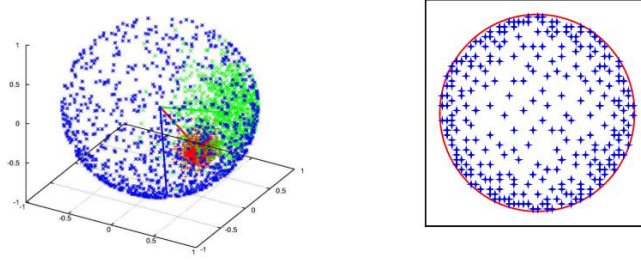


第 5 题作业报告

PB18000341 范玥瑶

A. 作业题目

对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在 (x, y) 平面上投影的几率分布函数。并由此验证 Marsaglia 抽样方法 $x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1 - 2r^2$ 确为球面上均匀分布的随机抽样。



B. 算法及主要公式

单位球面上均匀分布的随机坐标点 $(1, \theta, \varphi)$ 的简单抽样为

$$\theta = \arccos(1 - 2u_1), \varphi = 2\pi u_2$$

其中 (u_1, u_2) 为 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机数对。

代入单位球面上坐标变换

$$x = \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = \sin\theta \sin\varphi$$

$$\because \theta \in [0, \pi] \therefore \sin\theta \geq 0, \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

简单抽样

$$x = \sqrt{1 - (1 - 2u_1)^2} * \cos(2\pi u_2), y = \sqrt{1 - (1 - 2u_1)^2} * \sin(2\pi u_2)$$

$$p(x, y) dx dy = \frac{1}{(1 - 0)^2} du_1 du_2 = du_1 du_2$$

球面上均匀分布的随机坐标点在 (x, y) 平面上投影的几率分布函数

$$p(x, y) = \left| \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x, y)} \right| = \left| \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u_1, u_2)}} \right| = \frac{1}{4\pi\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad (1)$$

对 Marsaglia 抽样方法 $x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1 - 2r^2, u, v \in (-1, 1), r^2 = u^2 + v^2$

$$p(x, y) = p(u, v) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| P(u^2 + v^2 \leq 1) = \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} \right| = \frac{1}{4\pi\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad (2)$$

对比(1),(2), 可以验证 Marsaglia 抽样方法 $x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1 - 2r^2$ 确

为球面上均匀分布的随机抽样。

Marsaglia 抽样方法生成随机点 (x,y) 的程序算法为：输入种子值 $seed$ 和生成随机点的数目 N ，用 Schrage 方法生成在 $(0, 1)$ 上随机分布的随机数，取相邻的两随机数为数对 (X,Y) ，取 $u = -1 + 2 * X$ ， $v = -1 + 2 * Y$ 生成 $(-1,1)$ 上均匀分布的随机数对 (u,v) ，当 (u,v) 满足 $u^2 + v^2 \leq 1$ 时，取 $x = 2u\sqrt{1 - r^2}$ ， $y = 2v\sqrt{1 - r^2}$ 输出 (x,y) 。

C. 计算结果及具体分析、讨论

取作业 3 中生成的单位球面上均匀分布的随机点的投影 (x,y) 坐标作 2 维散点图如图 1.

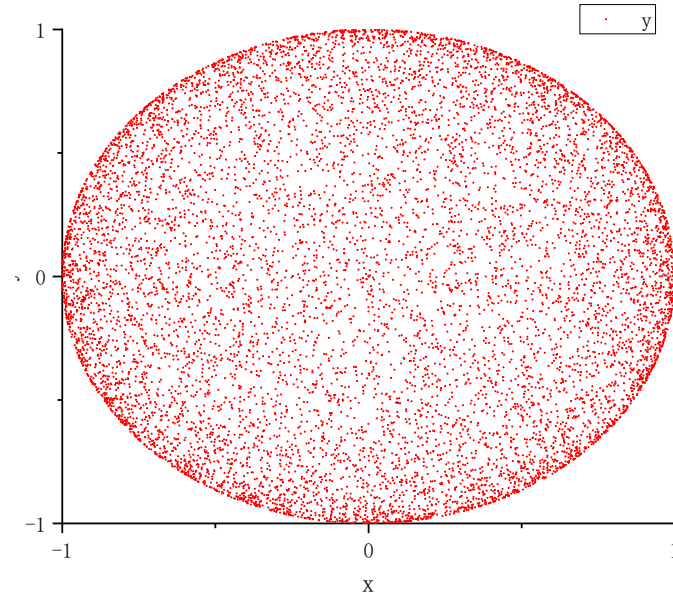


图1 单位球面上均匀分布随机点的投影

用 Marsaglia 抽样方法生成随机点的投影 (x,y) 的散点图如图 2.

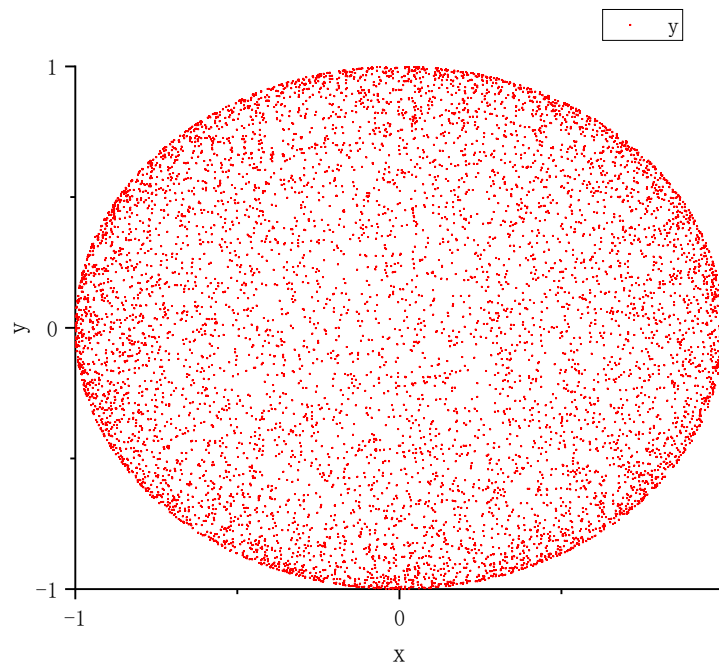


图2 Marsaglia抽样方法生成随机点的投影 (x,y)

对比图 1、图 2，图像基本一致，符合题目 Marsaglia 抽样方法 $x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1-2r^2$ 确为球面上均匀分布的随机抽样之假设。

D. 总结

本次作业通过数学推导得出：简单抽样和 Marsaglia 抽样所得球面上均匀分布随机点在 xoy 平面投影的分布函数 $p(x,y)$ 完全相同，验证了 Marsaglia 抽样方法生成随机点在单位球面均匀分布。此后通过编写程序实现了用 Marsaglia 抽样方法生成球面上均匀分布随机点在 xoy 平面的投影坐标。作两种抽样方法生成数据的投影散点图对比验证结论。