Universidad Autónoma de Yucatán

Facultad de Matemáticas

Programación Estructurada

Proyecto: Biblioteca de operaciones con matrices

1. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

Este proyecto consiste en desarrollar una aplicación en C, que permita realizar operaciones con matrices. El programa deberá presentar una interfaz que permita al usuario seleccionar el tipo de operación a realizar y deberá mostrar el resultado de la operación.

1.1 Reglas y terminología de las operaciones con matrices

1. ***Suma de matrices:***
   Dadas dos matrices A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) de la misma dimensión mxn, la suma de A+B es otra matriz C = A+B = (c_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij}) de orden mxn. Ejemplo:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

p.ej.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \; ; \; \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

2. ***Multiplicación de matrices por una escalar:***
   Dada una matriz A = (aij) de orden mxn y un escalar c, el producto cA se calcula multiplicando el escalar por cada elemento de A. Ejemplo:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

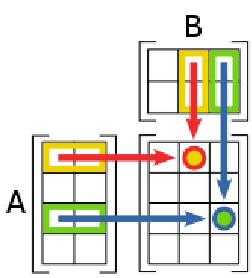
$p.ejm.$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad (-5)\cdot A=\begin{pmatrix} -5 & 10 & -15 \\ 0 & -5 & -40 \end{pmatrix}$$

3. ***Multiplicación de matrices:***
   Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de orden m×n y $B = (b_{jk})$ de orden nxp, es decir, el número de columnas de la primera matriz A es igual al número de filas de la matriz B; el producto A·B es otra matriz $C=(c_{ik})$ de orden mxp que se define de la siguiente forma

$$(AB)[i,j]=A[i,1]B[1,j]+A[i,2]B[2,j]+\dots+A[i,n]B[n,j]$$

   El elemento que ocupa el lugar (i, j) en la matriz producto (C) se obtiene sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por el correspondiente de la columna j de la matriz B. Para cada par i y j. Ejemplo:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times 3+0\times 2+2\times 1) & (1\times 1+0\times 1+2\times 0) \\ (-1\times 3+3\times 2+1\times 1) & (-1\times 1+3\times 1+1\times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

4. ***Obtención de la transpuesta de una matriz:***
   Dada una matriz $A= (a_{ij})$ de orden mxn, se llama traspuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por A^T. Ejemplo:

$$Si\ es\ A=(a_{ij})_{m\times n}$$

$$su\ traspuesta\ es\ A^t=(a_{ji})_{n\times m}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \;;\; A^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

5. ***Obtención de la inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordan:***

Sea **A** una matriz cuadrada *no singular*, es decir, que su determinante sea diferente de cero, $|A| \neq 0$. Por definición de matriz inversa, se tiene que A^{-1} es la matriz inversa de **A** si: $A \bullet A^{-1} = I$, donde I es la matriz Identidad.

Para determinar la inversa de una matriz con el método de Gauss-Jordan de eliminación completa, bastará con aplicar las operaciones elementales sobre los renglones de la matriz ampliada **(A, I)** de manera de transformar **A** en **I**. Cuando se haya hecho, se obtendrá la matriz ampliada (I, A^{-1}), con lo que se tendrá la inversa buscada. El algoritmo es el siguiente:

1. Aumentar la matriz A con la matriz identidad.
2. Convertir el primer elemento de la diagonal principal a 1. Multiplicando su reglón con su inverso multiplicativo.
3. Se convierte a cero todos los demás elementos de la columna donde se encuentra ese elemento de la diagonal principal.
4. Repetir el paso 2 y 3 con cada uno de los demás elementos de la diagonal principal.

Las operaciones elementales son:

1. Multiplicar un renglón por un escalar no nulo.
2. Intercambiar de posición dos renglones
3. Sumar a un reglón un múltiplo de otro.

Ejemplo:

Invertir la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Solución:

Paso 1.- Aumentar la matriz A con una matriz identidad:

$$(A, I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 2.- Si a_{11} no fuera igual a uno, entonces habría que convertirlo a uno. En este caso no se hace nada, ya que a_{11} es igual a uno:

$$(A, I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 3.- Se utiliza a_{11} como pivote para convertir a cero todos los demás elementos que se encuentran en la misma columna (a_{21} y a_{31}). Para convertir a cero cada elemento, se multiplica el valor de este elemento con signo contrario por el reglón del pivote, y el renglón resultante se suma al renglón del elemento a convertir. Ejemplo:

Convertir de a_{21}=2 a a_{21}=0:

Multiplicamos (-2)*[1 -6 2 1 0 0] = [-2 12 -4 -2 0 0], luego lo sumamos al segundo reglón, obteniendo : [0 10 -5 -2 1 0].

Convertir de a_{31}=1 a a_{31}=0:

Multiplicamos (-1)*[1 -6 2 1 0 0] = [-1 6 -2 -1 0 0], luego sumamos al tercer reglón, obteniendo: [0 3 -7 -1 0 1].

Finalmente tenemos:

$$\begin{array}{r} \\ -2*R_1 + R_2 \\ -1*R_1 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 4.- Se repite el paso 2, pero con a_{22}. Como a_{22} no es igual a uno, entonces habría que convertirlo a uno. Para convertirlo a uno se multiplica su renglón por su inverso multiplicativo. Ejemplo:

Como a_{22} =10, entonces multiplicamos (1/10)* [0 10 -5 -2 1 0]= [0 1 -1/2 -1/5 1/10 0], luego obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/5 & 1/10 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 5- Repetimos el paso 3 utilizando ahora a_{22} como pivote para convertir a cero todos los demás elementos que se encuentran en la misma columna (a_{12} y a_{32}):

Convertir de a_{12}= -6 a a_{12}=0:

Multiplicamos (6)* [0 1 -1/2 -1/5 1/10 0] = [0 6 -3 -6/5 3/5 0], luego lo sumamos al primer renglón.

Convertir de a_{32}=1 a a_{32}=0:

Multiplicamos (-3)* [0 1 -1/2 -1/5 1/10 0] = [0 -3 3/2 3/5 -3/10 0], luego sumamos al tercer reglón.

Finalmente tenemos:

$$\begin{array}{r} 6*R_2 + R_1 \\ \\ -3*R_2 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & -1/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/5 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & -11/2 & -2/5 & -3/10 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 6.- Se repite el paso 2, pero con a_{33}. Como a_{33} no es igual a uno, habría que convertir a_{33} a uno. Para convertirlo a uno se multiplica su renglón por su inverso multiplicativo:

Como a_{33} = -11/2, entonces multiplicamos (-2/11)* [0 0 -11/2 -2/5 -3/10 1] = [0 0 1 4/55 3/55 -2/11], luego obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/5 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/55 & 3/55 & -2/11 \end{bmatrix}$$

Paso 7.- Repetimos nuevamente el paso 4 utilizando ahora a_{33} como pivote para convertir a cero todos los demás elementos que se encuentran en la misma columna (a_{13} y a_{23}).

Finalmente obtenemos:

$$(I, A^{-1}) = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -7/55 & 36/55 & -2/11 \\ 0 & 1 & 0 & -9/55 & 7/55 & -1/11 \\ 0 & 0 & 1 & 4/55 & 3/55 & -2/11 \end{array}\right] \begin{array}{l} 1*R_3 + R_1 \\ 1/2*R_3 + R_2 \\ \end{array}$$

Por lo tanto, la inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/55 & 36/55 & -2/11 \\ -9/55 & 7/55 & -1/11 \\ 4/55 & 3/55 & -2/11 \end{bmatrix}$$

6. ***Solución de un sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan:***

El método se ilustra mejor con un ejemplo. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3.0\,X_1 - 0.1\,X_2 - 0.2\,X_3 = 7.8500$$
$$0.1\,X_1 + 7.0\,X_2 - 0.3\,X_3 = -19.3$$
$$0.3\,X_1 - 0.2\,X_2 + 10\,X_3 = 71.4000$$

Primero se expresan los coeficientes y el vector de términos independientes como una matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.000 & -0.100 & -0.200 & 7.850 \\ 0.100 & 7.000 & -0.300 & -19.300 \\ 0.300 & -0.200 & 10.000 & 71.400 \end{array}\right]$$

Coeficientes de las variables

Términos independientes

Siguiendo el algoritmo de Gauss-Jordan se obtienen los valores de las variables:

$$\begin{array}{l} (1/3)*R_1 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1.000 & -0.033 & -0.066 & 2.616 \\ 0.100 & 7.000 & -0.300 & -19.300 \\ 0.300 & -0.200 & 10.000 & 71.400 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ (-.100)*R_1 + R_2 \\ (-.300)*R_1 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.033 & -0.066 & 2.616 \\ 0 & 7.003 & -0.293 & -19.562 \\ 0 & -0.190 & 10.018 & 70.615 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ (1/7.0033)*R_1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.033 & -0.066 & 2.616 \\ 0 & 1.000 & -0.042 & -2.793 \\ 0 & -0.190 & 10.018 & 70.615 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} (.033)*R_2 + R_1 \\ \\ (.190)*R_2 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.068 & 2.524 \\ 0 & 1 & -0.042 & -2.793 \\ 0 & 0 & 10.010 & 70.084 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ (1/10.010)*R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.068 & 2.524 \\ 0 & 1 & -0.042 & -2.793 \\ 0 & 0 & 1.000 & 7.001 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} (.068)*R_3 + R_1 \\ (.042)*R_3 + R_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3.000 \\ 0 & 1 & 0 & -2.499 \\ 0 & 0 & 1 & 7.001 \end{array}\right]$$

Finalmente, se tiene que $x_1 = 3.000$, $x_2 = -2.499$, $x_3 = 7.001$

7. ***Determinación del determinante de una matriz:***
El determinante de una matriz $A = a_{ij}$ de orden nxn, es un escalar o polinomio, que resulta de obtener todos los productos posibles de una matriz de acuerdo a una serie de restricciones, siendo denotado como $|A|$. El valor numérico es conocido también como módulo de la matriz.

Para el cálculo del determinante de matrices de orden 2x2 se utiliza la siguiente fórmula:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Para el cálculo de un determinante de orden 3 se utiliza la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{l} \left|\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{array} \end{array} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$$

Ejemplo: Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1) - (-2)(2)(1) - (0)(2)(4) - (1)(-5)(3) =$$

= 24 + 20 + 0 - (-4) - 0 - (-15) = 44 + 4 + 15 = 63

Para el cálculo de un determinante de orden mayor que 3 se realiza lo siguiente: se toma una fila o columna cualquiera, multiplicando cada elemento por su adjunto (es decir, el determinante de la matriz que se obtiene eliminando la fila y columna correspondiente a dicho elemento, multiplicado por (-1)i+j donde i es el número de fila y j el número de columna). La suma de todos los productos es igual al determinante. Ejemplo:

Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Paso 1.- Se toma una fila o columna cualquiera, para ello trabajemos con la columna 3:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 2.- Se multiplica cada elemento de la columna por $(-1)^{i+}$j y por el determinan de la matriz resultante de eliminar la fila y la columna donde se encuentra dicho elemento:

Para el primer elemento de la columna (a_{13}):

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$ se tiene el siguiente cálculo: $((-1)^{i+j})*(a_{13})*\det \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{1+3}$ (0) [(1)(-2)(2)+(5)(1)(0)+(4)(1)(0)-(0)(-2)(0)-(5)(4)(2)-(1)(1)(1) = 0

Para el segundo elemento de la columna (a_{23}):

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & \boxed{1} & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ se tiene el siguiente cálculo: } ((-1)^{i+j})*(a_{23})* \det \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{2+3}$ (1) [(3)(-2)(2)+(2)(1)(0)+(4)(1)(-1)-(-1)(-2)(0)-(4)(2)(2)-(1)(1)(3) = 35

Para el tercer elemento de la columna (a_{33}):

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ se tiene el siguiente cálculo: } ((-1)^{i+j})*(a_{33})* \det \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{3+3}$ (0) [(3)(5)(2)+(2)(0)(0)+(1)(1)(-1)-(-1)(5)(0)-(1)(2)(2)-(0)(1)(3) = 0

Para el cuarto elemento de la columna (a_{43}):

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{-3} & 2 \end{bmatrix} \text{ se tiene el siguiente cálculo: } ((-1)^{i+j})*(a_{43})* \det \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{4+3}$ (-3) [(3)(5)(1)+(2)(0)(4)+(1)(-2)(-1)-(-1)(5)(4)-(2)(1)(1)-(0)(-2)(3) = 105

Paso 3.- La suma de todos los productos es igual al determinante:

Det(A) = 0 + 35 +0 +105 = 140

Como se observó en el caso anterior, para el cálculo de un determinante de orden 4, se obtienen directamente determinantes de orden 3 que podrán ser calculados por la regla de Sarrus. En cambio, en los determinantes de orden superior, como por ejemplo n = 5, al desarrollar los elementos de una línea, obtendremos determinantes de orden 4, que a su vez se deberán desarrollar en por el mismo método, para obtener determinantes de orden 3.

8. ***Solución de un sistema de ecuaciones por el método de Cramer:***
Los pasos a seguir para calcular los sistemas de ecuaciones según la regla de Cramer son los siguientes:

Calcular el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 1 \\ x + 5y = 3 \end{array}\right\}$$

Paso 1. - Hallar la matriz ampliada de A:

$$A\vdots b = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 1 & 5 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Coeficientes de las variables

Términos independientes

Paso 2.- Calcular el determinante de A. Así pues:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17.$$

Paso 3.- Calcular las incógnitas:

Para calcular el valor de x, en la matriz A, se sustituye la columna x por la columna de coeficientes y el valor de x se obtiene dividiendo el determinante de esta nueva matriz entre el determinante de A.

Para calcular el valor de y, en la matriz A, se sustituye la columna y por la columna de coeficientes y el valor de y se obtiene dividiendo el determinante de esta nueva matriz entre el determinante de A.

Para calcular x: $A\vdots b = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 1 & 5 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$

para calcular y: $A\vdots b = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 1 & 5 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$

Así, tenemos que:

$$x = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & y \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \end{array}}{17} = \frac{5+6}{17} = \frac{11}{17}. \qquad y = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & b \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{array}}{17} = \frac{9-1}{17} = \frac{8}{17}.$$

1.2 Especificaciones del proyecto

- La aplicación deberá permitir capturar un número de columnas y filas (máximo 4).
- La interfaz del usuario deberá mostrar las matrices vacías, las cuales se irán llenando conforme se ponen los datos.
- Si se generalizan las operaciones a orden n,m, entonces se asignarán 10 puntos extras.