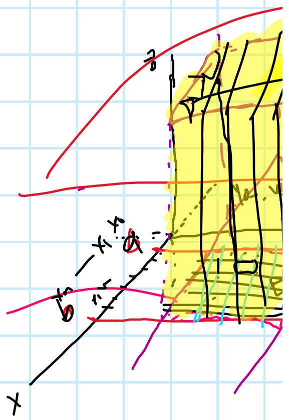
Integrales dobles

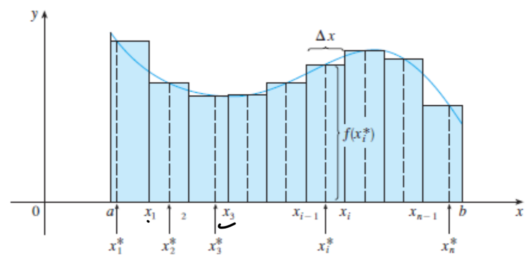
martes, 28 de febrero de 2023 11:01 a. m.

$z = f(x,y)$



Revisión de la integral definida

Primero recordaremos los hechos básicos relacionados con integrales definidas de una sola variable. Si $f(x)$ está definida para $a \leqslant x \leqslant b$, empezamos por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$ y elegimos puntos muestra x_i^* en estos subintervalos. Entonces formamos la suma de Riemann



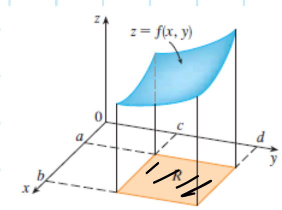
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

área

Volúmenes e integrales dobles

De una manera similar consideramos una función f de dos variables definidas sobre un rectángulo cerrado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$



y suponemos primero que $f(x, y) \geqslant 0$. La gráfica de f es una superficie con ecuación $z = f(x, y)$. Sea S el sólido que aparece arriba de R y debajo de la gráfica de f, es decir,

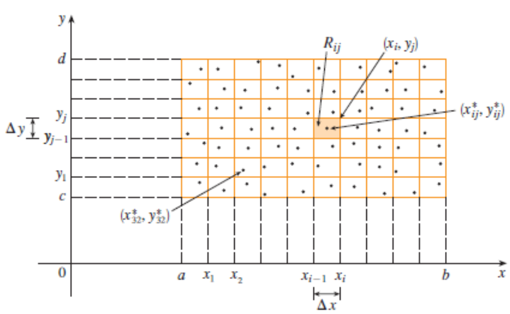
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant f(x, y),\ (x, y) \in R\}$$

(Véase la figura 2.) El objetivo es hallar el volumen de S.

El primer paso es dividir el rectángulo R en subrectángulos. Esto se hace dividiendo el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho $\Delta x = (b - a)/m$ y dividiendo $[c, d]$ en n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de igual ancho $\Delta y = (d - c)/n$. Al dibujar rectas paralelas a los ejes coordenados por los puntos extremos de estos subintervalos como en

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$

cada uno con un área $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$.



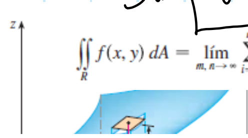
RA 3
ulos

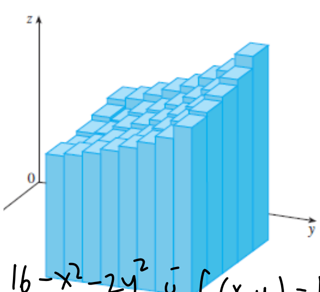
$dA = dx\,dy$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx =$$

si el límite existe.

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

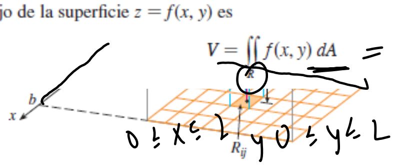




Si $f(x, y) \geqslant 0$, entonces el volumen V del sólido que está arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

d b

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA =$$

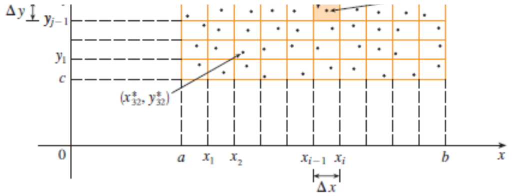


$0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$

$z = 16 - x^2 - 2y^2$ ó $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$

x

V EJEMPLO 1 Estime el volumen del sólido que está arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times$



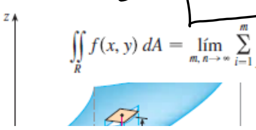
RA 3
ulos

$$dA = dx\,dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx =$$

si el límite existe.

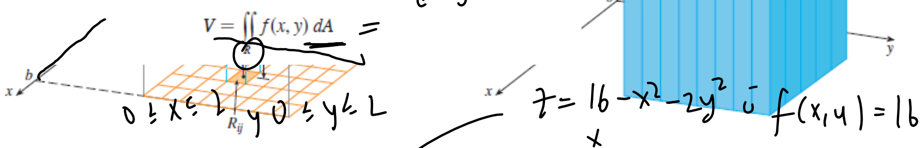
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta A$$



Si $f(x, y) \geq 0$, entonces el volumen V del sólido que está arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

d b

$$V = \iint_R f(x, y)\,dA =$$



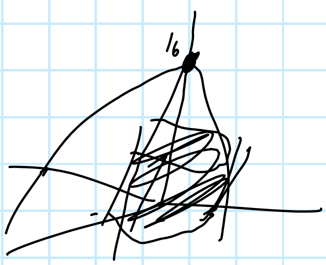
$0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le 2$

$z = 16 - x^2 - 2y^2$; $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$

x

y

V EJEMPLO 1 Estime el volumen del sólido que está arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y debajo del paraboloide elíptico $z = \boxed{16 - x^2 - 2y^2}$. ~~Divida R en cuatro cuadrados~~ iguales y elija el punto muestra como la esquina superior derecha de cada cuadrado R_{ij}. Bosqueje el sólido y las cajas rectangulares de aproximación.



$$\int_0^2 \left[\int_0^2 16 - x^2 - 2y^2\,dx \right] dy = \int_0^2 \int_0^2 16 - x^2 - 2y^2\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[(16 - 2y^2)x - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=2} \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left((16 - 2y^2)2 - \frac{2^3}{3} \right) - \cancel{\left((16 - 2y^2)0 - \frac{0^3}{3} \right)}^{\,0}\ dy$$

$$= \int_0^2 32 - 4y^2 - \frac{8}{3}\,dy = \left(32 - \frac{8}{3} \right) y - \frac{4}{3} y^3 \Big|_0^2$$

$$= 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = \underline{48}$$

$$\int_0^2 (16 - x^2)y - \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^2 \, d$$

$$= \int_0^2 32 - 2x^2 -$$

$$\left(32 - \frac{16}{3} \right)$$

$$= \underline{48}$$

Si $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, evalúe la integral

Valor promedio

Recuerde de la sección 6.5 que el valor promedio de una función f de una variable definida sobre un intervalo $[a, b]$ es

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx$$

De una manera similar se define el **valor promedio** de una función f de dos variables definidas sobre un rectángulo R como

$= 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = 48$

$= 48$

Si $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, evalúe la integral

Valor promedio

Recuerde de la sección 6.5 que el valor promedio de una función f de una variable definida sobre un intervalo $[a, b]$ es

$$f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

De una manera similar se define el **valor promedio** de una función f de dos variables definidas sobre un rectángulo R como

$$f_{prom} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x, y)\,dA$$

donde $A(R)$ es el área de R.

Si $f(x, y) \geq 0$, la ecuación

$$A(R) \times f_{prom} = \iint_R f(x, y)\,dA$$

$-1<x \quad x \leq [-1, 1]$

$y \leq [-2, 2]$

$\frac{1}{8}(2\pi) \approx \frac{\pi}{4}$

Propiedades de las integrales dobles

Se enlistan aquí tres propiedades de integrales dobles que se pueden probar de la misma manera que en la sección 5.2. Se supone que todas las integrales existen. Las propiedades 7 y 8 se conocen como *linealidad* de la integral.

7 $$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\,dA = \iint_R f(x, y)\,dA + \iint_R g(x, y)\,dA$$

8 $$\iint_R c f(x, y)\,dA = c\iint_R f(x, y)\,dA \qquad \text{donde } c \text{ es una constante}$$

Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para toda (x, y) en R, entonces

9 $$\iint_R f(x, y)\,dA \geq \iint_R g(x, y)\,dA$$

$\int_0^3\int_1^2 x^2+y\,dy\,dx$ $\int\int f(x,y)\,dA$ es un volumen

$\int_0^3 \frac{x^2y^2}{2} + y^2\Big|_{y=1}^{y=2} = \int_0^3 x^2 + \frac{3}{2}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x = \frac{3^3}{3} + \frac{9}{2} = 9 + \frac{9}{2} =$

EJEMPLO Evalúe las integrales iteradas.

a) $\int_0^3\int_1^2 x^2y\,dy\,dx$ b) $\int_1^2\int_0^3 x^2y\,dx\,dy$

$A(x)\int\int dA \Rightarrow$ área

$f(x,y) = \int_1^2\int_0^3 x^2y\,dx\,dy$

$\int_0^3\left[x^2\int_1^2 y\,dy\right]dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = 9\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right) = 9\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{2}$

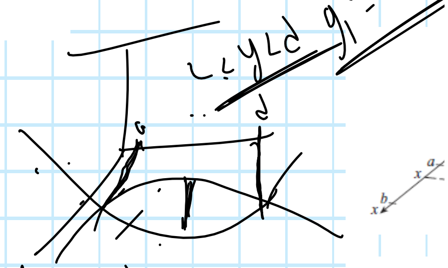
Si al

EJEMPLO 4 Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$ y los tres planos coordenados.

1 $$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx$$

$\int_0^2\int_0^2 16 - x^2 - 2y^2\,dy\,dx =$

$0 \leq y \leq 2$



La integral del lado derecho de la ecuación 1 se llama **integral iterada**. Por lo común se omiten los corchetes. Así,

2 $$\int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx$$

4 Teorema de Fubini Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces

Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para toda (x, y) en R, entonces

9 $$\iint_R f(x, y)\, dA \geq \iint_R g(x, y)\, dA$$

$\int_0^3\int_1^2 x^2 + y\, dy\, dx = \int_0^3 \frac{x^2 y}{} + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{y=2} = \int_0^3 x^2 + \frac{3}{2}\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x = \frac{3^3}{3} + \frac{9}{2} = 9 + \frac{9}{2} =$

$\iint f(x,y)\, dA$ es un volumen

área

EJEMPLO 1 Evalúe las integrales iteradas.

a) $\int_0^3\int_1^2 x^2 y\, dy\, dx$ b) $\int_1^2\int_0^3 x^2 y\, dx\, dy$

$A(x) \iint dA \Rightarrow$ área

$\boxed{f(x,y) = 1}$

$\int_0^3 \left(x^2 \int_1^2 y\, dy\right) dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = 9 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 9\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{2}$

$A(x)\, dx \int_c^d f(x, y)\, dy$

Si al

V EJEMPLO 4 Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$ y los tres planos coordenados.

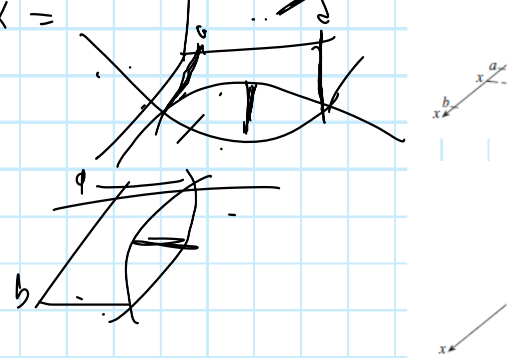
1 $\int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$

$\int_0^2\int_0^2 16 - x^2 - 2y^2\, dy\, dx =$

La integral del lado derecho de la ecuación 1 se llama integral iterada. Por lo común se omiten los corchetes. Así,

2 $$\int_a^b\int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$$

$c \leq y \leq d$ $g_1(y) \leq x \leq g_2$



4 **Teorema de Fubini** Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b\int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d\int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

En términos generales, esto es cierto si se supone que f está acotada sobre R, f es discontinua sólo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

y tenemos

$$\iint_R f(x, y)\, dA = V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b\int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

Un argumento similar, con secciones transversales perpendiculares al eje y como en la figura 2, muestra que

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d\int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

V EJEMPLO 2 Evalúe la integral doble $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. (Compare con el ejemplo 3 de la sección

Evalúe $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, donde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

$R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$. (Compare con el ejemplo 3 de la sección

Evalúe $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, donde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

V EJEMPLO 4 Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$ y los tres planos coordenados.