Correzione Esame di Calcolo Numerico

01/02/2019

1. Le radici dell'equazione di secondo grado

$$x^2 - 0.5001\,x + 5 \cdot 10^{-5} = 0$$

calcolate analiticamente sono:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{0.5001 \mp \sqrt{0.25010001 - 4 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}}{2} = \frac{0.5001 \mp \sqrt{0.24990001}}{2} \\ &= \frac{0.5001 \mp 0.4999}{2} \end{aligned}$$

da cui

$$x_1 = 0.5 \qquad x_2 = 10^{-4}\,.$$

Si può verificare che la loro somma cambiata di segno è il coefficiente -0.5001 e il loro prodotto è il coefficiente $5 \cdot 10^{-5}$

$$x^2 - 0.5001\,x + 5 \cdot 10^{-5} = (x - 0.5)(x - 10^{-4}) = 0$$

Nel file script **Es1.m** sono riportati esempi di comandi con cui verificare/ottenere le soluzioni attraverso comandi Matlab.
Qualsiasi confronto effettuato ci permette di osservare che le soluzioni possono essere calcolate in Matlab non in modo *esatto* ma comunque con un'accuratezza superiore all'epsilon macchina (eps $= 2.220446049250313 \cdot 10^{-16}$).

2. Integrazione numerica.
2a) Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[a, b]$

$$I[f] := \int_a^b f(x)dx\,.$$

Un'approssimazione nel calcolo di questo integrale si può ottenere sostituendo alla funzione integranda f il suo polinomio interpolatore di Lagrange $p(x)$ su un insieme di $n + 1$ nodi distinti $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} &p(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n \\ &p(x) = \sum_{i=0,\ldots,n}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(x) \qquad \text{con} \qquad \mathcal{L}_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I[f] &\approx \int_a^b p(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0,\ldots,n}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(x)dx = \sum_{i=0,\ldots,n}^{n} f(x_i) \int_a^b \mathcal{L}_i(x)dx \\ &= \sum_{i=0,\ldots,n}^{n} A_i f(x_i) =: Q_n[f] \end{aligned}$$

$A_i := \int_a^b \mathcal{L}_i(x)dx$ ed x_i sono detti rispettivamente *pesi* e *nodi* della formula di quadratura.
2b) Si definisce *grado di esattezza* di una formula di quadratura il massimo intero $r \geq 0$ per cui $Q_n[p] \equiv I[p]$ con $p(x)$ un qualunque polinomio di grado r.

2c) La *formula del punto medio* è una formula di tipo interpolatorio che si ottiene sostistuendo la funzione integranda f con un suo polinomio interpolatore di grado 0, in particolare con la funzione constante pari al valore di f nel punto medio:

$$I[f] \approx Q_0[f] := \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Questa formula ha grado di esattezza 1 ossia integra esattamente le funzioni costanti ed i polinomi di grado 1.
2d) Con la formula del punto medio

$$\int_{3.1}^{5.2} \exp(6 \cdot t) dt \approx (5.2 - 3.1) \exp\left(6 \cdot \left(\frac{3.1 + 5.2}{2}\right)\right)$$

3. I comandi Matlab necessari per lo svolgimento dei punti 3c), 3d), 3e), 3f) e 3g) sono implementati nel file **Es3.m**.
3a) I metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono perchè la matrice A del sistema lineare è strettamente diagonal dominante:

$$|A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{ij}| \qquad i = 1, \ldots, n$$

3b) Algoritmo di Jacobi.
La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ viene riscritta come somma di due matrici D, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, in cui D è costituita solo dagli elementi diagonali di A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} = D + C$$

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & 0 & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

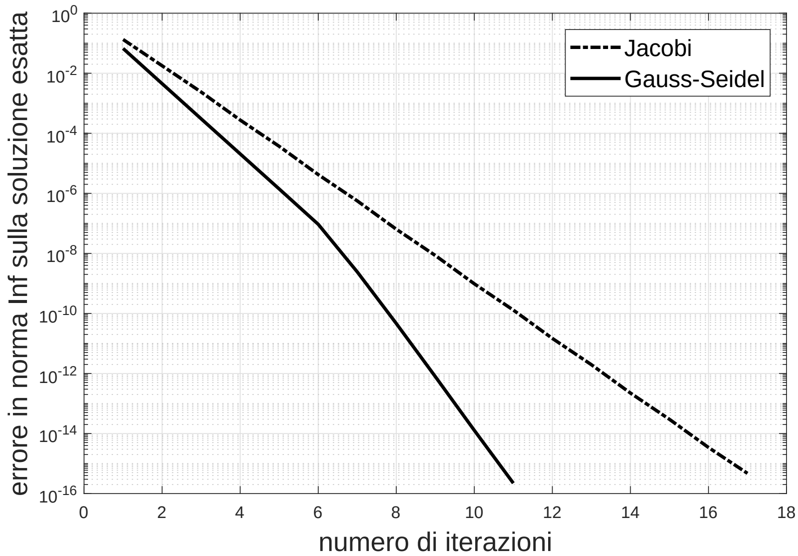
da cui

$$b = Ax = (D + C)x \rightarrow Dx = -Cx + b$$

L'algoritmo prevede di assegnare un vettore iniziale $x^{(0)}$ e calcolare una successione di vettori x^k con $k = 1, 2, \ldots$ convergente alla soluzione esatta x:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{assegnato} \\ x^{(k+1)} = -D^{-1} C x^{(k)} + D^{-1} b \qquad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

La matrice di iterazione di Jacobi è $-D^{-1}C$.
3h) Sotto è riportato il grafico dell'andamento dell'errore assoluto $\|x - x^{(k)}\|_\infty$ rispetto alla soluzione esatta x ottenuto con i due metodi in funzione del numero di iterazioni $k = 0, \ldots, 40$ (in scala logaritmica).



3i) Entrambi i metodi sono convergenti come ci si aspetta. Si noti che, per entrambi i metodi, l'errore è inferiore alla precisione di macchina dopo la 17ma iterata. Il metodo di Gauss-Seidel risulta più accurato rispetto al metodo di Jacobi (siccome il raggio spettrale della matrice di Gauss-Seidel è minore di quello della matrice di Jacobi ci si aspetta che il primo abbia velocità di convergenza superiore al secondo).