

第 12 题作业报告

PB18000341 范玥瑶

A. 作业题目

推导三角格子点阵上座逾渗的重整化群变换表达式 $p' = R(p)$ ，其中端-端连接的条件是 3 个格点中的 2 个是占据态，求临界点 p_c 与临界指数 ν ，与正确值（表 1.6.1.3-1）相比较。

B. 理论推导

一个含有 $N = 3$ 个格点的元胞处于“占据”状态等价于有 2 个或 3 个格点占据，其概率 p' 满足重整化群变换表达式：

$$p' = R(p) = C_3^3 p^3 + C_3^2 p^2 (1 - p) = -2p^3 + 3p^2$$

解不动点方程 $p = R(p)$ 得

$$p = 0, 1, \frac{1}{2}$$

其中 0,1 为平凡解，舍去，临界点 $p_c = 0.5$ 。

重整化维数 $d = 2$ ，标度因子 $b = N^{\frac{1}{d}} = \sqrt{3}$ ， $\lambda = R'(p_c) = \frac{3}{2}$ ，

$$\therefore \nu = \frac{\ln b}{\ln \lambda} = \frac{\ln \sqrt{3}}{\ln 1.5} \approx 1.35$$

C. 计算结果及具体分析、讨论

查表（见附录）得正确值为 $p_c = 0.500000$ ， $\nu = \frac{4}{3} \approx 1.33$ 。误差率为：

$$\eta(p_c) = \frac{p_c - 0.500000}{0.500000} * 100\% = 0\%$$

$$\eta(\nu) = \frac{\nu - \frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} * 100\% \approx 1.61\%$$

p_c 和理论值一致， ν 偏大一些，两位有效数字。

在重整化过程中可能改变点阵上下端是否连通的情况，进而产生误差。如图 1，假设浅色是不占据，深色是占据，所示点阵上下连通，经过一次重整化上下不连通。由于特例点阵实际上具有周期性，高度对称，座逾渗问题中点的占据情况分布是随机的、散乱的，该情形会在局部出现不准确因而无代表性的变换，但是在无限大点阵中这样的情占比较少，不影响重整化群方法的应用。

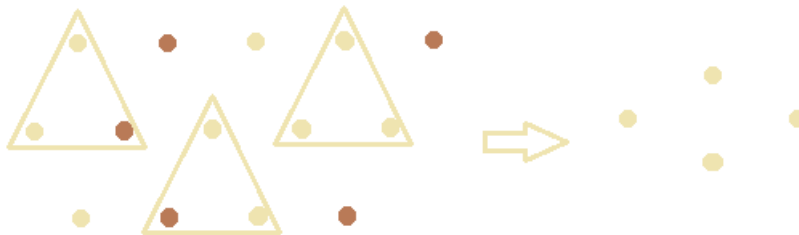


图 1 误差示例

D. 总结

本作业中运用上课教授的逾渗问题相关知识对三角格子点阵上二维座逾渗的重整化群变换表达式、临界点和临界指数进行了理论推导，与正确值进行了比较。然后简要分析了误差的大小及误差来源。

E. 附录：逾渗问题临界概率与临界指数表

表1.6.2.5-1 逾渗相变与磁相变的临界指数值，整数比是严格准确的值

模型	物理量	函数	临界指数	$d = 2$	$d = 3$	$d \geq 6$
逾渗模型	逾渗概率	$P_{\infty}(p) \sim (p - p_c)^{\beta}$	β	5/36	0.4	1
	集团平均大小	$S(p) \sim p - p_c ^{-\gamma}$	γ	43/18	1.8	1
	平均跨越长度	$\xi(p) \sim p - p_c ^{-\nu}$	ν	4/3	0.9	1/2
	电导率	$\sigma(p) \sim (p - p_c)^t$	t	1.1	1.65	3
Ising模型						$d \geq 4$
	磁化强度	$M(T) \sim (T_c - T)^{\beta}$	β	1/8	0.32	1/2
	磁化率	$\chi(T) \sim T - T_c ^{-\gamma}$	γ	7/4	1.24	1
	相关长度	$\xi(T) \sim T - T_c ^{-\nu}$	ν	1	0.63	1/2

表1.6.1.3-1 各种点阵下座逾渗与键逾渗的逾渗阈值 p_c

维数	点 阵	座逾渗 p_c	键逾渗 p_c	配位数
2	三角形	0.500000	0.34729	6
2	正方形	0.592746	0.50000	4
2	Kagome	0.6527	0.45	4
2	蜂房形	0.6962	0.65271	3
3	面心立方	0.198	0.119	12
3	体心立方	0.246	0.1803	8
3	简立方	0.3116	0.2488	6
3	金刚石	0.428	0.388	4
3	无规密堆积	0.27(实验值)		
4	简立方	0.197	0.160	8
5	简立方	0.141	0.118	10
6	简立方	0.107	0.094	12

F. 参考文献

《计算物理讲义》，丁泽军