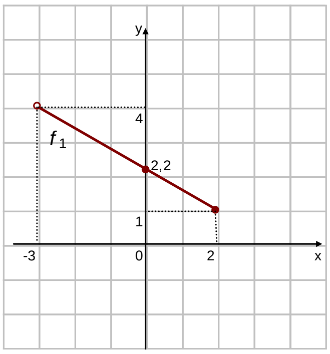
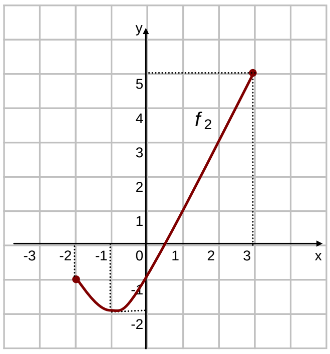
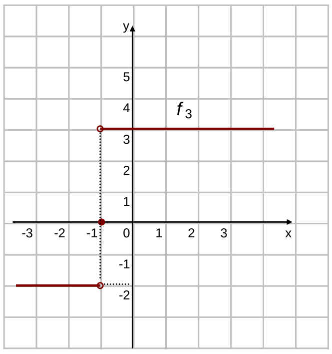
Ficha de Exercícios n.º 1

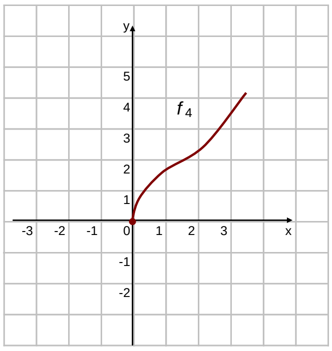
<u>Funções. Representação de funções</u>

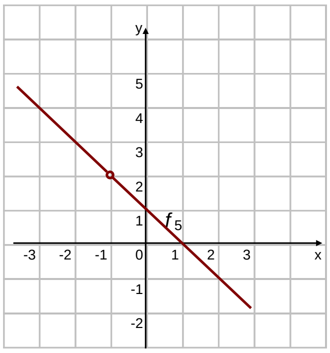
1. Observe os seguintes gráficos e representações gráficas:

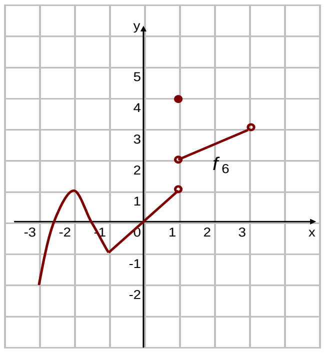












Indique:

1.1 o domínio e o contradomínio de cada uma das funções dadas;

1.2 o valor de:

$$f_1(0); \quad f_2(-1); \quad f_3(0); \quad f_4(0); \quad f_5(1); \quad f_6(1); \quad f_6(-1);$$

1.3 o valor de x para cada uma das igualdades seguintes:

$$f_3(x)=-2; \quad f_1(x)=1; \quad f_6(x)=1; \quad f_6(x)=-1.$$

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

2. Determine o domínio de cada uma das funções reais de variável real definidas por:

2.1 $f_1(x)=0$

2.2 $f_2(x)=-2$

2.3 $f_3(x)=x$

2.4 $f_4(x)=3x-1$

2.5 $f_5(x)=1-x^3$

2.6 $f_6(x)=\dfrac{1}{x}+5$

2.7 $f_7(x)=\dfrac{2+x}{3-x}$

2.8 $f_8(x)=2+\dfrac{x}{x^2+1}$

2.9 $f_9(x)=\dfrac{2x+3}{1-x^2}$

2.10 $f_{10}(x)=\dfrac{-x}{x^2+x}$

2.11 $f_{11}(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-3x+7}$

3. Determine o domínio de cada uma das funções reais de variável real definidas por:

3.1 $r_1(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

3.2 $r_2(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{2x^2+5}$

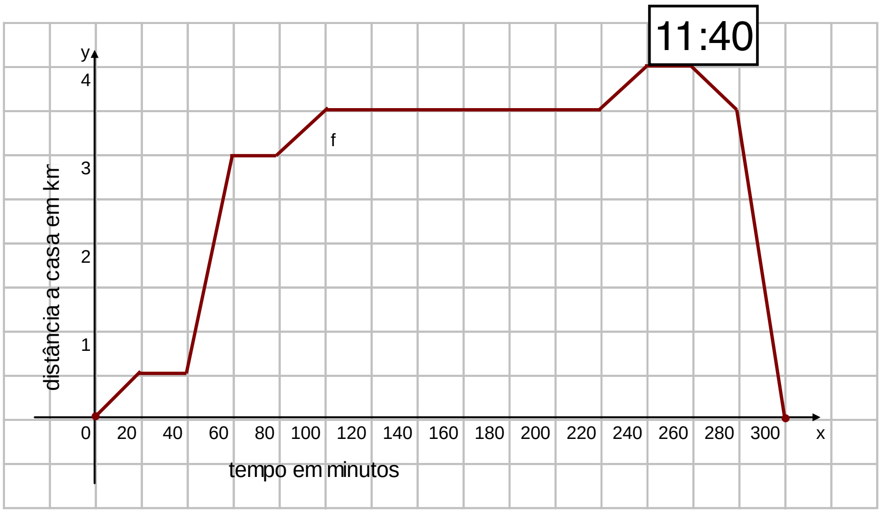
3.3 $r_3(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{2x-5}$

3.4 $r_4(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{9+4x}}$

3.5 $r_5(x)=\dfrac{\sqrt{-x+3}}{\sqrt{x-2}}$

3.6 $r_6(x)=\dfrac{\sqrt{-x+3}}{\sqrt[3]{x-2}}$

4. O gráfico mostra a relação entre o tempo gasto no percurso da viagem do João e a distância a casa.



O João saiu de casa, esperou pelo autocarro, saiu do autocarro e foi tomar café e, em seguida, foi para a Universidade. Quando saiu das aulas dirigiu-se a um centro comercial onde foi fazer compras. Depois de ter feito as compras, dirigiu-se para a paragem, apanhando imediatamente o autocarro que o trouxe até casa.

4.1 Qual é a distância da casa do João à Universidade?

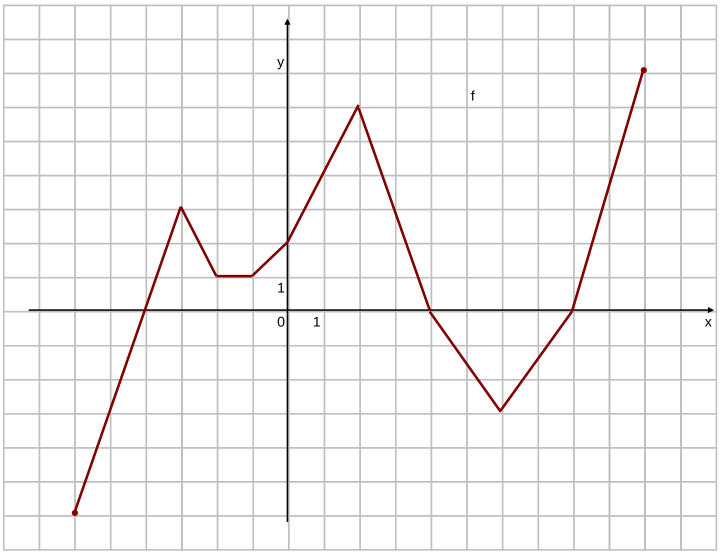
4.2 Quantos metros percorreu João a pé?

4.3 Quanto tempo esperou o João pelos autocarros?

4.4 Sabendo que o João entrou no centro comercial às 11h40m, diga a que horas chegou ele à Universidade.

Características de uma função

5. A figura seguinte representa o gráfico de uma função *f*.



Indique:

5.1 os intervalos de crescimento e os intervalos de decrescimento de *f*;

5.2 o máximo absoluto de *f*;

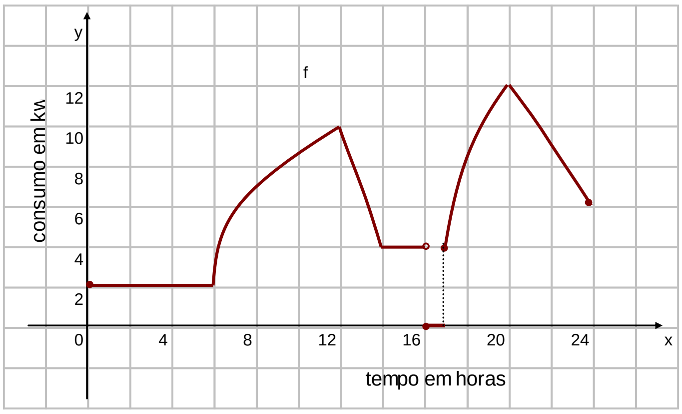
5.3 o mínimo absoluto e o minimizante de *f*;

5.4 os zeros de *f*;

5.5 os intervalos em que a função é positiva e os intervalos em que é negativa;

5.6 um intervalo em que *f* seja injetiva e um intervalo em que *f* seja não injetiva.

6. O gráfico seguinte mostra o consumo de eletricidade de uma casa durante um dia:



6.1 Em que intervalos de tempo o consumo foi constante?

6.2 Durante o dia houve um corte de energia. Pelo gráfico podemos concluir a que horas foi? Justifique.

6.3 Em que período do dia foi crescente o consumo de eletricidade? E decrescente?

6.4 A que horas do dia o consumo atingiu o valor máximo? E o valor mínimo (não tendo em conta o corte de energia)?

6.5 A que horas se registaram máximos relativos e mínimos relativos?

7. Represente graficamente cada uma das seguintes funções:

7.1 $f_1(x)=\begin{cases} x-3 & se\ x\geq 2 \\ 3 & se\ x<2 \end{cases}$

7.2 $f_2(x)=\begin{cases} -2x & se\ -1<x<4 \\ -x+1 & se\ x\leq -1 \end{cases}$

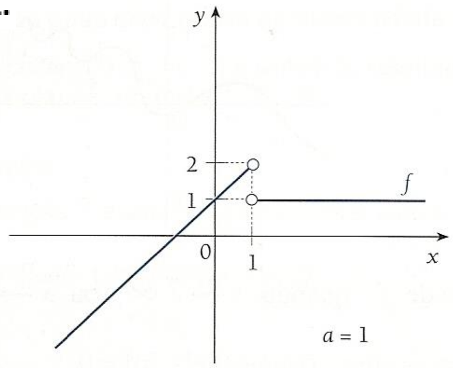
7.3 $f_3(x)=\begin{cases} -1 & se\ x>1 \\ 0 & se\ x=1 \\ 1 & se\ x<1 \end{cases}$

7.4 $f_4(x)=\begin{cases} -x & se\ 3\leq x<6 \\ -3x+1 & se\ -3\leq x<3 \\ 4 & se\ x=6 \end{cases}$

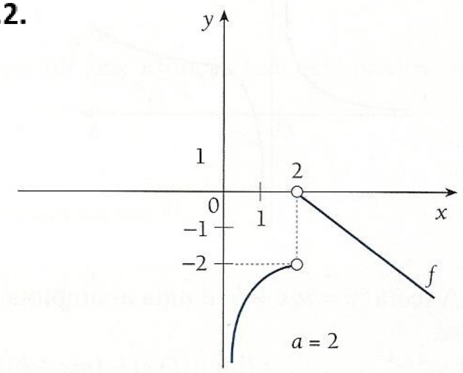
Limites

8. Nas alíneas seguintes calcule: $lim_{x \to a^+} f(x)$, $lim_{x \to a^-} f(x)$ e $lim_{x \to a} f(x)$

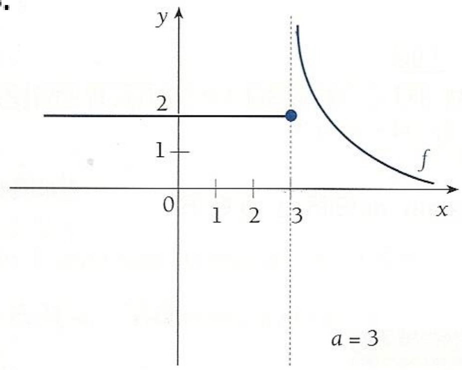
8.1.



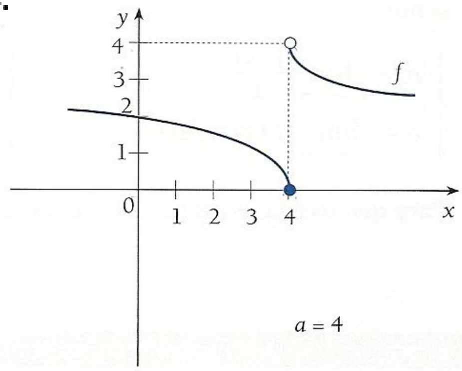
8.2.



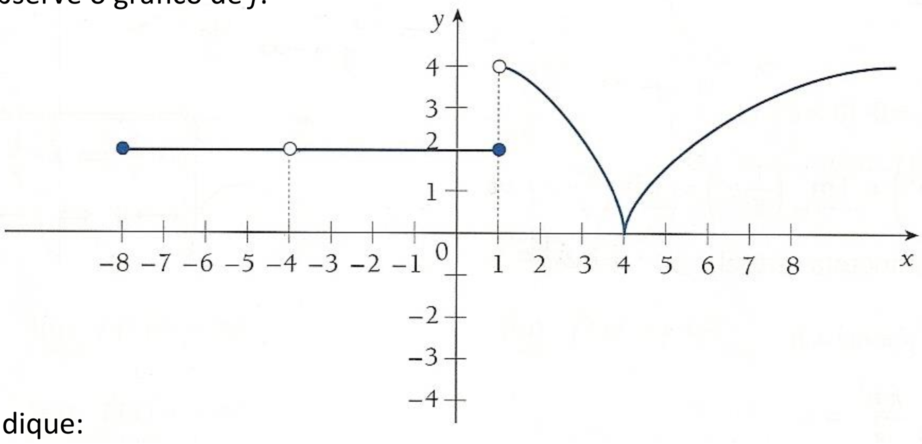
8.3.



8.4.



9. Observe o gráfico de *f*.



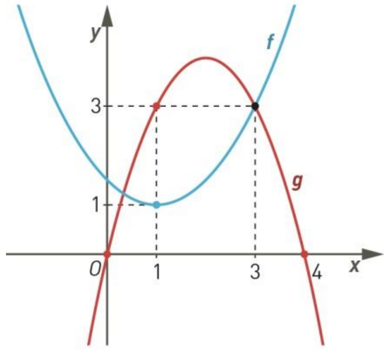
Indique:

9.1. $\lim_{x \to -4^-} f(x)$ **9.2.** $\lim_{x \to -4^+} f(x)$ **9.3.** $\lim_{x \to -4} f(x)$

9.4. $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ **9.5.** $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ **9.6.** $\lim_{x \to -1} f(x)$

9.7. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ **9.8.** $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ **9.9.** $\lim_{x \to 1} f(x)$

10. Na figura, em referencial ortonormado Oxy , estão representadas duas funções f e g de domínio IR.



Atendendo à informação dada na figura, responda às seguintes questões.

10.1. Pode concluir que $\lim\limits_{x\to 1} \left(g\ (x) - f\ (x)\right)$ é igual a:

(A) 0 **(B)** 2
(C) 3 **(D)** 1

10.2. Pode concluir que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f\ (x)}{g\ (x)}$ é igual a:

(A) $+\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $-\infty$

11. Calcule cada um dos seguintes limites:

11.1 $\lim\limits_{x\to 3}(-2x)$

11.2 $\lim\limits_{x\to 8}(-10)$

11.3 $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 - 2x + 1\right)$

11.4 $\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{x}$

11.5 $\lim\limits_{x\to 2}\left[(x-1)(x+5)^2\right]$

11.6 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$

11.7 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - 3}{x - 1}\right)^3$

11.8 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\left(\frac{x^2 + 1}{3x}\right)}$

12. Calcule os limites laterais nos pontos que se indicam e diga, justificando, se existe o limite nesses pontos.

12.1 $f(x)=\begin{cases} 2x & , \quad x<0 \\ x & , \quad x\geq 0 \end{cases}; \quad x=0$

12.2 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & , \quad x<-1 \\ 2 & , \quad -1\leq x\leq 1 \\ -\dfrac{1}{x} & , \quad x>1 \end{cases} \quad ; \quad x=1; x=-1$

12.3 $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & , \quad x>-1 \\ -\dfrac{1}{2x} & , \quad x\leq -1 \end{cases} \quad ; \quad x=-1$

13. Calcule os seguintes limites se existirem, ou mostre que não existem:

13.1 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, sendo $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & , \quad x<1 \\ x+3 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$

13.2 $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, sendo $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & , \quad x<1 \\ x+3 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$

13.3 $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, sendo $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & , \quad x<1 \\ x+3 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$

13.4 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, sendo $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x}$

13.5 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, sendo $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$

14. Determine, se existirem:

14.1 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x-x^3\right)$

14.2 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x-x^2\right)$

14.3 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x+x^3\right)$

14.4 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x+x^2\right)$

14.5 $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^3-3x+1}$

14.6 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3-3x^2+2\right)$

14.7 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-3x^5+x^4+2\right)$

15. Determine, se existirem:

15.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x+1}{x^2+3x}$

15.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2+5}{x^2+x}$

15.3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+5x+2}{x-1}$

15.4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{-x-3}\right)^3$

15.5 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, sendo $f(x)=\begin{cases} x^2 \ , & x>1000 \\ 2 \ , & x\le 1000 \end{cases}$

15.6 $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x}{(x+1)^2}$

15.7 $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-9}$

15.8 $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

15.9 $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

15.10 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{2x^2-8x+6}$

15.11 $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-x-2}$

15.12 $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

15.13 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x/(x^2+1)}{(2x^2+1)/x^4}$

15.14 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x/\left(x^2+1\right)}{\left(2x^2+1\right)/x^4}$

15.15 $\lim\limits_{x\to 0}\left(6x^2-x+4\right)$

15.16 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

16. Para cada valor real de **m** a expressão seguinte define uma função real de variável real *f*:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-mx+7 & \text{se } x>0 \\ 7 & \text{se } x=0 \\ |x+3|+m & \text{se } x<0 \end{cases}$$

16.1. Determine **m** de modo que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

16.2. Determine **m** de modo que $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=f(0)$.

17. Sejam *f* e *g* as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+x^2}+x & \text{se } x\le 0 \\ 2x+1 & \text{se } x>0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x)=x-\frac{x+1}{x-1}$$

17.1. Mostre que existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

17.2. Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$.

17.3. Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

Soluções:

1.

1.1 D_{f1}=]-3, 2] e D'_{f1}=[1, 4[; D_{f2}=[-2, 3] e D'_{f2}=[-2, 5] D_{f3}=R e D'_{f3}={-2, 0, 3}

$D_{f4}=R_0^+$ e $D'_{f4}=R_0^+$; D_{f5}=R\{-1}e D'_{f5}= R\{2}; D_{f6}=]-∞, 3[e D'_{f6}=]-∞, 1[∪]2, 3[∪{4}

1.2 2,2; -2; 3; 0; 0; 4; -1

1.3]- ∞, -1[; 2; -2; {(≅-3), -1}

2.

2.1	IR	2.7	IIR\{3}
2.2	IR	2.8	IR
2.3	IR	2.9	IR\{-1, 1}
2.4	IR	2.10	IR\{-1, 0}
2.5	IR	2.11	IR
2.6	IR\{0}		

3.

3.1	IR\{0}	3.4	]-9/4, 1]
3.2	[-1, +∞[	3.5	]2, 3]
3.3	[-1, +∞ [\{5/2}	3.6	]- ∞, 3]\{2}

4.

4.1	3,5 Km	4.3	20 min
4.2	2000m	4.4	9h20m

5.

5.1 Estritamente crescente:]-6, -3[,]-1, 2[e]6, 10[

Estritamente decrescente:]-3, -2[e]2, 6[

5.2 Máximo absoluto: 7

5.3 Mínimo absoluto: -6

Minimizantes: -6, [-2, -1] e 6

5.4 -4, 4 e 8

5.5 Positiva:]-4, 4[∪]8, 10[

Negativa: [-6, -4[∪]4, 8[

5.6 Injetiva: [-6, -3]

Não injetiva: [-4, 0], por exemplo

6.

6.1 Das 0h às 6h, das 14h às 16h e das 16h às 17h

NORTE2020 POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

6.2 Das 16h às 17h, porque o consumo passou, bruscamente, a ser 0

6.3 Das 6h às 12h e das 17h às 20h

6.4 20h. Das 0h às 6h

6.5 Máximos: 12h e 20h

Mínimos: das 0h às 6h; das 14h às 16h; das 16h às 17h e às 24h

8.

8.1 1; 2; não existe

8.2 0; -2; não existe

8.3 $+\infty$; 2; não existe

8.4 4; 0; não existe

9.

9.1	2	9.2	2	9.3	2	9.4	2	9.5	2	9.6	2
9.7	2	9.8	4	9.9	não existe						

10.

10.1 B   10.2 A

11.

11.1	-6	11.5	49
11.2	-10	11.6	2
11.3	0	11.7	27
11.4	-1/3	11.8	$\sqrt{2/3}$

12.

12.1 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

12.2 Não existe $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

Não existe $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

12.3 $\lim\limits_{x\to -1} h(x) = 1/2$

13.

13.1 Não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

13.2 $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -4$

13.3 $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 8$

13.4 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$

13.5 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

14.

14.1	$+\infty$	14.5	$+\infty$
14.2	$-\infty$	14.6	$+\infty$
14.3	$-\infty$	14.7	$-\infty$
14.4	$+\infty$		

15.

15.1	0	15.9	3
15.2	-2	15.10	-1/2
15.3	$+\infty$	15.11	-2/3
15.4	-1	15.12	-6
15.5	$+\infty$	15.13	$+\infty$
15.6	$-\infty$	15.14	0
15.7	-1/3	15.15	4
15.8	$+\infty$	1.16	0

16.

16.1 m=4

16.2 m=6

17.

17.2 $-\infty$

17.3 $\frac{1}{2}$