Vorlesungsmitschrift

DIFF II

Prof. Dr. Dorothea Bahns

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 14. Juli 2020

Disclaimer

Nicht von Professor Bahns durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

Inhaltsverzeichnis

Vorlesungsverzeichnis

Vorlesung 24

Mo 13.07. 10:15

Letztes Mal: Satz von Gauß

Bemerkungen. 1) Tatsächlich gilt die Gleichung sogar komponentenweise, also für $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ gilt

$$\int_G \partial_i f(x)\, dx = \int_{\partial G} f(x) \nu_i(x)\, dS(x).$$

2) Der Satz gilt immer noch, wenn ∂G höchstens $(n-2)$-dimensionale „Kanten“ und „Ecken“ hat, in denen glatte Stücke von *randpunkteG* zusammentreffen, also insbesondere auch für Quader.

3) Aus Bemerkung 1) folgt sofort: Ist $\operatorname{supp} X \subset G^\circ$ so ist $\int_C \div X\, dx = 0$.

Physikalische Interpretation →Vorlesung 23: Quellstärke im Inneren = Fluss durch die Oberfläche. Physikalische und mathematische Anwendung:

Beispiele 7.7. i) Elektrodynamik: $\int_G \div E(x)\, dx = \int_{\partial G} \langle E, \nu\rangle\, dS(x)$, $\operatorname{div} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elektrisches Feld}}}{E(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{\frac{1}{\varepsilon_0}} \rho(x)$

(Maxwell-Gesetz), ρ Ladungsdichte ($\rho(x) = {}^{\text{Ladung}}/_{\text{Volumen}}$ an der Stelle x) $\implies \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_{\partial G} \langle E, \nu\rangle\, dS(x)$, Q = Gesamtladung in G. Aus dieser Gleichung kann man in vielen Fällen E berechnen.

ii)

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1\, dS(x) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{für } X(x) = x \text{ (denn } \nu(x) = x \text{ und } \|x\|_{\mathrm{E}}^2 = 1)}}{=} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle X(x), \nu(x)\rangle\, dS(x) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß}}}{=} \int_{B_1(0)} \underbrace{\operatorname{div} X(x)}_{=n}\, dx.
\end{aligned}$$

$\mathbb{S}^{n-1}$ $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre $\subset \mathbb{R}^n$, $B_1(0)$ Vollkugel von Radius 1 $\subset \mathbb{R}^n$.

Beweis des Satzes (vgl. Forster. Analysis 3, Vieweg). Wir beweisen die Behauptung aus Bemerkung 1), aus der der Satz folgt.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit G. Wähle zu $x \in G$ eine offene Umgebung $U_x \subset U$. Ist $x \in \partial G$ wähle $U_x = \underbrace{U_x'}_{(n-1)\text{-dimensionaler Qauder}} \times \overbrace{U_x''}^{\text{Intervall}}$ s. d. $\exists\, \varphi \colon U_x' \to U_x''$ C^1 (als Abbildung nach $\mathbb{R}$) mit

$$\begin{aligned} G \cap (U_x' \times U_x'') &= \{\, y \in U_x \mid y_n < \varphi(y') \,\} \\ \partial G \cap (U_x' \times U_x'') &= \{\, y \in U_x \mid y_n = \varphi(y') \,\}. \end{aligned}$$

□