

Ficha de Exercícios n.º 1

Conceitos Gerais

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

- a) Classifique-as quanto ao tipo.
- b) Identifique os seguintes elementos

$$a_{11}, a_{12}, b_{23}, b_{13}, c_{42}, c_{32}, c_{41}, c_{22}, d_{12}, d_{14}, e_{11}, e_{31}, f_{22}, f_{33}, f_{13}$$

Operações com matrizes

2. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcule:

- a) $A + B + C$
- b) $A + B - C$
- c) $A + 2B - 3C$
- d) $-5A + 3B - \frac{1}{2}C$
- e) $A^T - B^T + C^T$

3. Considere as seguintes matrizes sobre \mathbb{R} e, se possível, calcule:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) $AB + C$

- b) $(A + B)C$ e $AC + BC$
- c) AB e BA
- d) $2(3A)$ e $6A$
- e) A^T e $(A^T)^T$
- f) $(A + B)^T$ e $A^T + B^T$
- g) $(AB)^T$ e $A^T B^T$
- h) D^3

4. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ verifique se } 3A + A^2 = A(3I + A).$$

5. Dadas as matrizes sobre \mathbb{R} , mostre que são permutáveis.

$$A = \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} c & c-d \\ c-d & d \end{bmatrix}$$

6. Dadas as matrizes A, B e C

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz X tal que:

- a) $A + X^T = B^T + C$
- b) $(A + B)^T + X = B - C^T$
- c) $X + AB = C^T \cdot A$
- d) $X + B^2 - IA = 2I + C$
- e) $X + A^T = (B \cdot B^T + C)^T$

f) $X^T = (A^T \cdot B^T + C)$

g) $(A + X)^T = B \cdot C + A^2$

h) $(A - 3X)^T = 2C^2 - 4BI$

7. Mostre que se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^2 - 6A + 5I = 0$$

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Verifique se A e B são permutáveis.

b) Calcule $A^3 - 2A^2$.

9. Para $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, calcule MM^T e classifique a matriz produto.

Soluções

1.

a)

Matriz quadrada de 2ª ordem A

Matriz quadrada de 3ª ordem F

Matriz rectangular: B e C

Matriz Coluna E

Matriz linha D

b) $a_{11} = 1, a_{12} = 3, b_{23} = 7, b_{13} = 2, c_{42} = 0, c_{32} = 1, c_{41} = 7, c_{22} = 3,$
 $d_{12} = 2, d_{14} = 4, e_{11} = 1, e_{31} = 5, f_{22} = 3, f_{33} = 7, f_{13} = 0$

2.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 4 & 9 & 14 \end{bmatrix}$

4. Verdadeira

$$3A + A^2 = A(3I + A) = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$$

5.

$$AB = BA = \begin{bmatrix} ac + (a-b)(c-d) & ac - bd \\ ac - bd & (a-b)(c-d) + bd \end{bmatrix}$$

6.

a)

$$X = B + C^T - A^T$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & -6 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Parte I: Álgebra Linear
Matrizes: Conceitos Gerais
Operações com matrizes

b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -8 & -19/2 & -20 \\ 1/2 & 17/2 & 17/2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

3.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \\ 4 & 7 & 13 \end{bmatrix}$

b)

$\begin{bmatrix} 16 & -2 & 6 \\ 22 & 0 & 5 \\ 29 & -1 & 9 \end{bmatrix}$

c)

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 10 \\ 1 & 8 & 11 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 3 & 2 & 10 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

d)

$\begin{bmatrix} 6 & -6 & 12 \\ 0 & 6 & 18 \\ 12 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

e) A

f)

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

g)

$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 7 & 10 & 11 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 2 \\ 11 & 10 & 8 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{bmatrix}$

b)

$X = B - C^T - (A + B)^T$

$X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & -7 \end{bmatrix}$

c)

$X = C^T A - A B$

$X = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & 6 & 17 \end{bmatrix}$

d)

$X = 2I + C - B^2 + A$

$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 12 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

e)

$X = B B^T + C^T - A^T$

$X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -6 & -7 & 14 \end{bmatrix}$

f)

$X = B A + C^T$

$X = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

g) $X = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -5 \\ 3 & 10 & -2 \\ 11 & 20 & -13 \end{bmatrix}$

h)

$X = \begin{bmatrix} 7/3 & 8/3 & 16/3 \\ 6 & -8 & -3 \\ 28/3 & 13/3 & 20 \end{bmatrix}$

7.

$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}$

$A^2 - 6A + 5I = 0$

8.

a) Não

b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

9.

$M = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & -2 & -14 \\ 2 & -2 & 9 & 11 \\ 3 & -14 & 11 & 23 \end{bmatrix}$ matriz simétrica.