

$$\begin{cases} \underline{x}_0 \text{ assegnato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = B \underline{x}^{(k)} + \underline{q} \end{cases} \quad k=0,1,\dots$$

Oss: un metodo iterativo lineare sarà consistente se e solo se

$$\underline{q} = (Id - B) \cdot A^{-1} \underline{b}$$

Ricordando che voglio risolvere il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$

Dim:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= B \underline{x} + \underline{q} & \underline{x} \text{ soluzione } A\underline{x} &= \underline{b} \\ \parallel & & \parallel & \\ \underline{x}^{(k+1)} &= \underline{x}^{(k)} & \text{se } \underline{x} \text{ è soluzione del sis. lineare, allora } \underline{x} &= A^{-1} \underline{b} \end{aligned}$$

Applico l'algoritmo iterativo per la ricerca della soluzione

$$\underline{x} = A^{-1} \underline{b} = B A^{-1} \underline{b} + \underline{q} \iff \underline{q} = (Id - B) A^{-1} \underline{b}$$

Se noi cerchiamo un algoritmo iterativo fatto in questo modo, ad ogni passo, qual è il costo computazionale di questo algoritmo per ogni k ? È quel prodotto matrice-vettore $B \underline{x}$

Oss: ad ogni passo, il costo computazionale dell'algoritmo iterativo è pari al prodotto matrice B per vettore $\underline{x}^{(k)}$. Quand'è il costo computazionale del prodotto matrice-vettore (=prodotto riga-colonna)?

$O(n^2)$

Quant'è il costo computazionale della risoluzione con l'algoritmo dell'eliminazione di Gauss di un sistema lineare? $O(\frac{n^3}{2})$

Quindi, quando è vantaggioso usare il metodo iterativo piuttosto che il metodo di eliminazione di Gauss?

Un metodo iterativo diventa vantaggioso rispetto ad un metodo diretto, se per raggiungere la precisione richiesta ϵ , $\|\underline{x}^{(\tilde{n})} - \underline{x}\| < \epsilon$, eseguo un numero \tilde{n} di passi inferiore a n dimensione della matrice.

Di norma, più le matrici sono grandi e più diventa conveniente provare un metodo iterativo piuttosto di uno diretto.

Ma, dato un metodo iterativo, sono sempre certa che questo metodo converga alla soluzione?

Teorema: La successione dei vettori $\{\underline{x}^{(k)}\}$ converge alla soluzione \underline{x} del sistema se e solo se $\rho(B) < 1$

raggio spettrale

Def: $\rho(B) := \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ autovalori di B

Dim: $\underline{x} = B \underline{x} + \underline{q}$ $\underline{x}^{(k+1)} = B \underline{x}^{(k)} + \underline{q}$

$$\begin{aligned} \underline{x} - \underline{x}^{(k+1)} &= B (\underline{x} - \underline{x}^{(k)}) \\ \text{Errore al passo } k+1 &= \underline{e}^{(k+1)} & \text{Errore al passo } k &= \underline{e}^{(k)} \end{aligned}$$

$$\underline{e}^{(k+1)} = B \underline{e}^{(k)} = B^2 \underline{e}^{(k-1)} = B^3 \underline{e}^{(k-2)} = B^4 \underline{e}^{(k-3)} = \dots = B^{k+1} \underline{e}^{(0)}$$

$\underline{x} - \underline{x}^{(0)}$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{e}^{(k)} = 0 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} B^k \underline{e}^{(0)} = 0$$

Dato qualsiasi vettore di innesco $x^{(0)}, B^k \cdot e^{(0)}$ tende a 0 se e solo se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^{(k)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(B) < 1$$

Attenzione che questa osservazione la si fa su una matrice di iterazione del metodo e non sulla matrice del sistema lineare di partenza, è chiaro che le proprietà eventualmente della matrice del sistema di partenza influiranno sulla struttura e sulle proprietà della matrice di iterazione del metodo, ma **non** sono la stessa cosa: non stiamo chiedendo che il raggio spettrale della matrice del sistema lineare di partenza sia minore di 1, stiamo chiedendo che la matrice di iterazione del metodo abbia raggio spettrale minore di 1.

Oss: calcolare il raggio spettrale di B è dispendioso.

Qualche altra idea per calcolare il raggio spettrale?

Oss: se $\|B\| < 1$ allora $\rho(B) < 1$ **CONDIZIONE SUFFICIENTE**

$$\|Bx\| = \|Ax\| \quad x \text{ autovettore associato ad autovalore } \lambda$$

autovalore di B autovettore associato all'autovalore B

ma questo, per la proprietà della norma

$$\|\lambda x\| = \|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

Quindi se x non è autovettore nullo

$$|\lambda| \leq \|B\| < 1$$

Oss: condizione necessaria affinché $\rho(B) < 1$ è che il $\det(B) < 1$

Come posso sfruttare queste condizioni?

Se ci accorgiamo che il $\det(B)$ è maggiore di 1, non ci proviamo neanche ad implementare il metodo perchè sicuramente il raggio spettrale non sarà minore di 1.

Se il $\det(B)$ è minore di 1, non ci basta come sola condizione, dobbiamo verificare che la norma di B sia minore di 1 e questo ci garantisce che il raggio spettrale sia minore di 1.

COSTRUZIONE DI METODI ITERATIVI LINEARI

Teoria a parte, come si costruiscono i metodi iterativi?

Considereremo metodi iterativi che si basano sulla tecnica di splitting

Avendo il nostro sistema lineare, spezzo a come somma di due matrici:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \downarrow \\ A &= P - N \\ (P - N)x &= b \\ Px - Nx &= b \\ Px &= Nx + b \\ x^{(k+1)} &= P^{-1} \cdot Nx + P^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

L'ostacolo che incontro qui è che io devo trovare l'inversa della matrice P e questa cosa mi costa. E se già solo questo mi verrebbe a costare $\frac{n^3}{3}$, il mio algoritmo avrebbe già perso il vantaggio in credito computazionale rispetto agli altri metodi.

Quindi P dovrà essere una matrice che si inverte con un costo sicuramente minore di $\frac{n^3}{3}$

Un esempio di matrice P che si inverte velocemente è la matrice diagonale.

Quindi scelgo P tale che la costruzione dell'inversa abbia un ridotto costo computazionale (e ovviamente anche invertibile [altrimenti non posso fare l'inversa])

METODO DI JACOBI

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrice diagonale che estraiamo da A

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ii} \neq 0$$

Per essere invertibile, è necessario che tutti gli elementi della diagonale siano diversi da zero. Può capitare che il $\det(A)$ sia diverso da zero, ma sulla sua diagonale principale sono presenti degli 0, in questo caso è necessario scambiare delle righe o colonne, così da non avere più alcuno 0 in diagonale principale.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $A = D + C$

Come è fatto il nostro metodo iterativo?

$$\begin{cases} \underline{x}^0 \text{ assegnato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = D^{-1} \cdot C \underline{x}^{(k)} + D^{-1} \underline{b} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad \text{fino a quando sarà necessario iterare per ottenere la correttezza richiesta.}$$

Noi abbiamo parlato di metodi iterativi lineari, nel senso che B è la nostra matrice di iterazione del metodo: in questo caso

$$B_J = -D^{-1} \cdot C$$

Ed è su questa che dobbiamo chiederci: ha raggio spettrale minore di 1? Ha determinante minor di 1? Ha norma minore di 1?

Mentre $\underline{q}_J = D^{-1} \cdot \underline{b}$ è il vettore dei termini noti del metodo di Jacobi

Come è fatta l'inversa di una matrice diagonale? È sempre una matrice diagonale che ha come elementi, gli elementi inversi

$$B_J = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Adesso che sappiamo come è fatta B, possiamo esplicitare il prodotto riga-colonna

$$\begin{cases} \underline{x}^0 \text{ assegnato} \\ x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k)} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots$$

Scritto meglio: il termine della sommatoria ha qualcosa che non dipende da j, quindi a livello computazionale lo ripeto inutilmente n volte

$$\begin{cases} \underline{x}^0 \text{ assegnato} \\ x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left\{ \sum_{j=1}^n [a_{ij} x_j^{(k)}] - b_i \right\} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ k = 0, 1, \dots \end{matrix}$$

Oss: Quello che si osserva è che per calcolare ogni x al passo $k+1$, si ha bisogno solo del vettore al passo k , non si ha bisogno di qualcosa d'altro al passo $k+1$, quindi questo metodo è fortemente parallelizzabile.

Abbiamo detto che le proprietà di convergenza dobbiamo verificarle sulla matrice di iterazione del metodo (= sulla B di Jacobi), c'è però un teorema che ci assicura la convergenza del metodo di Jacobi partendo dalla matrice del sistema lineare

TEOREMA: se la matrice A è diagonal dominante stretta allora il metodo di Jacobi converge.

Def: Diagonal stretta dominante = l'elemento della diagonale è maggiore della somma dei valori assoluti di tutti i valori presenti nella stessa riga

Per righe:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i=1, \dots, n$$

Per colonne:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \quad i=1, \dots, n$$

METODO DI GAUSS SEIDEL

$A = D + E + F$ (somma di 3 matrici)

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{33} \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \underline{x} = \underline{b} \quad (E + D + F) \underline{x} = \underline{b}$$

$$(E + D) \underline{x} = -F \underline{x} + \underline{b}$$

$$\begin{cases} \underline{x}^0 \text{ assegnato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = - (E + D)^{-1} \cdot F \underline{x} + (E + D)^{-1} \cdot \underline{b} \end{cases} \quad k=0, 1, \dots$$

B_{GS} $-G_{GS}$

Scriviamo il metodo per componenti partendo dal metodo di Jacobi (metodo fortemente parallelo)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = - \frac{1}{a_{11}} (b_1 + a_{12} x_2^{(k)} + a_{13} x_3^{(k)} + a_{14} x_4^{(k)} + \dots + x_{1n} x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = - \frac{1}{a_{22}} (b_2 + a_{21} x_1^{(k)} + a_{23} x_3^{(k)} + a_{24} x_4^{(k)} + \dots + x_{2n} x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = - \frac{1}{a_{33}} (b_3 + a_{31} x_1^{(k)} + a_{32} x_2^{(k)} + a_{34} x_4^{(k)} + \dots + x_{3n} x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = - \frac{1}{a_{nn}} (b_n + a_{n1} x_1^{(k)} + a_{n2} x_2^{(k)} + \dots + a_{nn-1} x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

Questo era il metodo di Jacobi, cosa fa di diverso il metodo di Gauss-Seidel?

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}} (b_1 + a_{12} x_2^{(k)} + a_{13} x_3^{(k)} + a_{14} x_4^{(k)} + \dots + x_{1n} x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}} (b_2 + a_{21} x_1^{(k+1)} + a_{23} x_3^{(k)} + a_{24} x_4^{(k)} + \dots + x_{2n} x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}} (b_3 + a_{31} x_1^{(k+1)} + a_{32} x_2^{(k+1)} + a_{34} x_4^{(k)} + \dots + x_{3n} x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}} (b_n + a_{n1} x_1^{(k+1)} + a_{n2} x_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn-1} x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

Ci perdiamo che l'algoritmo non è più parallelizzabile ma è sequenziale, ma ci guadagniamo che non dobbiamo tener memorizzato tutto il vettore al passo precedente, perchè man mano che aggiorniamo una componente possiamo tenere memorizzato un solo vettore perchè man mano andiamo ad aggiornare le sue componenti

$\underline{x}^{(0)}$ assegnato

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad i=1, \dots, n \quad k=0, 1, \dots$$

Teorema: Se A è una matrice strettamente diagonale dominante allora il metodo di Gauss-Seidel converge.

Oss: un metodo può essere convergente e l'altro no, entrambi i metodi possono convergere, entrambi i metodi possono non convergere. Un metodo può essere più veloce dell'altro.

Es 1: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Es 2: $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

Es 3: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

Es 4: $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

Essendo un metodo iterativo, quando mi dovrei fermare nella successione approssimante?

CRITERIO D'ARRESTO

1) CRITERIO DELL'INCREMENTO:

$$\| \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)} \| < \epsilon$$

2) CRITERIO DEL RESIDUO: $\| A \underline{x}^{(k)} - \underline{b} \| < \epsilon$