

Vorlesungsmitschrift

# **DIFF II**

**Prof. Dr. Dorothea Bahns**

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 14. Juli 2020

---

## **Disclaimer**

Nicht von Professor Bahns durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Metrische Räume</b>	<b>6</b>
1.I	Charakterisierung topologischer Grundbegriffe in metrischen Räumen . . .	17
1.II	Vollständigkeit . . . . .	19
1.III	Betrachtungen in vollständigen metrischen Räumen . . . . .	21
1.IV	Stetige Abbildungen auf metrischen Räumen . . . . .	27
1.V	Kompaktheit . . . . .	30
1.VI	Äquivalenz von Metriken . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Normierte Vektorräume</b>	<b>38</b>
2.I	Stetige Abbildungen in normierten Vektorräumen . . . . .	44
2.I.1	Lineare Abbildungen . . . . .	44
2.II	Vektorräume mit Skalarprodukt . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Differenzierbarkeit in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>55</b>
3.I	Geometrische Anschauung, partielle Ableitung . . . . .	59
3.II	Beispiele und Erläuterungen . . . . .	63
3.III	Implizite Funktionen . . . . .	72
3.IV	Der Satz von der Umkehrabbildung . . . . .	81
3.V	Lokale Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .	88
3.VI	Höhere Ableitungen, Taylorformel . . . . .	92
3.VII	Der Laplace-Operator . . . . .	95
3.VIII	Taylor-Formel, lokale Extrema . . . . .	100
3.IX	Lokale Extrema . . . . .	103
<b>4</b>	<b>Untermannigfaltigkeiten des <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>109</b>
4.I	Tangential- und Normalraum . . . . .	130
4.II	Flächenbemessung auf Untermannigfaltigkeiten . . . . .	138
<b>5</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>143</b>
5.I	Geometrische Interpretation . . . . .	143
5.II	Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . . .	145
5.III	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	160
5.IV	Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	172

<b>6</b>	<b>Lebesgue-Integration</b>	<b>182</b>
6.I	Etwas Maßtheorie . . . . .	190
6.II	Weitere Folgerungen . . . . .	192
6.III	Messbare Funktionen . . . . .	196
6.IV	Zum Verhältnis von Lebesgue- / Riemann-Integral . . . . .	197
6.V	Produkt-Maße . . . . .	200
6.VI	Der Transformationssatz . . . . .	207
<b>7</b>	<b>Integration auf Untermannigfaltigkeiten</b>	<b>215</b>
7.I	Der Integralsatz von Gauß . . . . .	221

# Vorlesungsverzeichnis

1	Mo 20.04. 10:15 . . . . .	6
2	Do 23.04. 10:15 . . . . .	16
3	Mo 27.04. 10:15 . . . . .	25
4	Do 30.04. 10:15 . . . . .	36
5	Mo 04.05. 10:15 . . . . .	44
6	Do 07.05. 10:15 . . . . .	55
7	Mo 11.05. 10:15 . . . . .	63
8	Do 14.05. 10:15 . . . . .	74
9	Mo 17.05. 10:15 . . . . .	80
10	Do 21.05. 10:15 . . . . .	88
11	Mo 25.05. 10:15 . . . . .	100
12	Do 28.05. 10:15 . . . . .	109
13	Do 04.06. 10:15 . . . . .	122
14	Mo 08.06. 10:15 . . . . .	130
15	Do 11.06. 10:15 . . . . .	143
16	Mo 15.06. 10:15 . . . . .	153
17	Do 18.06. 10:15 . . . . .	162
18	Mo 15.06. 10:15 . . . . .	171
19	Do 25.10. 10:15 . . . . .	182
20	Mo 29.06. 10:15 . . . . .	190
21	Do 02.07. 10:15 . . . . .	199
22	Mo 06.07. 10:15 . . . . .	207
23	Do 09.07. 10:15 . . . . .	214
24	Mo 13.07. 10:15 . . . . .	224

## Vorlesung 24

Mo 13.07. 10:15

Letztes Mal: Satz von Gauß

**Bemerkungen.** 1) Tatsächlich gilt die Gleichung sogar komponentenweise, also für  $f \in C^1(G, \mathbb{R})$  gilt

$$\int_G \partial_i f(x) dx = \int_{\partial G} f(x) v_i(x) dS(x).$$

2) Der Satz gilt immer noch, wenn  $\partial G$  höchstens  $(n-2)$ -dimensionale „Kanten“ und „Ecken“ hat, in denen glatte Stücke von  $\text{randpunkte}G$  zusammentreffen, also insbesondere auch für Quader.

3) Aus Bemerkung 1) folgt sofort: Ist  $\text{supp } X \subset G^\circ$  so ist  $\int_G \text{div } X dx = 0$ .

Physikalische Interpretation  $\rightarrow$  Vorlesung 23: Quellstärke im Inneren = Fluss durch die Oberfläche. Physikalische und mathematische Anwendung:

**Beispiele 7.7.** i) Elektrodynamik:  $\int_G \text{div } E(x) dx = \int_{\partial G} \langle E, v \rangle dS(x)$ ,  $\text{div } E(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x)$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 elektrisches Feld konstant

(Maxwell-Gesetz),  $\rho$  Ladungsdichte ( $\rho(x) = \text{Ladung/Volumen an der Stelle } x$ )  
 $\implies \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_{\partial G} \langle E, v \rangle dS(x)$ ,  $Q = \text{Gesamtladung in } G$ . Aus dieser Gleichung kann man in vielen Fällen  $E$  berechnen.

ii)

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1 dS(x) \\
 &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle X(x), v(x) \rangle dS(x) \\
 &\quad \uparrow \\
 &\text{für } X(x) = x \text{ (denn } v(x) = x \text{ und } \|x\|_{\mathbb{E}}^2 = 1) \\
 &= \int_{B_1(0)} \underbrace{\text{div } X(x)}_{=n} dx. \\
 &\quad \uparrow \\
 &\text{Gauß}
 \end{aligned}$$

$\mathbb{S}^{n-1}$   $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre  $\subset \mathbb{R}^n$ ,  $B_1(0)$  Vollkugel von Radius 1  $\subset \mathbb{R}^n$ .

*Beweis des Satzes (vgl. Forster. Analysis 3, Vieweg).* Wir beweisen die Behauptung aus Bemerkung 1), aus der der Satz folgt.

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $G$ . Wähle zu  $x \in G$  eine offene Umgebung  $U_x \subset U$ . Ist  $x \in \partial G$

wähle  $U_x = \underbrace{U'_x}_{(n-1)\text{-dimensionaler Quader}} \times \overbrace{U''_x}^{\text{Intervall}}$  s. d.  $\exists \varphi: U'_x \rightarrow U''_x \ C^1$  (als Abbildung nach  $\mathbb{R}$ ) mit

$$\begin{aligned} G \cap (U'_x \times U''_x) &= \{ y \in U_x \mid y_n < \varphi(y') \} \\ \partial G \cap (U'_x \times U''_x) &= \{ y \in U_x \mid y_n = \varphi(y') \}. \end{aligned} \quad \square$$