#3 2006

PROBLEMA A

A1) $x = 2.5\ m \cos((4\pi\ rad/s)t + \pi\ rad/4)$

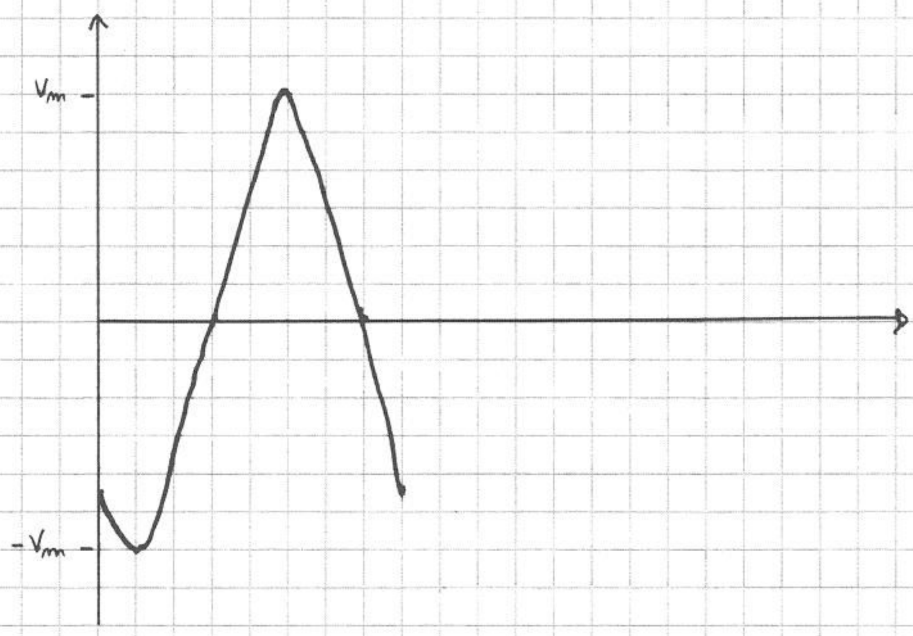
$x_m = 2.5\ m$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi/s} = 0.5\ s$

$\nu = \frac{1}{T} = 2\ Hz$

A2) $v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_m \cos(\omega t + \varphi)\right) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) =$

$= -2.5\ m\ (4\pi\ rad/_s) \sin\left(\left(4\pi\ rad/_s\right)t + \pi\ rad/_4\right).$



per $t = 0$ $\quad V = -22.21$

$\frac{\pi}{2}$ $\quad t = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{4\pi}\right) = \frac{1}{16}\ s$ $\quad V = -V_m$

π $\quad t = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{4\pi}\right) = \frac{3}{16}\ s$ $\quad V = 0$

$\frac{3}{2}\pi$ $\quad t = \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{4\pi}\right) = \frac{5}{16}\ s$ $\quad V = V_m$

2π $\quad t = \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{4\pi}\right) = \frac{7}{16}\ s$ $\quad V = 0$

$2\pi + \frac{\pi}{4}$ $\quad t = \frac{8}{16}\ s$ $\quad V = -22.21$

A3) $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)\right) =$

$$= -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) = -\left(4\pi \,rad/s\right)^2 2.5\,m \cos\left(\left(4\pi\,rad/s\right)t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$a_m = \omega^2 x_m = 394.78\ m/s^2$

per $t = 0$ $\quad a = -195.40\ m/s^2$

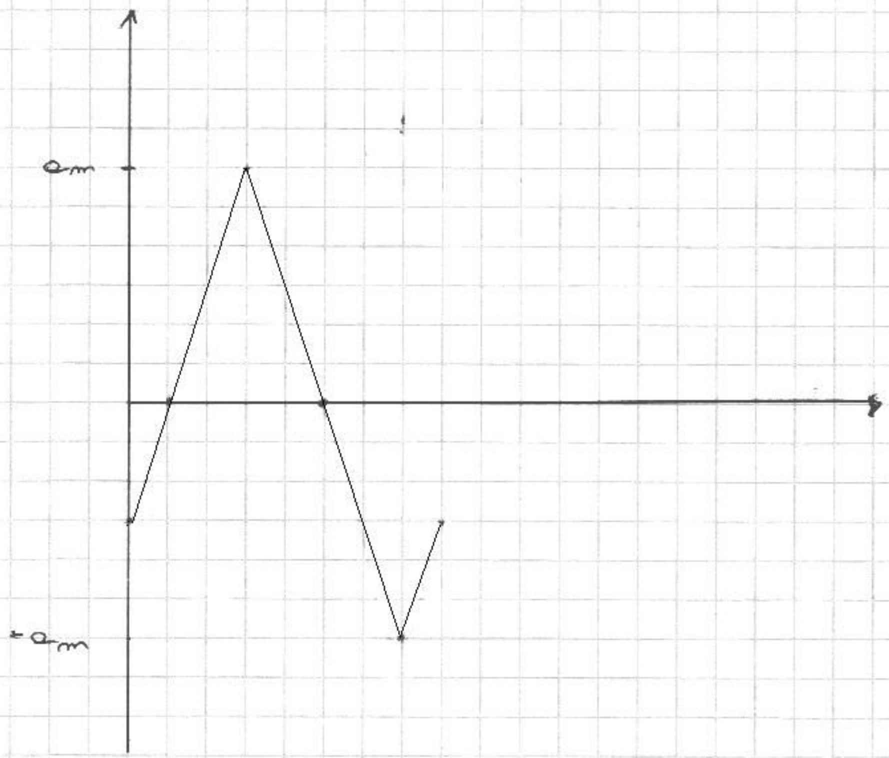
$\frac{\pi}{2}$ $\quad t = \frac{1}{16}s$ $\quad a = 0$

π $\quad t = \frac{3}{16}s$ $\quad a = a_m$

$\frac{3}{2}\pi$ $\quad t = \frac{5}{16}s$ $\quad a = 0$

2π $\quad t = 7/16\,s$ $\quad a = -a_m$

$2\pi + \frac{\pi}{4}$ $\quad t = 8/16\,s$ $\quad a = -195.40\ m/s^2$



A4) $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow K = \omega^2 m = \left(4\pi\, rad/s\right)^2 \cdot 3Kg = 473.74\ Kg/s^2\ (N/m)$

A5) $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}(3Kg)\left(-2.5\,m\left(4\pi\,rad/s\right)\sin\left(\left(4\pi\,rad/s\right)t + \frac{\pi}{4}\,rad\right)\right)^2 =$

sostituendo $\omega^2 = \frac{K}{m}$

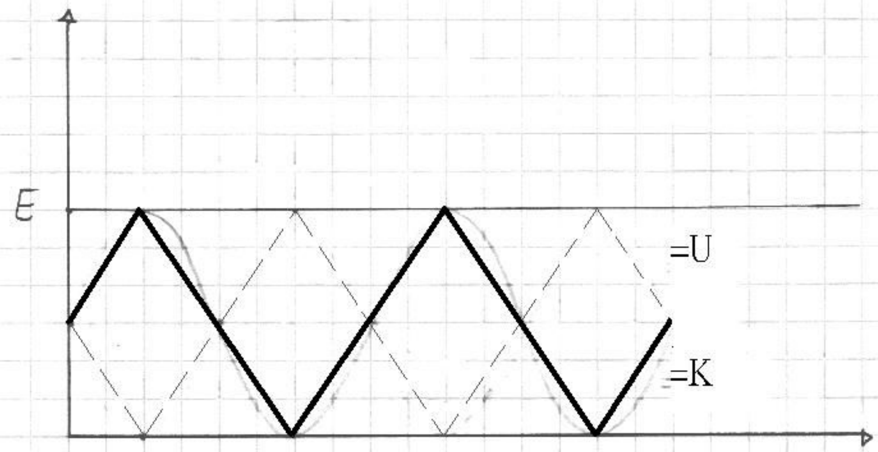
$= + \frac{1}{2} \cdot 6.25\,m^2 \cdot K \cdot \sin^2\left(\left(4\pi\,rad/s\right)t + \frac{\pi}{4}\,rad\right) =$

$= 1480.4\ J \cdot \sin^2\left(\left(4\pi\,rad/s\right)t + \frac{\pi}{4}\,rad\right)$

A6) $U = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} \cdot 473.74\ Kg/s^2 \cdot \left(+2.5\cos\left(\left(4\pi\,rad/s\right)t + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 =$

$= \frac{1}{2} \cdot 473.74\ Kg/s^2 \cdot 6.25\,m^2 \cos^2\left(\left(4\pi\,rad/s\right)t + \frac{\pi}{4}\right) =$

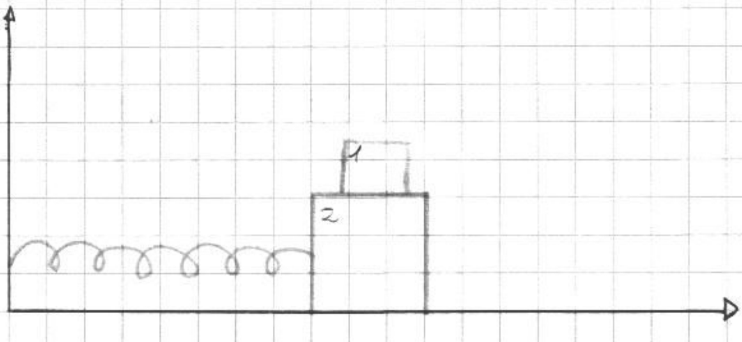
$= 1480.4\ J \cos^2\left(\left(4\pi\,rad/s\right)t + \pi/4\,rad\right)$



per $t = 0$ $\quad K = 1/2 \cdot 1480.4\ J$

$U = 1/2 \cdot 1480.4\ J$

PROBLEMA B



$m_1 = 2\,Kg$

$m_2 = 5\,Kg$

$\mu = 0.5$

$K = 300\ N/m$

Affinché 1 non scivoli su 2 deve risultare

$$\underbrace{-K_1 x}_{\substack{F_{molla} \\ \text{applicata al} \\ \text{blocco 1}}} + \underbrace{\mu g m_1}_{\substack{F_{attrito} \\ \text{tra i due} \\ \text{blocchi}}} = 0$$

la x rappresenta l'ampiezza massima dell'oscillazione, uguale per entrambi i blocchi.

la pulsazione del sistema è $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}} \approx 6.55 = 2\pi\ rad/s$

la pulsazione del blocco 1 è $\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}}$

ma la pulsazione è sempre la stessa

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} \Rightarrow K_1 = \left(\sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}}\right)^2 \cdot m_1 = 85.71\ N/m$$

Adesso possiamo ricavarci $x = x_m = \frac{\mu g m_1}{K_1} = \frac{0.5 \cdot 9.81\ m/s^2 \cdot 2\,Kg}{85.71\ N/m} = 0.11\ m$

Ricaviamo l'equazione del moto armonico semplice del sistema

$$x(t) = 0.11\ m \sin\left(\left(2\pi\ rad/s\right) t\right)$$

PROBLEMA C

$$y = 2m \cos\left(\left(2\pi\, rad/_m\right)x - \left(4\pi\, rad/_s\right)t\right)$$

C1) $y_m = 2m$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1m$$

vettore d'onda $\quad y(x,0) = 2m \cos\left(\left(2\pi\, rad/_m\right)x\right)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.5\,s$$

$$\nu = \frac{1}{T} = 2\,Hz$$

$$\omega = \left(4\pi\, rad/_s\right)$$

$$\varphi = 0.$$

C2) $v_t = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(y_m \cos(kx - \omega t)\right) = + y_m\, \omega \sin(kx - \omega t) =$

$$= 2m\left(4\pi\, rad/_s\right) \sin\left(\left(2\pi\, rad/_m\right)x - \left(4\pi\, rad/_s\right)t\right) =$$

$$= 25.13\, m/_s \cdot \sin\left(\left(2\pi\, rad/_m\right)x - \left(4\pi\, rad/_s\right)t\right)$$

$$v_{t_{max}} = \omega\, y_m = 25.13\, m/_s$$

C3) $v = \frac{\omega}{k} = 2\, m/s$

Il verso è concorde alla propagazione dell'onda, dx.

La velocità di propagazione è la velocità con cui si muove lungo l'asse x ed è costante.

La velocità trasversale dipende da x e da t, ogni punto che giace sull'onda ha una velocità diversa.

C4)

$$\tau = 100\ N$$

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \Rightarrow \mu = \frac{\tau}{v^2} = \frac{100\ N}{4\ m^2/s^2} = 25\ Kg/m$$

C5)

$$\xi_1(t) = \xi_m \cos(kx - \omega t)$$

$$\xi_2(t) = \xi_m \cos(kx - \omega t + \pi/3\ rad)$$

$$\xi'(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) = \xi_m \cos(kx - \omega t) + \xi_m \cos(kx - \omega t + \pi/3\ rad) =$$

$$= 2\xi_m \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\ rad\right)\cos\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\ rad\right) =$$

$$= 2\xi_m \cos\left(\frac{\pi\ rad}{6}\right)\cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{6}\ rad\right)$$

$$\xi_{m_{max}} = 2\xi_m \cos\left(\frac{\pi}{6}\ rad\right) = \xi_m\sqrt{3}\ .$$

C6)

$$\tau_1 = 100\ N \qquad \mu_1 = 25\ Kg/m$$

$$\mu_2 < \mu_1$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\tau_1}{\mu_1}} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_2}}$$

$$\Rightarrow v_1 < v_2$$

C7)

$$v_1 = \lambda_1 \cdot \nu \qquad\qquad \lambda_1 = \frac{v_1}{\nu}$$

$$\Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow \lambda_2 > \lambda_1$$

$$v_2 = \lambda_2 \cdot \nu \qquad\qquad \lambda_2 = \frac{v_2}{\nu}$$

C8)

$$\nu = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}$$

è ragionevole supporre che il rapporto tra velocità e lunghezza d'onda si mantenga costante.

D1)

$$\nu' = \nu \frac{V \pm V_R}{V \mp V_S}$$

dove ν' = frequenza rivelata

ν = frequenza emessa

V = velocità di propagazione

V_R = velocità rivelatore

V_S = velocità sorgente

1° caso: $\begin{cases} \nu' = \nu \dfrac{V}{V - V_S} & \text{se la sorgente si avvicina} \\ \nu' = \nu \dfrac{V}{V + V_S} & \text{se " " " allontana} \end{cases}$

2° caso: $\begin{cases} \nu' = \nu \dfrac{V + V_R}{V} & \text{se il rivelatore si avvicina} \\ \nu' = \nu \dfrac{V - V_R}{V} & \text{se " " " allontana} \end{cases}$