

TRAPEZIO COMPOSITA

2b) La *formula del trapezio composta* si ottiene suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in m sottointervalli di ampiezza $H = (b - a)/m$ e applicando ad ogni sottointervallo la formula del trapezio semplice:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{H}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right)$$

con $x_i = a + iH$, $i = 0, \dots, m$.

$$p(x_i) = a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 = y_i \quad i = 0, \dots, n.$$

Se $m = n$ il polinomio esiste ed è unico.

TRAPEZIO SEMPLICE

2a) La *formula del trapezio semplice* approssima l'integrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

sostituendo la funzione integranda $f(x)$ con il polinomio di primo di grado passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, ossia

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

La formula ha grado di esattezza 1 perché integra esattamente tutti polinomi di grado ≤ 1 ed esiste almeno un polinomio di grado 2 che non viene integrato esattamente.

GRADO DI ESATTEZZA

Si definisce grado di esattezza di una formula di quadratura il massimo intero $r \geq 0$ per cui $Q_n[p] = I[p]$ con $p(x)$ un qualunque polinomio in grado r .

PUNTO MEDIO COMPOSITO

3d) Sia assegnata una decomposizione uniforme dell'intervallo $[a, b]$ in $m > 1$ sottointervalli $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, m-1$ con $x_i = a + i \frac{b-a}{m}$. La formula del punto medio composta per l'approssimazione dell'integrale è la seguente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^m f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

PUNTO MEDIO SEMPLICE

2c) La *formula del punto medio* è una formula di tipo interpolatorio che si ottiene sostituendo la funzione integranda f con un suo polinomio interpolatore di grado 0, in particolare con la funzione costante pari al valore di f nel punto medio:

$$I[f] \approx Q_0[f] := \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Questa formula ha grado di esattezza 1 ossia integra esattamente le funzioni costanti ed i polinomi di grado 1.

APPROSSIMA UN INTEGRALE CON LAGRANGE

2a) Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[a, b]$

$$I[f] := \int_a^b f(x) dx.$$

Un'approssimazione nel calcolo di questo integrale si può ottenere sostituendo alla funzione integranda f il suo polinomio interpolatore di Lagrange $p(x)$ su un insieme di $n+1$ nodi distinti $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) & i &= 0, \dots, n \\ p(x) &= \sum_{i=0, \dots, n} f(x_i) \mathcal{L}_i(x) & \text{con} & \quad \mathcal{L}_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I[f] &\approx \int_a^b p(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0, \dots, n} f(x_i) \mathcal{L}_i(x) dx = \sum_{i=0, \dots, n} f(x_i) \int_a^b \mathcal{L}_i(x) dx \\ &= \sum_{i=0, \dots, n} A_i f(x_i) =: Q_n[f] \end{aligned}$$

$A_i := \int_a^b \mathcal{L}_i(x) dx$ ed x_i sono detti rispettivamente *pesi* e *nodi* della formula di quadratura.

DEFINISCI POLINOMIO INTERPOLATORE

2a) Dati $n + 1$ punti (x_i, y_i) $i = 0, \dots, n$, con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$
si definisce *polinomio interpolatore* di grado m un polinomio $p(x)$ tale per cui

$$p(x_i) = a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + a_1 x_i + a_0 = y_i \quad i = 0, \dots, n.$$

Il polinomio interpolatore esiste ed è unico se $m = n$.

RICAVA IL POLINOMIO INTERPOLATORE

2b) Ricaviamo i coefficienti del polinomio interpolatore $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \\ a_2 x_3^2 + a_1 x_3 + a_0 = y_3 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 7 & 7^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava $a_0 = 21/8$, $a_1 = -2/3$, $a_2 = 1/24$.

MATRICE DI VANDERMONDE

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^{m-1} & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{m-1} & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 & \dots & x_i^{m-1} & x_i^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{m-1} & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

la cui soluzione esiste ed è unica se $m = n$. La matrice associata di questo sistema lineare si chiama matrice di *Vandermonde*.

DATO IL SISTEMA LINEARE DI MATRICE DIAGONALE

2b) Dato un sistema lineare $Ax = b$ di ordine n con matrice diagonale

con matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ e termine noto $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

l'algoritmo di risoluzione è

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, \dots, n$$

ed ha costo computazionale pari ad n divisioni.

RICERCA NUMERICA DI RADICI DI EQUAZIONI LINEARI

2b) Nella ricerca numerica di radici di equazioni non lineari, il criterio d'arresto basato sul controllo dell'incremento prevede che il metodo iterativo generante la successione

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = \alpha$$

si arresti al minimo valore di $k \in \mathbb{N}$ tale per cui $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tolleranza fissata. Questo criterio è impreciso nel caso in cui l'avanzamento verso la radice sia "lento".

DEFINITO IL METODO ITERATIVO LINEARE (1 è CONSISTENTE, 2 CONVERGENTE)

2a) Definito il metodo iterativo lineare

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + q \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

con $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x^{(k)}, q \in \mathbb{R}^n$ per la risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x, b \in \mathbb{R}^n$, tale metodo si dice *consistente* se 1

$$x^{(k)} \equiv x \text{ implica } x^{(k+i)} \equiv x^{(k)} \equiv x \quad i = 1, 2, \dots$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché tale metodo sia *convergente* è che il raggio spettrale della matrice di iterazione $\rho(B)$ verifichi la condizione

$$\rho(B) < 1.$$

Inoltre, definita una norma matriciale $\|\cdot\|$ indotta da una norma vettoriale, condizione sufficiente affinché tale metodo sia *convergente* è che $\|B\| < 1$ infatti se $\|B\| < 1$ allora si dimostra che $\rho(B) < 1$.

CRITERIO DI ARRESTO

2b) Nella ricerca numerica di radici di equazioni non lineari, il criterio d'arresto basato sul controllo del residuo prevede che il metodo iterativo si arresti al minimo valore di $k \in \mathbb{N}$ tale per cui $|f(s^k)| < \epsilon$, con $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ fissato.

METODO DELLE TANGENTI

3a) Dato un valore x_0 iniziale, il metodo delle tangenti genera una successione di approssimanti della radice attraverso l'algoritmo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, \dots$$

se $f'(x_k) \neq 0$ per $k = 0, 1, \dots$

Il metodo di Newton è un metodo **localmente** convergente.

$$\|M\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 3 \quad \|M^{-1}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1/3$$

da cui

$$\text{cond}_\infty(M) = \|M\|_\infty \|M^{-1}\|_\infty = 1.$$

METODI DIRETTI ED ITERATIVI

2a) I metodi diretti sono metodi di risoluzione che, in aritmetica esatta, forniscono la soluzione in un numero finito di passi. I metodi iterativi sono metodi per determinare una successione di approssimanti della soluzione.

CHOLESKY

3a) Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica definita positiva, allora esiste una matrice B triangolare superiore tale che $A = B'B$. Inoltre se gli elementi diagonali della matrice B sono scelti positivi, tale fattorizzazione è unica. Tale fattorizzazione si chiama *fattorizzazione di Cholesky*.

NEWTON

3a) Dato un valore x_0 iniziale, il metodo delle tangenti genera una successione di approssimanti della radice attraverso l'algoritmo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, \dots$$

se $f'(x_k) \neq 0$ per $k = 0, 1, \dots$

Il metodo di Newton è un metodo **localmente** convergente.

$$\|M\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 3 \quad \|M^{-1}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1/3$$

da cui

$$\text{cond}_\infty(M) = \|M\|_\infty \|M^{-1}\|_\infty = 1.$$

BISEZIONE

2c) Approssimare il numero reale $\alpha = \sqrt[3]{10}$ significa approssimare numericamente la radice α dell'equazione non lineare

$$f(x) = x^3 - 10 = 0.$$

Tale radice è unica poichè la funzione f è continua e strettamente crescente in \mathbb{R} .

Il metodo di bisezione si basa sul *Teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue* ossia sull'individuazione di un intervallo iniziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$.

Un buon intervallo di innescio del metodo è per esempio $[a^{(0)}, b^{(0)}] = [2, 3]$ poichè $f(2) = 2^3 - 10 = -2 < 0$ e $f(3) = 27 - 10 = 17 > 0$:

1° passo

$$[a^{(0)}, b^{(0)}] = [2, 3] \quad x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2} = 2.5 \quad f(2.5) = 5.625 > 0$$

2° passo

$$[a^{(1)}, b^{(1)}] = [2, 2.5] \quad x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2} = 2.25 \quad f(2.25) = 1.390625 > 0$$

3° passo

$$[a^{(2)}, b^{(2)}] = [2, 2.25] \quad x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2} = 2.125 \quad f(2.125) = -0.404296875 < 0$$

Definita una norma vettoriale e una conseguente norma matriciale

2b) Definita una norma vettoriale e una conseguente norma matriciale $\|\cdot\|$, il numero di condizionamento associato alla matrice A del sistema lineare definito al punto 2a) è definito come:

$$\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$$

con A^{-1} matrice inversa di A .

$$\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$$

con $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice identità.

MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE

3f) Data una matrice triangolare inferiore $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, l'algoritmo di sostituzione in avanti per la risoluzione del sistema lineare $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ L_{n-1,1} & L_{n-1,2} & \cdots & L_{n-1,n-1} & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn-1} & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

è:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j\right)}{L_{ii}} \end{cases} \quad i = 2, \dots, n$$

MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

3a) Data una matrice triangolare superiore $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, l'algoritmo di sostituzione all'indietro per la risoluzione del sistema lineare $Ux = b$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

è:

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{u_{nn}} \\ x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j\right)}{u_{ii}} \end{cases} \quad i = n-1, \dots, 1$$

JACOBI

La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ viene riscritta come somma di due matrici $D, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, in cui D è costituita solo dagli elementi diagonali di A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = D + C$$
$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & 0 & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$b = Ax = (D + C)x \rightarrow Dx = -Cx + b$$

L'algoritmo prevede di assegnare un vettore iniziale $x^{(0)}$ e calcolare una successione di vettori x^k con $k = 1, 2, \dots$ convergente alla soluzione esatta x :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = -D^{-1}Cx^{(k)} + D^{-1}b \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

La matrice di iterazione di Jacobi è $-D^{-1}C$.

SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO

3b) Il costo computazione dell'algoritmo di sostituzione all'indietro è pari ad $O(n^2)$ operazioni macchina infatti:

- ad ogni iterazione è prevista una divisione, per un totale di n divisioni
- alla iterata i -esima, per $i = n - 1, \dots, 1$, sono previste $n - i$ moltiplicazioni, per un totale di $\frac{(n-1)n}{2}$ moltiplicazioni
- alla iterata i -esima, per $i = n - 1, \dots, 1$, sono previste $n - i$ somme algebriche, per un totale di $\frac{(n-1)n}{2}$ somme algebriche.

GAUSS-SEIDEL

2b) Il metodo di Gauss-Seidel si basa sullo splitting della matrice A nella somma di tre matrici $A = D + E + F$ tali che

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algoritmo si può rappresentare nella seguente forma matriciale:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = B_{GS}x^{(k)} + q_{GS} \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

con $B_{GS} = -(E + D)^{-1}F$ e $q_{GS} = (E + D)^{-1}b$.

DICESI RADICE SEMPLICE RADICE DI ORDINE

2a) Data $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funzione non lineare tale che $f \in \mathcal{C}^m(a, b)$ con $m \in \mathbb{N}^+$, α dicesi *radice semplice* se $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$.

Se $f^{(m-1)}(\alpha) = \dots = f'(\alpha) = f(\alpha) = 0$ e $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$ allora α è detta *radice di ordine m* . In tal caso $f(x) = (x - \alpha)^m h(x)$ con $h(\alpha) \neq 0$.