Вариант 4

1.1

1) $a = 0,\ \alpha = 2,\ \lambda = ?$

$$f(x) = \frac{\alpha}{2\lambda\Gamma(1/\alpha)} \cdot e^{-\left|\frac{x-a}{\lambda}\right|^{\alpha}};$$

$$\Gamma(1/2) \approx 1{,}7725;$$

$$f(x) \approx \frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot e^{-x^2/\lambda^2}$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot e^{-x^2/\lambda^2} dx =$$

$$= -\frac{0{,}5641}{2}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/\lambda^2} d(-x^2/\lambda^2) =$$

$$= -0{,}282 \cdot e^{-x^2/\lambda^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\underline{EX = 0}$$

2) $$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \left(\frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot e^{-x^2/\lambda^2}\right) dx =$$

$$= \frac{0{,}5641}{\lambda}\left(\frac{\lambda^2 x \cdot e^{-x^2/\lambda^2}}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 \cdot e^{-x^2/\lambda^2}}{2} dx\right) =$$

$$= \frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\ f^3_4\ f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{4} = \sqrt{\pi} \cdot \lambda^2 \cdot 0{,}28205$$

1.2

$$\frac{d\left(\ln\prod\left(f(x,\lambda)\right)\right)}{d\lambda} =$$

$$\frac{d\left(\ln\prod\left(\frac{0,5641\cdot e^{-x^2/\lambda^2}}{\lambda}\right)\right)}{d\lambda} =$$

$$\frac{d\left(\sum_1^n\left(\ln\left(0,5641\cdot e^{-x^2/\lambda^2}\right)-(\ln\lambda)\right)\right)}{d\lambda} =$$

$$\frac{d\left(\sum_1^n\left(\ln\left(0,5641\cdot e^{-x^2/\lambda^2}\right)-\sum_1^n(\ln\lambda)\right)\right)}{d\lambda} =$$

$$\frac{d\sum_1^n\left(\ln\left(0,5641\cdot e^{-x^2/\lambda^2}\right)\right)}{d\lambda} - \frac{d\sum_1^n\ln\lambda}{d\lambda} =$$

$$\frac{d\sum_1^n\left(\ln 0,5641-\ln e^{-x^2/\lambda^2}\right)}{d\lambda} - n/\lambda =$$

$$\frac{d\sum_1^n\ln 0,5641}{d\lambda} - n/\lambda - \frac{\sum_1^n x^2/\lambda^2}{d\lambda} =$$

$$-n/\lambda - \frac{\sum_1^n x_i^2\cdot d\,1/\lambda^2}{d\lambda} = -n/\lambda - \left(2\cdot 1/\lambda^3\cdot\sum_1^n x_i^2\right) =$$

$$= 2/\lambda^3\cdot\sum_1^n x_i^2 - n/\lambda = 0 \Rightarrow f_0 = \pm\sqrt{\frac{2\sum x_i^2}{n}};\ f>0$$

$$\Rightarrow f = \sqrt{\frac{2\sum_1^n x_i^2}{n}}$$ оценка максимального правдоподобия

1.3
Проверка регулярности
1) $\forall \lambda \in \Omega$ $f(x;\lambda)$ диффер-ма по P.
т.е. $\forall \lambda \Omega$:

$$\frac{d \frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot e^{-x^2/\lambda^2}}{d\lambda} = \frac{e^{-x^2/\lambda^2} \cdot d\frac{0{,}5641}{\lambda}}{d\lambda} +$$

$$+ \frac{\frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot d e^{-x^2/\lambda^2}}{d\lambda} = -0{,}5641 \cdot \frac{e^{-x^2/\lambda^2}}{\lambda^2} -$$

$$- 2 \cdot 0{,}5641 \cdot x^2/\lambda^4 \cdot e^{-x^2/\lambda^2} =$$

$$= -\left(\frac{1{,}1282 x^2 + 0{,}5641 \lambda^2}{\lambda^4 \cdot e^{-x^2/\lambda^2}}\right); \lambda \geq 0 \Rightarrow$$

$\lambda^4 > 0 \Rightarrow \forall \lambda \in \Omega$ дифференцируема.
зн-тель $\neq 0$

2) т.к. $x \in R \Rightarrow \{x : f(x,\lambda) = 0\}$ не завис. от λ

3) $$d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d \ln f(x,\lambda)}{d\lambda}\right)^2 f(x,\lambda)\, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d \ln \frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot e^{-x^2/\lambda^2}}{d\lambda}\right)^2 \cdot \frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot e^{-x^2/\lambda^2} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\left(-\left(\frac{1{,}1282 x^2 + 0{,}5641 \lambda^2}{\lambda^4 \cdot e^{-x^2/\lambda^2}}\right)\right)}{\frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot e^{-x^2/\lambda^2}}\right)^2 \cdot \frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot e^{-x^2/\lambda^2} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{2x^2+\lambda^2}{\lambda^3} \right)^2 \cdot \frac{0{,}5641}{\lambda} \cdot e^{-x^2/\lambda^2}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(4x^4+4x^2\lambda^2+\lambda^4)}{\lambda^7} \cdot 0{,}5641 \cdot e^{-x^2/\lambda^2}\, dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x/\lambda;\ \frac{du}{dx} = 1/\lambda \\ dx = \lambda\, du \\ \int \frac{2e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}\, du = \mathrm{erf}(u) \\ \text{ф-я ошибки} \\ \text{Гаусса} \end{array} \right\} = \frac{6\sqrt{\pi}}{\lambda^2}$$

Инф-ное кол-во Фишера.

1.4

Найдем $\gamma(\lambda)$ по методу моментов

$EX = 0 \Rightarrow \gamma(\lambda) = E(X^2) = DX = 0{,}28205\sqrt{\pi}\lambda^2$

1) Несмещенность

$E(T(\lambda)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, 0{,}28205\sqrt{\pi}\lambda^2 \, d\lambda = 0{,}28205\sqrt{\pi}\frac{\lambda^4}{4}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$= 0, \Rightarrow E(T(\lambda)) \neq \lambda \Rightarrow$ оценка смещена

2) Асимптотическая смещенность:

$T(\lambda) = DX = 1/n \sum_1^n (x_i)^2 = 0{,}28205\sqrt{\pi}\lambda^2$

$E(T(\lambda)) \longrightarrow 0 \neq \lambda \Rightarrow$ оценка асимптотически смещенная

3) Чтобы проверить состоятельность, нам необходимы асс. несмещ. оценка и дисперсия, стремящаяся к 0.

Условия невыполнены $\Rightarrow$ оценка несостоятельна.

4) R - эффективность

Модель - регулярная

$T(\lambda)$ - смещенная

$\Rightarrow$ оценка НЕ R - эффективная

1.15

$\left(\hat{\Theta}_n \mp \frac{C_\gamma}{\sqrt{n\, i(\hat{\Theta}_n)}}\right)$ - найти

i - инф-ное кол-во Фишера

$i(\lambda) = \frac{6\sqrt{\pi}}{\lambda^2}$

$\hat{\Theta}_n$ - оценка по методу правдоподобия (максимального).

$$\hat{\Theta}_n = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2}{n}} = \sqrt{2DX} \Rightarrow i(\hat{\Theta}_n) = \frac{3\sqrt{\pi}}{DX}$$

$C_\gamma = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)$; Здесь $\gamma = 0{,}99 \Rightarrow$

$$C_\gamma = \Phi^{-1}\left(\frac{0{,}99+1}{2}\right) = \Phi^{-1}(0{,}995) \approx 0{,}3389$$

$$\left.\begin{array}{l} C_\gamma = 0{,}3389 \\ (\hat{\Theta}_n) = \sqrt{2DX} \\ i(\hat{\Theta}_n) = \frac{3\sqrt{\pi}}{DX} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sqrt{2DX} \mp \frac{0{,}3389}{\sqrt{n \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{DX}}}\right) \Rightarrow \left(\sqrt{2DX} \pm \frac{0{,}3389\sqrt{DX}}{\sqrt{3n\sqrt{\pi}}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{DX}\left(\sqrt{6n\sqrt{\pi}} \pm 0{,}3389\right)}{\sqrt{3n\sqrt{\pi}}}$$