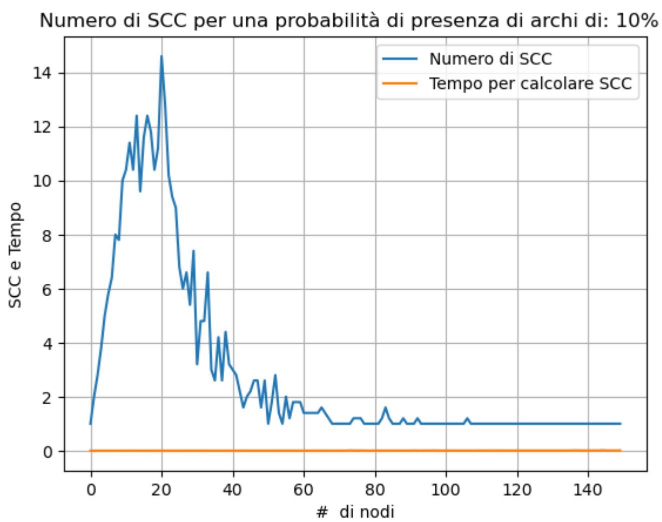

Figura 4: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 10%

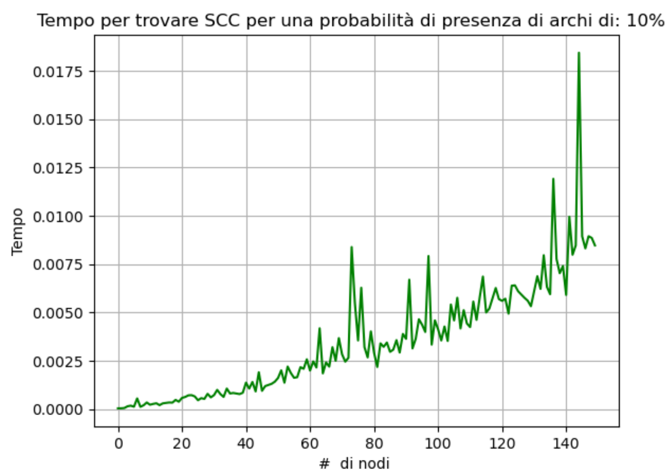

Figura 5: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 10%

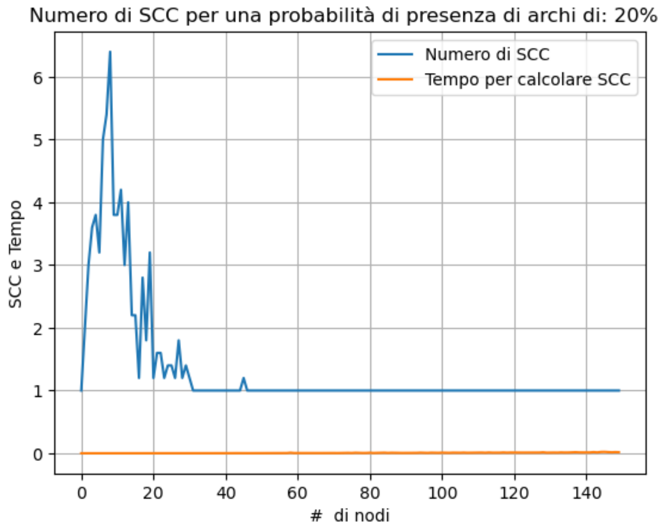

Figura 6: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 20%

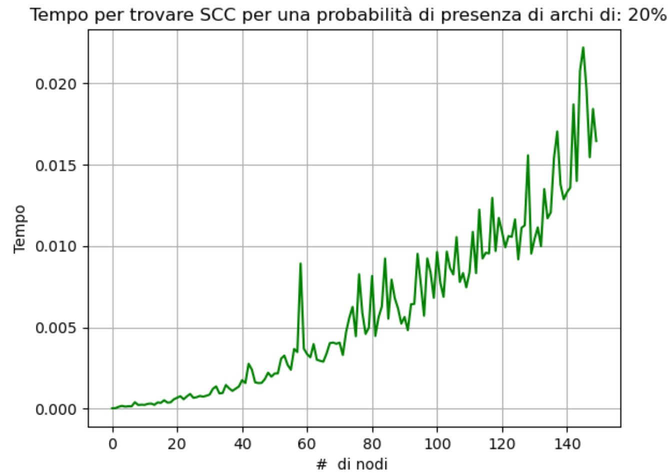

Figura 7: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 20%

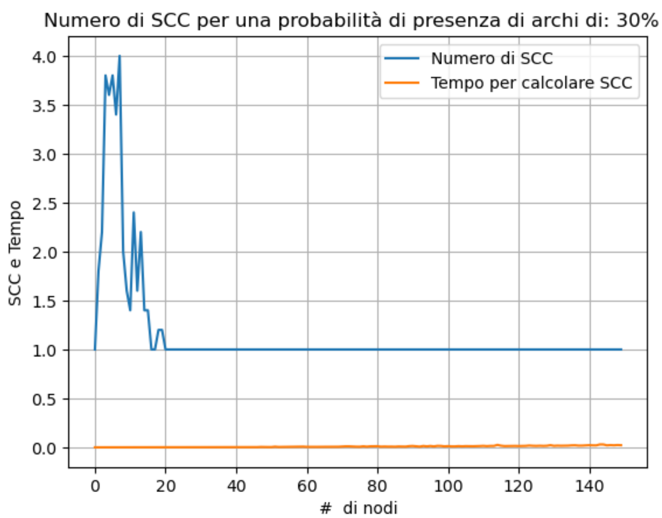

Figura 8: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 30%

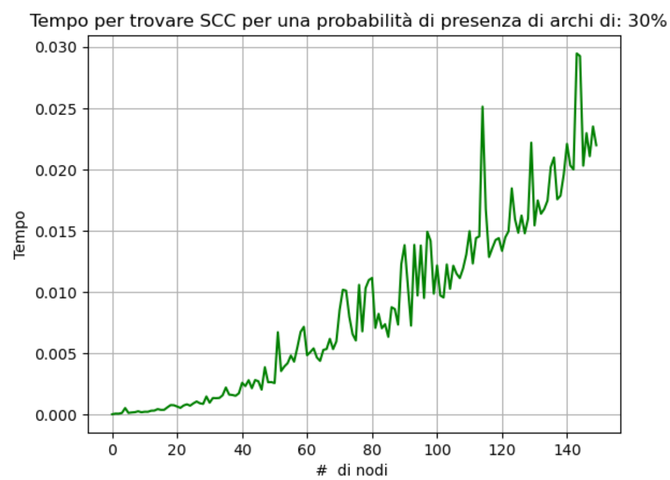

Figura 9: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 30%

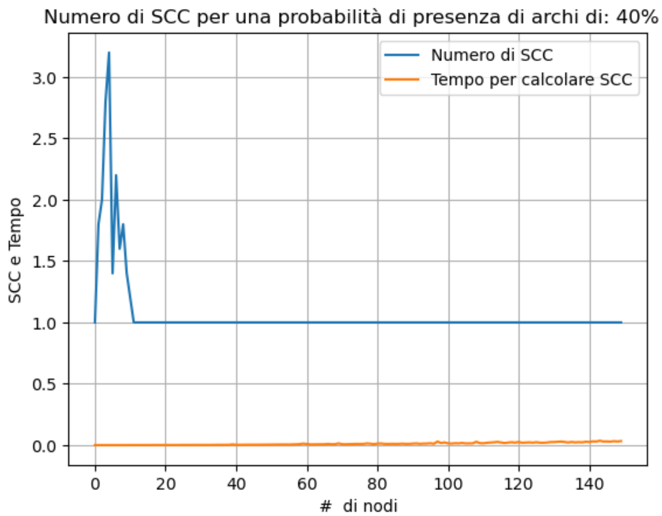

Figura 10: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 40%

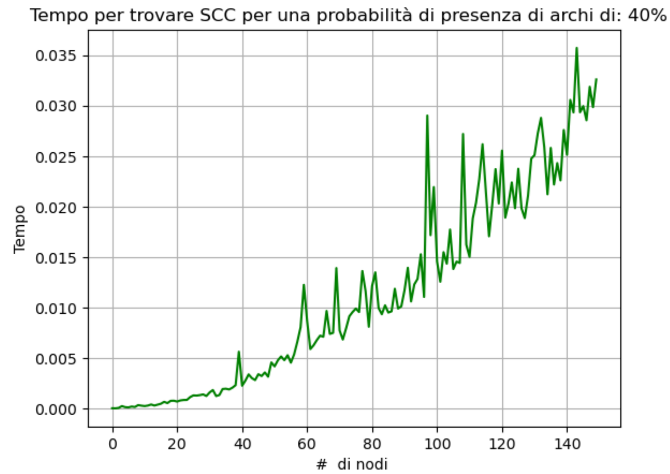

Figura 11: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 40%

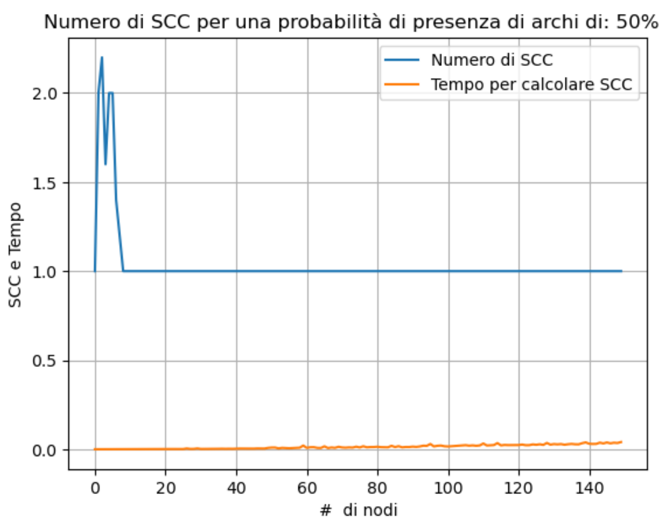

Figura 12: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 50%

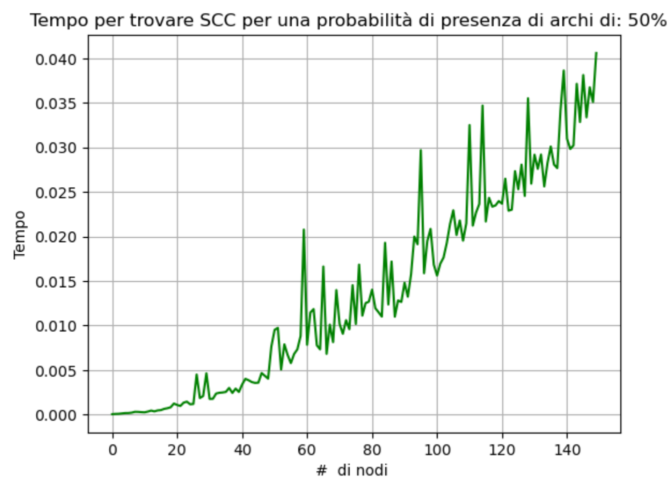

Figura 13: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 50%

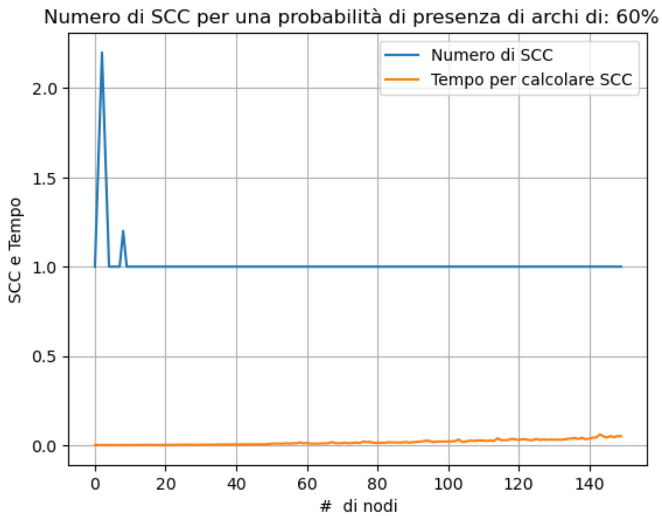

Figura 14: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 60%

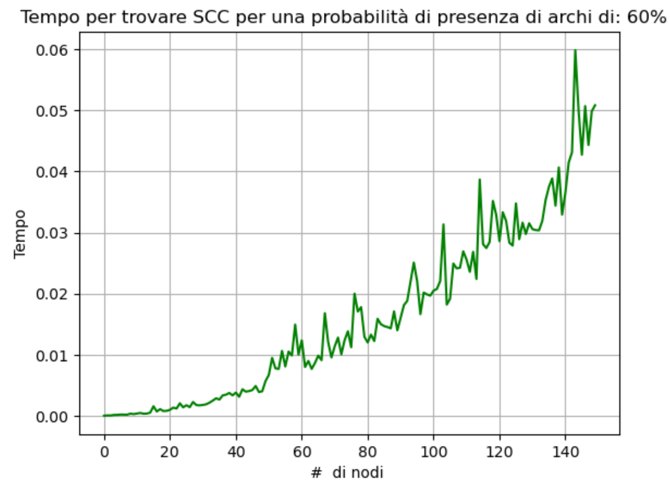

Figura 15: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 60%

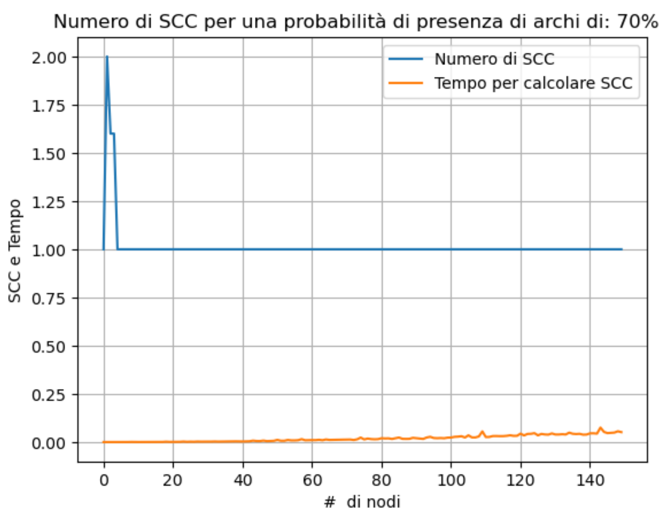

Figura 16: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 70%

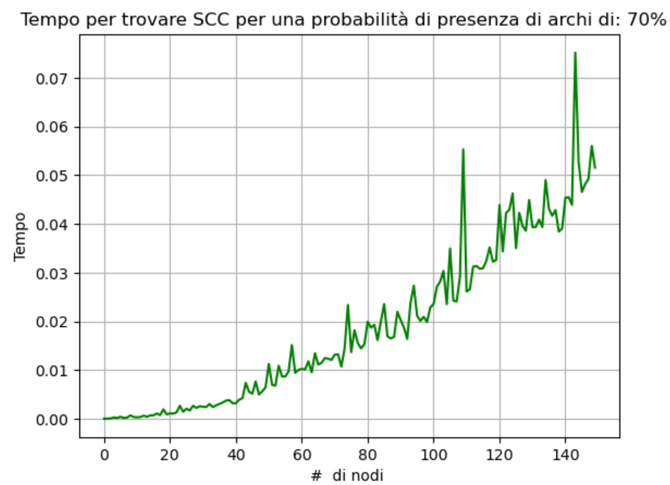

Figura 17: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 70%

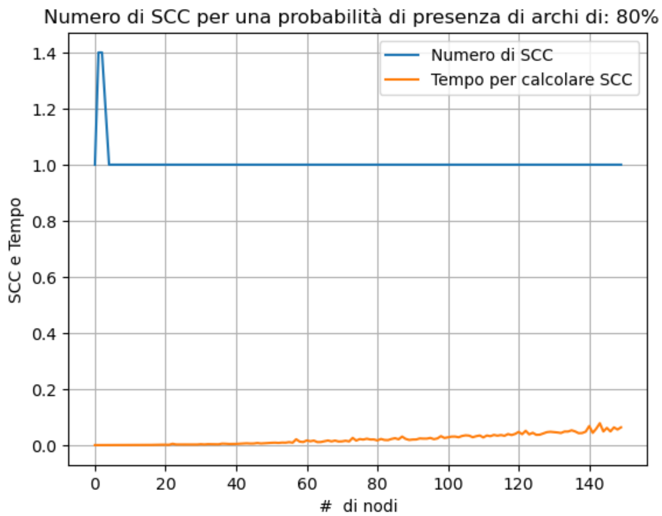

Figura 18: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi dell' 80%

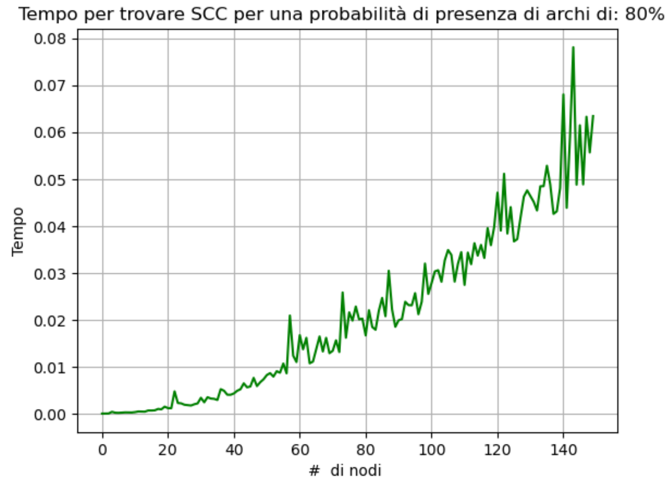

Figura 19: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi dell' 80%

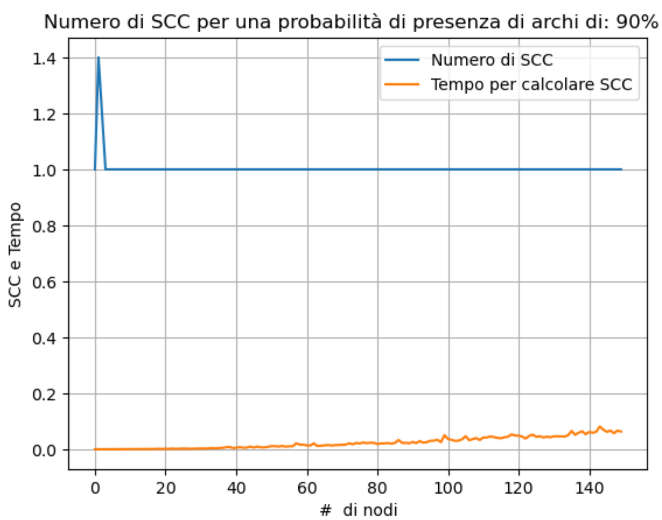

Figura 20: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 90%

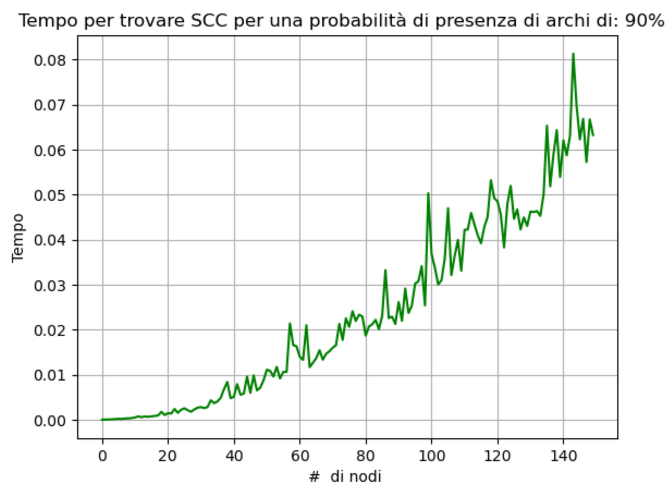

Figura 21: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 90%

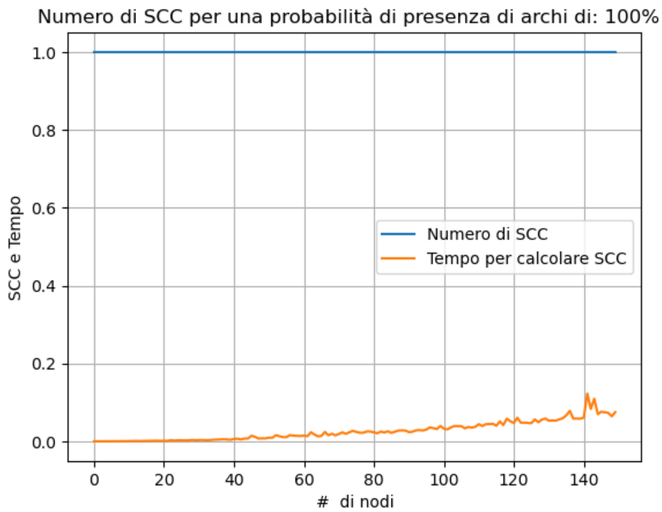

Figura 22: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 100%

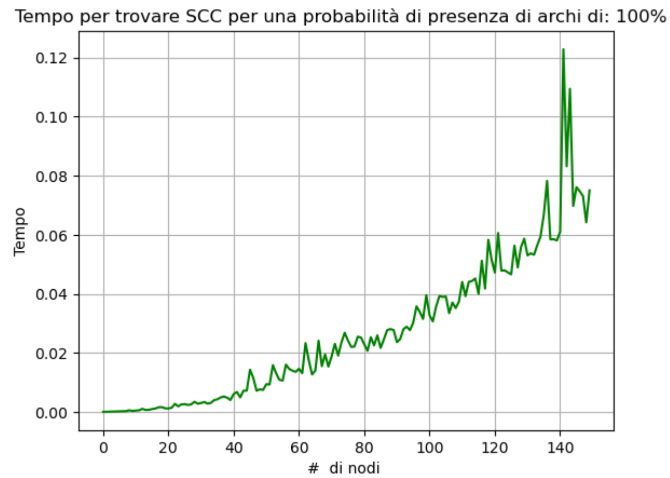

Figura 23: Numero di SCC per probabilità di presenza di archi del 100%

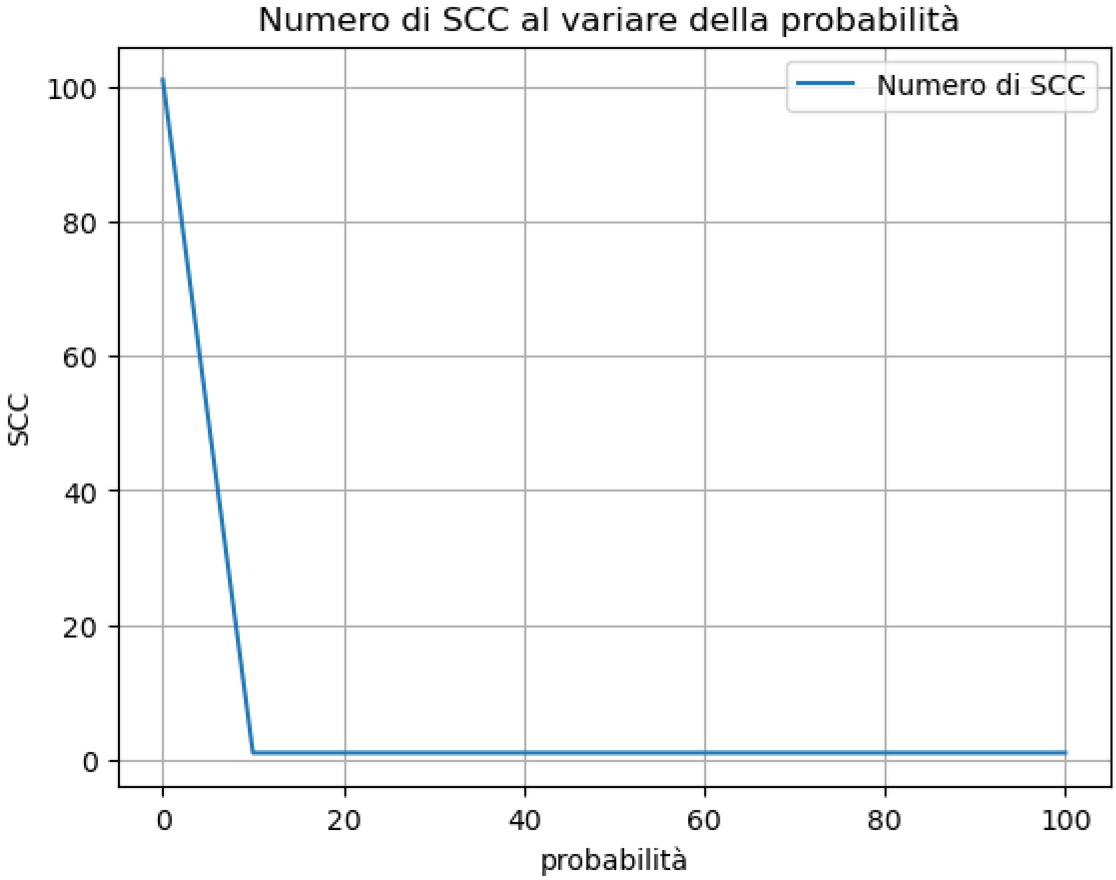

Figura 24: Comportamento del grafo all' incremento della probabilità

4 Analisi e Conclusione

Analizzando cosa succede al numero di Componenti Strettamente Connesse al crescere della probabilità di presenza di archi, il numero di componenti fortemente connesse dovrebbe tendere a 1. Questo dovrebbe avvenire poiché ad esempio a probabilità 100% ogni nodo è connesso a tutti gli altri nodi.
Ciò si vede dai grafici precedenti (Figure 2 - 22) e da quello rappresentato in Figura 24 al crescere della probabilità.

Al tendere della probabilità a 0%, invece, nessun nodo è collegato a un qualsiasi altro nodo, quindi il numero di SCC dovrebbe essere uguale al numero di nodi.
Anche questo fatto si nota dai grafici

Guardando inoltre i tempi delle SCC, si nota che al crescere della probabilità il tempo tende asintoticamente a N^2, vediamone il perché. Il tempo di ogni SCC è un $\Theta(|V| + |E|)$. Nel caso in cui la probabilità è del 100% , e quindi si ha un numero di archi pari a $(N-1) * N$, il numero di archi è asintoticamente uguale a N^2. Perciò al crescere della dimensione si ha un andamento asintotico del tempo impiegato pari a N^2