

Cap.1 – Funções reais de variável real em IR

Fundamentos de Matemática

Curso Técnico Superior Profissional

Ana Isabel Araújo

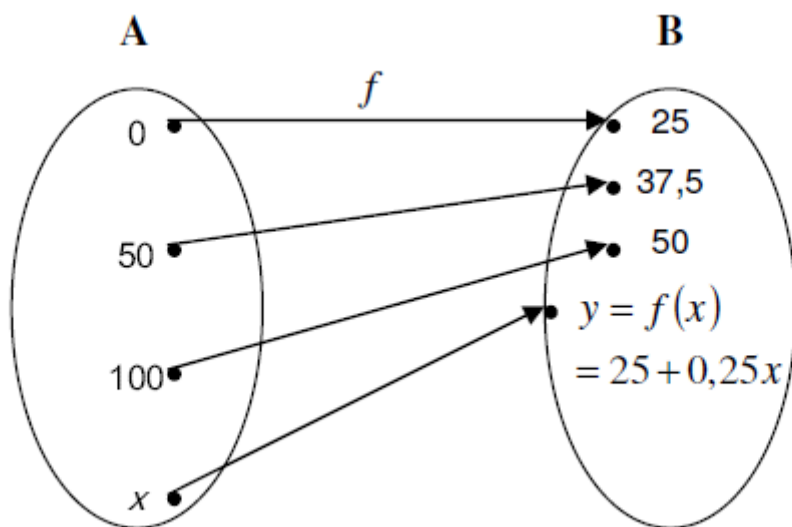
aiaraujo@ipca.pt

Conceitos gerais

Conceitos Gerais

Conceito de função

Considere que o custo de aluguer de um automóvel, num local de férias, é de 25 € de taxa fixa acrescido de 0,25 € por cada km percorrido.



$$\begin{array}{l} A \rightarrow X \\ B \rightarrow Y \end{array}$$

Se a Ana alugou um automóvel e percorreu 80 km, ela pagou o aluguer em função do número de km que percorreu.

Conceitos Gerais

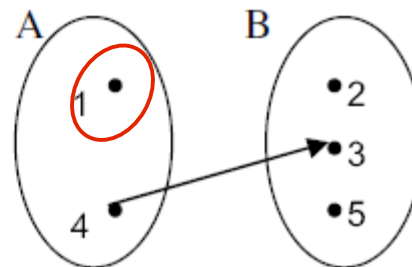
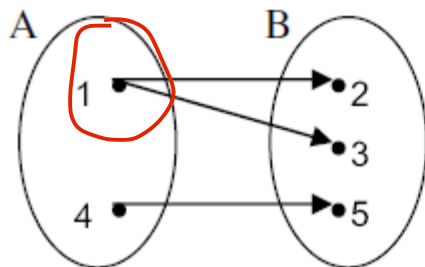
Definição: Função

Dá-se o nome de função ou aplicação f a uma correspondência entre um conjunto A e um conjunto B que a cada elemento x do primeiro conjunto faz corresponder um e um só elemento $y = f(x)$ do segundo conjunto.

Conceitos Gerais

Exemplo:

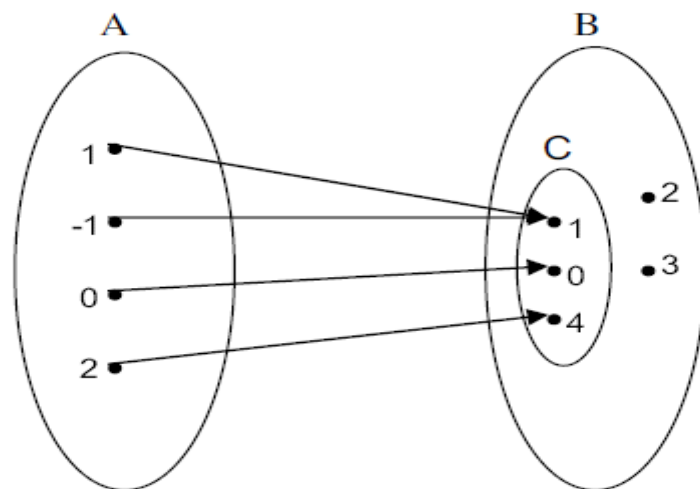
Não são funções as seguintes correspondências entre A e B:



Conceitos Gerais

Exemplo:

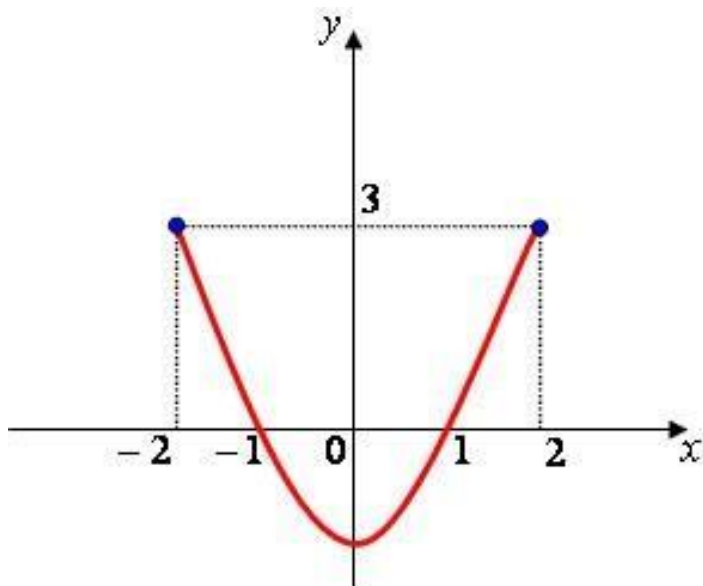
É função a seguinte correspondência entre A e B:



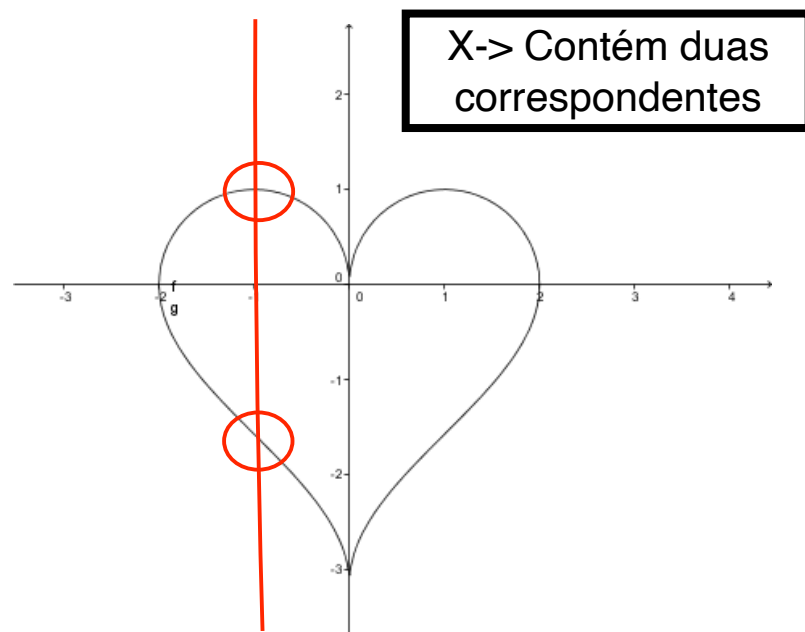
Conceitos Gerais

Exemplo:

FUNÇÃO



NÃO FUNÇÃO



Conceitos Gerais

De um modo geral, tem-se:

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

expressão:

$$f(x)=2x+1$$

- x é o **objeto**, $y = f(x)$ é a **imagem**;
- y é a **variável dependente**;
- x é a **variável independente**;
- A é o **domínio** (D_f ou D) ou conjunto dos objetos;
- B é o **conjunto de chegada** da função;
- D'_f ou Im_f é o **contradomínio** ou conjunto das imagens.

Conceitos Gerais

Definição: Domínio de uma Função

O domínio de uma função é o conjunto de valores de “entrada” para os quais a função é definida.

Nota: Quando o domínio e o conjunto de chegada de uma função são subconjuntos de \mathbb{R} , a função diz-se *função real de variável real*.

Como determinar o domínio e o contradomínio em funções representadas graficamente?

O domínio de uma função definida por uma representação gráfica é o conjunto das abcissas dos pontos da curva.

Conceitos Gerais

E em funções definidas por expressão analítica, como determinar o domínio?

Há condições a impor ao domínio de uma função representada por uma expressão analítica:

- Uma função polinomial : $D=\mathbb{R}$

- Uma função com uma variável no denominador , $y = \frac{f(x)}{g(x)}$:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

- Uma função com uma variável dentro de uma raiz índice par, $y = \sqrt[2n]{g(x)}$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\}$$

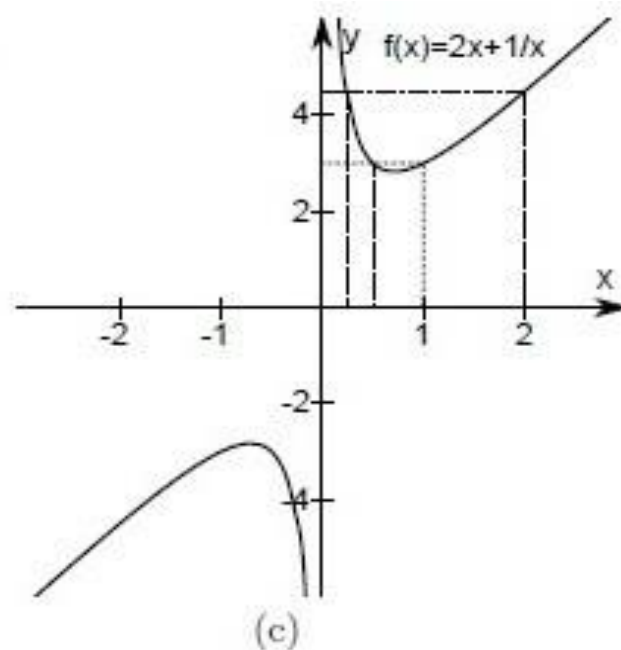
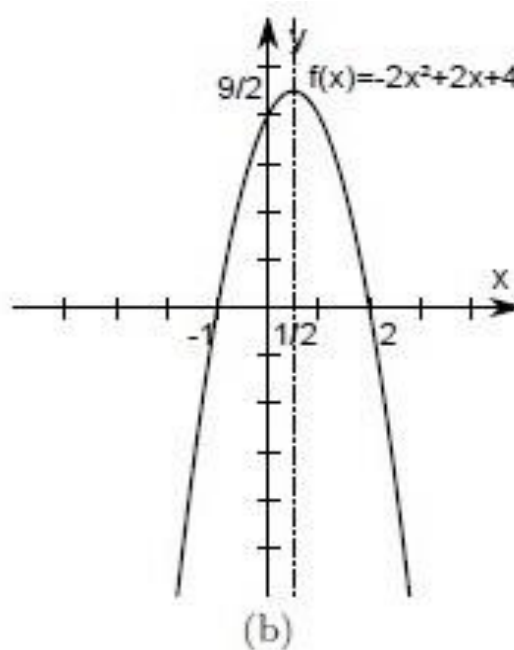
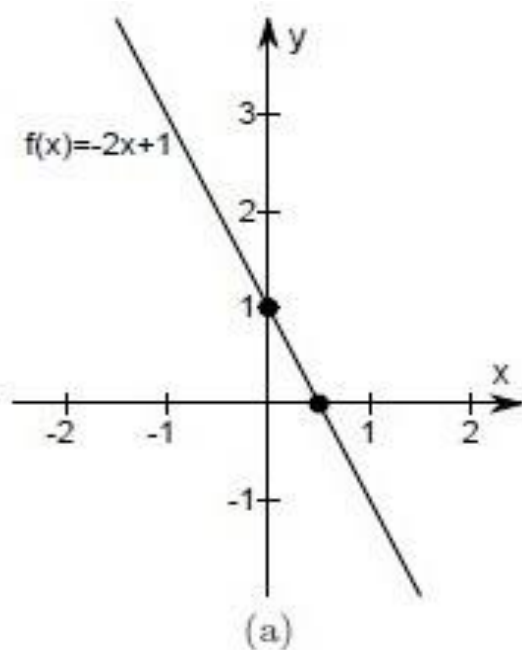
- Uma função logarítmica do tipo $y = \log_a g(x)$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}$$

Conceitos Gerais

Exemplo:

A partir dos gráficos das funções representadas indique os seus domínios e contradomínios.



Conceitos Gerais

Exemplos:

Determine o domínio das funções reais de variável real definidas por:

- $f(x) = \frac{1}{x}$;
- $g(x) = \sqrt{x}$;
- $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

Conceitos Gerais

Exemplos:

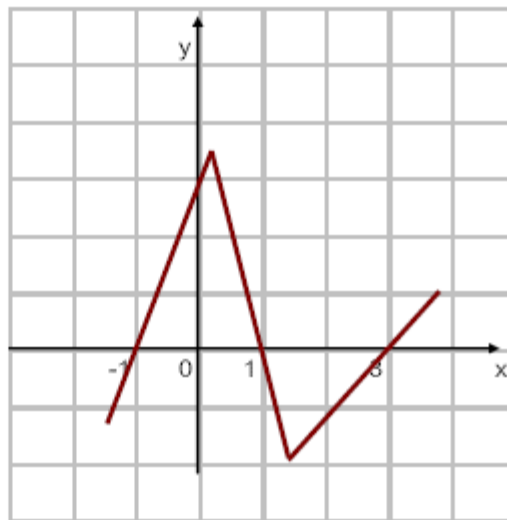
Determine o domínio das funções reais de variável real definidas por:

- $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-x}$;
- $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$;
- $h(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}$.

Conceitos Gerais

Características de uma função

- ✓ **Zero de uma função** é todo o objeto que tem imagem nula.



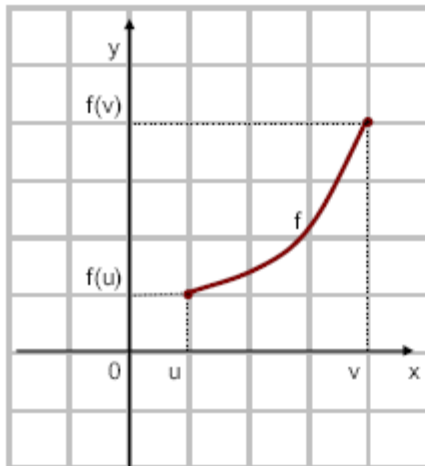
Tem-se:

- zeros da função: -1, 1, 3;
- $f(x) > 0$ se $x \in]-1, 1[\cup]3, +\infty[$;
- $f(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -1[\cup]1, 3[$.

Conceitos Gerais

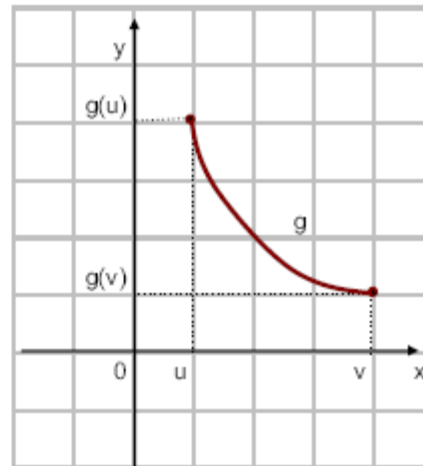
✓ Monotonia de uma função

Função crescente



A função f é crescente em $[u, v]$

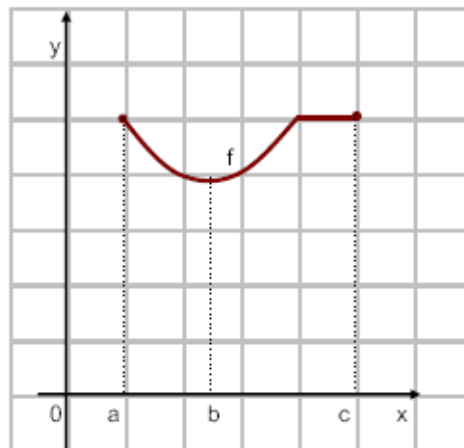
Função decrescente



A função g é decrescente em $[u, v]$

Conceitos Gerais

✓ Monotonia de uma função



f é decrescente em $[a, b]$ e crescente em $[b, c]$.

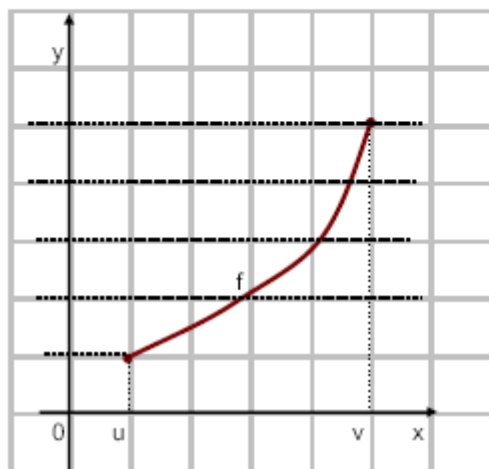
Uma função crescente ou decrescente diz-se **monótona**.

Se nas definições dadas não admitirmos a igualdade, obtemos definições de funções **estritamente crescentes** e **estritamente decrescentes**.

Conceitos Gerais

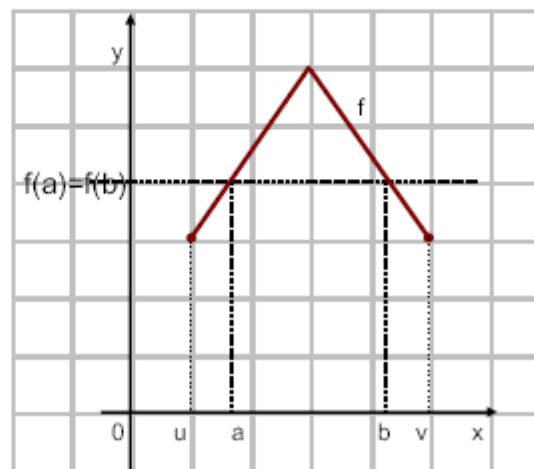
✓ Injetividade de uma função

f é injectiva em $[u, v]$



Uma função f é **injectiva** num intervalo $E \subset D_f$ se para dois valores quaisquer de E , x_1 e x_2 , se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$

f não é injectiva em $[u, v]$

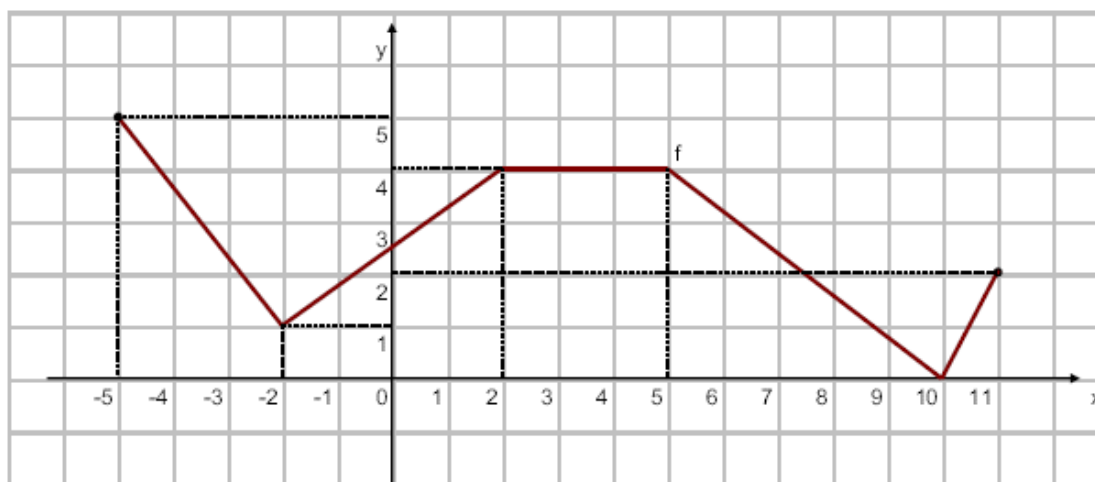


Uma função f é **não injectiva** em $E \subset D_f$ se existem pelo menos dois objectos distintos com a mesma imagem

Conceitos Gerais

✓ Extremos de uma função

Extremos absolutos



5 é o máximo absoluto de f , 0 é mínimo absoluto de f .

Seja f uma função de domínio D .

- $f(a)$ é o **máximo absoluto** de f se, para todo o x de D , $f(a) \geq f(x)$;
- $f(b)$ é o **mínimo absoluto** de f se, para todo o x de D , $f(b) \leq f(x)$.

Conceitos Gerais

Extremos relativos

1, 2 e 4 são extremos relativos de f : 1 é mínimo relativo e 2 e 4 são máximos relativos

Aos valores do domínio a que correspondem os máximos relativos da função chamam-se **maximizantes**: 11 é um maximizante.

Aos valores do domínio a que correspondem os mínimos relativos da função chamam-se **minimizantes**: -2 é minimizante.

Seja f uma função de domínio D .

- $f(a)$ é um **máximo relativo** de f se existir um intervalo aberto E contendo a tal que

$$f(a) \geq f(x), \text{ qualquer que seja } x \in E \cap D$$

- $f(b)$ é um **mínimo relativo** de f se existir um intervalo aberto F contendo b tal que

$$f(b) \leq f(x), \text{ qualquer que seja } x \in F \cap D$$

Conceitos Gerais

✓ Sinal de uma função

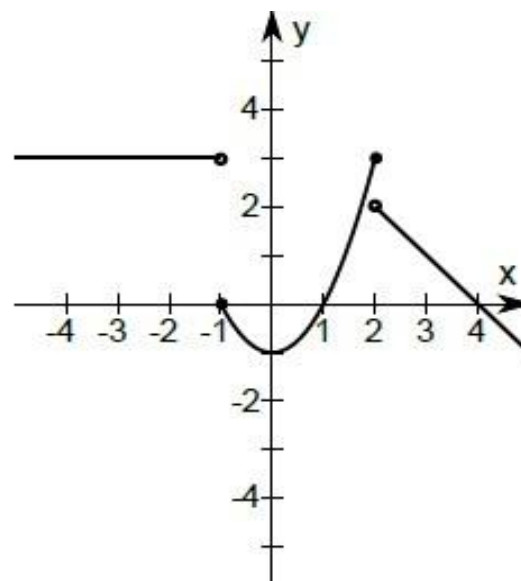
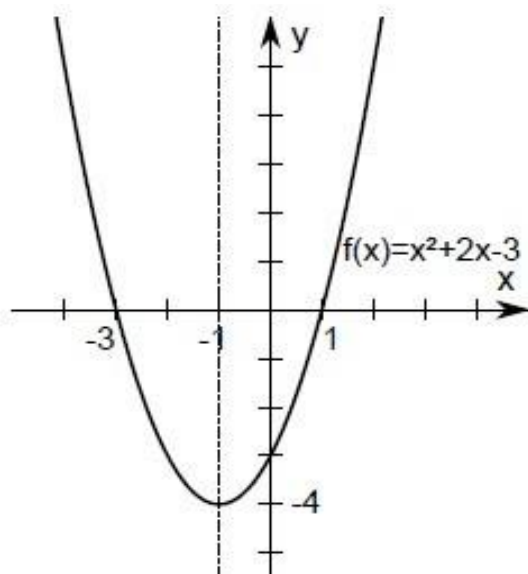
Estudar o sinal de uma função consiste em determinar para que valores da variável independente a função é negativa ou positiva. É óbvio que a função é positiva para os valores de x para os quais o gráfico se situa acima do eixo das abcissas e é negativa para os valores de x para os quais o gráfico se situa abaixo do eixo das abcissas.

Conceitos Gerais

Exercício:

A partir dos gráficos das funções representadas indique:

- ✓ Domínio e contradomínio;
- ✓ Os intervalos de monotonia;
- ✓ Os zeros, o máximo e mínimo absolutos, nos casos em que se aplique;
- ✓ Os intervalos onde as funções são positivas e negativas

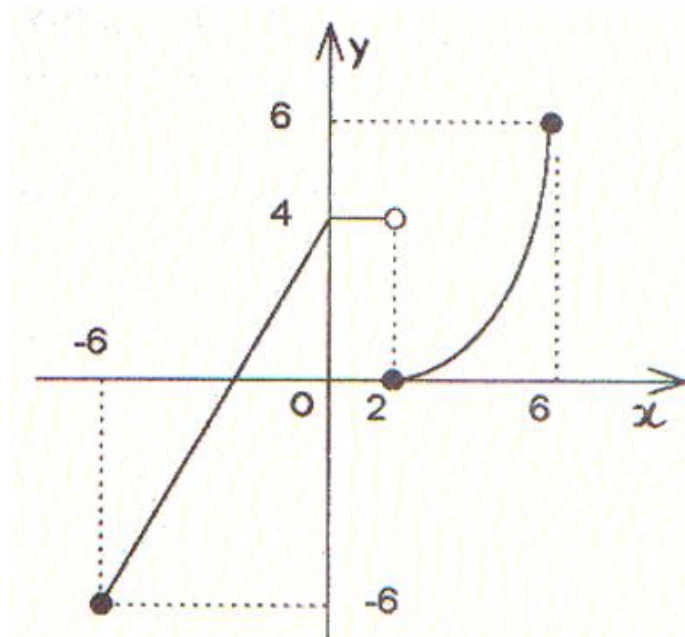


Conceitos Gerais

Exercício:

A partir dos gráficos das funções representadas indique:

- ✓ Domínio e contradomínio;
- ✓ Os intervalos de monotonia;
- ✓ Os zeros, o máximo e mínimo absolutos, nos casos em que se aplique;
- ✓ Os intervalos onde as funções são positivas e negativas

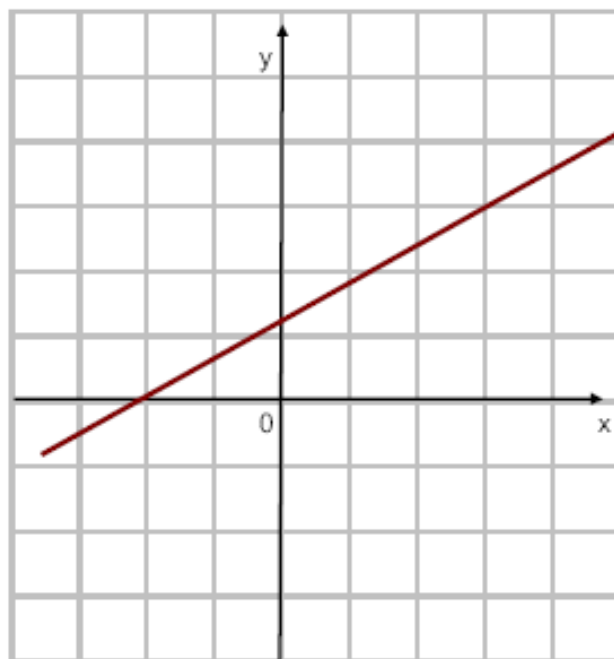


Funções afim, quadrática e polinomial

Função afim

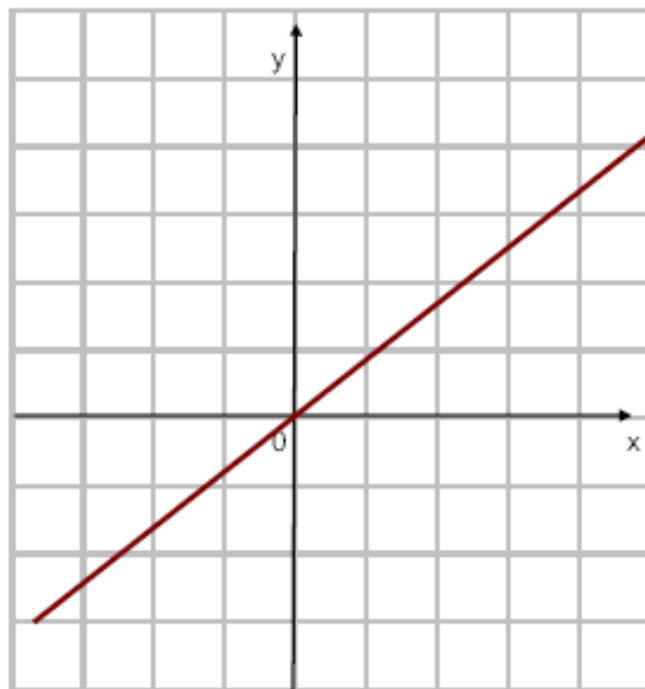
Definição: Uma **função afim** é definida por uma expressão algébrica do tipo $y=ax+b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

O gráfico de uma função afim é uma reta.



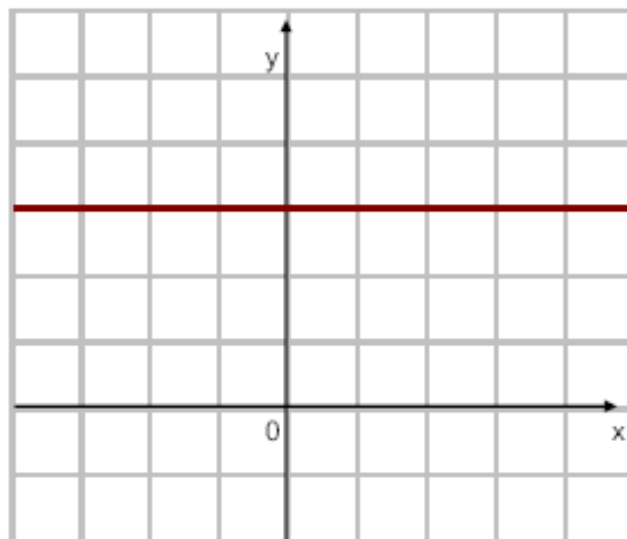
Função afim

Definição: Uma função afim, cujo gráfico contém a origem do referencial, tem o nome de **função linear** e é definida por uma expressão algébrica do tipo $y=ax$, $a \in \mathbb{R}$.



Função afim

Definição: Uma função afim cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo dos xx é uma **função constante**: $y=b$, $b \in \mathbb{R}$.



Função quadrática

Função Quadrática

Na vida real encontram-se muitas situações entre variáveis cujo modelo matemático é uma função quadrática.

Função quadrática é uma função do tipo:

$$f: R \rightarrow R$$

$$x \rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

O modelo matemático que representa esta situação é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola.

Função quadrática

Exemplo:

Considere-se a seguinte situação da Física:

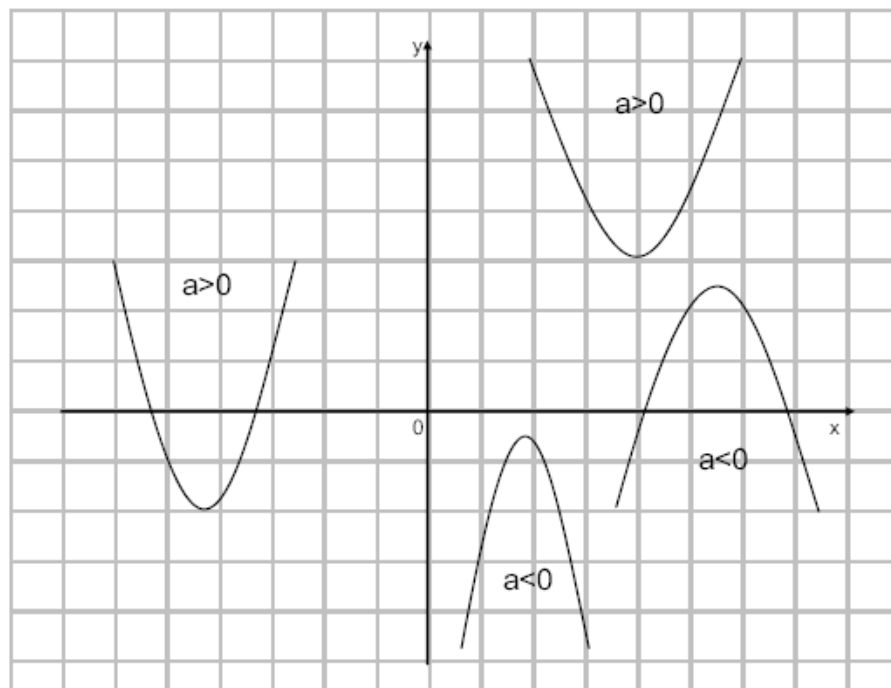
“Disparou-se uma bala, de baixo para cima, com uma velocidade inicial de 30 km/s. A altura h atingida pela bala ao fim de t segundos é, em metros: $h(t) = 30t - 4,9t^2$.”

Função quadrática

Concavidade, vértice e eixo de simetria

Uma parábola pode ter a concavidade voltada para baixo ou voltada para cima:

- Se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima;
- Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo.



Função quadrática

Zeros da função quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0^3$$

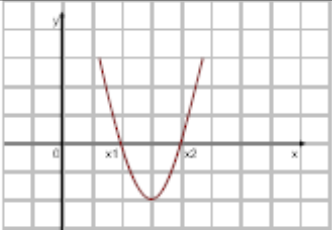
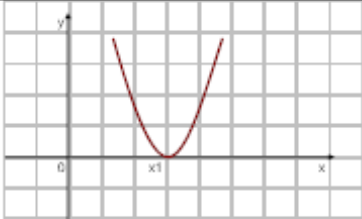

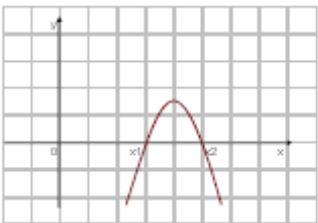
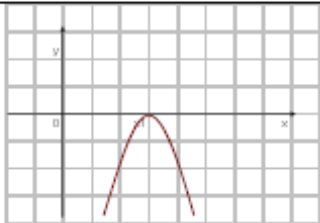
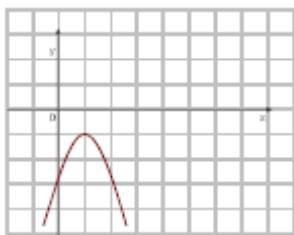
$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Seja $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta > 0$	A parábola intersecta o eixo dos xx em dois pontos
$\Delta = 0$	A parábola é tangente ao eixo dos xx
$\Delta < 0$	A parábola não intersecta o eixo dos xx

Função quadrática

Assim:

Δ a	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	 <p> $f(x) > 0$ se $x > x_2 \vee x < x_1$ $f(x) < 0$ se $x_1 < x < x_2$ </p>	 <p>$f(x) > 0$ se $x \neq x_1$</p>	 <p>$f(x) > 0$ se $x \in \mathbb{R}$</p>
$a < 0$	 <p> $f(x) > 0$ se $x_1 < x < x_2$ $f(x) < 0$ se $x > x_2 \vee x < x_1$ </p>	 <p>$f(x) < 0$ se $x \neq x_1$</p>	 <p>$f(x) < 0$ se $x \in \mathbb{R}$</p>

Função quadrática

Inequações do 2.º grau

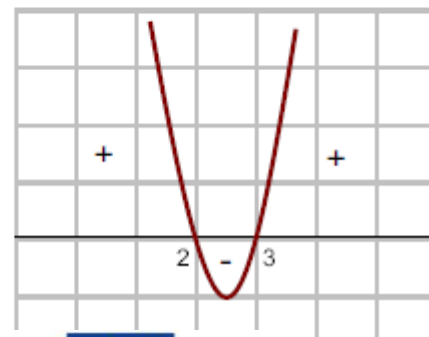
Para resolvermos uma inequação do 2.º grau, consideramos a função quadrática correspondente e determinamos os zeros e a concavidade. Resumimos as conclusões num esboço gráfico e por observação deste esboço obtemos as soluções.

$$\text{Seja } y = x^2 - 5x + 6.$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

Temos:

- Zeros: 2 e 3;
- $1 > 0$: concavidade voltada para cima;
- Esboço gráfico



Função polinomial

Chama-se **função polinomial** a toda a função do tipo

$$f : R \rightarrow R$$

$$x \rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

em que $n \in N_0$ e $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$.

Chama-se **polinómio** na variável x a toda a expressão do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

em que $n \in N_0$ e $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$.

Num polinómio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, tem-se

$a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0 \rightarrow$ os **termos**

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \rightarrow$ os **coeficientes**

$a_0 \rightarrow$ o **termo independente**

Função polinomial

Reduzir um polinómio é escrevê-lo sem que apareçam monómios semelhantes.

Exemplo:

Considere-se o polinómio $3x^2 - x + x^2$

Reduzindo-o, vem $4x^2 - x$.

Função polinomial

Ordenar um polinómio é escrevê-lo segundo as potências crescentes ou decrescentes de x .

Exemplo:

Considere-se o polinómio $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{5} + 3$

Ordenando-o, vem $-\frac{x^2}{5} + \frac{x}{2} + 3$ ou $3 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{5}$

Função polinomial

Definição: Grau de um polinómio é o maior dos expoentes da variável x com coeficiente não nulo.

Se um polinómio tem não nulos todos os coeficientes da variável x , diz-se **completo**.

Exemplo:

$$x^3 + x^2 + 3x + 1 \rightarrow \text{polinómio completo}$$

$$x^3 + 3x + 1 \rightarrow \text{polinómio incompleto}$$

Função polinomial

Operações com polinómios

As operações com polinómios são baseadas nas propriedades operatórias dos números reais, uma vez que a variável do polinómio representa um número real.

Considerem-se os polinómios: $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$ e $Q(x) = -3x + 2$.

Adição

Para somar dois polinómios, soma-se os termos semelhantes.

$$\begin{aligned}P(x) + Q(x) &= (2x^2 - 3x + 5) + (-3x + 2) \\&= 2x^2 + (-3x - 3x) + (5 + 2) \\&= 2x^2 - 6x + 7\end{aligned}$$

Subtração

Para subtrair dois polinómios, soma-se o primeiro com o simétrico do segundo.

$$\begin{aligned}P(x) - Q(x) &= (2x^2 - 3x + 5) - (-3x + 2) \\&= 2x^2 - 3x + 5 + 3x - 2 \\&= 2x^2 + 3\end{aligned}$$

Função polinomial

Multiplicação

Para multiplicar dois polinómios, multiplica-se cada termo do primeiro polinómio por todos os termos do segundo polinómio (propriedade distributiva), e soma-se os termos semelhantes obtidos.

$$\begin{aligned}P(x) \times Q(x) &= (2x^2 - 3x + 5) \times (-3x + 2) \\&= -6x^3 + 9x^2 - 15x + 4x^2 - 6x + 10 \\&= -6x^3 + 13x^2 - 21x + 10\end{aligned}$$

Divisão

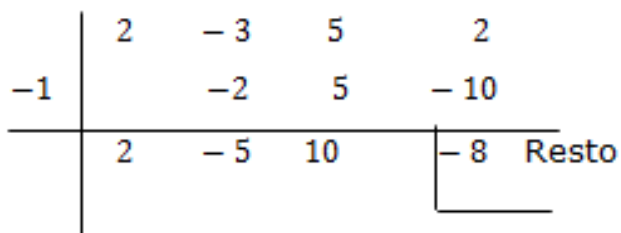
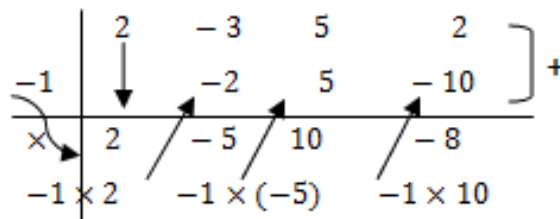
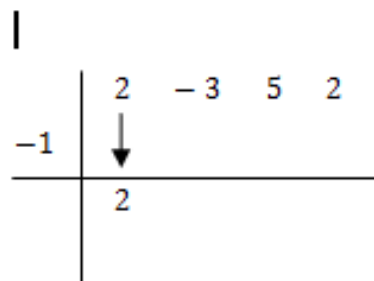
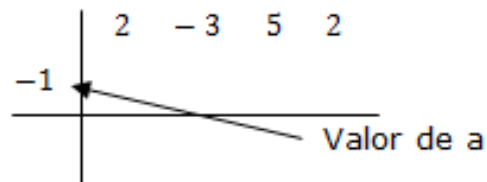
Para calcular a divisão de polinómios em que o polinómio divisor é de grau 1, há um método simples denominado de **Regra de Ruffini**, que permite determinar os coeficientes do polinómio quociente e o resto da divisão.

Determinar o quociente e o resto da divisão de $M(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ por $N(x) = x + 1$.

Como o divisor é da forma $x - a$, tem-se $a = -1$, atendendo a que $x + 1 = x - (-1)$.

Função polinomial

Regra de Ruffini:



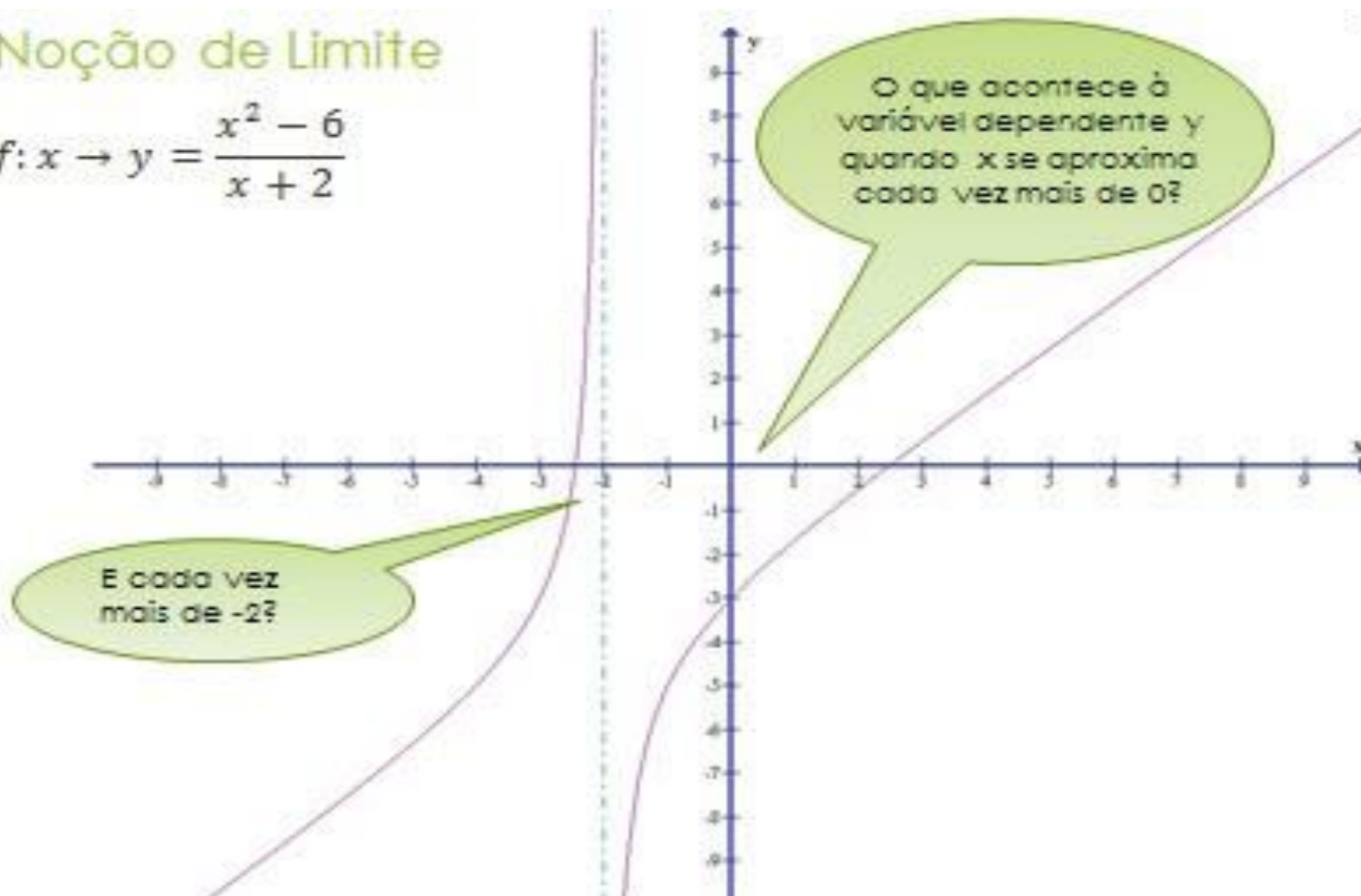
Limites

Limites

Noção intuitiva de Limite

Noção de Limite

$$f: x \rightarrow y = \frac{x^2 - 6}{x + 2}$$



Noção intuitiva de Limite

O significado intuitivo da expressão **$f(x)$ tende para b quando x tende para a** é o de que se considerarmos apenas valores de x suficientemente próximos de a , os valores correspondentes $f(x)$ estarão tão próximos quanto se queira de b .

Limite

- ✓ De acordo com a definição de limite anterior, basta que o ponto seja ponto de acumulação do domínio de f . Não faz sentido calcular o limite, quando a é ponto isolado do domínio de f ;
- ✓ Não se exige assim, que o ponto a pertença ao domínio de f ;
- ✓ O facto de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, nada nos diz acerca do valor de $f(a)$.

Limites

Unicidade do Limite

Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E'$ (E' é o conjunto dos pontos de acumulação de E).

Se o limite de uma função $f(x)$ existe então ele é único.

Matematicamente falando temos que:

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, então $L = A$.

Operações Algébricas

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm A$;
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = L \times A$;
- Se $A \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{A}$.
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n = L^n$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, com $L \geq 0$ para n par.

Limites

Exercícios:

Calcule cada um dos seguintes limites:

① $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + 3);$

② $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 1);$

③ $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 4)(3x^2);$

④ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2}{x}.$

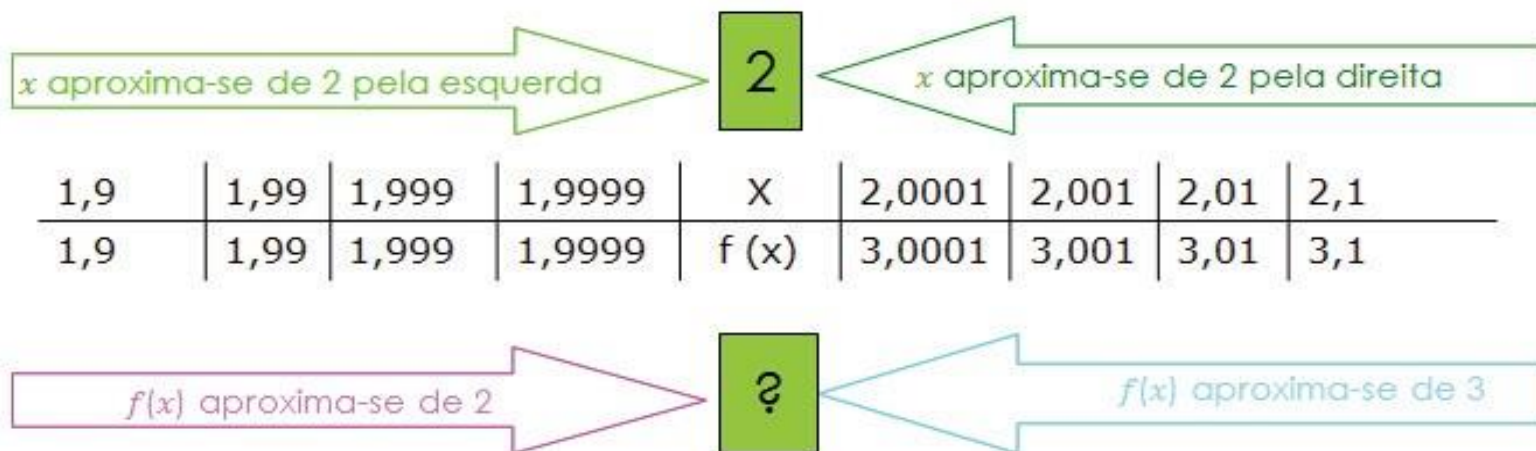
Limites

Limites Laterais

Consideremos a função real de variável real

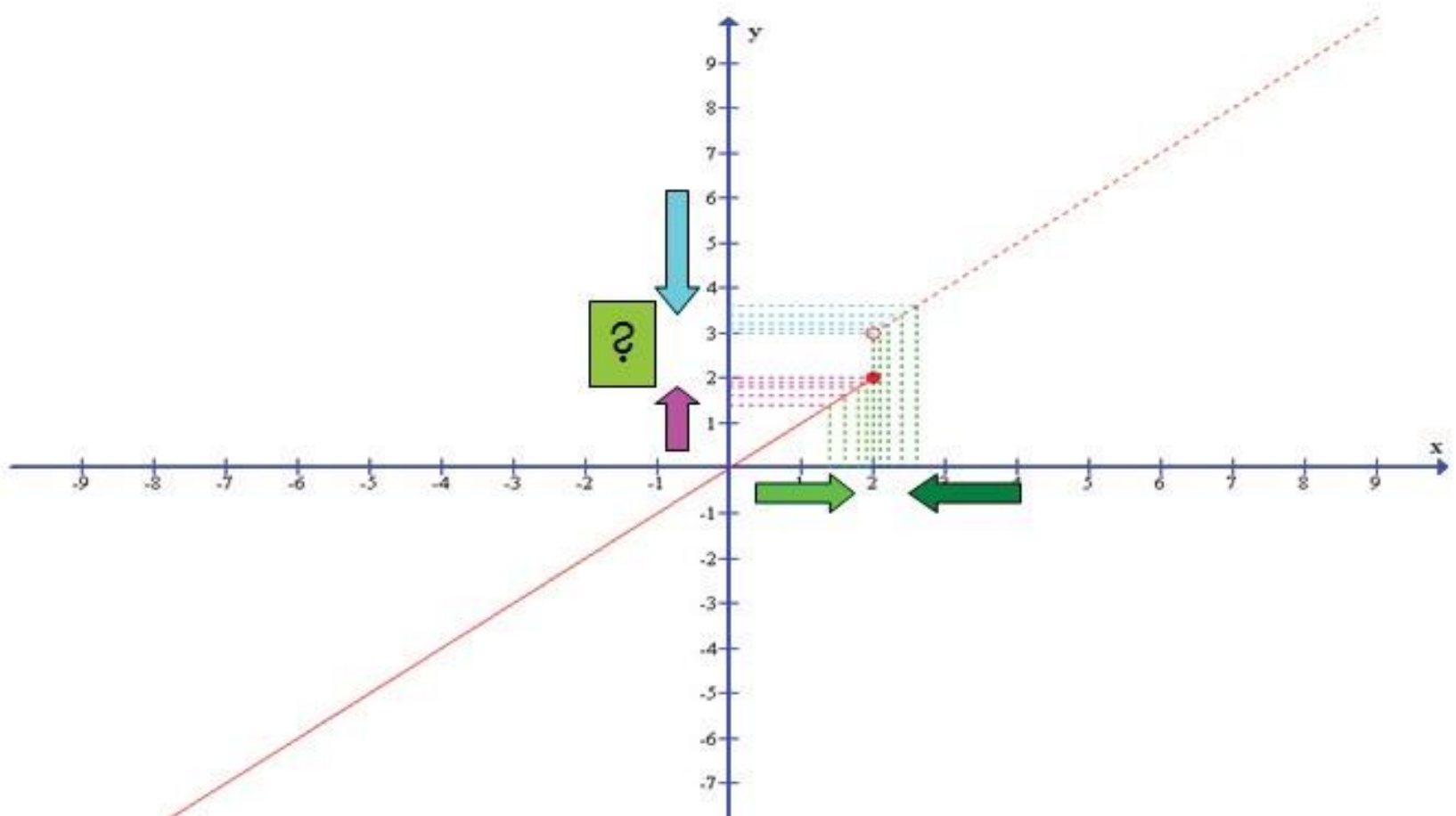
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ x + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

O que acontece a y quando x se aproxima de 2?



Limites

Limites Laterais



Limites

Limites Laterais

Diz-se que o número real b é o **limite à direita** de $f(x)$ quando x tende para a , e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$

Diz-se que o número real b é o **limite à esquerda** de $f(x)$ quando x tende para a , e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$

Observação:

Só faz sentido falar nos limites laterais se a é ponto de acumulação à direita, no caso do limite lateral direito, ou a é ponto de acumulação à esquerda, no caso do limite lateral esquerdo.

Limites

Existência de limite

Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Então, existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se e só se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$

Exemplo:

Estude a existência de limite $f(x)$, quando x tende para 2, da seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & , \text{ se } x < 2 \\ 0 & , \text{ se } x = 2 \\ 1 - x & , \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Limites

Exercício:

Estude a existência de limite $f(x)$, quando x tende para 2, da seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \text{ se } x > 2 \\ 1 & , \text{ se } x \leq 2 \end{cases}$$

Limites

Limites no Infinito e Infinitos

Diz-se que o número real b é o **limite** de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$, e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

Diz-se que $+\infty$ é o **limite** de $f(x)$ quando x tende para a , e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Limites

Exemplo:

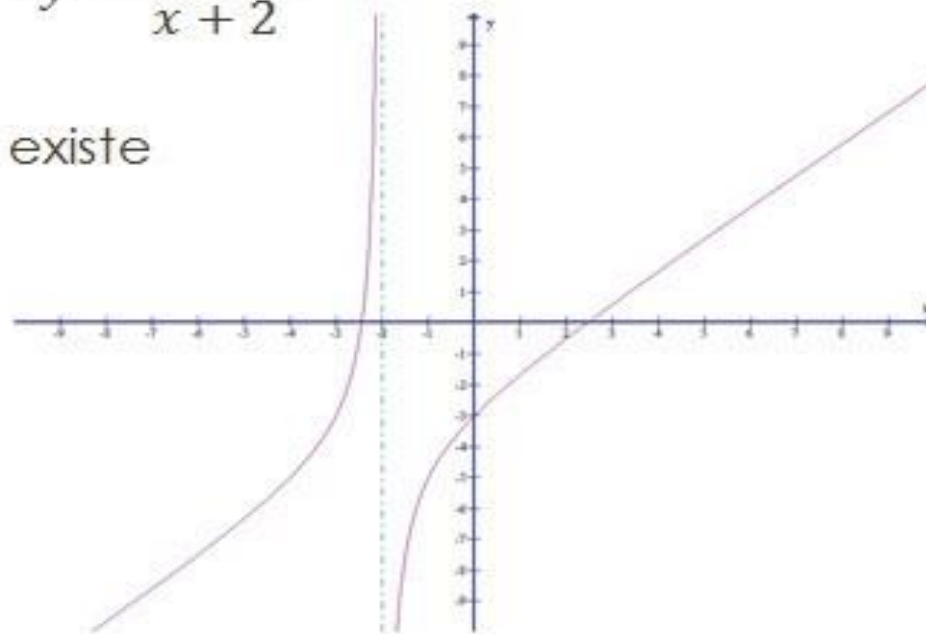
$$f: x \rightarrow y = \frac{x^2 - 6}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ não existe}$$

Mas pode-se dizer que:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$



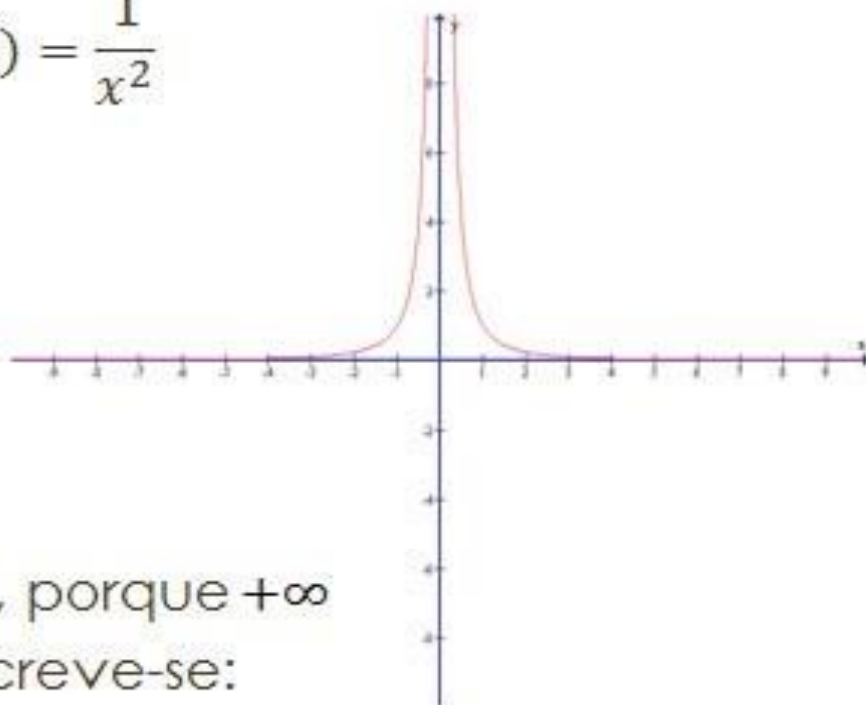
Limites

Exemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$



Apesar do limite não existir, porque $+\infty$ não é um número real, escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Limites

Propriedades

- Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$;
- Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} +\infty & , \text{ se } f(x) > 0 \text{ em vizinhança de } a \\ -\infty & , \text{ se } f(x) < 0 \text{ em vizinhança de } a \end{cases}$$

Limites

Indeterminações

Nos casos em que, por aplicação direta dos teoremas sobre limites, somos conduzidos aos símbolos $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ a que se chama **símbolos de indeterminação**, temos de seguir outro caminho para procurar, se existir, o limite, isto é, “levantar a indeterminação”.

Limites

Indeterminação $\infty - \infty$

Exemplo:

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 3)$$

Regra prática:

A indeterminação é levantada escolhendo o termo de maior grau.

Limites

Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

Exemplo:

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 4x + 1}$$

$\frac{\infty}{\infty}$

Regra prática:

A indeterminação é levantada escolhendo o termo de maior grau do numerador e o termo de maior grau do denominador.

Limites

Indeterminação $\frac{0}{0}$

Exemplo:

Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Regra prática:

A indeterminação é levantada por uma das metodologias:

- Pôr fatores comuns em evidência
- Usar o caso notável diferença de quadrados
- Aplicar a Regra de Ruffini.

Limites

Indeterminação $0 \times \infty$

Exemplo:

Calcule: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \times \frac{1}{x}$

Regra prática:

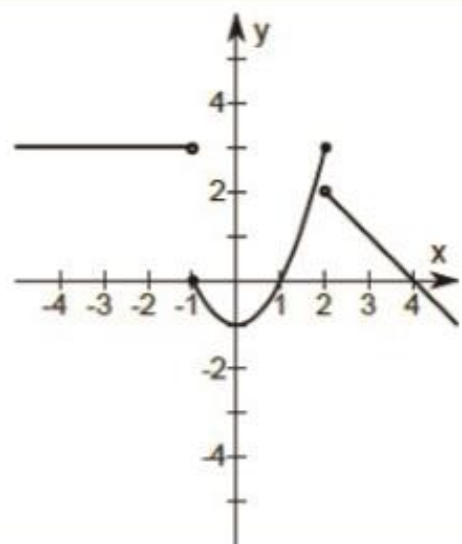
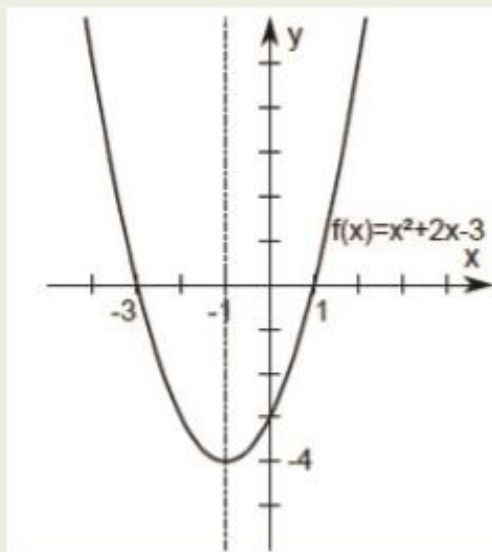
A indeterminação é levantada transformando-a numa das indeterminações anteriores.

Continuidade

Continuidade

Noção intuitiva de Continuidade

EXEMPLOS



Intuitivamente, dizemos que a primeira função é contínua e que a segunda não.

Continuidade

Continuidade

- Ao contrário da definição de limite, só faz sentido verificar se f é contínua no ponto a quando a é ponto do domínio da função;
- De acordo com a definição, se a é ponto isolado do domínio de f , então f é contínua em a ;
- Seja $a \in D_f$ ponto de acumulação do domínio de f . Então f é contínua em a se e só se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Isto reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite.

Continuidade

Exemplos:

- $f(a)$ existe ($a \in D_f$)?
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe?
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$?

CONTINUIDADE NUM PONTO

Estude a continuidade das seguintes funções nos pontos respectivos:

1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & , \text{ se } x < 2 \\ 3 & , \text{ se } x = 2 \\ 1 + x^3 & , \text{ se } x > 2 \end{cases} , (\text{em } x = 2)$$

2

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \text{ se } x \leq 1 \\ 2x & , \text{ se } x > 1 \end{cases} , (\text{em } x = 1)$$

Continuidade

Continuidade

OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$. Se f e g são contínuas em $a \in E$, então $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas em a . Se, além disso, $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é contínua em a .

NOTA

Este teorema permite concluir que:

- as funções polinomiais são contínuas em \mathbb{R} ;
- as funções racionais são contínuas em todo o seu domínio.

Continuidade

Exercícios:

Estude a continuidade das seguintes funções:

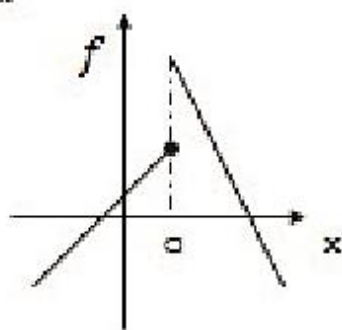
① $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2;$

② $g(x) = \frac{x+3}{x^2-4}.$

Continuidade

Continuidade lateral

Estudemos a continuidade das seguintes funções para $x=a$.

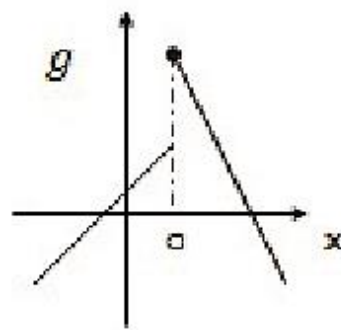


f não é contínua em $x=a$

Mas: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$

f é contínua à esquerda no ponto a mas não à direita

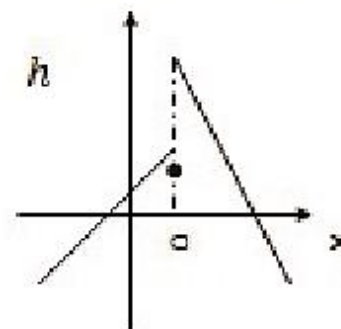


g não é contínua em $x=a$

Mas: $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq g(a)$

e $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a)$

g é contínua à direita no ponto a mas não à esquerda



h não é contínua em $x=a$

E: $\lim_{x \rightarrow a^-} h(x) \neq h(a)$

e $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) \neq h(a)$

h não é contínua nem à esquerda nem à direita no ponto a

Continuidade

Continuidade lateral

CONTINUIDADE LATERAL

Diz-se que:

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua à direita** num ponto $a \in E$ se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$;
- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua à esquerda** num ponto $a \in E$ se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

NOTA

Uma função pode ser apenas contínua à direita (ou à esquerda) num ponto e ser contínua nesse ponto. Basta, para isso, que apenas esteja definida à direita (ou à esquerda, respectivamente) desse ponto.

Continuidade

Continuidade em intervalos

CONTINUIDADE EM INTERVALOS

- Seja $I =]a, b[$ um intervalo aberto de \mathbb{R} , seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. f é contínua em I se e só se for contínua em todos os pontos de I ;
- Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado de \mathbb{R} . f é contínua em I se e só se for contínua em $]a, b[$ e também o é à direita de a e à esquerda de b .

Continuidade

EXEMPLO

Estude a continuidade das seguintes funções no seu domínio:

1

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5} & , \text{ se } x > 3 \\ x^2 - 3x + 6 & , \text{ se } x \leq 3 \end{cases}$$

2

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ -3 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Continuidade

Teoremas importantes:

Teorema de Bolzano-Cauchy ou Teorema dos valores intermédios

Seja f uma função real de variável real contínua num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{D}$.
Então, para qualquer $k \in \mathbb{R}$ do intervalo aberto de extremos $f(a)$ e $f(b)$,
existe pelo menos um número $c \in]a, b[$, tal que $f(c)=k$.

Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy

Se f contínua num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{D}$ e se $f(a) \times f(b) < 0$, então existe pelo menos um valor $c \in]a, b[$, tal que $f(c)=0$.

Teorema de Weierstrass

Sendo f uma função real de variável real contínua num intervalo $[a, b]$, f admite um máximo e um mínimo absolutos.

Cap.2 – Função Exponencial e Logarítmica

Fundamentos de Matemática

Curso Técnico Superior Profissional

Ana Isabel Araújo
aiaraujo@ipca.pt

Funções logarítmica e exponencial

Função exponencial

Existem fenómenos que crescem de tal forma que as funções polinomiais não são os modelos matemáticos mais apropriados para a sua modelização.

É necessário usar funções exponenciais para a definição de modelos matemáticos de tais fenómenos.

Mas o que é uma função exponencial?

Nenhuma das funções $f(x) = x^2$ ou $f(x) = x^{1/3}$ são funções exponenciais, uma vez que a base é variável e o expoente é constante.

Nas funções exponenciais a base é constante e o expoente é variável.

Função exponencial

Definição:

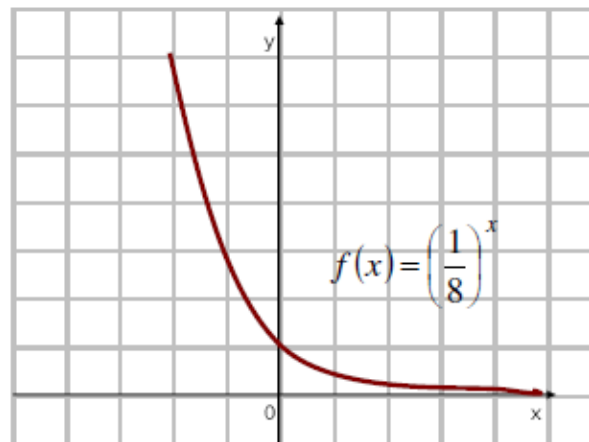
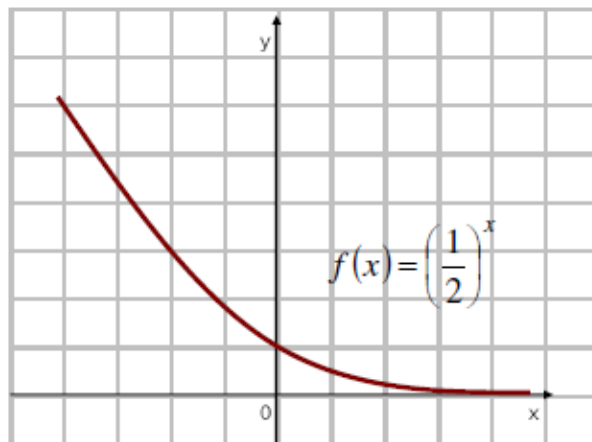
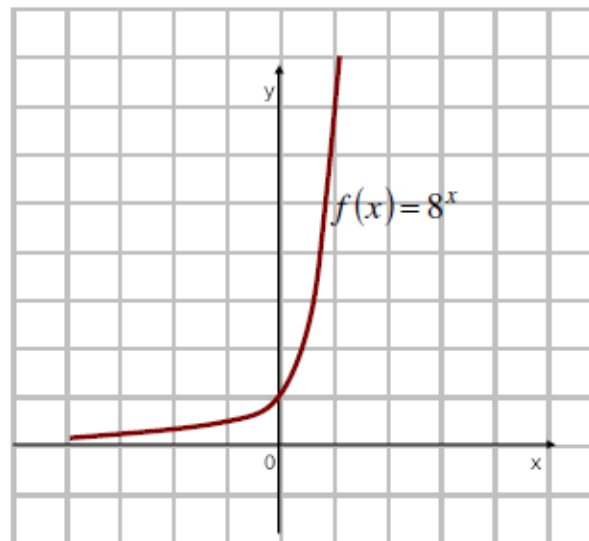
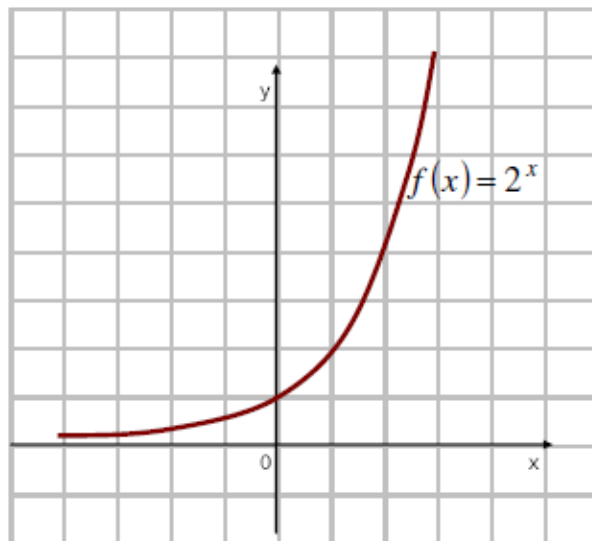
Uma função exponencial de base a é uma função exponencial da forma:

$$f(x) = a^x,$$

sendo a e x números reais tais que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Função exponencial

Propriedades:



Função exponencial

Propriedades:

A função exponencial $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, tem as seguintes propriedades:

- A função f é estritamente crescente para $a > 1$ e estritamente decrescente para $0 < a < 1$.
- O gráfico da função intersecta o eixo dos yy no ponto de coordenadas $(0,1)$.
- A recta de equação $y = 0$ (eixo dos xx) é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .
- O contradomínio de f é $D'_f =]0, +\infty[$ e o domínio de f é \mathbb{R} .
- A função f é injectiva.

Função exponencial

Funções exponenciais e condições:

As funções exponenciais $f(x) = a^x$ são:

- injetivas (se $a^{x_1} = a^{x_2}$, então $x_1 = x_2$)
- crescentes, se $a > 1$
- decrescentes, se $0 < a < 1$

Estas propriedades permitem resolver equações e inequações exponenciais.

Função exponencial

Exemplo (condições envolvendo exponenciais):

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \sqrt{8};$
- $(0,1)^{-x} < 10^3.$

Função exponencial

Função exponencial de base e

Sabe-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$

O número e , designado número de Neper, é um número irracional.

Na vida real, as funções da família das funções exponenciais de base e têm particular interesse.

Função logarítmica

Funções logarítmicas

Seja a função $f : x \rightarrow y = 2^x$.

Trata-se de uma função exponencial de base 2 .

A função f é injetiva e, por isso, tem inversa.

Para qualquer função f a inversa representa-se por f^{-1} e os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta de equação $y = x$.

No caso de qualquer função exponencial a função inversa tem o nome **de função logarítmica (log)**.

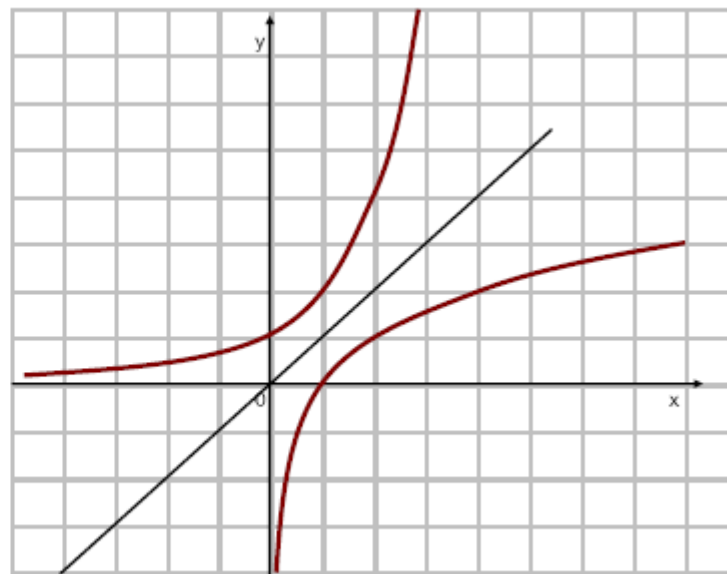
Função logarítmica

Funções logarítmicas

x	0	1	2	3	$y = \log_2 x$
$y = 2^x$	1	2	4	8	x

$$\log_2 1 = 0; \log_2 2 = 1; \log_2 4 = 2; \log_2 8 = 3$$

$$\text{De um modo geral: } \log_2 x = y \Leftrightarrow 2^y = x.$$



Função logarítmica

Definição de função logarítmica

Para $a > 0$ e $a \neq 1$,

a função logarítmica com base a representa-se por:

$$f : x \rightarrow y = \log_a x,$$

sendo

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Da definição conclui-se:

- O logaritmo de 1 em qualquer base é 0 ;
- Só é possível calcular o logaritmo de um número positivo.

Função logarítmica

Função exponencial e logarítmica de base maior que 1

Função exponencial

$$a > 1$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow a^x$$



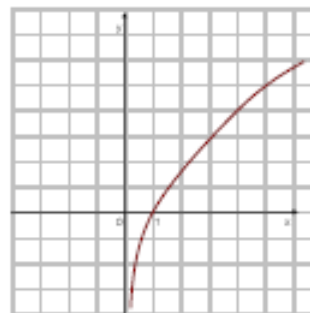
- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = \mathbb{R}^+$
- f é injectiva
- f é contínua e derivável em \mathbb{R}
- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- f é estritamente crescente

Função logarítmica

$$a > 1$$

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \log_a x$$



- $D_g = \mathbb{R}^+$
- $D'_g = \mathbb{R}$
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- g é injectiva
- g é contínua e derivável em \mathbb{R}^+
- g é estritamente crescente

Função logarítmica

Função exponencial e logarítmica de base positiva e menor que 1

Função exponencial

$$0 < a < 1$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow a^x$$



- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = \mathbb{R}^+$
- f é injectiva
- f é contínua e derivável em \mathbb{R}
- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- f é estritamente decrescente

Função logarítmica

$$0 < a < 1$$

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \log_a x$$



- $D_g = \mathbb{R}^+$
- $D'_g = \mathbb{R}$
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- g é injectiva
- g é contínua e derivável em \mathbb{R}^+
- g é estritamente decrescente

Função logarítmica

Logaritmos de bases especiais

No cálculo com logaritmos há duas bases que são usadas com maior frequência: a base 10 (também designada como base comum) e a base e (também chamada base natural).

Estas bases são quase sempre suprimidas e a escrita normal é modificada.

$$\log_{10} x \rightarrow \log x$$

$$\log_e x \rightarrow \ln x$$

Assim,

$$\log 10 = 1 \rightarrow 10^1 = 10$$

$$\log 100 = 2 \rightarrow 10^2 = 100$$

$$\log 1000 = 3 \rightarrow 10^3 = 1000$$

$$\ln e = 1 \rightarrow e^1 = e$$

$$\ln e^2 = 2 \rightarrow e^2 = e^2$$

$$\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \rightarrow e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Função logarítmica

Propriedades dos logaritmos

- Logaritmo do produto

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

- Logaritmo do quociente

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

- Logaritmo da potência

$$\log_a (x^p) = p \log_a x$$

Mudança de Base

$$\log_a (x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Função logarítmica

Equações e inequações com logaritmos

As funções logarítmicas são injetivas e, como tal, tem-se:

$$\log_a(x_1) = \log_a(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

A função $f(x) = \log_a x$ é

- crescente se $a > 1$;
- decrescente se $0 < a < 1$.

Atendendo a estas propriedades é possível resolver algumas condições envolvendo logaritmos.

Função logarítmica

Exemplo (Condições com logaritmos):

$$\log(x+1) - \log x = \log(2x)$$

Resolução:

O domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge x > 0 \wedge 2x > 0\} =]0, +\infty[$.

Em D vamos, então, resolver a equação dada:

$$\begin{aligned} \log(x+1) - \log x = \log(2x) &\Leftrightarrow \log \frac{x+1}{x} = \log(2x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \right) \wedge x \neq 0 \end{aligned}$$

Em D só existe uma solução.

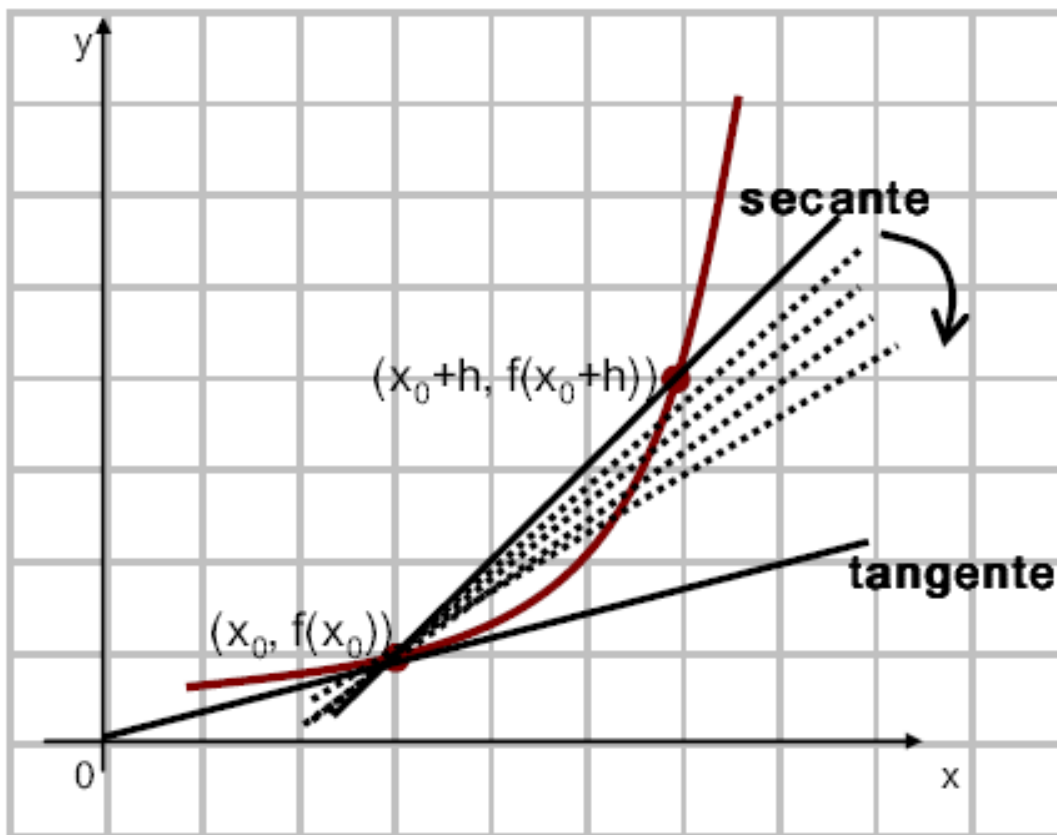
$$S = \{1\}$$

Derivada

Função derivada

Derivada e função derivada

Introdução ao conceito de derivada:



Derivada e função derivada

Introdução ao conceito de derivada:

Quando $h \rightarrow 0$, a linha secante, definida pelos pontos de abcissas x_0 e $x_0 + h$, tende para uma posição limite que é a reta tangente à curva no ponto $(x_0, f(x_0))$.

O declive da reta tangente é dado por:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivada e função derivada

Definição de derivada de uma função num ponto:

Considere-se a função real de variável real $y=f(x)$, definida no intervalo $]a,b[$, $a \neq b$ e seja x_0 um ponto desse intervalo.

Def. Chama-se **derivada da função f no ponto x_0** , ao $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

quando existir. Esta derivada representa-se por:

$$f'(x_0) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \quad \text{ou} \quad (D_f)_{x=x_0}$$

Derivada e função derivada

Se $h = x - x_0$, dizer que h tende para zero é o mesmo que dizer que x tende para x_0 e a expressão para $f'(x_0)$ pode apresentar a seguinte forma:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivada e função derivada

Equação reduzida da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto:

A derivada de uma função num ponto representa geometricamente o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, ou seja, a tangente trigonométrica do ângulo positivo que a reta faz com o semieixo positivo dos xx .

Exemplo:

Dada a função real de variável real , definida por $f(x) = x^2 + 4x - 3$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Derivada e função derivada

Resolução:

$$f'(x) = 2x + 4$$

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é igual a:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 5)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 5) = 6$$

A equação da reta será do tipo: $y = mx + b$

Logo, $y = 6x + b$

O ponto de coordenadas $(1, f(1))$ pertence ao gráfico da função f e à reta tangente ao gráfico. Como $f(1) = 1^2 + 4 \times 1 - 3 = 2$

Então $2 = 6 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -4$

Assim a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é:

Derivada e função derivada

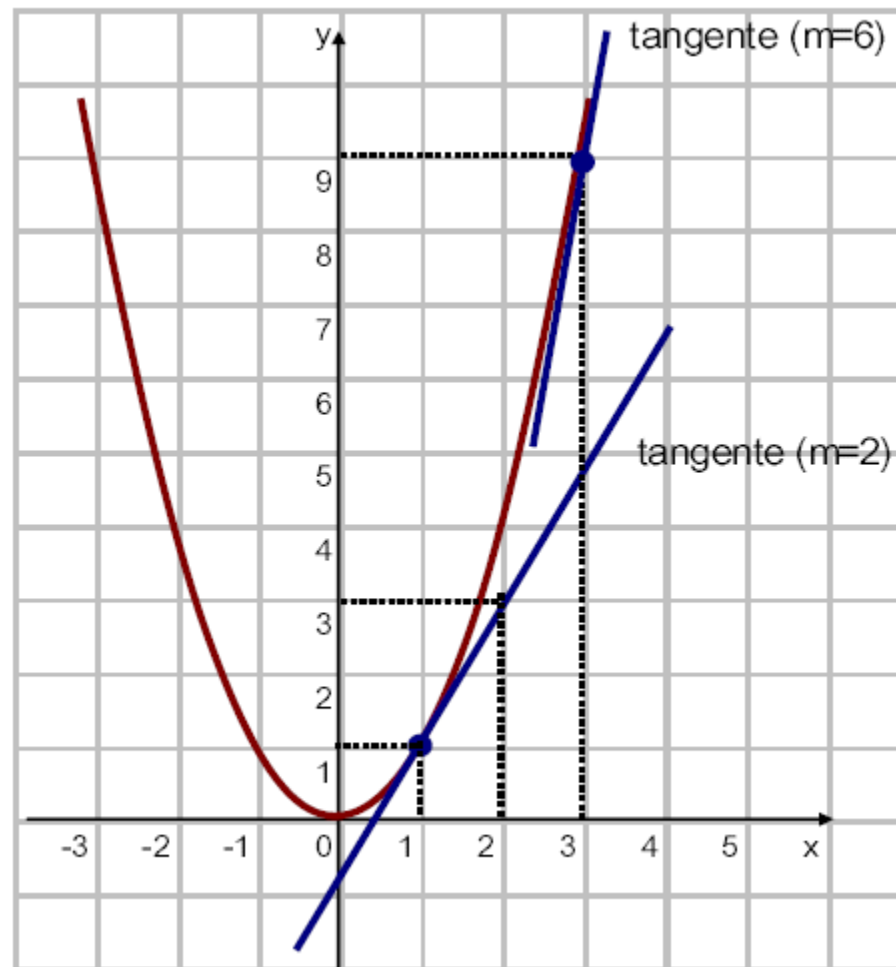
Exemplo:

Considere a função $f : x \rightarrow y = x^2$

- a)** Calcular, aplicando a definição, $f'(1)$ e $f'(3)$ e interpretar geometricamente os valores obtidos;
- b)** Escrever a equação reduzida das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas 1 e 3.

Derivada e função derivada

Interpretação geométrica:

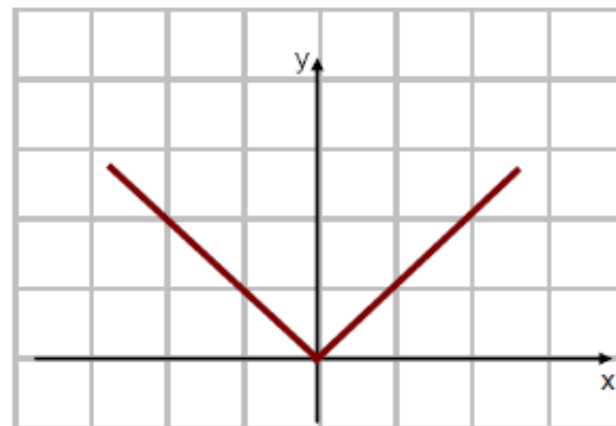
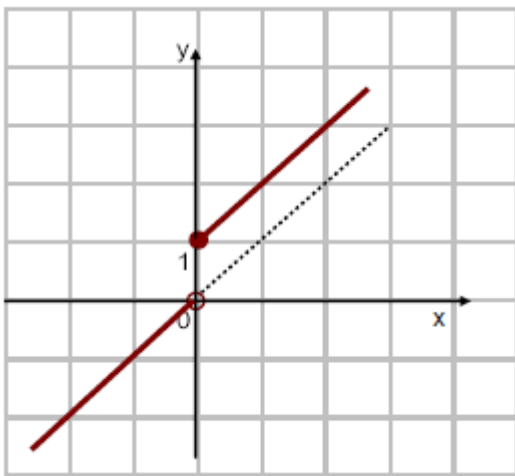


Derivada e função derivada

Definição: Função derivável/diferenciável

Uma função diz-se derivável (ou diferenciável) num ponto x_0 se tem nesse ponto derivada finita.

Quando é que uma função não é derivável num ponto?



Derivada e função derivada

Derivadas laterais

DERIVADAS LATERAIS

Quando $a \in E \cap E'_+$, pode-se definir a **derivada à direita** da função f no ponto a como sendo o limite (caso exista):

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Da mesma forma, quando $a \in E \cap E'_-$, pode-se definir a **derivada à esquerda** da função f no ponto a como sendo o limite (caso exista):

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

NOTA

Quando a pertence ao domínio de f e é ponto de acumulação à direita e à esquerda, então $f'(a)$ existe se e só se existem e são iguais as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$.

Derivada e função derivada

Derivadas laterais

EXEMPLO

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x \leq 1 \\ -x + 2 & , \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

em $x = 1$?

Será que existe derivada da função

Derivada e função derivada

Diferenciabilidade e continuidade

OBSERVAÇÃO

Uma função pode ser contínua num ponto onde não tenha derivada. A continuidade nem sequer garante a existência de derivadas laterais.

TEOREMA

Se f é diferenciável em a , então f é contínua em a .

Derivada e função derivada

Definição: Função derivada

Função derivada de uma função f ou derivada da função f é uma outra função:

- cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que f tem derivada finita;
- que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função nesse ponto.

Derivada e função derivada

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Derivada e função derivada

EXEMPLOS

Calcule a derivada das seguintes funções:

A) $f(x) = 1 - 2x$;

B) $g(x) = -x^4 + x^3 - 3x^2 + \frac{x}{2} + 5$;

C) $h(x) = (x^2 - 1)(7x^2 + \frac{3}{2})$;

D) $i(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^4}$.

Regra de L'Hopital

Regra de L'Hopital

❖ Regra de L'Hopital

A regra de L'Hopital dá-nos uma grande ajuda no cálculo dos limites de uma função quando nos deparamos com

indeterminações do tipo: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$.

Nesses casos recorreremos a diversos casos de factorização (por exemplo a regra de Ruffini) para levantar a indeterminação.

No entanto, a regra de L'Hopital permite-nos levantar estas indeterminações, de uma forma mais rápida, recorrendo às

derivadas.

Regra de L'Hopital

Regra de L'Hopital

Se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tem uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

caso o limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista (sendo finito ou infinito).

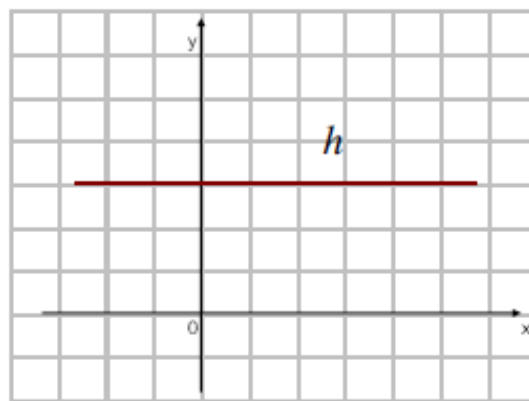
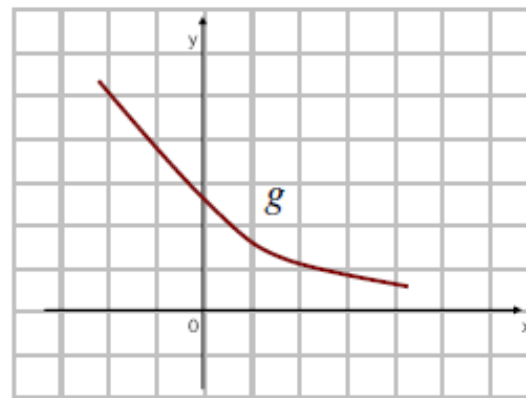
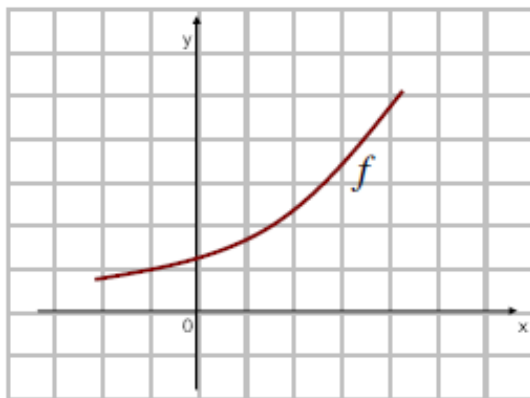
Exemplo: Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2}$, aplicando à regra de L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)'}{(3x^2 - 5x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{6x - 5} = \frac{2 \times 2 - 1}{6 \times 2 - 5} = \frac{3}{7}$$

Aplicações da derivada

Aplicações da derivada

Funções estritamente crescentes e funções estritamente decrescentes



Aplicações da derivada

Seja f uma função real de variável real definida num intervalo E , e sejam a e b números de E .

- f é estritamente crescente em E quando para todos os números reais a e b de E ,

$$\text{se } a < b, \text{ então } f(a) < f(b)$$

- f é estritamente decrescente em E quando para todos os números reais a e b de E ,

$$\text{se } a < b, \text{ então } f(a) > f(b)$$

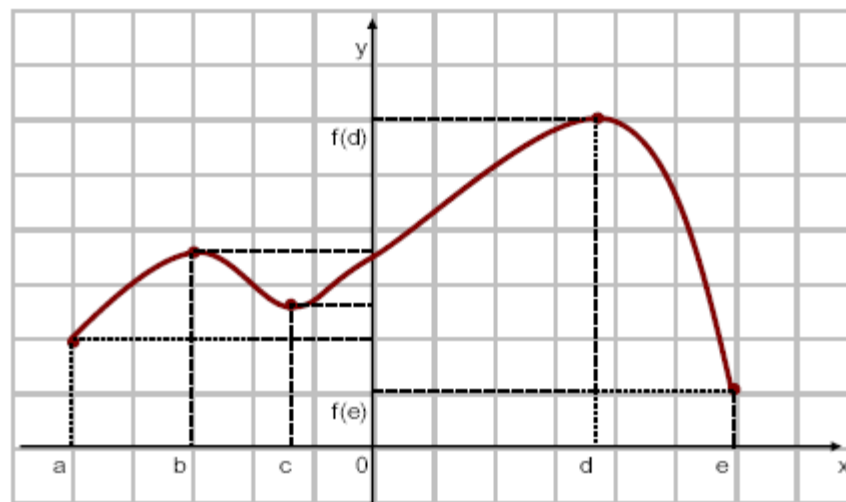
- f é constante em E quando para todos os números reais a e b de E ,

$$f(a) = f(b)$$

Aplicações da derivada

Extremos de uma função

Considere-se a representação gráfica da função f :



$f(d)$ é um máximo absoluto de f .

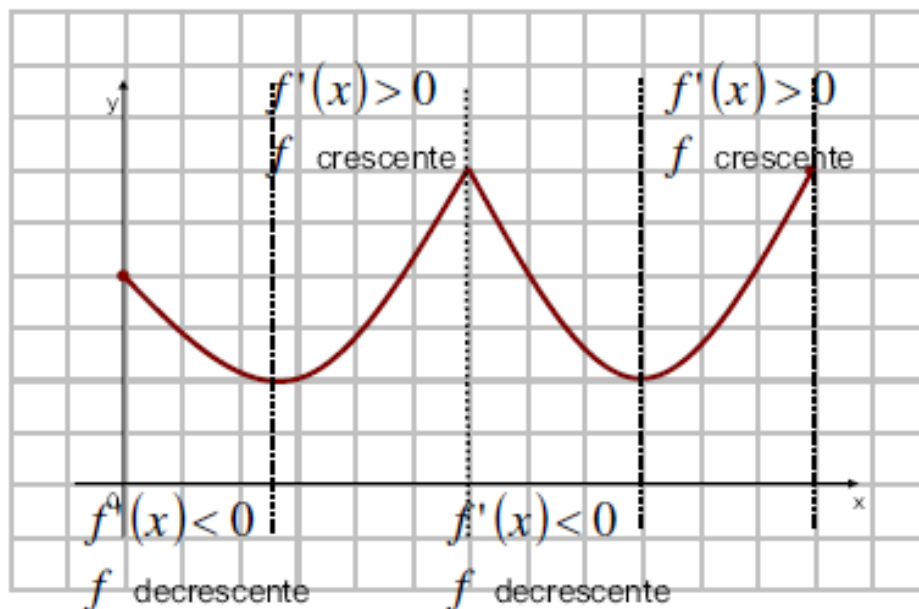
$f(e)$ é um mínimo absoluto de f .

$f(b)$ é um máximo relativo de f .

$f(c)$ e $f(a)$ são mínimos relativos de f .

Aplicações da derivada

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função:



Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$.
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.

Aplicações da derivada

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada da função:

Teorema

Se uma função f é contínua em $[a, b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a, b[$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Definição

Um número c do domínio de uma função f é um número crítico de f se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Aplicações da derivada

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada da função:

Seja c um ponto crítico de f , e suponha-se que f é contínua em c e derivável num intervalo aberto E contendo c , com a possível exceção de poder não ser diferenciável em c .

- Se f' muda de positiva para negativa em c , então $f(c)$ é um máximo relativo.
- Se f' muda de negativa para positiva em c , então $f(c)$ é um mínimo relativo.
- Se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo o x do intervalo E excepto para $x = c$, então $f(c)$ não é um extremo relativo de f .

Aplicações da derivada

Exemplo:

Determinar os extremos relativos da seguinte função: $f(x)=x^2-1$