

Parte I – Álgebra Linear

Apontamentos da Aula 1







1. Matrizes

- ✓ Conceitos Gerais
- ✓ Operações com matrizes





Conceitos Gerais







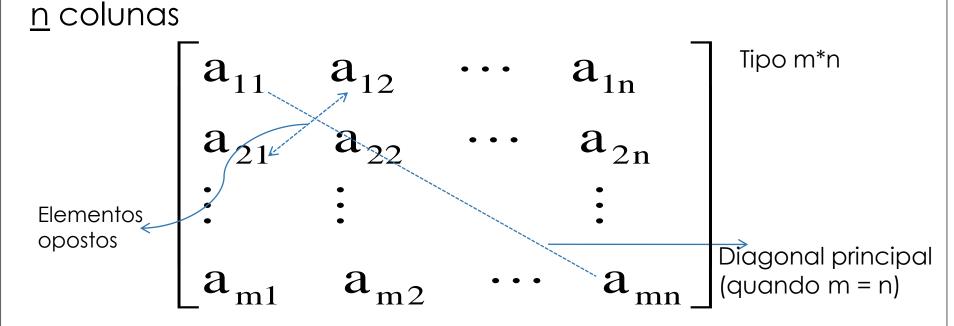
Considere a experiência: Lançamento de dois dados, efetuar a soma das faces e registar os resultados possíveis

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12





<u>Definição:</u> Matriz é uma tabela constituída por <u>m</u> linhas e



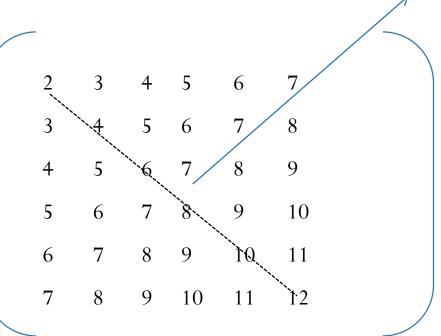
$$A = \begin{vmatrix} a_{ij} \\ 1j \end{vmatrix}$$
, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

a_{ii} – escalares









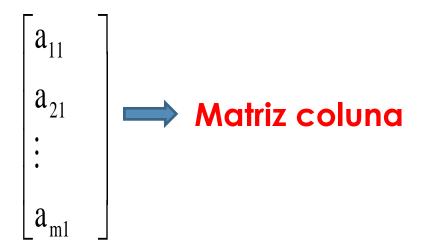
Diagonal principal





<u>Tipos de matrizes</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathsf{Matriz\ linha}$$









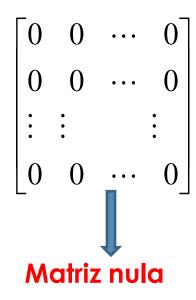
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



Matriz retangular m ≠ n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada m = n







Matrizes Quadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{mn} \end{bmatrix}$$



Nota: Se os elementos da diagonal principal tomarem o mesmo valor, a matriz chama-se **matriz escalar**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior é uma matriz em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.





Matrizes Quadradas

 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Matriz triangular inferior é uma matriz em que os elementos acima da diagonal principal são nulos.

 $\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}$

Matriz Identidade (unidade) é uma matriz escalar de qualquer ordem em que todos os elementos são iguais

a 1 para i = j.





<u>Igualdade de matrizes</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} \end{bmatrix}$$

- Devem ter a mesma ordem, ou seja, o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas
 m= k e n=l
- Os elementos devem ser iguais aos seus correspondentes

$$a_{11} = b_{11}$$
 , $a_{12} = b_{12}$, ..., $a_{mn} = b_{kl}$





Exercícios:

1. Dada a matriz
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Indique o tipo desta matriz.
- **b)** Indique na matriz os seguintes elementos: a_{11} , a_{21} , a_{23} , a_{24} , a_{34} .

2. Determine os valores de a e b de modo que as matrizes A e B sejam iguais.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ b & 1 & -1 \\ -2 & a & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$





3. Diga que designação especial tem cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





4. Determine os valores de a, b, c nas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ a & 2 & 5 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

de modo que:

- a) A seja uma matriz triangular superior.
- **b)** B seja uma matriz diagonal.
- c) B seja uma matriz escalar.
- d) B seja uma matriz identidade.





Exercícios Propostos:

❖ Ficha de Exercícios n.º1

Exercício 1

❖ Ficha Extra n.º1

Exercício 1.a)







Operações com matrizes Propriedades









Adição de matrizes

$$A_{m\times n} + B_{m\times n}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
A_{m \times n} + B_{p \times q} \\
m \neq p & \forall & n \neq q
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$





Propriedades

Sejam A, B, C e D matrizes do tipo $m \times n$.

- I) Comutatividade: A + B = B + A
- II) Associatividade: (A + B) + C = A + (B + C)
- III) Existência de elemento neutro (matriz nula): $A + O_{m \times n} = O_{m \times n} + A = A$
- IV) Existência de elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = O_{m \times n}$
- V) Se A = B e C = D, então A + C = B + D





Multiplicação de uma matriz por um escalar

Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ da multiplicação do escalar k pela matriz A resulta uma outra matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, do mesmo tipo, cujos elementos são iguais ao produto do escalar, k, por cada elemento da matriz A:

$$c_{ij} = k a_{ij}, i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$$

$$-3 \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 & -6 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$







Propriedades:

Dadas as matrizes A e B do mesmo tipo e k e t escalares reais:

I)
$$k(A+B)=kA+kB$$

$$II) (k+t)A = kA + tA$$

III)
$$k(tA) = (kt)A$$

IV)
$$1A = A$$





Multiplicação de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ do tipo $m \times p$ e $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$ do tipo $p \times n$, (o número de colunas da primeira é igual ao

número de linhas da segunda), o produto destas duas matrizes é uma outra matriz, $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}$ do tipo $m \times n$ tal que:

$$c_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix}}_{\text{limba i de A}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}}_{\text{cohuna j de B}} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ip} \times b_{pj} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}}_{\text{cohuna j de B}}$$

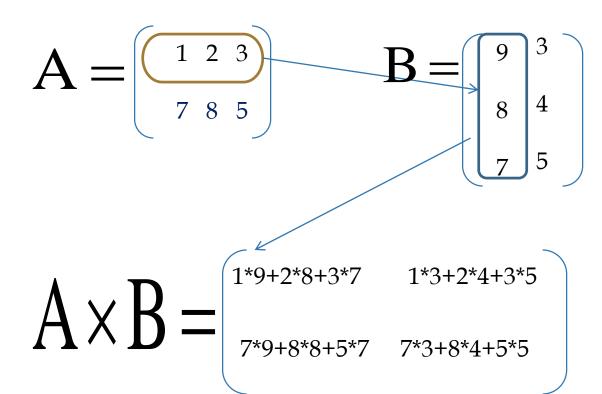
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{jk} (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., p)$$







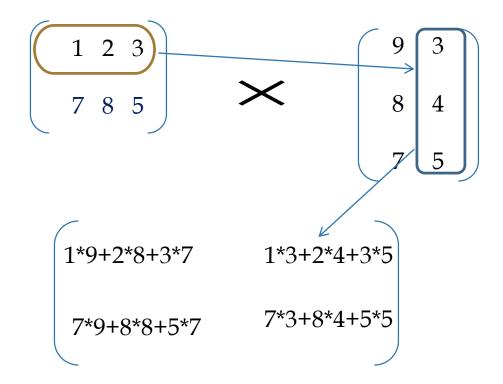
Exemplo







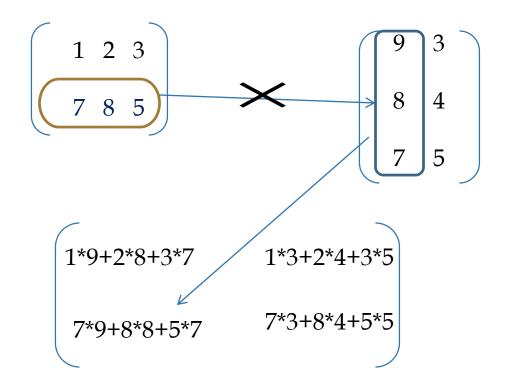
Exemplo (cont.)







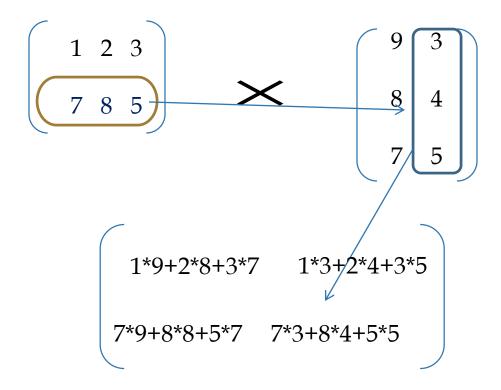
Exemplo (cont.)







Exemplo (cont.)







Propriedades

Dadas as matrizes A e B do tipo $m \times p$ e $p \times n$ respectivamente:

- I) Associatividade: (AB)C = A(BC), com C matriz do tipo $n \times m$.
- II) Existência de elemento neutro: $AI_p = I_m A = A$
- III) Distributividade da multiplicação à direita e à esquerda em relação à adição:
 - i) A(B+C) = AB + AC, com C matriz do tipo $p \times n$
 - ii) (B+C)D=BD+CD, com C matriz do tipo $p\times n$ e D matriz do tipo $n\times q$.







Obs: A multiplicação de matrizes não é comutativa.

$$A \times B \neq B \times A$$

Exemplo:

Sejam
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
 e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Então:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

<u>Definição</u>: A e B dizem-se matrizes permutáveis se e só se $A \times B = B \times A$





<u>Potenciação</u>

A potencia de ordem k, $k \in \Re$ da matriz A quadrada, A^k , é dada por:

$$A^{k} = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ factores}}$$

Exemplo:

Se
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
 então $A^3 = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}$.





Matriz Transposta

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^{t} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Trocam-se ordenadamente linhas por colunas

Matriz simétrica

<u>Def.</u> Uma matriz quadrada diz-se **simétrica** se e só se $A = A^T$





Propriedades

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n} e B = [b_{ij}]_{m \times n}$:

$$\mathbf{I)} \left(A^T \right)^T = A$$

II)
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$III) (AB)^T = B^T A^T$$

$$\mathsf{IV}) \; (\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{R}$$

V)
$$(A^k)^T = (A^T)^k, k \in \mathbb{R}$$







Exercícios:

1. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

calcule:

a)
$$A . B + C$$

c)
$$C^3$$





2. Determine os valores de a, b e c, para que as matrizes A e B sejam simétricas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & b \\ a & 3 & 2 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & a & 1 \\ 3 & c & 0 \end{bmatrix}$$







Exercícios Propostos:

❖ Ficha de Exercícios n.º1

Exercício 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

❖ Ficha Extra n.º1

Exercício 1.b). 2, 3, 4, 5, 6





