

# 第 17 题作业报告

PB18000341 范玥瑶

## A. 作业题目

以  $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$  为迭代方程进行迭代:

- (1) 画出系统状态随参数  $\lambda$  的变化图, 要求在图中体现出定值状态、倍周期分叉和混沌状态;
- (2) 列出各个倍周期分叉处  $\lambda$  的值, 求相应的 Feigenbaum 常数。

## B. 算法及主要公式

### B.1. 基本要求 (系统状态随 $\lambda$ 变化图, 倍周期分叉点和 Feigenbaum 常数 $\delta$ )

算法: 在程序开始时, 通过主函数输入种子值 seed (用于产生初值  $x_0$ ), 周期长度上限  $N$  (被认为不是混沌的最大周期数),  $\lambda$  的最大值、最小值。取步长  $\text{step}=1\text{E}(-6)$ , 得到不同  $\lambda$ , 通过循环语句调用子函数 chaos 进行不同  $\lambda$  的迭代计算, 将全部  $\lambda$  和与之对应的  $x$  输入到 "data\_lambda.txt", 将倍周期分叉处的  $\lambda$  和对应周期数输入到 "data\_delta.txt"。

chaos 的算法为: 因为迭代方程  $f(x) = \lambda \sin(\pi x)$  的周期是 2, 步长  $\text{step}=1\text{E}(-6)$ , 则利用输入的种子值取对  $m=2\text{E}6$  的余数, 除以  $m$  生成  $(0,2)$  上的随机数  $x_0$ 。经过  $n$  次迭代进行热化, 热化之后将  $N$  次连续的迭代结果保存在数组 sample[N] 中, 调用子函数 check, 通过 sample[N] 判断系统状态和周期数 (定义定值状态周期数 1, 混沌周期数至少是  $N$ ), 同时将  $\lambda$  和  $N$  个迭代结果中所有不同的结果输入到 "data\_lambda.txt"; 此外如果是倍周期分叉处 (周期数是小于  $N$  的最大的 2 的整数次幂), 则将周期数和  $\lambda$  值输入到 "data\_delta.txt" 中。

check 的算法如下: 将周期数  $T$  预置为 1。对 sample[N] 中  $N$  个元素从小到大进行排序, 取排列后的 sample[0] 为对照 sp, 将 sp 和 sample[1] 到 sample[N-1] 进行对比, 由于输出 double 的时候精确到 0.000001, 如果某一个数组元素和 sp 的差小于  $1\text{E}(-6)$  则认为两者相等, 当 sample[a] 和 sp 不同时  $T$  加一, 输出 sample[a], 将 sp 替换为 sample[a] 和余下数组元素对比, 直到遍历整个数组 sample。如果  $T=1$  则是定值状态, 如果  $1<T<N$  则认为是倍周期分叉或者周期窗口, 如果  $T=N$  则是混沌 (在周期数上限被设置为  $N$  的情况下)。倍周期分叉点的判断以全局变量  $R$  表示,  $R$  被预置为 0, 当  $T=1$  时输出第一个定态点  $\lambda$ , 将  $R$  置为 1; 当  $T=2R$  时认为在  $\text{step}=1\text{E}(-6)$  精度下此  $\lambda$  是倍周期分叉状态, 将对应的分叉值  $\lambda$  输入到 "data\_delta.txt" 中, 更新  $R=2R$ 。当出现混沌则将对应的  $\lambda$  输出到屏幕上。

排序使用冒泡排序法。

余下三个程序均在本程序的基础上进行改编而成。

### B.2. 输出周期数小于 $N$ 的所有周期状态

改动 check 的算法如下: 预置周期数  $T=1$ , 对 sample 里的  $N$  个元素进行从小到大的排序后利用 sp 求出周期数  $T$ , 当  $1<T<N$  时输出周期数  $T$  和对应的  $\lambda$  值到 "dataT.txt" 中。

### B.3. 求 Feigenbaum 常数 $\alpha$

解方程  $0.5 = \lambda \sin(0.5\pi)$  得  $x=0.5$  和状态图中定值状态的曲线交于  $\lambda=0.5$ 。

将全局变量  $R$  用  $r$  代替,  $r$  相当于 B.1 程序中的  $\log_2 R$ , 被预置 0; 作用是节省算力。

设置全局数组 array[N] 用于存储周期包含 0.5 的  $\lambda$  对应的  $x$  值。将 check 函数改成 int 型返回值, 先将 sp 输入 array[0], 当 sample[a] 和 sp 差距大于 epsom 时, 先将 sample[a] 赋给 array[T], 更新 sp, 此后  $T$  加一 (array[T] 从 array[1] 开始赋值, 在  $T$  加一之前先给 array 赋值可以节省赋值时计算角标的算力)。完成后返回  $T$ , array 的前  $T$  个元素 array[0] 到 array[T-1] 都是有意义的。在 chaos 中检查  $T$  的大小, 如果  $T=2^{(r+1)}$  且  $T<N$  则说明处于倍周期状

态，调用子函数 seek 二分法检测 0.5 是否在 array 的前 T 个元素中（标准是存在 h 使得  $\text{fabs}(\text{array}[h]-0.5)<\text{epsom}$ ），如果在则此  $\lambda$  的周期包含 0.5，返回元素位置 h。因为 array 是顺序排列的所以对于  $\text{fabs}(\text{array}[h]-0.5)<\text{epsom}$ ，当 h 是奇数，取  $d_r=\text{array}[h]-\text{array}[h-1]$ ，当 h 是偶数，取  $d_r=\text{array}[h+1]-\text{array}[h]$ ，输出 T, r,  $d_r$ ；同时 r 加一，直到周期数倍增才会启动上述判断。

当  $r=\lceil \log_2(N-1) \rceil$  时，任意  $T < N$  满足  $T \leq N-1 = 2^{\lceil \log_2(N-1) \rceil} < 2^{\lceil \log_2(N-1) \rceil + 1} = 2^{(1+r)}$ ，达到判别的周期数上限，在主函数中直接停止计算。其中“ $\lceil \cdot \rceil$ ”是高斯函数，表示取整数部分，用 floor 函数实现。

#### B.4. 判断热化是否充分

判断热化充分性的办法是通过用不同的热化步数求特定的倍周期分叉点，如果结果稳定则认为热化充分；不充分的热化会使得分叉点被认为是混沌。算法如下：

在主函数中预置热化步数  $n[4]=\{100, 1000, 10000, 100000\}$ ，每次循环计算  $\text{chaos}(\text{lambda}, n[j]) (j=0,1,2,3)$ ，check 函数中仅保留分叉点输出即可。计算一个 n 之后要将  $\lambda$  和 R 还原，从而保证后续程序正常运行。在热化步骤不会使得倍周期分叉点发生交错（即步数增大时分叉数比较小的  $\lambda$  比步数少而分叉数大的  $\lambda$  更大）的前提下，此程序会输出比较容易处理的数据文件。

### C. 计算结果及具体分析、讨论

#### C.1. 系统状态随 $\lambda$ 变化图，倍周期分叉点和 Feigenbaum 常数 $\delta$

根据  $\text{step}=1\text{E}-4$  的预实验选取  $\text{min}=0.68, \text{max}=0.75, N=257$  进行计算，取  $\text{seed}=1$ ，热化步数 100。

将“data\_lambda.txt”导入 Origin 作图得到图 1，图上在 0.71 之前有类似定值状态（目测差距来源于点的分辨率，实际上倍周期分叉点精确值大约在 0.69），在 0.72 附近可以观测到小范围波动的混沌和倍周期分叉，在 0.74 处体系有明显的混沌状态。混沌开始位置的精确值是 0.714931。从图上可以看出即使混沌状态，迭代结果也可能相对集中地分布在比较窄的分岔状区域内，直观上对状态进行甄别需要放大局部图像或增大判断两个迭代结果相等的误差  $\text{epsom}$ 。

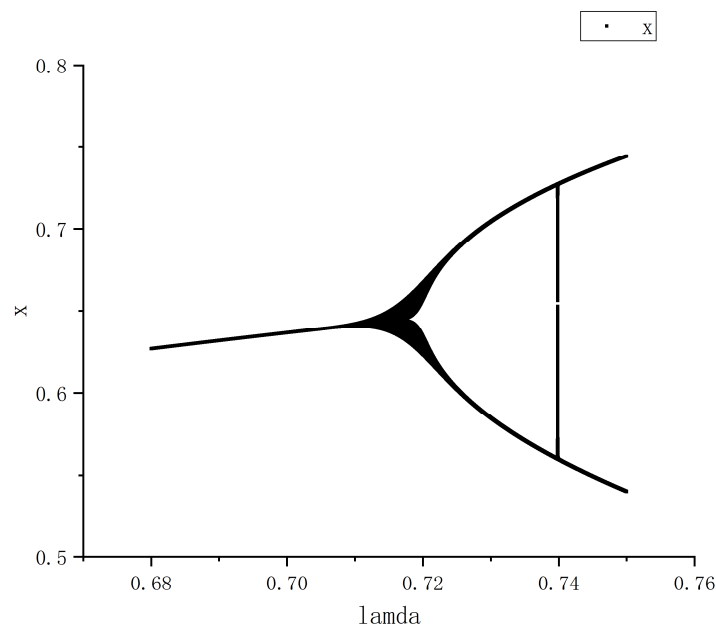


图1 系统状态随参数  $\lambda$  的变化图

将 step 改成 0.001，取 min=0，max=5 进行范围更大的 $\lambda$ 的计算，作系统状态随参数 $\lambda$ 的变化图如图 2，定值状态、倍周期分叉和混沌状态更明显。

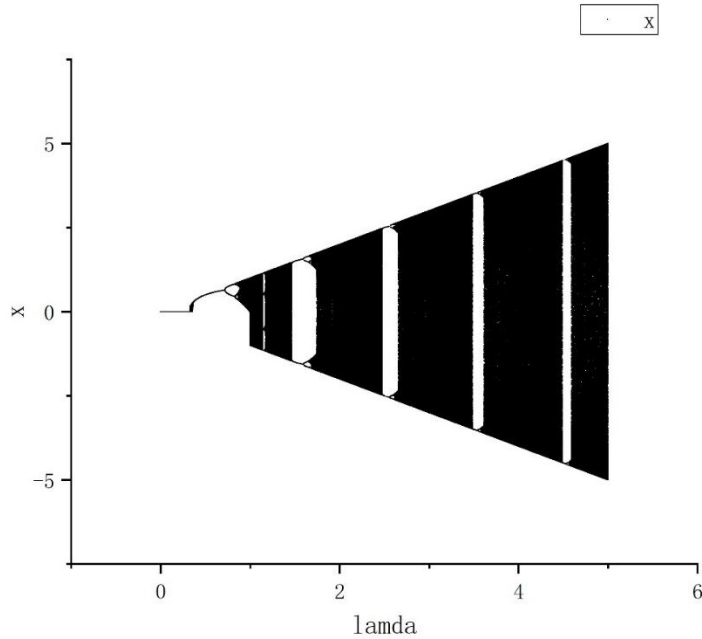


图2 步长0.001， $\lambda_{\min}=0$ ， $\lambda_{\max}=5$ 的系统状态随参数 $\lambda$ 的变化图

step=1E-6，min=0.68,max=0.75 时各个倍周期分叉处 $\lambda$ 的值如表 1.

分叉数 m	分岔数变化	参数 $\lambda$	$(\lambda_m - \lambda_{m-1})/(\lambda_{m+1} - \lambda_m)$
1	/	0.68	/
2	1→2	0.68909	3.269784
4	2→4	0.69187	1.02583
8	4→8	0.69458	1.188596
16	8→16	0.69686	0.517007
32	16→32	0.70127	0.686916
64	32→64	0.70769	2.206186
128	64→128	0.7106	0.675174
256	128→256	0.71491	/

表 1 step=1E-6，min=0.68,max=0.75 时各个倍周期分叉处 $\lambda$ 的值

分叉数等于 1 的 $\lambda$ 等于 min，只体现了研究范围的限制，没有太大意义。舍去第一个值求出相应的 Feigenbaum 常数

$$\delta = \frac{1.02583 + 1.188596 + 0.517007 + 0.686916 + 2.206186 + 0.685174}{6} = 1.051618166666667$$

表 1 中的 $(\lambda_m - \lambda_{m-1})/(\lambda_{m+1} - \lambda_m)$ 波动比较大，推测是取样间距不够小，有一些周期分叉点没有取到精确值所致，应当减小取样间隔进行计算。由于系统状态随 $\lambda$ 变化图是分形结构，具有自相似性，推测增大分辨两个迭代结果的最小误差 $\epsilon$ ，使之与 step 匹配也可以达到类似效果。此外由定义 $\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} (\lambda_m - \lambda_{m-1})/(\lambda_{m+1} - \lambda_m)$ 可知，应当考虑 m 不够大产生的影响。由于 $\lambda=0.714931$ 时已经产生混沌  $m \rightarrow \infty$ ，所以不需要增大 $\lambda$ 的取样区间，而应当增大最大周期数 N 或者减小取样间隔 step。

因为分叉点往往相距很近，而且 m 越大 $\lambda$ 可能存在的误差越大，或许比较精确的取法是

考虑差异比较小的数据进而取

$$\delta = \frac{1.02583 + 1.188596}{2} = 1.107213$$

step=0.01, min=0, max=5 的值如表 2.范围变大可以被记录的倍周期分叉却变少了,与倍周期分叉点间距会减小, 取样点需要越来越密相符。

n	lambda
2	0.38
4	0.692
8	0.73
16	0.86

表 2 step=0.01, min=0, max=5 时各个倍周期分叉处 λ 的值

C.2. 输出周期数小于 N 的所有周期状态

取 min=0.68,max=0.75,N=257, seed=1, 热化步数 100。将"dataT.txt"输入 Origin 作 T-λ 图如图 3.可以看到不是 2 的整数次幂的周期数, 验证了周期窗口的存在。中间缺失的一段 0.714931~0.721993 在周期数上限 N-1=256 下被认为是混沌。

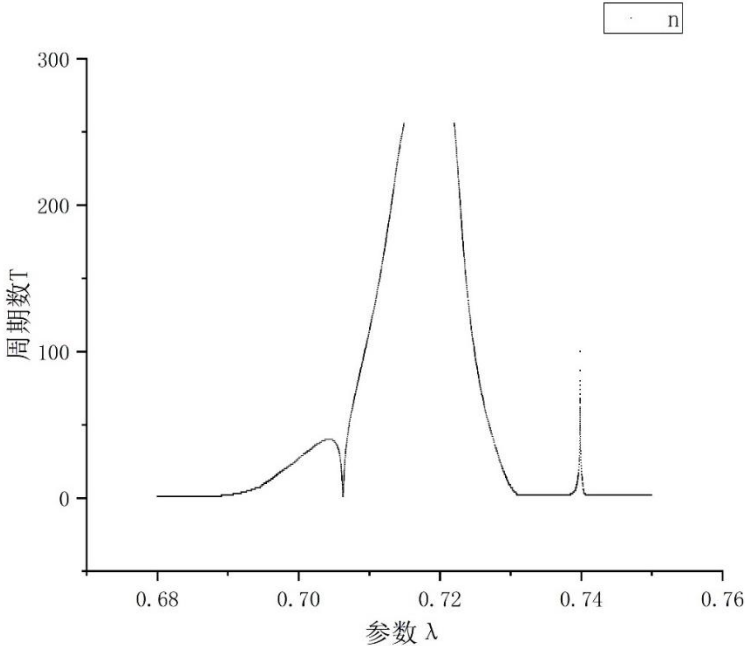


图3 周期数- λ 图

C.3. 求 Feigenbaum 常数α

取 min=0,max=1,n=100,N=257.当 epsom=1E-6 时因为条件比较严格得不出λ=0.5 和系统状态图中倍周期分叉部分的交点。退而求其次取 epsom=0.001 得 r,dr 如表 3.

周期 T	分岔数编号 m	dm	dm/d_m+1
2	0	0.27592	2.619825
4	1	0.10532	2.592811
8	2	0.04062	2.677653
16	3	0.01517	0.48174
32	4	0.03149	24.99206
64	5	0.00126	0.398734
128	6	0.00316	/

表 3 倍周期分叉与 $\lambda=0.5$  交点

尽管 $\alpha$ 的定义是 $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m/d_{m+1}$ ,  $m$ 较大时由于点比较密集, 即使取  $\text{step}=1\text{E}-6$  也难以保证是第一个交点, 所以取波动比较小的区间计算 $\alpha$ 如下, 有效数字位数和  $\text{epsom}$  一致。

$$\alpha = \frac{2.619825 + 2.592811 + 2.677653}{3} = 2.63$$

#### C.4. 检验热化效果

取  $\text{seed}=1, \text{min}=0.5, \text{max}=0.75, N=257$  进行计算。将分叉点的计算结果作 $\lambda$ -热化图如图 4, 热化步数采用对数坐标。从图上可以得到当热化步数增大时 $\lambda$ 值逐渐增大趋于稳定, 此外  $n$  比较大时周期数大的分叉无法出现。说明对于在热化步数少时被认为是分岔点的同一 $\lambda$ 值, 在热化步数较多时, 其对应的系统状态可能不再被判定为具有某一周期的倍周期状态。

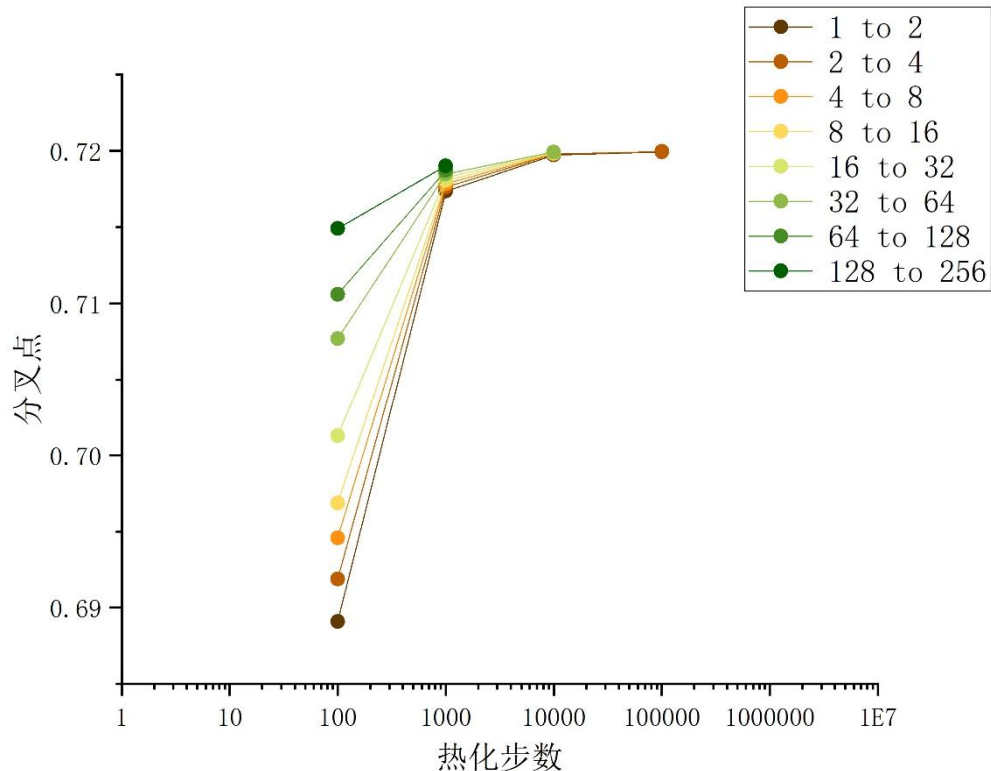


图4 分叉点对应 $\lambda$ 随热化步数变化图

理论上来说因为迭代方程的下一个结果只与上一个结果有关, 推测是检验的精度和计算机中变量存储的精度不匹配造成的。算法里根据输出精度对迭代结果人为设置的误差是  $1\text{E}-6$ , 和机器精度不一致 (浮点数机器精度一般 $\sim o(10^{-16})$ ), 因此即使输出的值一致, 在迭代计算后, 获得的下一步迭代值在机器精度意义上仍可能不同。因为迭代方程对应的函数  $f(x) = \lambda \sin(\pi x)$  在任意闭区间上连续, 因此它满足 Lipschitz 连续, 当两个  $x$  相差较小时它们的下一个迭代结果也相距很小, 所以热化步数比较少时不能分辨它们。但是  $f(x) = \lambda \sin(\pi x)$  不是实数域上的压缩映射, 因此随着迭代次数的增多后续迭代结果差异可能逐渐增大直到可以被分辨。

在  $n$  较小时由于热化不充分而不处于倍周期状态的 $\lambda$ 也被认为是倍周期状态, 进而产生分叉点偏小的现象。当  $n$  较大时, 同一个 $\lambda$ 因为热化步骤多, 迭代结果精度不足产生的差异体现出输出结果可以被分辨的迭代结果差异, 则其对应系统不处于倍周期分叉状态这一特点也得以体现。由 "data\_0.txt",  $n=1\text{E}4$  和  $n=1\text{E}5$  之间的分叉点误差仍大于步长  $\text{step}=1\text{E}-6$ , 由

此观之，此前误差分析中考虑的“步长过小错过分叉点使得分叉点偏大”，其影响小于热化不充分导致的分叉点偏小。

以下考虑减小相应误差的方式：

第一个办法是使得判断标准和机器精度相匹配。因为程序对迭代结果进行比较和计算都在机器精度下进行，所以当一值在  $1E-15$  的精度下被认为是相等时其下一步计算结果必定相等。当然，机器精度是有限的，因此机器精度提高时（当计算机本身的设置变化）可能会获得不一样的结果，但是对于同一台计算机，提高精度可以减小所需的热化步数和提高输出结果的精确度，不再出现上述假分叉点。此外，如果处理数据时从输出文件中调用数据，有可能看到倍周期或者混沌中出现多个相同的  $x$ ，原因是其差异小于输出值的精度却大于计算时的机器精度。

此外，如果是先输出数据，再从文件中调取数据，另外处理，则应当找到目标精度下充分热化的最小热化步数（取定 step，在某一个热化步数下分叉点  $\lambda$  的值和下一个热化步数所得相差不大于 step），然后取充分大的热化步数进行计算。

最后，热化步骤可否除去初值的影响还和迭代方程的性质有关，需要迭代方程在研究的范围内能够收敛到倍周期分叉状态才可行，因此单纯地靠预实验选取充分大的热化步数进行计算来缩小误差的办法不一定具有普适性。

改变热化步数所需的算力较高，时间效率低，因此改变判准进行优化，运行结果见 C.5 节。

C.5. 优化算法后进行的计算

根据热化效果检验（详见 C.4.）中的误差分析，改变输出结果的判准为浮点数在机器精度意义下完全相等，取  $\min=0, \max=0.04, N=257, \text{seed}=100$ ，热化步数 100 进行计算，得到系统状态随  $\lambda$  变化图如图 5，倍周期分叉点如表 4。 $\max$  选得如此之小是因为数据量大时 Origin 不支持作图。图 5 上看不出系统状态变化，但是倍周期分叉点能够正常输出，原因是分叉结构非常精细，输出数据的精度不能体现  $x$  的差异，也印证了 C.4. 中机器计算精度远大于输出精度这一特点。

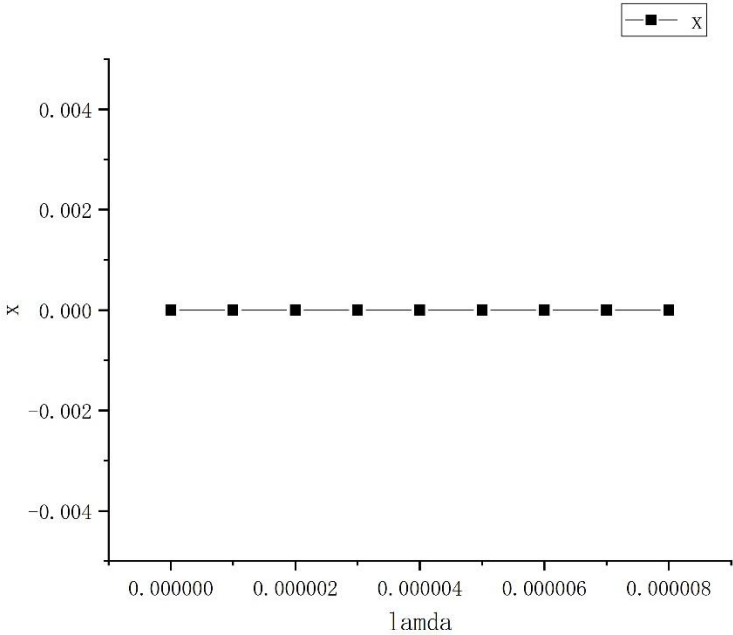


图5 优化算法中  $\lambda = 0 \sim 0.05$  的系统状态图

m	$\lambda m$	$(\lambda m - \lambda m - 1) / (\lambda m + 1 - \lambda m)$
---	-------------	---

2.0000000	0.000205	/
4.0000000	0.000236	0.4189189
8.0000000	0.000310	0.3814433
16.0000000	0.000504	0.3201320
32.0000000	0.001110	0.2646288
64.0000000	0.003400	0.2573034
128.0000000	0.012300	0.3228147
256.0000000	0.039870	/

表 4 step=1E-6, min=0,max=0.5 时各个倍周期分叉处  $\lambda$  的值  
舍去  $m$  较小时误差较大的数据, Feigenbaum 常数  $\delta$ :

$$\delta = \frac{0.3201320 + 0.26846288 + 0.2573034 + 0.3228147}{4} \approx 0.291220$$

取  $N=257$ , seed=1, 热化步数 100,  $\lambda=0$  到 0.5 周期数随  $\lambda$  变化如图 6, 0.5 到 0.75 如图 7。观测发现周期数在  $\lambda>0$  附近上升迅速, 印证了此前作图 5 时, 输出数据看来似乎是绝灭状态, 但实际上是周期中各个点都小于  $1E-6$  的倍周期状态。图中可以输出的最大周期是 256, 取样数组如果有  $N=257$  个机器精度下各不相同的元素则不予输出, 可见  $\lambda \in (0, 0.5)$  中间有一段保持  $N=256$  的倍周期分叉状态。

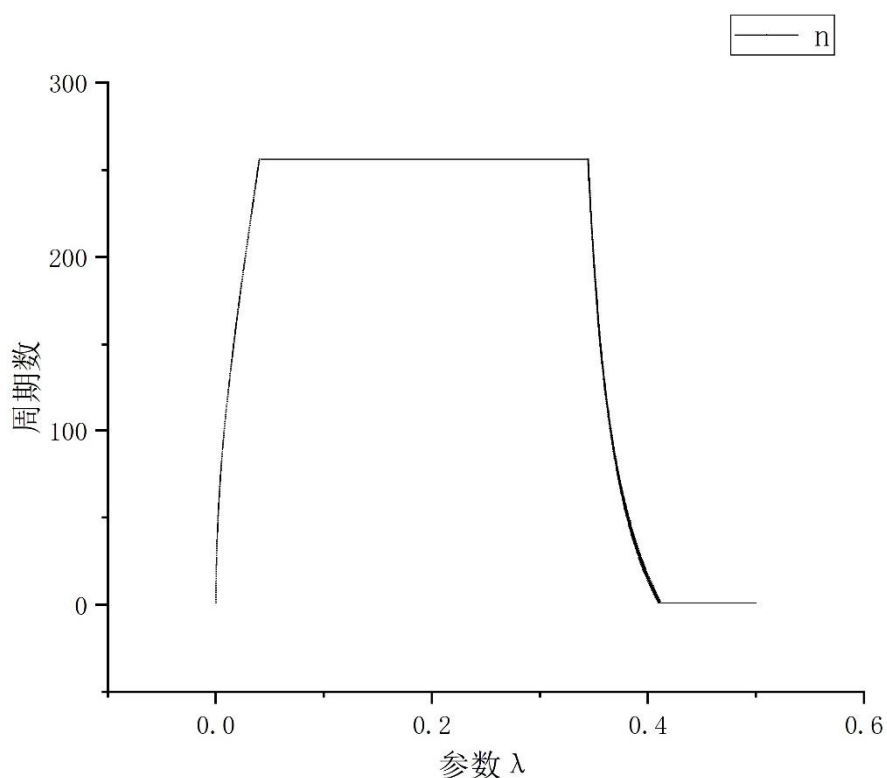


图6  $\lambda=0\sim 0.5$ ,  $N=257$  以下周期数随参数变化图

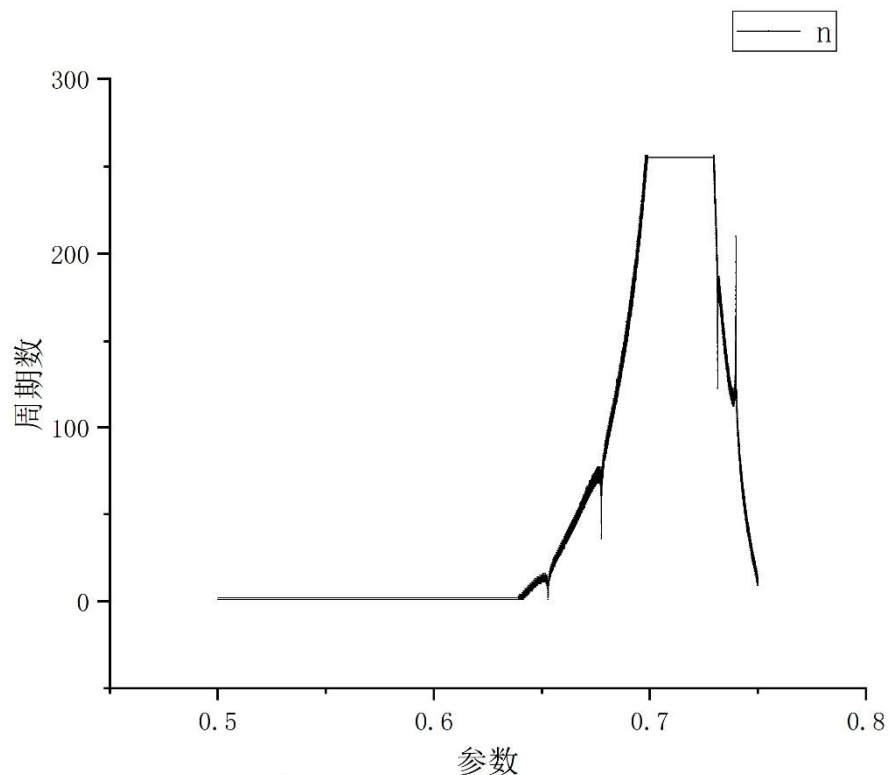


图7  $\lambda = 0.5 \sim 0.75$ ,  $N=257$  以下周期数随参数变化图

对 $\alpha$ 的计算精度比较高时难以得到结果，热化步数检验算力要求较高，在此不进行优化。

#### D. 总结

本次作业中，学生编写程序，以 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 为迭代方程进行迭代，画出了系统状态随参数 $\lambda$ 的变化图，在图中体现出定值状态、倍周期分叉和混沌状态；列出了各个倍周期分叉处 $\lambda$ 的值，求出了相应的 Feigenbaum 常数 $\delta$ 、 $\alpha$ ，分析了误差；输出了周期数小于  $N=257$  的所有倍周期状态，从另一角度直观体现了体系状态随 $\lambda$ 值的变化，且验证了周期窗口的存在；通过对比倍周期分叉点在不同热化步数下的计算值检验了热化是否充分，分析了误差来源，提出了减小误差的可能方案，又优化算法进行了补充计算。