Zkouškový příklad NUM2, Marek Dědič

Zadání

Řešte metodou střelby okrajovou úlohu

$$-y'' + 16y = 8 \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{1a}$$

$$y(0) = \alpha \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta \tag{1b}$$

Úpravy

Rovnice (1a) je nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice má tvar

$$-\lambda^2 + 16 = 0 \tag{2}$$

Charakteristickou rovnici lze upravit do tvaru

$$(\lambda + 4)(\lambda - 4) = 0 \tag{3}$$

Tedy fundamentální systém řešení (1a) je $\left\{e^{4x}, e^{-4x}\right\}$ a homogenní řešení má tvar

$$y_H = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} \tag{4}$$

Neboť pravá strana (1a) je konstantní, partikulární řešení lze snadno určit jako

$$y_P = \frac{1}{2} \tag{5}$$

A tedy obecné řešení (1a) bude tvaru

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{2} \tag{6}$$

Pro určení koeficientů C_1 a C_2 využijeme tří různých přístupů.

Analytické řešení

Tvar (6) můžeme dosadit přímo do okrajových podmínek (1b) a tím dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha &= C_1 + C_2 + \frac{1}{2} \\ \beta &= C_1 e^{2\pi} + C_2 e^{-2\pi} + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

kterou lze vyřešit, čímž dostaneme analytické řešení (1) ve tvaru

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(2\beta - 1) + e^{-2\pi}(1 - 2\alpha)}{4 sinh(2\pi)} \\ C_2 &= \alpha - \frac{1}{2} - C_1 \\ y &= C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

Metoda střelby

Okrajovou úlohu (1) nahradíme počáteční úlohou tvaru

$$-y'' + 16y = 8 \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{9a}$$

$$y(0) = \alpha \qquad y'(0) = \gamma \tag{9b}$$

Kde zavádíme proměnnou γ a tedy $y = y\left(x; \gamma\right)$. Pro nějaké γ^* platí

$$y\left(\frac{\pi}{2}; \gamma^*\right) = \beta \tag{10}$$

Definujeme funkci $F\left(\gamma\right)$

$$F\left(\gamma\right) = y\left(\frac{\pi}{2}; \gamma\right) - \beta \tag{11}$$

pro kterou platí

$$F\left(\gamma^*\right) = 0 \tag{12}$$

Tvar (6) dosadíme do počátečních podmínek (9b), čímž získáme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha &= C_1 + C_2 + \frac{1}{2} \\ \gamma &= 4C_1 - 4C_2 \end{aligned} \tag{13}$$

kterou lze upravit do tvaru

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{8} - \frac{1}{4} \\ C_2 &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{8} - \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{14}$$

Dosadíme (6) do (12), čímž spolu s předcházejícími vztahy dostáváme úlohu

$$\begin{aligned} C_1\left(\gamma\right) &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{8} - \frac{1}{4} \\ C_2\left(\gamma\right) &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{8} - \frac{1}{4} \\ F\left(\gamma^*\right) &= C_1\left(\gamma^*\right) e^{2\pi} + C_2\left(\gamma^*\right) e^{-2\pi} + \frac{1}{2} - \beta = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

K hledání řešení γ^* můžeme využít dvou přístupů.

Metoda půlení intervalu

Musíme nalézt počáteční hodnoty γ_L a γ_R takové, aby

$$F\left(\gamma_L\right) F\left(\gamma_R\right) < 0 \tag{16}$$

Poté v každém kroku určíme

$$\gamma_M = \frac{\gamma_L + \gamma_R}{2} \tag{17}$$

a nahradíme

$$\gamma_L = \gamma_M \qquad \text{pokud} \quad F\left(\gamma_L\right) F\left(\gamma_M\right) > 0 \tag{18a}$$

$$\gamma_R = \gamma_M \qquad \text{jinak} \tag{18b}$$

Tím se nám interval $\left(\gamma_L, \gamma_R\right)$ o polovinu zmenšil. Krok (18) opakujeme, dokud nedosáhneme požadované přesnosti.

Newtonova metoda

Vybereme náhodné $\gamma^{(0)}$ a v každém kroku nahradíme

$$\gamma^{(k+1)} = \gamma^{(k)} - \frac{F\left(\gamma^{(k)}\right)}{F'\left(\gamma^{(k)}\right)} \tag{19}$$