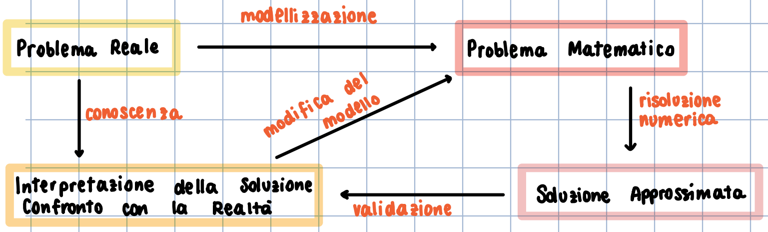
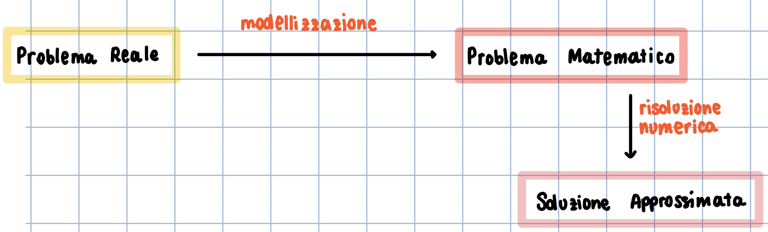
Dal PROBLEMA REALE alla sua RISOLUZIONE NUMERICA: il percorso della Matematica Applicata



FONTI DI ERRORE



MODELLIZZAZIONE	errori di semplificazione della realtà
RISOLUZIONE NUMERICA:	
• discretizzazione	errore analitico
• calcolatore	errore di rappresentazione
• algoritmi	errore algoritmic

es: Calcolatrice del telefono : $\sqrt{2} = 1.4142135623730\,95$

elevo alla ^{2}, tolgo 2.

Calcolo numerico e Analisi matematica:

- l'arte di dare una risposta numerica ad un problema matematico mediante un calcolatore automatico digitale;
- Obiettivo: sviluppare la capacità di individuare l'algoritmo che risolve un problema nel minimo tempo possibile e con la massima accuratezza.

IL TEMPO È DENARO…

= come risolvere un problema in tempo reale

Spesso, una volta che si è ottenuto un modello di rappresentazione della realtà, di fatto "risolverlo numericamente" significa essere in grado di tradurlo in un sistema lineare

es: Risoluzione di un sistema lineare

$Ax = b \quad \det(A) \neq 0 \quad \rightarrow \exists! \, x$

Algebra lineare:
- sostituzione
- Cramer

Calcolo numerico:
- Gauss
- metodi diretti
- metodi iterativi
- …

IPOTESI: una moltiplicazione eseguita in $7.2 \cdot 10^{-6}$ sec

n° incognite	Cramer	Gauss
12	104 minuti	$7.2 \cdot 10^{-4}$ sec
13	24 ore	$9.0 \cdot 10^{-4}$ sec
14	15 giorni	$1.1 \cdot 10^{-3}$ sec
20	10^{6} anni	$3.1 \cdot 10^{-3}$ sec
30	10^{20} anni	$9.9 \cdot 10^{-3}$ sec
50	10^{52} anni	$4.4 \cdot 10^{-2}$ sec

RADICI DI EQUAZIONI

Cos'è una radice/ zero?

Data una determinata equazione, la radice o zero è il valore per cui l'equazione è soddisfatta

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI:

$f \in C^0([a,b])$, $\quad f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \longrightarrow \quad \exists x \in (a,b) : f(x) = 0$

continua nell'intervallo a, b

che agli estremi ha due segni diversi

radice

ENUNCIATO: è un risultato relativo alle funzioni continue il quale, sotto opportune e ipotesi, stabilisce l'esistenza di almeno uno zero della funzione su un dato intervallo, ossia l'esistenza di almeno un punto in cui la funzione si annulla.
Importante per le funzioni continue su un intervallo reale chiuso e limitato, che garantisce l'esistenza di almeno uno zero di una data funzione $y = f(x)$, cioè di un punto x_0 interno all' intervallo in cui risulta $f(x_0) = 0$.

ESEMPIO: supponiamo che una reazione chimica origini ad un certo istante t una concentrazione di un particolare ione data dalla legge

$$c(t) = 7e^{-5t} + 3e^{-2t}$$

All'istante iniziale la concentrazione sarà $c(0) = 10$.
Ci chiediamo a quale istante t la concentrazione sarà dimezzata, ossia $c(t^*) = 5$.
SOLUZIONE: non abbiamo gli strumenti adatti

ESEMPIO: $x^2 = 2$ ha due soluzioni $x_1 = +\sqrt{2}$
$x_2 = -\sqrt{2}$

Vediamo come possiamo calcolare noi un'approssimazione di $\sqrt{2}$

METODO DI BISEZIONE:

Definiamo: $f(x) = x^2 - 2$ $\qquad 1 < \sqrt{2} < 2$

$f(1) = -1 \qquad f(2) = 2$

Dal teorema di esistenza degli zeri, esiste

$x_* \in (1, 2) : f(x) = x_*^2 - 2 = 0$ PERCHÈ? $\quad f(1) = -1$, $f(2) = 2$ hanno segni opposti

1. Sicuri dell'esistenza di una radice, dimeziamo l'intervallo: calcoliamo il punto medio dell'intervallo di partenza

$x_0 = 1 \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) = 1.5$

$f(x_2) = 1.5^2 - 2 = 0.25$

essendo positivo, andrò a scegliere l'estremo negativo, così da rispettare il teorema dello zero

2. $[x_0, x_2] = [1, 1.5]$

Ricalcolo il punto medio del nuovo intervallo

$x_3 = \frac{1}{2}(x_0 + x_2) = 1.25 \qquad f(x_3) = 1.25^2 - 2 = -0.4375$

3. $[x_3, x_2] = [1.25, 1.5]$

$x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + x_2) = 1.375 \qquad f(x_4) = 1.375^2 - 2 = -0.109375 \simeq -0.109$

4. $[x_4, x_2] = [1.375, 1.5]$

$x_5 = \frac{1}{2}(x_4 + x_2) = 1.4375 \qquad f(x_5) = 0.06640625 \simeq 0.0664$

5. $[x_4, x_5] = [1.375, 1.4375]$

$x_6 = \frac{1}{2}(x_4 + x_5) = 1.40625 \qquad f(x_6) = -0.0224609375$

6. $[x_6, x_5] = [1.40625, 1.4375]$

$x_7 = \frac{1}{2}(x_6 + x_5) = 1.421875 \qquad f(x_7) = 0.021728515625$

7. $[x_6, x_7] = [1.40625, 1.421875]$

$x_8 = \frac{1}{2}(x_6 + x_7) = 1.4140625$ $\qquad f(x_8) = -0.00042724609375$

8. $[x_8, x_7] = [1.4140625, 1.421875]$

METODI ITERATIVI

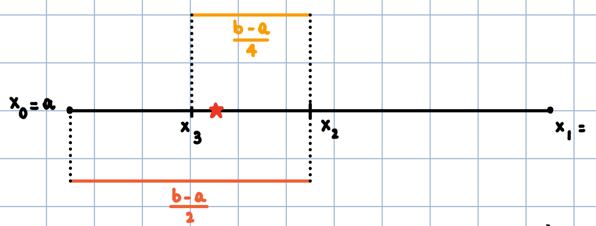
L'idea alla base dei metodi numerici per la determinazione di zeri di funzioni è il concetto di iterazione. In pratica si produce una sequenza di valore i numerici

$$x_1, x_2, \dots, x_i \quad \dots \quad i \to +\infty$$

Che sotto opportune ipotesi risulta convergere alla radice x_* cercata.

Tipicamente i principali problemi che si devono affrontare sono:

- come iniziare l'iterazione
- Se e con quale velocità l'iterazione converge
- Quando terminare l'iterazione (che è collegato alla precisione che mi serve)



La condizione di arresto $f(x_k) = 0$ può non risultare mai verificata

Un possibile criterio di arresto si ottiene arrestando l'iterazione quando l'ampiezza dell'intervallo scende al di sotto di una certa soglia:

$$|x_k - x_*| < \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$$

Con ε > 0 tolleranza prefissata.

Posso anche stimare quanti passi mi servono. Quando tutta la disuguaglianza precedente è verificata?

Dalla precedente disuguaglianza otteniamo che il numero di iterazioni *k* necessarie al fine di ottenere un errore assoluto sulla soluzione inferiore ad ε soddisfa la relazione:

$$k > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{\log(b-a) - \log \varepsilon}{\log 2}$$