第 8 题作业报告

PB18000341 范玥瑶

A. 作业题目

用 Monte Carlo 方法计算如下定积分，并讨论有效数字位数。

$$\int_0^2 dx\sqrt{x+\sqrt{x}},$$

$$\int_0^{9/10} dx\int_0^{4/5} dy\int_0^{9/10} dz\int_0^2 du\int_0^{13/10} dv\left(6-x^2-y^2-z^2-u^2-v^2\right)$$

B. 算法及主要公式

以下通过两种不同的方法计算积分，对平均值法由公式$\sigma_s=\sqrt{<f^2>-<f>^2}$计算标准差，由此讨论有效数字位数。

B.1.掷石法

算法为计算出被积函数 f（$u_0,u_1,\cdots\cdots,u_{p-1}$）的值域（m，M），用 Schrage 方法生成 N 个随机数，抽取相邻的 p+1（p:积分变量数目）个组成一组（$x_0,x_1,\cdots\cdots$，x_p），对前 p 个进行变换，生成积分区间上均匀分布的 p 个随机数（$X_0,X_1,\cdots\cdots,X_{p-1}$），令 X_p=m+x_p*(M-m),计算 f（$X_0,X_1,\cdots\cdots,X_{p-1}$）.

对第一个积分，m=0，f(x)>0.X=2x,Y=$\sqrt{2+\sqrt{2}}*y$,当 f(X)>=Y 时抽样成功，抽样次数 Q 加 1，积分值为 Q/N*2*$\sqrt{2+\sqrt{2}}$。

对第二个积分，m=-1.95<0,M=6,当 0<X_p<f($X_0,X_1,\cdots\cdots,X_{p-1}$)时 Q 加 1，当 0>$X_p$>f($X_0,X_1,\cdots\cdots,X_{p-1}$)时 Q 减一，积分值为$\frac{Q}{N}*\frac{9}{10}*\frac{4}{5}*\frac{9}{10}*2*\frac{13}{10}*\left(6-(-1.95)\right)=13.39416*\frac{Q}{N}$

B.2.平均值法

平均值法的算法为用 Schrage 方法生成 N=1E5 个随机点$\vec{x}$（单变量积分为随机数 x，多变量是随机数组(x,y,x,u,v)），求$f(\vec{x})$，对其求和为 F，除以 N 得平均值$<f(\vec{x})>$，积分值$\int f\,dx=\bar{f}V.V$为积分区域体积；对$f(\vec{x})^2$求和除以 N 得$<f(\vec{x})^2>$，标准差$\sigma_s=\sqrt{<f^2>-<f>^2}$，积分值误差$\sigma=\frac{V*\sqrt{<f^2>-<f>^2}}{\sqrt{N}}$。

C. 计算结果及具体分析、讨论

C.1.掷石法

编写程序，取 seed=1,输入 1E5 个点计算$\int_0^2\sqrt{x+\sqrt{x}}\,dx$，结果为 2.687787，利用 WolframAlpha 得到结果为 2.689521，有效位数为 3，误差率

$$\eta=|\frac{2.687787-2.689521}{2.689521}*100\%|\approx 0.06\%$$

编写程序，取 seed=1，输入 1E5 个点计算$\int_0^{0.9}dx\int_0^{0.8}dy\int_0^{0.9}dz\int_0^{2}du\int_0^{1.3}dv(6-x^2-y^2-z^2-u^2-v^2)$，结果为 5.628360，利用 WolframAlpha 得到结果为 5.644080，有效数字

位数 2，误差率

$$\eta = |\frac{5.628360 - 5.640080}{5.640080} * 100\%| \approx 0.21\%$$

C.2.平均值法

取 seed=1,N=1E5.

第一个积分输出结果 integer=2.690274, 与符号计算软件计算结果对比有效数字位数 3, 积分值标准差 0.002318，符合有效数字位数为 3.

误差率

$$\eta = |\frac{2.690274 - 2.689521}{2.689521} * 100\%| \approx 0.03\%$$

比投石法减小了接近一半。

第一个积分输出结果 integer=5.642095, 与符号计算软件计算结果对比有效数字位数 3, 积分值标准差 0.009758，有效数字位数为 2.

误差率

$$\eta = |\frac{5.642095 - 5.640080}{5.640080} * 100\%| \approx 0.04\%$$

与投石法接近。略大于投石法。

D. 总结

本次作业采用投石法和平均值法两种方法分别计算了 $\int_0^2 \sqrt{x+\sqrt{x}}\,dx$ 和 $\int_0^{0.9} dx \int_0^{0.8} dy \int_0^{0.9} dz \int_0^{2} du \int_0^{1.3} dv (6 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 - v^2)$两个积分，用标准差评价了平均值法的有效位数，通过和符号计算软件的计算结果对比得到有效数字位数，对估算结果进行了验证。单变量积分符合课上“平均值法的标准差和投石法接近而一般略小”的结论。两种积分对比可以验证“误差与积分维数无关，而与 N 有关”的结论。