

Parte I – Álgebra Linear

Apontamentos da Aula 3







1. Matrizes

- Operações elementares com matrizes
- ✓ Característica de uma matriz











Tipos de operações elementares:

- 1-Permuta de duas linhas (colunas);
- **2-**Multiplicação de uma linha (coluna) por um escalar diferente de zero:
- **3-**Adição aos elementos de uma linha (coluna) os elementos correspondentes de uma outra linha (coluna) paralela multiplicada por um qualquer escalar.







<u>Definição:</u> Matrizes equivalentes

Duas matrizes dizem-se equivalentes, e escreve-se $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, se uma delas puder ser obtida da outra realizando um número finito de operações elementares.



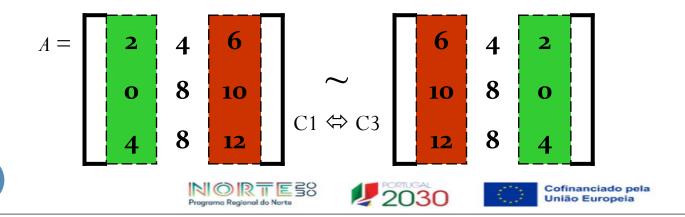




- Aplicando uma operação elementar do tipo 1, trocamos 2 linhas à matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Ou duas colunas:



- Aplicando uma operação elementar do tipo 2, multiplicamos 1 linha por 1 escalar:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2^{*}2 & 4^{*}2 & 6^{*}2 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Ou uma coluna por um escalar:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2^{*}2 & 4 & 6 \\ 0^{*}2 & 8 & 10 \\ 4^{*}2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$





- Aplicando uma operação elementar do tipo 3 na linha L2, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0+(2^*2) & 8+(2^*4) & 10+(2^*6) \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

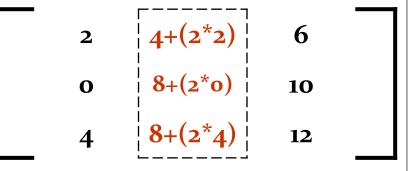
$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0+(2^*2) & 8+(2^*4) & 10+(2^*6) \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
2 & 4 & 6 \\
0+(2^*2) & 8+(2^*4) & 10+(2^*6) \\
4 & 8 & 12
\end{bmatrix}$$

Ou na coluna C2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\sim$$
 C2 = C2 + 2 * C1

















$$A = [a_{ij}]_{mxn}$$

Fase 1

Tome-se $a_{11} \neq 0$ (se $a_{11} = 0$, troca-se a primeira linha com outra, de modo a que a_{11} seja não nulo, a esta operação chama-se pivotagem, se a primeira linha for toda nula, troca-se com a última linha e repete-se o raciocínio), designando-se este por elemento redutor ou pivot.







Fase 2

Fixado o elemento \mathbf{a}_{11}

Determinamos escalares λ_i , i=2,...,m $\lambda_i a_{11} + a_{i1} = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$

soma-se à linha i a primeira multiplicada por λ_i anulando-se, assim, todos os elementos abaixo de \mathbf{a}_{11}





Fase 3

Na matriz obtida procede-se do mesmo modo, desta vez tomando como elemento redutor a_{22} , e assim sucessivamente, até um determinado elemento a_{rr} . A condensação termina, obtendose a matriz condensada A', quando:





Não existem mais colunas

$$\mathbf{r} = \mathbf{n} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rn} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Não existem mais linhas

$$\mathbf{r} = \mathbf{m}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1m} & a'_{1,m+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2m} & a'_{2,m+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mm} & a'_{m,m+1} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

Existem apenas linhas nulas

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rm} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \uparrow \ \ \, \uparrow \ \ \, M$$







Exercício:

1. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$
.

Obtenha a matriz condensada da matriz A.













Característica de uma matriz utilizando o método da condensação

A característica de uma matriz pode ser obtida por condensação, e corresponde à ordem da submatriz triangular superior da matriz condensada, ou seja,

$$car(A) = r$$







Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sim$$

$$L_2 = L_2 - 4L$$





Observando a diagonal principal da matriz resultante, podemos concluir que CAR(A)=2, pois existem 2 elementos \neq 0.





Exercício:

1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 11 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Determine as respetivas características.





Exercício Propostos:

❖ Ficha de Exercícios n.º2

Exercícios 1, 2, 3, 5.a), 6.a)

❖ Ficha Extra n.º2

Exercícios 1, 2





