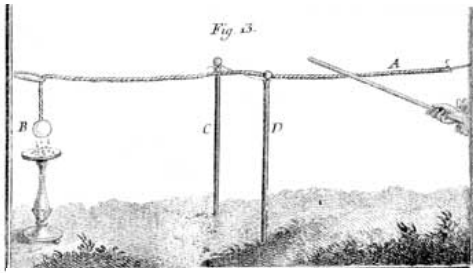


Nel 1729 Stephen Gray, un pensionante di un istituto caritatevole inglese scoprì che il fenomeno dell'attrazione elettrica di piccoli corpi poteva manifestarsi all'estremità di una corda inumidita lunga varie decine di metri quando un corpo elettrizzato, come una bacchetta di vetro strofinato, veniva posto a contatto con l'altra estremità. Circa sessanta anni prima il tedesco Otto von Guericke, borgomastro di Magdeburgo,



Esperimento di S. Gray sulla conduzione elettrica

utilizzando una rudimentale macchina elettrostatica da lui sviluppata, aveva osservato che dei pezzi di spago collegati a questa macchina si elettrizzavano per tutta la loro lunghezza, tuttavia egli non dedusse come Gray la propagazione del fenomeno elettrico lungo gli spaghi. Gray inoltre scoprì che se la corda era sostenuta con fili metallici gli effetti elettrici cessavano di essere trasmessi, mentre lo stesso non accadeva se le sospensioni erano fatte con cordicelle di seta, così dedusse che mentre i fili metallici disperdevano le proprietà elettriche, lo stesso non accadeva

per i fili di seta. Questa capacità fu descritta da un suo collaboratore, Jean Théophile Desaguliers introducendo la terminologia dei *conduttori* e degli *isolanti*.

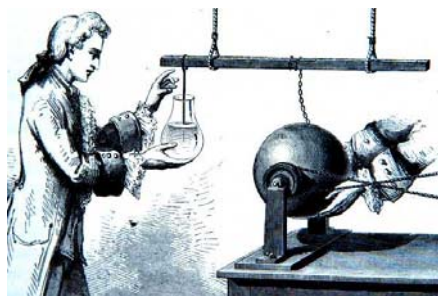
Nella prima metà del 18° secolo lo scienziato francese Charles François Cisternay Du Fay stimolato dai lavori di Gray iniziò una metodica attività di ricerca intorno alla fenomenologia elettrica e partendo da un riesame storico dell'attività svolta dai suoi predecessori formulò un preciso programma di ricerca. Attraverso tale studio Du Fay verificò che tutti i materiali, eccetto i metalli potevano essere elettrizzati per strofinio deducendo che l'elettricità è una proprietà della materia; come altri prima di lui, Du Fay notò che gli oggetti strofinati non sempre attraevano piccoli corpi ma, in certi casi li respingevano. A partire da tale constatazione realizzò un esperimento in cui una sottile asta di legno imperniata come un ago magnetico aveva fissata ad una estremità un pezzo di materiale resinoso elettrizzato, avvicinando a questo un altro pezzo dello stesso materiale elettrizzato osservava che il primo veniva respinto mentre un pezzo di vetro elettrizzato lo attraeva. Da qui Du Fay dedusse che dovevano esistere due tipi di elettricità che denominò *elettricità resinosa* ed *elettricità vitrea* e propose una teoria secondo la quale i corpi non elettrizzati hanno i due tipi di elettricità in uguale misura. Se due corpi posseggono lo stesso tipo di elettricità si respingono mentre se posseggono tipi diversi si attraggono. Infine verificò che i metalli e gli oggetti bagnati sono buoni conduttori del fenomeno elettrico mentre i materiali che si elettrizzano facilmente, come l'ambra o il vetro, non lo sono.



Charles François Cisternay Du Fay

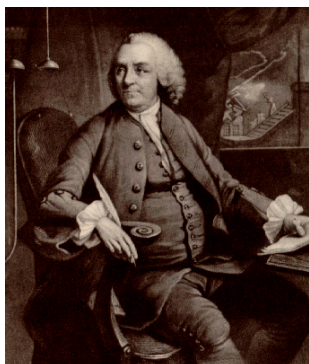
Durante tutto il 18° secolo furono sviluppate molteplici macchine elettrostatiche e l'interesse verso questi effetti si estese rapidamente anche alla gente comune, così erano frequenti le dimostrazioni pubbliche di tali fenomeni. Al di là dello spettacolo, l'attenzione degli scienziati era rivolta ai possibili impieghi di questi effetti e in questo periodo si ebbero i primi tentativi di applicazione dell'elettricità alla medicina. Probabilmente, nel tentativo di valutare gli effetti sulla salute dell'acqua elettrizzata, il canonico Ewald Jurgen von Kleist, in Pomerania, nel 1745 inserì un chiodo nel collo di una bottiglia riempita con acqua e con esso toccò il conduttore di una macchina elettrica in funzione. Poi, dopo aver interrotto il contatto sfiorò con l'altra mano il chiodo avvertendo un'intensa scossa. Nello stesso anno, indipendentemente, il ricercatore olandese Pieter

Van Musschenbroek a Leyda ripeté il medesimo esperimento e a questo dispositivo in grado di immagazzinare il fenomeno elettrico fu dato il nome di *bottiglia di Leyda*. Tale dispositivo fu successivamente migliorato disponendo dei fogli di materiale conduttore sia all'interno che all'esterno della bottiglia ottenendo l'immagazzinamento dell'elettricità anche per alcuni giorni.



Carica di una bottiglia di Leyda attraverso una rudimentale macchina elettrostatica.

Le pubbliche esibizioni del fenomeno elettrico attirarono l'attenzione di Benjamin Franklin nelle colonie dell'America del nord. Franklin ripeté molti degli esperimenti ormai ben noti in Europa ma formulò una teoria dei fenomeni elettrici dissimile



Benjamin Franklin

da quella di Du Fay. Egli ipotizzò che nello strofinio tra due corpi non vi fosse creazione di elettricità ma ciò che accadeva era che uno dei corpi perdeva dell'elettricità che l'altro acquistava; pertanto secondo Franklin c'è un solo tipo di elettricità anziché due. Franklin inoltre constatò che l'elettricità si disponeva sui conduttori interno ed esterno della bottiglia di Leyda in quantità uguali ma di segno opposto, ossia un conduttore presenta un eccesso e l'altro un difetto di elettricità. Attraverso tali esperimenti Franklin arrivò alla conclusione che il fulmine aveva natura elettrica e per provare tale ipotesi caricò una bottiglia di Leyda utilizzando l'elettricità immagazzinata nelle nubi durante un temporale facendo uso di un aquilone trattenuto da un filo metallico.

Nella seconda metà del 18° secolo la fenomenologia relativa all'elettrostatica poteva considerarsi nota; secondo Du Fay si riteneva che esistessero due tipi di cariche, una positiva e l'altra negativa oppure, come sosteneva Franklin la carica era di un solo tipo e poteva essere aggiunta o sottratta ad un corpo inizialmente neutro. Era nota la conservazione della carica, cioè che la somma delle cariche positive e negative si mantiene costante. I materiali potevano essere distinti in conduttori, nei quali il fenomeno elettrico si spostava liberamente e in isolanti. Infine era noto che cariche dello stesso tipo si respingono e cariche di tipo diverso si attraggono e inoltre si sapeva che la forza di attrazione o di repulsione diminuisce di intensità con la distanza tra i corpi carichi.



Riproduzione dell'esperimento di B. Franklin per lo studio dell'elettricità atmosferica



Charles Augustin Coulomb

Nel 1788 Charles Augustin Coulomb, un ingegnere francese, servendosi di una bilancia a torsione da lui realizzata circa nove anni prima, verificò che la forza di attrazione o di repulsione tra due corpi carichi puntiformi dipende dall'inverso del quadrato della distanza tra i corpi. La bilancia di torsione è costituita da una leggera sbarretta isolante alle cui estremità sono collocate due uguali sferette metalliche; questa sbarretta è sospesa tramite un lungo filo sottile e, in assenza di forze, la sbarretta si dispone in una certa posizione di equilibrio. Se una delle due sferette viene caricata ed avvicinata ad un'altra pure carica, la forza elettrica agente sulla sferetta mobile determinerà la rotazione della sbarretta fino a quando la torsione del filo equilibrerà la forza agente. Siccome il filo è sottile, l'azione di una debole forza sulla sferetta mobile è in grado di determinare una notevole

deviazione della sbarretta rispetto alla posizione di equilibrio originaria e l'angolo di rotazione risulterà proporzionale a tale forza. Utilizzando diverse quantità di carica e variando la distanza tra le sferette Coulomb verificò la legge ora nota col suo nome.

A partire dalla formulazione della legge di Coulomb la fenomenologia elettrica nota divenne classificabile attraverso uno schema teorico di carattere generale e contemporaneamente si aprirono nuove direttrici di indagine guidate da tale schema.

Con la scoperta dell'elettrone attraverso la determinazione del rapporto tra la sua carica e la sua massa da parte di Joseph John Thomson nel 1887 e l'identificazione dell'atomo come componente fondamentale della materia fu possibile fornire una spiegazione della fenomenologia dell'elettrizzazione per strofinio. In corrispondenza dello strofinio della bacchetta con un panno di lana alcuni elettroni della bacchetta sono strappati dall'azione abrasiva e vengono trasferiti al panno. Pertanto la bacchetta acquisisce una carica netta



Bilancia a torsione per la verifica della legge di Coulomb

diversa da zero. Nel 1909 il fisico americano Robert Millikan verificò sperimentalmente che la carica elettrica si presenta sempre in multipli interi di un'unità fondamentale di carica  $e$ , ovvero la carica che si osserva risulta quantizzata esistendo sempre in quantità discrete. Pertanto la carica  $q$  di un corpo si può sempre esprimere come  $\pm Ne$ , dove  $N$  è un numero intero. In particolare un elettrone ha carica  $-e$  mentre un protone ha carica  $+e$ ; un atomo neutro contiene lo stesso numero di elettroni e di protoni.

Alla luce di queste considerazioni possiamo riassumere brevemente le proprietà delle cariche elettriche stazionarie:

1. Ci sono due tipi di cariche elettriche, con la caratteristica che cariche diverse si attraggono mentre cariche uguali si respingono.
2. La carica si conserva.
3. La carica è quantizzata.
4. La forza tra cariche puntiformi è inversamente proporzionale al quadrato della mutua distanza.

Il motivo per il quale originariamente si riteneva che i corpi metallici non potessero essere caricati, ad esempio per strofinio, era dovuto al fatto che in tali materiali la carica si distribuisce rapidamente in tutto il corpo; pertanto la carica che si determina sul corpo fluisce rapidamente verso la terra attraverso la mano dell'operatore. Solo nel 1778 il fisico olandese Jhon Ingenhousz mostrò che interponendo un apposito sostegno isolante tra il metallo e la mano veniva impedito questo flusso consentendo la conservazione della carica sul corpo metallico. Così vetro e resina sono detti isolanti: In tali materiali la carica viene a localizzarsi in una regione del corpo e non si sposta; viceversa, i metalli sono conduttori: la carica tende a ridistribuirsi rapidamente nel corpo. Collegando attraverso un filo conduttore un materiale conduttore a terra (*messa a terra*) si agevola il flusso delle cariche verso tale corpo che agisce, quindi, come una sorta di serbatoio infinito di carica.

Un procedimento alternativo all'elettrizzazione per strofinio, correttamente interpretato da Franz Ulrich Theodor Aepinus nel 1759, prende il nome di *elettrizzazione per induzione*. Avvicinando un corpo carico, ad esempio negativamente, ad una sfera conduttrice isolata neutra, la regione della sfera più prossima al corpo carico si carica di segno opposto mentre quella più lontana si carica dello stesso segno (di fatto gli elettroni della sfera neutra si spostano lasciando scoperta la carica positiva). Se la sfera, anziché essere isolata è connessa a massa, alcuni elettroni fluiscono verso massa, per cui, interrompendo la connessione la sfera resta carica positivamente. Allontanando successivamente il corpo carico, la carica della sfera si distribuisce uniformemente per effetto della mutua repulsione delle cariche uguali.

Infine un isolante può caricarsi per *polarizzazione*. Nelle molecole neutre i baricentri delle cariche positive e negative in genere coincidono; tuttavia in presenza di un corpo carico i baricentri si spostano caricando in modo non uniforme la molecola. Ciò determina la formazione di una carica indotta sulla superficie dell'isolante. Una descrizione efficace di tale fenomeno fu proposta nel 1837 dal fisico inglese Michel Faraday.



## 1.2 La legge di Coulomb

La legge che esprime l'intensità della forza elettrica che si esercita fra due particelle puntiformi cariche, rispettivamente di carica  $q_1$  e  $q_2$ , a riposo, poste alla mutua distanza  $r$  è data dalla relazione:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

tale formula esprime la *legge di Coulomb*. La limitazione di tale legge alle sole cariche puntiformi fu mostrata circa sessanta anni dopo la sua formulazione, da William Thomson. L'unità di misura della carica è il *coulomb* ( $C$ ); per motivi di carattere pratico tale unità è definita come la carica che scorre in un *secondo* attraverso un conduttore percorso dalla corrente di un *ampere* ( $1C = 1A \cdot 1s$ ). La costante  $k$  che compare nell'espressione della legge di Coulomb vale:

$$k \approx 8.98 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

e, per definizione risulta:

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

dove  $\epsilon_0$  prende il nome di *costante dielettrica del vuoto* ed è pari a:

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}.$$

La carica libera più piccola è quella dell'elettrone e risulta:

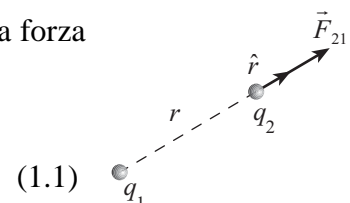
$$|e| \approx 1.60 \times 10^{-19} C$$

così  $1C$  è la carica di circa  $6.2 \times 10^{18}$  elettroni.

**Esempio:** Negli esperimenti didattici di elettrostatica le cariche coinvolte risultano essere solitamente molto minori di  $1C$ , ad esempio dell'ordine di  $1\mu C$ , che corrisponde alla carica di circa  $6.2 \times 10^9$  elettroni. Ad esempio, se questa carica viene fornita ad un corpo di rame, siccome in  $1cm^3$  di rame ci sono circa  $10^{23}$  elettroni, la carica di  $1\mu C$  è determinata dalla variazione di un elettrone ogni 16'000 miliardi circa. Nondimeno, dalla legge di Coulomb segue che due corpi che posseggono tale carica interagiscono con una forza di circa  $90N$  quando sono posti alla distanza di  $1cm$ .

Vettorialmente, se  $\hat{r}$  rappresenta il versore diretto da  $q_1$  a  $q_2$ , allora la forza elettrica esercitata su  $q_2$  per effetto di  $q_1$  è (si veda la figura):

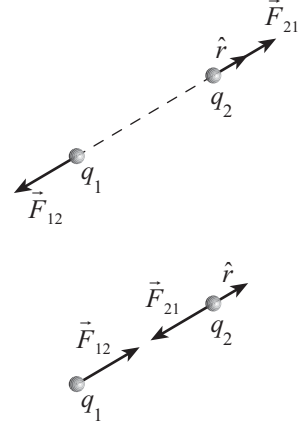
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r},$$



inoltre dalla terza legge di Newton segue che la forza agente su  $q_1$  per effetto di  $q_2$  è:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} (-\hat{r}) = -\vec{F}_{21},$$

essendo  $\hat{r}' = -\hat{r}$  (si veda la figura). Se ci sono più cariche, la forza tra una coppia di cariche può essere ricavata dalla legge di Coulomb e la risultante è quindi la somma vettoriale delle forze dovute alle singole cariche; cioè le forze elettriche obbediscono al *principio di sovrapposizione*.



### 1.3 Il campo elettrico

L'espressione (1.1), analogamente a quella della forza gravitazionale che descrive l'interazione tra due masse puntiformi, sottintende che l'azione che si esercita tra due corpi carichi si manifesta direttamente e istantaneamente senza alcun meccanismo di mediazione (*azione a distanza*). Nel 1846 Faraday, riprendendo le idee del gesuita slavo Rudjer Boscovich, ipotizzò che le cariche riempissero lo spazio circostante con un'entità alla quale attribuì il nome di *campo*. Pertanto in un sistema di cariche elettriche, una carica contribuisce al campo in tutto lo spazio e, allo stesso tempo, è sensibile al campo risultante di tutte le altre cariche.

Si definisce vettore *campo elettrico*  $\vec{E}$  il rapporto tra la forza  $\vec{F}$  che agisce su una carica di prova positiva  $q_0$  ed il valore di tale carica:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}, \quad (1.2)$$

questa grandezza si misura in  $N/C$ . La carica di prova  $q_0$  deve essere sufficientemente piccola da non perturbare la distribuzione di carica che genera il campo; così, a rigore,  $\vec{E}$  va definito come:

$$\vec{E} \equiv \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0},$$

sebbene il limite  $q_0 \rightarrow 0$  risulti fisicamente privo di senso poiché la carica più piccola ottenibile è quella dell'elettrone. Assegnata una carica puntiforme  $q$  posta a distanza  $r$  dalla carica di prova  $q_0$ , dalla (1.1) si ha:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \hat{r},$$

così dalla relazione (1.2) segue che il campo elettrico prodotto dalla carica puntiforme  $q$  è dato da:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r},$$

(si veda la figura in cui è mostrato il vettore campo elettrico prodotto in corrispondenza di una carica di prova da una carica puntiforme positiva, in alto, e negativa, in basso).

Come conseguenza del principio di sovrapposizione, se  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_N$  sono i campi prodotti da  $N$  cariche in un certo punto dello spazio, allora il campo complessivo punto vale:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N.$$

In particolare, per un sistema di  $N$  cariche puntiformi  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , poste rispettivamente alle distanze  $r_1, r_2, \dots, r_N$  dal punto in cui è stata posta la carica di prova, si ha:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

## 1.4 Distribuzioni continue di carica

Qualora la separazione fra le singole cariche di un certo insieme è molto piccola rispetto alla distanza dal punto in cui si vuole calcolare il campo elettrico, è possibile considerare tale insieme come una distribuzione continua di carica. Consideriamo pertanto una certa distribuzione di carica e valutiamo il campo elettrico in un punto  $P$ . Il contributo al campo di un elemento  $\Delta q$  di carica è:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r^2} \hat{r},$$

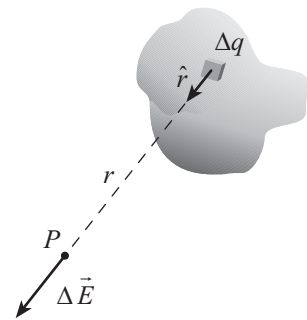
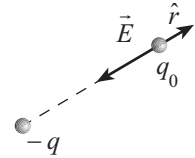
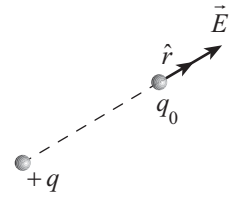
dove  $r$  è la distanza dell'elemento  $\Delta q$  da  $P$ . In virtù del principio di sovrapposizione, il campo totale prodotto dall'intera distribuzione di carica è approssimativamente dato da:

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

dove  $\Delta q_i$  rappresenta l' $i$ -esimo elemento di carica che costituisce la distribuzione. Se la separazione fra tali elementi è piccola rispetto alla distanza dal punto  $P$ , la distribuzione può ritenersi continua, così, nel limite  $\Delta q_i \rightarrow 0$  si ha:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{r^2} \hat{r},$$

dove l'integrazione è estesa a tutta la carica  $Q$  che costituisce la distribuzione. Allo scopo di poter eseguire tale integrale si rende opportuno introdurre il concetto di *densità di carica*. In particolare, se la carica è distribuita in un volume si definisce:



$$\rho \equiv \frac{dq}{dV},$$

che prende il nome di *densità di carica volumetrica* e si misura in  $C/m^3$ ; se è distribuita su di una superficie:

$$\sigma \equiv \frac{dq}{dS},$$

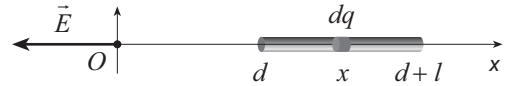
che prende il nome di *densità di carica superficiale* e si misura in  $C/m^2$ ; infine, se la carica è distribuita lungo una linea si definisce:

$$\lambda \equiv \frac{dq}{dl},$$

che prende il nome di *densità di carica lineare* e si misura in  $C/m$ . Qualora una carica  $Q$  è uniformemente distribuita in un volume  $V$  o su di una superficie  $S$  o lungo una linea  $l$ , allora si ha, rispettivamente,  $\rho = Q/V$  o  $\sigma = Q/S$  o  $\lambda = Q/l$ .

**Esempio:** (*Campo elettrico prodotto da una bacchetta carica*).

Consideriamo una bacchetta di lunghezza  $l$  lungo la quale è uniformemente distribuita una carica  $Q$  con densità  $\lambda$ . Stabiliamo l'intensità del campo elettrico in un punto situato lungo l'asse della barretta, ad una distanza  $d$  da un estremo. Consideriamo un'ascissa con origine nel punto  $O$  in cui si vuole determinare il campo. All'elemento infinitesimo  $dx$  della sbarretta, posto a distanza  $x$  dall'origine, corrisponde una carica (si veda la figura):



$$dq = \lambda dx$$

così il campo elettrico nel punto  $O$  dovuto a tale elemento vale:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x^2} (-\hat{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2} \hat{x},$$

essendo  $d\vec{E}$  orientato nella direzione opposta dell'asse  $x$ . Integrando questa espressione tra  $d$  e  $d+l$  si ha:

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+l} \frac{dx}{x^2} \hat{x} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_d^{d+l} \hat{x} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+l} \right) \hat{x} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{d(d+l)} \hat{x},$$

e, in modulo:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{d(d+l)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d(d+l)},$$

poiché, essendo la carica  $Q$  uniformemente distribuita lungo la bacchetta, di ha  $\lambda l = Q$ . Si osservi che, a grande distanza dalla bacchetta, ovvero per  $d \gg l$ , risulta:

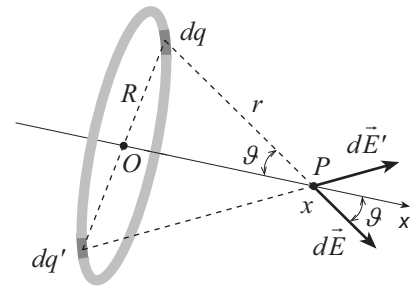
$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2},$$

cioè, a grande distanza la bacchetta è assimilabile ad una carica puntiforme.



**Esempio:** (*Campo elettrico prodotto da un anello carico*). Consideriamo l'anello di figura, di raggio  $R$  lungo il quale è uniformemente distribuita la carica  $Q$ . Ci proponiamo di stabilire l'intensità del campo elettrico su un punto situato sull'asse dell'anello. Consideriamo un'ascissa  $x$  coincidente con l'asse e con origine  $O$  nell'intersezione tra l'asse e il piano dell'anello. Se il punto  $P$  è situato a distanza  $x$  dall'origine, il campo elettrico dovuto ad un elemento di carica  $dq$  sull'anello risulta:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$



dove  $r$  è la distanza della carica infinitesima  $dq$  dal punto  $P$ . Il vettore  $d\vec{E}$  può essere decomposto in una componente diretta lungo l'asse ed una perpendicolare a questo, così, poiché per ogni elemento  $dq$  c'è ne è un altro  $dq'$  che genera un campo  $d\vec{E}'$  la cui componente normale all'asse è opposta a quella di  $d\vec{E}$ , allora il campo in  $P$  è dovuto alla sola componente di  $d\vec{E}$  diretta lungo l'asse. Siccome:

$$r = (x^2 + R^2)^{1/2},$$

$$\cos \theta = \frac{|x|}{r},$$

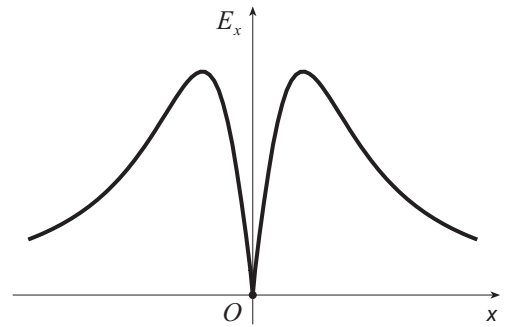
si ha:

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x^2 + R^2} \frac{|x|}{(x^2 + R^2)^{1/2}} =$$

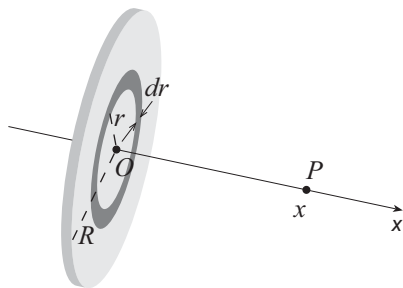
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|x|}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dq;$$

integrando infine su  $q$  si ha:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|x|}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_Q dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|x|}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$



In figura è mostrato l'andamento del campo elettrico lungo l'asse  $x$ .



**Esempio:** (*Campo elettrico prodotto da un disco carico*). Consideriamo un disco di raggio  $R$  sul quale risulta uniformemente distribuita una carica  $Q$  con densità superficiale  $\sigma$ . Stabiliamo il campo elettrico in corrispondenza di un punto posto sull'asse. Consideriamo l'ascissa indicata in figura, con origine nell'intersezione tra il disco e l'asse, e sia  $x$  la coordinata del punto  $P$ . Consideriamo inoltre un anello di raggio  $r$  ( $r < R$ ) e spessore  $dr$ ; poiché l'area di questo anello è  $2\pi r dr$ , la carica  $dq$  che è contenuta in esso vale:

$$dq = 2\pi\sigma r dr.$$

Dal risultato dell'esempio precedente segue che il campo prodotto da tale distribuzione è:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|x|}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|x|}{(x^2 + r^2)^{3/2}} 2\pi\sigma r dr = \frac{\sigma|x|}{2\epsilon_0} \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dr.$$

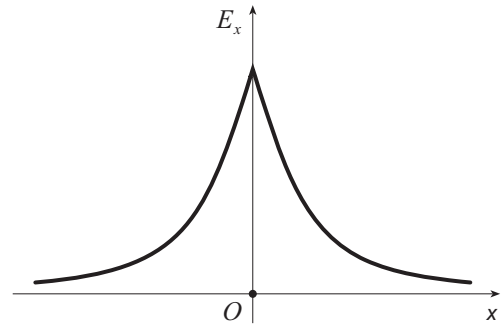
Per ottenere il campo in  $P$  integriamo da 0 a  $R$ :

$$E = \frac{\sigma|x|}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dr,$$

ponendo  $\xi \equiv x^2 + r^2$  si ha  $r dr = d\xi/2$  così, sostituendo segue:

$$E = \frac{\sigma|x|}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{x^2}^{x^2+R^2} \xi^{-3/2} d\xi = \frac{\sigma|x|}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi^{-1/2}}{-1/2} \right]_{x^2}^{x^2+R^2} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{|x|}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right],$$



(si veda la figura). Si noti che, nell'espressione precedente, facendo tendere  $x \rightarrow 0$  o  $R \rightarrow \infty$  si ottiene:

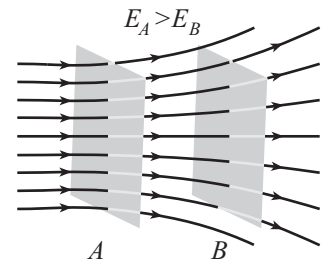
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

tale relazione rappresenta il campo elettrico prodotto da una distribuzione di carica piana di estensione infinita.

## 1.5 Linee di forza del campo elettrico

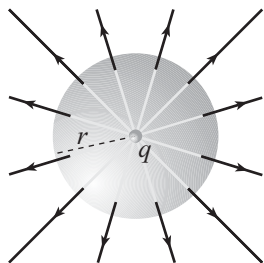
Allo scopo di permettere una immediata visualizzazione della distribuzione spaziale del campo elettrico Faraday introdusse il concetto di *linee di forza*. Le proprietà delle linee di forza sono:

1. Il vettore campo elettrico è tangente alle linee di forza in ogni punto.
2. Il numero di linee di forza per unità di area che attraversano una superficie ad esse perpendicolare è proporzionale all'intensità del campo elettrico in corrispondenza della superficie.



Nell'esempio di figura, siccome la densità delle linee che attraversano la superficie (matematica) A è superiore a quella delle linee che attraversano la superficie (matematica) B, il campo elettrico in A è maggiore del campo in B. Le regole per disegnare le linee di forza per una distribuzione di carica sono:

1. Le linee di forza devono avere origine dalle cariche positive e terminare sulle cariche negative o all'infinito qualora il sistema abbia un eccesso di carica.
2. Il numero di linee di forza che entrano o escono da una carica è proporzionale alla carica.
3. Due linee di forza non si possono incrociare.



Per verificare che quanto sopra è in accordo con la legge di Coulomb, consideriamo una sfera di raggio  $r$  concentrica con una carica  $q$  (si veda la figura). Per simmetria il campo elettrico avrà la stessa intensità su tutti i punti della sfera. Il numero  $N$  di linee che escono dalla carica è pari a quello delle linee che entrano nella superficie sferica, così, poiché la superficie della sfera in questione è  $4\pi r^2$  e l'intensità del campo elettrico è proporzionale al numero di linee per unità di superficie, sarà:

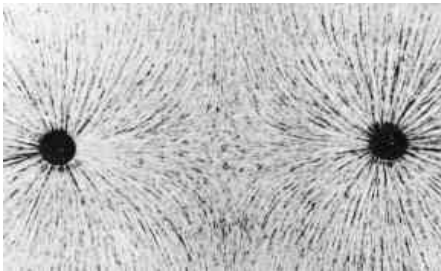
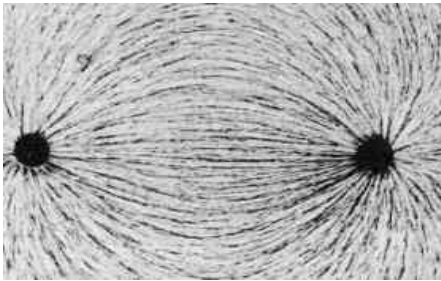
$$E \propto \frac{N}{4\pi r^2}$$

inoltre, siccome il numero di linee è proporzionale alla carica ( $N \propto q$ ), allora, in accordo alla legge di Coulomb:

$$E \propto \frac{q}{4\pi r^2}.$$

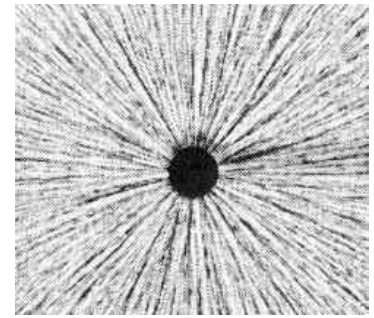
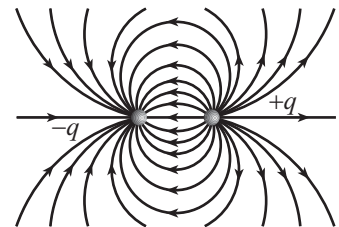
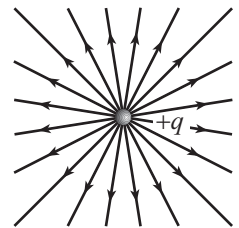
Poiché la carica è quantizzata, il numero di linee di forza che escono da un qualsiasi oggetto materiale deve essere  $0, \pm ke, \pm 2ke, \dots$ , dove  $k$  è una costante di proporzionalità arbitraria. Fissata  $k$ , il numero di linee di forza non è arbitrario. Se, ad esempio, un oggetto ha carica  $Q_1$  ed un altro ha carica  $Q_2$ , allora il rapporto  $N_1/N_2$  tra i numeri delle corrispondenti linee di forza sarà pari al rapporto delle cariche  $Q_1/Q_2$ .

Il metodo di rappresentazione del campo elettrico attraverso le linee di forza presenta tuttavia alcune limitazioni. Innanzitutto la sua efficacia è circoscritta



Rappresentazione delle linee di forza del campo elettrico prodotto da due cariche puntiformi di segno uguale (in alto) e opposto (in basso).

alla descrizione di campi statici essendo piuttosto complessa la rappresentazione dei campi generati da cariche in movimento; inoltre con questo metodo è impossibile applicare il principio di sovrapposizione. Si faccia riferimento infatti alla configurazione di linee di forza originate da una singola carica (si veda la figura); in principio il campo prodotto da due cariche uguali ma di segno opposto si dovrebbe ottenere affiancando due configurazioni di linee di una singola carica e invertendo la direzione delle frecce per una delle due cariche. Tuttavia tale metodo determinerebbe delle linee che si incrociano a cui corrisponderebbero due direzioni del campo elettrico nello stesso punto. La rappresentazione delle linee di forza per tale sistema di cariche è comunque possibile ma richiede un preventivo calcolo matematico (si veda la figura).



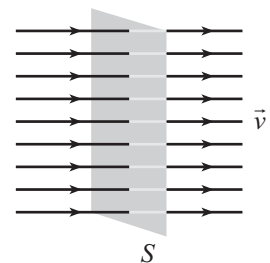
Rappresentazione delle linee di forza del campo elettrico prodotto da una carica puntiforme.

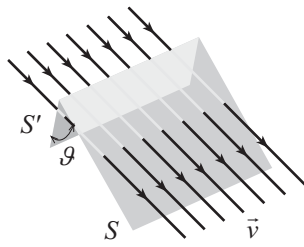
## 1.6 Flusso di un vettore

Consideriamo un campo vettoriale  $\vec{v}$  e supponiamo che le linee di forza corrispondenti siano tutte parallele tra loro. Consideriamo una superficie di area  $S$  disposta perpendicolarmente alle linee di forza (si veda la figura). Poiché il numero di linee di forza per unità di area di un vettore è proporzionale al modulo del vettore, una misura del numero di linee di forza passanti attraverso la superficie è proporzionale al prodotto  $vS$ . Questa grandezza prende il nome di *flusso*  $\phi$  del vettore  $\vec{v}$  attraverso la superficie  $S$ :

$$\phi = vS.$$

Qualora la superficie forma un angolo  $\vartheta$  con le linee di forza di  $\vec{v}$  risulterà:





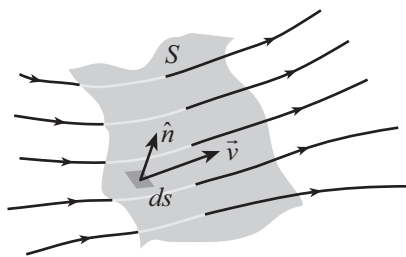
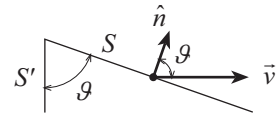
$$\phi = v S \cos \theta,$$

essendo il numero di linee che attraversa  $S$  pari al numero di linee che attraversa l'area proiettata  $S'$ , perpendicolare al campo (si veda la figura). Se si introduce un versore normale  $\hat{n}$  alla superficie  $S$ , come mostrato in figura, si può definire il flusso  $\phi$  come:

$$\phi = \vec{v} \cdot \hat{n} S,$$

ovvero, definendo un vettore  $\vec{S} \equiv \hat{n} S$  si ha:

$$\phi = \vec{v} \cdot \vec{S}.$$



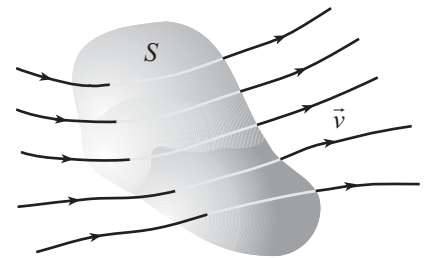
Nel caso generale il vettore  $\vec{v}$  può variare in corrispondenza dei punti della superficie  $S$  attraverso la quale si vuole calcolare il flusso; così per poter applicare la precedente definizione occorre suddividere tale superficie in elementi infinitesimi  $ds$  in corrispondenza dei quali la variazione del vettore  $\vec{v}$  può essere considerata trascurabile, allora il flusso elementare di  $\vec{v}$  attraverso  $ds$  sarà:

$$d\phi = \vec{v} \cdot \hat{n} ds = \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

dove si è posto  $d\vec{s} \equiv \hat{n} ds$  (si veda la figura). Pertanto la misura del numero di linee di forza del campo  $\vec{v}$  che attraversano tale superficie è:

$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

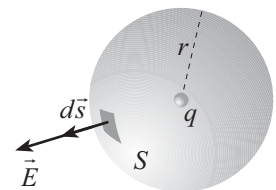
Poiché la superficie può anche essere chiusa (si veda la figura), occorre stabilire una convenzione circa il verso di  $\hat{n}$ . In questo contesto tale versore è scelto uscente dalle superfici chiuse. Con questa convenzione il prodotto  $\vec{v} \cdot \hat{n}$  sarà positivo laddove il campo è uscente dalla superficie considerata e sarà negativo dove il campo è entrante.



## 1.7 La legge di Gauss

Consideriamo una carica puntiforme  $q$  posta al centro di una sfera di raggio  $r$ . Sulla superficie  $S$  della sfera risulta:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{n}$$



dove  $\hat{n}$  è il versore normale uscente dal generico punto posto sulla superficie. Il flusso elementare attraverso un elemento di superficie  $d\vec{s}$  vale (si veda la figura):

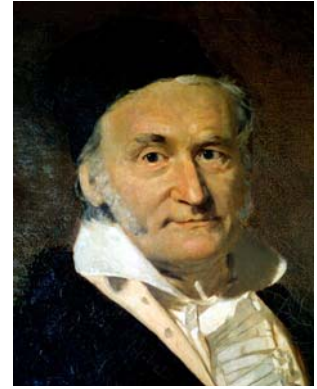
$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{n} \cdot \hat{n} ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} ds,$$

così, il flusso attraverso l'intera superficie  $S$  vale:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \int_S ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2,$$

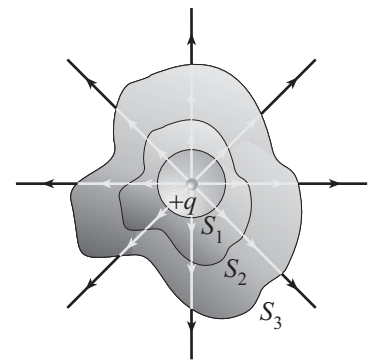
essendo pari a  $4\pi r^2$  la superficie della sfera, così:

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



Karl Friedrich Gauss

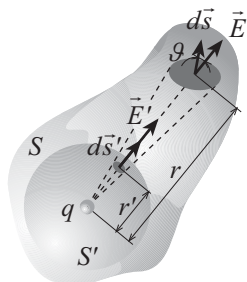
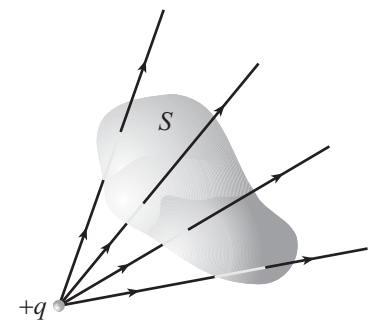
Quindi il flusso del campo elettrico attraverso la superficie della sfera è proporzionale alla carica interna alla superficie. Il risultato appena conseguito, che sarà esteso nel seguito ad una qualsiasi superficie chiusa contenente la carica, risulta consistente con la definizione di flusso e con le caratteristiche delle linee di forza; infatti il flusso attraverso una superficie è proporzionale al numero di linee di forza che attraversano tale superficie, d'altra parte tale numero è proporzionale alla carica che le origina, così il flusso risulta proporzionale alla carica. Dalla costruzione di figura è evidente che il numero di linee di forza che attraversano le superfici non sferiche  $S_2$



e  $S_3$  è pari al numero di linee di forza che attraversano  $S_1$ , così il flusso totale attraverso qualsiasi superficie chiusa è indipendente dalla forma della superficie stessa. Se la carica è esterna alla superficie chiusa (si veda la figura) il numero di linee di forza entranti è pari a quello delle linee uscenti, così il flusso totale del campo elettrico che attraversa una superficie chiusa che non contiene alcuna carica è nullo. In formule si ha:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{se } q \text{ è interna a } S, \\ 0 & \text{se } q \text{ è esterna a } S. \end{cases}$$

Questo risultato fu dimostrato dal fisico tedesco Karl Friedirch Gauss nel 1835 nell'ambito di uno studio di carattere generale relativo alle forze agenti in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza; per tale motivo prende il nome di *legge di Gauss*. Di seguito ne è data una dimostrazione analitica.



Consideriamo una superficie  $S$  contenente la carica  $q$ . Sia  $S'$  una superficie sferica concentrica alla carica e contenuta in  $S$  (si veda la figura); dal risultato conseguito nel paragrafo precedente, il flusso attraverso  $S'$  vale:

$$\phi_{S'} = \int_{S'} \vec{E}' \cdot d\vec{s}' = \int_{S'} E' ds' = \frac{q}{\epsilon_0},$$

dove  $\vec{E}'$  è il campo elettrico sulla superficie  $S'$ . In particolare se  $r'$  è il raggio della sfera di superficie  $S'$ , si ha:

$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \quad (1.3)$$

mentre, in un punto a distanza  $r$  sulla superficie  $S$  risulta:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (1.4)$$

così, dividendo membro a membro le equazioni (1.3) e (1.4) si ottiene:

$$\frac{E'}{E} = \left( \frac{r}{r'} \right)^2. \quad (1.5)$$

Con riferimento al cono di figura risulta che l'area  $A$  della base e l'area  $A'$  di una sezione del cono perpendicolare all'asse possono essere espresse in funzione dei corrispondenti raggi della base e della sezione come:

$$A' = \pi l'^2,$$

$$A = \pi l^2,$$

pertanto il rapporto tra le aree  $A'$  e  $A$  vale:

$$\frac{A'}{A} = \left( \frac{l'}{l} \right)^2;$$

d'altra parte, valendo la relazione di proporzionalità  $l/l' = r/r'$  si può scrivere:

$$\frac{A'}{A} = \left( \frac{r'}{r} \right)^2. \quad (1.6)$$

Applicando tale relazione alle superfici infinitesime  $d\vec{s}$  e  $d\vec{s}'$  appartenenti rispettivamente alle superfici  $S$  e  $S'$  della figura precedente si ha:

$$ds \cos \vartheta = \left( \frac{r}{r'} \right)^2 ds'$$

così, il flusso del campo elettrico  $\vec{E}$  attraverso la superficie  $S$  vale:

$$\phi_s = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E ds \cos \vartheta = \int_S \left( \frac{r'}{r} \right)^2 E' \left( \frac{r}{r'} \right)^2 ds' = \int_{S'} E' ds' = \frac{q}{\epsilon_0},$$

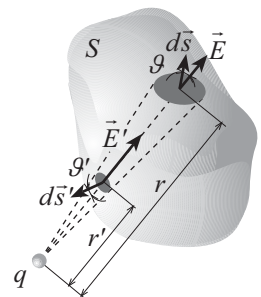
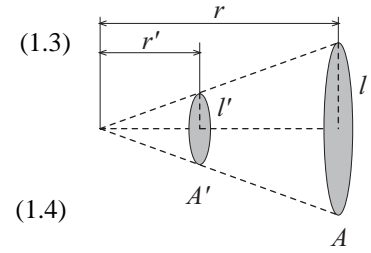
dove si è fatto uso della (1.5) per mettere in relazione il campo  $\vec{E}$  col campo  $\vec{E}'$ . Se la carica è situata all'esterno della superficie considerata, con riferimento alla figura risulta:

$$ds' \cos \vartheta' = \left( \frac{r'}{r} \right)^2 ds \cos \vartheta;$$

facendo uso di tale formula ed esprimendo il flusso infinitesimo del campo elettrico attraverso  $S$  come la somma dei flussi infinitesimi attraverso la superfici contrapposte  $d\vec{s}$  e  $d\vec{s}'$ , si ha:

$$d\phi_s = \vec{E}' \cdot d\vec{s}' + \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E' ds' \cos \vartheta' + E ds \cos \vartheta = -\left( \frac{r}{r'} \right)^2 E \left( \frac{r'}{r} \right)^2 ds \cos \vartheta + E ds \cos \vartheta = 0,$$

e siccome questo risultato vale per ogni coppia di elementi  $d\vec{s}$  e  $d\vec{s}'$ , risulterà:





$$\phi_S = 0.$$

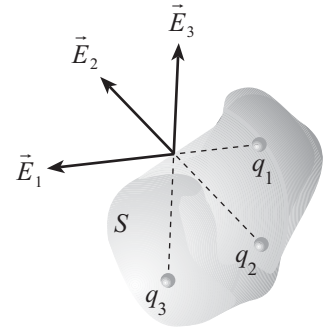
Questa dimostrazione mette in luce un importante collegamento tra la legge di Gauss e la legge di Coulomb. Infatti la dimostrazione è basata sul fatto che il rapporto tra i campi elettrici prodotti da una carica puntiforme in corrispondenza di due superfici sferiche concentriche alla carica e di raggi  $r$  e  $r'$  (1.5) è uguale all'inverso del rapporto tra le aree delle due superfici (1.6). Concludiamo quindi che la legge di Gauss è conseguenza della proporzionalità con l'inverso del quadrato della distanza espressa dalla legge di Coulomb. Supponiamo che internamente alla superficie chiusa considerata  $S$  vi siano  $N$  cariche  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , allora se  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_N$  rappresentano i campi prodotti da ciascuna di esse prese singolarmente (si veda la figura), si ha:

$$\int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{q_1}{\epsilon_0},$$

$$\int_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \frac{q_2}{\epsilon_0},$$

$$\vdots$$

$$\int_S \vec{E}_N \cdot d\vec{s} = \frac{q_N}{\epsilon_0},$$



così, sommando membro a membro, per il principio di sovrapposizione, se:

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N,$$

$$q_{int} \equiv q_1 + q_2 + \dots + q_N,$$

segue:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}.$$

Cioè il flusso del campo elettrico totale attraverso una qualunque superficie chiusa è uguale alla carica totale contenuta all'interno della superficie, divisa per  $\epsilon_0$ .

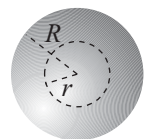
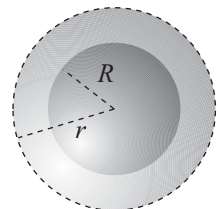
**Esempio:** (*Campo elettrico prodotto da una sfera carica*). Consideriamo una sfera isolante di raggio  $R$  caratterizzata da una distribuzione di carica uniforme di densità  $\rho$ . Calcoliamo il campo elettrico in ogni punto dello spazio. Consideriamo una superficie sferica di raggio  $r$  concentrica con la sfera data e valutiamo il campo per  $r > R$  e per  $r < R$ . Se  $r > R$ , (si veda la figura in alto) dall'applicazione della legge di Gauss segue:

$$\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

dove  $S = 4\pi r^2$  è la superficie della sfera di raggio  $r$  e  $q$  è la carica contenuta nella sfera isolante. Da tale relazione si ricava:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_S ds = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

cioè:



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1.7)$$

Quindi all'esterno della sfera il campo è lo stesso che si avrebbe qualora la sfera fosse sostituita da una carica puntiforme di uguale valore posta al centro della sfera. Inoltre, siccome  $r$  è uniformemente distribuita nel volume  $V$  della sfera, si ha:

$$q = \int_V \rho dv = \rho \int_V dv = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

e quindi:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}.$$

Se  $r < R$ , (si veda la figura, in basso) dall'applicazione della legge di Gauss segue:

$$\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E 4\pi r^2 = \frac{q'}{\epsilon_0},$$

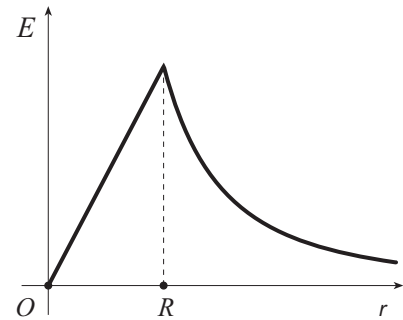
dove  $q'$  rappresenta la carica contenuta all'interno del volume  $V'$  delimitato dalla superficie  $S$  di raggio  $r$ :

$$q' = \int_{V'} \rho dv = \rho \int_{V'} dv = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

quindi, sostituendo si ha:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r,$$

in figura è mostrato l'andamento del campo elettrico al variare di  $r$ .



**Esempio:** (*Distribuzione di carica a simmetria cilindrica*). Consideriamo un filo di lunghezza infinita lungo il quale è uniformemente distribuita una carica con densità lineare  $\lambda$ . Stabiliamo il valore del campo elettrico in tutto lo spazio. La simmetria della distribuzione di carica suggerisce che il campo elettrico deve essere perpendicolare al filo carico e uscente. Consideriamo una superficie cilindrica  $S$  di raggio  $r$  e lunghezza  $l$  coassiale col filo (nella figura, in alto; in basso la superficie è mostrata in sezione); il flusso attraverso le superfici di base è nullo essendo il campo elettrico parallelo a tali superfici, quindi:

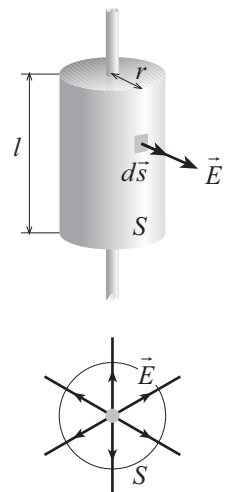
$$\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_S ds = 2\pi r l E.$$

D'altra parte per la legge di Gauss risulta:

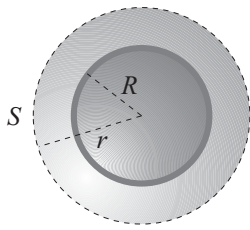
$$\phi(\vec{E}) = 2\pi r l E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0},$$

pertanto:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}. \quad (1.8)$$



Si osservi che se il filo non è infinito viene a cadere la simmetria è diventa inutile l'applicazione della legge di Gauss per la determinazione del campo elettrico; tuttavia questo risultato resta valido per un filo di lunghezza finita  $L$  nel limite  $r \ll L$  per punti sufficientemente distanti dalle estremità del filo.



**Esempio:** (*Campo prodotto da un guscio sferico*). Consideriamo un guscio sferico di materiale isolante di raggio  $R$  sul quale è uniformemente distribuita una carica con densità  $\sigma$ . Con riferimento ad una superficie sferica  $S$  di raggio  $r$  concentrica al guscio (si veda la figura), possiamo affermare che per  $r < R$  il campo elettrico è nullo poiché non è presente carica all'interno del guscio. Per  $r > R$ , se  $q$  è la carica distribuita sul guscio, si ha:

$$q = 4\pi R^2 \sigma,$$

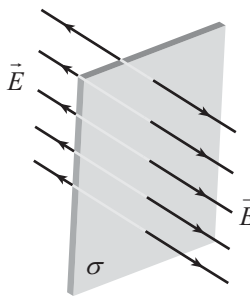
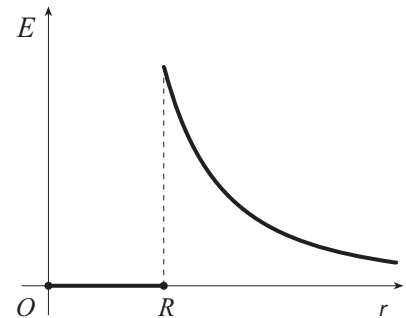
e quindi, poiché:

$$\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

segue:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}. \quad (1.9)$$

in figura è mostrato l'andamento del campo elettrico al variare di  $r$ <sup>1</sup>.



**Esempio:** (*Piano infinito uniformemente carico*). Consideriamo un piano isolante indefinito sul quale è uniformemente distribuita una carica positiva con densità superficiale  $\sigma$ . Stabiliamo il valore del campo elettrico in ogni punto dello spazio. Per simmetria il campo elettrico su entrambe la superfici del piano sarà normale ed opposto in verso (si veda la figura). Consideriamo una superficie cilindrica  $S$  con asse perpendicolare al piano e superfici di base di area  $A$  equidistanti dal piano come mostrato in figura. Il flusso del campo elettrico attraverso ciascuna base è  $EA$ , così il flusso totale attraverso la superficie  $S$  vale:

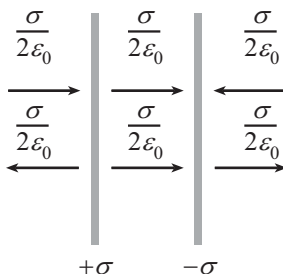
$$\phi(\vec{E}) = 2EA;$$

d'altra parte la carica  $q$  interna a questa superficie è pari a quella distribuita sull'intersezione tra il volume definito dal cilindro di superficie  $S$  ed il piano carico:

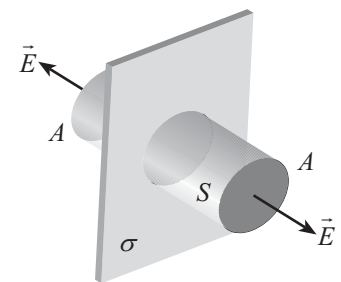
$$q = \sigma A,$$

così, essendo  $\phi(\vec{E}) = q/\epsilon_0$ , segue:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$



Questo risultato, per altro già ottenuto attraverso un approccio diverso in un precedente esempio, può essere applicato ad una importante configurazione di carica rappresentata da una coppia di piani infiniti e paralleli uniformemente carichi e recanti su di essi cariche di segno opposto. Con riferimento alla figura si osserva che all'esterno della regione compresa tra i due piani, i campi prodotti da ciascun piano sono uguali ma hanno verso



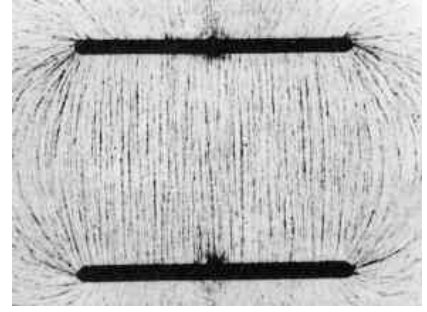
<sup>1</sup> L'osservazione secondo cui una sfera piena ed una vuota ugualmente elettrizzate esercitano la stessa forza di attrazione su corpi carichi fu fatta nel 1773 da Giambattista Beccaria. Nel 1755 Franklin verificava che un corpo carico non risentiva di forze di natura elettrica quando veniva posto all'interno di una sfera cava elettrizzata. Circa settanta anni prima, Newton aveva dimostrato che la forza gravitazionale tra un corpo cavo ed un oggetto situato al suo interno è nulla. Da tale proprietà Joseph Priestley nel 1766, senza fornire alcuna dimostrazione, ipotizzò che le azioni elettriche si esercitassero nella stessa maniera di quelle gravitazionali, secondo la legge dell'inverso del quadrato della distanza, anticipando di quasi vent'anni il risultato ottenuto sperimentalmente da Coulomb.

opposto; all'interno i campi hanno lo stesso segno e si sommano. Pertanto:

$$E_{ext} = 0 ,$$

$$E_{int} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} .$$

Questa configurazione elettrostatica consente quindi di confinare un campo uniforme in una regione limitata dello spazio.



Rappresentazione delle linee di forza del campo elettrico prodotto da due piani uniformemente carichi.

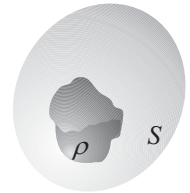
## 1.8 Formulazione puntuale della legge di Gauss

Supponiamo che all'interno del volume  $V$  racchiuso da una superficie  $S$  vi sia una distribuzione continua di carica con densità  $\rho(x, y, z)$  (si veda la figura). Allora la carica totale contenuta all'interno del volume  $V$  vale:

$$q = \int_V \rho \, dv ;$$

sostituendo  $q$  nell'espressione della legge di Gauss si trova:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv .$$



Questa espressione mette in relazione il campo elettrico, definito su una superficie, con la densità di carica, definita in un volume. Sebbene risulti utile in numerose circostanze, tale formulazione della legge di Gauss, detta *integrale*, presenta lo svantaggio di non poter fornire, in generale, indicazioni di carattere puntuale circa le grandezze coinvolte.

Applicando il teorema della divergenza (si veda l'Appendice) al primo membro dell'espressione precedente, si trova:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv ,$$

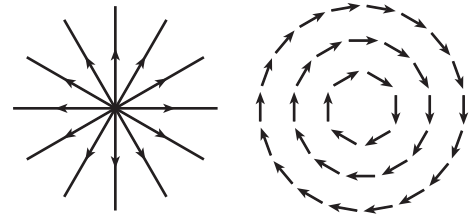
ovvero:

$$\int_V \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) dv = 0 ;$$

dovendo valere questa relazione per ogni dominio di integrazione  $V$ , deve essere:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho .$$

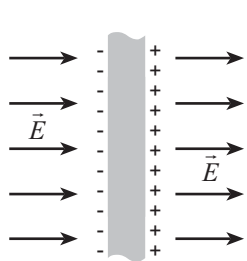
Laddove  $\rho$  è nullo,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  ed il campo elettrico  $\vec{E}$  è detto ivi, *solenoidale*. In sostanza l'equazione precedente stabilisce quali sono i punti dello spazio dove  $\vec{E}$  è o meno solenoidale e, di conseguenza, stabilisce l'assenza o meno di sorgenti del campo elettrico in quei punti. Pertanto se, ad esempio, osserviamo delle linee di forza di  $\vec{E}$  che originano da un punto, che funge quindi da sorgente del campo (si veda la figura a destra), possiamo dedurre che esiste un punto in cui risulta  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$ . Viceversa, se le linee di forza del campo non originano da alcun punto (si veda la figura a sinistra), concludiamo che il campo è solenoidale.



## 1.9 Conduttori in equilibrio elettrostatico

Dal punto di vista microscopico, un buon conduttore elettrico può essere generalmente rappresentato come un reticolo atomico immerso in un gas di elettroni liberi di muoversi all'interno del materiale. In assenza di un moto netto degli elettroni in una particolare direzione, il conduttore è detto in *equilibrio elettrostatico*. In tale circostanza valgono le seguenti proprietà:

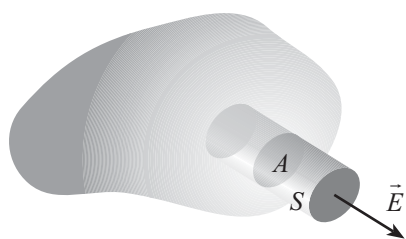
1. Il campo elettrico all'interno del conduttore è ovunque nullo;
2. Un qualunque eccesso di carica su conduttore deve localizzarsi superficialmente.
3. All'esterno del conduttore, in prossimità della superficie, il campo elettrico è perpendicolare alla superficie ed ha intensità pari a  $\sigma/\epsilon_0$ , dove  $\sigma$  è la densità superficiale di carica.
4. Su un conduttore di forma irregolare la carica tende ad accumularsi laddove la curvatura della superficie è maggiore, ovvero sulle punte.



La prima proprietà è conseguenza del fatto che qualora il campo non fosse nullo si determinerebbe il moto degli elettroni liberi e non ci sarebbe equilibrio. Inoltre, se viene applicato un campo elettrico esterno, gli elettroni liberi si spostano causando degli accumuli di carica in corrispondenza delle superfici del conduttore (si veda la figura). Tali accumuli creano un campo elettrico opposto al campo esterno; la densità superficiale di carica cresce fino a che l'intensità di questo campo non uguaglia quella del campo esterno, annullando quindi il campo all'interno del conduttore; per un buon conduttore i tempi tipici

per conseguire questa condizione di equilibrio sono dell'ordine di  $10^{-16}$  s.

Consideriamo un conduttore carico in equilibrio elettrostatico; all'interno del conduttore consideriamo una superficie chiusa  $S$  prossima quanto si vuole alla superficie del conduttore (si veda la figura). Poiché all'interno del conduttore il campo elettrico è nullo, dalla legge di Gauss segue che all'interno della superficie  $S$ , e quindi del conduttore, la carica netta è nulla. Pertanto se il conduttore è carico, tale carica deve situarsi sulla superficie. Questa proprietà fu osservata nel 1769 da Beccaria e successivamente dimostrata da Coulomb.



Consideriamo un conduttore carico all'equilibrio e facciamo riferimento ad una superficie  $S$  a forma di cilindro con le superfici di base  $A$  sufficientemente piccole da potersi ritenere localmente parallele alla superficie del conduttore e con parte del cilindro contenuta nel conduttore. Attraverso la parte interna il flusso del campo elettrico è nullo essendo nullo il campo elettrico internamente al conduttore. Inoltre il campo è normale alla superficie perché qualora vi fosse una componente tangenziale determinerebbe un moto delle cariche

e quindi una condizione di non equilibrio. Perciò è nullo il flusso anche attraverso la superficie laterale del cilindro. Così il flusso attraverso la superficie del cilindro vale  $EA$ , dove il campo elettrico  $\vec{E}$  è diretto lungo la normale  $\hat{n}$  alla superficie del conduttore. Applicando la legge di Gauss alla superficie del cilindro si ha quindi:

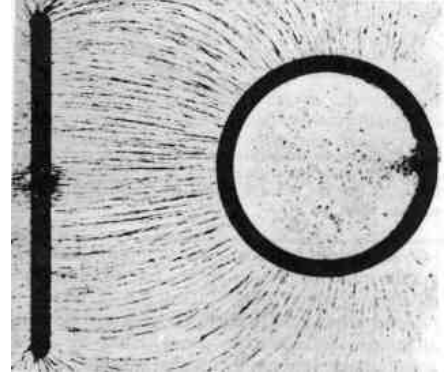
$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = ES = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

dove  $\sigma$  è la densità locale di carica superficiale. Siccome  $\vec{E}$  è diretto lungo  $\hat{n}$ , segue:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}; \quad (1.10)$$

Coulomb per primo, nel 1788 verificò che la forza elettrica in punto prossimo ad un piano carico è proporzionale alla densità superficiale nelle vicinanze del punto e pertanto tale risultato prende il nome di *Teorema di Coulomb*. Questo teorema fu rigorosamente dimostrato nel 1811 da Siméon-Denis Poisson e da Pierre-Simon de Laplace. Nel 1813 Laplace provò anche il carattere vettoriale dell'espressione precedente, mostrando che la forza elettrica in prossimità della superficie del conduttore è diretta perpendicolarmente alla superficie stessa.

L'ultima proprietà elencata dei conduttori in equilibrio sarà provata nel seguito.



Rappresentazione delle linee di forza del campo elettrico prodotto da due conduttori carichi; si osservi come, in accordo col Teorema di Coulomb, in prossimità della superficie dei conduttori le linee di forza si dispongono perpendicolarmente alle superfici dei conduttori stessi.

## 1.10 Differenza di potenziale e potenziale elettrico

Le forze di tipo centrali, che dipendono funzionalmente dalla sola distanza da un centro, sono conservative; poiché la forza espressa dalla legge di Coulomb appartiene a questa categoria, allora la forza elettrostatica è conservativa e di conseguenza il campo elettrostatico è detto conservativo. Se una carica  $q_0$  è immersa in un campo elettrico  $\vec{E}$ , la forza  $\vec{F}$  cui è soggetta vale  $q_0\vec{E}$ ; tale forza è conservativa essendo la somma di tutte le forze conservative agenti tra  $q_0$  e le cariche che determinano il campo  $\vec{E}$ . Il lavoro fatto da questa forza per uno spostamento infinitesimo  $d\vec{l}$  della carica vale:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l};$$

in corrispondenza di tale lavoro l'energia potenziale  $U_e$  del sistema costituito dalle cariche che determinano il campo  $\vec{E}$  e dalla carica  $q$  subisce una diminuzione pari a  $dL$ :

$$dU_e = -dL = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l};$$



in relazione ad uno spostamento finito di  $q_0$  dal punto  $A$  al punto  $B$ , la variazione di energia potenziale è data da:

$$\Delta U_e = U_{eB} - U_{eA} = \int_A^B (-q_0 \vec{E}) \cdot d\vec{l} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

dove l'integrale non dipende dal cammino scelto essendo il campo  $\vec{E}$  conservativo. La *differenza di potenziale*  $V_B - V_A$  tra i punti  $B$  e  $A$  è definita come la variazione dell'energia potenziale per unità di carica, ovvero:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}; \quad (1.11)$$

si noti che, analogamente all'energia potenziale, tale definizione è relativa soltanto a differenze di potenziale. Spesso si usa assumere che la funzione potenziale sia nulla in un punto particolare, ad esempio all'infinito; allora, ponendo:

$$V(\infty) = 0,$$

il potenziale in corrispondenza di un generico punto  $P$  vale:

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

espressione che può essere riguardata come il lavoro necessario per trasportare una carica unitaria dall'infinito al punto  $P$ . L'unità di misura del potenziale è il *volt* ( $V$ ) e risulta  $1V = 1J/1C$ , così  $1J$  rappresenta il lavoro che deve essere fatto per far superare ad una carica di  $1C$  una differenza di potenziale di  $1V$ . L'introduzione del volt consente inoltre di riscrivere l'unità di misura del campo elettrico in  $V/m$  che rappresenta l'unità tradizionalmente adoperata per questa grandezza. Il concetto di potenziale fu introdotto dal matematico inglese George Green nel 1828 attraverso la generalizzazione di precedenti lavori di Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon de Laplace e Poisson relativi al campo gravitazionale.

In fisica atomica e nucleare è d'uso comune per la misura dell'energia l'*elettronvolt* ( $eV$ ), definito come l'energia che un elettrone (o un protone) acquista quando viene accelerato mediante una differenza di potenziale di  $1V$ . Siccome  $1V = 1J/1C$  e la carica dell'elettrone (protone) in modulo è di  $1.6 \times 10^{-19} C$ , allora

$$1eV = (1.6 \times 10^{-19} C) \cdot (1V) = 1.6 \times 10^{-19} J.$$

**Esempio:** Nel cinescopio di un apparecchio televisivo un elettrone del fascio ha una velocità di  $8 \times 10^7 m/sec$  circa. Poiché la massa dell'elettrone è  $9.1 \times 10^{-31} kg$  circa, questa velocità corrisponde ad un'energia cinetica di  $3 \times 10^{-15} J$ . Così tale elettrone per raggiungere questa velocità, partendo da fermo, deve essere accelerato tramite una differenza di potenziale di  $19kV$ .

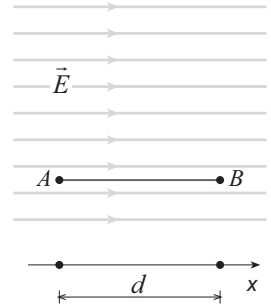
## 1.11 Campo elettrico uniforme

Consideriamo un campo elettrico uniforme diretto lungo l'asse  $x$  di figura:

$$\vec{E} = E \hat{x}$$

e calcoliamo la differenza di potenziale tra i punti  $A$  e  $B$  separati dalla distanza  $d$ :

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B (E \hat{x}) \cdot (\hat{x} dx) = -\int_A^B E dx = -Ed. \quad (1.12)$$



Il fatto che  $\Delta V < 0$  indica che il potenziale di  $B$  è inferiore a quello di  $A$ , ossia  $V_B < V_A$ . La variazione di energia potenziale di interazione tra una carica di prova  $q_0$  ed un campo elettrico uniforme, quando la carica si muove tra  $A$  e  $B$  è:

$$U_{eB} - U_{eA} = \Delta U_e = q_0 \Delta V = -q_0 Ed.$$

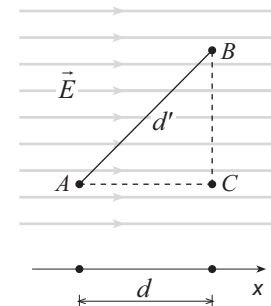
Quindi se  $q_0 > 0$  allora  $\Delta U_e < 0$  ovvero  $U_{eB} < U_{eA}$ , cioè il sistema perde energia potenziale in corrispondenza del moto di una carica positiva nella direzione del campo elettrico. Se venisse abbandonata in  $A$ , la carica, per effetto della forza  $q_0 \vec{E}$ , sarebbe accelerata acquisendo energia cinetica; siccome la carica guadagna energia cinetica in una certa misura, il sistema deve perdere altrettanta energia potenziale. Pertanto se la carica è originariamente a riposo in  $A$ , la sua velocità  $v_A$  è nulla e risulta:

$$U_{eA} = U_{eB} + \frac{1}{2} m_{q_0} v_B^2,$$

dove  $v_B$  è la velocità della carica e  $m_{q_0}$  è la sua massa. Viceversa, se  $q_0 < 0$  allora  $\Delta U_e > 0$  ovvero  $U_{eB} > U_{eA}$ , cioè il sistema guadagna energia potenziale in corrispondenza del moto di una carica negativa nella direzione del campo elettrico. Supponiamo che lo spostamento avvenga tra due punti generici; siccome  $\vec{E}$  è uniforme, si ha:

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B (E \hat{x}) \cdot (\hat{x} dx + \hat{y} dy) = -\int_A^B E dx = -Ed,$$

così il risultato conseguito è lo stesso del caso precedente. Ne segue che i punti perpendicolari alla direzione del campo ( $B$  e  $C$  ad esempio, nella figura) sono equipotenziali e definiscono una superficie detta *superficie equipotenziale*.



## 1.12 Potenziale elettrico ed energia potenziale per cariche puntiformi

La differenza di potenziale tra i punti  $A$  e  $B$  di figura situati in prossimità di una carica puntiforme  $q$  vale:

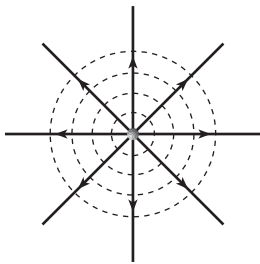
$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

in cui:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r};$$

siccome la proiezione del vettore  $d\vec{l}$  nella direzione del versore  $\hat{r}$ , pari a  $\hat{r} \cdot d\vec{l}$ , è uguale alla variazione  $dr$  che subisce il modulo del vettore  $\vec{r}$  quando il suo estremo libero si sposta di un vettore  $d\vec{l}$ , si ha:

$$V_B - V_A = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right).$$



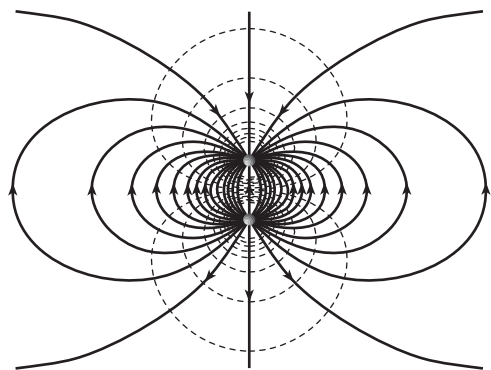
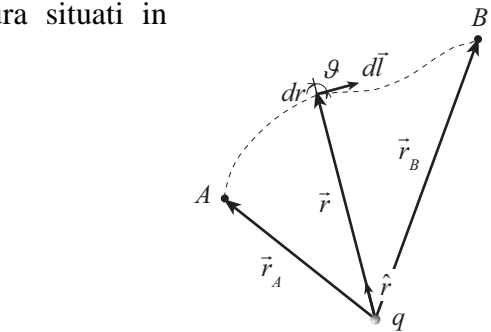
Si noti che l'integrale appena calcolato risulta indipendente dal percorso seguito, a motivo della conservatività del campo. Assumendo che il potenziale sia nullo per  $r_A \rightarrow \infty$ , dalla relazione precedente segue il potenziale di una carica puntiforme:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r};$$

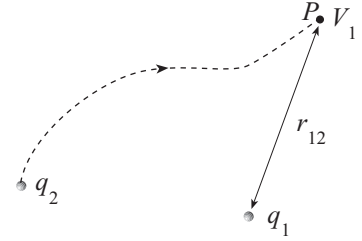
tale espressione può essere interpretata come il lavoro per unità di carica che si effettua per trasportare una carica dall'infinito ad un punto posto a distanza  $r$  dalla carica  $q$ . Poiché  $V$  è uniforme su una superficie sferica di raggio  $r$  (cioè  $r_A = r_B$  nella precedente relazione), concludiamo che le superfici equipotenziali per una carica puntiforme sono delle sfere concentriche alla carica stessa e tali superfici risultano, punto per punto, perpendicolari alla direzione del campo. Nelle figure è mostrata la sezione (in tratteggio) delle superfici equipotenziali per una carica puntiforme e per due cariche puntiformi di segno opposto. Come conseguenza del principio di sovrapposizione, il potenziale in un certo punto, dovuto a più cariche puntiformi è pari alla somma dei potenziali di ciascuna carica calcolati in tale punto:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (1.13)$$

sempre nell'ipotesi che il potenziale sia nullo all'infinito. Questa espressione costituisce la definizione originaria fornita da Green per la funzione potenziale.



Sia  $V_1$  il potenziale determinato dalla carica  $q_1$  nel punto  $P$  distante  $r_{12}$  da  $q_1$ . Il lavoro necessario per portare una seconda carica,  $q_2$ , dall'infinito a  $P$  vale  $q_2 V_1$ . Poiché per definizione tale lavoro è pari all'energia potenziale  $U_e$  del sistema quando le due cariche sono separate dalla distanza  $r_{12}$ , allora:



$$U_e = q_2 V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

E' possibile generalizzare questa espressione ad un sistema di più cariche trovando, ad esempio, per tre cariche:

$$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right),$$

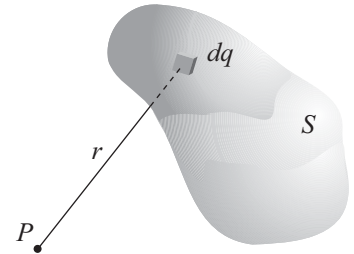
ovvero, per  $N$  cariche:

$$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i.$$

### 1.13 Potenziale elettrico dovuto a distribuzioni continue di carica

Per il calcolo del potenziale di una distribuzione continua facciamo riferimento alle espressioni già trovate per le cariche puntiformi. Sia  $dq$  un elemento di carica della distribuzione  $Q$ , allora, il contributo al potenziale nel punto  $P$  posto a distanza  $r$  da questo elemento è:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r},$$



così, per ottenere il potenziale generato da tutta la distribuzione occorre integrare su tutta la carica  $Q$  della distribuzione:

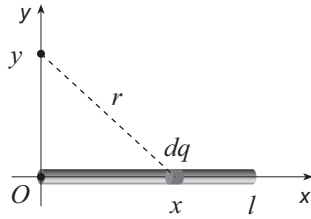
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{r}.$$

In relazione al tipo di distribuzione di carica è possibile esplicitare il differenziale  $dq$ ; così, qualora la carica è distribuita in un volume  $\mathcal{V}$  con densità  $\rho = dq/dv$ , allora:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho dv}{r}.$$

Un approccio alla determinazione del potenziale di un corpo alternativo al precedente prevede la diretta applicazione dell'espressione (1.11) della differenza di potenziale in termini di integrale di

linea di  $\vec{E}$ . Pertanto, se il problema ha un grado di simmetria tale da rendere agevole questa determinazione, fissando infine il valore del potenziale in un punto arbitrario, è possibile stabilire il potenziale del corpo.



**Esempio:** (*Potenziale elettrico di una bacchetta carica*). Consideriamo una bacchetta di lunghezza  $l$  e valutiamo il potenziale in corrispondenza dei punti dell'asse passante per un estremo. Il contributo al potenziale di un elemento di carica  $dq$  posto a distanza  $r$  dal punto considerato, vale:

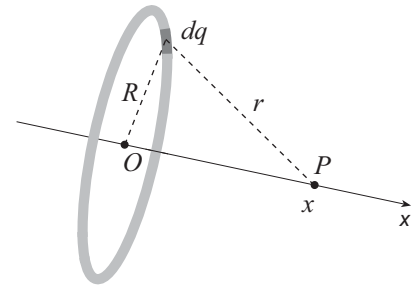
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{1/2}},$$

così, integrando da 0 a  $l$  si trova:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + y^2}}{y} \right).$$

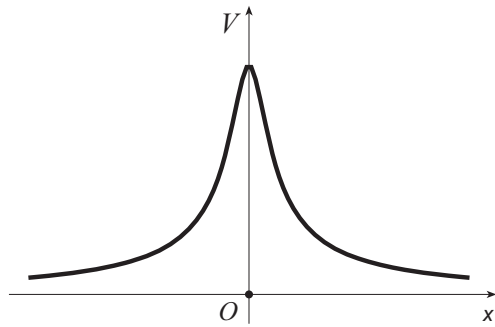
**Esempio:** (*Potenziale elettrico dovuto ad un anello uniformemente carico*). Consideriamo un anello uniformemente carico e calcoliamo il potenziale in un punto  $P$  posto sull'asse dell'anello. Il contributo al potenziale di un elemento di carica  $dq$  posto sull'anello è:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(x^2 + R^2)^{1/2}},$$



il termine  $(x^2 + R^2)^{1/2}$  è comune a tutti i punti sull'anello, così, integrando, segue:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{(x^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \int_Q dq = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + R^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$



Il cui grafico è mostrato in figura.

**Esempio:** (*Potenziale elettrico di una sfera uniformemente carica*). Consideriamo una sfera uniformemente carica di raggio  $R$  e calcoliamo il potenziale in un punto della sua superficie. Assumendo che il potenziale sia nullo all'infinito, dalla relazione (1.7) e dalla definizione (1.11) segue:

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\zeta^2} d\zeta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r};$$

in particolare, in corrispondenza di un punto posto sulla superficie della sfera risulta:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}. \quad (1.15)$$

## 1.14 Relazione tra campo elettrico e potenziale

Nota che sia l'espressione del campo elettrico è possibile ricavare il corrispondente potenziale attraverso la relazione:

$$V(P) = - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} + V(P_0);$$

da questa espressione segue:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV \quad (1.16)$$

e, sviluppando i due membri in coordinate cartesiane, si ha:

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right),$$

così, confrontando le due espressioni, segue:

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{\partial V}{\partial x}, \\ E_y &= - \frac{\partial V}{\partial y}, \\ E_z &= - \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned}$$

ovvero, vettorialmente:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V. \quad (1.17)$$

Sostituendo questa relazione nella (1.16) si trova:

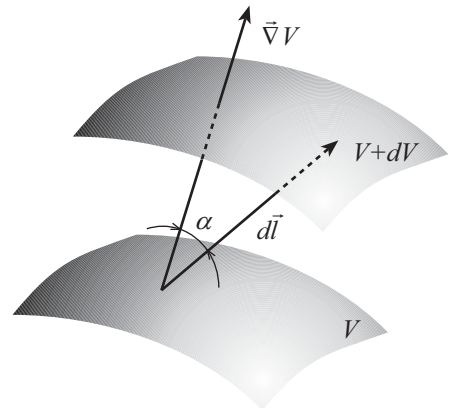
$$dV = (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{l} = |\vec{\nabla} V| dl \cos \alpha$$

in cui  $\alpha$  rappresenta l'angolo compreso tra i vettori  $\vec{\nabla} V$  e  $d\vec{l}$ .  
Da tale relazione segue:

$$\frac{dV}{dl} = |\vec{\nabla} V| \cos \alpha,$$

cioè la variazione per unità di lunghezza di  $V$  nella direzione di  $d\vec{l}$  è pari alla proiezione di  $\vec{\nabla} V$  nella direzione di  $d\vec{l}$ .

Se a partire da un punto ci si sposta di un tratto  $d\vec{l}$  ortogonalmente a  $\vec{\nabla} V$ , siccome  $\alpha$  vale  $\pi/2$  e  $\cos \alpha = 0$ , segue che  $dV/dl = 0$ , ovvero  $V$  è costante; pertanto  $\vec{\nabla} V$  è un vettore





perpendicolare alle superfici equipotenziali in cui  $V$  è costante. Infine, se  $d\vec{l}$  è diretto perpendicolarmente alle superfici equipotenziali, ovvero parallelamente a  $\vec{\nabla}V$ , siccome  $\alpha$  è nullo e  $\cos \alpha = 1$ , segue che la derivata direzionale  $dV/dl$  risulta massima e pari al modulo del gradiente:

$$\frac{dV}{dl} = |\vec{\nabla}V|.$$

Inoltre il verso di  $\vec{\nabla}V$  è nella direzione in cui il potenziale aumenta con la derivata massima<sup>2</sup>.

**Esempio:** A partire dalla relazione (1.17) e dall'espressione del potenziale (1.14) deduciamo l'espressione del campo elettrico sull'asse di un anello carico lungo l'asse  $x$  (per  $x > 0$ ):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\hat{x} \frac{dV}{dx} = \hat{x} \frac{d}{dx} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + R^2)^{1/2}} = -\hat{x} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + R^2)^{-3/2} 2x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x},$$

che coincide con quanto già determinato attraverso l'applicazione della legge di Coloumb.

## 1.15 Espressione della conservatività del campo elettrostatico

Dalla conservatività del campo elettrico segue che l'integrale di linea di  $\vec{E}$  calcolato da un punto  $A$  ad un punto  $B$  risulta indipendente dal percorso  $\mathcal{C}$  che porta da  $A$  a  $B$ , cioè

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B),$$

ovvero l'integrale dipende dai soli valori estremi del percorso. Se il percorso è tale che i punti  $A$  e  $B$  coincidono, ossia la curva  $\mathcal{C}$  è chiusa, allora si ha:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Quindi, l'integrale di linea del campo elettrostatico, calcolato lungo una curva chiusa è nullo. Se applichiamo a quest'ultima espressione il teorema del rotore, si ha:

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s};$$

fissata la curva chiusa  $\mathcal{C}$ , questa relazione vale per ogni superficie  $\mathcal{S}$  che abbia per contorno  $\mathcal{C}$ , pertanto deve risultare:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0},$$

<sup>2</sup> Infatti, ad esempio, per una carica puntiforme positiva,  $\vec{\nabla}V$  punta verso la carica, dove il potenziale aumenta.

cioè il campo elettrostatico è irrotazionale. Questa proprietà del campo elettrostatico può essere dedotta seguendo un'altra via; siccome tale campo è conservativo esiste una funzione scalare  $V$  che soddisfa la relazione (1.17) allora:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V &= - \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \right) \hat{x} - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \right) \hat{y} - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \hat{z} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Si noti che a prescindere dallo sviluppo del prodotto vettoriale  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V$  in coordinate cartesiane, tale risultato poteva essere conseguito considerando  $\vec{\nabla}$  e  $\vec{\nabla} V$  come due vettori paralleli il cui prodotto vettoriale risulta, ovviamente, nullo.

## 1.16 Conduttori carichi isolati

Siano  $A$  e  $B$  due punti posti in un conduttore all'equilibrio, poiché all'interno del conduttore il campo elettrico è nullo, si ha:

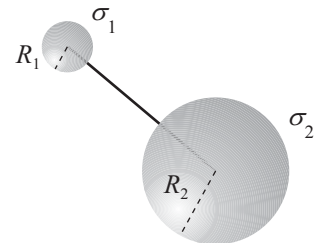
$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

per cui:

$$V(A) = V(B),$$

ovvero tutti i punti interni al conduttore sono allo stesso potenziale e, anche la superficie del conduttore, in particolare, è una superficie equipotenziale. Questa proprietà, scoperta sperimentalmente da Beccaria, Henry Cavendish e Coulomb venne dimostrata nel 1811 da Poisson.

Quale ulteriore proprietà dei conduttori carichi all'equilibrio, è possibile provare che in un conduttore di forma irregolare la carica tende ad accumularsi nei punti in cui la curvatura della superficie è maggiore, ovvero in prossimità delle punte. Per comprendere questo fenomeno consideriamo due sfere conduttrici di raggi, rispettivamente,  $R_1$  e  $R_2$ , con  $R_1 < R_2$ , collegate elettricamente tra loro tramite un filo conduttore. Se  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  indicano le densità superficiali di carica sui due conduttori, le cariche rispettive saranno:



$$q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1,$$

$$q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2,$$

e facendo il rapporto membro a membro, segue:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1^2 \sigma_1}{R_2^2 \sigma_2}.$$

D'altra parte, siccome sono connesse con un conduttore, le due sfere sono allo stesso potenziale; assumendo che la distanza tra le sfere sia tale da poter ritenere che la carica di una non influenzi la distribuzione di carica dell'altra, dalla relazione (1.15) segue che il comune valore  $V$  del loro potenziale è:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

da cui risulta:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

così, confrontando con l'espressione precedente, si ha:

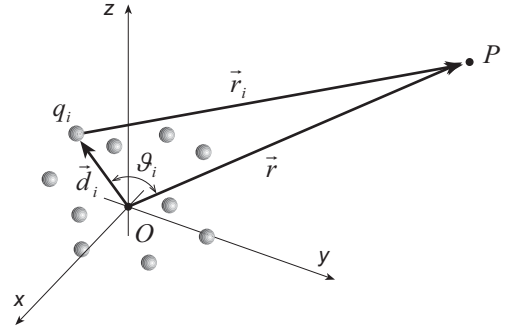
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Siccome  $R_1 < R_2$ , allora  $\sigma_1 > \sigma_2$ , cioè la sfera più piccola ha una maggiore densità di carica superficiale; ciò implica che il campo elettrico è più intenso in prossimità della sfera più piccola. Per questo motivo in un conduttore che presenta una zona in cui il raggio di curvatura della superficie è molto piccolo, ovvero presenta una punta, il campo elettrico è maggiore rispetto alle zone con curvatura più grande.

Le proprietà dei conduttori puntiformi furono verificate per la prima volta da Franklin e portarono a molteplici applicazioni tra cui il parafulmine. Qualora la curvatura di una regione della superficie di un conduttore carico è accentuata sino a ridursi ad una punta, la densità superficiale della carica in tale regione può raggiungere valori molto elevati e di conseguenza, dalla relazione (1.10), anche il campo elettrico nelle immediate vicinanze della punta può risultare particolarmente intenso. Se il conduttore è posto nel vuoto ciò non ha conseguenze, tuttavia, se è immerso in un gas, come l'aria, in corrispondenza di un opportuno valore dell'intensità del campo si manifestano dei fenomeni di *ionizzazione*; cioè uno o più elettroni delle molecole del gas situate in prossimità della punta vengono rimossi per effetto del campo. Le molecole così ionizzate vengono accelerate dal campo elettrico e, una volta raggiunta l'energia cinetica sufficiente, ionizzano per urto altre molecole del gas. Questo processo determina in breve tempo la formazione presso la punta di un consistente numero di ioni positivi e negativi. Quelli di carica opposta a quella della punta sono attratti verso il conduttore neutralizzandone in tutto o in parte la carica; quelli di carica uguale vengono allontanati dalla punta determinando un movimento macroscopico del gas detto *vento elettrico*.

## 1.17 Sviluppo in serie di multipoli

Consideriamo una distribuzione di  $N$  cariche puntiformi  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , con  $\sum_{i=1}^N q_i \equiv Q$ ; attraverso la relazione (1.13) è possibile stabilire il valore del potenziale in corrispondenza di un punto  $P$  situato a distanza  $r_i$  da ciascuna delle cariche. Considerando un sistema di riferimento con origine in un arbitrario punto  $O$  (si veda la figura),  $\vec{r}_i$  rappresenta la differenza tra il vettore  $\vec{OP}$ , pari a  $\vec{r}$ , ed il vettore posizione dell' $i$ -esima carica,  $\vec{d}_i$ :



$$\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{d}_i ;$$

pertanto la distanza  $r_i$  può esprimersi come:

$$r_i = \left( r^2 - 2d_i r \cos \mathcal{G}_i + d_i^2 \right)^{1/2} = r \left[ 1 - 2 \cos \mathcal{G}_i \left( \frac{d_i}{r} \right) + \left( \frac{d_i}{r} \right)^2 \right]^{1/2} ,$$

così:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos \mathcal{G}_i \left( \frac{d_i}{r} \right) + \left( \frac{d_i}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} . \quad (1.18)$$

Sfruttando l'espressione dello sviluppo in serie del binomio<sup>3</sup> in cui  $n = -1/2$  e  $y = -(2 \cos \mathcal{G}_i)(d_i/r) + (d_i/r)^2$ , la quantità in parentesi quadre diventa:

$$\begin{aligned} \left[ 1 - 2 \cos \mathcal{G}_i \left( \frac{d_i}{r} \right) + \left( \frac{d_i}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} &= \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[ -2 \cos \mathcal{G}_i \left( \frac{d_i}{r} \right) + \left( \frac{d_i}{r} \right)^2 \right] + \frac{3}{8} \left[ -2 \cos \mathcal{G}_i \left( \frac{d_i}{r} \right) + \left( \frac{d_i}{r} \right)^2 \right]^2 + \dots \end{aligned}$$

e sviluppando, si ottiene:

---

<sup>3</sup>  $(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!} y^2 + \dots$ ,

$$\left[ 1 - 2 \cos \vartheta_i \left( \frac{d_i}{r} \right) + \left( \frac{d_i}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} =$$

$$= 1 + \cos \vartheta_i \left( \frac{d_i}{r} \right) + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta_i - 1) \left( \frac{d_i}{r} \right)^2 + \dots$$

Infine, sostituendo nella relazione (1.18), si ottiene:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \cos \vartheta_i \left( \frac{d_i}{r} \right) + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta_i - 1) \left( \frac{d_i}{r} \right)^2 + \dots \right].$$

Dalla (1.13), l'espressione del potenziale del sistema di cariche nel punto  $P$  considerato è, quindi:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^N q_i \left[ 1 + \cos \vartheta_i \left( \frac{d_i}{r} \right) + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta_i - 1) \left( \frac{d_i}{r} \right)^2 + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^N q_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^N q_i d_i \cos \vartheta_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_{i=1}^N q_i d_i^2 \frac{3 \cos^2 \vartheta_i - 1}{2} + \dots = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \frac{q_i d_i^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta_i). \end{aligned} \quad (1.19)$$

In cui  $P_n(\cos \vartheta_i)$  rappresenta l' $n$ -esimo polinomio di Legendre<sup>4</sup>. La relazione precedente prende il nome di *sviluppo in serie di multipoli* e consente di stimare il potenziale prodotto da una generica distribuzione di carica a grandi distanze dalla distribuzione stessa. Ciascun termine dello sviluppo ha ordine  $1/r^{n+1}$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  e pertanto è trascurabile rispetto al termine precedente, tuttavia se il termine  $n$ -esimo è nullo, allora diventa significativo il termine  $(n+1)$ -esimo; in particolare, il primo termine, corrispondente a  $n = 0$ , è detto termine di *monopolo*, il secondo, con  $n = 1$ , è detto

<sup>4</sup> I polinomi di Legendre sono definiti attraverso la relazione:

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \vartheta)^n} (\cos^2 \vartheta - 1)^n,$$

e, in particolare, i primi 6 polinomi sono:

$n$	$P_n(\cos \vartheta)$
0	1
1	$\cos \vartheta$
2	$\frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2}$
3	$\frac{5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta}{2}$
4	$\frac{35 \cos^4 \vartheta - 30 \cos^2 \vartheta + 3}{8}$
5	$\frac{63 \cos^5 \vartheta - 70 \cos^3 \vartheta + 15 \cos \vartheta}{8}$

termine di *dipolo*, il terzo, con  $n = 2$ , termine di *quadrupolo*, il successivo, termine di *ottupolo*, e così via.

Il numeratore del termine di monopolio rappresenta la carica totale  $Q$  della distribuzione, quindi, se  $Q \neq 0$ , tutti gli altri termini dello sviluppo diventano trascurabili per punti sufficientemente lontani dall'origine  $O$  e la distribuzione determina un potenziale uguale a quello prodotto da una carica puntiforme situata nell'origine  $O$ .

Se il sistema di cariche è neutro,  $Q = 0$ , il termine di monopolio è nullo ed il termine dominante dello sviluppo è quello di dipolo  $(1/4\pi\epsilon_0 r^2) \sum_{i=1}^N q_i d_i \cos \vartheta_i$ . Questa quantità può essere riguardata come la componente del vettore  $(1/4\pi\epsilon_0 r^2) \sum_{i=1}^N q_i \vec{d}_i$  della direzione di  $\vec{r}$ , cioè  $(1/4\pi\epsilon_0 r^2) \sum_{i=1}^N q_i \vec{d}_i \cdot \hat{r}$ .

La circostanza non banale più semplice in cui  $Q = 0$  è quella in cui la distribuzione di carica è costituita da sole due cariche, una opposta dell'altra. Tale distribuzione prende il nome di *dipolo elettrico*.

**Esempio:** (*Campo prodotto da un dipolo elettrico*) Stabiliamo il campo elettrico in un punto situato lungo la linea mediana perpendicolare alla congiungente le cariche del dipolo e posto alla distanza  $x$  dalla congiungente (si veda la figura). Indicando con  $\vec{E}_-$  e  $\vec{E}_+$  i campi prodotti da ciascuna carica, per il principio di sovrapposizione si ha:

$$\vec{E} = \vec{E}_- + \vec{E}_+,$$

dove:

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

D'altra parte risulta:

$$(E_-)_x = -(E_+)_x,$$

così il campo sarà diretto lungo l'asse  $y$  e varrà:

$$E = (E_-)_y + (E_+)_y = E_- \cos \vartheta + E_+ \cos \vartheta = 2E_+ \cos \vartheta,$$

dove:

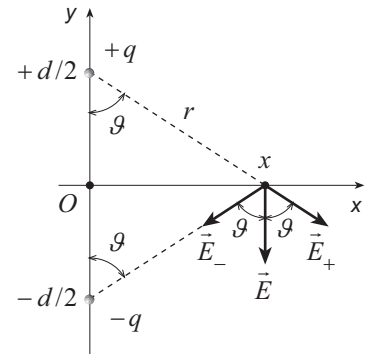
$$\cos \vartheta = \frac{\frac{d}{2}}{r} = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}.$$

Pertanto, sostituendo si ha:

$$E = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \frac{d}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad (1.20)$$

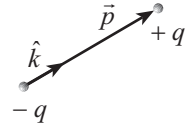
avendo posto:

$$\vec{p} \equiv qd \hat{k},$$





dove  $\hat{k}$  è un versore orientato dalla carica negativa a quella positiva (si veda la figura). Il vettore così definito prende il nome di *momento di dipolo elettrico* e, in modulo, è pari al prodotto  $qd$ .



**Esempio:** (*Momento di dipolo elettrico di una molecola*) Il momento di dipolo elettrico è una proprietà di numerose molecole, ossia di aggregati atomici contenenti una carica positiva ed una negativa separate da una certa distanza. Ad esempio la molecola di cloruro di sodio ( $NaCl$ ) può essere rivista come l'insieme di uno ione  $Na^+$  ed uno  $Cl^-$  separati da una certa distanza  $d_{NaCl}$  e rispettivamente di cariche  $+e$  e  $-e$ . Dalle misure si evince che:

$$d_{NaCl} \approx 0.236 \text{ nm},$$

così il relativo momento di dipolo dovrebbe essere:

$$p_{NaCl} = ed_{NaCl} = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) \cdot (0.236 \times 10^{-9} \text{ m}) = 3.78 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}.$$

Tuttavia il valore misurato è:

$$p_{NaCl} \approx 3.00 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m};$$

ciò evidenzia che l'elettrone del sodio non è completamente ceduto all'atomo di cloro ma risulta condiviso tra questi due atomi.

**Esempio:** (*Campo elettrico asintotico di un dipolo*) In applicazioni come quella mostrata nell'esempio precedente risulta utile stabilire il campo elettrico a grande distanza dal dipolo, ossia per:

$$x \gg d.$$

Dalla relazione (1.20) segue:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \left[1 + \left(\frac{d}{2x}\right)^2\right]^{-3/2},$$

facendo uso dell'espressione dello sviluppo in serie del binomio (si veda la nota 3) con  $n = -3/2$  e  $y = (d/2x)^2$ , si ha:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \left[1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{d}{2x}\right)^2 + \dots\right]$$

ed arrestando lo sviluppo al primo termine segue:

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}. \quad (1.21)$$

Analogamente si prova che per un punto posto lungo l'asse  $y$ , a grande distanza da dipolo, si ha:

$$E \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{y^3}. \quad (1.22)$$

I due risultati appena riportati costituiscono l'indicazione di una caratteristica generale del dipolo; proveremo infatti nel seguito che a distanza  $r$  dal dipolo, con  $r \gg d$ , il campo elettrico varia come  $1/r^3$ .

**Esempio:** (*Azione di un campo elettrico su un dipolo*) Supponiamo che un dipolo elettrico sia immerso in un campo elettrico esterno uniforme  $\vec{E}$  e supponiamo inoltre che il dipolo non perturbi significativamente le linee di forza del campo. Le forze  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  agenti sulle due cariche valgono, in modulo:

$$F_1 = F_2 = qE,$$

tuttavia, sebbene abbiano la stessa direzione, sono opposte in verso (si veda la figura) così il centro di massa del dipolo non è soggetto a movimento. Nondimeno le forze esercitano una coppia sul dipolo che tende pertanto a ruotare per allinearsi con la direzione del campo. Se  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  sono i raggi vettori delle due cariche rispetto al centro di massa del dipolo, con

$$r_1 = r_2 = \frac{d}{2},$$

i momenti delle due forze rispetto al centro di massa del dipolo  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  hanno moduli:

$$\tau_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{F}_1| = \frac{d}{2} qE \sin \vartheta = |\vec{r}_2 \times \vec{F}_2| = \tau_2;$$

inoltre  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  sono uguali sia in direzione che in verso, così risulta:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2$$

pertanto il momento totale delle forze ha modulo:

$$\tau = 2\tau_1 = 2 \frac{d}{2} qE \sin \vartheta = dqE \sin \vartheta = pE \sin \vartheta$$

e vettorialmente:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Fisicamente ciò significa che il dipolo elettrico è indotto dal campo a raggiungere una posizione di equilibrio tale che  $\vec{p}$  risulti parallelo ad  $\vec{E}$ ; in tale condizione infatti  $\vec{\tau} = \vec{0}$ . Questo corrisponde sia a  $\vartheta = 0$  che a  $\vartheta = \pi$ ; nel seguito proveremo che mentre il primo valore di  $\vartheta$  corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile, il secondo valore è relativo ad una posizione di equilibrio instabile.

**Esempio:** (Potenziale ed energia potenziale di un dipolo elettrico) Consideriamo un dipolo il cui momento ha intensità

$$p = qd;$$

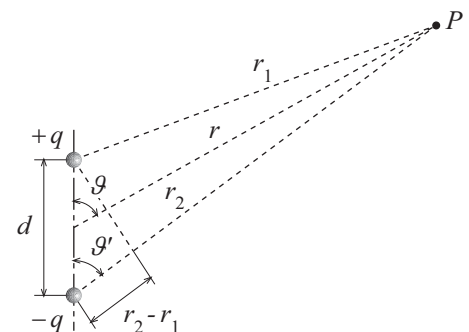
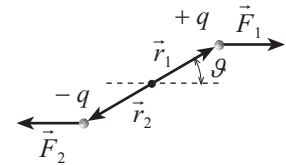
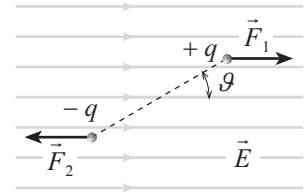
il potenziale in un punto  $P$  posto a distanze  $r_1$  e  $r_2$ , rispettivamente, dalla carica positiva e da quella negativa, vale:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Questa espressione può essere valutata nel caso in cui il punto  $P$  è molto distante dal dipolo, ovvero, con riferimento alla figura, per  $r_1, r_2 \gg d$ ; in questo caso risulta:

$$\begin{aligned} r_1, r_2 &\approx r, \\ \vartheta &\approx \vartheta'; \end{aligned}$$

con tali approssimazioni il prodotto  $r_1 r_2$  è circa uguale a  $r^2$  e la differenza  $r_2 - r_1$ , pari a  $d \cos \vartheta'$ , è circa uguale a  $d \cos \vartheta$ . Pertanto, sostituendo nella precedente espressione, si ha:



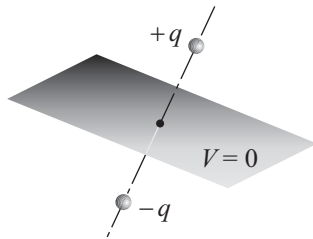
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}. \quad (1.23)$$

Questa espressione coincide col termine di dipolo dello sviluppo (1.19) per  $N = 2$ , infatti, con riferimento alla figura, in tale circostanza, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^N q_i d_i \cos \vartheta_i &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 d_1 \cos \vartheta_1 + q_2 d_2 \cos \vartheta_2}{r^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \vec{d}_1 \cdot \hat{r} + q_2 \vec{d}_2 \cdot \hat{r}}{r^2}, \end{aligned}$$

dove  $\hat{r}$  è pari a  $\vec{r}/r$ ; se  $q_1 \equiv q$  e  $q_2 \equiv -q$ , segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^N q_i d_i \cos \vartheta_i &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \vec{d}_1 \cdot \hat{r} + q_2 \vec{d}_2 \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \vec{d}_1 \cdot \hat{r} - q \vec{d}_2 \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{d}_1 - \vec{d}_2) \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}, \end{aligned}$$



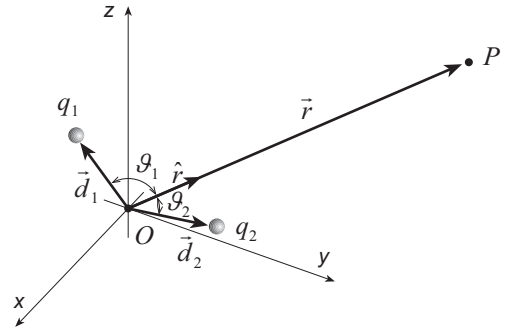
essendo  $\vec{p} = q(\vec{d}_1 - \vec{d}_2)$  e  $\vartheta$  l'angolo tra la direzione di  $\vec{r}$  e quella di  $\vec{p}$ . Dalla relazione (1.23) segue che il potenziale è nullo per  $\vartheta = \pi/2$ , ovvero nel piano equatoriale del dipolo, pertanto il campo elettrico del dipolo non compie lavoro quando una carica viene portata dall'infinito ad un punto su questo piano, attraverso un qualsiasi percorso. A partire dalla relazione (1.23), facendo uso della (1.17), è possibile ricavare l'espressione generale del campo elettrico prodotto dal dipolo in tutto lo spazio. Allo scopo risulta opportuno adoperare l'espressione del gradiente in coordinate sferiche (si veda l'Appendice); le componenti del campo elettrico sono quindi:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^3}; \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3}; \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \end{aligned}$$

Dal fatto che la componente  $E_\phi$  del campo elettrico è nulla segue che il campo ha simmetria cilindrica, come poteva banalmente prevedersi dalla forma della distribuzione di cariche. Il modulo del campo elettrico vale pertanto:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_r^2 + E_\vartheta^2 + E_\phi^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \vartheta + 1}; \end{aligned}$$

si osservi che lungo una direzione perpendicolare all'asse del dipolo e passante per il suo punto medio, corrispondente a  $\vartheta = \pi/2$ , l'espressione del campo è uguale alla (1.21) mentre, lungo l'asse del dipolo, per  $\vartheta = 0$ , l'espressione è uguale alla (1.22). Consideriamo un dipolo di momento  $\vec{p}$  immerso in un campo elettrico esterno  $\vec{E}$ ; per ruotare tale dipolo di un dato angolo rispetto al campo è necessario compiere del lavoro. Tale lavoro accrescerà l'energia potenziale del sistema. Il lavoro elementare  $dL$  necessario per ruotare un momento meccanico  $\vec{\tau}$  di un angolo  $d\vartheta$  è pari a  $\tau d\vartheta$  così, siccome il momento del dipolo vale in modulo  $pE \sin \vartheta$  e poiché il lavoro viene trasformato in energia potenziale, si ha che per una rotazione finita da  $\vartheta_0$  a  $\vartheta$ , la variazione di energia potenziale è:



$$U - U_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \tau d\vartheta' = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} pE \sin \vartheta' d\vartheta' = -pE \cos \vartheta' \Big|_{\vartheta_0}^{\vartheta} = -pE (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0).$$

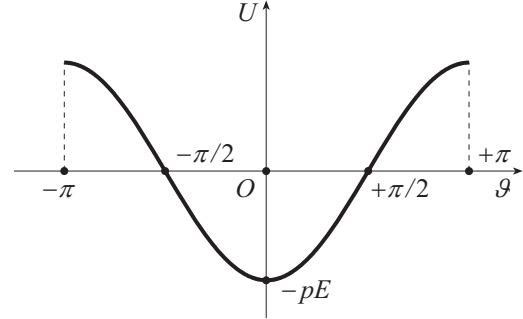
La costante  $\vartheta_0$  dipende dall'orientazione iniziale del dipolo per cui, assumendo  $\vartheta_0$  pari a  $\pi/2$  e ponendo quale riferimento per l'energia potenziale  $U_0 = 0$  per  $\vartheta_0 = \pi/2$ , si ha:

$$U = -pE \cos \vartheta,$$

ovvero:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Il grafico dell'energia potenziale in funzione dell'angolo  $\vartheta$  mostra la presenza di un minimo per  $\vartheta = 0$ , per cui tale angolo corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile del dipolo nel campo elettrico.



L'espressione dello sviluppo in serie di multipoli (1.19) può essere generalizzata al caso di una distribuzione continua di carica. In tale circostanza alla sommatoria sul numero di particelle della distribuzione corrisponde un integrale calcolato sul volume  $\mathcal{V}$  contenente la carica con densità  $\rho$ , cioè:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\mathcal{V}} \rho dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{\mathcal{V}} \rho d \cos \vartheta dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_{\mathcal{V}} \rho d^2 \frac{3\cos^2 \vartheta - 1}{2} dv + \dots = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \int_{\mathcal{V}} \rho d^n P_n(\cos \vartheta) dv. \end{aligned}$$

in cui  $\rho$  dipende, in generale, dal punto all'interno della distribuzione di carica.

## 1.18 Equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico

Assegnata una certa distribuzione statica di carica nello spazio vuoto, di densità descritta dalla funzione  $\rho = \rho(x, y, z)$ , il campo elettrico soddisfa le equazioni integrali:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho dv, \\ \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0; \end{aligned}$$

nella prima  $\mathcal{S}$  è una superficie chiusa contenente il volume  $\mathcal{V}$ ; nella seconda  $\mathcal{C}$  è una generica curva chiusa. La prima equazione è l'espressione della legge di Gauss mentre la seconda è conseguenza della conservatività del campo elettrostatico. In forma puntuale queste equazioni si scrivono:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Queste relazioni sono dette equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico. Il fatto che il campo elettrostatico è irrotazionale implica l'esistenza di una funzione potenziale  $V$  tale che:

$$-\vec{\nabla}V = \vec{E},$$

così, sostituendo nella relazione (1.24) segue  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) = \nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ , ovvero:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.25)$$

dove l'operatore  $\nabla^2$ , detto *laplaciano*, è definito come:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

La relazione (1.25), dimostrata da Poisson nel 1813, compendia le due equazioni di Maxwell e prende il nome di *equazione di Poisson*. Fissata che sia la funzione  $\rho$ , localizzata in una regione definita dello spazio, si prova che l'equazione di Poisson ammette una sola soluzione che soddisfi le specificate condizioni al contorno nel dominio di definizione. In assenza di cariche localizzate, ovvero per  $\rho = 0$ , l'equazione precedente si scrive:

$$\nabla^2 V = 0$$

e prende il nome di *equazione di Laplace*, che la riscoprì nel 1796 dopo che Leonard Eulero la trovò nel 1756.

