ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR PROFISSIONAL IPCA

Cap.1 – Funções reais de variável real em IR

Apontamentos da Aula 5

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

1. Generalidades de funções

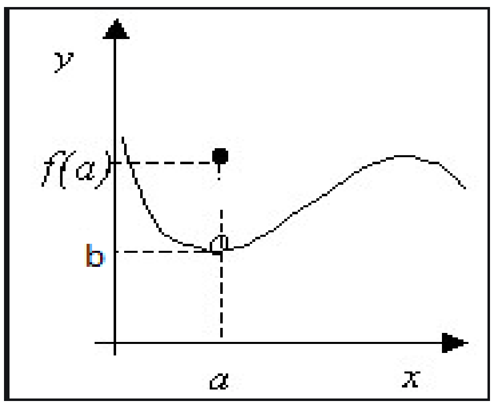
✓ **Limites**

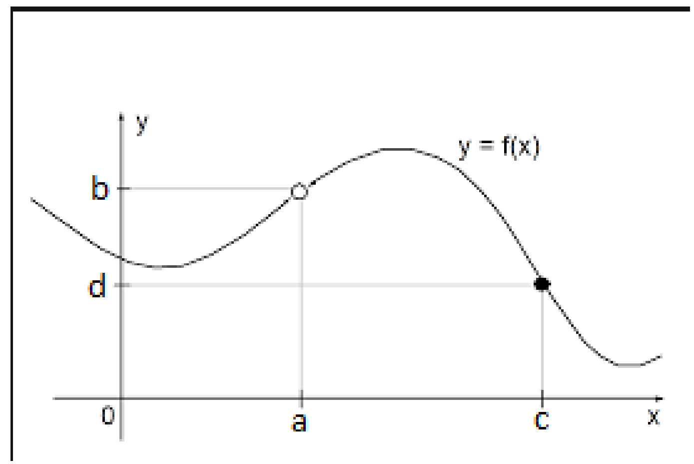
- Noção intuitiva de limite
- Operações com limites
- Limites laterais

Limites

Noção intuitiva de limite

O significado intuitivo da expressão $\lim_{x \to a} f(x) = b$ é o de que se considerarmos apenas valores de x suficientemente próximos de a, os valores correspondentes f(x) estarão tão próximos quanto se queira de b.



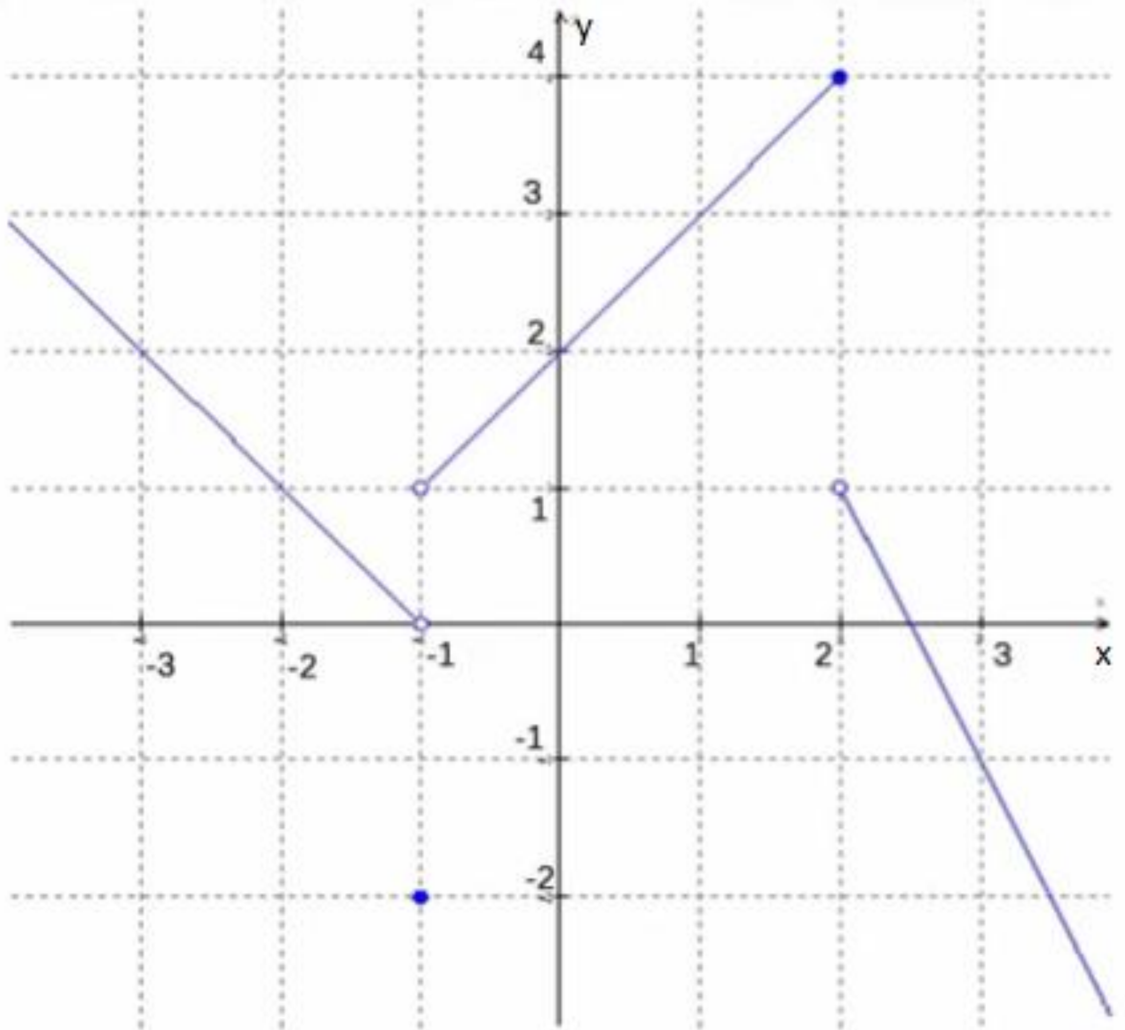


✓Não se exige assim, que o ponto a pertença ao domínio de f;

✓O facto de $\lim_{x \to a} f(x) = b$, nada nos diz acerca do valor de f(a).

Noção intuitiva de limite

Considere o gráfico seguinte:



Noção intuitiva de limite

Exercício 5:

Por observação do gráfico, calcule:

1. $\lim_{x \to -1^+} f(x)$
2. $\lim_{x \to -1^-} f(x)$
3. $\lim_{x \to 2^+} f(x)$
4. $\lim_{x \to 2^-} f(x)$
5. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
6. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
7. $\lim_{x \to 0} f(x)$
8. $\lim_{x \to -1} f(x)$
9. $\lim_{x \to 2} f(x)$
10. $\lim_{x \to 1} f(x)$
11. $\lim_{x \to 3} f(x)$

Operações com limites

❖ **Unicidade do limite**

Se o limite de uma função f(x) existe então ele é único.

Matematicamente falando temos que:

$$\boxed{\text{Se } \lim_{x\to a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to a} f(x) = A \text{, então } L = A.}$$

Nota: Para obter o limite de f(x) quando x tende para a, é suficiente, substituir em f(x) o x por a.

Operações com limites

Exercício 6:

Calcule cada um dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 4} (x^2 + 3)$;

b) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 3x + 1)$;

c) $\lim_{x \to 2} [(2x + 4)(3x^2)]$;

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + x^2}{x}$.

Limites laterais

❖ Limites laterais iguais com $a \notin D_f$

Se os limites laterais de *f* no ponto a existirem e

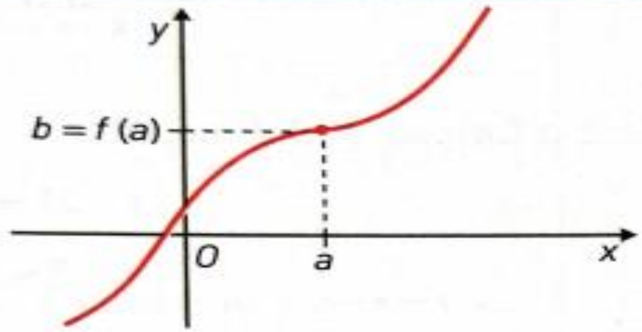
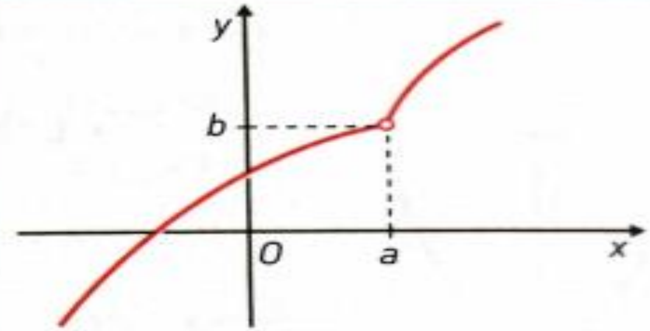
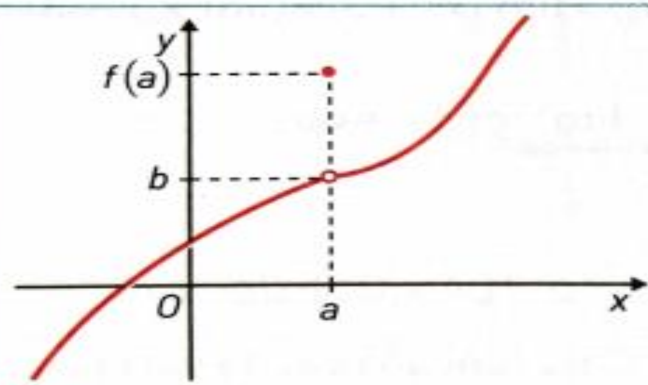
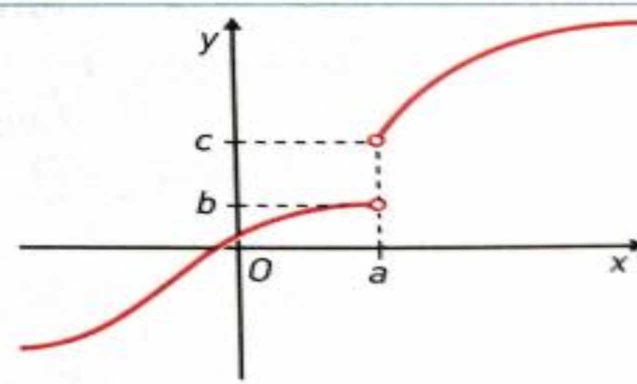
$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b}$ então $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = b}$

❖ Limites laterais iguais com $a \in D_f$

Se os limites laterais de *f* no ponto a existirem e forem ambos iguais a *f(a)*, então existe $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)}$ e $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$

Limites laterais

Resumindo:

	$a \in D_f$	$a \notin D_f$
Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$	 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$	 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$
Não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$	 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b \neq f(a)$	 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Limites laterais

Exercício 7:

Estude a existência de limite f(x), quando x tende para 2, das seguintes funções:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & , \text{se } x < 2 \\ 0 & , \text{se } x = 2 \\ 1 - x & , \text{se } x > 2 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \text{se } x > 2 \\ 1 & , \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Limites laterais

Exercícios Propostos:

- **Ficha de Exercícios n.º1**

  Exercícios 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16

- **Ficha Extra n.º1**

  Exercício 3, 8, 9, 10