<u>פונקציות אסימפטוטיות</u>

שיעור גידול של זמן הריצה של אלגוריתם מספק דרך פשוטה לאפיון יעילות האלגוריתם וגם להשוואת ביצועים יחסיים של אלגוריתמים אפשריים שונים לפתרון אותה בעיה.

עבור קלטים גדולים דיים, השפעתם של קבועים הכפולים והאיברים מן הסדר הנמוך המופיעים בנוסחה מדויקת לתיאור זמן הריצה, מתגמדת לעומת השפעתו של גודל הקלט עצמו.

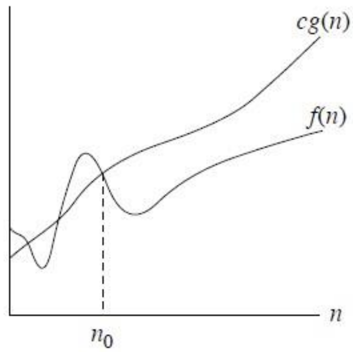
לחקירת קלטים גדולים מספיק כדי שהגורם המשמעותי היחיד יהיה שיעור הגידול של זמן הריצה. לחקירה כזו, קוראים **חקירת היעילות האסימפטוטית של אלגוריתמים**.

השאלה היא "למה שואף זמן הריצה כשגודל הקלט שואף לאינסוף?" שעור הגידול נקרא לפעמים **סדר גודל של זמן הריצה**.

על מנת שנוכל להשוות אלגוריתמים ולקטלג אותם לפי זמני הריצה נשתמש **בפונקציות האסימפטוטיות**.

- O (Big O)
- Ω (Big Omega)
- Θ (Big Theta)

<u>O – חסם עליון</u>



O(g(n)) – קרי "או גדול של g של n" - קבוצה של פונקציות

f(n) = O(g(n))

הגדרה:

$$O(g(n)) = \{ f(n) : \text{ there exist positive constants } c \text{ and } n_0 \text{ such that } 0 \le f(n) \le cg(n) \text{ for all } n \ge n_0 \} .$$

דוגמה:

$2n^2 = O(n^3)$ $c = 1$ $n_0 = 2$

דוגמאות לפונקציות השייכות ל- $O(n^2)$:

$n^2, n^2 + n, n^2 + 100n, n/1000, n^{1.999}$

שאלה 1: מה זמן ריצה של קוד הבא במונחים של $O(\ldots)$?

```
f(n)
    n ←0
    n ←   205/8
    n ←   n/12
    n ←1280*n
```

שאלה 2: מה זמן ריצה של קוד הבא במונחים של $O(\ldots)$?

```
for i←1 to n/2 do
   for j ←1 to n*n do
     sum ← sum +1
```

שאלה 3

יש להוכיח לפי ההגדרה: $n^2 = O(n^3)$.

שאלה 4

הראו על פי הגדרה ש- $10n^2 + 5n$ ונמצא ב- $O(n^2)$.

שאלה 5

טענה: $n^2 \neq O(n)$. הוכחו או הפריכו.

<u>שאלה 6 (מבחן 2018, סמסטר א', מועד ב')</u>

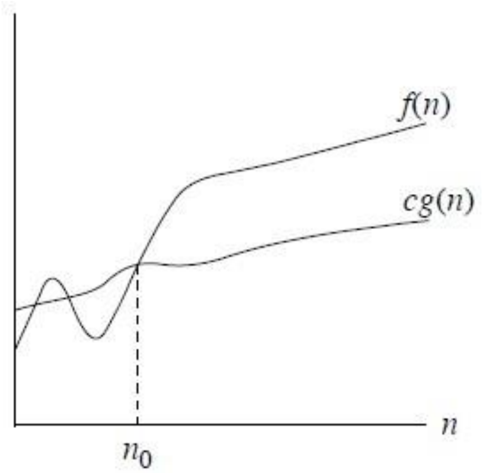
טענה: $(n+1)^5 = O(n^5)$. הוכיחו או הפריכו.

<u>שאלה 7</u>

נתון קבוע שלם k>0.

א. האם מתקיים $2^{n+k} = O(2^n)$ לכל ערך של k?
ב. האם מתקיים $2^{kn} = O(2^n)$ לכל ערך של k?

<u>Ω – חסם תחתון</u>



$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ there exist positive constants } c \text{ and } n_0 \text{ such that } 0 \le cg(n) \le f(n) \text{ for all } n \ge n_0\} .$$

<u>דוגמה:</u> $\sqrt{n} = \Omega(\log(n))$ כאשר $n_0 = 1$ c=1

דוגמאות של פונקציות השייכות ל-$\Omega(n^2)$:

n^2, $n^2 + n$, $n^2 - n$, $1000n^2 + 1000n$, n^3, 2^{2n}

עוד דוגמה: $f(n) = \Omega(g(n))$

נבחר: $f(n) = n$ $g(n) = 3n$

לפי ההגדרה קיימים קבועים c>0 ו$n_0 \in N$ שלכל $n \ge n_0$ מתקיים : $c \times 3n \le n$.
אם נקח

$c = ¼$ $n_0 = 1$ נקבל שאי שוויון מתקיים.

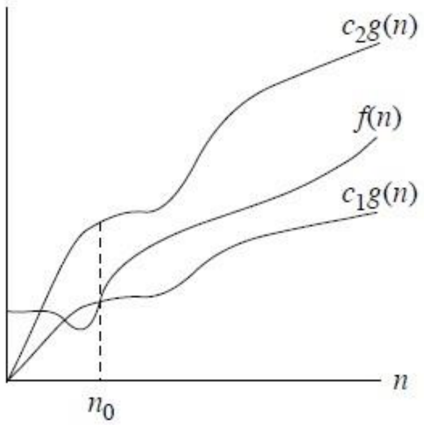
$f(n) \ge 1/4 * g(n)$ $(n \ge 3/4 * n)$

f(n) "לכל הפחות" בסדר גודל של g(n).

שאלה 8 (מבחן 2018, סמסטר א', מועד ב')

טענה: $3n \times \log(n) + 2n = \Omega(n \times \log(n))$ הוכיחו או הפריכו.

Θ – חסם "הדוק"



$\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ there exist positive constants c_1, c_2, and n_0 such that $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ for all $n \ge n_0\}$.

Example: $n^2/2 - 2n = \Theta(n^2)$, with $c_1 = 1/4$, $c_2 = 1/2$, and $n_0 = 8$.

שאלה 9

נוכיח שלכל קבועים ממשיים a ו-b, כאשר b>0, מתקיים:

$$(n + a)^b = \Theta(n^b)$$