第一次作业报告

PB18000341 范玥瑶

A. 作业题目

用 Schrage 方法编写随机数子程序，用连续两个随机数作为点的坐标值绘出若干点的平面分布图。再用$<x^k>$测试均匀性（取不同量级的 N 值，讨论偏差与 N 的关系）、C(l) 测试其 2 维独立性（总点数 $N > 10^7$）。

B. 算法及主要公式

B.1 主要算法描述

由于内存问题本次作业要求的功能拆分为 2 个程序分别实现。程序 1 可以生成随机数和用$<x^k>$测试均匀性，程序 2 可以实现由 C(l) 测试其 2 维独立性。

B.1.1 程序 1 算法

S1:输入实验序号，种子值，随机点的数目 N，需要检验$<x^k>$的阶数；

S2:用子程序 RandomNumber 生成（N+1）个随机数，用连续 2 个随机数作为点的横纵坐标，生成 N 个随机点。子程序 RandomNumber 的算法是：循环语句开头第 n 个周期用上一个周期生成的 y 得到 x_n（第 0 个周期不同，是由种子值生成 x0）；再用 Schrage 方法由变量 I 中保存的 I_n 生成 I_{n+1}，然后赋给 I；再由 $x_{n+1}=I_{n+1}/m$ 得到 $y_n=x_{n+1}$，输出数对（x_n，y_n），在下一个循环中将 y 赋给 x 得到 $x=x_{n+1}$.

S3:利用循环语句依次调用子程序 kTest 计算$|<x^k>-\frac{1}{k+1}|$，将计算结果保存在"kTest.txt"中。子程序 kTest 的算法是：先将 S 置零。在循环语句的一个周期中，先由 $x_n=I_n/m$ 生成 x，再用 Schrage 方法生成 I_{n+1}，将此周期的 x_n^k 加到 S 里面，利用循环语句执行上述步骤 N 次可以完成 N 个 xn^k 的求和；计算 $S/N=<x^k>$、$|<x^k>-\frac{1}{k+1}|$，和对应的 k 保存在"kTest.txt"中。

B.1.2 程序 2 算法

S1:输入实验序号，种子值，随机点的数目 N，用 C(l)检验的 l;

S2:利用循环语句、条件语句调用子程序 lTest、lTest2 计算不同 l 对应的 C（l），将计算结果保存再"lTest.txt"中。若 N>l>1 则调用子程序 lTest，若 l=1 则调用子程序 lTest2，否则报错。lTest 的算法为：先创建长为 l 的动态数组，以生成的前 l 个随机数填充之同时对 x 求和；填充完毕后，除对 x 求和外同时开始对新的 x 和数组中最后一个元素之积 x_nx_{n-l}(n>=l)进行求和，求和完毕调用函数 arrange 对数组进行更新，即将数组前（l-1）个元素的值依次赋给后一个元素，将 x 赋给第一个元素，完成数组的移动；循环语句结束后从总和得到均值，进而计算出 C（l）.lTest2 的算法为用 x，y 记录 x_n，x_{n+1}，然后循环语句开头第 n 个周期用上一个周期生成的 y 得到 x_n（第 0 个周期不同，是由种子值生成 x0）；再用 Schrage 方法由变量 I 中保存的 I_n 生成 I_{n+1}，然后赋给 I；再由 $x_{n+1}=I_{n+1}/m$ 得到 $y_n=x_{n+1}$，对 xy 求和即对 x_n\`x_{n+1} 求和，在下一个循环中将 y 赋给 x 得到 $x=x_{n+1}$。循环结束后从总和得到均值，进而计算出 C（l）。

B.2. 主要公式

（1） Schrage 方法

记 q=[m/a]，r=m mod a，则对 r<q 且 0<z<m-1:

$$az \bmod m = \begin{cases} a\,(z \bmod q) - r\,[z/q], & \text{if} \geq 0 \\ a\,(z \bmod q) - r\,[z/q] + m, & \text{otherwise} \end{cases}$$

所以在 b=0 的情况下可以采用上述公式计算线性同余法未归一的随机数。

（2） k 阶矩检验

xn 在（0，1）区间上随机分布的情况下

$$<x^k>=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}xi^k\approx\frac{1}{k+1}$$

$$\left|x^k-\frac{1}{k+1}\right|\approx O(\frac{1}{\sqrt{N}})$$

（3） C（l）检验

xn，xn+l 在（0，1）区间上近似独立分布的情况下

$$C(l)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i x_{i+1}-<x>^2\approx 0$$

$$|C(l)|\approx O(\frac{1}{\sqrt{N}})$$

C. 计算结果及具体分析、讨论

C.1. 随机点的平面分布图

运行程序，取 seed=1，用连续两个随机数作为点的坐标值，生成 N=10^4 个随机点，导入 Origin 绘出 N=1E4 个点的平面分布图如图 1。

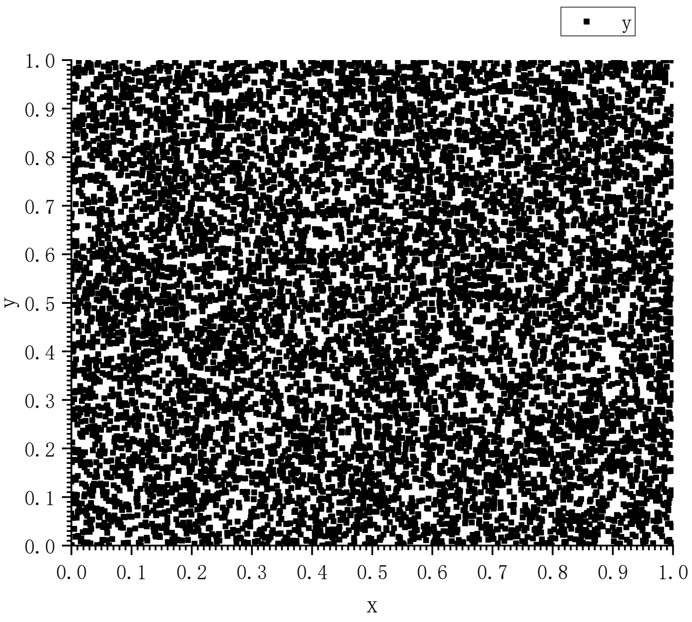

图1 随机点平面分布图

观察图 1，随机点近似于均匀分布，随机性较好。

C.2. 用$<x^k>$测试均匀性

取 seed=1，分别测试 N=10^4，10^5，10^6，10^7，k=1，2，3，4，5 的 k 阶原点距。

用 Origin 作不同 N 下的$|<x^k>-\frac{1}{k+1}|$-k 图如图 2 所示。对$|<x^k>-\frac{1}{k+1}|$，$\frac{1}{\sqrt{N}}$列表如表 1.

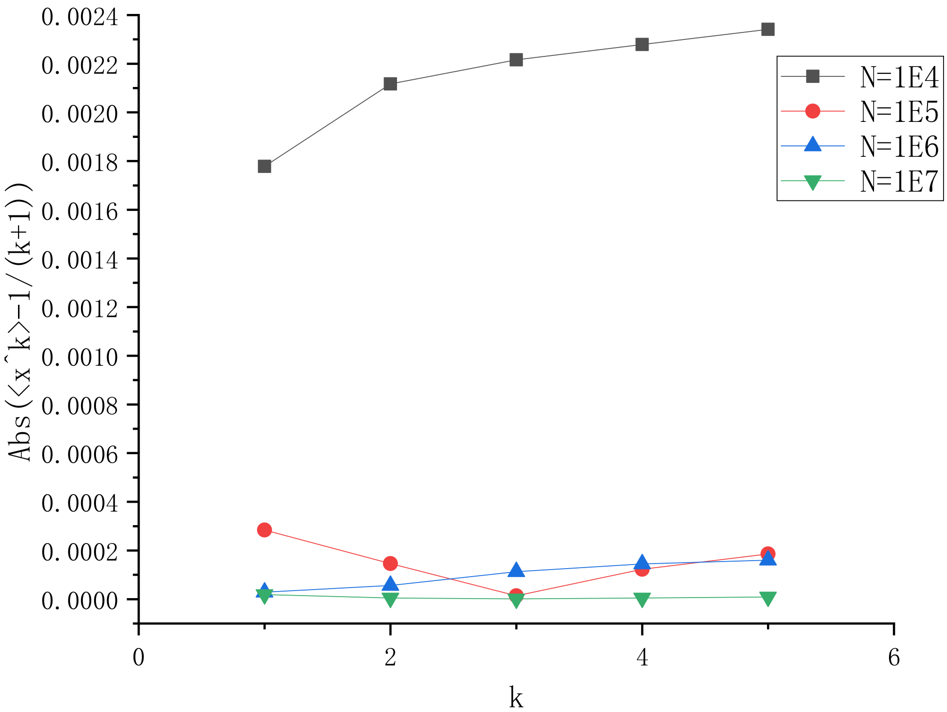

图2 k检验

N	$\frac{1}{\sqrt{N}}$	$\lvert<x>-\frac{1}{2}\rvert$	$\lvert<x^2>-\frac{1}{3}\rvert$	$\lvert<x^3>-\frac{1}{4}\rvert$	$\lvert<x^4>-\frac{1}{5}\rvert$	$\lvert<x^5>-\frac{1}{6}\rvert$
1E4	0.01	0.00178	0.00212	0.00222	0.00228	0.00234
1E5	3.16E-3	0.00028	0.00015	0.00001	0.00012	0.00019
1E6	0.001	0.00003	0.00006	0.00011	0.00015	0.00016
1E7	3.16E-4	0.00002	0.00001	0.00000	0.00001	0.00001

表 1 不同 N,k 的$\lvert<x^k>-\frac{1}{k+1}\rvert$，$\frac{1}{\sqrt{N}}$表

分析：

（1） 对比相同 N，不同 k，$\lvert<x^k>-\frac{1}{k+1}\rvert$的大小和 k 的大小关系不大。

（2） 对比相同 k 不同 N，除 k=3,k=4 的 100000 和 N=1000000 外，k 较大时 N 越大 $\lvert<x^k>-\frac{1}{k+1}\rvert$越小，分布随机性越高。

（3） 根据原始数据，符合$\left|x^k-\frac{1}{k+1}\right| \approx O(\frac{1}{\sqrt{N}})$，分布均匀性好。

C.3. 用 C（l）测试二维独立性

取 seed=1，分别测试 N=1.5×10^7，1×10^8，1×10^9，l=1，2，3，4，5 的 C(l)。用 Origin2019 作 C(l)-l 图如图 3 所示。

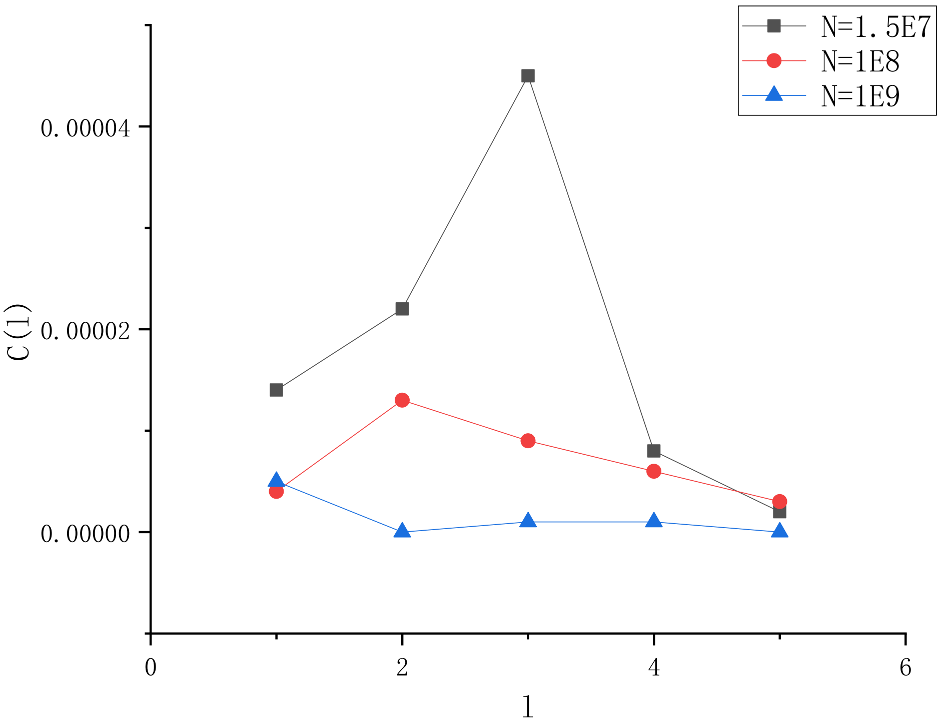

图3 C(1)-1图

分析:

(1) N=1.5E7 时 C(l)明显大于另外两组数据，相同 N，C（l）随 l 变化不显著。

(2) 测试所得数据均有$|C(l)| \sim O(\frac{1}{\sqrt{N}})$,说明 16807 生成器二维独立性比较好。

D. 总结

本次作业通过编写 2 个子程序完成了用 Schrage 方法计算线性同余法生成的随机数，由随机数作为坐标的点的平面分布图得到随机数近似均匀分布，进行$\langle x^k \rangle$(k=1,2,3,4,5)检验得到随机数 x 的均匀性好，进行 C(l)（l=1,2,3,4,5）检验得到 x 的二维独立性较好。