

第 9 题作业报告

PB18000341 范玥瑶

A. 作业题目

自设若干个随机分布（相同或不同分布，它们有相同或不同的 μ 和 σ ），通过 Monte Carlo 模拟，验证中心极限定理成立（ $N=2、5、10$ ）。

B. 算法及主要公式

本次作业的 X 考虑 2 种分布， $(0, 1)$ 上的均匀分布和二项分布。

基本思路是用 Schrage 方法生成随机数，以相邻的 N 个为一组进行抽样得到独立同分布的 N 个 $X(X_1, X_2, \dots, X_N)$ ，其期望 μ ，标准差 σ 。取样点的个数 $Q=1E5 \sim \infty$ 。令 $z = \frac{\langle X \rangle - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ ， $\langle X \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ 。 z 即 X 的标准化和。导出 z ，存储于文件中。用 Origin 作频率分布直方图和标准正态分布曲线比较验证中心极限定理。

抽样方法为：对 $(0, 1)$ 上的均匀分布无需进行变换；对 Bernouli 分布，当 $x \in (0, 0.5)$ 时 $X=0$ ，当 $x \in (0.5, 1)$ 时 $X=1$ 。

C. 计算结果及具体分析、讨论

以下取 $\text{seed}=1,=1E5$ 进行测试。

C.1. 均匀分布

$N=2,5,10$ ， X 在 $(0, 1)$ 上均匀分布时， z 的频率分布直方图和正态分布对比如图 1 到图 3。由于点不是特别多，分布没有足够接近 $N(0, 1)$ ，当间隔取得比较窄时峰高会比较低。从形状上观察基本服从正态分布，符合中心极限定理。

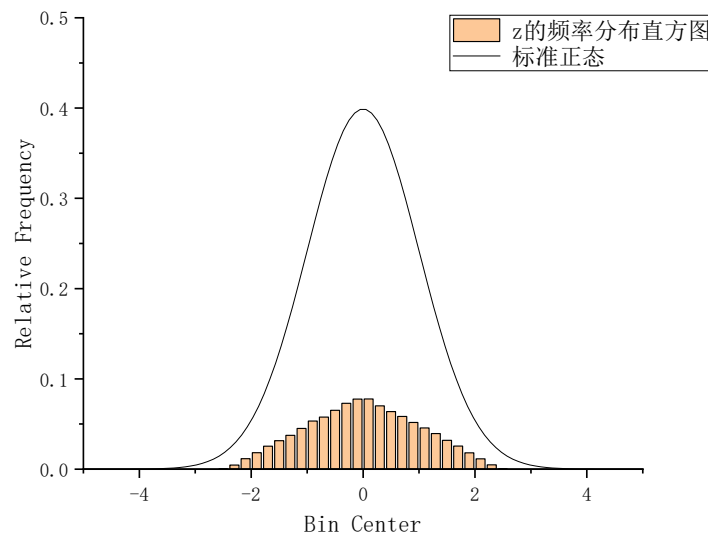


图1 $N=2$ 均匀分布 频率分布直方图与标准正态比较

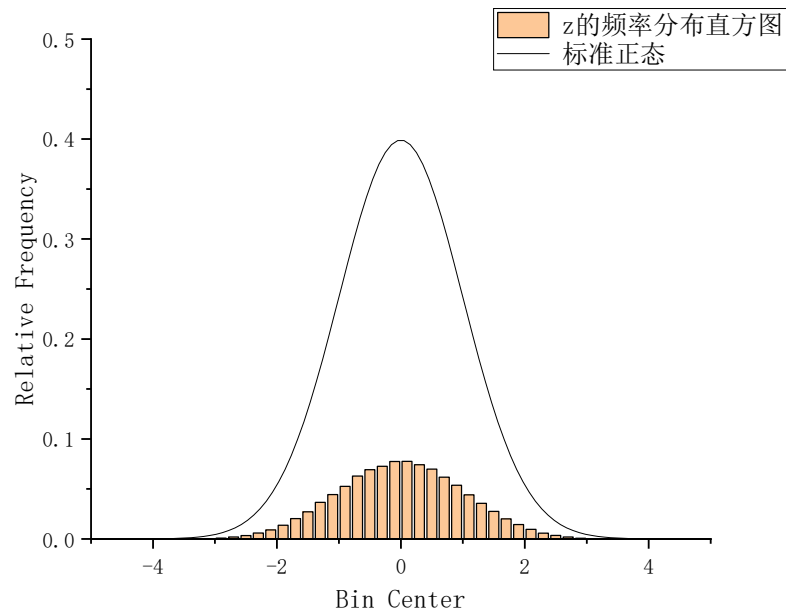


图2 N=5 均匀分布 频率分布直方图与标准正态比较

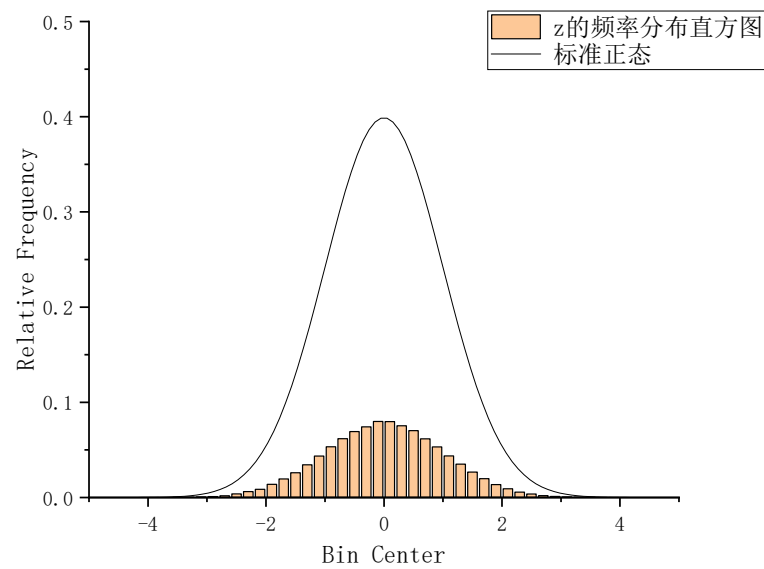


图3 N=10 均匀分布 频率分布直方图与标准正态比较

C.2.伯努利分布

$N=2,5,10$, $X \sim B(1, p)$ 时 z 的频率分布直方图和正态分布对比如图 4 到图 6. N 较小时点基本是分立分布, 和标准正态曲线相去甚远, N 到 10 的时候就比较类似了。说明中心极限定理成立需要 N 达到一定大小。

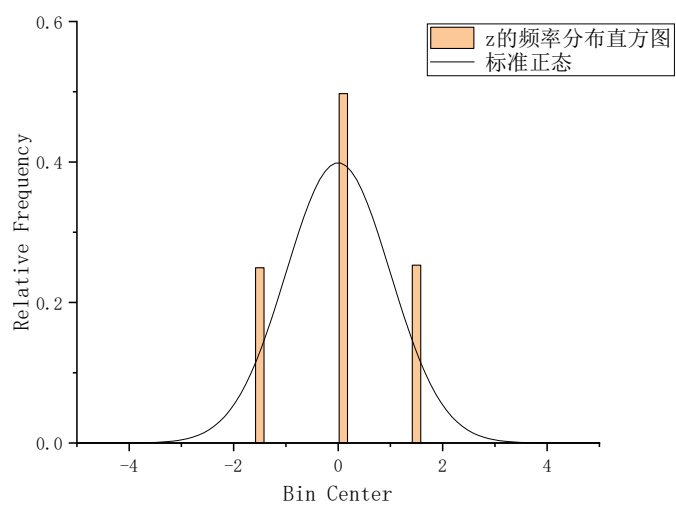


图4 $N=2$ 0-1分布 频率分布直方图与标准正态比较

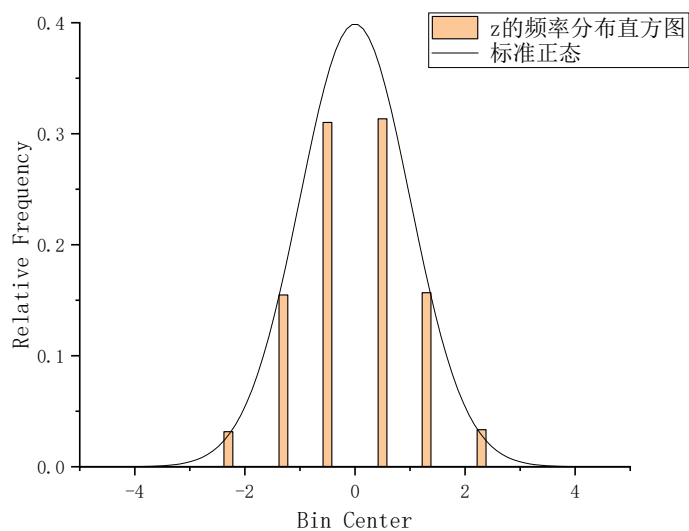


图5 $N=5$ 0-1分布 频率分布直方图与标准正态比较

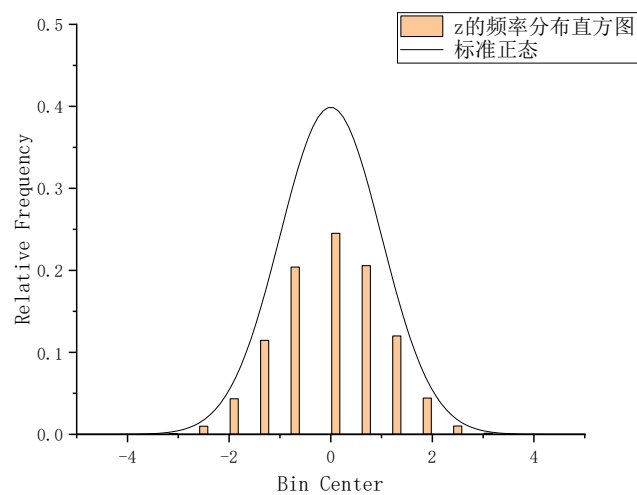


图6 $N=10$ 0-1分布 频率分布直方图与标准正态比较

D. 总结

本次作业通过编写程序验证了 X 独立同分布于 $(0, 1)$ 上均匀分布和 0-1 分布, $N=2, 5, 10$ 时的中心极限定理, 发现中心极限定理不但需要样本容量比较大还需要随机变量序列中的随机变量数目比较大才成立。