第 4 题作业报告

PB18000341 范玥瑶

A. 作业题目

设 pdf 函数满足关系式

$$p'(x) = p(x)\frac{x-d}{ax^2+bx+c}$$

请找到其中的一种函数，讨论性质并给出抽样方法。

B. 算法及主要公式

B.1. 性质讨论

$$\frac{dp}{p} = \int \frac{x-d}{ax^2+bx+c}dx$$

1. 若Δ=b^2-4ac⩾0，则存在 x1，x2∈R，使得

$$ax^2+bx+c = a(x-x1)(x-x2)$$

p(x)是有理函数，$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$在 R 上无界。

2. 若Δ=b^2-4ac<0，则$|ax^2+bx+c| = |a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}|$>0 恒成立，由有理函数积分，

$p(x) = C_0(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2a}} * \exp\left(-\frac{2ad+b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right)$，$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$在 R 上无界。

综上所述，R 上 p(x)无界且不可归一化。

考察x $\in (-5,\ +5)$，$a=\frac{1}{2}$，$b=c=1$，$d=-1$，

$$p(x) = \frac{x^2+2x+2}{\int_{-5}^{5}(x^2+2x+2)dx} = \frac{3}{310}(x^2+2x+2)$$

用 Wolfram Alpha 作图如图 1.

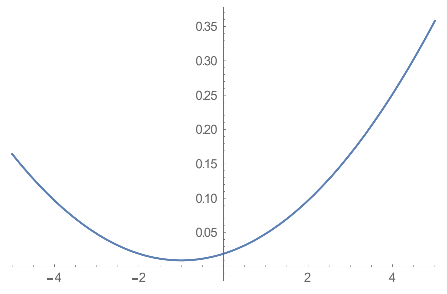

图 1 Wolfram Alpha 绘制$p(x)$函数图像

在（-5，5）上 p(x)有界。

B.2.抽样方法

B.2.1.简单抽样

$$\xi(x) = \int_{-5}^{x}\frac{3}{310}(t^2+2t+2)dt = \frac{3}{310}\left(2t+t^2+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-5}^{x} = \frac{x^3+3x^2+6x+80}{310}$$

$\xi(x)$在（-5，5）单调递增，用 C 语言编写程序 1 从-5 到 5 以步长 1 求样点（x，ξ）列表如表 1.

x	ξ(x)
-5	0
-4	0.12903
-3	0.2
-2	0.23226
-1	0.24516
0	0.25806
1	0.29032
2	0.36129
3	0.49032
4	0.69677
5	1

表 1 差值抽样点

拉格朗日插值 n=10 次基函数

$$l_i(\xi)=\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{\xi-\xi_j}{\xi_i-\xi_j}$$

$$x(\xi)=L_n(\xi)=\sum_{i=0}^{n}l_i(\xi)\,x(\xi_i)$$

ξ是(0，1)上均匀分布的随机数时，符号计算出 10 次多项式 L_n（ξ）写入主函数或用子程序 lagrange 代替解析式对 x(ξ)进行数值计算即可完成对 x 的简单抽样。更严谨的做法是使用 WolframAlpha 的 FindRoot 函数对特定的ξ求解满足$\xi(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+80}{310}$的 x，由于本课程限用 C 在此暂不讨论。

B.2.2.舍选抽样

$$p(x)=\frac{x^2+2x+2}{\int_{-5}^{5}(x^2+2x+2)dx}=\frac{3}{310}(x^2+2x+2)(-5<x<5)$$

定义域（-5，5），值域（$\frac{3}{310}$，$\frac{111}{310}$）。

随机抽样值

$$X=-5+\big(5-(-5)\big)*x=-5+10*x$$

$$Y=\frac{3+(111-3)*y}{310}=\frac{3}{310}+\frac{54}{155}*y$$

当 P(X)<Y 时舍去将抽样值 x=X，否则将其输出到 sampling.txt 里。

B.3.算法简述

B.3.1.简单抽样算法

程序 1：以符号计算软件 WolframAlpha 编写"lagrange.nb"求出 10 次插值多项式

L_n（ξ）$=-4.999999999999999-1679.414511925006x+1306.604336498538x^2+718483.6883936822x^3-1.105725778954862\times10^7x^4+$

$7.726415880698961 \times 10^7 x^5 - 3.02904372690824 \times 10^8 x^6 + 7.025218443357706 \times 10^8 x^7 - 9.502404621130562 \times 10^8 x^8 + 6.872949719494734 \times 10^8 x^9 - 2.035969833770245 \times 10^8 x^{10}$

写入主函数，用 Schrage 方法生成ξ，用函数表达式求 x(ξ)输出完成简单抽样。将生成的随机数ξ、代入插值函数所得的 x、ξ（x）写入文件，对比 1、3 列检验舍入误差和截断误差。

程序 2 在定义部分预置插值点 x 的数组 x[11]和ξ的数组 ksai[11]，用 Schrage 方法生成ξ，调用子函数 lagrange 数值计算对应的反函数拉格朗日插值函数值 x。lagrange 的算法为：将ξ的值，x[11]、ksai[11]的指针传入 lagrange，用循环语句计算 l_i(ξ)的值存入数组 l[11]，用再以循环语句计算 x(ξ)的值，返回给主函数。

程序 2 的插值运算量可能比程序 1 大，以运算时间作为衡量标准，具体讨论见 C 部分。

B.3.2.舍选抽样

输入种子值、生成均匀分布随机数对的数目，用 Schrage 方法求出以相邻两随机数组成的数对（x,y），利用舍选抽样公式得到（X,Y），判断是否有 Y≤P（X），若满足输出随机数 X。

C. 计算结果及具体分析、讨论

C.1. 插值法生成反函数

用 WolframAlpha 绘图得原函数和插值函数如图 2，3，发现插值函数不单调且误差很大。取 seed=1 运行程序 1、程序 2 各生成 1E4 个随机点，分别用时 2.639s 和 3.38s，程序 1 效率更高。对比原始数据的ξ，ξ（x）差别较大，推测是对ξ进行等距离取点发生龙格现象所致。

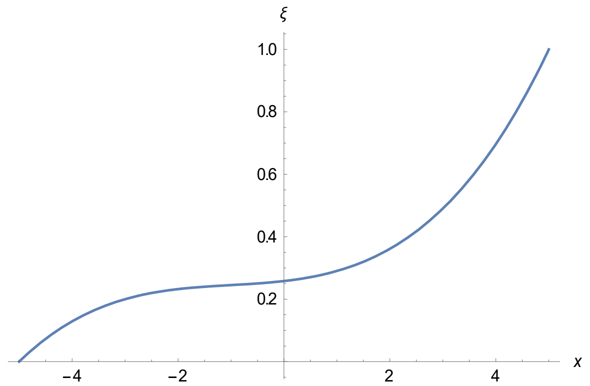

图 2 cdf 函数图

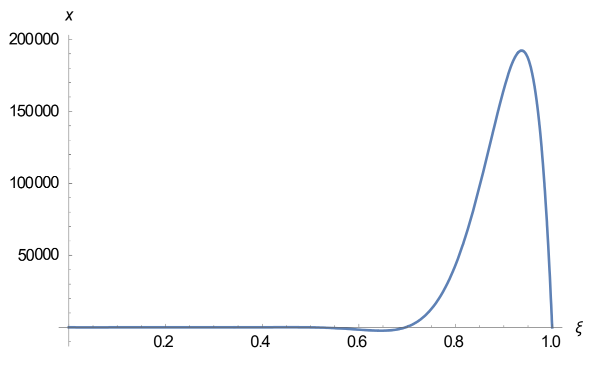

图 3 插值函数图像

C.2. 舍选抽样法

由计算物理知识，反函数难求可选择舍选法进行抽样。舍选抽样所得数据组距 0.01 作

频率分布直方图如图 4.

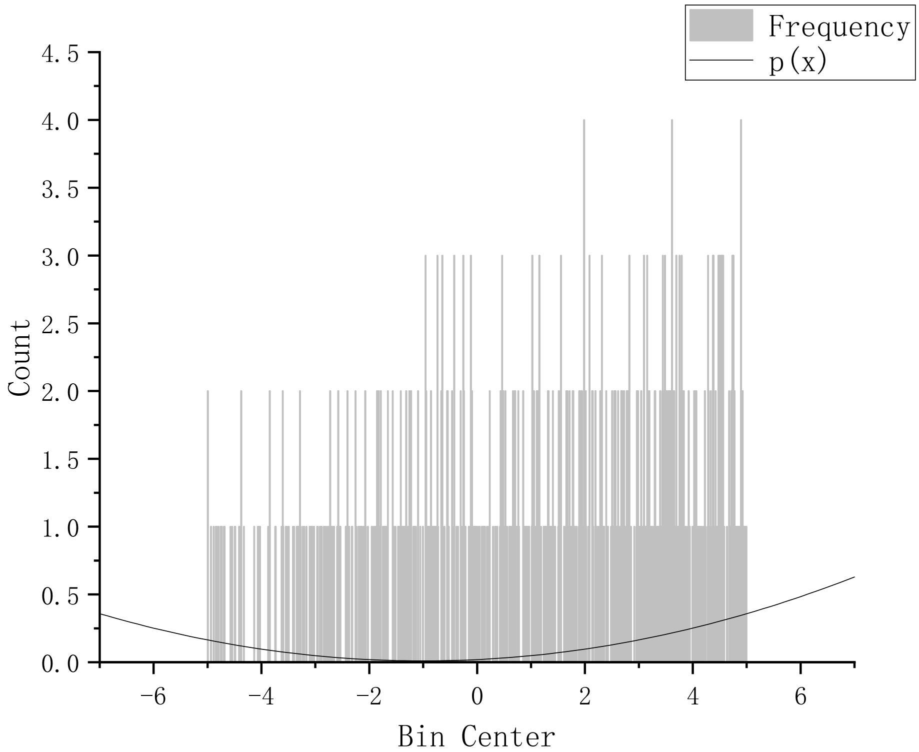

图4 舍选法生成的随机抽样频率分布直方图

D. 总结

本次作业解微分方程得到 cdfξ(x)，反函数不易求，编写了以对抽样表达式 x(ξ)的拉格朗日插值函数进行简单抽样的程序对 Schrage 方法生成的均匀分布随机数的随机数产生器。由于 Runge 现象生成的随机数偏差明显过大。