Глобальная нормализация через параметр покрытия $(o > 1) \Rightarrow$ ВТФ: Условный подход, верифицированный в Coq

Григорий Деденко

Аннотация Мы развиваем прочтение идеи Деденко в терминах *глобальной нормализации*. Постулируется единый вещественный множитель $o > 1$, обслуживающий все предполагаемые контрпримеры к уравнению Ферма $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$, что приводит к тождеству *покрытия* $\mathrm{pow}(o, n) = 2 \cdot \mathrm{INR}(n)$. В предположении *максимального покрытия* (тот же самый множитель o покрывает в точности экспоненты $n \in \{1, 2\}$ и никакие другие), разработка на Coq доказывает, что $o = 2$, и показывает, что $\mathrm{pow}(2, n) = 2 \cdot \mathrm{INR}(n)$ может выполняться только для $n \in \{1, 2\}$. Следовательно, любое предполагаемое решение при $n > 2$ приводит к противоречию, из чего следует Великая теорема Ферма. Посылка о нормализации сохраняется как явная гипотеза над $\mathbb{N}$; леммы-связки соединяют вещественное уравнение $\mathrm{pow}(o, n) = 2 \cdot \mathrm{INR}(n)$ с целочисленным сравнением 2^n и $2n$. Классическая параметризация $(z, x) = (m^n + p^n,\ m^n - p^n)$ и тождества, связанные с чётностью, появляются только в качестве мотивации и не используются в финальном выводе противоречия. Данное изложение через параметр покрытия заменяет более раннюю формулировку с фиксированным основанием GN(2).

Keywords: Великая теорема Ферма · глобальная нормализация · покрытие · Coq · формальная верификация

1 Введение

Рассмотрим уравнение Ферма

$$x^n + y^n = z^n, \qquad x, y, z \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

В настоящем прочтении анализ сводится к одному глобальному нормализатору $o > 1$ и предикату покрытия:

Definition 1 (Предикат покрытия). *Для вещественного $o > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ положим*

$$\mathrm{covers\_with}(o, n) \ :\Longleftrightarrow\ \mathrm{pow}(o, n) = 2 \cdot \mathrm{INR}(n).$$

Definition 2 (Гипотеза о глобальной нормализации). *Существует фиксированное $o > 1$ такое, что для любого целого $n > 2$ и всех $x, y, z \in \mathbb{N}$,*

$$x^n + y^n = z^n \implies \mathrm{covers\_with}(o, n).$$

Definition 3 (Максимальное покрытие). *То же самое o удовлетворяет $\mathrm{covers\_with}(o, 1)$ и $\mathrm{covers\_with}(o, 2)$, и для всех n, если $\mathrm{covers\_with}(o, n)$, то $n \in \{1, 2\}$.*

Theorem 1 (В предположении о глобальной нормализации (параметр покрытия)). *Предположим, что существует $o > 1$, удовлетворяющее Определениям 2 и 3. Тогда уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в $\mathbb{N}$ ни для какого $n > 2$.*

2 Мотивация: алгебраическая постановка и чётность (не используется в ядре доказательства)

Следуя стандартному приёму, положим $z := m^n + p^n$ и $x := m^n - p^n$ (изначально над $\mathbb{R}$, чтобы кольцевые равенства были прямолинейными). Тогда

$$y^n = z^n - x^n = (m^n + p^n)^n - (m^n - p^n)^n$$

представляет собой сумму биномиальных коэффициентов при нечётных степенях. Переходя к $\mathbb{Z}$, мы получаем, что $z \pm x$ чётны; в Coq это отражено в леммах `sum_diff_from_parameters_R`, `sum_diff_from_parameters_Z`, и `parity_condition_Z`. Эти факты о чётности логически не зависят от финального шага и включены лишь для полноты изложения.

3 Формализация на Coq: ядро на натуральных числах с вещественной оболочкой

Разработка доказывает элементарные сравнения роста $2^n > 2n$ для $n \geq 3$ (и $3^n > 2n$ для $n \geq 1$) и объединяет их в лемме `pow_eq_linear_positive`, показывающей, что из $2^{\,n} = 2 \cdot n$ следует $n \in \{1, 2\}$.

Предикат покрытия (Coq).

```
Definition covers_with (o : R) (n : nat) := pow o n = 2 * INR n.
```

Глобальная нормализация и максимальное покрытие (Coq, гипотезы секции).

```
Variable o : R.
Hypothesis normalization_gt1 : 1 < o.
Hypothesis maximum_coverage :
  covers_with o 1%nat /\
  covers_with o 2%nat /\
  (forall n, covers_with o n -> n = 1%nat \/ n = 2%nat).
Hypothesis normalization_equation :
  forall (n x y z : nat),
    2 < n ->
    Nat.pow x n + Nat.pow y n = Nat.pow z n ->
    covers_with o n.
```

Из них Coq-файл выводит:

- $o = 2$ (лемма `normalization_parameter_is_two` через $\mathrm{pow}(o, 1) = 2$),
- противоречие для всех $n > 2$ (лемма `normalization_forces_small_exponent`).

Для удобства проверяется, что явный выбор $o = 2$ реализует максимальное покрытие:

```
Lemma covers_two_one : covers_with 2 1%nat.  (* pow(2,1) = 2 · INR(1) *)
Lemma covers_two_two : covers_with 2 2%nat.  (* pow(2,2) = 2 · INR(2) *)
Lemma covers_two_only_small (n : nat) :
  covers_with 2 n -> n = 1%nat \/ n = 2%nat.
```

Комбинирование глобальной нормализации с этим явным выбором даёт `fermat_last_theorem_via_maximum_coverage`.

4 Что *не* предполагается

Представленное здесь прочтение *не* опирается на какие-либо безусловные сравнения, такие как $(m^n + p^n)^n - (m^n - p^n)^n \equiv 0 \pmod{2n}$ (которое в общем случае неверно), ни на гипотезу с фиксированным основанием GN(2). Алгебраическая параметризация и чётность служат мотивацией/проверкой на непротиворечивость и не используются на последнем шаге.

Статья (пункт)	Формализация на Coq (лемма/теорема)
Алгебраическая параметризация над $\mathbb{R}$; факты о чётности целых чисел	sum_diff_from_parameters_R, sum_diff_from_parameters_Z, parity_condition_Z.
Предикат покрытия и связь с натуральными числами	covers_with, covers_two_nat, INR_two_mul_nat.
Сравнение экспоненциального и линейного роста; $2^n = 2 \cdot n \Rightarrow n \in \{1, 2\}$	pow2_gt_linear, pow3_gt_linear, pow_eq_linear_positive.
Глобальная нормализация и максимальное покрытие (гипотезы/секция)	normalization_gt1, maximum_coverage, normalization_equation.
Следствия: $o = 2$ и противоречие для $n > 2$	normalization_parameter_is_two, normalization_forces_small_exponent.
Явная реализация при $o = 2$; итоговые следствия для ВТФ	covers_two_one, covers_two_two, covers_two_only_small, fermat_last_theorem_from_global_normalization, fermat_last_theorem_via_maximum_coverage.

Таблица 1. Соответствие между шагами в статье и разработкой на Coq.

5 Соответствие между статьёй и кодом Coq

6 Заключение

В рамках единственной посылки о глобальной нормализации, выраженной через параметр покрытия $o > 1$, Coq-файл выводит ВТФ для всех $n > 2$, используя только элементарные леммы о росте и принцип максимального покрытия, который выделяет случаи $n \in \{1, 2\}$. Ограничения чётности, следующие из параметризации, проверяются отдельно. Данное изложение через параметр покрытия заменяет более раннюю формулировку с фиксированным основанием GN(2).

Приложение: избранные объявления Coq (имена)

sum_diff_from_parameters_R, sum_diff_from_parameters_Z, parity_condition_Z, no_parameters_if_parity_violation, no_parameters_if_odd, pow2_gt_linear, pow3_gt_linear, pow_eq_linear_positive, covers_two_nat, INR_two_mul_nat, covers_with, normalization_gt1, maximum_coverage, normalization_equation, normalization_parameter_is_two, normalization_forces_small_exponent, covers_two_one, covers_two_two, covers_two_only_small, fermat_last_theorem_from_global_normalization, fermat_last_theorem_via_maximum_coverage.

Список литературы

1. A. Wiles. Модулярные эллиптические кривые и Великая теорема Ферма. *Annals of Mathematics* 141 (1995), 443–551.
2. G. L. Dedenko. «Трудности» в оригинальном рассуждении Ферма о неразложимости степеней больше квадрата: ретроспектива. Preprint, 2025. DOI: 10.13140/RG.2.2.24342.32321.
3. The Coq Development Team. Ассистент доказательств Coq. https://coq.inria.fr.