ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR PROFISSIONAL IPCA

Parte I – Álgebra Linear

Apontamentos da Aula 3

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

1. Matrizes

- ✓ Operações elementares com matrizes
- ✓ Característica de uma matriz

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações elementares sobre matrizes

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações elementares sobre matrizes

Tipos de operações elementares:

1-Permuta de duas linhas (colunas);

2-Multiplicação de uma linha (coluna) por um escalar diferente de zero;

3-Adição aos elementos de uma linha (coluna) os elementos correspondentes de uma outra linha (coluna) paralela multiplicada por um qualquer escalar.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações elementares sobre matrizes

Definição: Matrizes equivalentes

Duas matrizes dizem-se equivalentes, e escreve-se **A ~ B**, se uma delas puder ser obtida da outra realizando um número finito de operações elementares.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações elementares sobre matrizes

- Aplicando uma operação elementar do tipo 1 , trocamos 2 linhas à matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{L1 \Leftrightarrow L3}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Ou duas colunas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{C1 \Leftrightarrow C3}{\sim} \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 10 & 8 & 0 \\ 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações elementares sobre matrizes

- Aplicando uma operação elementar do tipo 2, multiplicamos 1 linha por 1 escalar:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{L1 = 2 * L1}{\sim} \begin{bmatrix} 2*2 & 4*2 & 6*2 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Ou uma coluna por um escalar:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{C1 = 2 * C1}{\sim} \begin{bmatrix} 2*2 & 4 & 6 \\ 0*2 & 8 & 10 \\ 4*2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações elementares sobre matrizes

- Aplicando uma operação elementar do tipo 3 na linha L2, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{L2 = L2 + 2 * L1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \boxed{0+(2*2) \quad 8+(2*4) \quad 10+(2*6)} \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Ou na coluna C2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{C2 = C2 + 2 * C1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 4+(2*2) & 6 \\ 0 & 8+(2*0) & 10 \\ 4 & 8+(2*4) & 12 \end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Método da Condensação

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Método da Condensação

$$A = [a_{ij}]_{mxn}$$

Fase 1

Tome-se $a_{11} \neq 0$ (se $a_{11} = 0$, troca-se a primeira linha com outra, de modo a que a_{11} seja não nulo, a esta operação chama-se pivotagem, se a primeira linha for toda nula, troca-se com a última linha e repete-se o raciocínio), designando-se este por elemento redutor ou pivot.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Método da Condensação

Fase 2

Fixado o elemento $\mathbf{a}_{11}$

Determinamos escalares λ_i , $\mathbf{i} = 2,\ldots,\mathbf{m}$

$$\lambda_i \mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{i1} = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

soma-se à linha i a primeira multiplicada por λ_i anulando-se, assim, todos os elementos abaixo de $\mathbf{a}_{11}$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Método da Condensação

Fase 3

Na matriz obtida procede-se do mesmo modo, desta vez tomando como elemento redutor a_{22}, e assim sucessivamente, até um determinado elemento a_{rr} . A condensação termina, obtendo-se a matriz condensada A', quando:

NORTE 2030 Programa Regional do Norte PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Método da Condensação

Não existem mais colunas

$$r = n \quad A' = \left[\begin{array}{cccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rn} \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

Não existem mais linhas

$$r = m$$

$$A' = \left[\begin{array}{cccc:ccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1m} & a'_{1,m+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2m} & a'_{2,m+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mm} & a'_{m,m+1} & \cdots & a'_{mn} \end{array}\right]$$

Existem apenas linhas nulas

$$A' = \left[\begin{array}{cccc:ccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \quad r < m$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Método da Condensação

Exercício:

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Obtenha a matriz condensada da matriz A.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte · PORTUGAL 2030 · Cofinanciado pela União Europeia

Característica de uma matriz

NORTE 2030
Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela
União Europeia

Característica de uma matriz

Característica de uma matriz utilizando o método da condensação

A característica de uma matriz pode ser obtida por condensação, e corresponde à ordem da submatriz triangular superior da matriz condensada, ou seja,

$$\mathbf{car(A) = r}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Característica de uma matriz

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{L_2 = L_2 - 4L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Característica de uma matriz

$$\underset{L_3 = L_3 - 7L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \underset{L_3 = L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observando a diagonal principal da matriz resultante, podemos concluir que CAR(A)=2, pois existem 2 elementos $\neq 0$.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Característica de uma matriz

Exercício:

1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 11 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Determine as respetivas características.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Característica de uma matriz

Exercício Propostos:

- **Ficha de Exercícios n.º2**

  Exercícios 1, 2, 3, 5.a), 6.a)

- **Ficha Extra n.º2**

  Exercícios 1, 2

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia