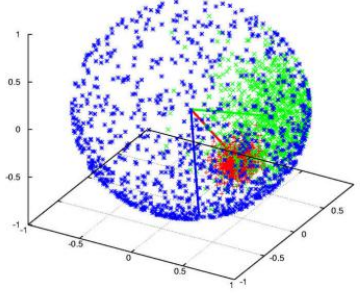


## 第 3 题作业报告

PB18000341 范玥瑶

### A. 作业题目

在球坐标系  $(\rho, \theta, \varphi)$  下产生球面上均匀分布的随机坐标点，给出其直接抽样方法。



### B. 算法及主要公式

#### B.1. 直接抽样

在球坐标系  $(\rho, \theta, \varphi)$  下球面上均匀分布的随机坐标点满足

$$\rho = \text{Const}, g(\theta, \varphi) = \text{Const}, 1 = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi p(\theta, \varphi) = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi g(\theta, \varphi).$$

解得

$$p(\theta, \varphi) = \frac{\sin\theta}{4\pi}$$

直接抽样

$$\xi(\theta, \varphi) = \int_0^\theta dp \int_0^\varphi dq \frac{\sin p}{4\pi} = \frac{1 - \cos\theta}{2} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

等号右边 2 项范围都是  $(0, 1)$ ，对于随机数对  $(x, y)$ ， $x, y \in (0, 1)$ ，令  $x = \frac{1 - \cos\theta}{2}$ ， $y = \frac{\varphi}{2\pi}$ ，

反解得  $\theta = \arccos(1 - 2x)$ ， $\varphi = 2\pi y$ 。

#### B.2. 程序算法

主函数中输入种子值和数据量，调用自定义函数 RandomNumber，以 Schrage 方法生成  $(0, 1)$  上的随机数，分别取相邻的一对随机数为随机数对  $(x, y)$ ，代入 B.1 所反解得  $\theta = \arccos(1 - 2x)$ ， $\varphi = 2\pi y$ ，取  $\rho=1$ ，将单位球面上均匀分布随机点的球坐标  $(\rho, \theta, \varphi)$  写入文件 "Spherical.txt"。

#### B.3. 作图

作图将生成的  $(\rho, \theta, \varphi)$  代入坐标变换

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = \rho \cos\theta$$

用 Origin 作图即可。

### C. 计算结果及具体分析、讨论

取  $\text{seed}=1, N=1E4$ , 将输出球坐标经坐标变换, 作散点图如图 1. 直观上分布均匀。

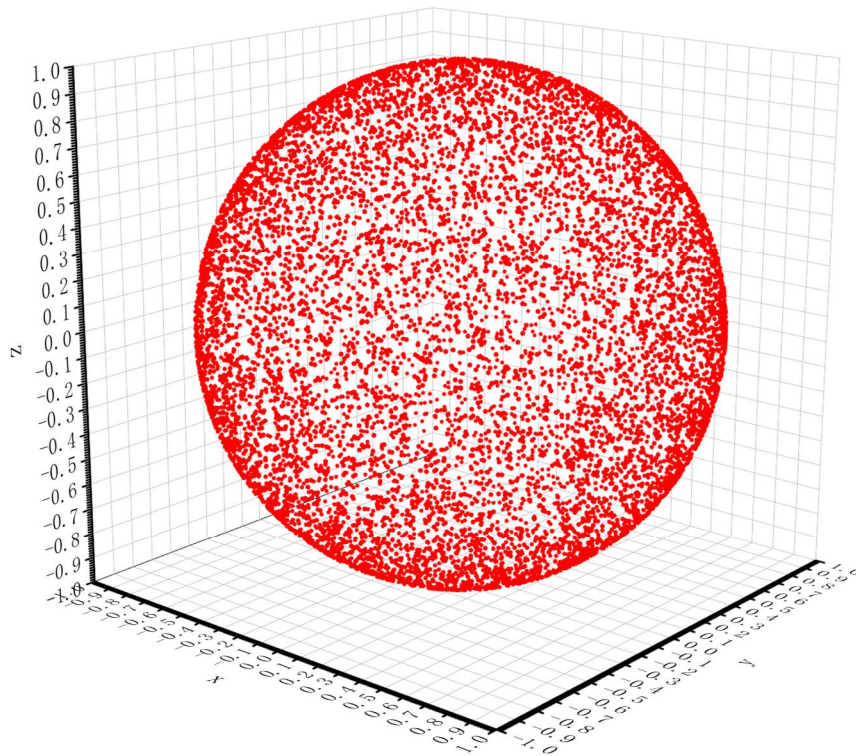


图1 球面上均匀分布的随机点

### D. 总结

本次作业求出了在球坐标系  $(\rho, \theta, \varphi)$  下产生球面上均匀分布的随机坐标点的直接抽样, 编写程序实现了通过 Schrage 方法生成  $N$  个  $(0, 1)$  上的随机数对后转换为单位球面上的随机点这一功能。此后取  $\text{seed}=1, N=10000$ , 进行测试, 作了随机点的散点图, 从直观上判断了其均匀性。