

Ficha de Exercícios n.º 2

Característica de uma matriz

1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) Transforme as matrizes em matrizes triangulares superiores.
- b) Determine a característica das matrizes.

2. Determine a característica de cada uma das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 8 \\ -6 & 4 & -7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & -10 & -2 \\ 3 & 6 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Determine k por forma que a característica da matriz seja igual a 3.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & k & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

- a) Diga, justificando, se a matriz é invertível.
- b) Calcule a inversa de A, caso seja possível.

5. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine a característica de A.

b) Calcule a inversa de B.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

a) Determine a característica da matriz.

b) Justifique que A é invertível.

c) Determine a inversa de A.

7. Determine as inversas das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Considere A, B e C matrizes invertíveis:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolva as seguintes equações matriciais, em ordem a X.

a) $XA = B$

e) $AXB = AB$

b) $X^{-1}A = B$

f) $AXB = BA$

c) $AX^{-1} = B$

g) $[(AX)^{-1}B]^T = C$

d) $(AX)^T = B$

Parte I: Álgebra Linear

Matrizes: Característica de uma matriz Matriz Inversa

SOLUÇÕES:

1. a) Por exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -10/9 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $C(A)=C(B)=C(C)=3$

2. $C(A)=C(B)=C(C)=C(D)=3$ $C(E)=1$

3. $K=2$ ou $K=-6$

4. a) A invertível b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

5. a) A invertível b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

6. a) $C(A)=3$ c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} & \frac{5}{5} \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -28 \\ -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ C e D não são invertíveis

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{60} & -\frac{7}{30} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{30} & -\frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{11}{20} & \frac{3}{10} & \frac{7}{20} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

8. a) $X = BA^{-1} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$ b) $X = AB^{-1} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

Parte I: Álgebra Linear
Matrizes: Característica de uma matriz
Matriz Inversa

c) $X = B^{-1}A \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 \\ -2 & 20 & 32 \\ 1 & -8 & -13 \end{bmatrix}$

d) $X = A^{-1}B^T \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 & -1 \\ -7/2 & 1 & 2 \\ 5/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

e) $X = I \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $X = A^{-1}BAB^{-1} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & -7/2 & 19/2 \\ 18 & -73/2 & 177/2 \\ -11 & 45/2 & -109/2 \end{bmatrix}$

g) $X = A^{-1}B(C^{-1})^T \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ -3 & 5/2 & 8 \\ 2 & -3/2 & -5 \end{bmatrix}$