

TRAPEZIO COMPOSITA

2b) La *formula del trapezio composta* si ottiene suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in m sottointervalli di ampiezza $H = (b - a)/m$ e applicando ad ogni sottointervallo la formula del trapezio semplice:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{H}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right)$$

con $x_i = a + iH$, $i = 0, \dots, m$.

$$p(x_i) = a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 = y_i \quad i = 0, \dots, n.$$

Se $m = n$ il polinomio esiste ed è unico.

TRAPEZIO SEMPLICE

2a) La *formula del trapezio semplice* approssima l'integrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

sostituendo la funzione integranda $f(x)$ con il polinomio di primo di grado passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, ossia

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

La formula ha grado di esattezza 1 perché integra esattamente tutti polinomi di grado ≤ 1 ed esiste almeno un polinomio di grado 2 che non viene integrato esattamente.

GRADO DI ESATTEZZA

Si definisce grado di esattezza di una formula di quadratura il massimo intero $r \geq 0$ per cui $Q_n[p] = I[p]$ con $p(x)$ un qualunque polinomio in grado r .

PUNTO MEDIO COMPOSITO

3d) Sia assegnata una decomposizione uniforme dell'intervallo $[a, b]$ in $m > 1$ sottointervalli $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, m-1$ con $x_i = a + i \frac{b-a}{m}$. La formula del punto medio composta per l'approssimazione dell'integrale è la seguente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^m f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

PUNTO MEDIO SEMPLICE

2c) La *formula del punto medio* è una formula di tipo interpolatorio che si ottiene sostituendo la funzione integranda f con un suo polinomio interpolatore di grado 0, in particolare con la funzione costante pari al valore di f nel punto medio:

$$I[f] \approx Q_0[f] := \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Questa formula ha grado di esattezza 1 ossia integra esattamente le funzioni costanti ed i polinomi di grado 1.

APPROSSIMA UN INTEGRALE CON LAGRANGE

2a) Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[a, b]$

$$I[f] := \int_a^b f(x) dx.$$

Un'approssimazione nel calcolo di questo integrale si può ottenere sostituendo alla funzione integranda f il suo polinomio interpolatore di Lagrange $p(x)$ su un insieme di $n+1$ nodi distinti $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$:

$$p(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n$$
$$p(x) = \sum_{i=0, \dots, n} f(x_i) \mathcal{L}_i(x) \quad \text{con} \quad \mathcal{L}_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Quindi

$$I[f] \approx \int_a^b p(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0, \dots, n} f(x_i) \mathcal{L}_i(x) dx = \sum_{i=0, \dots, n} f(x_i) \int_a^b \mathcal{L}_i(x) dx$$
$$= \sum_{i=0, \dots, n} A_i f(x_i) =: Q_n[f]$$

$A_i := \int_a^b \mathcal{L}_i(x) dx$ ed x_i sono detti rispettivamente *pesi* e *nodi* della formula di quadratura.

DEFINISCI POLINOMIO INTERPOLATORE

2a) Dati $n + 1$ punti (x_i, y_i) $i = 0, \dots, n$, con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ si definisce *polinomio interpolatore* di grado m un polinomio $p(x)$ tale per cui

$$p(x_i) = a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + a_1 x_i + a_0 = y_i \quad i = 0, \dots, n.$$

Il polinomio interpolatore esiste ed è unico se $m = n$.

RICAVA IL POLINOMIO INTERPOLATORE

2b) Ricaviamo i coefficienti del polinomio interpolatore $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \\ a_2 x_3^2 + a_1 x_3 + a_0 = y_3 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 7 & 7^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava $a_0 = 21/8$, $a_1 = -2/3$, $a_2 = 1/24$.

MATRICE DI VANDERMONDE

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^{m-1} & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{m-1} & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 & \dots & x_i^{m-1} & x_i^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{m-1} & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

la cui soluzione esiste ed è unica se $m = n$. La matrice associata di questo sistema lineare si chiama matrice di *Vandermonde*.

DATO IL SISTEMA LINEARE DI MATRICE DIAGONALE

2b) Dato un sistema lineare $Ax = b$ di ordine n con matrice diagonale

$$\text{con matrice diagonale } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e termine noto } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

l'algoritmo di risoluzione è

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, \dots, n$$

ed ha costo computazionale pari ad n divisioni.

RICERCA NUMERICA DI RADICI DI EQUAZIONI NON LINEARI

2b) Nella ricerca numerica di radici di equazioni non lineari, il criterio d'arresto basato sul controllo dell'incremento prevede che il metodo iterativo generante la successione

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = \alpha$$

si arresti al minimo valore di $k \in \mathbb{N}$ tale per cui $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tolleranza fissata. Questo criterio è impreciso nel caso in cui l'avanzamento verso la radice sia "lento".

DEFINITO IL METODO ITERATIVO LINEARE (1 È CONSISTENTE, 2 CONVERGENTE)

2a) Definito il metodo iterativo lineare

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + q \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

con $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x^{(k)}, q \in \mathbb{R}^n$ per la risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x, b \in \mathbb{R}^n$, tale metodo si dice *consistente* se 1

$$x^{(k)} \equiv x \text{ implica } x^{(k+i)} \equiv x^{(k)} \equiv x \quad i = 1, 2, \dots$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché tale metodo sia *convergente* è che il raggio spettrale della matrice di iterazione $\rho(B)$ verifichi la condizione

$$\rho(B) < 1.$$

Inoltre, definita una norma matriciale $\|\cdot\|$ indotta da una norma vettoriale, condizione sufficiente affinché tale metodo sia *convergente* è che $\|B\| < 1$ infatti se $\|B\| < 1$ allora si dimostra che $\rho(B) < 1$.

METODO DELLE TANGENTI

3a) Dato un valore x_0 iniziale, il metodo delle tangenti genera una successione di approssimanti della radice attraverso l'algoritmo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, \dots$$

se $f'(x_k) \neq 0$ per $k = 0, 1, \dots$

Il metodo di Newton è un metodo **localmente** convergente.

$$\|M\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 3 \quad \|M^{-1}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1/3$$

da cui

$$\text{cond}_\infty(M) = \|M\|_\infty \|M^{-1}\|_\infty = 1.$$

METODI DIRETTI ED ITERATIVI

2a) I metodi diretti sono metodi di risoluzione che, in aritmetica esatta, forniscono la soluzione in un numero finito di passi. I metodi iterativi sono metodi per determinare una successione di approssimanti della soluzione.

CHOLESKY

3a) Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica definita positiva, allora esiste una matrice B triangolare superiore tale che $A = B'B$. Inoltre se gli elementi diagonali della matrice B sono scelti positivi, tale fattorizzazione è unica. Tale fattorizzazione si chiama *fattorizzazione di Cholesky*.

NEWTON

3a) Dato un valore x_0 iniziale, il metodo delle tangenti genera una successione di approssimanti della radice attraverso l'algoritmo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, \dots$$

se $f'(x_k) \neq 0$ per $k = 0, 1, \dots$

Il metodo di Newton è un metodo **localmente** convergente.

$$\|M\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 3 \quad \|M^{-1}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1/3$$

da cui

$$\text{cond}_\infty(M) = \|M\|_\infty \|M^{-1}\|_\infty = 1.$$

BISEZIONE

2c) Approssimare il numero reale $\alpha = \sqrt[3]{10}$ significa approssimare numericamente la radice α dell'equazione non lineare

$$f(x) = x^3 - 10 = 0.$$

Tale radice è unica poichè la funzione f è continua e strettamente crescente in \mathbb{R} .

Il metodo di bisezione si basa sul *Teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue* ossia sull'individuazione di un intervallo iniziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$.

Un buon intervallo di innesco del metodo è per esempio $[a^{(0)}, b^{(0)}] = [2, 3]$ poichè $f(2) = 2^3 - 10 = -2 < 0$ e $f(3) = 27 - 10 = 17 > 0$:

1° passo

$$[a^{(0)}, b^{(0)}] = [2, 3] \quad x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2} = 2.5 \quad f(2.5) = 5.625 > 0$$

2° passo

$$[a^{(1)}, b^{(1)}] = [2, 2.5] \quad x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2} = 2.25 \quad f(2.25) = 1.390625 > 0$$

3° passo

$$[a^{(2)}, b^{(2)}] = [2, 2.25] \quad x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2} = 2.125 \quad f(2.125) = -0.404296875 < 0$$

Definita una norma vettoriale e una conseguente norma matriciale

2b) Definita una norma vettoriale e una conseguente norma matriciale $\|\cdot\|$, il numero di condizionamento associato alla matrice A del sistema lineare definito al punto 2a) è definito come:

$$\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$$

con A^{-1} matrice inversa di A .

$$\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$$

con $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice identità.

MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE

3f) Data una matrice triangolare inferiore $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, l'algoritmo di sostituzione in avanti per la risoluzione del sistema lineare $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ L_{n-1,1} & L_{n-1,2} & \cdots & L_{n-1,n-1} & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn-1} & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

è:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j\right)}{L_{ii}} \quad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

3a) Data una matrice triangolare superiore $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, l'algoritmo di sostituzione all'indietro per la risoluzione del sistema lineare $Ux = b$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

è:

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{u_{nn}} \\ x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j\right)}{u_{ii}} \quad i = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

Costo computazionale $O(n^2)$

JACOBI

La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ viene riscritta come somma di due matrici $D, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, in cui D è costituita solo dagli elementi diagonali di A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = D + C$$
$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & 0 & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$b = Ax = (D + C)x \rightarrow Dx = -Cx + b$$

L'algoritmo prevede di assegnare un vettore iniziale $x^{(0)}$ e calcolare una successione di vettori x^k con $k = 1, 2, \dots$ convergente alla soluzione esatta x :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = -D^{-1}Cx^{(k)} + D^{-1}b \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

La matrice di iterazione di Jacobi è $-D^{-1}C$.

SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO

3b) Il costo computazione dell'algoritmo di sostituzione all'indietro è pari ad $O(n^2)$ operazioni macchina infatti:

- ad ogni iterazione è prevista una divisione, per un totale di n divisioni
- alla iterata i -esima, per $i = n - 1, \dots, 1$, sono previste $n - i$ moltiplicazioni, per un totale di $\frac{(n-1)n}{2}$ moltiplicazioni
- alla iterata i -esima, per $i = n - 1, \dots, 1$, sono previste $n - i$ somme algebriche, per un totale di $\frac{(n-1)n}{2}$ somme algebriche.

GAUSS-SEIDEL

2b) Il metodo di Gauss-Seidel si basa sullo splitting della matrice A nella somma di tre matrici $A = D + E + F$ tali che

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algoritmo si può rappresentare nella seguente forma matriciale:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = B_{GS}x^{(k)} + q_{GS} \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

$$\text{con } B_{GS} = -(E + D)^{-1}F \text{ e } q_{GS} = (E + D)^{-1}b.$$

DICESI RADICE SEMPLICE RADICE DI ORDINE

2a) Data $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funzione non lineare tale che $f \in \mathcal{C}^m(a, b)$ con $m \in \mathbb{N}^+$, α dicesi *radice semplice* se $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$.

Se $f^{(m-1)}(\alpha) = \dots = f'(\alpha) = f(\alpha) = 0$ e $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$ allora α è detta *radice di ordine m* . In tal caso $f(x) = (x - \alpha)^m h(x)$ con $h(\alpha) \neq 0$.

ERRORE E CONDIZIONAMENTO

Errore

Dato un valore esatto risultato di un metodo o sistema che sia, e dato un valore approssimato risultato di un metodo approssimante il metodo originale, chiamiamo **errore assoluto** la differenza che restituisce lo scostamento dal valore esatto:

$$e_{\text{abs}} = |\text{valore esatto} - \text{valore approssimato}|$$

Chiamiamo invece **errore relativo**

$$e_{\text{rel}} = \frac{e_{\text{abs}}}{|\text{valore esatto}|}$$

Queste due tipologie si fanno al concetto di condizionamento.

Condizionamento

Diciamo che una funzione o modello $f(x)$ è **ben condizionato** se la seguente relazione vale

$$\frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq k \cdot \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

$f(x) \neq 0, x \neq 0, k = \text{numero di condizionamento piccolo}$

NUMERI MACCHINA

Numeri macchina

I numeri macchina sono quei **numeri** che sono **rappresentabili in modo esatto al calcolatore**. L'insieme dei numeri rappresentabili in questo modo viene chiamato **sistema floating point** e denotato con \mathbb{F} . Lo standard IEEE-754 a doppia precisione è un meccanismo di rappresentazione esatta dei numeri macchina: un numero macchina x può essere rappresentato come il prodotto del suo segno s per la sommatoria dei suoi bit d_i divisi per una base β e un esponente p .

$$x = s \cdot \left(\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta} + \dots + \frac{d_i}{\beta} \right) \cdot \beta^p$$

```
format long
pi % Numero macchina di pi greco
```

Il sistema floating point può rappresentare **numeri macchina** la cui **grandezza** è dipendente dall'architettura del sistema in cui i calcoli vengono effettuati. Nel programma MATLAB, questi numeri hanno un valore minimo e un valore massimo. La variabile **REALMIN** contiene il **più piccolo positivo** rappresentabile in macchina; la variabile **REALMAX** il **più grande positivo**.

```
realmin
realmax
```

Chiamiamo **epsilon macchina** il più piccolo numero macchina positivo tale che

$$\epsilon := \min\{x \in \mathbb{F} \mid 1 + x > 1\}$$

Questo numero è indicatore della sensibilità/accuratezza del sistema floating point.

METODO DELLE SECANTI

Il metodo delle secanti approssima la radice usando una costruzione di **rette passanti per due punti**. La formula che approssima la radice x_{k+1} è data dalla radice al passo precedente x_k . Ha ordine di convergenza 1. È localmente convergente.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k) \quad k = 0, 1, \dots$$

CRITERI DI ARRESTO

Gli algoritmi di ricerca hanno criteri che impongono stop all'algoritmo in caso un'approssimazione precisa abbastanza della radice venga trovata o il superamento di una certa soglia sia soddisfatto. I criteri di arresto di cui facciamo uso sono

- **criterio dell'incremento**, per cui l'algoritmo si arresta al minimo valore k tale che $|f(x_k)| < \epsilon$
- **criterio del residuo**, per cui un algoritmo si arresta al minimo valore di k tale che $|x_{(k+1)} - x_{(k)}| < \epsilon$

FORMULA DI CAVALIERI SIMPSON SEMPLICE

$$\int_b^a f(x) dx \cong \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad Q_2[f]$$

A differenza delle altre formule viste, questa ha **grado di esattezza 3**, il che significa che riesce a integrare funzioni con quel grado massimo. Questa formula utilizza un polinomio interpolatore passante per tre punti per integrare esattamente le curve.

FORMULA DI CAVALIERI SIMPSON COMPOSITA

$$\frac{H}{6} \sum_{i=1}^m \left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + f(x_{i-1}) \right] \quad H = \frac{b-a}{m}$$

La formula composta di Cavalieri-Simpson è la migliore per l'approssimazione d'integrali. Il polinomio interpolatore della formula è costituito da un numero arbitrario di nodi m . Alcune note sulla formula:

- il punto precedente e il punto successivo sono i nodi che definiscono l'inizio e la fine di ciascun polinomio interpolatore;
- la sommatoria rappresenta i nodi intermediari al nodo di partenza e al nodo finale.
- l'indice della sommatoria parte da 1 siccome i termini all'interno della divisione prevedono di usare l'elemento di indice precedente.

SISTEMA LINEARE

Data una matrice di coefficienti $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$, un vettore di variabili $x \in \mathbb{R}^n$ e un vettore di costanti $b \in \mathbb{R}^n$, un sistema lineare della forma $Ax = b$ dicesi avere:

- una soluzione se risolvendo il sistema lineare si ottiene un singolo punto nello spazio $\rightarrow \det(A) \neq 0$;
- infinite soluzioni se risolvendo il sistema lineare si ottiene una linea o un piano nello spazio $\rightarrow \det(A) = 0$;
- nessuna soluzione se risolvendo il sistema lineare non si ottengono intersezioni $\rightarrow \det(A) = 0$.

Per risolvere un sistema lineare, e quindi trovare il valore delle variabili x , può essere usato l'operatore di divisione a sinistra \backslash . L'espressione $A \backslash b$ trova soluzione al sistema lineare $Ax = b$. Il costo computazionale per la ricerca di una soluzione al sistema lineare non è trascurabile ed esistono svariati metodi più o meno ottimali per risolvere il problema nel minor tempo possibile e con buona accuratezza. Questi metodi si basano sullo studio della matrice originale e alla sua eventuale manipolazione non distruttiva.

Problemi quali l'esattezza della soluzioni sono fortemente dipendenti dalle condizioni viste sopra: se una matrice ha determinante non nullo ma molto vicino a esserlo $\det(A) \approx 0$, potrebbe essere considerata singolare e quindi senza inversa A^{-1} : il valore del condizionamento sarebbe elevato.

$$\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$$

FATTORIZZAZIONE LU

triangolare inferiore L tali che $A = LU$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

La matrice U è data dall'eliminazione gaussiana con elementi sotto la diagonale pari a 0, la matrice L è una matrice con elementi sulla diagonale pari a 1 ed elementi sotto la diagonale pari ai coefficienti utilizzati nell'eliminazione gaussiana della matrice U . La fattorizzazione LU è unica nel senso che per ogni matrice A esistono due matrici quadrate che quando moltiplicate restituiscono la matrice originale.

Scriviamo $Ax = b$ come $LUx = b$ dove L e U sono le matrici superiori e inferiori. Allora le soluzioni dei seguenti sistemi lineari è trovata tramite gli algoritmi

$$\begin{cases} Ly = b & \text{con sostituzione in avanti } \mathcal{O}(n^2) \\ Ux = y & \text{con sostituzione all'indietro } \mathcal{O}(n^2) \end{cases}$$