Глобальная нормализация для уравнения Ферма: от $o^n = 2 \cdot n$ к ВТФ, с верификацией на Coq

Григорий Деденко

Аннотация Представлено прочтение рукописи Г. Л. Деденко, в котором вводится единый, унифицированный нормализующий фактор $o \in \mathbb{N}$, $o > 1$, не зависящий от показателя степени n. Постулируется, что для любого гипотетического натурального решения уравнения Ферма $x^n + y^n = z^n$ с $n > 2$ выполняется равенство $o^n = 2 \cdot n$ (эквивалентно, после стандартной параметризации, $\frac{p^n q}{l} = o$). Только из этого равенства элементарно следует, что $o = 2$ и $n \in \{1, 2\}$; следовательно, решений для $n > 2$ не существует. Весь аргумент формулируется как условная импликация «глобальная нормализация $\Rightarrow$ ВТФ» и полностью формализован на Coq. Доказательство импликации опирается только на элементарное сравнение роста функций; ограничения по чётности из параметризации устанавливаются отдельно (для полноты) и не входят в финальный шаг. Обсуждение функции $f(n) = (2n)^{1/n}$ служит для мотивации *формы* нормализации и не используется в самом доказательстве.

Ключевые слова: Великая теорема Ферма · Деденко · нормализация · Ansatz · Coq · формальная верификация

1 Введение

Мы рассматриваем уравнение Ферма

$$x^n + y^n = z^n, \qquad x, y, z \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

В предлагаемом здесь прочтении, следуя рукописи Деденко, вводится *единый глобальный нормализующий фактор* $o \in \mathbb{N}$, $o > 1$, *не зависящий от* n, и постулируется, что для любого предполагаемого решения (1) с $n > 2$ выполняется

$$o^n = 2 \cdot n. \tag{2}$$

Эта нормализация позволяет анализировать все показатели степени одновременно. Простое сравнение роста функций затем показывает, что (2) выполняется только для $(o, n) = (2, 1)$ или $(2, 2)$; таким образом, для $n > 2$ решений не существует.

Мы формализуем вышеупомянутую условную импликацию на Coq. Алгебраическая параметризация для удобства записана над $\mathbb{R}$, в то время как ограничения по чётности доказываются над $\mathbb{Z}$. Предположение о глобальной нормализации представлено одним параметром o вместе с универсальным условием (2), применяемым к любому гипотетическому контрпримеру.

2 Алгебраическая постановка и чётность

Следуя стандартному приёму, положим $z := m^n + p^n$ и $x := m^n - p^n$ (изначально над $\mathbb{R}$, чтобы равенства в кольце были очевидны). Тогда

$$y^n = z^n - x^n = (m^n + p^n)^n - (m^n - p^n)^n$$

представляет собой сумму биномиальных коэффициентов с нечётными индексами. При переходе к $\mathbb{Z}$ подстановка подразумевает, что $z \pm x$ — чётные; в Coq это отражено в лемме (*parity_condition_Z*). Эти факты о чётности логически не зависят от финального шага, основанного на росте функций, и включены для полноты.

3 Глобальная нормализация (Ansatz)

Мы фиксируем *один* $o \in \mathbb{N}$, $o > 1$, и предполагаем:

Definition 1 (Принцип глобальной нормализации). *Для любых* $n, x, y, z \in \mathbb{N}$*, где* $n > 2$*, если* $x^n + y^n = z^n$ *выполняется, то*

$$o^n = 2 \cdot n. \tag{3}$$

Эквивалентно, после стандартной параметризации и в обозначениях рукописи, (3) принимает вид $\left(\frac{p^n q}{l}\right)^n = 2 \cdot n$ или $\frac{p^n q}{l} = o$. Анализ функции $f(n) = (2n)^{1/n}$ объясняет, почему выбор нормализатора в форме *n-й степени* естественен, но эти аналитические свойства не используются в финальной импликации.

4 Формализация на Coq: рост и основная теорема

В реализации на Coq доказываются элементарные сравнения роста $2^n > 2n$ для $n \geq 3$ и $3^n > 2n$ для $n \geq 1$, которые объединены в:

Lemma 1. *Если* $o > 1$ *и* $o^n = 2 \cdot n$*, где* $n \geq 1$*, то* $(o, n) = (2, 1)$ *или* $(2, 2)$*.*

В файле Coq это соответствует `integer_solution_o`. Принимая принцип глобальной нормализации в качестве гипотезы, мы получаем:

Theorem 1 (ВТФ из глобальной нормализации). *Предположим Определение 1. Тогда для любого* $n > 2$ *не существует решений уравнения* (1) *в* $\mathbb{N}$*. В Coq:* *`fermat_last_theorem_from_normalization`*.

Доказательство (Идея). Для заданного $n > 2$ и гипотетического решения, (3) даёт $o^n = 2 \cdot n$; согласно Лемме 1, это приводит к $n \in \{1, 2\}$, что является противоречием.

Для полноты, реализация также включает следствие, в котором выбирается $o = 2$ («нормализация с полным покрытием»), что приводит к $2^n = 2 \cdot n$ и тому же противоречию; см. `fermat_last_theorem_with_o_two`.

5 Что *не* предполагается

Представленное здесь прочтение *не* опирается на какие-либо безусловные сравнения, такие как $(m^n + p^n)^n - (m^n - p^n)^n \equiv 0 \pmod{2n}$ (которое в общем случае неверно). Вместо этого, единственным дополнительным предположением является существование единого глобального нормализатора $o > 1$, удовлетворяющего (2) для любого гипотетического контрпримера.

6 Соответствие между статьёй и кодом на Coq

Таблица 1. Соответствие между шагами в статье и реализацией на Coq.

Статья (пункт)	**Формализация на Coq (лемма/теорема)**
Алгебраическая параметризация над $\mathbb{R}$; факты о чётности целых чисел	`sum_diff_from_parameters_R`, `sum_diff_from_parameters_Z`, `parity_condition_Z`.
Принцип глобальной нормализации (фиксированный $o > 1$, не зависящий от n)	Секция `Normalization_Parameter`: `Variable o`, `normalization_gt1`, `normalization_equation`.
Сравнение экспоненциального и линейного роста	`pow2_gt_linear`, `pow3_gt_linear`.
Только $(o, n) = (2, 1), (2, 2)$ являются решениями $o^n = 2n$	`integer_solution_o`.
ВТФ из принципа нормализации	`fermat_last_theorem_from_normalization`.
Необязательное следствие при «$o = 2$»	`fermat_last_theorem_with_o_two`.

7 Заключение

При единственном предположении о глобальной нормализации $o^n = 2 \cdot n$, применимом к любому гипотетическому контрпримеру, в файле Coq выводится ВТФ для всех $n > 2$ с использованием только элементарных лемм о росте функций. Ограничения по чётности, вытекающие из параметризации, проверяются отдельно. Аналитическое обсуждение функции $f(n) = (2n)^{1/n}$ мотивирует *форму* нормализатора в виде n-й степени, но не используется в финальной импликации.

Приложение: избранные объявления Coq (имена)

`sum_diff_from_parameters_R`, `sum_diff_from_parameters_Z`, `parity_condition_Z`, `pow2_gt_linear`, `pow3_gt_linear`, `integer_solution_o`, `Normalization_Parameter` (секция), `fermat_last_theorem_from_normalization`, `fermat_last_theorem_with_o_two`.

Список литературы

1. A. Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics* 141 (1995), 443–551. (Рус. пер.: Уайлс Э. Модулярные эллиптические кривые и Великая теорема Ферма)
2. G. L. Dedenko. The "Difficulties" in Fermat's Original Discourse on the Indecomposability of Powers Greater Than a Square: A Retrospect. Preprint, 2025. DOI: 10.13140/RG.2.2.24342.32321. (Рус. пер.: Деденко Г. Л. «Острые углы» в рассуждении Пьера Ферма о неразложимости степени выше квадрата (обзор) DOI: 10.13140/RG.2.2.24531.39207/12)
3. The Coq Development Team. The Coq Proof Assistant. `https://coq.inria.fr`. (Рус. пер.: Команда разработчиков Coq. Система доказательства теорем Coq)