ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR PROFISSIONAL IPCA

Parte I – Álgebra Linear

Apontamentos da Aula 1

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

1. Matrizes

- Conceitos Gerais
- Operações com matrizes

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Conceitos Gerais

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Matrizes: conceitos gerais

Considere a experiência: Lançamento de dois dados, efetuar a soma das faces e registar os resultados possíveis

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Matrizes: conceitos gerais

Definição: Matriz é uma tabela constituída por m linhas e n colunas

Tipo m*n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elementos opostos

Diagonal principal (quando m = n)

$$A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n} \quad , i = 1,2,\cdots,m \, , \; j = 1,2,\cdots,n$$

a_{ij} – escalares

Matrizes: conceitos gerais

Diagonal principal

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Matrizes: conceitos gerais

Tipos de matrizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \Rightarrow \textbf{Matriz linha}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \Rightarrow \textbf{Matriz coluna}$$

Matrizes: conceitos gerais

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz retangular

m ≠ n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada

m = n

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz nula

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Matrizes: conceitos gerais

Matrizes Quadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal é uma matriz em que todos os elementos são nulos quando $i \neq j$.

Nota: Se os elementos da diagonal principal tomarem o mesmo valor, a matriz chama-se **matriz escalar**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior é uma matriz em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

Matrizes: conceitos gerais

Matrizes Quadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior é uma matriz em que os elementos acima da diagonal principal são nulos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade (unidade) é uma matriz escalar de qualquer ordem em que todos os elementos são iguais a 1 para $i = j$.

Matrizes: conceitos gerais

Igualdade de matrizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} \end{bmatrix}$$

- Devem ter a mesma ordem, ou seja, o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas $\boxed{m = k \quad e \quad n = l}$
- Os elementos devem ser iguais aos seus correspondentes

$$\boxed{a_{11} = b_{11}\,,\; a_{12} = b_{12}\,, \ldots,\; a_{mn} = b_{kl}}$$

Matrizes: conceitos gerais

Exercícios:

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Indique o tipo desta matriz.

b) Indique na matriz os seguintes elementos: $a_{11}, a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$.

2. Determine os valores de *a* e *b* de modo que as matrizes A e B sejam iguais.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ b & 1 & -1 \\ -2 & a & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Matrizes: conceitos gerais

3. Diga que designação especial tem cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Matrizes: conceitos gerais

4. Determine os valores de *a*, *b*, *c* nas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ a & 2 & 5 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

de modo que:

a) A seja uma matriz triangular superior.

b) B seja uma matriz diagonal.

c) B seja uma matriz escalar.

d) B seja uma matriz identidade.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Matrizes: conceitos gerais

Exercícios Propostos:

- **Ficha de Exercícios n.º1**

  Exercício 1

- **Ficha Extra n.º1**

  Exercício 1.a)

Operações com matrizes
Propriedades

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações com matrizes

Adição de matrizes

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{A_{m\times n} + B_{p\times q}} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$m \neq p \quad \vee \quad n \neq q$$

Operações com matrizes

Propriedades

Sejam A, B, C e D matrizes do tipo $m \times n$.

I) Comutatividade: $A + B = B + A$

II) Associatividade: $(A + B) + C = A + (B + C)$

III) Existência de elemento neutro (matriz nula): $A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$

IV) Existência de elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = O_{m\times n}$

V) Se $A = B$ e $C = D$, então $A + C = B + D$

Operações com matrizes

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Dada a matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ da multiplicação do escalar k pela matriz A resulta uma outra matriz $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, do mesmo tipo, cujos elementos são iguais ao produto do escalar, k, por cada elemento da matriz A:

$c_{ij}=k\,a_{ij},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n$.

$$-3\times\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -9 & -6\\ 3 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações com matrizes

Propriedades:

Dadas as matrizes A e B do mesmo tipo e k e t escalares reais:

I) $k\left(A+B\right)=kA+kB$

II) $\left(k+t\right)A=kA+tA$

III) $k\left(tA\right)=\left(kt\right)A$

IV) $1A=A$

Operações com matrizes

Multiplicação de Matrizes

Dadas duas matrizes $A=\left[a_{ij}\right]$ do tipo $m\times p$ e $B=\left[b_{ij}\right]$ do tipo $p\times n$, (**o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda**), o produto destas duas matrizes é uma outra matriz, $C=\left[c_{ij}\right]$ do tipo $m\times n$ tal que:

$$c_{ij}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}\end{pmatrix}}_{\text{linha } i \text{ de } A}\times \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj}\end{pmatrix}}_{\text{coluna } j \text{ de } B}=a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+\cdots+a_{ip}\times b_{pj}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}\left(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,p\right)$$

Operações com matrizes

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1*9+2*8+3*7 & 1*3+2*4+3*5 \\ 7*9+8*8+5*7 & 7*3+8*4+5*5 \end{pmatrix}$$

Operações com matrizes

Exemplo (cont.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1*9+2*8+3*7 & 1*3+2*4+3*5 \\ 7*9+8*8+5*7 & 7*3+8*4+5*5 \end{pmatrix}$$

Operações com matrizes

Exemplo (cont.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1*9+2*8+3*7 & 1*3+2*4+3*5 \\ 7*9+8*8+5*7 & 7*3+8*4+5*5 \end{pmatrix}$$

Operações com matrizes

Exemplo (cont.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1*9+2*8+3*7 & 1*3+2*4+3*5 \\ 7*9+8*8+5*7 & 7*3+8*4+5*5 \end{pmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações com matrizes

Propriedades

Dadas as matrizes A **e** B **do tipo** $m\times p$ **e** $p\times n$ **respectivamente:**

I) Associatividade: $(AB)C = A(BC)$**, com** C **matriz do tipo** $n\times m$**.**

II) Existência de elemento neutro: $AI_p = I_m A = A$

III) Distributividade da multiplicação à direita e à esquerda em relação à adição:

i) $A(B+C) = AB + AC$**, com** C **matriz do tipo** $p\times n$

ii) $(B+C)D = BD + CD$**, com** C **matriz do tipo** $p\times n$ **e** D **matriz do tipo** $n\times q$**.**

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações com matrizes

<u>Obs</u>: A multiplicação de matrizes <u>não é comutativa</u>**.**

$$A \times B \neq B \times A$$

Exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Então:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

<u>Definição:</u> A e B dizem-se **matrizes permutáveis** se e só se $A \times B = B \times A$

Operações com matrizes

<u>Potenciação</u>

A potencia de ordem k, $k \in \Re$ da matriz A quadrada, A^k, é dada por:

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ factores}}$$

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ então $A^3 = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}$.

Operações com matrizes

Matriz Transposta

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Trocam-se ordenadamente linhas por colunas

Matriz simétrica

Def. Uma matriz quadrada diz-se **simétrica** se e só se $A = A^T$

Operações com matrizes

Propriedades

Dadas as matrizes $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$:

I) $\left(A^T\right)^T = A$

II) $(A+B)^T = A^T + B^T$

III) $(AB)^T = B^T A^T$

IV) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{R}$

V) $\left(A^k\right)^T = \left(A^T\right)^k, k \in \mathbb{R}$

Operações com matrizes

Exercícios:

1. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

calcule:

a) $A\,.\,B + C$

b) $2B\,.\,3A$

c) C^3

Operações com matrizes

2. Determine os valores de *a*, *b* e *c*, para que as matrizes A e B sejam simétricas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & b \\ a & 3 & 2 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & a & 1 \\ 3 & c & 0 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

Exercícios Propostos:

- **Ficha de Exercícios n.º1**

  Exercício 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- **Ficha Extra n.º1**

  Exercício 1.b). 2, 3, 4, 5, 6

Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia