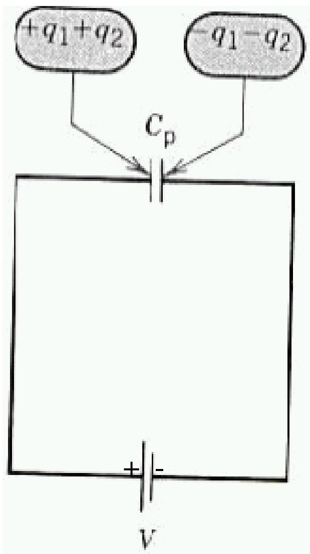
Appunti di Fisica 2

Elaborato da U patri

Novembre 2005

Come si fa a caricare un condensatore?

Per caricare un condensatore serve una sorgente che generi una d.d.p. come ad esempio una batteria:



Le due armature avranno d.d.p. V uguale a quella della batteria.

Definiamo:

$$C = \frac{Q}{V}$$

$U = Vq$ potenziale di una carica

$dU = Vdq \Rightarrow \int dU = \int V_{(t)} dq$ con V_t indichiamo la d.d.p. intermedia,

tuttavia C è sempre uguale essendo $C = \frac{Q_{(t)}}{V_{(t)}} \Rightarrow$

$u = \int \frac{Q_{(t)} dq}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2V^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{QV^2}{V} = \frac{1}{2}QV$ questa rappresenta l'energia del condensatore ossia il lavoro fatto dalla batteria per caricare il condensatore.

Ancora… il campo elettrico del condensatore $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$; $V = Ed$

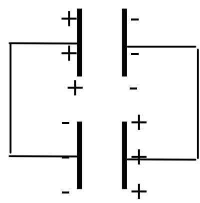
$$u = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 A E^2 d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{\text{Volume definito dalle armature}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ è la densità di energia dentro il condensatore detta densità di energia del campo elettrico. Questa formula è universale per qualsiasi campo elettrico.

Prendiamo due condensatori e li carichiamo applicando a tutti e due la stessa differenza di potenziale. In essi $C_2 > C_1 \Rightarrow Q_2 > Q_1$.

La condizione iniziale dei condensatori sarà : $Q_1 = C_1 V$ e $Q_2 = C_2 V$

Adesso colleghiamo i due condensatori in modo che la armatura positiva dell'uno sia collegata con l'armatura negativa dell'altro:



Sul condensatore C_1 si stabilirà una d.d.p. che chiamerò V_0 e si raggiungerà la carica finale Q_{1f}.

Analoga cosa per C2.

Per il principio di conservazione della carica avremo $Q = Q_2 - Q_1$ nel sistema formato da $C_1 + C_2 = C_E$.

Quant'è V_0? $V_0 = \dfrac{Q}{C_E} = \dfrac{Q_2 - Q_1}{C_1 + C_2}$

Consideriamo l'energia iniziale e l'energia finale:

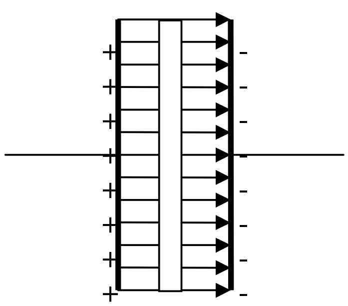
$$C = u_{i1} + u_{i2} = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) = \frac{1}{2} C_E V^2$$

$$u_f = u_{f1} + u_{f2} =$$

$$\frac{1}{2} C_1 V_0^2 + \frac{1}{2} C_2 V_0^2 = \frac{1}{2} C_1 \frac{(Q_2 - Q_1)^2}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{1}{2} C_2 \frac{(Q_2 - Q_1)^2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\left[\frac{(Q_2 - Q_1)^2}{(C_1 + C_2)^2}\right] = \frac{1}{2} \frac{(Q_2 - Q_1)^2}{C_1 + C_2};$$

Alla fine risulta che $u_i < u_f$, questo potrebbe essere giustificato dal fatto che nel fare la connessione una quantità di energia si disperde sotto forma di campo elettromagnetico nello spazio circostante.

Ipotizziamo di avere un condensatore piano, già carico, e di inserire al suo interno una lastra conduttiva:



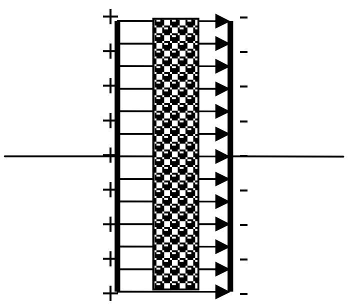
C,V,Q

$E = V/d$

L'oggetto inserito viene sottoposto al fenomeno dell'induzione elettrostatica. La carica indotta ammonta al totale delle linee di forza che entrano ed escono dal corpo. Quindi le cariche del conduttore sono uguali a quelle del condensatore.

Le cariche sono uguali per il principio di conservazione della carica :

$E_p = 0 = E_{est} + E_{conduttore} = E_{est} - \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ma $E_c = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ quindi la carica del condensatore è uguale a quella del conduttore.



Ipotizziamo di avere un condensatore carico e inseriamo un dielettrico fra le armature.
Il campo elettrico non può agire provocando il fenomeno dell'induzione elettrostatica in quanto in un isolante non vi sono elettroni di conduzione.
Tuttavia il campo elettrico determina nei dielettrici il fenomeno fisico della polarizzazione. Ogni singolo atomo, della nuvola elettronica di atomi costituenti il dielettrico, si deforma in quanto gli elettroni periferici sottoposti al campo elettrico non riusciranno più a compiere orbite centrate rispetto al nucleo che, a sua volta viene sollecitato a spostarsi nello stesso verso in cui agisce il campo. (Tali deformazioni cesseranno quando non agirà più il campo elettrico.) Quando l'atomo si deforma non appare più elettricamente neutro e può essere schematizzato con due cariche elettriche uguali, molto vicine , ma di segno opposto.
Questo sistema prende il nome di dipolo elettrico.
Si osserva che il campo elettrico ,dopo l'inserimento del dielettrico, diminuisce perché la polarizzazione dielettrica determina una carica superficiale sul dielettrico che cancella parzialmente l'effetto delle cariche libere (sulle armature). L'intensità del campo *E* viene ridotta in proporzione alla "costante dielettrica relativa".
La costante dielettrica di un materiale è il rapporto tra le capacità in presenza ed in assenza di un dielettrico, cioè:

presenza del dielettrico

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}$$

Assenza del dielettrico

La capacità del condensatore con dielettrico è uguale a : $C_k = \dfrac{Q}{V_k}$ ma quanto vale V_k ?

Misurandola si vede che è diminuita di un fattore $\dfrac{1}{\varepsilon_r}$

$$C_k = \frac{Q}{\frac{V}{\varepsilon_r}} = \frac{\varepsilon_r Q}{V} = \varepsilon_r C$$ La capacità è aumentata di un fattore ε_r

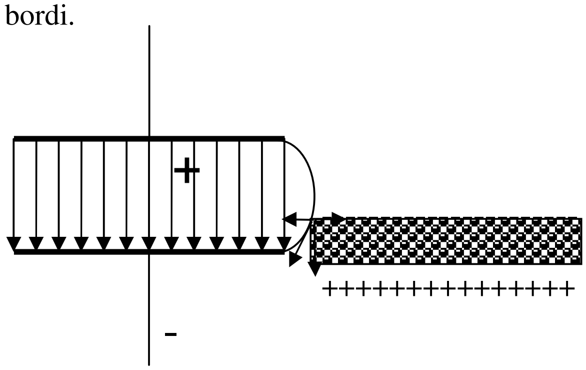
Adesso colleghiamo al sistema una batteria. L'alimentazione ripristinerà il precedente valore di d.d.p. a V:

$C_k = \dfrac{Q_k}{V}$ la quantità di carica è diversa perché la batteria invia altre cariche e si compie un lavoro incrementale necessario ad aggiungere una carica *dq* al condensatore alla tensione *V*.

Vogliamo conoscere l'energia iniziale e quella finale immagazzinata nel condensatore. L'energia iniziale è: $u_i = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$ e l'energia finale $u_f = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C_k} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{KC}$ $(K = \varepsilon_r)$.

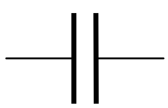
$u_i > u_f$ quindi c'è stata una dissipazione.
In pratica il condensatore sta esercitando una forza sulla lastra compiendo lavoro.

Le linee di forza entro lo spazio compreso fra le armature non sono sempre rettilinee e uniformemente distribuite, si ha una incurvatura e una fuoriuscita delle linee di forza in prossimità dei bordi.



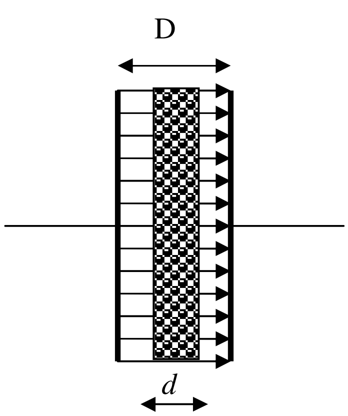
Se si avvicina una lamina dielettrica al condensatore succede che nel materiale isolante si modifica(fenomeno della polarizzazione) la forma degli atomi dando luogo a dipoli elettrici. La carica superficiale della lastra dielettrica, formata dai suddetti dipoli, si orienta con segno opposto della armatura adiacente, come effetto si ha che la lastra viene risucchiata all'interno del condensatore.
Le cariche superficiali della lamina, più vicine al condensatore, generano un campo proprio che si oppone al campo delle linee di bordo. Ne risulta un campo meno intenso del campo elettrico di bordo del condensatore ma dello stesso segno. L'effetto del dielettrico è, in sostanza, un indebolimento del campo nel quale è immerso.

Esercizio:



$C = \dfrac{Q}{V}$ inserendo il dielettrico fra le armature la capacità diviene: $C_k = kC > C$

Quando si inserisce il dielettrico tra le armature del condensatore, apparirà un eccesso di carica positiva $\left(\sigma_p^+\right)$ davanti all'armatura negativa e un eccesso di carica negativa davanti all'armatura positiva $\left(\sigma_p^-\right)$:



Ci si chiede: quanto diventerà la capacità finale C_f ?

$$C_f = \frac{Q}{V_f}$$

Il campo elettrico fuori dal dielettrico sarà invariato:

$$V_f = E\ (D-d)+(E-Ep)d \qquad \text{dove} \quad E_p = \frac{\sigma}{\varepsilon_r}$$

$$V_f = E(D-d)+\left(E-\frac{\sigma}{\varepsilon r}\right)d = ED-\frac{\sigma}{\varepsilon_r}d$$

sostituendo:

$$C_f = \frac{Q}{V_f} = \frac{Q}{ED - \frac{\sigma}{\varepsilon r} d}$$

poniamo $ED = V$

riscriviamo: $C_f = \dfrac{Q}{V - \frac{\sigma}{\varepsilon r} d}$ la capacità finale è aumentata e la d.d.p. rispetto al condensatore a vuoto è diminuita

Riscriviamo:

$C_f = \dfrac{Q}{V_f} = \dfrac{Q}{ED - \frac{\sigma}{\varepsilon r} d}$ nel termine $\dfrac{\sigma}{\varepsilon r}$ moltiplichiamo e dividiamo per la superficie S della armatura : $\dfrac{\sigma S}{\varepsilon r S} d$ siccome $Q = \sigma S$ abbiamo : $\dfrac{Q}{\varepsilon r S} d$ ricordando che $V = \dfrac{Q}{C}$ avremo $C = \varepsilon r \dfrac{S}{d}$

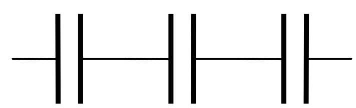
La capacità dipende dalle caratteristiche geometriche e dal tipo di dielettrico.

Riscriviamo:

$$C_f = \frac{Q}{V_f} = \frac{Q}{ED - \frac{\sigma}{\varepsilon r} d} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} D - \frac{\sigma}{\varepsilon r} d} = \frac{Q}{\frac{\sigma S}{\varepsilon_0 S} D - \frac{\sigma S}{\varepsilon r S} d} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon_0 S} D - \frac{Q}{\varepsilon r S} d} = \frac{1}{\frac{D}{\varepsilon_0 S} - \frac{d}{\varepsilon_r S}} = \frac{S}{\frac{D}{\varepsilon_0} - \frac{d}{\varepsilon_r}}$$

La capacità dipende dalle caratteristiche geometriche delle "zone" e dal tipo di dielettrico.

Altra riflessione:
nella figura precedente distinguiamo tre parti, la prima a sinistra del dielettrico, la seconda con il dielettrico, la terza a destra del dielettrico. Queste tre parti sono divise da due superfici equipotenziali. Possiamo vedere il tutto come tre condensatori in serie C_{01}, Cp, C_{02}
.



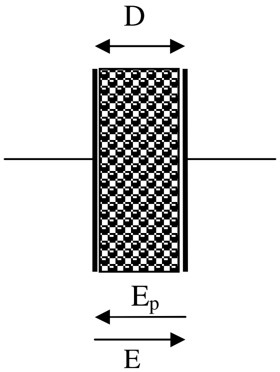
$$V_f = V_{01} + V_{02} + V_{03} = E_{01} d_1 + E_p d_2 + E_{02} d_3 = \frac{\sigma S d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{\sigma S d_2}{\varepsilon r S} + \frac{\sigma S d_3}{\varepsilon_0 S} =$$

$$C_f = \frac{Q}{V_f} = \frac{Q}{\frac{\sigma S d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{\sigma S d_2}{\varepsilon r S} + \frac{\sigma S d_3}{\varepsilon_0 S}} = \frac{Q}{\frac{Q d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{Q d_2}{\varepsilon r S} + \frac{Q d_3}{\varepsilon_0 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_{01}} + \frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_{02}}}$$

Abbiamo la formula per più capacità in serie:

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_n}}$$

Consideriamo un condensatore piano carico avente come dielettrico il vuoto, sarà :



$C_0 = \frac{A}{D}\varepsilon_0$ se inseriamo un dielettrico che riempie tutto lo spazio fra le armature la capacità varierà di un fattore k : $C_f = \frac{A}{D}k = \frac{Q}{V}k$

Il campo elettrico a vuoto E = $\frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Si è visto sperimentalmente che l'introduzione del dielettrico riduce il campo elettrostatico tra le armature del condensatore.:

$$E_f = E - E_p = \frac{E}{k}.$$

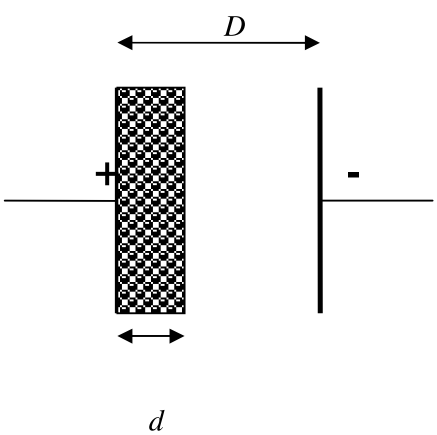
E' proprio la riduzione del campo elettrico la ragione dell'aumento della capacità del condensatore piano quando si introduce tra le sue armature il dielettrico.

La differenza di potenziale che in origine era $V = ED = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$ D diverrà $V_f = E_f D = \frac{Q}{\varepsilon_0 A k}D$

Per definizione $C_f = \frac{Q}{V_f} = \frac{\varepsilon_0 k A}{D} = kC_0$ per k $=\varepsilon_r$ in generale C $=\varepsilon_r C_0$

Nel condensatore che segue viene inserita una lamina conduttrice di spessore trascurabile, viene a costituirsi una superficie equipotenziale che di fatto è come una armatura che divide il condensatore originale in due condensatori collegati in serie.

Questa lamina conduttrice viene posta a $\frac{1}{3}$ D dalla armatura di destra e lo spazio relativo riempito con un dielettrico.



$d = \frac{1}{3}D$

A = area delle armature

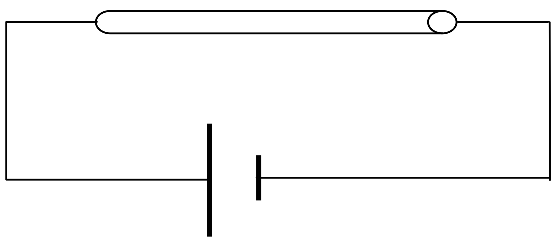
$$C_t = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Essendo $C_1 = \frac{A}{d}k = 3k\frac{A}{D}$ e $C_2 = \frac{A}{(D-d)}\varepsilon_0 = \frac{3A}{2D}\varepsilon_0$C

$$C_t = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\frac{3A}{D}k * \frac{3}{2}\frac{A}{D}\varepsilon_0}{3\frac{A}{D}k + \frac{3}{2}\frac{A}{D}\varepsilon} = \frac{\frac{9A^2 k\varepsilon_0}{2D^2}}{\frac{6Ak + 3A\varepsilon_0}{2D}} = \frac{3A^2 k\varepsilon_0}{D(2k + \varepsilon_0)}$$

Corrente e intensità di corrente

Immergiamo un corpo cilindrico in un campo elettrico. Dopo un tempo t , il campo elettrico all'interno del conduttore tende a zero. Se colleghiamo i due estremi del conduttore a formare una spira si avrà una migrazione di cariche e il campo elettrico sarà diverso da zero. Lo stesso fenomeno si ottiene se al conduttore si applica una batteria.



Le cariche verranno messe in movimento dalla forza elettromotrice fornita dalla batteria e avranno una loro $E_{c.}$ Durante il loro movimento le cariche urteranno fra di loro e contro il reticolo cristallino del conduttore e in parte cederanno la loro energia che si trasforma in calore. Questa trasformazione di energia cinetica in calore prende il nome di effetto Joule.

Il moto delle cariche elettriche prende il nome di corrente che viene definita come la quantità di carica che nell'unità di tempo attraversa una sezione A qualunque del conduttore:

$I = \frac{dq}{dt}$. Se si indica con n la densità numerica (numero di particelle per unità di volume) delle cariche, potremo scrivere:

$\rho = nq$ dove q è la carica fondamentale, che ciascun carica ha con sé. Si consideri un conduttore filiforme di sezione costante A . Se tutte le cariche in moto hanno la stessa velocità v_d (questa velocità comune è detta velocità di deriva), dopo un tempo t la quantità di carica che attraversa la sezione A sarà:

$$I = \frac{dq}{dt} = nqv_d A .$$

Si può definire la densità di corrente per unità di superficie come $J = nqv_d$ e $I = JA$.

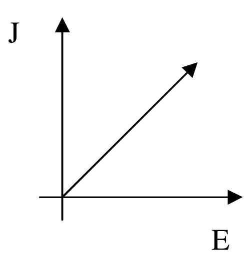
La $v_d << v_e$ dell'ordine di 1 m/h. La v_d può essere modificata applicando una d.d.p. maggiore con conseguente aumento di I. Le quantità n e q non sono modificabili.

Legge di Ohm

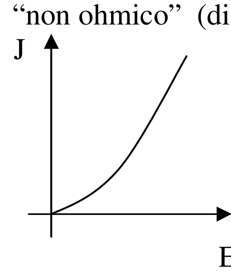
La legge di Ohm viene espressa dalla seguente relazione: $J = \sigma E$ con $\sigma = \frac{J}{E}$ chiamata conducibilità elettrica (reciproco della resistività elettrica $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J}$).

Un materiale per il quale vale questa relazione è detto "ohmico".

Un circuito ohmico è "lineare"(resistori):



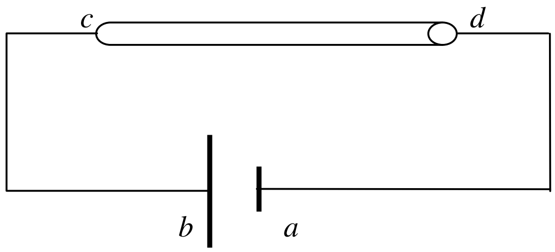
Un circuito in cui J non dipende linearmente da E è "non ohmico" (diodi,transistor,etc)



La legge di Ohm può essere espressa in altra forma:

$J = \sigma E = \sigma \frac{\Delta V}{l} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = RI$ con $R = \frac{l}{\sigma A}$ resistenza del conduttore.

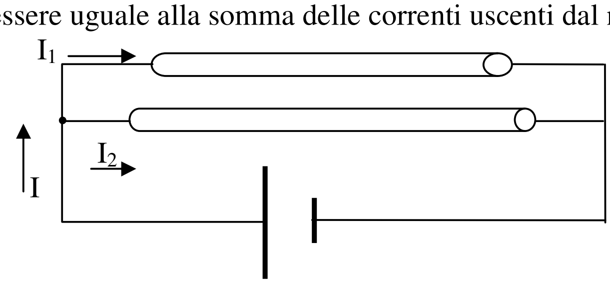
Il più semplice circuito è realizzato con una batteria e un conduttore:



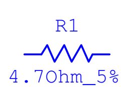
Proviamo a seguire il percorso di una carica positiva: nel tragitto da *a* verso *b* la carica aumenta il suo potenziale. Da *c* a *d* si ha una perdita di potenziale. Giunta a d la carica ha nuovamente il potenziale che aveva in partenza da *a*. $\Rightarrow$ Le forze elettriche sono conservative: $\Delta U = 0$ con questa espressione esprimiamo il "Principio di conservazione della carica".

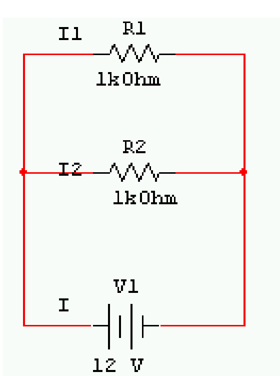
$u = q\Delta V \Rightarrow q\Delta V - IRq = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V - IR = 0$

Questa è la seconda legge di Kirchoff: In ogni maglia, la somma dei prodotti dei valori algebrici delle correnti per le resistenze deve essere uguale alla somma algebrica dei valori delle f.e.m. presenti nella maglia considerata;
o anche: In un circuito chiuso (maglia) la somma algebrica delle d.d.p. è 0(zero).
Una maglia è un circuito chiuso che non contiene nodi e che, scelto un verso di percorrenza, può essere percorso senza mai passare più di una volta in un conduttore.
La prima legge di Kirchoff viene applicata ai nodi, (per nodo intendiamo un punto di congiunzione di almeno due conduttori)., Questa legge dice che la somma algebrica delle correnti entranti ed uscenti da un nodo è 0(zero); o anche: la somma delle correnti entranti in un nodo deve essere uguale alla somma delle correnti uscenti dal nodo stesso..



La resistenza si indica con il simbolo:





In questo schema elettrico abbiamo due "circuiti chiusi" ossia due maglie e due nodi. Si può scrivere in sistema di equazione di cui due alle maglie e una ai nodi

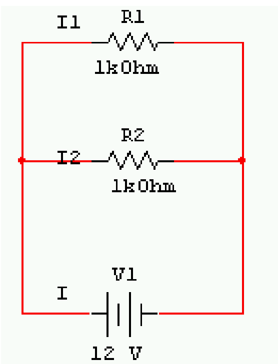
$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ V - I_2 R_2 = 0 \\ V - I_1 R_1 = 0 \end{cases}$$

Occorrono un numero di equazioni indipendenti pari almeno al numero di incognite circuitali, esiste una limitazione al numero di equazioni per i nodi e le maglie. Si può suggerire di usare le equazioni per i nodi in numero uguale al numero di nodi totali presenti nel circuito diminuito di una unità e, nel caso delle maglie, di verificare che una maglia si differenzi da un'altra per la presenza di almeno un elemento circuitale.
Per convenzione, la corrente fluisce, all'esterno del generatore dal polo positivo al polo negativo. All'interno del generatore, di conseguenza, va dal negativo al positivo.

La corrente si misura in Ampere $[I] = A = \frac{C}{S}$ in quanto $I = \frac{dq}{dt}$

La resistenza si misura in ohm : Ω ; $R = \frac{\Delta V}{I}$. Si ha un Ohm quando in un conduttore al quale si è applicato una ΔV di 1 Volt circola una corrente di 1 Ampere.

Resistenze in parallelo

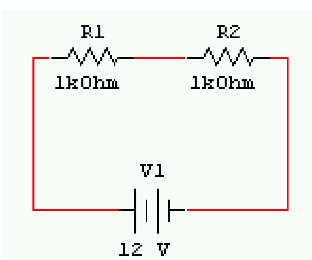


Due o più resistenze si dicono collegate in parallelo se sono sottoposti alla "stessa" differenza di potenziale.

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow$$

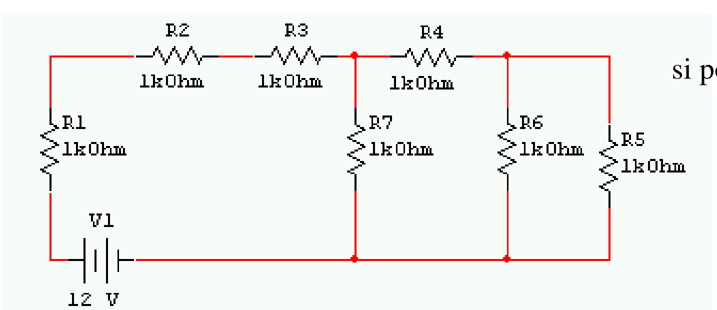
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \Rightarrow \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}$$

Due o più resistenze si dicono collegate in serie quando sono percorse dalla "stessa"corrente:



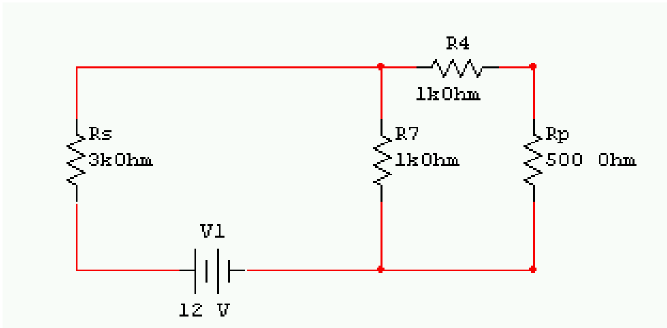
$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \quad \Rightarrow \mathrm{R} = R_1 + R_2$$

Esempio di semplificazione di un circuito con resistenze in serie e parallelo:

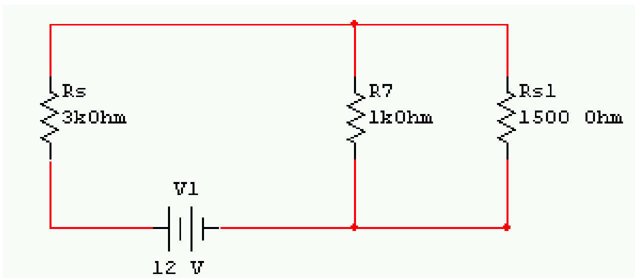


si possono unire in $R_s \rightarrow R_1 + R_2 + R_3$

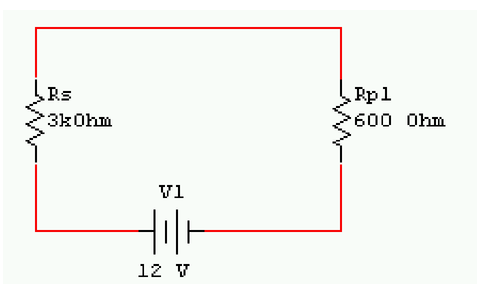
e in $R_p \rightarrow \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}$



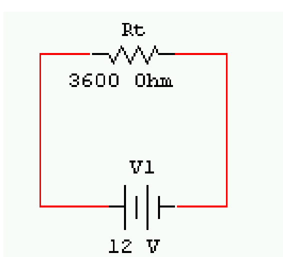
$$R_{s1} = R_4 + R_p \quad \rightarrow$$



$$R_{p1} = \frac{R_7 R_{s1}}{R_7 + R_{s1}}$$

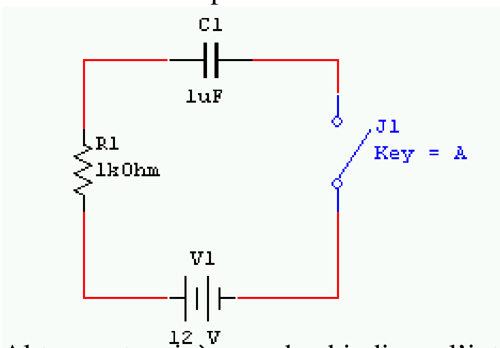


$$R_t = R_s + R_{p1}$$



Carica e scarica di un condensatore:

Supponiamo di avere un condensatore piano scarico e di collegarlo in serie ad una resistenza R , in un circuito ove è presente una batteria :



Chiudiamo il circuito tramite l'interruttore, la corrente comincia a fluire nel circuito e il condensatore si carica fino a che sul condensatore non avremo la d.d.p. V_1.
Il condensatore si è caricato a $Q = CV$.

Si avrà $V - I_{(t)}R - \frac{Q_{(t)}}{C}$ (in questa equazione I e Q dipendono dal tempo).

Al tempo to, cioè quando chiudiamo l'interruttore, la carica del condensatore è 0. $\Rightarrow$
$V - I_{(t0)}R = 0$ per cui $I_{(t0)} = \frac{V}{R}$, mentre la corrente fluisce il condensatore si carica .Quando si raggiunge la carica $Q_\infty = CV$, la corrente $I_\infty = 0$.

Deriviamo l'espressione $V - I_{(t)}R - \frac{Q_{(t)}}{C}$:

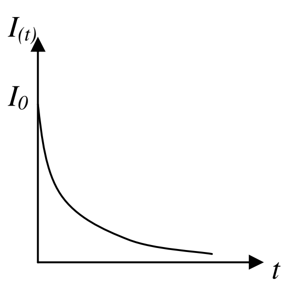
$$\frac{d}{dt}\left(V - I_{(t)}R - \frac{Q_{(t)}}{C}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{dI_{(t)}}{dt}R - \frac{dQ_{(t)}}{dt} * \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow -\frac{dI_{(t)}}{dt}R - I_{(t)} * \frac{1}{C} = 0$$ in quanto

$$I_{(t)} = \frac{dQ_{(t)}}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dI_{(t)}}{dt}R = I_{(t)} * \frac{1}{C} \quad \Rightarrow -\frac{dI_{(t)}}{I_{(t)}} = \frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \frac{dI_{(t)}}{I_{(t)}} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int_{I_0}^{I_{(t)}} \frac{dI_{(t)}}{I_{(t)}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow \log\frac{I_{(t)}}{I_0} = -\frac{1}{RC}t$$

$$e^{\log\frac{I_{(t)}}{I_0}} = e^{-\frac{1}{RC}t} \Rightarrow \frac{I_{(t)}}{I_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow I_{(t)} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$ RC è detta costante di tempo.

Analisi dimensionale di RC: $RC = \frac{V}{A}\frac{C}{V} = \frac{C}{C}t = t$



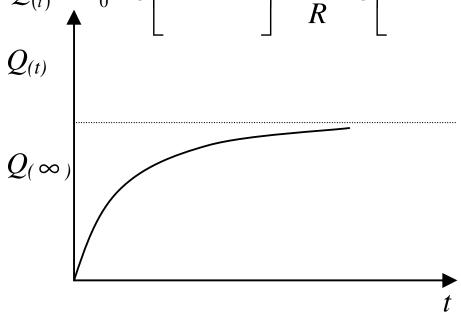
Nell'equazione trovata $I_{(t)} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ quando il tempo di carica $t_c = RC = t \Rightarrow I_{(t_c)} = \frac{I_0}{e}$ Quindi quando il tempo di carica t coincide con $RC = \tau$ la corrente di carica diventa circa $I_{(t_c)} = \frac{I_0}{3}$.

RC ci indica quanto velocemente si carica il condensatore.

Come varia $Q_{(t)}$? Partiamo dall'espressione $I_{(t)} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ dove $I_{(t)} = \frac{dQ_{(t)}}{dt}$

Basterà integrare: $Q_{(t)} = \int_0^t I_{(t)} dt = \int_0^t I_0 e^{-\frac{t}{RC}} dt = I_0 \int_0^t e^{-\frac{t}{RC}} dt = -I_0 RC \left[e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^t = -I_0 RC \left[e^{-\frac{t}{RC}} - 1 \right]$

$$Q_{(t)} = I_0 RC \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right] = \frac{V}{R} RC \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right] = VC \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right] = Q_\infty \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right]$$



Qualche dettaglio sull'energia……

Alla fine del processo di carica, ΔV = Q/C e quindi si può scrivere:

Energia del condensatore: $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} E^2 Al = \frac{V^2 C}{2}$

Per spostare la quantità di carica per produrre la d.d.p. V la batteria deve compiere lavoro: $u = qv$
La variazione nell'energia potenziale associata con questa carica è :

$$dU = dq \cdot V = idt \cdot V$$

$$\int dU = \int dqV = \int_0^\infty I_{(t)} V dt = \int_0^\infty I_0 e^{-\frac{t}{RC}} V dt = I_0 V \left[-RCe^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^\infty = -I_0 VRC[0-1] = I_0 VRC = \frac{V}{R} VRC = V^2 C$$

quindi l'energia del condensatore è $\frac{V^2 C}{2}$ mentre il lavoro della batteria è $V^2 C$, in pratica mètà del lavoro svolto dalla batteria si è dissipato per effetto Joule sottoforma di calore nella resistenza.

Potenza

La potenza è la quantità di energia che si trasforma nell'unità di tempo

La potenza associata con il trasferimento di carica è:

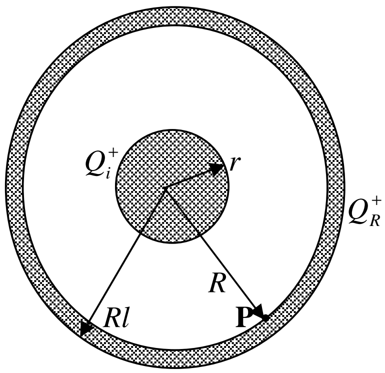
$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} V = iV$$

La potenza dissipata, o trasformata, in calore sulla resistenza: $P_R = I^2 R = \frac{V^2}{R} = VI$

Si noti che l'unità di misura della potenza P sono i Watt (W),
dove 1 Watt = 1 Joule/secondo = 1 Volt x Ampere.

10-11-2005 (in questa lezione sono stati esaminati diversi spunti non sempre completati in aula, le conclusione vanno ricontrollate)

Supponiamo di avere un guscio sferico e una sfera piena interna entrambi conduttori e concentrici:



Il campo elettrico dentro la sfera interna è nullo per il teorema di Gauss e la carica si distribuisce sulla superficie. Ricordiamo che un guscio sferico agisce sulle cariche esterne al guscio come se tutte le cariche che si trovano sulla superficie fossero concentrate nel suo centro, per ciò che attiene alle eventuali cariche interne al guscio non viene esercitata alcuna forza elettrostatica dalla carica distribuita sul guscio.
Se non vi fosse alcun conduttore, all'interno della zona cava del conduttore esterno, il campo elettrostatico sarebbe nullo. Sulla superficie della sfera piena avremo:

$\sigma_r = \dfrac{Q_r^+}{4\pi r^2}$ e nei punti interni della stessa si ha: $\int \vec{E} * dS = \dfrac{Q_i}{\varepsilon_0} = 0$

Sulla superficie interna del guscio ci sarà una distribuzione di cariche σ^-. Tali cariche sono uguali a $|Q_r^+|$.

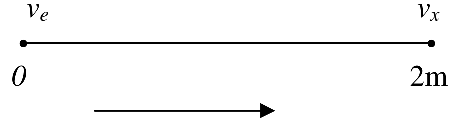
$E_p = 0 = \dfrac{1Q_r^+}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \dfrac{Q_x^-}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow Q_x^- = -Q_r^+$ con R dal centro a P.

Il campo elettrostatico è quello prodotto dalla somma algebrica delle cariche contenute nella regione occupata dai due conduttori (la simmetria sferica fa sì che il campo è come se fosse prodotto da una carica puntiforme, di valore pari alla somma algebrica delle cariche dei due conduttori, posta nel centro, comune, delle due sfere).

$Q_{tRl} = Q_R^+ + Q_r^+$

La sfera piena funziona da corpo inducente carico positivamente e sulla faccia interna del guscio avremo una carica uguale a Q_R^-. La parte esterna del guscio manifesterà cariche dello stesso segno del corpo inducente ossia positive . La superficie esterna rimane equipotenziale e internamente allo spessore del guscio conduttore il campo elettrico risulta nullo.

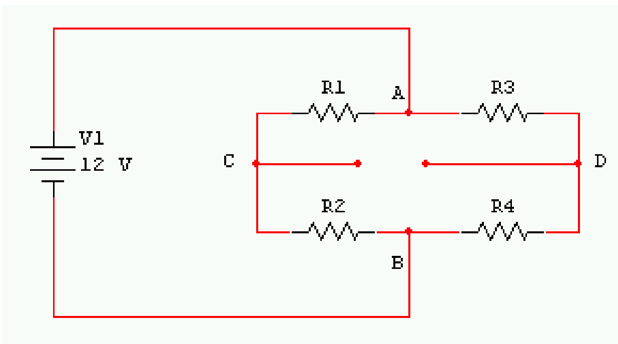
Un elettrone si muove lungo l'asse x con una velocità v_e=3,7*10^6 m/s allo 0.Poi la sua velocità si riduce a 1,4 m/s in x=2m. Dire quale punto si trova a potenziale maggiore e quanto è.



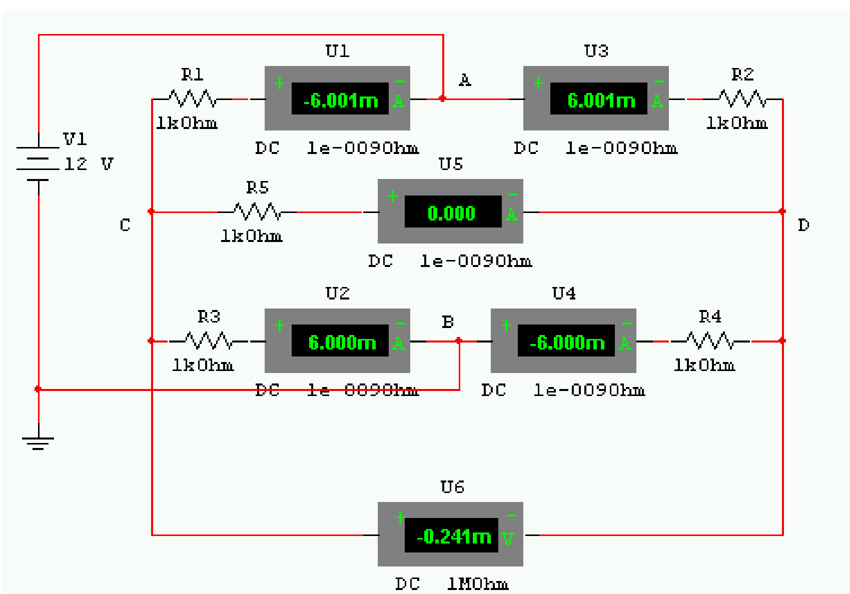
Il campo elettrico è nel verso positivo.

L'energia cinetica $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_e^2$. L'elettrone perde energia cinetica e acquista energia potenziale.

Il lavoro svolto $\Delta U_p = q\,\Delta V = q(V_f - V_i) = -\int_0^2 E * ds$; $V = -\int_0^2 E * ds = Ed = \frac{q_e}{\varepsilon_0} d$



Lo schema elettrico di figura prende il nome di ponte di Wheatstone. (Usualmente viene disegnato collocando le resistenze R1-R2-R3-R4 sui lati di un rombo). In questa disposizione circuitale si dice che il ponte è in equilibrio quando il potenziale del punto C è uguale al potenziale del punto D. Se si inserisce una resistenza fra i suddetti punti e un amperometro, in serie, si potrà notare che non circola corrente fra i punti C-D .

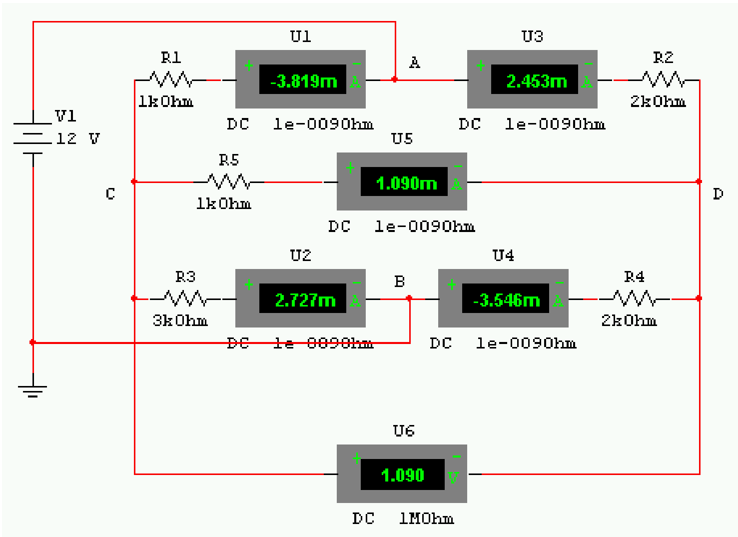


La tensione V_{CD} sarà nulla , per esempio, quando $V_{CA} = V_{CB}$. Allora $I_1 = I_2 = \frac{V_1}{R_1 + R_2}$ e

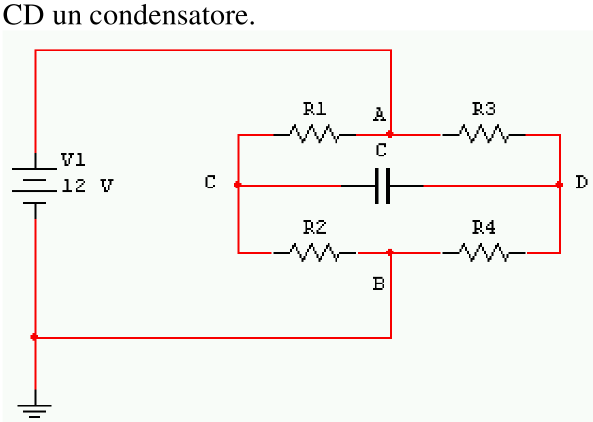
$I_3 = I_4 = \frac{V_1}{R_3 + R_4}$. Siccome all'equilibrio $V_{CA} = V_{CB}$ potremo scrivere $\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_1 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_1$

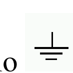
Da cui si ricava $R_1(R_3+R_4)=R_2(R_1+R_2)$ e da questa $R_1R_4=R_2R_3$

Supponiamo che il valore delle resistenze sia tale da non equilibrare il ponte. Nella resistenza che congiunge i nodi CD e nell'amperometro circola corrente.

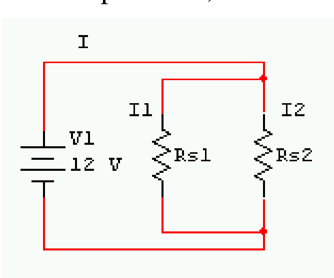


Vediamo che risultato (di non avere corrente nel ramo CD) si può raggiungere inserendo fra i punti CD un condensatore.



(Il simbolo  si chiama massa e si usa per riferire un punto del circuito al potenziale 0, come il potenziale di terra, generalmente assunto come potenziale di riferimento).

Quando il condensatore raggiunge la carica cessa il passaggio di corrente in esso e quindi la I_1 da R_1 passa in R_2 e la I_3 da R_3 passa in R_4. L'alimentazione si ritrova così collegata ai rami, che risultano in parallelo,formati da $R_{s1}=R_1+R_2$ e da $R_{s2}=R_3+R_4$.



$I = I_1+I_2$ Per calcolare I occorre determinare il valore di

$$R_t=\frac{R_{s1}R_{s2}}{R_{s1}+R_{s2}}$$

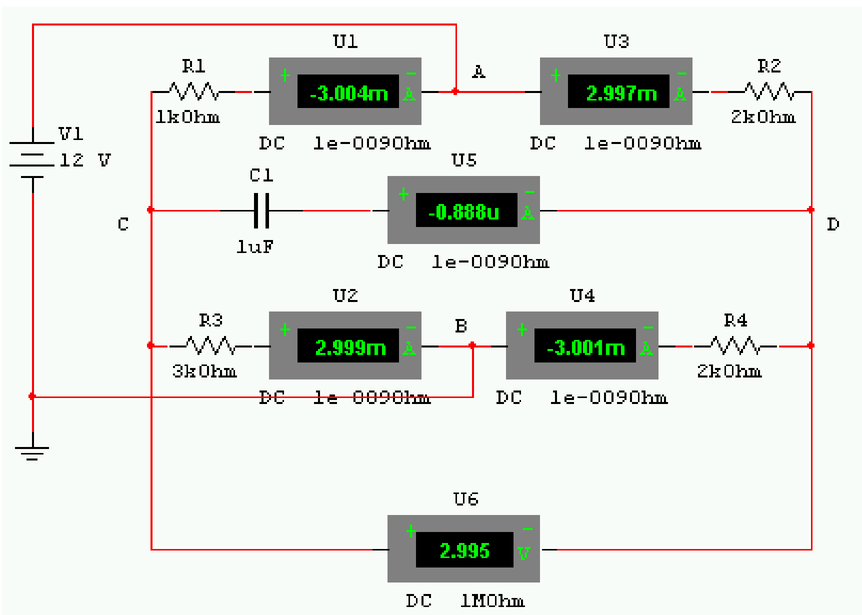
$$\Rightarrow I=\frac{V_1}{R_t}=\frac{V_1(R_{s1}+R_{s2})}{R_{s1}R_{s2}}=\frac{V_1(R_1+R_2+R_3+R_4)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_2}$$

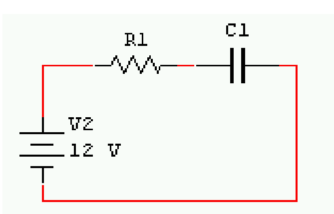
$$I_2 = \frac{V_1}{R_2 + R_3}$$

$$I_1 R_1 = V_{CA} = V_C - V_A \ ; \ I_2 R_3 = V_{DA} = V_D - V_A$$

$$V_{CD} = V_{CA} - V_{DA} = I_1 R_1 - I_2 R_3$$



Con l'introduzione del condensatore la corrente nel ramo CD si è ridotta quasi a 0 (Zero a carica ultimata ossia all'infinito).
E' facile verificare , ricordando che V = RI, che il risultato analitico trovato per V_{CD} è pienamente verificato nell'esempio pratico su riportato con l'inserimento degli strumenti di misura.



Abbiamo già visto che a fronte di una potenza erogata dalla batteria $P_e = V^2 C$, nel condensatore si ha $U_{cond} = \frac{V^2 C}{2}$.

Dimostreremo che l'altra metà dell'energia viene dissipata nella resistenza. La resistenza in questione può essere un resistore in serie al condensatore, ma anche in assenza di un resistore ci sarebbe comunque da considerare che ogni generatore reale ha una resistenza interna (piccola per quanto sia) per cui comunque si ha una dissipazione di energia.

$$U_R = \int_0^{\infty} I^2 R dt$$

Ricordando che: $I_{(t)} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

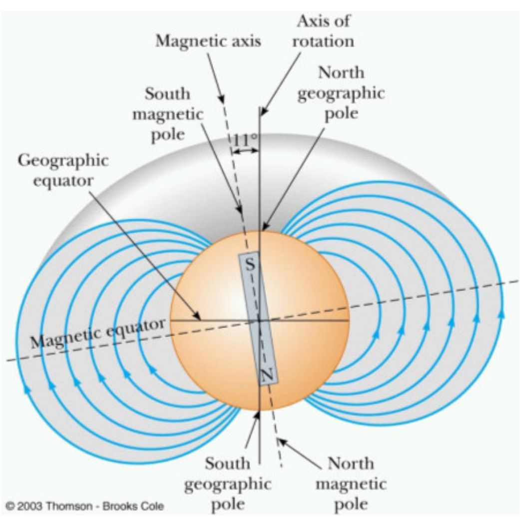
Riscriviamo:

$$U_R = \int_0^{\infty} I^2 R dt = R\int_0^{\infty} \left(\frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 dt = \frac{V^2}{R}\int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 dt = \frac{V^2}{R}\left[-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty} = \frac{V^2}{R}.\frac{RC}{2} = \frac{V^2 C}{2}$$

In quanto: $\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = -\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}$

Campi Magnetici

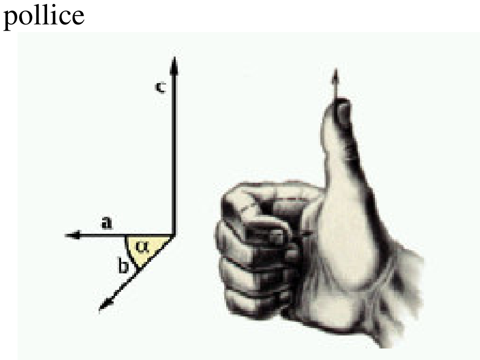
In natura esistono i magneti naturali ossia materiali che generano campi magnetici. Si possono studiare le interazioni fra magneti supponendo l'esistenza di un grande magnete e uno o più magneti piccolissimi tipo limatura di ferro (in analogia alla gravitazione in cui si considera la terra M_t e un oggetto m_0 in cui $M_t >> m_0$)..
In un magnete permanente si possono distinguere due poli: un polo Nord e un polo Sud.
Piccoli magneti sospesi con un filo si allineano sempre in direzione nord-sud. Cioè essi possono rilevare il campo magnetico terrestre, è come se all'interno della terra ci fosse una sbarra di magnete lungo l'asse terrestre
Per convenzione, il polo Nord di un magnete è quello che punta verso il Polo Nord Geografico della Terra.
Poiché poli opposti si attraggono, il "Polo Nord Geomagnetico" è in effetti un polo SUD magnetico.

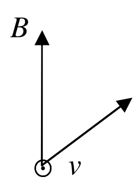


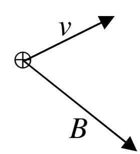
Mettendo della limatura di ferro nei pressi di un magnete permanente la limatura si dispone secondo le linee del campo magnetico.

Le linee del campo magnetico, al contrario di quelle del campo elettrico, sono chiuse

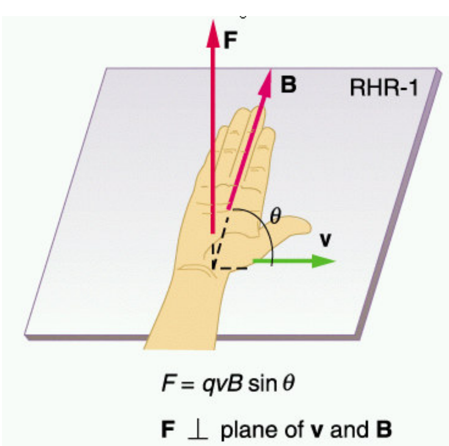
I magneti naturali producono una forza chiamata "forza magnetica" che può agire sulla cariche in movimento.
Su una carica q che si muove a velocità v in una regione in cui è presente il vettore induzione magnetica $\vec{B}$, si esercita una forza data da:
$\vec{F}_m = q\vec{v} * \vec{B} = q|v||B|\sin\theta$. (Legge di Lorentz)
La direzione del vettore forza magnetica è ortogonale al piano individuato dai vettori v e B e il verso è individuato dalla regola della mano destra e dipende anche dal segno della carica q .
Per una carica positiva:
Se con le dita si segue la sovrapposizione del vettore v (a) sul vettore B (b), il verso è indicato dal pollice





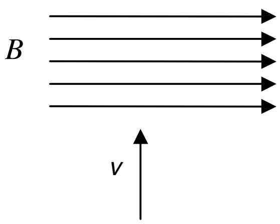


Oppure:



Il pollice va posto in direzione di v, l'indice in direzione di B, Il palmo della mano risulta rivolto in direzione della forza F. Il vettore risultante può essere entrante al piano $B*v$ e in questo caso si usa il simbolo ⊕ oppure uscente e il simbolo si indica con ⊙.
Se la carica è negativa il verso di F si inverte.

Campo magnetico uniforme



La forza magnetica è massima quando v e B sono ortogonali.
Pensiamo a una carica che entra nel campo magnetico con velocità v.
Per avere una differenza di potenziale ΔV è necessario che ci sia una variazione di energia ΔK ossia un lavoro.

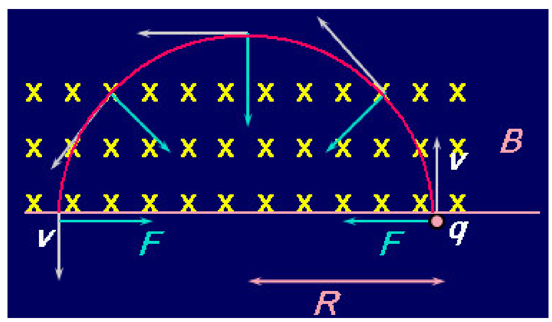
$$\Delta K = \vec{F} * \vec{S} = \vec{F}(\vec{v}\Delta t) = L$$

ma F e v sono ortogonali allora $L=0$

- La forza magnetica agente su un oggetto carico che si muove in un campo magnetico <u>*non*</u> compie alcun lavoro. (forza $\perp$ spostamento) !
- La forza magnetica non può cambiare il valore della velocità di un oggetto carico, ma solo cambiarne la direzione del moto.

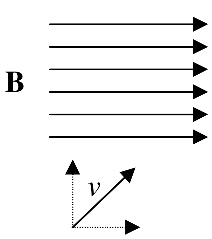
Che cammino seguirà q?
Una particella carica risente in genere di una forza elettromagnetica che è uguale a una forza elettrica + una forza magnetica:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} * \vec{B}$$

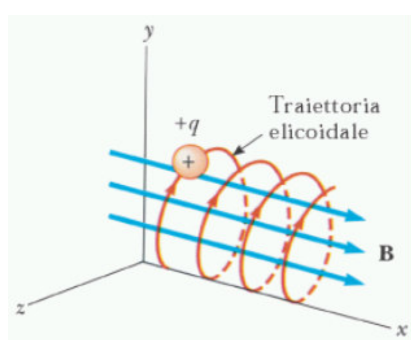


La forza è sempre perpendicolare alla velocità e a B.
Il cammino sarà circolare. F sarà la forza centripeta necessaria per tenere la carica nella sua orbita circolare.

Esaminiamo il caso in cui il vettore velocità ha **una** componente parallela a un campo magnetico uniforme



In questo caso il moto diventa elicoidale $\Rightarrow$



Il moto elicoidale è composto da un moto uniforme di rotazione intorno ad un asse e da un moto di traslazione uniforme parallelo all'asse stesso. L'elica che ne deriva è caratterizzata dal raggio R che è la distanza costante di un punto dell'elica dall'asse e dal passo che è la distanza costante tra due intersezioni consecutive dell'elica con una medesima generatrice.

Nel nostro caso la particella *q*, che descrive il moto elicoidale, è soggetta alla forza $\vec{F} = q\vec{v} * \vec{B}$ e al moto circolare in cui si ha $\vec{a} \perp \vec{v}$.

Vediamo quali sono i parametri di questa traiettoria:

La velocità può essere scomposta nelle sue componenti: $v_y = v\sin\theta$ e $v_x = v\cos\theta$

La particella risulterà sottoposta alla $\vec{F} = q\vec{v}_y * \vec{B} = ma_c = m\dfrac{v_y^2}{R} \Rightarrow R = \dfrac{mv_y^2}{R}$

$$\Rightarrow qv_yB = \frac{mv_y^2}{R} \quad \Rightarrow R = \frac{mv_y}{qB}$$

Ipotizziamo di avere un filo diritto percorso dalla corrente I , immerso in un campo magnetico costante ed uniforme. Indico con *A* la sezione e *l* la lunghezza.

La corrente sia $I = qv_dAn$ dove con *n* vengono indicati gli elettroni disponibili per unità di volume.

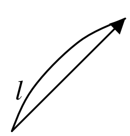
Indico con $N = nql.A$ la carica totale contenuta nel tratto l . La forza totale agente su tutto il tratto di filo considerato sarà la somma delle forze che agiscono sulle singole cariche:

$F_t = qnAl\vec{v}_d * \vec{B}$ con velocità costante e uguale alla velocità di deriva.

Scalarizzo V_d $\Rightarrow$ $F_t = qnAv_d\vec{l} * \vec{B} = I\vec{l} * \vec{B}$

Questa è la forza magnetica che B esercita sul tratto di filo (Forza di La Place).

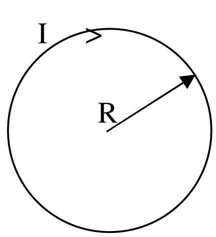
Supponiamo che il filo sia curvo:



Considero elementi infinitesimi dl : $d\vec{F} = Id\vec{l} * \vec{B}$

$$\vec{F} = \int_0^l d\vec{F} = \int_0^l Id\vec{l} * \vec{B} = I\left(\int_0^l d\vec{l}\right) * B$$

Consideriamo una spira circolare percorsa da corrente immersa in un campo B uniforme e ortogonale alla spira:

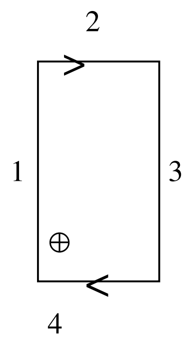


$l = 2\pi R$

Pensiamo di dividere il cerchio in elementi infinitesimi: $d\vec{F} = Id\vec{l} * \vec{B}$

Si intuisce immediatamente che a causa della caratteristica di simmetria della circonferenza le $d\vec{F}$ si annullano a vicenda .

Supponiamo di avere una spira rettangolare immersa in un campo magnetico ortogonale entrante



La $F_{mt} = 0$ in quanto la forza sul tratto superiore cancella quella sul tratto inferiore, la forza sul tratto destro cancella quella sul tratto sinistro.
Se il piano della spira non è perpendicolare al campo, ci sarà un momento torcente non-nullo agente sulla spira per cui la spira ruota attorno ad un suo asse.

Facciamo una parentesi per ricordare alcuni concetti sulla rotazione dei corpi.
Se consideriamo un corpo che ruota attorno ad una asse ogni elemento del corpo ha velocità propria in quanto, nello stesso tempo, percorre archi differenti che sono funzione della distanza dall'asse di rotazione:

$$V_1 = \frac{l_1}{\Delta_t} \neq V_2 = \frac{l_2}{\Delta t}$$

Tuttavia i punti pur avendo differenti velocità lineari, hanno la stessa velocità angolare $\varpi = \frac{\theta}{t}$. Facciamo un parallellismo fra grandezze cinematiche angolari e lineari:

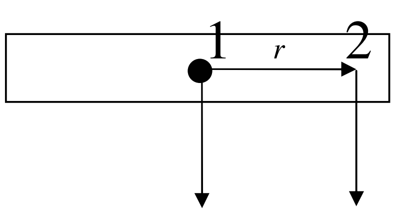
velocità angolare velocità lineare

$\varpi = \frac{\theta}{t}$ $v = \frac{s}{t}$

accelerazione accelerazione angolare

$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ $\alpha = \frac{\Delta \varpi}{\Delta t}$.

L'accelerazione è conseguenza dell'applicazione di una forza.
L'accelerazione angolare prende origine dal momento della forza.



Nella figura abbiamo un corpo rigido, vincolato ad un "perno", e sul quale sono applicate due forze. L'azione delle due forze sarà diversa . La prima(1) non sortirà alcun effetto mentre la seconda(2) farà ruotare il corpo. Si dice che si ha un momento torcente che dipende dal punto di applicazione della forza $\vec{F}$ e in particolare dalla distanza $\vec{r}$ del punto di applicazione dall'asse rappresentato dal perno di rotazione:

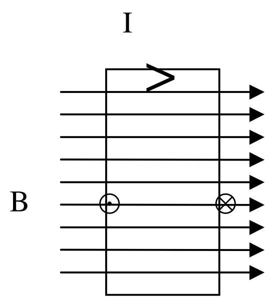
$$\tau = \vec{r} * \vec{F}$$

Ricordiamo anche che il momento torcente è anche: $\tau = I\alpha$ dove I è il momento d'inerzia del corpo rigido. Il momento d'inerzia dipende sia dal corpo rigido in esame che dal centro di rotazione.

Diventa più grande se le masse sono allontanate da tale centro, mentre diventa più piccolo se sono avvicinate ad esso.
Siccome un corpo rigido è costituito da infiniti punti materiali possiamo calcolare il momento d'inerzia:

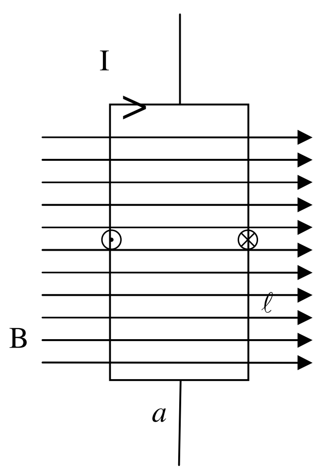
$$I \overset{def}{\equiv} \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \Delta m_3 r_3^2 + ... = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

Riprendiamo l'analisi della spira.



La spira è immersa in una regione dello spazio in cui sia presente il campo B, supposto costante ed uniforme in tutto lo spazio dove è presente la spira e diretto lungo la direzione positiva dell'asse X.
Nei tratti orizzontale la corrente è parallela (o antiparallela) al campo, quindi non si esercita alcuna forza sulle cariche in moto che costituiscono la corrente in tali tratti. Possiamo dire che in questi tratti del filo non si esercita, da parte del campo, alcuna forza. Nei due tratti rimanenti avremo invece agiranno due forze uguali ma di segno opposto che daranno origine a un momento torcente, per ognuno dei due lati :

$$\tau_1 = \vec{r} * \vec{F} \Rightarrow \tau = \tau_1 + \tau_2 = 2|r||F|$$



Quindi la spira ruota attorno al suo asse sottoposta a un momento torcente dovuto alla forza che agisce ognuno dei due lati : $F = I\ell B$

$$\tau = 2rF = 2rI\ell B = 2\frac{a}{2}I\ell B = aI\ell B = a\ell IB = \underbrace{AIB}_{\mu} = \mu B$$

μ = Momento magnetico della spira

Se la spira è perpendicolare a B $\Rightarrow \tau = 0$. Se è complanare è uguale alla formula trovata.
Nei casi intermedi si considerano le proiezioni della spira sui due piani complanare e ortogonale al campo magnetico.
Il vettore μ cercherà di disporsi parallelamente a B.
Inoltre una spira percorsa da corrente genera un campo magnetico. Infatti della limatura di ferro si distribuirà così come nel magnete permanente.

Analogia fra una spira e un magnete permanente

I magneti naturali sono caratterizzati dagli effetti che possono esercitare su materiali sui quali possono esercitare forze e attribuire la proprietà di magnetizzare.
Ogni atomo del magnete si comporta come una piccola spira sede di corrente stazionaria. Una spira che è sede di una corrente genera un campo magnetico. I materiali contenenti ossidi di ferro sono costituiti da atomi dove gli elettroni girano (spin) tutti nello stesso verso simulando una spira.

Non importa quanto finemente o accuratamente frantumi o separi la materia nelle sue componenti, le più piccole componenti della materia (elettroni,protoni, neutroni, quarks, o particelle elementari in genere) hanno un momento magnetico di dipolo non nullo
Il momento magnetico di un atomo o molecola è dato dalla somma di tutti i momenti magnetici delle sue componenti interne ed è ciò che caratterizza la risposta di un materiale ad un campo magnetico.
La risposta dei materiali a un campo magnetico li divide in :Diamagnetici, Paramagnetici e Ferromagnetici.
I materiali diamagnetici hanno un momento di dipolo magnetico nullo:

$$\mu_{\text{int}} = \sum \mu_i = 0$$

In questi materiali in presenza di un campo magnetico si forma una debole forza repulsiva. In presenza di forti campi magnetici questi corpi possono levitare.
Si dicono paramagnetici i materiali i cui atomi o molecole hanno un momento di dipolo magnetico **NON** nullo, cioè quei materiali dove:

$$\mu_{\text{int}} = \sum \mu_i \neq 0$$

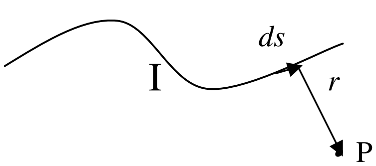
In presenza di un campo magnetico si forma una forza attrattiva.

Un materiale ferromagnetico è un materiale di tipo paramagnetico che in presenza di un campo magnetico si magnetizza (ferro,cobalto,nichel,disprosio,gadolinio).
La magnetizzazione acquistata, al cessare del campo magnetico che la prodotta, persiste per tempi lunghi. Se un materiale ferromagnetico viene scaldato oltre una certa temperatura, detta Temperatura di Curie, le proprietà ferromagnetiche spariscono ed il materiale si comporta come un paramagnetico. Questo è il motivo per cui i floppy e tutti i supporti magnetici non vanno lasciati al sole o comunque al caldo in quanto perdono i dati memorizzati

Origine della gravitazione è la massa; origine del campo elettrico è la carica elettrica; origine del campo magnetico è una carica in movimento.
La terra è attraversata da correnti di ioni nel magma, questo genera il campo magnetico.

Legge di Biot-Savart

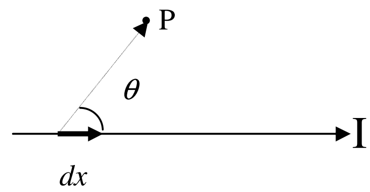
Questa legge descrive il campo magnetico dovuto ad un conduttore.



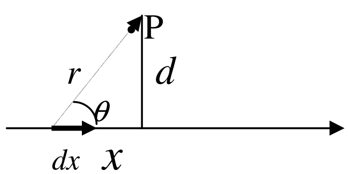
Si vuole calcolare il campo nel punto B. Se prendiamo in esame un elemento infinitesimo del filo , percorso da corrente, possiamo scrivere il modulo infinitesimo

del tratto in esame partendo da: $dB = K_m \frac{Id\vec{s} * \hat{r}}{r^2}$ dove con $K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$ indichiamo la costante magnetica e con $\hat{r}$ versore del vettore distanza, avremo: $|dB| = K_m \frac{Ids * \sin\theta}{r^2}$ dove θ è l'angolo compreso fra *ds* e *r*.
L'unità di misura del campo magnetico è chiamata tesla (T). Un Tesla è una quantità molto elevata, in sua vece si può usare anche il Gauss. 1 Tesla è uguale a 10^4 Gauss.

Supponiamo di avere un filo rettilineo disposto lungo l'asse x e percorso da corrente. Si vuole conoscere quanto è il campo in un punto P:



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idx \sin\theta}{r^2}$$



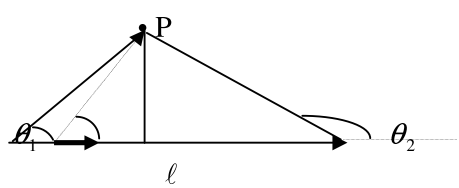
$$r = \frac{d}{\sin\theta} \quad ; \quad tg\theta = -\frac{d}{x} \Rightarrow x = -\frac{d}{tg\theta} = -d\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow dx = -d\left(-\frac{\sin\theta d\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta\cos\theta}{\sin\theta^2}d\theta\right) = d\left(\frac{\sin^2\theta d\theta + \cos^2\theta d\theta}{\sin^2\theta}\right) = d\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta$$

Sostituendo le relazioni in dB otteniamo:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin^3\theta}{\sin^2\theta}dd\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta}{d}d\theta$$

Supponiamo che il nostro filo abbia lunghezza ℓ :



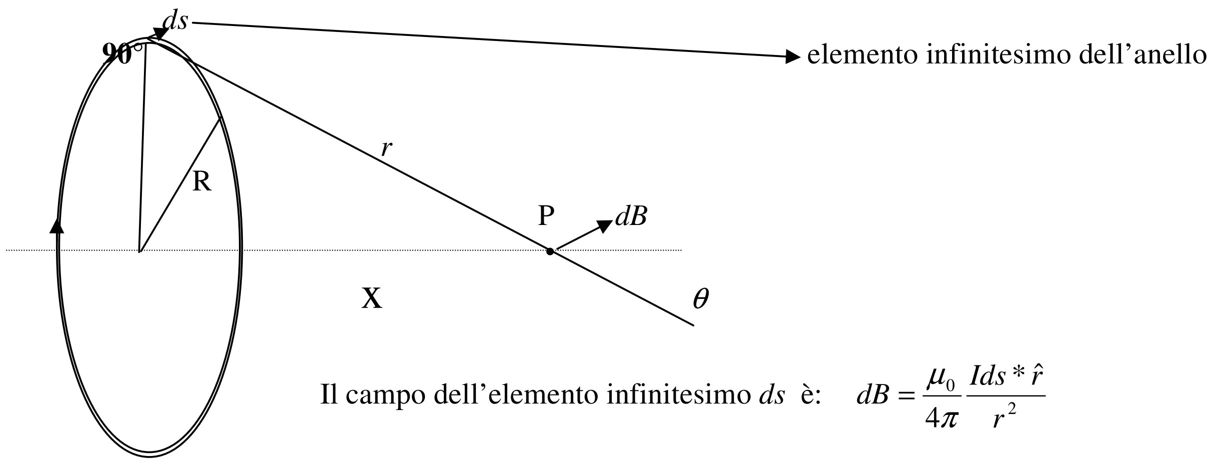
Integriamo: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left[-\cos\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)$

Se il filo fosse infinito: $\theta_1 \to 0^0$; $\theta_2 \to 180^0 = \pi$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(1 - (-1)\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

La direzione del campo B è nel piano della circonferenza, ortogonale al filo,con centro su questo e passante per P e risulta ad essa tangente. Le linee di forza del campo di induzione magnetica prodotte dal filo sono delle circonferenze, ortogonali al filo e con centro su di esso.

Campo magnetico di un anello circolare percorso da corrente:



Il campo dell'elemento infinitesimo ds è: $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids * \hat{r}}{r^2}$

Nella figura il raggio R è sempre a 90° rispetto all'asse X passante per P per cui considerare che

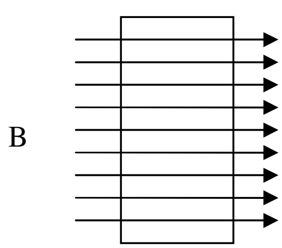
$r^2 = R^2 + x^2$: $\quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids \sin 90^0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids}{\left(R^2 + x^2\right)}$

Il campo B sarà risultato dell'integrale:

$$B = \int \frac{\mu_0 Ids}{4\pi\left(R^2 + x^2\right)} = \int \frac{\mu_0 Ids}{4\pi\left(R^2 + x^2\right)}\cos\theta \qquad \text{dove } \cos\theta = \frac{x}{r}$$

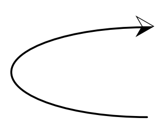
$$B = \frac{\mu_0 Ix}{4\pi\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int ds = \frac{\mu_0 Ix 2\pi r}{4\pi\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 IRx}{2\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Circuitazione



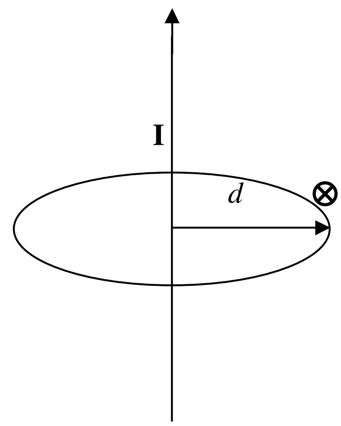
Abbiamo una spira chiusa immersa in un campo magnetico. Consideriamo un tratto ds . La circuitazione è data dal prodotto scalare: $\oint \vec{B} * d\vec{s}$

Quando si compie una circuitazione si sceglie un verso di percorrenza



Si osserva che i due lati corti della spira non contribuiscono alla circuitazione in quanto il prodotto scalare è uguale a zero. Alla circuitazione contribuiscono solo i lati lunghi ma questi hanno effetto uguale è opposto per cui il valore di circuitazione è zero.

Data una qualsiasi linea chiusa, la circuitazione lungo di essa del campo magnetico generato da un sistema comunque complesso di correnti è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate con la linea



Teorema di Ampère

Supponiamo di avere un filo infinito percorso da corrente: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$

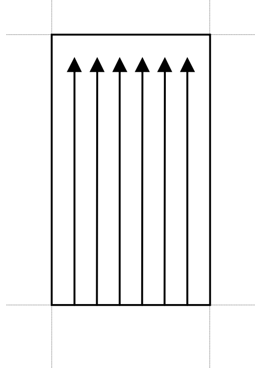
Facciamo la circuitazione sulla circonferenza di raggio d :

$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} 2\pi d = \mu_0 I$$

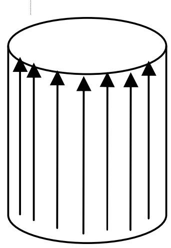
La circuitazione attraverso una linea chiusa del vettore B è sempre uguale alla corrente che attraversa una qualsiasi superficie concatenata con la linea in esame moltiplicata per μ_0 .

$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow B\oint ds = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi d = \mu_0 I \Rightarrow\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Applicazioni



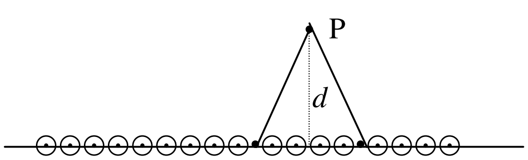
Considerando un piano infinito percorso da corrente si può definire la densità di corrente come la corrente elettrica che attraversa una sezione unitaria di superficie: $J = \dfrac{I}{L}$



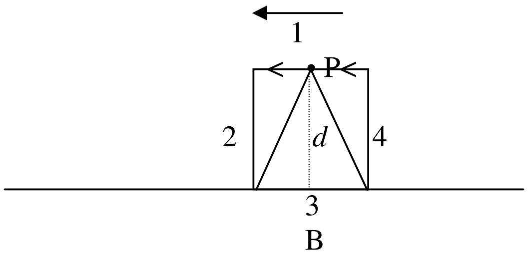
In un cilindro la densità di corrente superficiale è : $J = \dfrac{I}{A}$

Non vengono definite densità di corrente volumetriche.

Consideriamo un piano infinito con densità di corrente lineare uniforme e corrente uscente dal piano del foglio:



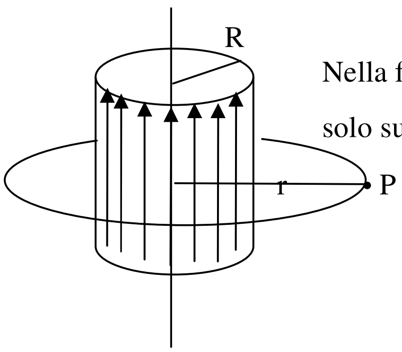
Sul punto P generico due fili equidistanti daranno un loro contributo al campo B. Vogliamo calcolare il campo nel punto B.
Scegliamo un percorso di tipo rettangolare



$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 I$$

Escludendo i contributi dei tratti 2 e 4 perché perpendicolari a B restano

$$\int_1 + \int_3 \Rightarrow B\ell + B\ell \Rightarrow 2B\ell = \mu_0 I = \mu_0 J\ell \Rightarrow B = \frac{\mu_0 J\ell}{2\ell} = \frac{\mu_0 J}{2} :$$

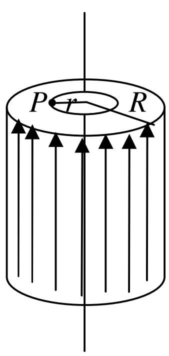


Nella figura abbiamo un cilindro infinito cavo, pertanto la corrente può distribuirsi solo superficialmente: $J = \dfrac{I}{2\pi R}$

Esaminiamo il caso di r>R

$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 J 2\pi R$$

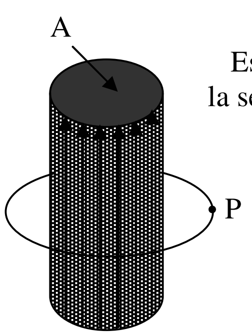
$$B 2\pi r = \mu_0 J 2\pi R \Rightarrow B = \mu_0 J \frac{R}{r}$$



Esaminiamo il caso di r<R

$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 * 0 \Rightarrow B\int d\vec{s} = \mu_0 0 \Rightarrow B = 0$$

Ricordiamo il Teorema di Ampère: $\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 I$



Esaminiamo il caso di un cilindro infinito pieno nel quale la corrente interessa tutta la sezione.

$J = \dfrac{I}{A}$ Chiamato R il raggio della sezione A del cilindro ipotizziamo che si abbia un punto su r>R

$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow B\oint ds = \mu_0 J\pi R^2$$

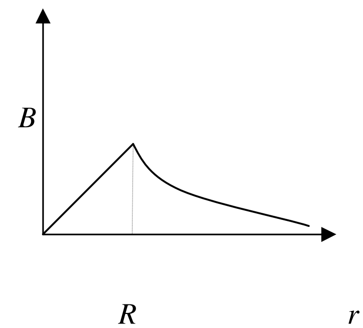
$$B 2\pi r = \mu_0 J\pi R^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 J R^2}{2r}$$

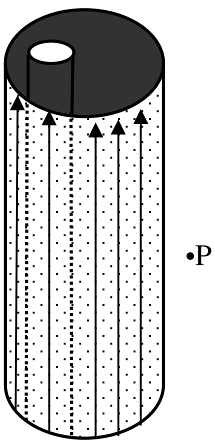
Per i punti posti sulla circonferenza di raggio r è uguale e tangente alla circonferenza.

Nel caso in cui il punto sia su r<R:

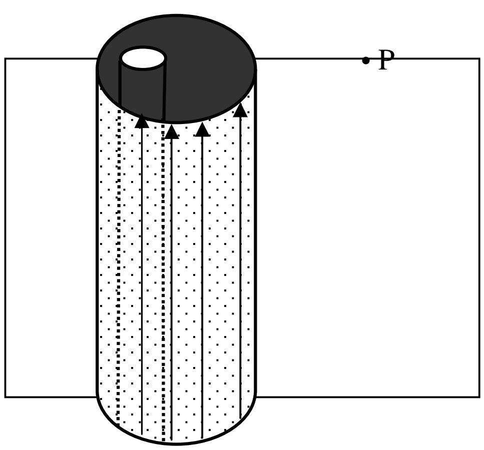
$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 J\pi r^2$$

$$B 2\pi r = \mu_0 J\pi r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 J r}{2}$$





L'oggetto investito da campo di induzione B è un cilindro pieno attraversato da un parte cava , essa pure cilindrica. Di fatto mancano tutte le condizioni per applicare il teorema di Ampère.
Si può tuttavia ricorrere a un artifizio. Si ipotizza che il cilindretto interno sia attraversato correnti di verso opposto cosi che il loro effetto annulli l'effetto del campo B. In questo caso il campo magnetico in P è la sovrapposizione del campo del cilindro pieno a cui va sommato il campo prodotto dalle correnti I.
Questo comunque è vero solo per i punti che giacciono sul piano che contiene i due assi.:

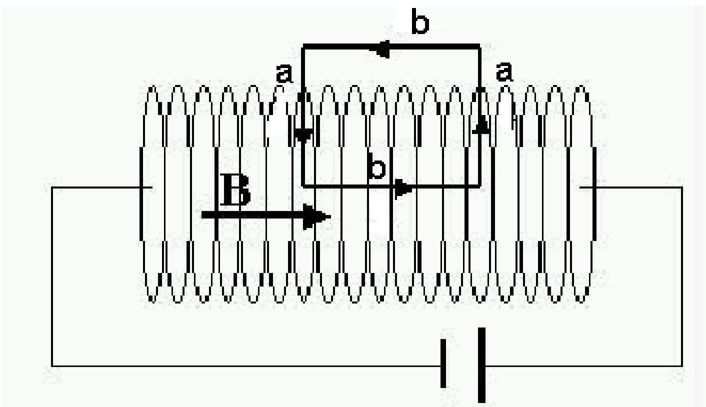


$$B = \frac{\mu_0 J R^2}{2r} - \frac{\mu_0 J R'^2}{2(r-d)}$$

con R distanza del punto dal cilindro pieno
R' distanza del punto dal cilindro interno
r raggio del cilindro pieno
d diametro del cilindro interno

Solenoide

Un solenoide è costituito da un filo conduttore, avvolto a spire circolari compatte. Le spire circolari sono percorse dalla stessa corrente. Il solenoide è molto lungo rispetto al raggio. Per ragioni di simmetria il campo B all'interno di un solenoide rettilineo indefinito ideale è diretto lungo l'asse comune delle spire. All'esterno del solenoide, nelle zone lontane dai bordi, il campo è trascurabile. Calcoliamo il campo B.
Il percorso, lungo il quale calcoleremo la circuitazione è quello in figura:



Richiamiamo il teorema di Ampère:
$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 I$ dove I è la corrente che attraversa il rettangolo.
Eseguiamo il calcolo della circuitazione del campo:
$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \int_a Bds + \int_b Bds + \int_a Bds + \int_b Bds$
Osserviamo che per il tratto **b** esterno al solenoide **B** è praticamente nullo. Per i due tratti indicati con **a** il campo **B** e lo spostamento infinitesimale sono ortogonali e i contributi sono nulli. Rimane il tratto b interno al solenoide dove il campo B risulta parallelo e concorde con lo spostamento lungo tutto il tratto.

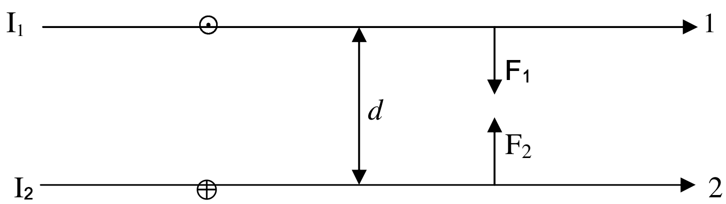
$\Rightarrow \oint \vec{B} * d\vec{s} = Bb$

Il teorema di Ampère, se le spire comprese nel tratto di percorso sono N, sarà: $Bb = \mu_0 IN$

indicando con $n = \frac{N}{b}$ la densità delle spire, supposta costante, avremo: $Bb = \mu_0 Inb \Rightarrow B = \mu_0 In$

In conclusione in un solenoide indefinito, in tutti i punti dell'asse il campo B ha lo stesso valore (modulo, direzione e verso). Tale valore non dipende dal raggio delle spire ma solo dalla corrente e dalla densità lineare delle stesse.

Consideriamo due fili percorsi da corrente complanari:



Il primo filo produce il campo B_1 agente sul filo 2: $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$.

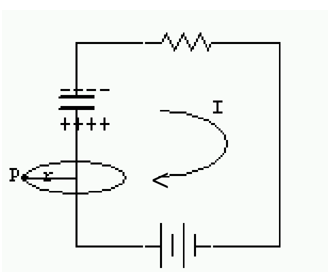
Sul secondo filo immerso nel campo B_1 agisce la forza magnetica: $F_2 = I_2 \ell * B_1 = I_2 \ell \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$

Lo stesso succede per il primo filo immerso nel campo B_2: $F_1 = I_1 \ell * B_2 = I_1 \ell \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}$

se la lunghezza del filo è unitaria ossia 1metro diventa $F_1 = F_2 = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi d}$

Se si prende per le due correnti il valore di un ampère e per i fili la distanza di un metro avremo che il valore della forza vale: $F = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2x10^{-7} N$

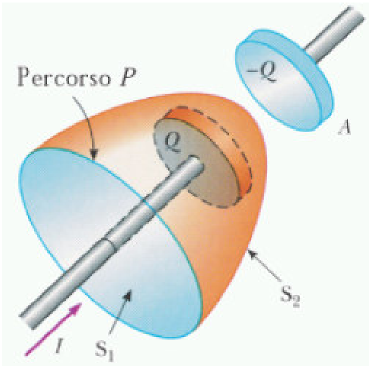
Si definisce l'ampère come l'intensità della corrente elettrica costante che, fluendo in due conduttori rettilinei, paralleli posti alla distanza di 1 metro nel vuoto, determina fra essi una forza di 2×10^{-7} Newton al metro lineare. Se i versi delle correnti sono concordi i fili si attraggono, se sono opposti si respingono.



Ricordiamo che in generale si ha $\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 I$ (legge di Ampère). Con riferimento alla figura consideriamo un punto P su una circonferenza di raggio r con centro sul filo: $B 2\pi r = \mu_0 I$

L'integrale di linea è esteso a qualsiasi percorso chiuso concatenato con la corrente di conduzione. Il teorema di Ampere in questa forma è valido solo se la corrente di conduzione è continua nello spazio.

Pensiamo di spostare la superficie che ha come contorno la circonferenza considerata fino a conglobare una armatura del condensatore.



La superficie che si estende all'interno del condensatore ha come percorso lo stesso contorno della superficie racchiusa dalla circonferenza di raggio r già considerata.
La corrente di conduzione passa solo nel filo e non all'interno del condensatore. Non è presente una corrente di conduzione tra le due armature. Quindi siccome la I=0 anche B=0. Le due superfici S1 e S2 , delimitate dallo stesso percorso P, danno due risultati diversi.
Questa è una incongruenza in quanto semplicemente spostando la superficie abbiamo ottenuto un risultato diverso anche se abbiamo lo stesso contorno di prima. Poiché ciò non può essere, dobbiamo ipotizzare che anche nei luoghi dove non è presente un moto reale di cariche esiste un'altra corrente che renda il calcolo del flusso diverso da zero.
Maxwell rilegge il teorema di ampère considerando la situazione all'interno del condensatore:

$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 \left(I_c + \varepsilon_0 \frac{d\theta_E}{dt} \right)$$

Essendo $\varepsilon_0 \frac{d\theta_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{QA}{A\varepsilon_0}\right) = \frac{dQ}{dt}$ abbiamo dimensionalmente una corrente che nasce dalla variazione nel tempo del campo elettrico che viene detta corrente di spostamento.
Si dimostra che questa corrente di spostamento e la corrente di carica del condensatore hanno lo stesso valore assoluto per cui si possono pensare come il proseguimento dell'una nell'altra.
Questa costituisce una delle quattro equazioni di Maxwell (teorema di Ampère generalizzato)
Le leggi di Maxwell sono quattro. Le altre sono:
Legge di Gauss per il campo elettrico: $\oint E * dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$,
Legge di Gauss per il campo magnetico:
$\oint \vec{B} * dA = 0$ (Si è mostrato sperimentalmente che le linee di forza del campo magnetico sono sempre chiuse. Questo vuol dire che il numero di linee di forza che entrano attraverso una superficie chiusa è uguale al numero di quelle che escono dalla superficie. Possiamo quindi assumere che il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie chiusa è sempre nullo)
e , infine,la legge di Faraday:

$$\oint E * ds = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Legge di Faraday
Si è visto sperimentalmente che se si ha una spira chiusa, nella quale è inserito un galvanometro, e si avvicina ad essa un magnete, nel galvanometro viene segnato un passaggio di corrente. Se il magnete viene mantenuto fermo non viene rilevato nessun passaggio di corrente. Altresì se si tiene fermo il magnete e si muove la spira si ha corrente. Possiamo affermare che affinché si abbia un movimento di cariche nella spira è necessario avere un sistema in movimento. Se poi, in assenza di un magnete, si ha una spira percorsa da corrente variabile si crea intorno alla spira un campo

magnetico variabile. Se si avvicina una seconda spira alla prima, in presenza di questa situazione di variabilità del campo magnetico, si avrà una corrente anche in questa seconda spira.
In definitiva il campo magnetico variabile è causa di una corrente "indotta".

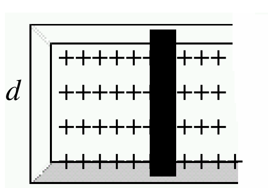
Tale corrente viene generata da una f.e.m. indotta: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}$.

Come esempio ipotizziamo un campo magnetico uniforme all'interno del quale viene messa in movimento una barretta conduttrice a velocità v.

+++++++++
+++++ ++
+++++ ++
+++++ ++
+++++++++
+++++++++

Supponiamo che nell'intervallo di tempo infinitesimo *dt* la barretta si sposti verso destra, nella direzione positiva dell'asse y . Lo spostamento infinitesimo subito dalla barretta sarà $dx = v\, dt$.
Quando la barretta si sposta, anche gli elettroni di conduzione si spostano con velocità *v* e la forza di Lorentz $F = q\vec{v} * \vec{B}$ agisce su di loro e li fa muovere nel verso che va dall'alto verso il basso, quindi ci sarà un accumulo di cariche positive in alto e un accumulo di cariche negative in basso.
Tra l'estremo alto e l'estremo basso del conduttore si ha una d.d.p. ossia una f.e.m indotta.
Lo spostamento del conduttore ha quindi generato una differenza di potenziale , questa darà luogo ha un campo elettrico con forza F $\downarrow$ che si opporrà alla forza magnetica F_m $\uparrow$. A causa di ciò , ad un certo punto, la migrazione degli elettroni cessa: $F_e = eE$

La separazione delle cariche genera quindi una d.d.p.: $V = Ed$ dove *d* è la lunghezza della barretta.
Ricordando che $E = vB$ avremo : $\Delta V = vBd$.



Appoggiamo la barretta metallica ad un binario conduttore, circolerà nel binario una corrente dovuta alla fem indotta.: $I = \dfrac{vBd}{R}$ (naturalmente R è la resistenza offerta dal circuito).

Applichiamo la legge di Faraday $\varepsilon = -\dfrac{d\phi_m}{dt}$ essendo $\phi_m = BA$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}(BA) = B\frac{dA}{dt} = B\frac{d}{dt}\left(dx_{(t)}\right) = Bd\frac{d(x)}{dt} = Bdv$$

Il risultato coincide con quanto trovato precedentemente.

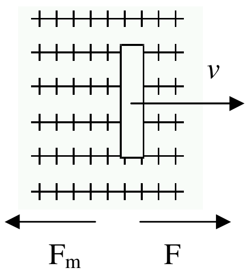
Riscriviamo la legge di Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d(\vec{B} * \vec{A})}{dt} = \frac{d(|B||A|\cos\theta)}{dt}$$

Dall'espressione si vede che una f.e.m. può essere indotta:

- quando varia nel tempo il modulo di **B**
- quando varia nel tempo la superficie A del circuito
- quando varia nel tempo l'angolo θ tra **B** e la normale al circuito
- per qualsiasi combinazione dei punti precedenti

Torniamo al caso precedente



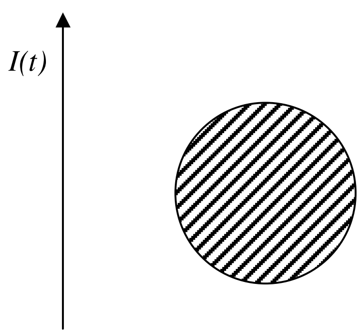
La f.e.m. indotta ha una polarità tale da opporsi sempre alla causa che l'ha prodotta. In termini di corrente, si può dire che la direzione della corrente indotta è sempre tale da produrre un campo magnetico che si oppone alla variazione di flusso che l'ha generata . Tale forza $F_m = I\vec{\ell} * \vec{B}$ tenderà a fare rallentare la barretta. Se si vuole mantenere v costante si deve applicare una forza che equilibra la forza magnetica.

$$\phi_m = Blx \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell\frac{dx}{dt} = -B\ell v$$

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

$$F = F_m = I\ell B$$

La potenza dissipata sarà: $P = Fv = (I\ell B)v = \dfrac{B^2\ell^2v^2}{R} = \left(\dfrac{B\ell v}{R}\right)^2 R = I^2R$

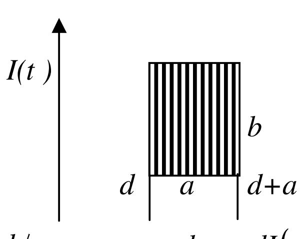


In presenza di una corrente in un conduttore non costante nel tempo avremo un campo magnetico variabile, il flusso che si concatenerà con la spira sarà anch'esso variabile, si genera una f.e.m indotta :

$$\varepsilon = -\frac{d(\vec{B} * \vec{A})}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{AdB}{dt}$$

Tuttavia *B* non è uguale in tutti i punti in quanto $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Allora occorre calcolare la ε considerando quei punti per i quali B è uguale e poi integrare…..

Analizziamo la stessa situazione con corrente non costante che influenza una forma rettangolare:



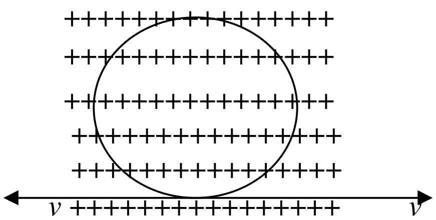
$$d\phi_m = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}bdr$$

$$\phi_m = \int_d^{d+a}\frac{\mu_0 I(t)bdr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I(t)b}{2\pi}\int_d^{d+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I(t)b}{2\pi}\log\frac{d+a}{d}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\mu_{0b}}{2\pi}\log\frac{d+a}{d}\frac{dI(t)}{dt}$$

Perché c'è il segno "meno" nella legge di Lenz?
Se abbiamo un solenoide nel quale varia il campo magnetico e avviciniamo a questo una spira nella spira circolerà una corrente indotta che a sua volta genera un campo magnetico. Quest'ultimo campo magnetico , che chiameremo *indotto* andrà a influenzare quello iniziale chiamato *inducente* in modo discorde. Per spiegarlo occorre fare delle considerazioni energetiche. La energia indotta si genera a causa delle correnti indotte ed è dovuta al fenomeno dell'induzione elettromagnetica che si ha quando si ha una variazione del flusso magnetico induttore. La corrente indotta per reazione tenderà ad ostacolare questa variazione di flusso induttore in modo che, se questo cresce, il flusso magnetico indotto sarà tale da opporsi a questo aumento facendolo diminuire e viceversa.
Le forze elettromotrici che determinano il verso delle correnti avranno verso tale da consentire questo effetto. Ne deriva che la f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso induttore ed è negativa quando il flusso concatenato cresce mentre è positiva quando sta calando. Questo da origine alla comparsa del segno meno dovuto a Lenz.

Esercizio



In presenza di campo magnetico uniforme la circonferenza varia la propria dimensione portandosi da $C_0 \to C_{(t)}$, avremo quindi una variazione dell'area racchiusa.
Si vuole conoscere la f.e.m. indotta e la corrente.

L'area della circonferenza varia da $A(t) \to r(t)$

Ricordiamo che: $\phi_m = \int \vec{B} * d\vec{A}$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -B\pi\frac{dr^2}{dt} = -B\pi 2r\frac{dr}{dt}$$

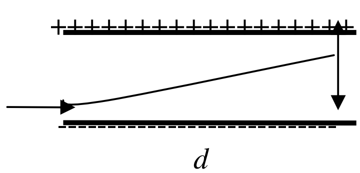
$C_0 = 2\pi r_0 \quad C_{(t)} = 2\pi r_{(t)}$ Stabiliamo che: $C_0 - C_{(t)} = 2vt \Rightarrow C_{(t)} = C_0 - 2vt$

$$2\pi r_{(t)} = C_0 - 2vt \Rightarrow r_{(t)} = \frac{C_0 - 2vt}{2\pi}$$

$$\varepsilon = B2\pi\frac{C_0 - 2vt}{2\pi}\frac{2v}{2\pi} = vB\frac{C_0 - 2vt}{\pi}$$

Chiamando R la resistenza che offre la circonferenza : $I = \frac{\varepsilon}{R}$

Esercizio
Un elettrone viene lanciato a velocità *v* all'interno di un condensatore carico. Si vuole sapere dopo quanto tempo toccherà la armatura positiva:



In presenza di una densità di carica σ abbiamo $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

L'elettrone entra nel campo interno al condensatore ed è sottoposto alla forza del campo E, ma la forza *F* su una carica *q* in presenza di un campo elettrico *E* è: $\vec{F} = q_e E$. Questa forza imprime all'elettrone una accelerazione verso l'armatura positiva, il suo moto è di tipo parabolico.

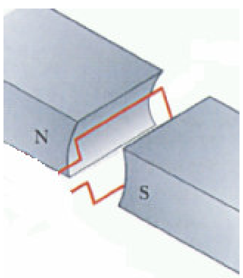
Ricordiamo che $F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$

L'elettrone entra con velocità iniziale v_i che mantiene costante lungo l'asse x.

La velocità lungo l'asse y è $v_y = a_y t = -\frac{q_e E}{m} t$. Lo spazio finale percorso lungo l'asse x sarà $v_i t$.

Lo spazio finale in senso verticale sarà: $y_f = d = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{q_e E}{m} t^2$ da questa si ricava t.

Generatore elettrico



Fra le espansioni di un magnete permanente viene immersa una spira che ruota con velocità angolare ϖ : nella spira si genera una f.e.m. indotta.

$$\phi_m = BA\cos\theta = BA\cos\omega t \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{dAB}{dt}\cos\omega t$$

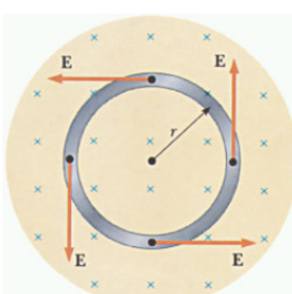
$$\varepsilon = BA\sin\omega t.\omega = |BA\omega|\sin\omega t$$

Abbiamo $I = \frac{\varepsilon}{R}$.

Siamo quindi in presenza di una spira percorsa da corrente immersa in un campo magnetico.

Su di essa agisce un momento torcente $\tau = \mu * \vec{B}$ dove con μ indichiamo il "momento di dipolo magnetico" essendo $\mu = IA$ con A area racchiusa dalla bobina.

Esercizio



$B = B_0 e^{kt}$

Con B variabile nel tempo abbiamo un campo elettrico indotto tangente alla spira.

Un elettrone che compie un giro completo subisce una variazione di energia potenziale ε_q.

$\varepsilon_q = qE2\pi r$ Lavoro del campo elettrico B.

$$|E| = \left|\frac{\varepsilon}{2\pi r}\right| = A\frac{dB}{dt2\pi r} = \frac{\pi r^2}{2\pi r}\frac{dB}{dt} = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \neq 0$$

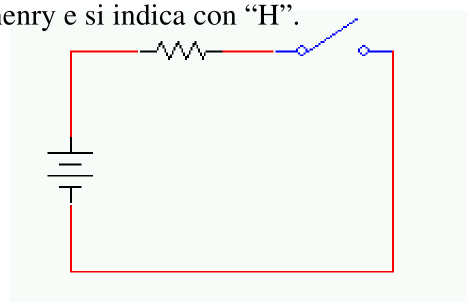
Il campo elettromagnetico indotto non è conservativo.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} \qquad q\varepsilon = qE2\pi r \Rightarrow \varepsilon = E2\pi r = \oint \vec{E} * d\vec{s} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Autoinduzione

Un circuito percorso da corrente variabile determina un campo magnetico variabile le cui linee di forza sono sempre concatenate con il circuito stesso. Il flusso del campo magnetico, anch'esso variabile, verrà a generare dentro il conduttore una f.e.m. autoindotta. Il flusso concatenato risulta sempre proporzionale all'intensità di corrente che scorre nel circuito: $\phi_m = Li$

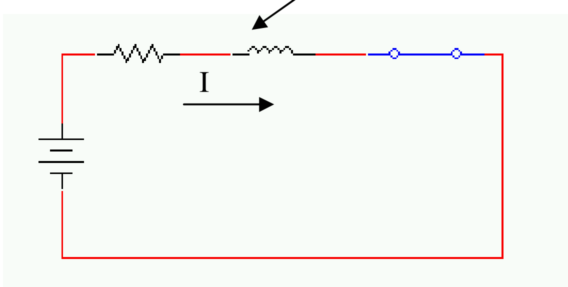
L prende il nome di coefficiente di autoinduzione o induttanza. La sua unità di misura si chiama henry e si indica con "H".

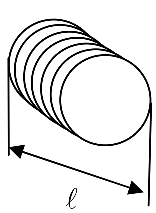


Alla chiusura dell'interruttore la corrente $I = \dfrac{V}{R}$ si stabilirà dopo un tempo non nullo. Il motivo sta nel fatto che la citata f.e.m. autoindotta si opporrà alla variazione di flusso concorrendo con il suo effetto, in opposizione, rispetto alla forza elettromotrice della batteria. A regime trattandosi di corrente continua il flusso non varierà più e la f.e.m. autoindotta va a zero.

Durante il transitorio di chiusura si sono evidenziati gli effetti della induttanza, possiamo pensare al circuito modificato come segue:

Simbolo dell'induttanza



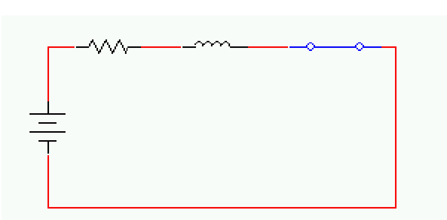


Abbiamo un solenoide di lunghezza ℓ e formato da N spire.
Nel solenoide circola una corrente che produce un campo magnetico al suo interno: $B = \mu_0 n I$ (dove $n = \dfrac{N}{\ell}$ è la densità lineare delle spire).

In presenza di corrente variabile avremo una f.e.m. :

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -N\frac{dAB}{dt} = -N\mu_0 nA\frac{dI}{dt}$$

Possiamo esprimere la f.e.m. autoindotta dalla variazione *dI*: $\varepsilon = -\dfrac{d\phi_m}{dt} = -L\dfrac{dI}{dt}$.



A questo punto possiamo scrivere la legge di Kirchoff applicata alla maglia di figura tenendo conto che la f.e.m indotta funge da forza controelettromotrice.

$V - IR - L\dfrac{dI}{dt} = 0$ nella quale la I è $I(t)$

$\Rightarrow \dfrac{V}{R} - I_{(t)} - \dfrac{L}{R}\dfrac{dI}{dt} = 0$ (equazione differenziale di 1° ordine)

$\dfrac{V}{R} - I(t) = x(t) \;\; \Rightarrow \dfrac{dx(t)}{dt} = -\dfrac{dI(t)}{dt}$

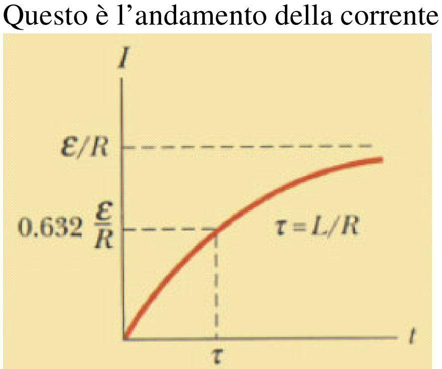
$x(t) + \dfrac{L}{R}\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \dfrac{dx}{x(t)} = -\dfrac{R}{L}dt$ integrando si ottiene: $\int_0^t \Rightarrow \int_{x_0}^x \dfrac{dx}{x} = -\int_0^t \dfrac{R}{L}dt$

$\log\dfrac{x}{x_0} = -\dfrac{R}{L}t \Rightarrow$ elevando tutto ad $e \Rightarrow \dfrac{x}{x_0} = e^{\frac{R}{L}t}$

$x = x_0 e^{\frac{R}{L}t}$ ma $x = \dfrac{V}{R} - I(t) = \dfrac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$

$-\dfrac{V}{R} + I(t) = -\dfrac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I(t) = \dfrac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Questo è l'andamento della corrente :



$\tau = \dfrac{L}{R}$ e la costante di tempo del circuito L-R serie.

Com'è l'andamento della f.e.m. ai capi del solenoide:

Riscriviamo $I(t) = \dfrac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ derivando si ha: $\dfrac{dI}{dt} = +\dfrac{R}{L}\dfrac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$

La caduta di tensione sull'induttanza sarà: $V_L = L\dfrac{dI}{dt} = Ve^{-\frac{R}{L}t}$

Vediamo adesso quanto è l'energia immagazzinata nel solenoide:

$V - I(t)R - L\dfrac{dI}{dt} = 0$ moltiplichiamo per I

$VI(t) - I^2(t)R - IL\dfrac{dI}{dt} = 0$

Potenza erogata dalla batteria

Potenza dissipata nella resistenza

Rapidità di immagazzinamento della potenza nella induttanza. Chiamiamo questo ultimo termine

$$P_L = -IL\frac{dI}{dt} = \frac{dU_m}{dt}$$

Integriamo l'equazione per avere U_m, che è l'energia immagazzinata nell'induttore quando la corrente è uguale a I:

$$U_m = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

Questa espressione è analoga all'energia immagazzinata in un condensatore che era: $\frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}_{\text{Densità di energia del campo elettrico all'interno del Condensatore}} Ad$

Così come nel condensatore l'energia è contenuta nel campo elettrico, nell'induttore l'energia si trova nel campo magnetico.

Ricordiamo che $U_m = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$

Consideriamo il campo magnetico generato da una spira: $B = \mu_0 nI$ dove con $n = \frac{N}{\ell}$ indichiamo la densità di spira

La $\varepsilon = -N\frac{d\phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \varepsilon = N\frac{dBA}{dt} = NA\frac{d}{dt}B = NAtg\frac{dI}{dt} = L\frac{dI}{dt}$ con tg=fattore geometrico

Siccome $L = N\frac{\phi_m}{I}$ e $B = \mu_0 nI$

essendo $\phi_m = BA = \mu_0 nAI$ flusso magnetico di una spira, la L si riscrive:

$$L = N\frac{\mu_0 nAI}{I} = \mu_0 n^2 \Big(\underbrace{A\ell}_{\text{volume del solenoide}}\Big)$$

L'induttanza è proporzionale al quadrato della densità lineare delle spire (n^2) ed al suo volume ($A\ell$)interno.

Si è visto che: $U_m = \frac{1}{2}LI^2$ sostituendo ad L l'espressione appena trovata, ricordando che

$I = \frac{B}{\mu_0 n}$, avremo: $U_m = \frac{1}{2}\mu_0 n^2\left(A\ell\frac{B^2}{\mu_0^2 n^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}(A\ell)$ Energia contenuta nel solenoide.

Si desume che la densità di energia dividendo per il volume in cui è contenuto il campo $\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$

Questo risultato si estende a qualsiasi campo magnetico, possiamo affermare che per ogni volume unitario, interno al solenoide, vi è una quantità di energia che è proporzionale al quadrato del campo B.