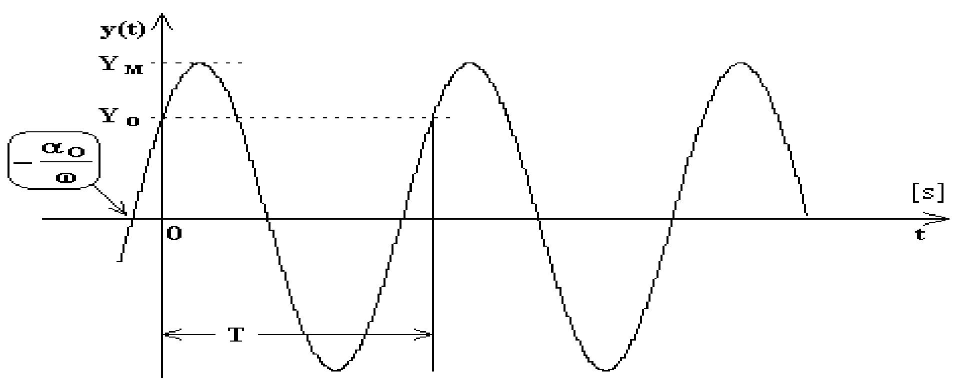
Fisica2
Dicembre 2005
(File elaborato da u patri)

Abbiamo già visto che una spira rotante all'interno di un campo magnetico uniforme diviene sede di una f.e.m. indotta: $\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(AB\cos\omega t) = \underbrace{AB\omega}_{V_0}\sin\omega t$

$\Rightarrow V = V_0 \sin\omega t$

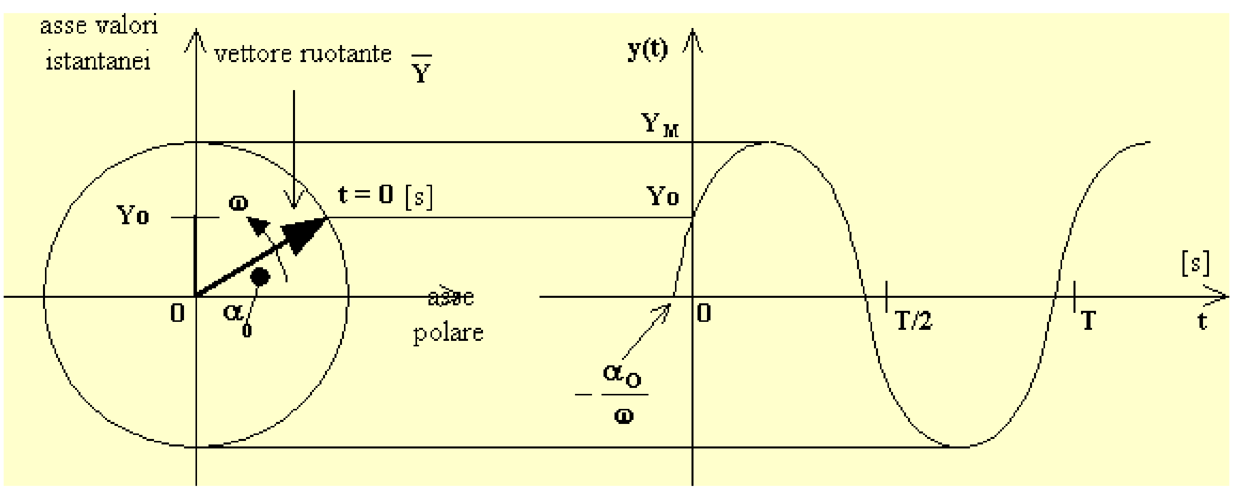
Questa è l'espressione analitica di una grandezza sinusoidale che ha come rappresentazione grafica una sinusoide:



Elementi caratterizzanti di una sinusoide sono l'ampiezza (Y), il periodo T e la fase(in figura il termine $-\frac{\alpha_0}{\omega}$) , per maggiore chiarezza diremo che se la sinusoide avesse origine al centro degli assi la sua fase sarebbe zero. Con ω viene indicata la pulsazione o velocità angolare e si misura in radianti al secondo infatti: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

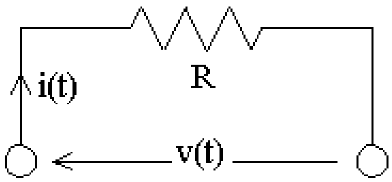
L'introduzione di ω nello studio delle correnti alternate viene giustificato dal modo in cui si è generata la sinusoide.

Una sinusoide si può anche rappresentare come originata da un vettore ruotante:



I valori di ampiezza assunti nel tempo dalla sinusoide corrispondono ai valori della proiezione sull'asse Y del vettore da cui : $y = Y \sin \alpha = Y \sin \omega t$ questa formula corrisponde al caso in cui il termine $\frac{\alpha_0}{\omega} = 0$. Nel caso più generale la formula prende la forma: $y = Y \sin(\omega t + \alpha)$.

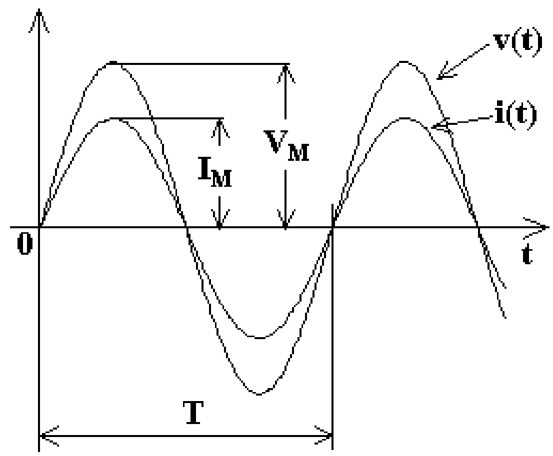
Dopo queste opportune precisazioni vediamo quale è il comportamento di un circuito alimentato in corrente alternata e che ha solo una resistenza, si dice che il circuito è puramente ohmico:



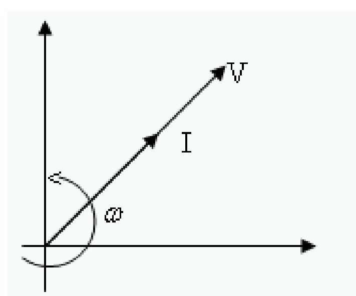
Nel circuito sottoposto alla f.e.m. $v(t)$ circolerà istante per istante una corrente

$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$

Le sinusoidi che rappresentano la corrente e la tensione sono sinusoidali e in fase:

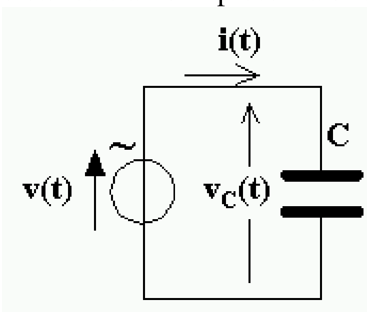


Esprimendo con i vettori ruotanti avremo:



I due vettori I e V ruotano in fase con velocità angolare ω.

Quando il circuito in esame è privo di effetti resistivi e induttivi ma è presente solo una capacità elettrica siamo in presenza di un circuito puramente capacitivo:

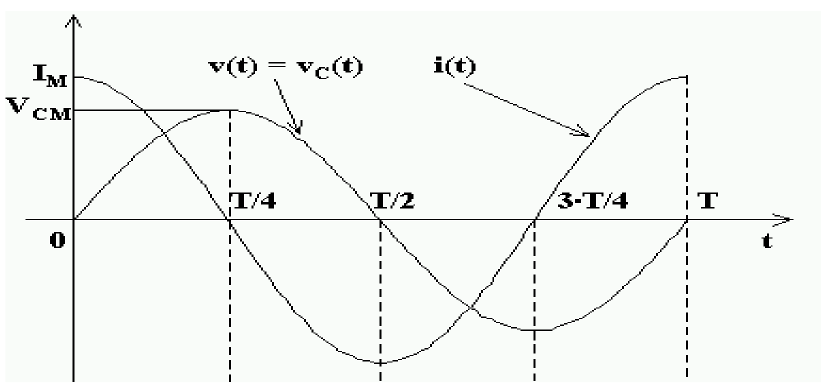


La capacità elettrica è espressa dalla formula: $C = \frac{Q}{V}$ da cui $Q = CV$ sostituendo a V la sua espressione in alternata: $Q = CV_0 \sin \omega t$ anche Q è quindi una funzione alternata.

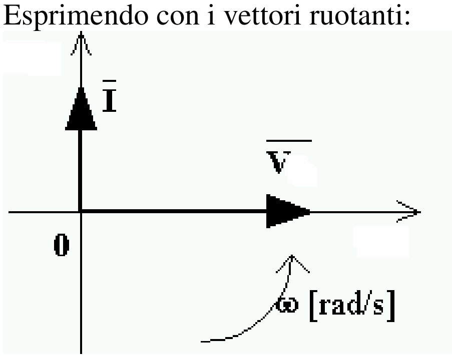
Esprimiamo la corrente: $I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} = CV_0 \omega \cos(\omega t) = I_{0_c} \cos \omega t$.

Ricordando che : $\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ possiamo scrivere : $I = I_{0_c} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Questo risultato indica che fra corrente e tensione è presente una differenza di fase (sfasamento):

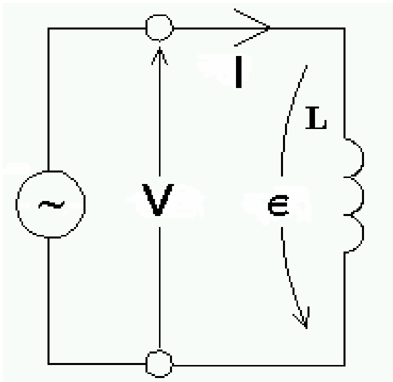


Esprimendo con i vettori ruotanti:



I due vettori I e V ruotano nella stessa direzione ma sfasati di 90°. La corrente "anticipa" la tensione..

Esaminiamo adesso il caso di un circuito puramente induttivo:



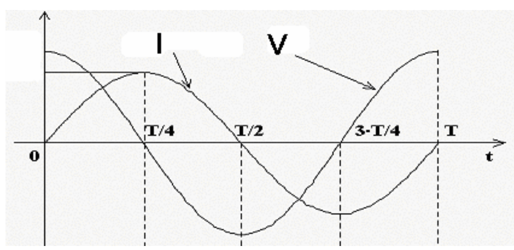
La variazione nel tempo del flusso autoconcatenato produrrà una forza elettromotrice autoindotta di valore: $\varepsilon = L\frac{dI}{dt}$.

Per quanto già detto $\Rightarrow V_0 \sin(\omega t) = L\frac{dI}{dt}$

Ricaviamo I integrando:

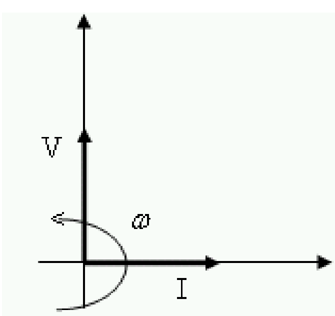
$$\int V_0 \sin \omega t dt = \int L\frac{dI}{dt} = L\int dI$$

$$I_{0_L} = -\frac{V_0}{\omega L}\cos \omega t = \frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



La tensione “anticipa” la corrente.

La rappresentazione con vettori ruotanti con $I_{0L} = \frac{V_0}{\omega l}$:



Nei tre casi esaminati abbiamo ottenuto tre diverse espressioni per il modulo della corrente:

$$I_R = I_0 \sin \omega t = \frac{V_0}{R} \sin \omega t$$

$$I_c = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} = CV_0 \omega \cos(\omega t) = I_{0_c} \cos \omega t = \omega C V_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$I_L = I_0 \cos \omega t = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Il modulo di I_0 nei tre casi risulta essere: $I_0 = \frac{V_0}{R}$

$$I_0 = \omega C V_0$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L}$$

In tutti e tre i casi si evidenzia la proporzionalità fra corrente e tensione. La proporzionalità è data da: R resistenza,si misura in ohm

$X_c = \frac{1}{\omega C}$ reattanza capacitiva, si misura in ohm.

$X_L = \omega L$ reattanza induttiva, si misura in ohm.

Se consideriamo il carattere sinusoidale delle correnti nei circuiti capacitivo e induttivo possiamo introdurre la quantità $\overline{\mathbf{X_C}} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{X_C}$ $[\Omega]$ chiamata <u>reattanza capacitiva immaginaria</u> che è un <u>operatore vettoriale</u> in quanto se applicato al numero complesso rappresentante la corrente fornisce il numero complesso rappresentante la tensione ai capi del condensatore:

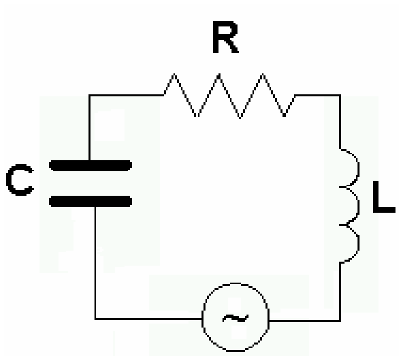
$$\overline{\mathbf{X_C}} \cdot \overline{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{V_C}}$$

e la quantità $\overline{\mathbf{X_L}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{X_L}$ $[\Omega]$ chiamata <u>reattanza induttiva immaginaria</u> che è un <u>operatore vettoriale</u> in quanto se applicato al numero complesso rappresentante la corrente fornisce il numero complesso rappresentante la tensione ai capi dell'induttanza:

$$\overline{\mathbf{X_L}} \cdot \overline{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{V_L}}$$

In questa rappresentazione è particolarmente interessante il ruolo dell'unità immaginaria j, che può essere interpretata come una rotazione in senso antiorario di un angolo retto attorno all'origine, nel caso di circuito capacitivo la corrente anticipa di 90° gradi rispetto alla tensione, nel caso di circuito induttivo la corrente ritarda di 90° rispetto alla tensione.

Studiamo adesso il caso in cui sono contemporaneamente presenti i tre elementi C,L,R in un circuito alimentato da una tensione $V = V_0 \sin \omega t$:

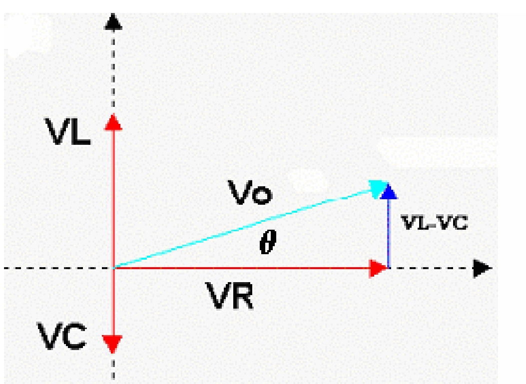


Dopo un transitorio iniziale avremo nel circuito una corrente che ha la stessa pulsazione della tensione sinusoidale applicata e che si scrive quindi:

$I = I_0 \sin(\omega t - \phi)$ (ϕ viene detta differenza di fase tra tensione applicata e corrente).

Nel circuito di figura avremo che la tensione applicata si dividerà nelle tre tensioni sui singoli elementi $\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L$

La relazione di fase fra le tensioni sarà la seguente:



$|V| = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_c)^2}$ essendo $V_R = IR$; $V_C = \dfrac{1}{\omega C} I$; $V_L = \omega LI$

$$|V| = \sqrt{(IR)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 I^2} = \underbrace{I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = V_0$$ Legge di Ohm generalizzata

Questo termine viene chiamato “Impedenza” **Z** del circuito

Per conoscere il valore dell'angolo θ che definisce la differenza di fase tra la corrente e la tensione consideriamo che:

$$tg\theta = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\frac{1}{R}$$

Se $X_L > X_C$ la differenza che compare al numeratore, e quindi l'angolo θ, risultano essere positivi. In questo caso la corrente è in ritardo rispetto alla tensione.

Se $X_L < X_C$ l'angolo θ risulta negativo per cui la corrente è in anticipo rispetto alla tensione.

Se poi $X_L = X_C$ si ha $\theta = 0$. La corrente è in fase con la tensione.

In questo caso l'impedenza del circuito è pari al valore della resistenza R, mentre la corrente ha un valore massimo dato da $I_0 = \frac{V_0}{R}$.

La frequenza alla quale si verifica questa ultima condizione viene detta frequenza di risonanza, essendo $\omega_0 = 2\pi f$ avremo: $\omega_0 L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega_0^2 LC = 1$ da cui $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Esercizio d'esempio

Dati: $V_0 = 3V; \omega = 150\frac{rad}{s}; R = 1000; C = 100\mu F; L = 100H$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{10^6 + \left(15 * 10^3 - \frac{1}{150 * 100 * 10^{-6}}\right)^2}} == \frac{3}{\sqrt{10^6 + \left(15 * 10^3 - \frac{10^3}{15}\right)^2}} =$$

$$= \frac{3}{10^3\sqrt{1 + \left(15 - \frac{1}{15}\right)^2}} = \frac{3}{10^3\sqrt{1 + \left(\frac{225 - 15}{15}\right)^2}} = \frac{3}{10^3\sqrt{1 + 14^2}} = \frac{3}{10^3\sqrt{197}} \cong \frac{3}{10^3 * 14} \cong 0{,}2 * 10^{-3}$$

$$tg\theta = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{1000}{15 * 10^3 - \frac{1}{150 * 10^{-4}}} = \frac{1000}{15 * 10^3 - \frac{10^3}{15}} = \frac{10^3}{10^3\left(15 - \frac{1}{15}\right)} = \frac{10^3}{10^3\left(\frac{225 - 1}{15}\right)} = \frac{15}{224}$$

$$\theta = arctg\frac{15}{224}$$

Onde Elettromagnetiche

Come un campo magnetico variabile nel tempo produce un campo elettrico, così un campo elettrico variabile nel tempo produce un campo magnetico.

Maxwell con le sue quattro equazioni, riassunse tutte le proprietà del campo elettrico e di quello magnetico:

$\oint \vec{E} * d\vec{A} = \varepsilon \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$ Teorema di Gauss: Il flusso del campo elettrico uscente da una superficie chiusa è uguale al rapporto tra la somma delle cariche contenuta all'interno della superficie e la costante dielettrica ε_0.

$\oint \vec{B} * d\vec{A} = 0$ Teorema di gauss per il magnetismo: Il flusso dell'induzione magnetica uscente da una superficie chiusa è sempre nullo.

$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 \left(I_E + \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right)$ Teorema di Ampère generalizzato: La circuitazione dell'induzione magnetica, lungo un percorso chiuso, è uguale al prodotto della permeabilità μ_0 per la somma della corrente effettiva e di quella di spostamento.

$\oint \vec{E} * d\vec{s} = -\frac{d\phi_m}{dt}$ Legge di Faraday dell'induzione:

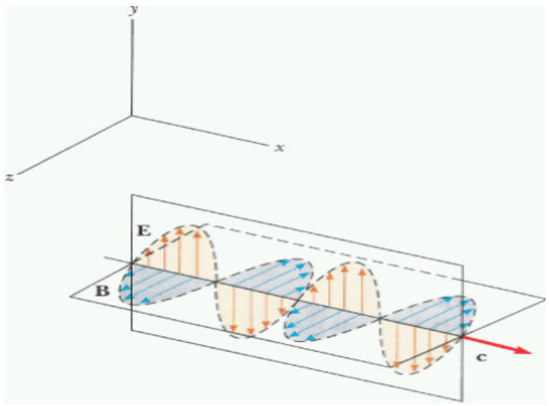
La circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa è uguale al rapporto, cambiato di segno, tra la variazione del flusso dell'induzione magnetica concatenato col percorso considerato e l'intervallo di tempo in cui è avvenuta la variazione.

Per avere una descrizione completa di tutte le interazioni magnetiche diremo anche che in presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico in un punto, la forza agente su una carica elettrica è data da:

$F = qE + qv * B$

Maxwell dimostrò che i campi elettrici e magnetici dipendenti dal tempo soddisfano una equazione d'onda. La più importante conseguenza di questa teoria è la previsione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche (campi elettrici e magnetici oscillanti).La variazione dei campi crea reciprocamente il mantenimento della propagazione dell'onda: un campo elettrico variabile induce un campo magnetico e viceversa.

I vettori **E** e **B** sono ⊥ tra di loro e ⊥ alla direzione di propagazione



Nel vuoto ,ossia in una regione in assenza di correnti e cariche, le equazioni di Maxwell vanno riscritte:

$$\oint \vec{E} * d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \qquad \oint \vec{E} * d\vec{s} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Nel vuoto esistono entrambi i campi elettrico e magnetico.

Si dimostra che le soluzioni delle ultime due formule sono le seguenti:

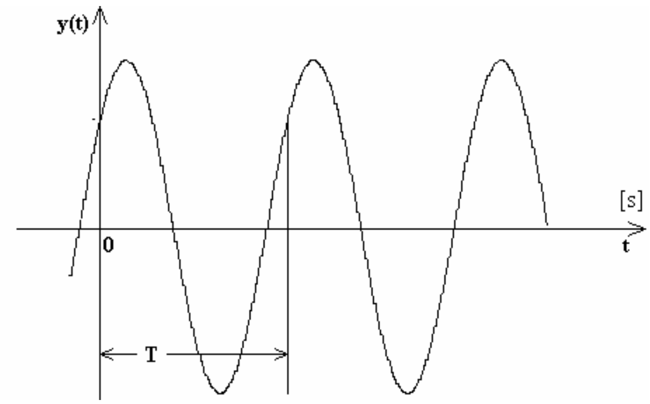
$E = E_0 \sin(\omega t - kx)$ componente elettrica dell'onda

$B = B_0 \sin(\omega t - kx)$ componente magnetica dell'onda

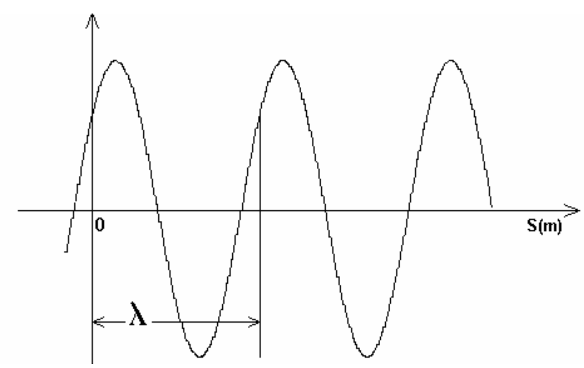
con $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$ numero d'onda angolare

e $\varpi = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ pulsazione o frequenza angolare.

Per comprendere i simboli adottati esaminiamo un'onda sinusoidale:

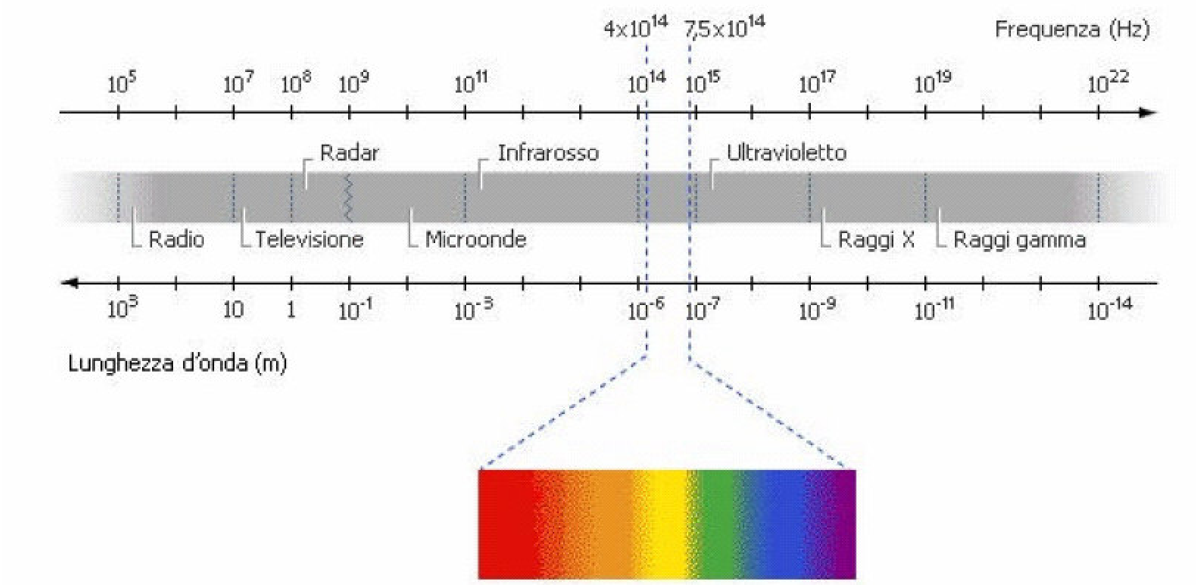


In un segnale sinusoidale chiamiamo T il periodo, ossia il tempo che intercorre tra due punti con stessa ampiezza e fase. L'inverso del periodo è la frequenza intesa come il numero di sinusoidi o cicli in un secondo. L'unità di misura della frequenza si chiama Hertz, abbreviato in Hz.
Con *c* viene indicata la velocità di propagazione di un onda elettromagnetica nel vuoto.
Il simbolo λ indica la lunghezza d'onda ossia lo spazio che percorre l'onda in un periodo. Nella rappresentazione grafica sull'asse orizzontale troviamo lo spazio.



Le onde elettromagnetiche viaggiano nel vuoto con velocità *c*, frequenza *f* e lunghezza d'onda λ.

I valori di ω permettono di fare una classificazione dello spettro delle onde elettromagnetiche:



Supponiamo che le onde elettromagnetiche siano armoniche(sinusoidali) infatti si può decomporre qualsiasi forma d'onda in una somma di onde armoniche:
$E(t) = \int_m E_m(t) \sin(\omega_m t + \varphi)$.
Dalle equazioni di Maxwell abbiamo visto che si trova come soluzione un'onda armonica piana. Un'onda si dice piana se il luogo dei punti dello spazio che hanno stessa fase sta su un piano e quindi l'onda oscilla sempre in uno stesso piano. Le onde possono anche essere sferiche, in questo caso le superfici su cui, ad un dato istante, i campi assumono lo stesso valore (vettoriale!!) sono sfere concentriche.

Un'onda piana si scrive come:
$E(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$ dove $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ e $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Definiamo $v = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{2\pi}{k}\dfrac{\varpi}{2\pi} = \dfrac{\omega}{k}$ velocità dell'onda.(in genere si usa *c* anziché *v).*

L'onda elettromagnetica è quindi funzione dello spazio e del tempo e, mentre viaggia alla velocità c, le sue componenti di campo elettrico E e magnetico B variano in intensità mantenendosi su piani ortogonali.
Derivando l'espressione dell'onda piana rispetto a *x* e a *t* abbiamo:
$\dfrac{\partial E}{\partial x} = E_0 k \cos(kx - \omega t)$ $\qquad$ $\dfrac{\partial E}{\partial t} = -E_0 \omega \cos(kx - \varpi t)$

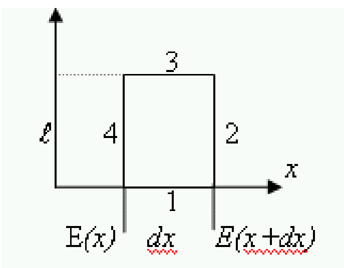
$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -E_0 k^2 \sin(kx - \omega t)$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -E_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t)$

Le due derivate seconde differiscono per il fattore k^2 e ω^2

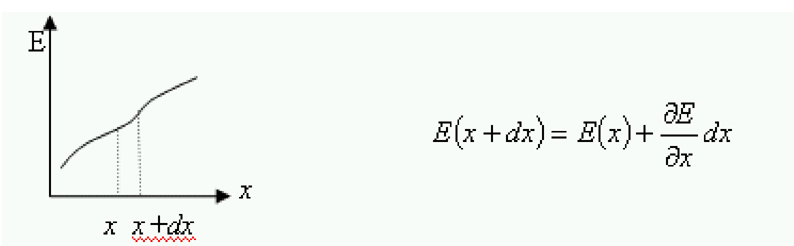
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \sin(kx - \omega t) = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Questa relazione ci permette di capire che E è un'onda, infatti se una grandezza f è della forma:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = +\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Rightarrow f$ è un'onda, dove il coefficiente v è la velocità di propagazione dell'onda.

Dalle equazioni: $\oint \vec{E} * d\vec{s} = -\frac{d\phi_m}{dt}$ e $\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$ si dimostra che il campo magnetico e il campo magnetico rispettano una equazione d'onda.



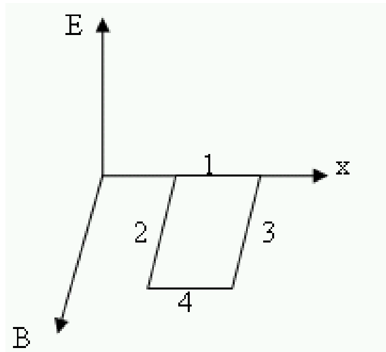
Quando un'onda elettromagnetica raggiunge il rettangolo di figura abbiamo secondo la legge di induzione di faraday dei campi magnetici indotti sui lati del rettangolo.
Eseguendo la circuitazione da *Ex* a *E(x+dx):* $\oint \vec{E} * d\vec{s} = \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 = E(x+dx)\ell - E(x)\ell$
in quanto sui lati 1 e 2 non vi è campo elettrico indotto.
Osservando che:



proseguiamo scrivendo: $\oint \vec{E} * d\vec{s} = \ell \left(E(x) + \frac{\partial E}{\partial x} dx \right)$-*E(x)* $\ell = \ell \frac{\partial E}{\partial x} dx$ quindi: $\ell \frac{\partial E}{\partial x} dx = -\frac{d\phi_m}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} dx\ell = -\frac{\partial B}{\partial t} dx\ell \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Ragionamento analogo si può fare per un rettangolo giacente sul piano dell'onda magnetica per il quale l'onda elettromagnetica induce un campo magnetico:



Applichiamo la legge di Ampère generalizzata:

$$\oint \vec{B} * d\vec{s} =$$

$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 = B(x)\ell - B(x+dx)\ell = \left[B(x) + \frac{\partial B}{\partial x}dx\right]\ell = -\frac{\partial B}{\partial x}dx\ell$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x}dx\ell = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\phi_E}{dt} \Rightarrow -\frac{\partial B}{\partial x}dx\ell = \mu_0\varepsilon_0 - \frac{\partial E}{\partial t}dx\ell \Rightarrow -\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

Abbiamo quindi ricavato le due relazioni:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad\qquad -\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

Derivo rispetto a *x* la prima relazione:

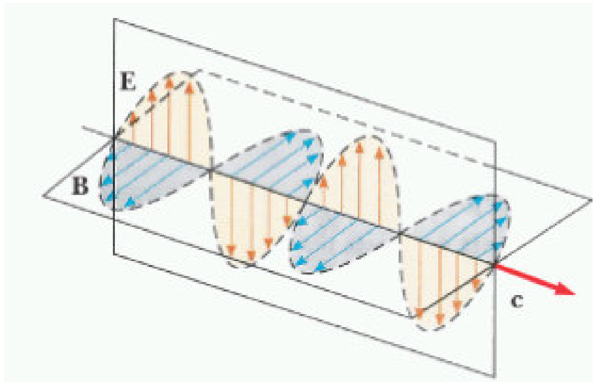
$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial\partial B}{\partial x\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial x} = +\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\partial E}{\partial t\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ questa rappresenta un'equazione d'onda, per il campo elettrico, che si propaga alla velocità $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ (velocità della luce).

Derivo la seconda relazione rispetto a *x*:

$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\partial E}{\partial x\partial t} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$ anche il campo magnetico è un'onda che si propaga alla velocità della luce.

Nel vuoto la velocità della luce è : $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_o}}$

in un mezzo diverso dal vuoto: $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$



In termini di densità di energia $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ e $u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$

Sappiamo che $E_y(x,t) = E_{0y}\sin(kx - \omega t)$, Quanto è B associato?

$$\frac{\partial B}{\partial x} = +\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_{0y} \cos(kx - \omega t)$$

$$B = B_{0z}\sin(kx - \omega t) \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = B_{oz} k \cos(kx - \omega t)$$

$$B_{0z} k \cos(kx - \omega t) = \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_{0y} \cos(kx - \omega t)$$

$kB_{0z} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_{0y} \Rightarrow B_{0z} = E_{0y}\frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{k}$ poiché $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

avremo: $B_{0z} = \frac{E_{0y}}{c}$ con c velocità della luce

quindi l'ampiezza del campo magnetico è parecchio più piccola del campo elettrico,tuttavia l'energia è divisa a metà fra i due: $u_E = u_B$; $u = u_E + u_B$.

Energia associata alle onde elettromagnetiche

$E(x,t) = cB(x,t)$ $\quad u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ densità di energia del campo elettrico

$u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$ densità di energia del campo magnetico

Calcoliamo il valore medio temporale in un periodo come:

$\bar{u}_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_0^2 \sin^2(kx - \omega t)dt = \frac{\varepsilon_0}{4}E_0^2$ in quanto l'integrale di $\sin^2 = \frac{1}{2}$ questo nasce dalla relazione

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$ si calcola il valore medio delle due funzioni che non può essere che $\frac{1}{2}$.

$\overline{u}_m = \frac{B_0^2}{4\mu_0}$ valore medio di u_m in un periodo.

Il valore medio dell'energia dell'onda elettromagnetica è la somma dei due valori $\overline{u}_m$ ed $\overline{u}_E$

$$\overline{u}_E = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 = \frac{\varepsilon_0}{4} c^2 B_0^2 = \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} B_0^2 = \frac{B_0^2}{4\mu_0} = \overline{u}_m$$

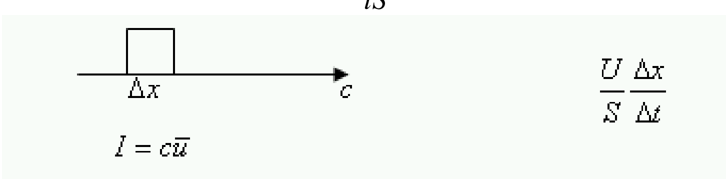
Ne consegue che l'energia media di ciascun campo è uguale e quindi:

$$\overline{u} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

Per rappresentare la quantità di energia elettromagnetica trasportata, nell'unità di tempo, da un'onda che attraversa una superficie di area unitaria ortogonale alla direzione di propagazione si utilizza il vettore di Poynting. Esso è definito dalla relazione:

$$S = \frac{EB}{\mu_0}$$

Definiamo la intensità luminosa come l'energia che passa nell'unità di tempo attraverso una superficie unitaria ossia : $I = \frac{E}{tS}$ con t = tempo e S = superficie



L'intensità di una onda elettromagnetica è uguale al prodotto della densità di energia media per la velocità della luce.

OTTICA

Si è soliti distinguere fra ottica geometrica e ottica ondulatoria.

Prima di Maxwell si faceva riferimento a due modelli di teorici diversi:

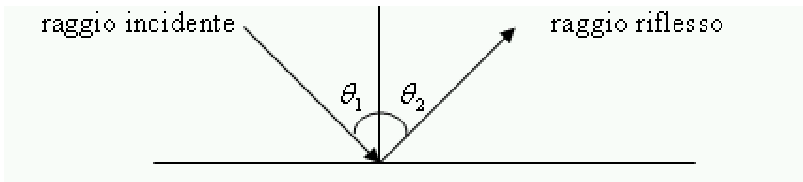
Una prima teoria ,riferita a Newton, ipotizza che la luce ha natura corpuscolare, mentre una seconda teoria afferma la natura elettromagnetica della luce che si propaga in un mezzo inventato al bisogno detto "etere".

Tuttavia in ambedue i modelli si parla di raggio di luce che per la prima teoria è la direzione del moto dei corpuscoli e per la seconda è la direzione di propagazione delle onde di fatto perpendicolare ai fronti d'onda.

Riflessione e rifrazione della luce.

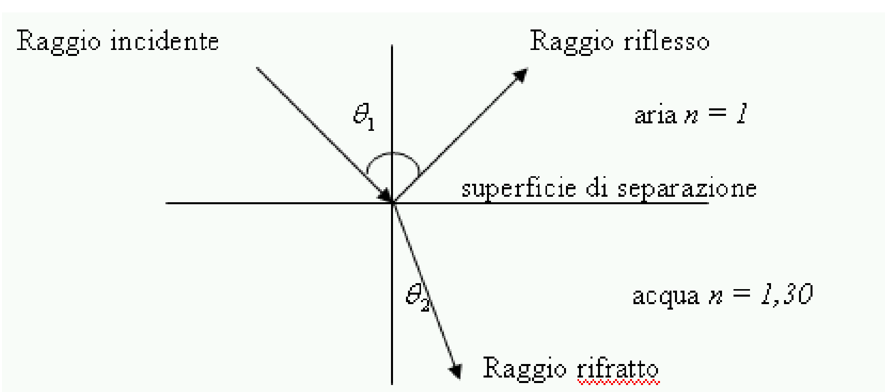
Quando un raggio di luce incontra un ostacolo, in funzione della natura di questo, può “rimbalzare” o “attraversare”o tutti e due.

Quando un raggio colpisce una superficie riflettente con un certo angolo di incidenza θ_1 viene riflesso. Con angolo di incidenza indichiamo l’angolo compreso fra il raggio e la normale alla superficie. L’angolo di riflessione θ_2 è uguale all’angolo di incidenza (prima legge di Snell).



Quando la superficie riflettente non è esattamente piana si ha il fenomeno della riflessione diffusa per la quale i raggi incidenti e riflessi hanno θ diversi..

Quando un **raggio** incide sulla superficie di separazione tra due mezzi, secondo un determinato **angolo di incidenza** θ_1, misurato rispetto alla normale alla superficie, si ha un fenomeno di **riflessione**, per cui parte dell’energia incidente sostanzialmente rimane nello stesso mezzo da cui proviene, ed uno di **rifrazione** (o *trasmissione*), per cui la rimanente parte di energia passa nel secondo mezzo.
L’angolo con cui il raggio incidente viene riflesso (**angolo di riflessione**) è sempre uguale all’angolo di incidenza, mentre invece l’angolo di rifrazione è regolato dalla seconda **legge di Snell**.
Il raggio rifratto ha una inclinazione diversa rispetto al raggio incidente e si avvicina alla normale proporzionalmente ad un parametro chiamato “ indice di rifrazione” $n = 1$ per l’aria e di valore diverso in funzione della natura del secondo mezzo.
Se la luce passa da un mezzo con indice di rifrazione minore ad uno con indice di rifrazione maggiore il raggio rifratto si avvicina alla normale, viceversa se ne allontana.



La seconda legge di Snell lega l’angolo incidente e l’angolo rifratto con gli indici di rifrazione secondo la formula: $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$

$$\sin\theta_1 n_1 = \sin\theta_2 n_2$$

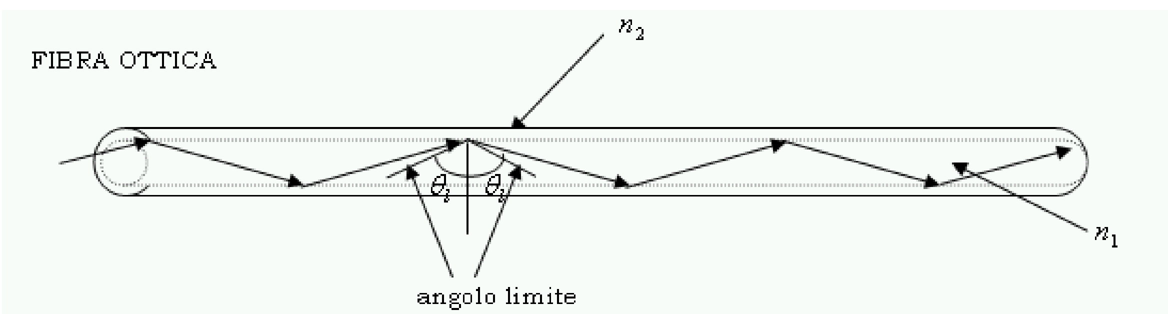
L’indice di rifrazione viene definito come il rapporto fra la velocità della luce c nel vuoto e la velocità v in un mezzo diverso dal vuoto:

$$n = \frac{c}{v}$$

Risulta che sempre $c \geq v$ e quindi $n \geq 1$

Dal momento che $c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T}$.
Quando la luce attraversa un mezzo si ha un cambiamento di velocità che si traduce in una variazione della lunghezza d’onda λ. Il periodo T rimane sempre costante.
Quando si ha $n_1 \rhd n_2$,per un certo angolo incidente chiamato”angolo limite”, l’angolo del raggio rifratto è 90° cioè si ha assenza di rifrazione. L’angolo limite si ricava dalla legge di Snell:
$\sin\theta_l n_1 = \sin\theta_2 n_2$ essendo $\sin\theta_2 = \sin 90^* = 1$ avremo: $\sin\theta_l = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \theta_l = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$
Questo fenomeno viene utilizzato nel funzionamento delle fibre ottiche.

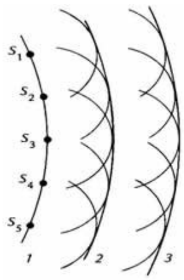
In pratica, quindi, tutta l’energia incidente viene riflessa, ossia rimane confinata nel mezzo di provenienza senza andare all’esterno.



Se ad esempio si hanno indice di rifrazione $n_1 = 1{,}47$ e indice di rifrazione $n_2 = 1{,}46$ si ha:
$\theta_l = \arcsin\frac{n_2}{n_1} = \arcsin\frac{1{,}46}{1{,}47} = 83{,}3°$. Questo è l’angolo massimo di incidenza che garantisce la riflessine totale interna senza rifrazione.

Principio di Huygens

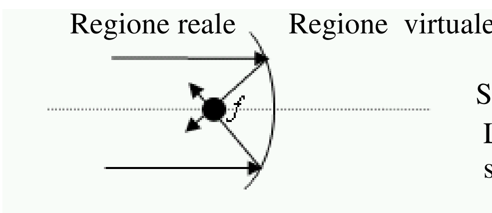
Il modo di propagarsi della luce è spiegato da Huygens sulla base dell'ipotesi che ogni particella del corpo luminoso debba essere considerata come un centro di onde sferiche in particolare «ciascuna particella della materia in cui un'onda viaggia comunica il suo moto non solo alla particella vicina che è allineata con la sorgente luminosa, ma necessariamente anche alle altre con le quali è a contatto e che si oppongono al suo movimento. Cosicché intorno a ciascuna particella si origina un'onda di cui essa è il centro. Le onde secondarie sono efficaci solo quando concorrono a formare simultaneamente il fronte d'onda che è costituito perciò dall'inviluppo di tutti questi contributi elementari; con questa ipotesi additiva Huygens spiega la propagazione rettilinea della luce.



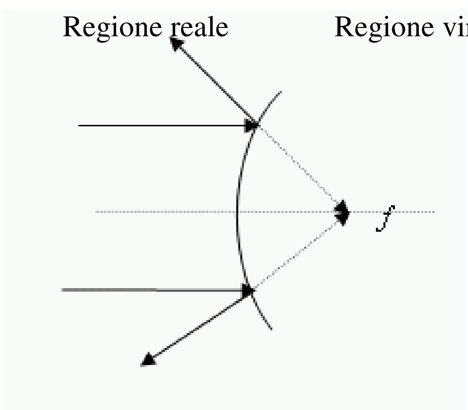
Sulla base del proprio principio Huygens dimostrerà le leggi della rifrazione e le leggi della riflessione, ivi includendo la riflessione totale.

Appunti del giorno 13-12-05 mancanti

I fronti d'onda possono essere modificati da divergenti a convergenti se le superfici rifrangenti, o gli specchi, sono incurvati. L'immagine reale si forma dalla stessa parte dell'oggetto e può essere proiettata su uno schermo, una immagine virtuale si forma dalla parte opposta allo specchio e può essere "raccolta" dall'occhio.



Specchio concavo: f si indica con un numero positivo
L'immagine reale è formata dai raggi riflessi,davanti lo specchio



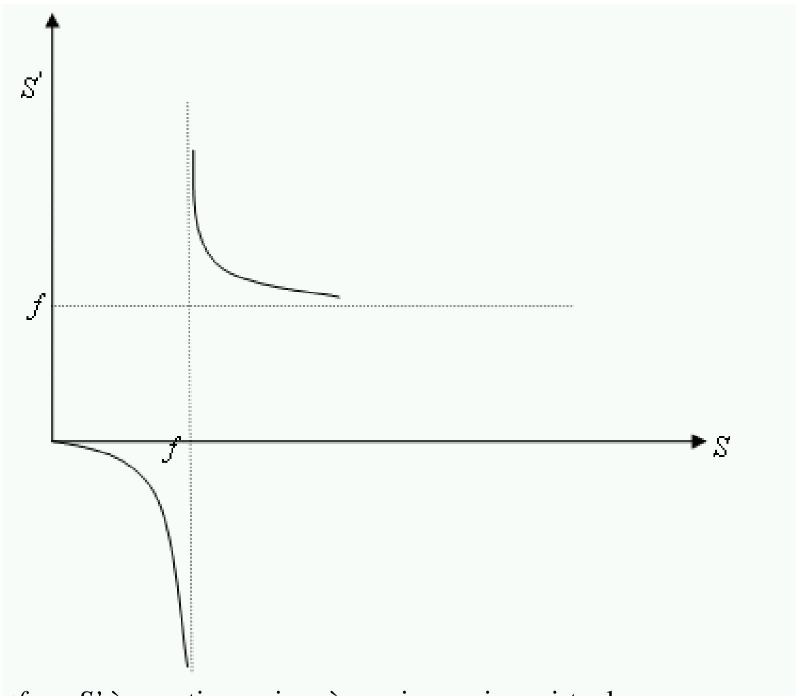
Specchio convesso: f si indica con un numero negativo. L'immagine virtuale è formata dal prolungamento dei raggi riflessi,dietro lo specchio.

Equazione degli specchi:

$\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}=\frac{1}{f}$ con S si indica la distanza oggetto – specchio, con S' si indica la distanza immagine- specchio.

Indicando con R il raggio di curvatura dello specchio si ha: $f=\frac{1}{2}R$ dove con f indichiamo la distanza focale che definisce la posizione dell'immagine.

$S'=f(S)$ $\qquad \frac{1}{S'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{S}=\frac{S-f}{Sf}\Rightarrow S'=\frac{fS}{S-f}$



$$f = \frac{R}{2}$$

Per $S<f$ S' è negativo e si avrà una immagine virtuale

Per $S>f$ S' è positivo e si avrà una immagine reale

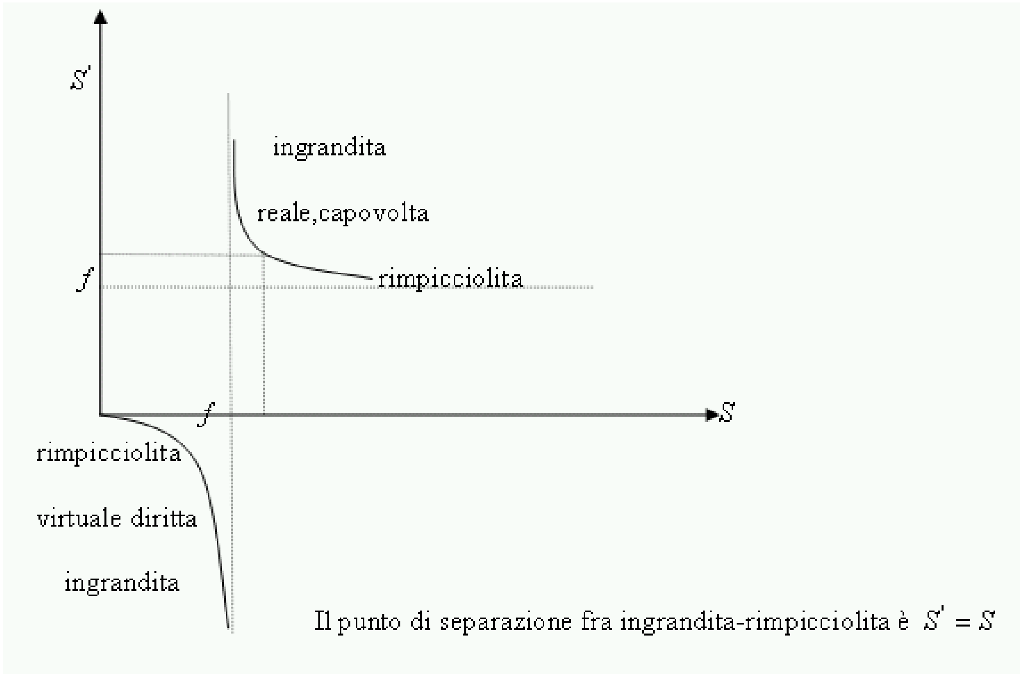
Chiamiamo ingrandimento trasversale:

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{S'}{S}$$

h' → altezza immagine o dimensione trasversale immagine

h → altezza oggetto o dimensione trasversale oggetto

Se M>0 l'ìmmagine è diritta
Se M<0 l'immagine è capovolta

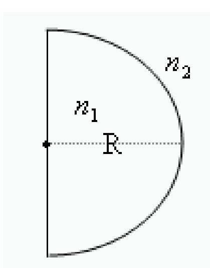


Si possono formare immagini per rifrazione da superfici trasparenti.
Nel nostro esempio un raggio di luce viene emesso da una sorgente puntiforme attraverso un mezzo con indice di rifrazione n_1 e viene rifratto in un mezzo con indice di rifrazione n_2.
La legge di rifrazione, valida sia per superfici curve, sia concave che convesse, è la seguente:

$$\frac{n_1}{S_1}+\frac{n_2}{S_2}=\frac{n_2-n_1}{f}$$

dove S_1 distanza dell'oggetto dalla superficie e S_2 distanza dell'immagine dalla superficie, *f* raggio di curvatura.
Vale la seguente convenzione : se il raggio di curvatura è dalla parte opposta dell'oggetto allora *f>0*
se il raggio di curvatura è dalla stessa parte dell'oggetto allora *f<0*

Esempio:



sia $n_1=1{,}5$ e $n_2=1$

$$\frac{1{,}5}{R}+\frac{1}{S_2}=+\frac{0{,}5}{\frac{R}{2}}$$

$$\frac{1}{S_2}=\frac{0{,}5}{\frac{R}{2}}-\frac{1{,}5}{R}=\frac{1-1{,}5}{R}$$

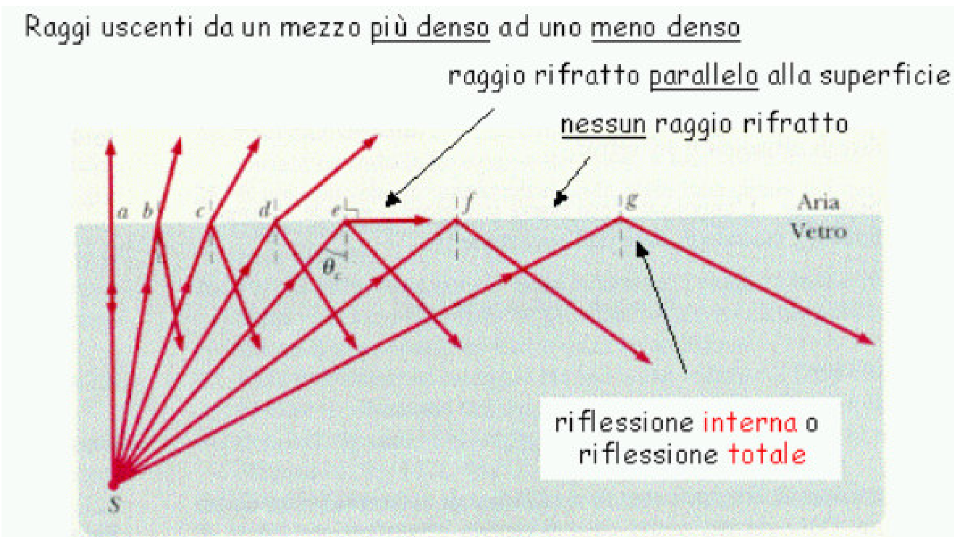
$$S_2=-\frac{R}{\frac{1}{2}}=-2R$$ L'immagine è dallo stesso lato dell'oggetto,

si tratta di una immagine virtuale. (Se l'immagine era dalla parte opposta dell'oggetto, rispetto alla superficie rifrangente, era una immagine reale).

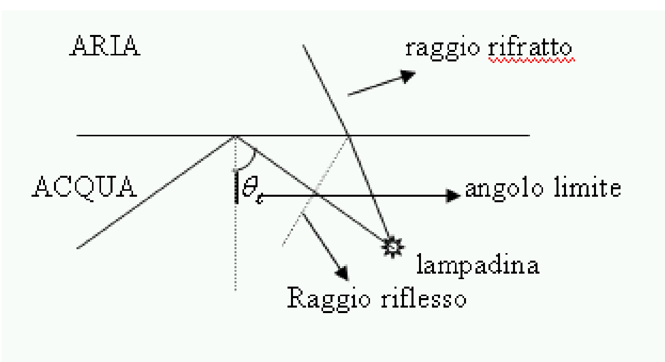
Consideriamo $M = \frac{h^{'}}{h} = \frac{S_2 n_1}{S_1 n_2} = \frac{-2R1{,}5}{R1} \Rightarrow h^{'} = -3h$

Riflessione totale

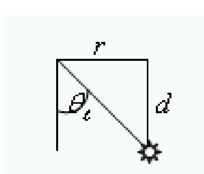
Si ha riflessione totale quando il raggio, nel passare da un mezzo con indice di rifrazione maggiore ad un altro con indice di rifrazione minore, non attraversa la superficie di separazione fra i due mezzi ma viene riflesso totalmente all'interno. Questo avviene quando l'angolo di incidenza è superiore dell'angolo critico chiamato anche angolo limite.



Facciamo un esempio nel quale i due mezzi siano aria e acqua e nell'acqua sia immersa una lampadina:



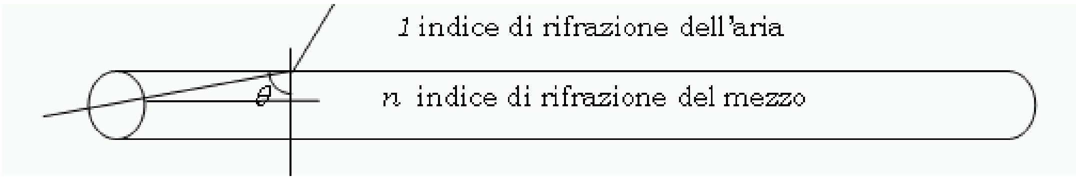
Quanto è il raggio r per il quale vedrò un cerchio luminoso nella parte superiore:



$$\sin\theta_\ell = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}7$$

$$r = d\,tg\,\theta_\ell$$

Problema con fibra ottica



Ricordiamo che a causa dei differenti indici di rifrazione, il raggio rifratto si propaga nell'aria ($n_2 = 1$)con una direzione diversa del raggio incidente del primo mezzo (n_1). La deviazione del raggio rifratto rispetto al raggio incidente viene determinata dalla legge di Snell.

Abbiamo $\alpha_2 < \alpha_1$ $\quad$ $\sin\theta = \frac{1}{n}$ $\quad$ con $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \theta$

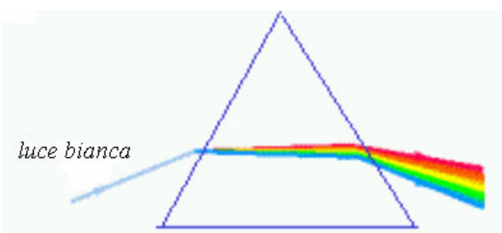
Per la legge della rifrazione $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = n \Rightarrow \sin\alpha_1 = n\cos\theta$

legge di rifrazione

$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

Questa legge è valida con riferimento a un preciso valore di frequenza, infatti i valori di n_1 e n_2 sono funzione della frequenza dell'onda e del mezzo.

L'indice di rifrazione di un materiale cambia con la lunghezza d'onda



Questa separazione delle componenti viene chiamata dispersione

Ottica ondulatoria

L’ottica geometrica si occupa dei casi nei quali la luce, viaggiando in linea retta, incontra ostacoli di dimensioni più grandi della sua lunghezza d’onda.
L’ottica ondulatoria spiega i casi nei quali la luce passa attraverso fenditure sottili o incontra barriere molto strette.
In pratica la luce si comporta come un’onda e non come un flusso di particelle.
I fenomeni che spiegano la natura ondulatoria della luce sono:
Interferenza, Diffrazione, Polarizzazione.

Si ha interferenza quando in un punto dello spazio si incontrano due raggi luminosi purché prodotti da luce coerente ossia con identica fase in ogni punto dello spazio.
La luce solare è caratterizzata dalla seguente forma d’onda:

$$E_1 = E_{01} \sin(kx - \omega t + \varphi_1)$$

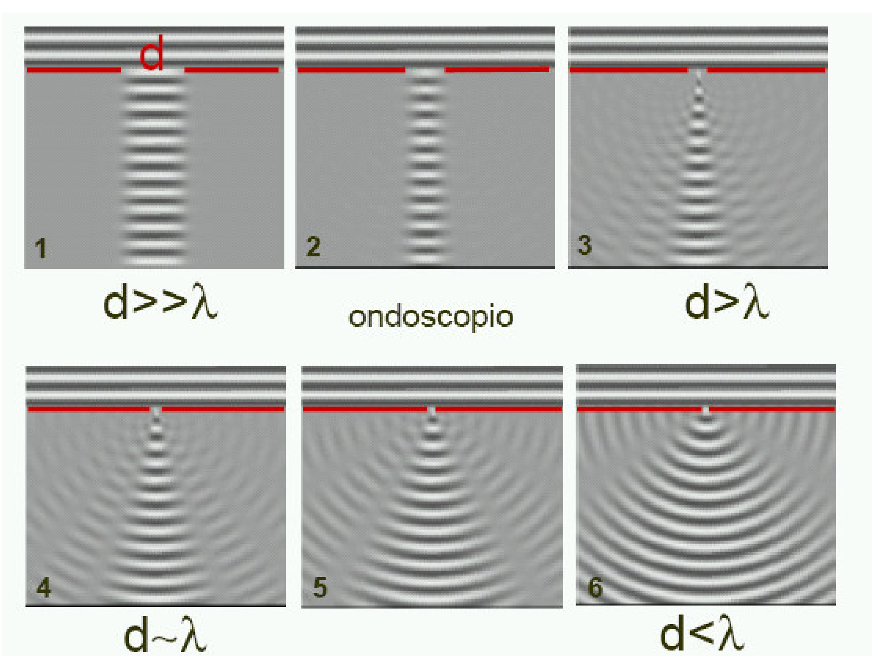
$$E_2 = E_{02} \sin(kx - \omega t + \varphi_2)$$

La diversità di fase è tipica della luce solare che non è sempre sinusoidale ma spesso si hanno degli spostamenti di fase che ne modificano la forma. Si parla allora di treni d’onda e si afferma che la luce solare non è coerente ossia non ha fase costante
Se si sommano i contributi di due raggi solari:

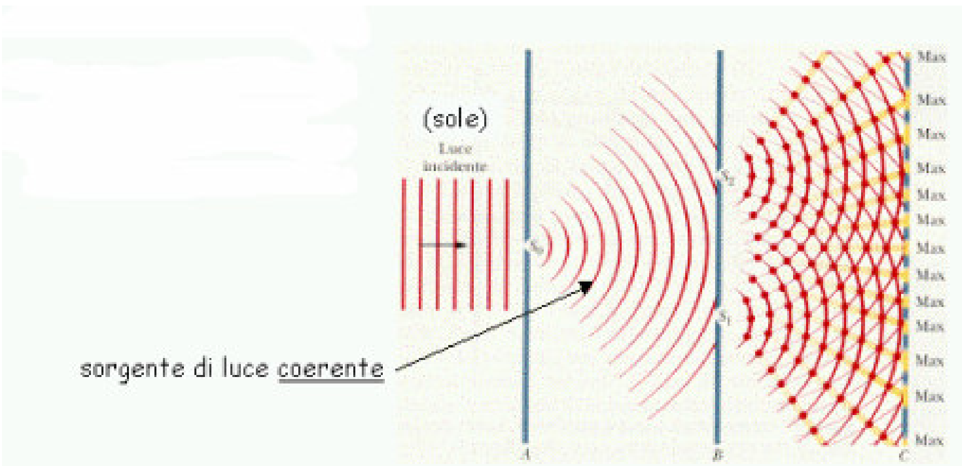
$$E_{0t} = (\qquad \cos\left[\underbrace{\varphi_2 - \varphi_1}\right]) \sin \omega t$$

se si integra nel tempo questo termine è zero, la conclusione a cui si perviene è che a causa dei cambiamenti di fase(non coerenza), propri della luce solare, con luce naturale non si ha interferenza.

Il Fisico Young riuscì a spiegare la natura ondulatoria della luce, e quindi l’interferenza utilizzando luce naturale, con una apparecchiatura di sua invenzione con la quale sfrutta il principio di diffrazione:



In pratica riuscì a rendere coerente la luce solare facendole attraversare un buco molto piccolo. L'onda prodotta, con fase costante nei diversi punti dello spazio(teorema di Huygens), viene inviata a due successive fessure di dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda λ. Le due onde prodotte avranno punti dello spazio in cui sono in fase e punti nei quali non lo sono. Il risultato su uno schermo finale è la presenza di zone più(interferenza costruttiva) o meno (interferenza distruttiva) luminose.



Analizziamo il caso di due onde isofrequenziali, è il caso di sorgenti monocromatiche, di uguale ampiezza. Queste due onde differiscono per la fase e abbiamo:

$$y_1 = y_0 \sin(kx - \omega t - \varphi)$$
$$y_2 = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

Quando questi due segnali giungono in uno stesso punto dello spazio si sovrappongono:

$$y_t = y_1 + y_2 = y_0[\sin(kx - \omega t - \varphi) + \sin(kx - \omega t)]$$

essendo: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ otteniamo:

$$y_t = y_0\left[2\sin\left(kx - \omega t - \frac{y}{2}\right)\cos\frac{y}{2}\right] = \underbrace{2y_0\cos\frac{y}{2}}_{\text{ampiezza dell'onda totale}}\sin\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$$

In definitiva l'ampiezza dipende dalla differenza di fase fra le due onde.

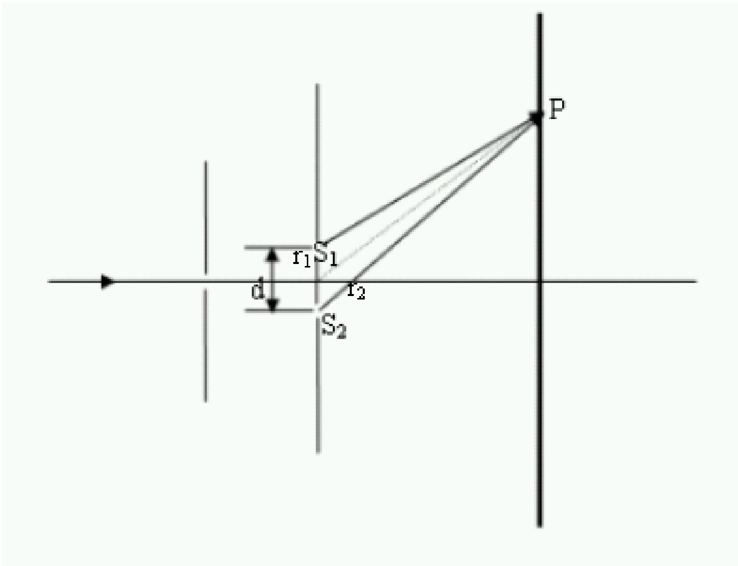
Se $\varphi = 0$ $\quad y_{max} = 2y_0$

Se $\varphi = 2\pi$ $\quad y_{max} = 2y_0$

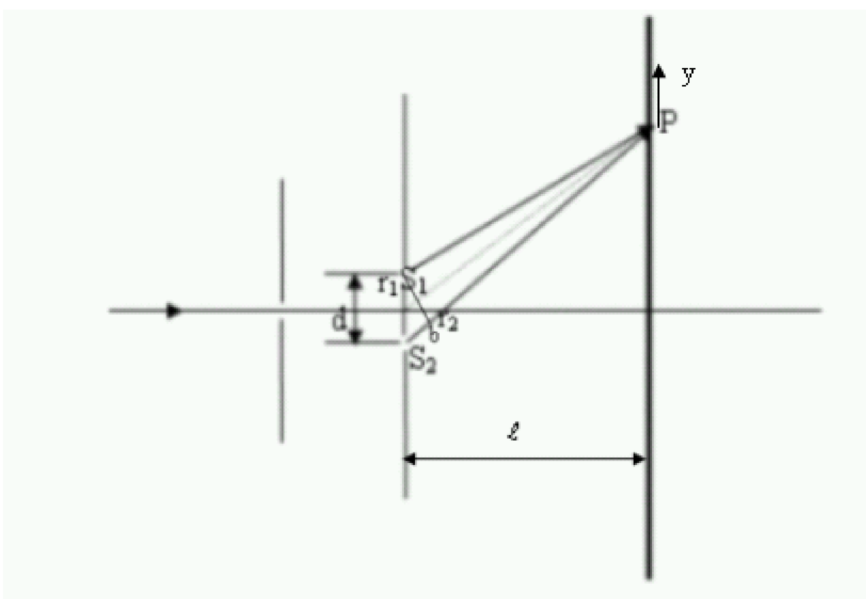
Se $\varphi = \pi$ $\quad y_m = 0$

Nella figura precedente relativa all'apparecchiatura di Young riconosciamo zone in cui i raggi luminosi percorrono cammini ottici identici e quindi sono in fase ,osserviamo frange più luminose e parliamo di interferenza costruttiva.

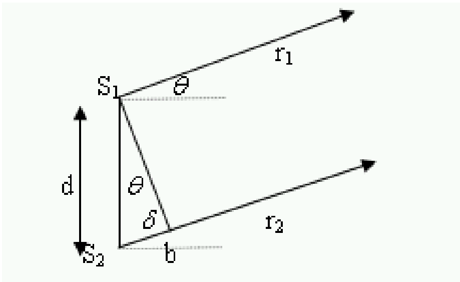
Nel caso in cui i cammini ottici sono diversi abbiamo zone più scure e parliamo di interferenza distruttiva.



Nella figura i raggi uscenti da S_1 e S_2 hanno stessa fase ma i cammini ottici, rappresentati da r_1 e r_2 sono diversi e differiscono della quantità δ .
Sappiamo che se due onde isofrequenziali percorrono distanze differenti si può avere una differenza di fase. In particolare se δ è nullo o è un numero intero m di lunghezza d'onda : $\delta = m\lambda$ le due onde arrivano in fase, si dice che si ha interferenza costruttiva e zone più luminose.
Se $\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, le onde arrivano con fase differente e si ha interferenza distruttiva con frange scure.



Individuiamo su r_2 un punto b tale che δ sia la distanza fra S_2 e b. Proviamo a pensare , con molta approssimazione, che r_1 e r_2 siano paralleli.



Avremo $\delta = d \sin\theta$. Per θ molto piccolo $\sin\theta = tg\theta = \frac{y}{\ell}$

$$d\sin\theta = m\lambda - d\frac{y}{\ell}$$

$y_{\max} = \frac{m\lambda\ell}{d}$ questi sono i punti dello schermo con massimi di intensità.

$y_{\min} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda\frac{\ell}{d}$ questi sono i punti dello schermo con minimi di intensità

Ricordando che l'intensità luminosa è data dal valore medio dell'energia che passa attraverso una sezione unitaria nell'unità di tempo:

$$U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad U_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad B = \frac{E}{C} \qquad U_T = \varepsilon_0 E^2$$

$$I\alpha\overline{U}_T = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (2E_0)^2\cos^2\frac{\varphi}{2} = 2\varepsilon_0 E_0^2\cos^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow\Rightarrow I\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

Cammino ottico e differenza di fase

$$\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$\lambda \Rightarrow \varphi = 0/2\pi$$

differenza cammino ottico

$$\frac{\delta}{\varphi} = \frac{\lambda}{2\pi} \qquad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

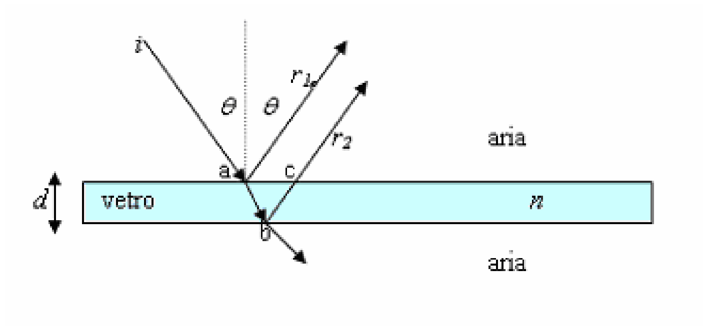
$$I\alpha\cos^2\left(\frac{2\pi\delta}{2\lambda}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}m\lambda\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda\right)$$

punto di massimo punto di minimo

$$y_{max} - y_{\min} = \frac{\lambda \ell}{d} \cong 10^{-3} = 10^{-7} \frac{10^4}{1}$$

Fenomeno delle lamine sottili

Ipotizziamo di disporre di una lamina sottile di vetro con spessore *d* e indice di rifrazione *n* illuminata da un raggio luminoso di lunghezza d'onda λ



Il raggio incidente viene riflesso come r_1 e rifratto da *a* a *b*,giunto a *b* il raggio subisce una seconda rifrazione ed esce dal vetro e contemporaneamente viene riflesso come r_2.
Un osservatore che vede r_1 ed r_2 vedrà la zona da *a* a *c* illuminata se r_1 e r_2 sono in fase, buia se sono in opposizione di fase e mediamente illuminata per valori di sfasamento intermedi.
Valgono le relazioni:
$2d = m\lambda$ minimo di interferenza
$2d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ massimo di interferenza

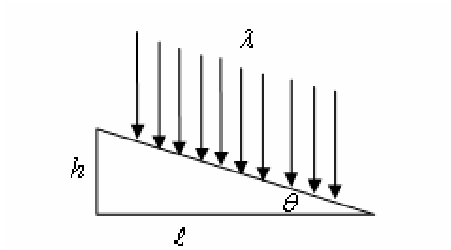
per λ in un mezzo diverso dal vuoto $\Rightarrow \lambda_m = \frac{\lambda_0}{m} \Rightarrow 2nd = m\lambda_0$ minimo

$2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$ massimo

Se la lamina non è sottile ma spessa allora la luce verrebbe quasi del tutto assorbita e il raggio rifratto non verrebbe riflesso come r_2.

Distanza fra due frange scure

In figura abbiamo un cuneo sottile,trasparente illuminato :



Osservando dall'alto si vedranno frange più scure e frange più chiare.

Qual'è la distanza fra due frange scure?

$$2d = m\lambda \qquad d = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\lambda}{\ell} = \frac{d}{x} \qquad \frac{\ell d}{h} = x$$

Bisogna sempre tenere conto che λ dato $\lambda_0 \Rightarrow 2nd = m\lambda_0$.

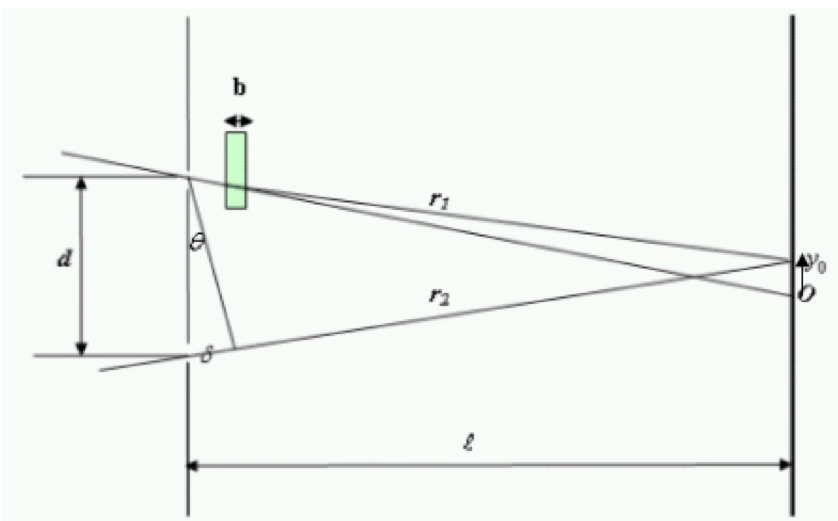
Inoltre se il cuneo è poggiato su un mezzo con un indice di rifrazione maggiore di quello del cuneo il raggio riflesso viene sfasato di 180° $\Rightarrow 2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ minimo.

$2nd = m\lambda$ massimo

Problema

In figura abbiamo l'apparecchiature di Young che produrrà sullo schermo frange chiare e frange scure. Davanti ad una apertura viene posta una lastra con indice di rifrazione n.

Ovviamente si avrà una deviazione del raggio luminoso che farà cadere il raggio rifratto in una posizione diversa rispetto al punto di massimo **O** precedente alla introduzione della lastra



$$\delta = r_1 - r_2 = d\sin\theta \cong d\,tg\,\theta = \frac{dy_0}{\ell}$$

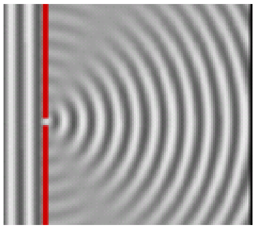
lo sfasamento in δ è lo stesso di quello subito dal 1° raggio nella lastra

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \theta = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \qquad \theta = \frac{2\pi nb}{\lambda} - \frac{2\rho b}{\lambda} = \frac{2\pi b}{\lambda}(n-1)$$

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi b}{\lambda}(n-1) \Rightarrow \delta = b(n-1)$$

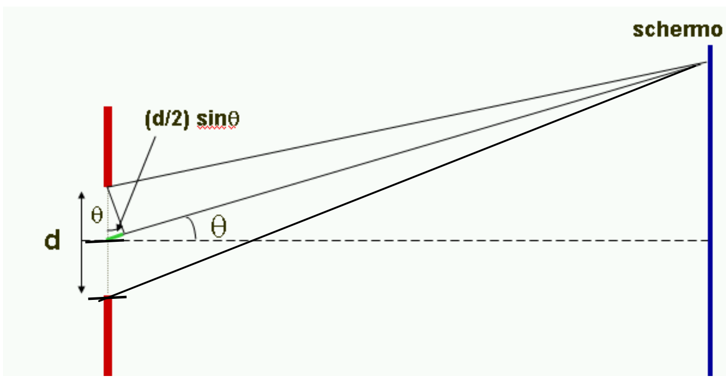
$$\Rightarrow y_0 = \frac{b(n-1)\ell}{d}$$

Diffrazione

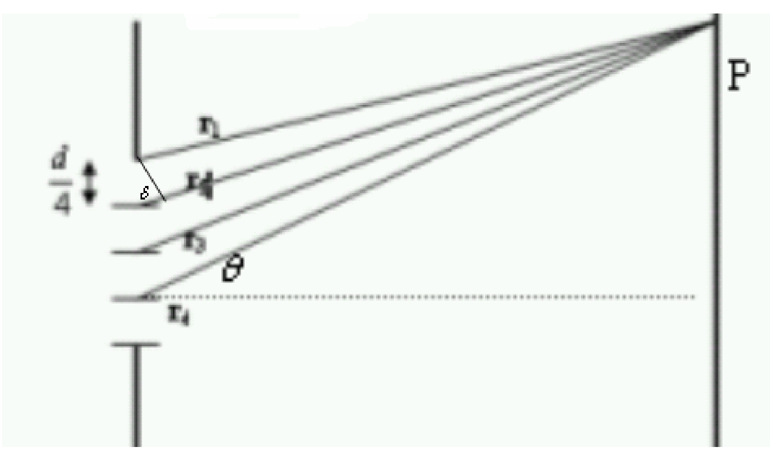


La diffrazione è un fenomeno che avviene tutte le volte che in qualche modo si limita o si ostacola un fronte d'onda e le dimensioni dell'ostacolo o dell'apertura su uno schermo opaco sono confrontabili con la lunghezza d'onda della radiazione luminosa.
La diffrazione è un fenomeno tipico dell'ottica ondulatoria.

Nella figura che segue i raggi provengono dai punti superiori di due elementi di larghezza $\frac{d}{2}$



La differenza del cammino ottico $\delta = \frac{d}{2}\sin\theta$.
L'intensità avrà una frangia scura,ossia un minimo,se la differenza di cammino e' pari a mezza lunghezza d'onda: $\delta = \frac{m}{2}\lambda$ cioè $\sin\theta = \frac{m}{d}\lambda$.



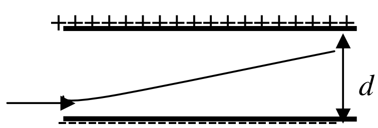
In quest'ultima figura si ha un minimo per

$$\frac{d}{4}\sin\theta = \frac{m}{2}\lambda$$

$$\sin\theta = 2m\frac{\lambda}{d}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = nm\frac{\lambda}{d}$$

Errata Corrige
Pag.34 Novembre
Esercizio
Un elettrone viene lanciato a velocità v all'interno di un condensatore carico. Si vuole sapere dopo quanto tempo toccherà la armatura positiva:



In presenza di una densità di carica σ abbiamo $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

L'elettrone entra nel campo interno al condensatore ed è sottoposto alla forza del campo E, ma la forza F su una carica q in presenza di un campo elettrico E è: $\vec{F} = q_e E$. Questa forza imprime all'elettrone una accelerazione verso l'armatura positiva, il suo moto è di tipo parabolico.

La distanza d è in senso verticale