ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR PROFISSIONAL

Parte I – Álgebra Linear

Matemática Discreta e Álgebra Linear

Curso Técnico Superior Profissional

Ana Isabel Araújo
aiaraujo@ipca.pt

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

1. Matrizes

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Conceitos Gerais

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Matrizes: conceitos gerais

Considere a experiência: Lançamento de dois dados, efetuar a soma das faces e registar os resultados possíveis

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Matrizes: conceitos gerais

Definição: Matriz é uma tabela constituída por m linhas e n colunas

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

Tipo m*n

Elementos opostos

Diagonal principal (quando m = n)

$$A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n} \quad , i = 1, 2, \cdots, m \, , \; j = 1, 2, \cdots, n$$

$$a_{ij} - \text{escalares}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Matrizes: conceitos gerais

Diagonal principal

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Matrizes: conceitos gerais

Tipos de matrizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \Rightarrow$$ **Matriz linha**

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$ **Matriz coluna**

Matrizes: conceitos gerais

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Matriz rectangular

m ≠ n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada

$\mathbf{m = n}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz nula

Matrizes: conceitos gerais

Matrizes Quadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal é uma matriz em que todos os elementos são nulos quando $i \neq j$.

Nota: Se os elementos da diagonal principal tomarem o mesmo valor, a matriz chama-se **matriz escalar**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior é uma matriz em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

Matrizes: conceitos gerais

Matrizes Quadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Matriz triangular inferior** é uma matriz em que os elementos acima da diagonal principal são nulos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Matriz Identidade (unidade)** é uma matriz escalar de qualquer ordem em que todos os elementos são iguais a 1 para $i = j$.

Matrizes: conceitos gerais

Igualdade de matrizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} \end{bmatrix}$$

$m = k \qquad n = l$

$$a_{ij} = b_{uv}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações com matrizes
Propriedades

Programa Regional do Norte

Cofinanciado pela União Europeia

Operações com matrizes

Adição de matrizes

$$A_{m\times n} + B_{m\times n}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{A_{m\times n} + B_{p\times q}}$$

$$m \neq p \quad \vee \quad n \neq q$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

Propriedades

Sejam A, B, C e D matrizes do tipo $m \times n$.

I) Comutatividade: $A+B=B+A$

II) Associatividade: $(A+B)+C=A+(B+C)$

III) Existência de elemento neutro (matriz nula):

$$A+O_{m\times n}=O_{m\times n}+A=A$$

IV) Existência de elemento oposto: $A+(-A)=(-A)+A=O_{m\times n}$

V) Se $A=B$ e $C=D$, então $A+C=B+D$

Operações com matrizes

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Dada a matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ da multiplicação do escalar k pela matriz A resulta uma outra matriz $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, do mesmo tipo, cujos elementos são iguais ao produto do escalar, k, por cada elemento da matriz A:

$c_{ij}=k\,a_{ij},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n$.

$$-3\times\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -9 & -6\\ 3 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações com matrizes

Propriedades:

Dadas as matrizes A e B do mesmo tipo e k e t escalares reais:

I) $k(A+B)=kA+kB$

II) $(k+t)A=kA+tA$

III) $k(tA)=(kt)A$

IV) $1A=A$

Operações com matrizes

Multiplicação de Matrizes

Dadas duas matrizes $A=\left[a_{ij}\right]$ do tipo $m\times p$ e $B=\left[b_{ij}\right]$ do tipo $p\times n$, (**o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda**), o produto destas duas matrizes é uma outra matriz, $C=\left[c_{ij}\right]$ do tipo $m\times n$ tal que:

$$c_{ij}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix}}_{linha\ i\ de\ A}\times \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}}_{coluna\ j\ de\ B}=a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+\cdots+a_{ip}\times b_{pj}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}\ \left(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,p\right)$$

Operações com matrizes

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1*9+2*8+3*7 & 1*3+2*4+3*5 \\ 7*9+8*8+5*7 & 7*3+8*4+5*5 \end{pmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações com matrizes

Exemplo (cont.)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 7 \quad 8 \quad 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}} \\ 8 & \\ 7 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1*9+2*8+3*7 & 1*3+2*4+3*5 \\ 7*9+8*8+5*7 & 7*3+8*4+5*5 \end{pmatrix}$$

Operações com matrizes

Exemplo (cont.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1*9+2*8+3*7 & 1*3+2*4+3*5 \\ 7*9+8*8+5*7 & 7*3+8*4+5*5 \end{pmatrix}$$

Operações com matrizes

Exemplo (cont.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1*9+2*8+3*7 & 1*3+2*4+3*5 \\ 7*9+8*8+5*7 & 7*3+8*4+5*5 \end{pmatrix}$$

Operações com matrizes

Propriedades

Dadas as matrizes A **e** B **do tipo** $m\times p$ **e** $p\times n$ **respectivamente:**

I) Associatividade: $(AB)C = A(BC)$**, com** C **matriz do tipo** $n\times m$**.**

II) Existência de elemento neutro: $AI_p = I_m A = A$

III) Distributividade da multiplicação à direita e à esquerda em relação à adição:

i) $A(B+C) = AB + AC$**, com** C **matriz do tipo** $p\times n$

ii) $(B+C)D = BD + CD$**, com** C **matriz do tipo** $p\times n$ **e** D **matriz do tipo** $n\times q$**.**

Operações com matrizes

<u>Obs</u>: A multiplicação de matrizes <u>não é comutativa</u>.

$$A \times B \neq B \times A$$

<u>Def.</u> A e B dizem-se **matrizes permutáveis** se e só se $A \times B = B \times A$

Exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Então:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

Potenciação

A potencia de ordem k, $k \in \Re$ da matriz A quadrada, A^k, é dada por:

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ factores}}$$

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ então $A^3 = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}$.

Operações com matrizes

Matriz Transposta

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Trocam-se ordenadamente linhas por colunas

Matriz simétrica

Def. Uma matriz quadrada diz-se **simétrica** se e só se $A = A^T$

Operações com matrizes

Propriedades

Dadas as matrizes $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$:

I) $\left(A^T\right)^T = A$

II) $(A+B)^T = A^T + B^T$

III) $(AB)^T = B^T A^T$

IV) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{R}$

V) $\left(A^k\right)^T = \left(A^T\right)^k, k \in \mathbb{R}$

Operações elementares sobre matrizes

NORTE 2030
Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações elementares sobre matrizes

Tipos de operações elementares:

1-Permuta de duas linhas (colunas);

2-Multiplicação de uma linha (coluna) por um escalar diferente de zero;

3-Adição aos elementos de uma linha (coluna) os elementos correspondentes de uma outra linha (coluna) paralela multiplicada por um qualquer escalar.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações elementares sobre matrizes

Definição: Matrizes equivalentes

Duas matrizes dizem-se equivalentes, e escreve-se **A ~ B**, se uma delas puder ser obtida da outra realizando um número finito de operações elementares.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Operações elementares sobre matrizes

- Aplicando uma operação elementar do tipo 1 , trocamos 2 linhas à matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{L1 \Leftrightarrow L3}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Ou duas colunas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{C1 \Leftrightarrow C3}{\sim} \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 10 & 8 & 0 \\ 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

30

Operações elementares sobre matrizes

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

√ 1) Permuta de duas linhas (colunas).

⇨ 2) Multiplicação de uma linha (coluna) por um número diferente de zero.

3) Adição aos elementos de uma linha (coluna) os elementos correspondentes de uma outra linha (coluna) paralela multiplicada por um número qualquer.

31

Operações elementares sobre matrizes

- Aplicando uma operação elementar do tipo 2, multiplicamos 1 linha por 1 escalar:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{L1 = 2 * L1}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{2*2 \quad 4*2 \quad 6*2} \\ 0 \quad 8 \quad 10 \\ 4 \quad 8 \quad 12 \end{bmatrix}$$

Ou uma coluna por um escalar:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{C1 = 2 * C1}{\sim} \begin{bmatrix} 2*2 & 4 & 6 \\ 0*2 & 8 & 10 \\ 4*2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

32

Operações elementares sobre matrizes

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

√ 1) Permuta de duas linhas (colunas).

√ 2) Multiplicação de uma linha (coluna) por um número diferente de zero.

⇨ 3) Adição aos elementos de uma linha (coluna) os elementos correspondentes de uma outra linha (coluna) paralela multiplicada por um número qualquer.

Operações elementares sobre matrizes

- Aplicando uma operação elementar do tipo 3 na linha L2, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{L2 = L2 + 2 * L1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \boxed{0+(2*2) \quad 8+(2*4) \quad 10+(2*6)} \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Ou na coluna C2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \underset{C2 = C2 + 2 * C1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 4+(2*2) & 6 \\ 0 & 8+(2*0) & 10 \\ 4 & 8+(2*4) & 12 \end{bmatrix}$$

Operações elementares sobre matrizes

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

√ 1) Permuta de duas linhas (colunas).

√ 2) Multiplicação de uma linha (coluna) por um número diferente de zero.

√ 3) Adição aos elementos de uma linha (coluna) os elementos correspondentes de uma outra linha (coluna) paralela multiplicada por um número qualquer.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

35

Método da Condensação

NORTE 2030 Programa Regional do Norte PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Método da Condensação

$$A = [a_{ij}]_{mxn}$$

Fase 1

Tome-se $a_{11} \neq 0$ (se $a_{11} = 0$, troca-se a primeira linha com outra, de modo a que a_{11} seja não nulo, a esta operação chama-se pivotagem, se a primeira linha for toda nula, troca-se com a última linha e repete-se o raciocínio), designando-se este por elemento redutor ou pivot.

Método da Condensação

Fase 2

Fixado o elemento $\mathbf{a}_{11}$

Determinamos escalares λ_i , $\mathbf{i} = 2,\ldots,\mathbf{m}$

$$\lambda_i \mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{i1} \Leftrightarrow \lambda_i = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

soma-se à linha i a primeira multiplicada por λ_i anulando-se, assim, todos os elementos abaixo de $\mathbf{a}_{11}$

Método da Condensação

Fase 3

Na matriz obtida procede-se do mesmo modo, desta vez tomando como elemento redutor a_{22}, e assim sucessivamente, até um determinado elemento a_{rr} . A condensação termina, obtendo-se a matriz condensada A', quando:

Método da Condensação

Não existem mais colunas

$$r = n \qquad A' = \left[\begin{array}{cccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rn} \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

Não existem mais linhas

$$r = m$$

$$A' = \left[\begin{array}{cccc:ccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1m} & a'_{1,m+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2m} & a'_{2,m+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mm} & a'_{m,m+1} & \cdots & a'_{mn} \end{array}\right]$$

Existem apenas linhas nulas

$$A' = \left[\begin{array}{cccc:ccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \qquad r < m$$

Característica de uma matriz

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Característica de uma matriz

Característica de uma matriz utilizando o método da condensação

A característica de uma matriz pode ser obtida por condensação, e corresponde à ordem da submatriz triangular superior da matriz condensada, ou seja,

$$\mathbf{car(A) = r}$$

Característica de uma matriz

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{L_2 = L_2 - 4L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Característica de uma matriz

$$\underset{L_3 = L_3 - 7L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \underset{L_3 = L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observando a diagonal principal da matriz resultante, podemos concluir que CAR(A)=2, pois existem 2 elementos $\neq 0$.

Inversa de uma matriz

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Inversa de uma matriz

Seja *A* uma matriz quadrada do tipo n x n.

Definição: A matriz *B* do tipo n x n diz-se ***matriz inversa de A*** e representa-se por A^{-1} se e só se:

$$AB = BA = I$$

sendo I a matriz identidade do tipo n x n.

Obs. A matriz *A* diz-se também inversa de *B*.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Inversa de uma matriz

Definição: As matrizes que admitem inversa dizem-se ***matrizes invertíveis***.

Definição: Uma matriz apenas é invertível se for quadrada, de **característica igual à ordem**.

Definição: Uma matriz quadrada que não é invertível diz-se **matriz singular**.

Definição: Uma matriz quadrada invertível diz-se **matriz regular**.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Inversa de uma matriz

Exercício:

Mostre que as seguintes matrizes são inversas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma matriz

Exercício:

Mostre que a seguinte matriz é singular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Inversa de uma matriz

Teorema: Se a matriz quadrada **A** admite matriz inversa, então esta matriz inversa é única.

Inversa da matriz A $\mathbf{A^{-1}}$: $\mathbf{A^{-1}\,A = A\,A^{-1} = I}$

Nota: Uma condição necessária para uma matriz ter inversa, é que seja quadrada. No entanto, nem todas as matrizes quadradas têm inversa.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Inversa de uma matriz

Propriedades:

Dadas as matrizes, $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B = [b_{ij}]_{mxn}$ e k escalar inteiro:

I – $(A\ B)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

II – Se A é quadrada e invertível então $(A^{-1})^{-1} = A$

III – $I^{-1} = I$

IV– $A^{-1}\ (A\ B) = 0 \Rightarrow B = 0$

V – Se A é quadrada e invertível então $(A^{k})^{-1} = (A^{-1})^{k}$

VI - $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

Inversa de uma matriz

Cálculo da inversa de uma matriz por condensação

A inversa de uma matriz A pode ser calculada através da realização de um número finito de operações elementares sobre linhas (colunas), a este método chama-se método da condensação.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Inversa de uma matriz

Opção 1 $\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \underset{\text{operações elementares sobre linhas}}{\sim} \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$

Opção 2 $\left[\begin{array}{c|c} I & A \end{array}\right] \underset{\text{operações elementares sobre linhas}}{\sim} \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & I \end{array}\right]$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Inversa de uma matriz

Opção 3

$$\left[\begin{array}{c} A \\ \hline I \end{array}\right] \underset{\substack{\text{operações} \\ \text{elementares} \\ \text{sobre} \\ \text{colunas}}}{\sim} \left[\begin{array}{c} I \\ \hline A^{-1} \end{array}\right]$$

Opção 4

$$\left[\begin{array}{c} I \\ \hdashline A \end{array}\right] \underset{\substack{\text{operações} \\ \text{elementares} \\ \text{sobre} \\ \text{colunas}}}{\sim} \left[\begin{array}{c} A^{-1} \\ \hdashline I \end{array}\right]$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Inversa de uma matriz

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2-3L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1=L_1+L_2}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2/-2}{\sim} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma matriz

Algoritmo para a Inversão de uma Matriz Quadrada

1. Considerar uma matriz quadrada do tipo *n*×*n* que se pretende inverter.
2. Construir a matriz aumentada $[A|I]$, $[I|A]$, $\left[\frac{A}{I}\right]$ ou $\left[\frac{I}{A}\right]$.
3. Efetuar sobre as linhas(colunas) desta matriz as operações elementares necessárias à transformação da matriz A na matriz identidade I.
4. Se 3. não for possível então A não tem inversa.
5. Se 3. for possível obter um resultado $[I|B]$, $[B|I]$, $\left[\frac{I}{B}\right]$ ou $\left[\frac{B}{I}\right]$.

Então a matriz A é invertível e $B = A^{-1}$

Inversa de uma matriz

Exemplo:

Determinar, se existir, a matriz inversa de **A**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Inversa de uma matriz

$$\overset{\sim}{L_2 \leftrightarrow L_3} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\sim}{L_2 = L_2 - L_3} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\sim}{L_1 = L_1 - L_2} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinantes

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Conceitos Gerais

Def Um determinante é uma função que associa a cada matriz quadrada A, um escalar, ou seja, é uma função que transforma uma matriz quadrada num número real a que se chama **determinante de A**.

Representa-se por **det (A)** ou |**A**|.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad d(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Conceitos Gerais

Determinante de 1ª ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem $M=[a_{11}]$, o seu determinante é o número real a_{11}: $\det M = |a_{11}| = a_{11}$

Determinante de 2ª ordem

Dada a matriz , de 2ª ordem, por definição o determinante $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, associado a M, determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

Determinantes: Conceitos Gerais

Exemplo

Calcule do determinante da matriz $M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

Determinantes: Conceitos Gerais

Determinante de 3ª ordem

Dada uma matriz quadrada de 3ª ordem, o seu determinante pode ser calculado pela REGRA DE SARRUS (que só é válida para determinantes de 3ª ordem) ou pelo TEOREMA DE LAPLACE (que pode ser aplicado a determinantes de 3ª ordem e ordens superiores).

Determinantes de ordem superior a 3

Usa-se o Teorema de Laplace para 3ª ordem e superior.

Cálculo

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Regra de Sarrus

Esta regra consiste em repetir as 2 primeiras linhas ou as 2 primeiras colunas do determinante e obter os produtos dos elementos tomados de 3 em 3 como se vê a seguir:

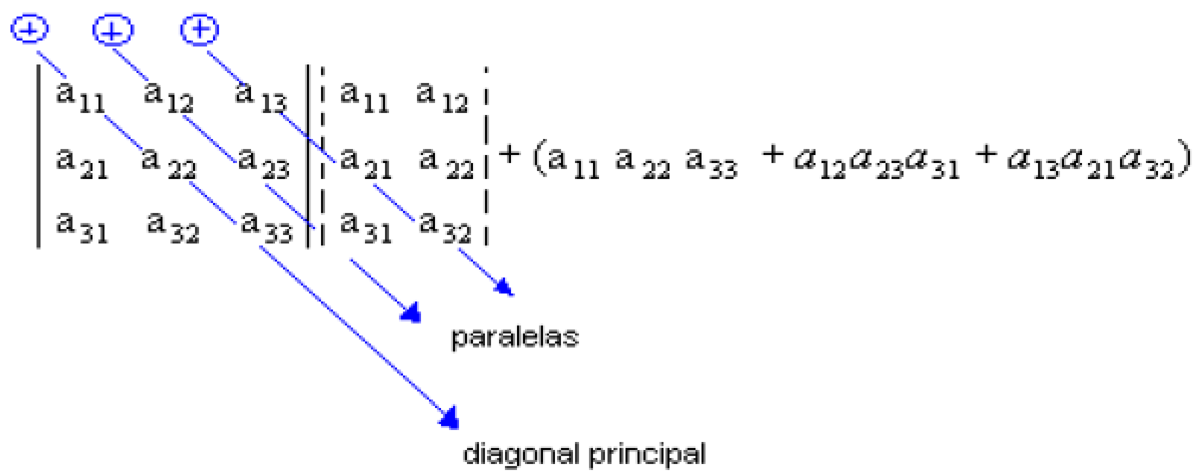
$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Determinantes: Cálculo

Regra de Sarrus (cont.)

1º passo) Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira

2º passo) Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal principal com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo)



Determinantes: Cálculo

Regra de Sarrus (cont.)

3º passo) Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal secundária com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo)

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

paralelas

diagonal secundária

Determinantes: Cálculo

$$+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad -$$

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} .$$

$$= -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

Determinantes: Cálculo

Exemplo

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -9 \end{vmatrix}$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Teorema de Laplace

Menor complementar - $\mathbf{M_{ij}}$ - de um elemento a_{ij} de uma matriz é o determinante que se obtém daquela matriz eliminando a linha e a coluna que se cruzam nesse elemento.

Complemento algébrico - $\mathbf{C_{ij}}$ - de um elemento a_{ij} de uma matriz é o produto do menor complementar (M_{ij}) desse elemento por $(-1)^{i+j}$, onde i e j são as ordens da linha e da coluna, respetivamente, que se cruzam nesse elemento.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij}$$

Determinantes: Cálculo

Teorema de Laplace

- **EXEMPLO:** Seja o determinante : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, calcular o Menor

Complementar dos elementos $\boxed{a_{11} \text{ e } a_{12}}$.

R: Elemento a_{11}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow MC_{11} = |a_{22}| = a_{22}$$

Elemento a_{21}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow MC_{12} = |a_{21}| = a_{21}$$

Determinantes: Cálculo

Teorema de Laplace

- **Exemplo:**

Vamos considerar a matriz $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

- ✓ O menor complementar de a_{12} é :

$$MC_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}= a_{21} . a_{33} - a_{23} . a_{31}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- ✓ O complemento algébrico de a_{12}:

$$C_{12}= (-1)^{1+2} . (a_{21} . a_{33} - a_{23} . a_{31})$$

$$= -(a_{21} . a_{33} - a_{23} . a_{31})$$

$$= a_{23} . a_{31} - a_{21} . a_{33}$$

Determinantes: Cálculo

Teorema de Laplace:

O determinante de uma matriz A é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando cada um dos elementos de uma das suas linhas (ou colunas) pelo respetivo complemento algébrico.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Determinantes: Cálculo

Teorema de Laplace (resumo):

$$|A| = \sum (-1)^{i+j} \times a_{ij} \times M_{ij}$$

i: posição da linha

j: posição da coluna

M_{ij}: menor complementar de a_{ij}

Determinantes: Cálculo

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar o determinante da matriz A aplicando o Teorema de Laplace

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 5 \times \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 1 \times (4 - 3) - 1 \times 5 \times (7 - 3) + 1 \times 1 \times (21 - 12) = 1 - 20 + 9 = -10$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Exercício:

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

a) Usando a regra de Sarrus.

b) Aplicando o Teorema de Laplace.

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

1ª - O valor de um determinante não é alterado quando se trocam ordenadamente as suas colunas com as suas linhas.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.-1-1.0 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.-1-0.1 = -2$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

2ª - Se uma linha/coluna de um determinante é composto por zeros então o seu valor é nulo.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 - 6.0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 - 0.2 = 0$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

3ª - Trocando entre si duas linhas/colunas paralelas de um determinante, o seu valor vai ser simétrico do inicial.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 3.(-1) = 2 + 3 = 5$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \ (L_1 \leftrightarrow L_2) \ ou \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \ (C_1 \leftrightarrow C_2)$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

4ª - Um determinante com duas linhas/colunas paralelas iguais é nulo

Exemplo:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ \\ L_3 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

5ª - Multiplicando (ou) dividindo os elementos de uma linha/coluna de um determinante por um escalar **k**, o determinante tem como valor o produto (ou quociente) do determinante inicial por **k**.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \text{ multiplicando } 2^{\text{a}} \text{ coluna por } 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

6ª - Um determinante com duas linhas/colunas paralelas proporcionais é nulo

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}} \end{vmatrix} = 0$$

$$C_3 = 2C_1$$

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

7ª - Se cada elemento de uma linha/coluna de um determinante for igual à soma de duas parcelas, ele poder-se-á decompor na soma de dois determinantes que se obtêm daquele, substituindo os elementos dessa linha/coluna sucessivamente pelas primeiras e pelas segundas parcelas dessas somas, mantendo inalteradas as restantes linhas/colunas.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0+0 & 3 \\ 2 & 1+2 & 1 \\ 3 & 0+1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

8ª - Um determinante não se altera se aos elementos de um das suas linhas/colunas se adicionarem os elementos correspondentes de outra linha/coluna paralela multiplicadas por um nº qualquer **k**.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-6=-7$$

$$L_2 + L_1.(-2) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$$

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

9ª - O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Exemplo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 23 \quad \Rightarrow \det\left(A^t\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \\ 2 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 23$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

10ª - Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

Exemplo:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{multiplicando} \quad C_1 \text{ por } 2: \begin{array}{c} \overset{2C_1}{\downarrow} \\ \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \end{vmatrix} \end{array} = 2(-4) = -8$$

$$b)\begin{vmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -145 \quad \text{Multiplicando} \quad L_1 \text{por } \frac{1}{5}: \begin{array}{c} \overset{\frac{1}{5}L_1}{\downarrow} \\ \begin{vmatrix} \boxed{1 \;\; -2 \;\; 0} \\ 3 \quad 7 \quad 4 \\ 2 \quad 0 \;\; -1 \end{vmatrix} \end{array} = \frac{1}{5}(-145) = -29$$

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

11ª - Um determinante com todos os elementos abaixo (ou acima) da diagonal principal nulos é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplo:

$$a)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{vmatrix} = a.b.c \qquad b)\begin{vmatrix} x & g & h \\ 0 & y & i \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = x.y.z$$

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

12ª - Quando trocamos as posições de duas linhas/colunas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \text{ Trocando as posições de } L_1 \text{ e } L_2 : \begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 1 \quad -1} \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 3 \quad 2 \quad 1 \end{vmatrix} == +4$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Propriedades:

13ª - Quando, numa matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal secundária são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal multiplicado por (-1).

Exemplo:

$$a)\ \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & x \end{vmatrix} = -a.b \qquad b)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & x \\ c & y & z \end{vmatrix} = -a.b.c$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Determinantes: Cálculo

Não esquecer!!

$$\boxed{\det(AB) = \det A \,.\, \det B}$$

$$A \,.\, A^{-1} = I, \quad \boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

Matriz Adjunta

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Matriz Adjunta

Um método para determinar a matriz inversa é chamado de método de inversão por matriz adjunta.

É um método aplicável a matrizes quadradas de 2ª ordem ou ordem superior.

Relembrar:

Um matriz A admite inversa se:

- *É quadrada de ordem n, isto é, é do tipo $n \times n$*
- $C(A)=n$ *ou* $|A| \neq 0$

Matriz Adjunta

Def. Matriz Adjunta

Seja A uma matriz n × n. Definimos a **matriz adjunta de A**, denotada por **adj(A)**, como a transposta da matriz formada pelos cofatores (complementos algébricos) de A, ou seja,

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$ → **Complemento algébrico de a_{ij}**

i: posição da linha

j: posição da coluna

M_{ij}: Menor complementar do elemento a_{ij}

Matriz Adjunta

Exemplo:

Calcular a matriz adjunta de A, com $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Assim,

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -9 & 8 & -2 \\ 6 & -2 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 6 \\ -5 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Matriz Adjunta

Teorema:

Se A é uma matriz quadrada que admite inversa então

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Na prática:

1°) Calcular o determinante da Matriz A e verificar se A admite inversa

2°) Calcular a matriz C dos cofatores de A

3°) Determinar a matriz adjunta A

4°) Calcular $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$.

Matriz Adjunta

Exemplo:

Obter a matriz inversa de

Já vimos que $adj(A) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -9 & 8 & -2 \\ 6 & -2 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 6 \\ -5 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 24 + 20 + 18 - 8 - 24 - 45 = -15$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 6 \\ -5 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$$

Matriz Adjunta

Exercício:

Obter, pelo método da matriz adjunta, a matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

2. Sistemas de Equações Lineares

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Conceitos Gerais

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Conceitos Gerais

Definição: Um sistema de m equações lineares e n incógnitas pode ser representado na forma matricial do seguinte modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Conceitos Gerais

Forma matricial: **AX=b**

A= matriz dos coeficientes das incógnitas

X= matriz coluna das incógnitas

b= matriz coluna dos termos independentes

Escrever um sistema de equações lineares na forma matricial, além de tornar mais simples a sua resolução, facilita a demonstração de resultados sobre as condições para que o sistema tenha solução.

Conceitos Gerais

Exemplo:

Considere o sistema $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

- Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz ampliada $\bar{A}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Conceitos Gerais

<u>Def:</u> Uma **solução de um sistema** de m equações lineares e n incógnitas é o ponto (ou conjunto de pontos) que torna cada equação numa afirmação verdadeira

<u>Exemplo:</u>

Considere o sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

O ponto (4, 4) não é solução do sistema pois não satisfaz a segunda equação: $2 \times 4 - 4 = 4 \neq 1$

O ponto (3, 5) é solução dos sistema pois satisfaz as duas equações.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Conceitos Gerais

Exercício:

a) Escreve o seguinte sistema na sua forma matricial e determina a matriz ampliada

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

b) Verifique se o ponto (9, -1) é solução do sistema.

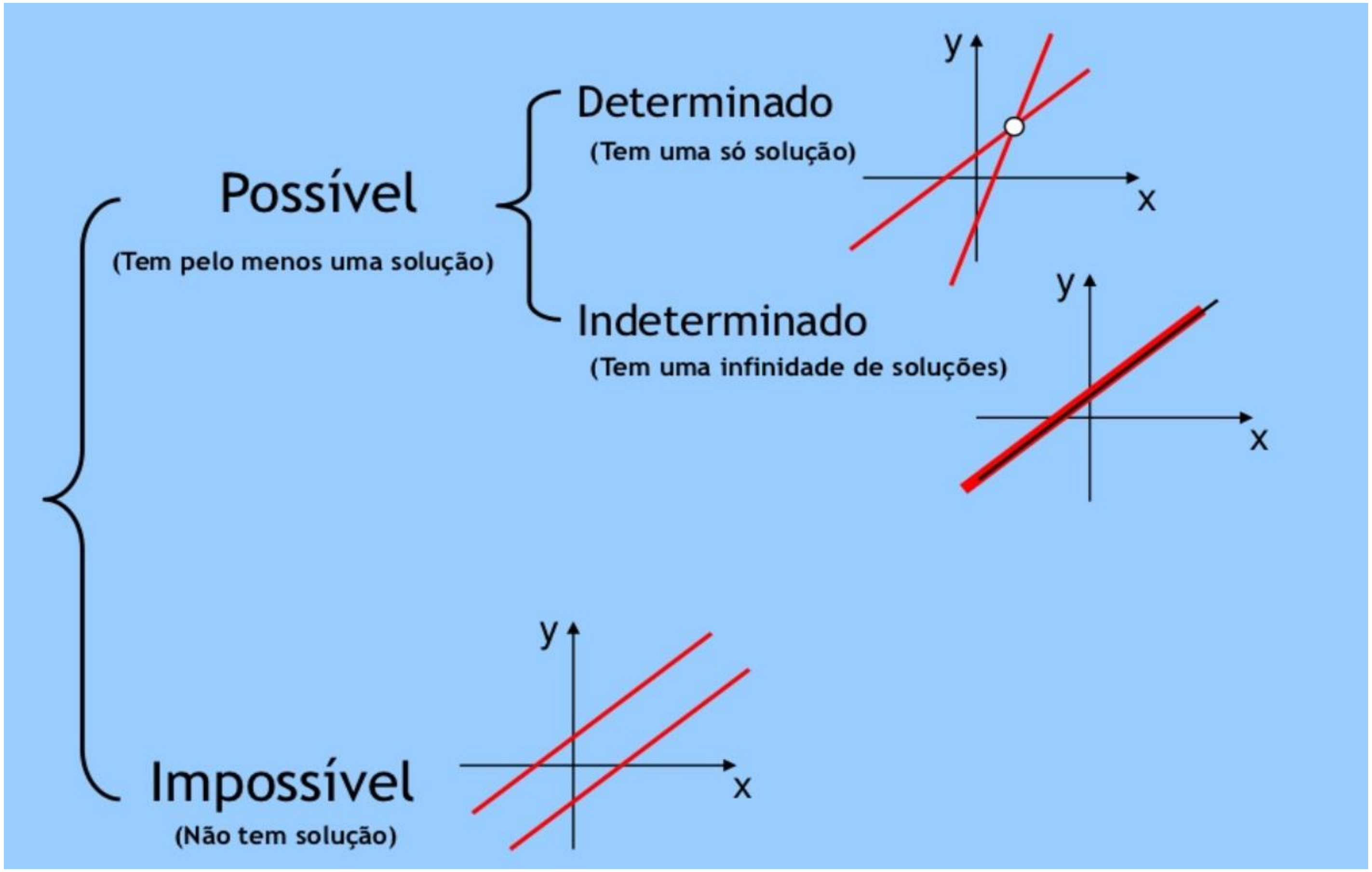
Classificação de Sistemas

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Classificação de Sistemas

Revisão:

Sistemas de equações lineares a duas incógnitas



NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Classificação de Sistemas

Para se resolverem sistemas de equações lineares é necessário usar o método da condensação de matrizes e depois analisar a C(A) (que contém as incógnitas do sistema) e a C($\bar{A}$) (que contém as incógnitas e a coluna do termo independente: b).

O primeiro passo a dar é escrever o sistema na forma matricial, de seguida condensar a matriz e finalmente analisar C(A) e C($\bar{A}$) .

Classificação de Sistemas

Num Sistema de Equações Lineares a C(A) nunca pode ser maior do que C($\bar{A}$).

$$\boxed{C(\overline{A}) \geq C(A)}$$

A C($\bar{A}$) quando é superior à C(A) é apenas em uma unidade.

A é uma matriz com as *n* primeiras colunas coincidentes com as *n* colunas de A e por isso é que C(A) nunca pode ser superior à C($\bar{A}$) .

Classificação de Sistemas

Resumindo:

Impossível: $C(A) \neq C(\bar{A})$

Sistemas de Equações Lineares

Possível e determinado: $C(A) = C(\bar{A}) = n$

Possível: $C(A) = C(\bar{A})$

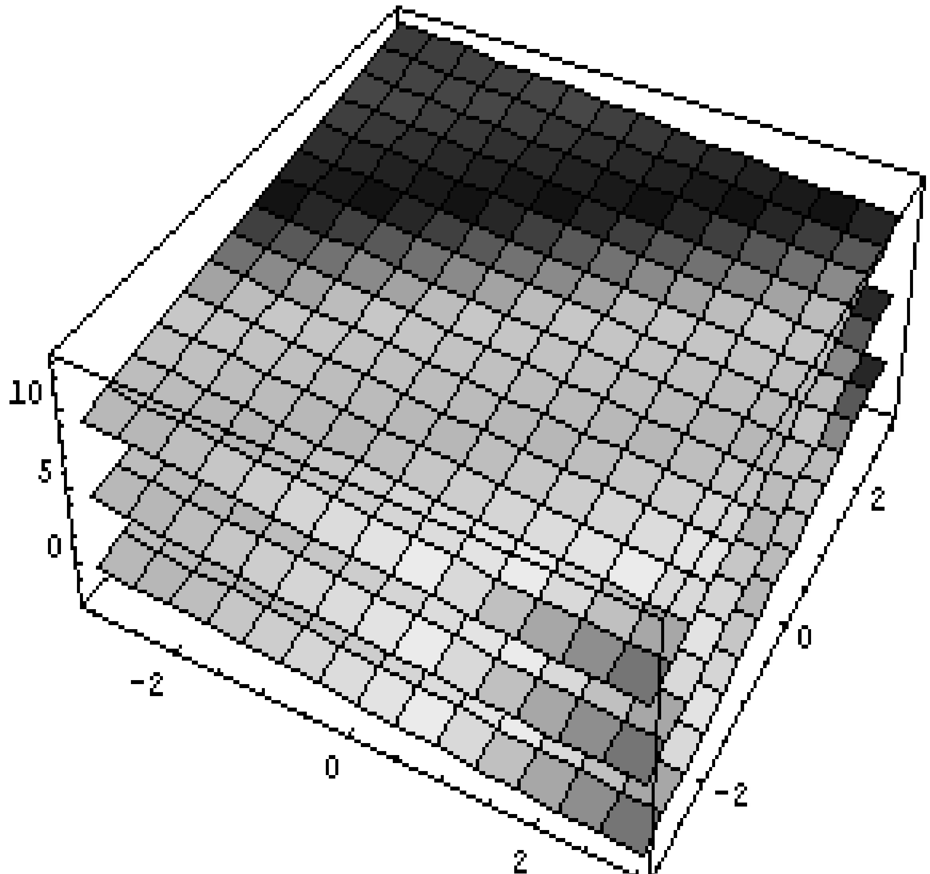
Possível e indeterminado: $C(A) = C(\bar{A}) < n$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Classificação de Sistemas

Interpretação geométrica

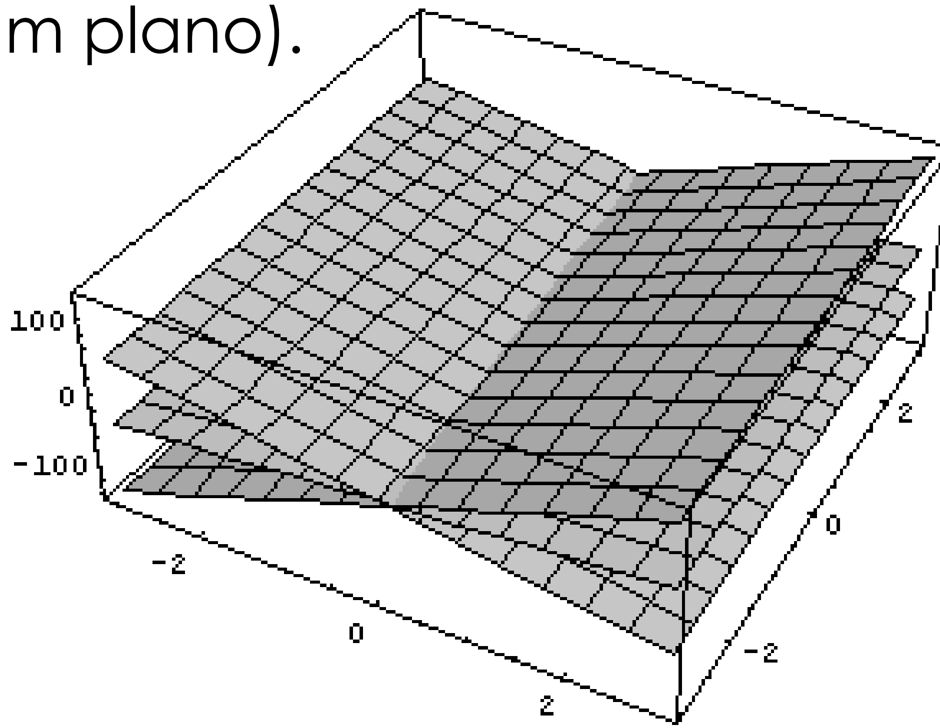
Se o sistema é impossível então os hiperplanos nunca se cruzam.



Classificação de Sistemas

Interpretação geométrica

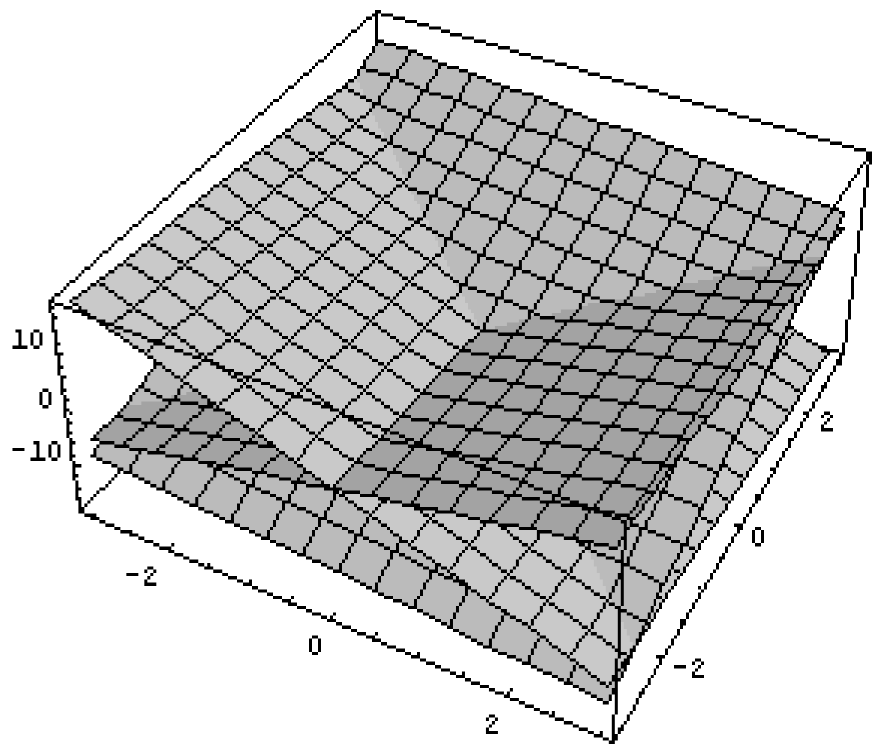
Se o sistema é possível e indeterminado então os hiperplanos cruzam-se em mais do que um ponto (por exemplo: uma reta; ou um plano).



Classificação de Sistemas

Interpretação geométrica

Se o sistema é possível e determinado então os hiperplanos cruzam-se num ponto.



Classificação de Sistemas

Exemplo

Classifica, sem resolver, o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 4x - y - z = 6 \end{cases}$$

Classificação de Sistemas

Exemplo (resolução):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[L3=L3-4L1]{L2=L2-2L1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L3=L3-L2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$C(A) = 2 = C(\bar{A})$

Nº incógnitas: n=3

O sistema é possível e indeterminado (2<3).

Resolução de Sistemas

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Resolução de Sistemas

Método de condensação - é o usado para resolver qualquer tipo de sistema.

Equações principais - são aquelas cujos coeficientes dão origem à submatriz a partir da qual se obtém C(A).

Equações secundárias - são as restantes.

Incógnitas principais - são aquelas cujos coeficientes dão origem à submatriz .

Resolução de Sistemas

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS:

Consiste em condensar a matriz do sistema abaixo da diagonal principal e transformar a matriz numa matriz triangular superior.

Tendo uma matriz triangular, basta aplicar substituições sucessivas para chegarmos à solução pretendida.

Resolução de Sistemas

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS-JORDAN:

Consiste em condensar a matriz do sistema acima e abaixo da diagonal principal e transformar todos os elementos da diagonal principal na unidade.

O resultado obtido na coluna dos termos independentes é a solução do sistema.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Resolução de Sistemas

Exemplo 1:

Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 24 \end{cases}$$

Resolução de Sistemas

Exemplo 1 (resolução):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 11 \\ 4 & 6 & 8 & 24 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L2=L2-2L1 \\ L3=L3-4L1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[L3\leftrightarrow L2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - x_3 \\ 2x_2 = 8 - 4 \times 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 2 - 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Sistema Possível e Determinado

S={(1, 2, 1)}

Resolução de Sistemas

Exemplo 2:

Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 4x - y - z = 6 \end{cases}$$

Resolução de Sistemas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[L3=L3-4L1]{L2=L2-2L1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L3=L3-L2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_3 \\ -5x_2 = 2 - 3x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{-2+3x_3}{5} + x_3 \\ x_2 = \frac{-2+3x_3}{5} \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+2x_3}{5} \\ x_2 = \frac{-2+3x_3}{5} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Sistema Possível e Indeterminado

$$S=\{(\frac{7+2x_3}{5}, \frac{-2+3x_3}{5}, x_3)\}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Tipos de Sistemas

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Tipos de Sistemas

Sistema homogéneo

É um sistema de equações lineares cujos termos independentes são nulos (b=0).

Trata-se de um sistema sempre possível pois admite pelo menos a solução nula.

Para resolver, basta apenas em condensar a matriz, ver C(A) e verificar se é determinado ou indeterminado e obter a solução geral.

SPD - admite só a solução nula

SPI – admite, além da solução nula, uma infinidade de soluções

Tipos de Sistemas

Exemplo:

$$\text{a)}\ \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -2x-4y=0 \\ x+y-4z=0 \end{cases} \qquad C(A)=3 \Rightarrow SPD \Rightarrow solução=(0{,}0{,}0)$$

$$\text{b)}\ \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -2x-4y=0 \\ 3x+6y-3z=0 \end{cases} \qquad C(A)=2 \Rightarrow SPI \Rightarrow solução=(-2y, y{,}0)$$

Tipos de Sistemas

Sistema de Cramer

- ✓ Um sistema para ser de Cramer tem que obedecer a duas condições:
  - número de equações = número de incógnitas
  - determinante da matriz do sistema tem que ser diferente de zero.
- ✓ É um sistema sempre possível e determinado.
- ✓ A solução é obtida através das Igualdades de Cramer.

Tipos de Sistemas

Fórmulas de Cramer:

- ✓ $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, \dots, n$
- ✓ Δ= $|A|$ (determinante da matriz dos coeficientes)
- ✓ Δ_i= determinante em que se substitui a coluna da incógnita x_i pela coluna dos termos independentes.

Tipos de Sistemas

Exemplo 1:

Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$

a) Verificar se é um sistema de Cramer.

b) Em caso afirmativo, resolver o sistema.

Tipos de Sistemas

Exemplo 1 (resolução):

a) Verificar se é um sistema de Cramer

- Nº equações = 2 = Nº incógnitas
- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7 \neq 0$

O sistema dado é de Cramer!

Tipos de Sistemas

Exemplo 1 (resolução):

b) Em caso afirmativo, resolver o sistema.

$x_1 = ?$

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times (-1) - 5 \times 2 = -14$$

$$x_1 = \frac{-14}{-7} = 2$$

$x_2 = ?$

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 3 \times 4 = -7$$

S={ (2, 1) }

$$x_2 = \frac{-7}{-7} = 1$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Tipos de Sistemas

Exemplo 2:

Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

a) Verificar se é um sistema de Cramer

b) Em caso afirmativo, resolver o sistema.

Resolução pela matriz inversa

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Resolução pela inversa

Através de uma equação matricial, verifica-se que a solução de um sistema pode ser encontrada através da matriz inversa.

Se A for quadrada e não-singular, existe uma matriz, representada por A^{-1}, que é inversa de A tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Então:

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ \Leftrightarrow & A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ \Leftrightarrow & I_n x = A^{-1}b \\ \Leftrightarrow & x = A^{-1}b \end{aligned}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Resolução pela inversa

Exemplo 1:

Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 4x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3/4 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Resolução pela inversa

Exemplo 2:

Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ 4x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ -3 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -5/2 \end{bmatrix}$$

Resolução pela inversa

Exercícios:

Resolva os seguintes sistemas de equações lineares, recorrendo à matriz inversa:

a) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Discussão de sistemas

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Discussão de sistemas

Discutir um Sistema Linear é classificá-lo quanto ao número de soluções.

Após a condensação da matriz ampliada de um sistema linear, obtém-se a matriz ampliada de um sistema linear equivalente mais simples.

Assim podemos classificá-lo rapidamente, conforme a discussão a seguir.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Discussão de sistemas

Seja S um sistema linear com ***m*** equações e ***n*** variáveis. Após a condensação da matriz ampliada, e retiradas as equações todas nulas, suponha que restaram ***p*** equações.

Então:

1) Se a última equação do sistema é do tipo **0 = k**, com $k \neq 0$, temos um Sistema Impossível(SI).

Exemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Discussão de sistemas

2) Caso não existam equações como no caso anterior, então temos duas possibilidades:

2.1) Se **p=n** ele é um sistema possível e determinado (SPD).

Exemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

2.2) Se **p<n** ele é um sistema possível e indeterminado (SPI).

Exemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Discussão de sistemas

Exemplo:

Discuta, em função de k, o seguinte sistema.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

Discussão de sistemas

Exercícios:

Discuta, em função de k, os seguintes sistemas.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 0y + kz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ y + kz = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \;\; \text{k} \end{cases}$$

3. Espaços Vetoriais

NORTE 2030 Programa Regional do Norte PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Definição

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Definição Espaço Vetorial

"Um Espaço Vetorial é um conjunto não vazio onde se podem fazer as operações <u>soma vetorial</u> e <u>multiplicação por um escalar</u>."

Um espaço vetorial (V, +, ×) ou, por simplificação de escrita, apenas V, é uma estrutura abstrata constituída por um conjunto e duas operações, em que os seus elementos, chamados vetores, se podem somar e multiplicar por um escalar, ao mesmo tempo que verificam algumas propriedades.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Definição Espaço Vetorial

Definição: Espaço vetorial

Sejam u, v e w quaisquer vetores de um espaço vetorial real V e c e d escalares reais. (V, +, ×) é um espaço vetorial se verifica:

1. A soma u+v existe e é um vetor de V (Significa que V é fechado para a adição);

2. u+v=v+u;

3. (u+v)+w=u+(v+w);

4. Existe um vetor de V, chamado vetor nulo e denotado por 0_V, tal que u+ 0_V =u;

5. Para todo o vetor u de V, existe um vetor simétrico –u tal que u+(-u)= 0_V;

Definição Espaço Vetorial

Definição: Espaço vetorial (Cont.)

6. cv existe e é um vetor de V (Significa que V é fechado para a multiplicação por um escalar);

7. c(v+w)=cv+cw;

8. (c+d)v=cv+dv;

9. c (dv)=(cd)v;

10. 1u=u, com $1 \in \mathbb{R}$

Definição Espaço Vetorial

Propriedades:

Para quaisquer vetores u e v de um espaço vetorial real V e r um escalar real:

1. $r\,0_V = 0_V$;

2. $0_{IR}\,u = 0_V$;

3. $r(-u) = -(ru)$;

4. $ru = 0_V \Leftrightarrow r = 0_{IR} \vee u = 0_V$.

Definição Espaço Vetorial

Exemplos:

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}\}$ com as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas como:

$$(x,y)+(z,w)=(x+z,y+w),\ \ \alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$$

Os conjuntos $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$ com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

O conjunto das matrizes m x n com as operações adição e multiplicação por escalar usuais.

O conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau $\leq n$, mais o polinômio nulo, em relação às operações usais de adição de polinômios e multiplicação por escalar.

Subespaço vetorial

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Subespaço Vetorial

Subespaços vetoriais são subconjuntos vetoriais que obedecem aos axiomas de um Espaço Vetorial. Mas o facto de serem subconjuntos permite apenas verificar três axiomas para que possamos afirmar que se trata de um Subespaço Vetorial.

1. $r\, 0_V = 0_V$;

2. $0_{IR}\, u = 0_V$;

3. $r(-u) = -(ru)$;

4. $ru = 0_V \Leftrightarrow r = 0_{IR} \vee u = 0_V$.

Subespaço Vetorial

Definição: Subespaço vetorial

Sejam *u*, *v* vetores de um subconjunto *H* de *V* e *c* um escalar real. *H* é um subespaço vetorial se verifica:

1. O vetor nulo de *V* está em *H*, ou seja, $0_V \in H$;

2. A soma *u*+*v* existe e é um vetor de *H* (Significa que *H* é fechado para a adição);

3. *cv* existe e é um vetor de *H* (Significa que *H* é fechado para a multiplicação por um escalar).

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Subespaço Vetorial

Exemplos:

$V=\mathbb{R}^2$ e $S=\{(x,0)/x\in\mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V com as operações usuais.

$V=\mathbb{R}^2$ e $S=\{(x,4-2x)/x\in\mathbb{R}\}$ não é um subespaço vetorial V com as operações usuais.

Combinações lineares

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Combinações Lineares

Definição: Combinação linear de vetores

Seja *V* um espaço vetorial real e sejam $v_1,\ldots,v_n$ vetores de *V*.

Um vetor $v \in V$ é combinação linear dos vetores $v_1,\ldots,v_n$ se existirem escalares $c_1,\ldots,c_n \in$ IR (não necessariamente únicos), tais que:

$$v = c_1 \times v_1 + c_2 \times v_2 + \ldots + c_n \times v_n.$$

Combinações Lineares

Exemplos:

1 *O elemento $v = (4,3) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear dos elementos $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$.*

De fato, v pode ser escrito como:

$$v = (4,3) = 4(1,0) + 3(0,1) = 4v_1 + 3v_2$$

Assim, existem os escalares $\alpha_1 = 4$ e $\alpha_2 = 3$ tais que v pode ser escrito como $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Logo, v é combinação linear de v_1 e v_2.

2. *O elemento $v = (2,4,-3) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos elementos $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-1,0), v_3 = (0,0,2)$.*

Para que v seja combinação linear de v_1, v_2, v_3 é preciso que existam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \Rightarrow (2,4,-3) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,-1,0) + \alpha_3(0,0,2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ -\alpha_2 = 4 \\ 2\alpha_3 = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Assim, $\boxed{v = 2v_1 - 4v_2 - \frac{3}{2}v_3}$.

Subespaços Gerados

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Subespaços Gerados

Um conjunto de vetores pode construir vetores por meio de combinações lineares.

Fazendo todas as combinações possíveis (isto é, fazendo cada escalar ter todos os valores reais possíveis), o conjunto constrói uma infinidade de vetores que compõem um conjunto expandido.

Esse conjunto é um subespaço vetorial, chamado de conjunto de vetores de base, pois, em termos formais, ele gerou o subespaço W, definido a seguir.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Subespaços Gerados

Teorema:

Seja V um espaço vetorial real e $v_1,\ldots,v_n \in V$. O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1,\ldots,v_n$, representado por

$$\{c_1v_1+\ldots c_nv_n: c_1, \ldots, c_n \in P\}$$

É um subespaço vetorial de V.

Subespaços Gerados

Definição: Subespaço Gerado

Seja V um espaço vetorial real e $v_1,\ldots,v_n \in V$.

Designa-se por **subespaço vetorial gerado por $v_1,\ldots,v_n$** o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1,\ldots,v_n$ e representa-se por

$$< v_1,\ldots,v_n >= \{c_1v_1+\ldots c_nv_n : c_1, \ldots, c_n \in P\}$$

Se *F*=< $v_1,\ldots,v_n$> diz-se ainda que os vetores $v_1,\ldots,v_n$ geram *F* ou são geradores de *F*.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Subespaços Gerados

Exemplos:

1. *O conjunto* $S = \{(1,2)\} \in \mathbb{R}^2$ *gera o subespaço* $U = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\big\}$.

De fato, tomando um elemento $u = (x,y) \in U$, temos que $y = 2x$, logo podemos escrever:

$$u = (x,y) = (x,2x) = x(1,2), \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}$$

Dessa forma, mostramos que qualquer elemento de U pode ser escrito como combinação linear dos elementos de S, assim, S é um conjunto de geradores para U.

2. *Determine um conjunto de geradores para o subespaço* U *do* $\mathbb{R}^2$, *dado:*

$$U = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z + t = 0 \quad e \quad -x + 3y + z - 2t = 0\big\}$$

Das condições para que um elemento de $\mathbb{R}^4$ pertença a U obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ -x + 3y + z - 2t = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

De onde temos: $y = \frac{t-2z}{2}$ e $x = \frac{-t-4z}{2}$, com $z, t \in \mathbb{R}$ livres.

Assim, podemos escrever qualquer elemento $u \in U$ da forma $u = (x,y,z,t) = \left(\frac{-t-4z}{2}, \frac{t-2z}{2}, z, t\right) = z\left(\frac{-4}{2}, -1, 1, 0\right) + t\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$, com $z, t \in \mathbb{R}$.

Dependência e independência linear de vetores

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Dependência e independência linear

Como já se viu, um conjunto de vetores de *V* gera um determinado espaço vetorial *E* se todos os vetores de *E* se podem exprimir como combinação linear dos vetores de *V*.

De um modo geral, podem existir várias maneiras de exprimir um vetor de *E* como combinação dos vetores do espaço gerador.

Vamos estudar as condições sob as quais cada vetor de *E* pode ser expresso como combinação linear dos vetores do espaço gerador de uma única maneira.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Dependência e independência linear

Definição: Dependência Linear

Um conjunto de vetores $v_1,\ldots,v_n$ de um espaço vetorial real V diz-se **linearmente dependente** se e só se existe pelo menos um desses vetores que é combinação linear dos restantes.

Caso contrário, os vetores dizem-se **linearmente independentes**.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Dependência e independência linear

Teorema:

Seja V um espaço vetorial real e $v_1,\ldots,v_n \in V$.

i) Os vetores $v_1,\ldots,v_n$ são linearmente dependentes se existem escalares $c_1 ,\ldots, c_n$ não todos nulos tais que: $0_V = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$;

ii) Os vetores $v_1,\ldots,v_n$ são linearmente independentes se com os escalares $c_1,\ldots,c_n$, todos nulos, se escreve de forma única: $0_V = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$.

Dependência e independência linear

Exemplos:

1: *O conjunto* $\{(1,0),(0,1)\}$ *em* $\mathbb{R}^2$ *é Linearmente Independente.*

De fato, a equação:

$$\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)=(0,0)$$

só vale para $\alpha_1=\alpha_2=0$. Assim, os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ são L.I.

2: *Os elementos* $v_1=(1,2)$ *e* $v_2=(3,6)$ *do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *são Linearmente Dependentes.*

De fato, temos que a equação:

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2=e\Rightarrow\alpha_1(1,2)+\alpha_2(3,6)=(0,0)$$

É verdadeira para $\alpha_1=3$ e $\alpha_2=-1$. Assim, v_1 e v_2 são L.D.
Também podemos verificar que $(3,6)=3(1,2)\Rightarrow v_2=3v_1$, ou seja, v_2 é combinação linear de v_1.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Bases e Dimensão

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Bases e Dimensão

Definição: Base

Um conjunto de vetores *V*, $v_1,\ldots,v_n$ é uma *base* do espaço vetorial real *E* se:

i. *V* gera o espaço *E*

ii. *V* é linearmente independente

Definição: Dimensão

Seja *V* um espaço vetorial que admite uma base com *n* elementos.

Diz-se que *V* tem **dimensão *n*** e escreve-se $\boldsymbol{dim\, V = n}$.

Bases e Dimensão

Exemplos:

1: $\{(1,0),(0,1)\}$ *é uma base para o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$, *que chamamos de* **base canônica** *do* $\mathbb{R}^2$.

De fato, o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I., uma vez que a equação:

$$\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)=(0,0)$$

só é possível para $\alpha_1=\alpha_2=0$. E além, disso, o conjunto gera todo o $\mathbb{R}^2$, uma vez que qualquer $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$.
Assim, $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

Portanto, $dim(\mathbb{R}^2)=2$.

2: $\{(1,1),(0,1)\}$ *é uma base para* $\mathbb{R}^2$.

Tomando a equação:

$$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(0,1)=(0,0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}$$

Obtemos um sistema que tem solução: $\alpha_1=\alpha_2=0$. Logo, $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I.

Além disso, $\{(1,0),(0,1)\}$ gera todo o $\mathbb{R}^2$, uma vez que todo $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $(x,y)=x(1,1)+(y-x)(0,1)$. Assim, $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

Como era de se esperar, $dim(\mathbb{R}^2)=2$.

NORTE 2030 Programa Regional do Norte
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Bases e Dimensão

Exemplos (cont.):

3: $\{(1,0),(0,1),(2,1)\}$ **NÃO** *é uma base para* $\mathbb{R}^2$.

Podemos escrever o elemento $(2,1)$ como combinação linear de $(1,0)$ e $(0,1)$ da forma: $(2,1) = 2(1,0) + 1(0,1) \Rightarrow 2(1,0) + 1(0,1) - 1(2,1) = (0,0)$. Portanto, temos que $\{(1,0),(0,1),(2,1)\}$ não é L.I., logo não pode ser uma base para $\mathbb{R}^2$.