

Vorlesungsmitschrift

# **DIFF II**

**Prof. Dr. Dorothea Bahns**

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 25. April 2020

---

## **Disclaimer**

Nicht von Professor Bahns durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

# Inhaltsverzeichnis

1	Metrische Räume
---	-----------------

4
---

# Kapitel 1

## Metrische Räume

### Vorlesung 1

Mo 20.04. 10:15

**Ziel.** Konvergenz, Stetigkeit ... sollten in einem allgemeineren Rahme konzeptualisiert werden.

**Erinnerung (DIFF I).** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  konvergiert gegen den Grenzwert  $a$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  wird auch  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  in  $\mathbb{R}$  genannt. Somit lautet die obige Definition in Worten: In jeder noch so kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  befinden sich alle bis auf endlich viele Folgenglieder.

Man benötigt für die Formulierung der Definition also lediglich einen Begriff von „(kleine) Umgebung“. Diesen Begriff möchten wir nun verallgemeinern.

**Definition 1.1.** Sei  $X$  eine Menge. Ein System  $\mathcal{T}$  von Teilmengen von  $X$  heißt Topologie auf  $X$  falls gilt:

- a)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
- b) Sind  $U$  und  $V \in \mathcal{T}$ , so gilt  $U \cap V \in \mathcal{T}$ .
- c) Ist  $I$  eine Indexmenge und  $U_i \in \mathcal{T}$  für alle  $i \in I$ , so gilt auch  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

**Notation.** Ein topologischer Raum ist ein Tupel  $(X, \mathcal{T})$ , wobei  $X$  Menge ist und  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$ .

Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt *offen*, falls gilt  $U \in \mathcal{T}$ . Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt *abgeschlossen* falls ihr Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

**Beispiele 1.2.** i)  $X =$  beliebige Menge.  $\mathcal{T} = \{ \emptyset, X \}$ .

*Beweis.* 1.1.a) klar

$$1.1.b) \quad \emptyset \cap X = \emptyset \in \mathcal{T}, X \cap X = X \in \mathcal{T}, \emptyset \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{T}$$

$$1.1.c) \quad \bigcup_{i \in I} U_i = \begin{cases} X & \text{falls eins der } U_i = X \text{ ist} \\ \emptyset & \text{falls nicht} \end{cases} \quad \square$$

„Klumpentopologie“

ii)  $X = \mathbb{R}$

$\mathcal{T}$  = alle Teilmengen  $U \subset \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ s. d. } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$$

Beweis von 1.1.a), 1.1.b) und 1.1.c) als HA (etwas allgemeiner). Hier stellen wir fest, dass insbesondere die offenen Intervalle  $(a, b)$  in diesem Sinne offen (also  $\in \mathcal{T}$ ) sind, halb-abgeschlossene und abgeschlossene dagegen nicht.

*Beweis.* 1. **Beh** Zu  $x \in [a, b]$  wähle  $\varepsilon = \min \{ |x - a|, |x - b| \}$

2. **Beh** Zu  $x = a \in [a, b)$  kann man kein  $\varepsilon > 0$  finden s. d.  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset [a, b)$ , denn  $a - \varepsilon/2 \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  aber  $a - \varepsilon/2 < a$ , also  $\notin [a, b)$ .  $\square$

Abgeschlossene Intervalle sind in diesem Sinn abgeschlossen, denn  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$  ist nach Definition von  $\mathcal{T}$  und Eigenschaft 1.1.c) offen.

Diese Topologie heißt Standard-Topologie auf  $\mathbb{R}$ . Wird nichts anderes gesagt, sehen wir  $\mathbb{R}$  als mit der Standard-Topologie versehen an.

**Definition 1.3.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  topologischer Raum. Sei  $x \in X$ . Eine Teilmenge  $V \subset X$  heißt *Umgebung von  $x$* , falls es eine offenen Menge  $U \subset X$  gibt mit  $x \in U$  und  $U \subset V$ .

**Beispiele.** i)  $V = (a, b)$  ist eine Umgebung für jedes  $x \in (a, b)$ , aber *nicht* für  $x = a$ .



ii)  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , ist eine Umgebung von  $x$ .

**Lemma 1.4.** Eine Teilmenge  $V \subset X$  eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{T})$  ist offen gdw für alle  $x \in V$  gilt:  $V$  ist Umgebung von  $x$ .

*Beweis.* „ $\implies$ “ Ist  $V$  offen, so erfüllt  $U = V$  für jedes  $x$  die Bedingung  $x \in U$  und  $U \subset V \implies V$  ist Umgebung.

„ $\impliedby$ “ Zu  $x \in V$  wähle  $U_x$  s.d.  $x \in U_x$ ,  $U \subset V$ . Dann gilt  $V = \bigcup_{x \in U} U_x$  und das ist offen (nach 1.1.c)).  $\square$

**Definition 1.5 (Konvergenz in topologischen Räumen).** Sei  $(X, \mathcal{T})$  topologischer Raum. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ . Dann ist  $(x_n)_n$  *konvergent mit Grenzwert  $x$* ,  $x_n \rightarrow x$  in  $(X, \mathcal{T})$ , falls es in jeder Umgebung  $V$  von  $x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, s.d.  $x_n \in V \ \forall n \geq N$ .

**Beispiele.** i) In der Klumpentopologie konvergieren alle Folgen gegen jedes  $x \in X$ .

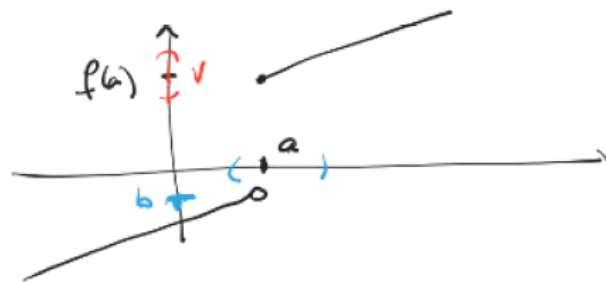
ii) Mit unseren obigen Überlegungen folgern wir, dass Konvergenz in  $\mathbb{R}$  im Sinn von Definition 1.5 mit Konvergenz, wie wir sie in der DIFF I

**Lemma 1.6.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  topologischer Raum. Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein *Hausdorff-Raum*, gibt es also zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $V$  von  $y$  mit  $U \cap V = \emptyset$ , so ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig.

*Beweis.* Seien  $x$  und  $y$  Grenzwert einer Folge  $(x_n)_n$ . Angenommen  $x \neq y$ , so wähle  $U$  Umgebung von  $x$ ,  $V$  Umgebung von  $y$  mit  $U \cap V = \emptyset$ . Dann gibt es (wegen der Konvergenz)  $N \in \mathbb{N}$  s.d.  $x_n \in U \ \forall n \geq N$  und  $M \in \mathbb{N}$  s.d.  $x_n \in V \ \forall n \geq M$ . Widerspruch zu  $U \cap V = \emptyset$ .  $\square$

**Definition 1.7.** Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \tilde{\mathcal{T}})$  topologische Räume. Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann heißt  $f$  *stetig in  $a \in X$* , falls es zu jeder Umgebung  $V$  von  $f(a) \in Y$  eine Umgebung  $U$  von  $a$  gibt, s.d.  $f(U) \subset V$ .  $f$  heißt *stetig* (auf  $X$ ), falls  $f$  stetig in allen  $a \in X$  ist.

**Bemerkung.** Wir werden später sehen, dass diese Definition für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit unserer Definition aus der DIFF I übereinstimmt ( $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium).



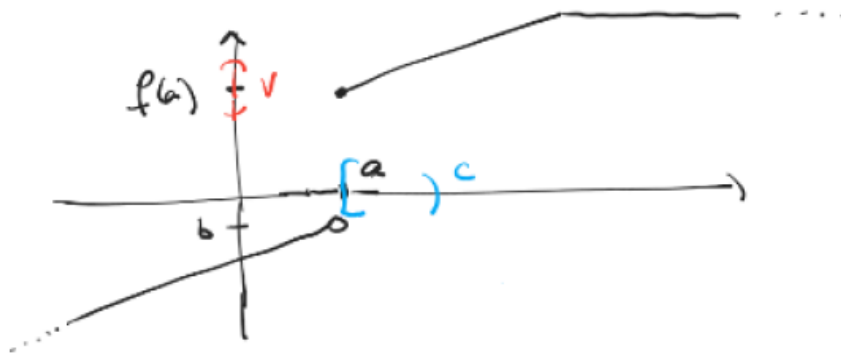
Für jede Umgebung  $U$  von  $a$  gilt:  $f(U)$  enthält auch Punkte  $< b$ , also außerhalb  $V$

**Satz 1.8.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist  $f$  stetig auf  $X$  gdw für jede offene Teilmenge  $V \subset Y$  das Urbild  $f^{-1}(V)$ , also  $\{x \in X \mid f(x) \in V\}$  offen in  $X$  ist.

*Beweis.* „ $\implies$ “ Sei  $f$  stetig vorausgesetzt. Sei  $V$  offen in  $Y$ . Ist das Urbild  $f^{-1}(V)$  leer, sind wir fertig.

Sei also  $a \in f^{-1}(V)$ . Dann gibt es nach Voraussetzung eine Umgebung  $U$  von  $a$  s. d.  $f(U) \subset V$ . Also gilt  $U \subset f^{-1}(V)$ . Somit besitzt also jeder Punkt  $a \in f^{-1}(V)$  eine Umgebung  $U$  mit  $U \subset f^{-1}(V)$  und somit ist  $f^{-1}(V)$  selbst Umgebung jedes seiner Elemente  $\xrightarrow{1.4} f^{-1}(V)$  ist offen.

„ $\impliedby$ “ Sei  $a \in X$  beliebig. Sei  $V$  eine Umgebung von  $f(a)$ . Dann gibt es  $\tilde{V}$  offen mit  $f(a) \in \tilde{V}$  und  $\tilde{V} \subset V$ . Nach Voraussetzung ist das Urbild  $U := f^{-1}(\tilde{V})$  offen.  $U$  enthält  $a$ , ist also Umgebung von  $a$  und es gilt  $f(U) = \tilde{V} \subset V \implies f$  ist stetig in  $a$ .  $\square$



$$f^{-1}(V) = [a, c) \text{ ist nicht offen in } \mathbb{R}$$

**Bemerkung.** Äquivalent:  $f$  ist genau dann stetig, wenn das Bild jeder abgeschlossen Menge abgeschlossen ist.

**Vorsicht:**

Es ist immer Offenheit in  $X$  (bzw.  $Y$ ) gemeint!

**Zur Veranschaulichung:**

Betrachtet man im Beispiel oben als Definitionsbereich  $X = [a, \infty)$ , so ist die Funktion stetig! Dies ist konsistent, da  $[a, c)$  in  $X = [a, \infty)$  versehen mit der Standard-Topologie tatsächlich offen ist:

**Definition / Satz 1.9.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  topologischer Raum. Sei  $\tilde{X} \subset X$  eine Teilmenge. Dann induziert  $\mathcal{T}$  auf  $\tilde{X}$  eine Topologie, die sogenannte *Teilraum-Topologie* vermöge

$$\mathcal{T}_{\tilde{X}} := \left\{ U \cap \tilde{X} \mid U \in \mathcal{T} \right\}.$$

Den (einfachen) Beweis, dass dies in der Tat eine Topologie definiert, lassen wir weg.

In unserem Beispiel ist  $X = \mathbb{R}$ ,  $\tilde{X} = [a, \infty)$  und da  $(a - \varepsilon, c)$  offen in  $\mathbb{R}$  ist ( $\varepsilon > 0$ ), ist nach Definitionsbereich  $[a, c) = (a - \varepsilon, c) \cap [a, \infty)$  offen in  $[a, \infty)$ .

Dies ist der tiefere Grund, weshalb man bei Funktionen den Raum, in dem sie ihre Werte annehmen (im Beispiel oben  $Y = \mathbb{R}$ ) angeben sollte, nicht ihr Bild.

Denn in  $Y = (-\infty, b) \cup [f(a), \infty)$  wäre das Bild von  $[a - \varepsilon, c]$   $\forall \varepsilon > 0$  in der Tat abgeschlossen, denn sein Komplement

$$Y \setminus ([b - \delta, b) \cup [f(a), f(c))) = -(-\infty, b - \delta) \cup (f(c), \infty)$$

wäre offen.

Dagegen ist

$$\mathbb{R} \setminus ([b - \delta, b) \cup [f(a), f(c))) = -(-\infty, b - \delta) \cup [b, f(a)) \cup (f(c), \infty)$$

für kein  $\delta > 0$  offen.

**Definition / Satz 1.10.** Seien  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume. Betrachte das *kartesische Produkt*  $X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$ . Dann nennt man das System

$$\mathcal{T} := \left\{ U \subset X \times Y \mid U = \text{beliebige Vereinigung von Mengen der Form } V \times W, V \in \mathcal{T}_X, W \in \mathcal{T}_Y \right\}$$

*Produkttopologie*. Und dies definiert in der Tat eine Topologie auf  $X \times Y$ .

*Beweis.* 1.1.a) klar



1.1.b)

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \times W_{\alpha} \\ V &= \bigcup_{\beta} \tilde{V}_{\beta} \times \tilde{W}_{\beta} \\ U \cap V &= \bigcup_{\alpha, \beta} \underbrace{(U_{\alpha} \cap \tilde{V}_{\beta})}_{\text{offen in } X} \times \underbrace{(W_{\alpha} \cap \tilde{W}_{\beta})}_{\text{offen in } Y}. \end{aligned}$$

1.1.c)

$$\bigcup_{\rho} \left( \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}^{(\rho)} \times W_{\alpha}^{(\rho)} \right) = \bigcup_{\rho, \alpha} V_{\alpha}^{(\rho)} \times W_{\alpha}^{(\rho)}. \quad \square$$

Wir kommen nun zu einer wichtigen Beispiel-Klasse für Topologien:

**Definition 1.11.** Sei  $X$  eine Menge. Eine *Metrik* auf  $X$  ist eine Abbildung

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

- a)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  „ $d$  ist nicht ausgeartet.“
- b)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$  „ $d$  ist symmetrisch.“
- c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$  „Es gilt die Dreiecksungleichung.“

Ein *metrischer Raum* ist ein Tupel  $(X, d)$ , wobei  $X$  eine Menge ist und  $d$  eine Metrik auf  $X$ . Mist schreibt man nur  $X$ , weil Missverständnisse ausgeschlossen sind.

**Bemerkung.** Aus den Axiomen folgt auch

$$d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X,$$

denn

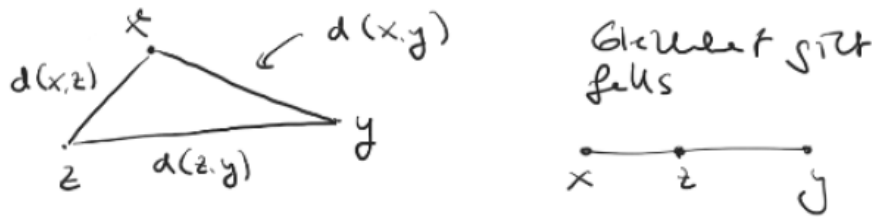
$$0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1.11.a)}}}{d(x, x)} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl.}}}{d(x, y)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Symm.}}}{d(y, x)} = 2d(x, y).$$

**Beispiele.** i)  $\mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ .

ii)  $X$  Menge,  $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ , „triviale“ oder „diskrete Metrik“.

iii) (aus AGLA I)  $\mathbb{R}^n$ ,  $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ , „Euklidische Metrik“.

Eine Metrik misst den *Abstand* zwischen zwei Punkten. Im zweiten Beispiel sind alle verschiedenen Punkte gleich weit von einander entfernt. Für  $n = 1$  stimmt iii) mit i) überein. Mit iii) wird auch der Name der Dreiecksungleichung klar:



**Definition 1.12.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Seien  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ . Dann nennt man

$$B_\varepsilon(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \}$$

den (offenen)  $\varepsilon$ -Ball um  $x$ .

**Beispiele.** i)  $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ .

$$\text{ii) } B_\varepsilon(x) = \begin{cases} x & \varepsilon \leq 1 \\ X & \varepsilon > 1 \end{cases}$$

$$\text{iii) } B_\varepsilon(x) = \text{Diagram of an open ball in a metric space. A point } x \text{ is inside a circle, with several other points scattered within the circle, representing the set of points } y \text{ such that } d(x, y) < \varepsilon.$$

**Satz 1.13.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann wird durch

$$\mathcal{T}_d := \{ U \subset X \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ s.d. } B_\varepsilon(x) \subset U \}$$

eine Topologie definiert.

*Beweis.* Als Hausaufgabe. □

**Bemerkungen 1.14.** i) 1.2.ii) ist ein Spezialfall dieser Aussage

ii) Die „offenen“  $\varepsilon$ -Bälle sind tatsächlich offen: Zu  $y \in B_\varepsilon(x)$  wähl  $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon - d(x, y) > 0$ .



Dann ist  $B_{\tilde{\varepsilon}}(y) = \{ z \mid d(y, z) < \tilde{\varepsilon} \} \subset B_{\varepsilon}(x)$ . Denn für alle  $z \in B_{\tilde{\varepsilon}}(y)$  ist

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \tilde{\varepsilon} \\ &= d(x, y) + \varepsilon - d(x, y) = \varepsilon \end{aligned}$$

- iii) Bezüglich der diskreten Metrik ist *jede* Teilmenge offen.
- iv) Die Klumpentopologie wird nicht von einer Metrik erzeugt (wenn  $X$  mehr als 1 Element enthält).

*Beweis.* Seien  $x, y \in X, x \neq y$ . Angenommen  $\exists$  Metrik  $d$ .

$$\begin{aligned} \implies d(x, y) &\neq 0 \implies d(x, y) = c > 0 \\ \implies B_c(x) &\text{ ist offen.} \\ \implies B_c(x) &= \emptyset \text{ oder } = X \\ \text{VOR} \\ \implies B_c(x) &= X \end{aligned}$$

□

⚡, da  $y \notin B_c(x)$ .

- v) Ein metrischer Raum ist hausdorffsch.  $\rightarrow$ HA.

Wir formulieren nun Konvergenz und Stetigkeit für metrische Räume:

**Bemerkungen 1.15.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum.

- i) [Definition 1.3]  $V \subset X$  heißt Umgebung von  $x \in X$ , falls es  $\varepsilon > 0$  gibt s. d.  $B_{\varepsilon}(x) \subset U$ .
- ii) [Definition 1.5]  $(x_n)_n$  konvergiert mit Grenzwert  $x$ , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt s. d.  $x_n \in B_{\varepsilon}(x) \quad \forall n \geq N$ .

- iii) [Definition 1.7] Sei  $(Y, \tilde{d})$  weiterer metrischer Raum,  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann ist  $f$  stetig  $a$  gdw :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ s.d. } f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)).$$

**Bemerkungen.** i) 1.15.iii) ist das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium.

- ii) Die Einschränkung auf  $\varepsilon$ -Bälle in 1.15.ii) und 1.15.iii) (statt allgemeiner Umgebungen) ist keine echte Einschränkung: Gilt etwas für all Umgebungen, so speziell auch für  $\varepsilon$ -Bälle.

Und gilt eine Inklusion für alle  $\varepsilon$ -Bälle (etwa  $x_n \in B_\varepsilon(x) \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$ ), so auch für beliebige Umgebungen  $U$  von  $x$ , da es immer einen  $\varepsilon$ -Ball  $B_\varepsilon(x)$  gibt, der ganz in  $U$  enthalten ist.

**Beispiele 1.16.** i)  $\mathbb{R}^m$  mit der Euklidischen Metrik.  $(x_n)_{n \geq 1}$  Folge in  $\mathbb{R}^m$ , also  $n \mapsto x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)}) \in \mathbb{R}^m$ .

- ii)  $x_n = \left(\frac{1}{n} \cos(n), \frac{1}{n} \sin(n), a, \dots, a\right)$

**Behauptung.**  $x_n \rightarrow (0, 0, a, \dots, a) =: x$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d(x_n, x)^2 &= \sum_{i=1}^m (x_n^{(i)} - x^{(i)})^2 \\ &= \left(\frac{1}{n} \cos(n) - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n} \sin(n) - 0\right)^2 + (a - a)^2 + \dots + (a - a)^2 \\ &= \frac{1}{n^2} (\cos(n)^2 + \sin(n)^2) = \frac{1}{n^2} \\ \implies d(x_n, x) &= \frac{1}{n} \\ \implies d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n \geq N \text{ mit } N > \frac{1}{\varepsilon} \\ \implies x_n &\in B_\varepsilon(x) \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

□

- iii)  $X = C([a, b])$ ,  $d(f, g) := \|f - g\|_\infty$  mit  $\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ .

**1. Beh**  $d$  ist eine Metrik auf  $X$ .

*Beweis.* 1.11.a):

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| &= 0 \\ \iff |f(x) - g(x)| &= 0 \quad \forall x \\ \iff f(x) &= g(x) \quad \forall x. \end{aligned}$$

1.11.b):

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |g(x) - f(x)| \quad \forall x \\ \implies d(f, g) &= d(g, f). \end{aligned}$$

1.11.c):

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \triangle\text{-Ungl. für } |\cdot| \text{ auf } \mathbb{R} \\ \implies \triangle\text{-Ungl. für } d. \end{aligned} \quad \square$$

**2. Beh**  $(f_n)_n \subset C([0, 1])$ ,  $f_n(x) = x^n$ , konvergiert nicht (vgl. Diff I).

*Beweis.* Wir wissen aus der Diff I, dass wenn Konvergenz vorliegt, der Grenzwert gleich dem punktweisen Grenzwert ist. Dieser ist

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Aber

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1. \quad \square$$

iv)  $X = C([0, 1])$ ,  $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ .

**1. Beh**  $d$  ist eine Metrik auf  $C([0, 1])$ .

*Beweis.* HA.  $\square$

**2. Beh**  $(f_n)_n \subset C([0, 1])$ ,  $f_n(x) = x^n$  konvergiert, und zwar gegen  $f(x) = 0 \quad \forall x$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(x) - 0| dx &= \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \\ \implies d(f_n, f) &= \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \forall n \geq N \text{ mit } N \geq \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad \square$$

**Vorlesung 2**

Do 23.04. 10:15

Bevor wir uns mit offenen und abgeschlossenen Mengen und sogenannten vollständigen metrischen Räumen näher befassen, beweisen wir noch zwei nützliche Lemmata zu Konvergenz und Stetigkeit:

**Lemma 1.17.**  $(X, d)$  sei metrischer Raum.

Eine Folge  $(x_n)_n$  in  $X$  konvergiert in  $X$  gegen  $a \in X$

$$\iff (d(x_n, a))_n \text{ ist Nullfolge (in } \mathbb{R}\text{)}.$$

*Beweis.*

$$d(x_n, a) = |d(x_n, a) - 0|.$$

Also ist

$$d(x_n, a) < \varepsilon \iff |d(x_n, a) - 0| < \varepsilon. \quad \square$$

**Lemma 1.18.** Seien  $(X, d_x)$  und  $(Y, d_y)$  metrische Räume,  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt:

$f$  ist in  $a \in Y$  stetig  $\iff$  für jede Folge  $(a_n)_n$  mit  $a_n \rightarrow a$  in  $X$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}_{=a}).$$

**Notation.**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

*Beweis.* „ $\implies$ “ Sei das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium erfüllt (1.15.iii). Sei  $(x_n)_n$  Folge in  $X$  mit  $x_n \rightarrow a$  in  $X$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann  $\exists \delta > 0$  s. d.

$$d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(a) \subset X.$$

Wegen der Konvergenz  $\exists N = N(\delta)$  s. d.

$$\begin{aligned} x_n &\in B_\delta(a) \quad \forall n \geq N \\ \implies f(x_n) &\in B_\varepsilon(f(a)) \subset Y \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

Also gilt  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

„ $\Leftarrow$ “ Gelte  $\lim_{x \rightarrow a}(x) = f(a)$ .

Angenommen, das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium wäre verletzt. Dann gäbe es  $\varepsilon > 0$  s. d. für *alle*  $\delta > 0$  ein  $x \in X$  existierte s. d.

$$\begin{aligned} x \in B_\delta(a) \text{ aber } f(x) \notin B_\varepsilon(f(a)) \\ \text{also } d_y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Insbesondere gäbe es zu  $\delta = \frac{1}{n}$  ein solches  $x$ , nennen wir es  $x_n$ . Dann gilt für alle  $n$ :  $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ , aber  $d_y(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$ , somit  $x_n \rightarrow a$  aber  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$  (wegen 1.17).  $\square$

## Charakterisierung topologischer Grundbegriffe in metrischen Räumen

**Lemma 1.19.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Dann ist  $A \subset X$  abgeschlossen  $\iff$  für jede Folge  $(a_n)_n$ ,  $a_n \in A$ , die in  $X$  konvergiert, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in A.$$

*Beweis.* O.B.d.A.  $\emptyset \neq A \neq X$ .

„ $\implies$ “ Sei  $(a_n)_n$ ,  $a_n \in A$ , konvergent in  $X$ . Sei  $a = \lim a_n$ . Angenommen  $a \notin A$ . Nach Voraussetzung ist  $X \setminus A$  offen, also ist  $X \setminus A$  Umgebung von  $a \implies \exists N$  s. d.

$$a_n \in X \setminus A \quad \forall n \geq N \quad (\text{wegen Konvergenz})$$

$\nrightarrow$  zu  $a_n \in A$ .

„ $\Leftarrow$ “ Wir zeigen, dass  $X \setminus A$  offen ist. Sei also  $b \in X \setminus A$ . Es gibt  $\varepsilon > 0$  s. d.  $B_\varepsilon(b) \cap A = \emptyset$ , also  $B_\varepsilon(b) \subset X \setminus A$ .

Denn angenommen es gibt kein solches  $\varepsilon$ . Dann gilt für *alle*  $\varepsilon > 0$ :  $B_\varepsilon(b) \cap A \neq \emptyset$ , also kann man zu jedem  $k \geq 1$  ein  $x_k \in A$  finden mit  $d(x_k, b) < \frac{1}{k} = \varepsilon$ .

$$\implies x_k = b \underset{\text{VOR}}{\implies} b \in A.$$

$\nrightarrow$  Widerspruch zu  $b \in X \setminus A$ .

Also gibt es ein solches  $\varepsilon > 0$ , also ist  $X \setminus A$  offen.  $\square$

**Definition 1.20.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $M \subset X$ . Ein Punkt  $y \in X$  heißt *Randpunkt* von  $M$ , falls in jeder Umgebung von  $y$  sowohl Punkte von  $M$  als auch  $X \setminus M$  liegen.

**Notation.**  $\partial M = \{ \text{Randpunkte von } M \}$

**Beispiel**  $(\mathbb{R}^n, d_{\text{Eukl.}})$ . Kugel im  $\mathbb{R}^n$ :

$$K^n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - 0\|_{\text{E}} \leq R \} \subset \mathbb{R}^n$$

Sphäre:

$$\partial K^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{\text{E}} = R \} = S^{n-1}$$

**Beispiel.**  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .  $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ .

**Satz 1.21.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Sei  $M \subset X$ . Dann gilt

- i)  $M \setminus \partial M$  ist offen.
- ii)  $M \cup \partial M$  ist abgeschlossen.
- iii)  $\partial M$  ist abgeschlossen.

*Beweis. 1.21.i):*  $a \in M \setminus \partial M \implies \exists \varepsilon > 0$  s.d.  $B_\varepsilon(a) \cap X \setminus M = \emptyset$ . Für dieses gilt auch  $B_\varepsilon \cap \partial M = \emptyset$  (denn angenommen  $\exists y \in B_\varepsilon(a) \cap \partial M$ , dann wäre (da  $y \in \partial M$  und  $B_\varepsilon(a)$  eine Umgebung von  $y$ )  $B_\varepsilon(a) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$   $\nabla$  VOR).

Also gilt  $B_\varepsilon(a) \subset M \setminus \partial M \implies$  Beh..

**1.21.ii):** Es gilt  $\partial M = \partial(X \setminus M)$  (nach Definition),  $(X \setminus M) \setminus \partial(X \setminus M)$  ist offen nach **1.21.i)**  $\implies$

$$X \setminus ((X \setminus M) \setminus \partial(X \setminus M)) = (X \setminus (X \setminus M)) \cup \partial(X \setminus M) = M \cup \partial M$$

$\uparrow$   
Manipulation mit Mengen

ist offen.





1.21.iii):

$$\begin{aligned} \partial M &= (M \cup \partial M) \setminus (M \setminus \partial M) \\ \Rightarrow X \setminus \partial M &= X \setminus \underbrace{\left( \underbrace{M \cup \partial M}_{\substack{\text{(abgeschl. nach 1.21.ii)} \\ \text{offen}}} \right) \cup \left( \underbrace{M \setminus \partial M}_{\text{offen nach 1.21.i}} \right)}. \quad \square \end{aligned}$$

**Notation.** Sei  $M \subset X$ .

$M^\circ := M \setminus \partial M$  heißt das *Innere* von  $M$ .

$\overline{M} := M \cup \partial M$  heißt der *Abschluss* von  $M$ .

Nach 1.19 können wir  $\overline{M}$  konstruieren, indem wir zu  $M$  noch alle Grenzwerte von Folgen  $(x_n)_n$ ,  $x_n \in M$ , die in  $X$  konvergieren, hinzunehmen.

**Beispiel.**  $M = [a, b)$ ,  $\overline{M} = [a, b]$ .

**Bemerkung (als Hausaufgabe).**

$$M \subset X \text{ offen} \iff M \cap \partial M = \emptyset.$$

$$M \subset X \text{ abgeschlossen} \iff \partial M \subset M.$$

## Vollständigkeit

**Definition 1.22.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(y_n)_n \subset X$  heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ s. d. } d(y_n, y_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

**Lemma 1.23.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine konvergente Folge in  $X$  ist eine *Cauchy-Folge*.

*Beweis.* Sei  $(y_n)_n$  konvergente Folge mit Grenzwert  $y$  (eindeutig wegen 1.14.v) und 1.6). Sei  $\varepsilon > 0$ .

Dann gibt es  $N \in \mathbb{N}$  s. d.  $d(y_m, y) < \varepsilon \quad \forall m \geq N$ .

$$\Rightarrow d(y_n, y_m) \underset{\Delta}{\leq} d(y_n, y) + d(y, y_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N. \quad \square$$

**Bemerkung.** Nicht jede Cauchy-Folge konvergiert:

**Beispiel**  $((\mathbb{Q}, |\cdot|))$ .  $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{y_n}$ ,  $y_0 = 1$ .

**Check.** Es gilt für  $n \geq 1$

$$\left[ \frac{1}{y_{n+1}}, y_{n+1} \right] \subset \left[ \frac{1}{y_n}, y_n \right] \quad (*)$$

und für  $l_n := y_n - \frac{1}{y_n}$

$$\begin{aligned} l_{n+1} &\leq \frac{1}{4y_{n+1}} l_n^2 \leq \frac{1}{4} l_n^2 & (**) \\ \implies d(y_n, y_m) = |y_n - y_m| &\leq \left| y_n - \frac{1}{y_n} \right| = l_n \xrightarrow{\text{wg. } (**)} 0. \\ &\quad \text{O.B.d.A. } \uparrow \quad m \geq n \\ &\implies y_m \in \left[ \frac{1}{y_n}, y_n \right] \text{ wg. } (*) \end{aligned}$$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  und somit  $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ . In  $\mathbb{R}$  konvergiert jede Cauchy-Folge. Nennen wir den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ . Es gilt dann

$$\underbrace{y_{n+1}}_{\rightarrow a} = \underbrace{\frac{1}{2}y_n}_{\frac{1}{2}a} + \underbrace{\frac{1}{y_n}}_{\frac{1}{a}},$$

also  $a^2 = 2$ . Aber  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**Definition 1.24.** Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert heißt *vollständig*.

**Beispiele 1.25.** i)  $\mathbb{R}, |\cdot|$  ist vollständig (Diff I).

ii)  $(C([a, b], \mathbb{R}), d_{L^1})$  mit  $d_{L^1}(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$  (vgl. HA Blatt 1, A1) ist *nicht* vollständig.

iii)  $(C(D, \mathbb{R}), d_{\text{sup}})$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , mit

$$d_{\text{sup}} = \|f - g\|_{\infty} = \sup_{t \in D} |f(t) - g(t)|,$$

ist vollständig. Den Beweis führen wir später allgemeiner.

Zunächst einige

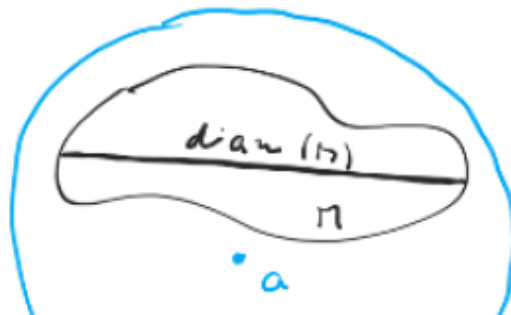
## Betrachtungen in vollständigen metrischen Räumen

**Definition 1.26.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $M \subset X$ ,

$$\text{diam}(M) := \sup_{x, y \in M} d(x, y) \text{ „Durchmesser“ (englisch „diameter“).}$$

$M$  heißt *beschränkt*, falls  $\text{diam}(M) < \infty$ .

**Bemerkung.**  $M$  ist beschränkt  $\iff \exists R \geq 0$  und  $a \in X$  s. d.  $M \subset B_R(a)$



**Beispiel.**  $\text{diam}([a, b]) = b - a$

**Satz 1.27 (Schachtelungsprinzip).** Sei  $(X, d)$  ein *vollständiger* metrischer Raum und sei  $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ . Eine Familie nicht-leerer abgeschlossener Teilmengen von  $X$  mit

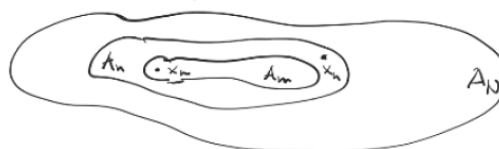
$$\text{diam}(A_k) \rightarrow 0 \text{ (in } \mathbb{R}) \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Dann gibt es genau einen Punkt  $a \in X$  der in *allen*  $A_k$  liegt.

*Beweis.* Eindeutigkeit: Angenommen  $\exists x \neq y$  mit  $x \in A_k \ \forall k$  und  $y \in A_k \ \forall k$ . Dann kann  $\text{diam}(A_k)$  keine Nullfolge sein, da  $d(x, y) \neq 0$ .

Existenz: Wähle  $x_n \in A_n$ . Dann ist  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge, denn

$$d(x_n, x_m) \leq \text{diam } A_N \text{ für } n, m \geq N$$



$$d(x_n, x_m) \leq \text{diam } A_N \text{ für}$$

$$\begin{array}{c} \implies x_n \rightarrow x \text{ in } X, \\ \uparrow \\ \text{Vollständigkeit} \end{array}$$

Da  $x_n \in A_k \quad \forall n \geq k$ , folgt mit 1.19:  $x \in A_k \quad \forall k$ . □

Ein sehr wichtiger Satz, der viele Anwendungen hat ist der folgende:

**Satz 1.28 (Banach'scher Fixpunktsatz).** Sei  $(X, d_X)$  ein *vollständiger* metrischer Raum. Sei  $M \subset X$  eine *abgeschlossene* Teilmenge und  $\Phi: M \rightarrow X$  eine Abbildung mit  $\Phi(M \subset M)$  und es gebe  $0 \leq L < 1$  s. d.

$$d_X(\Phi(X), \Phi(Y)) \leq L d_X(x, y) \quad \forall x, y \in M \quad (\text{„}\Phi \text{ ist Kontraktion“}).$$

Dann gibt es genau ein  $t_*$  s. d.  $\Phi(t_*) = t_*$ . Ein solches  $t_*$  heißt *Fixpunkt* von  $\Phi$ .



$X = \mathbb{R}, M = [0, 1], \log(2 - x^2), (\text{WolframAlpha})$

**Beispiel.**

*Beweis.* Eindeutigkeit: Seien  $\Phi(t_*) = t_*, \Phi(\tilde{t}_*) = \tilde{t}_*$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d(t_*, \tilde{t}_*) &= d(\Phi(t_*), \Phi(\tilde{t}_*)) \\ &\leq d(t_*, \tilde{t}_*) \end{aligned}$$

Da  $L > 1$  ist, folgt  $d(t_*, \tilde{t}_*) = 0$ , also  $t_* = \tilde{t}_*$ .

Existenz: Wir betrachten die Folge  $x_0 \in M$  beliebig,  $x_n := \Phi(x_{n-1})$  für  $n \geq 1$ .

**Behauptung.**  $(x_n)_n$  konvergiert in  $M$  und zwar gegen de Fixpunkt.

*Beweis.* •  $(x_n)_n$  ist Cauchy-Folge:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L d(x_n, x_{n-1}) \quad \forall n \geq 1.$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \Phi(x_n) \parallel \\ \Phi(x_{n-1}) \end{array}$$

Iteration liefert

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq L^n d(x_1, x_0).$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \\ &\quad + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \underbrace{(L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \dots + L^n)}_{=L^n \sum_{r=0}^{k-1} L^r \leq L^n \sum_{r=0}^{\infty} L^r = \frac{L^n}{1-L}} d(x_1, x_0) \\ &\quad \text{geom. Reihe } (L < 1) \end{aligned}$$

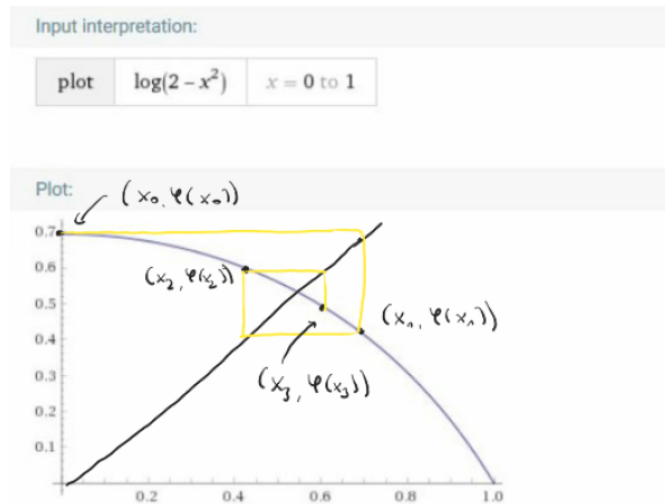
$\implies$  (wegen  $L < 1$ ) Beh..

- Da  $X$  vollständig ist, konvergiert  $(x_n)_n$ . Setze  $t_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
- Da  $M$  abgeschlossen ist, ist  $t_* \in M$  nach 1.19.
- $t_*$  ist der gesuchte Fixpunkt:

$$t_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_{n-1}) = \Phi(t_*)$$

$\uparrow$   
Kontraktionen sind stetig und 1.18

□



$$x_0 = 0, x_1 = \ln(2 - (\ln 2)^2) \approx 0,42, x_3 \approx 0,60, x_4 \approx 0,49$$

**Bemerkung.** Kontraktionen sind stetig: Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $\delta = \varepsilon/L$ .

**Bemerkung.** Die Konvergenz ist recht schnell:

$$d(x_n, t_*) \leq \frac{L^n}{1 - L} d(x_1, x_0) \quad (L < 1).$$

Alle Voraussetzungen sind notwendig, gilt eine nicht, so gibt es nicht unbedingt einen Fixpunkt (oder keinen eindeutigen).

