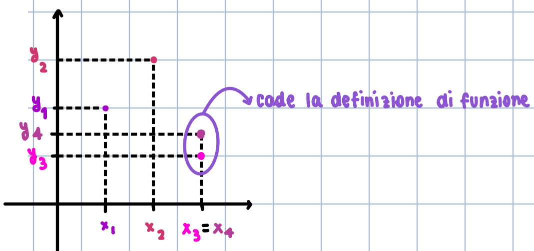
Supponiamo di avere un insieme di punti di coordinate (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$
Cosa possono essere questo insieme di coordinate? Un set qualsiasi, anche un set di misurazioni [il giorno x1 la temperatura alle ore 12 era di 12 gradi, il giorno x2 era di 15 gradi]. Questo insieme va interpretato nel modo più ampio possibile.
Altra ipotesi perchè noi vogliamo, in qualche modo, correlare questo insieme di dati ad una funzione e per definizione una funzione è un'applicazione ovunque definita e funzionale.
Funzionale significa in qualche modo:

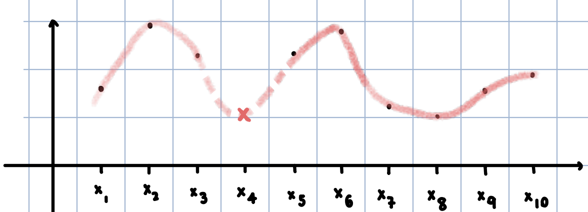
(x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$ t.c. $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$



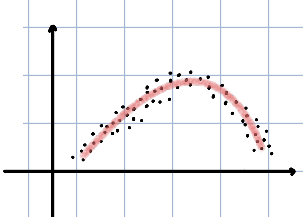
Dato questo insieme di dati, a che cosa potremmo essere interessati?
Potemmo essere interessati a sapere cosa accade dove non abbiamo misurato.
Supponiamo che in un determinato giorno, il nostro apparecchio di misura si sia scaricato, non abbia rilevato la temperatura:

Ci piacerebbe sapere la temperatura il giorno 3, giorno in cui l'apparecchio era scarico. Come si può fare?

Oppure può succedere che:

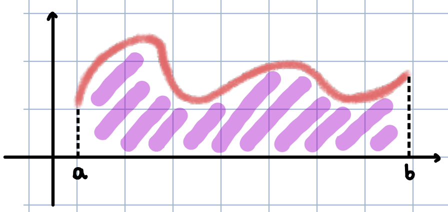


L'approccio più semplice è determinare l'equazione della retta che collega due punti adiacenti e per trovare un valore corrispondente all'ascissa di cui manca il valore di ordinata.
Quando però i dati mostrano una notevole curvatura, l'errore che si commette con questo metodo potrebbe essere significativo.
Oss: Non sempre però i dati potrebbero presentarsi come appena visto, ma potrebbero essere molto numerosi e quello che ci interessa, non è sapere cosa succede in mezzo a due rilevazioni, ma dare un andamento qualitativo del fenomeno



Un altro motivo per cui questo argomento ci può tornare utile:

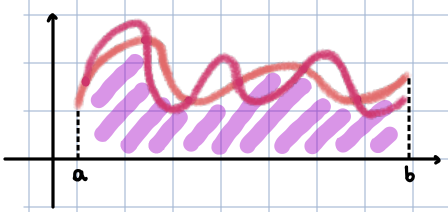
Oss: Supponiamo questa volta di conoscere la funzione associata al valore di ordinata $y_i = f(x_i)$ però noi non siamo interessati solo alla funzione, ma a delle quantità correlate a questa funzione, per esempio



Avendo questa funzione, vogliamo conoscere l'area sotto questa funzione

Dipende com'è e fatta questa funzione, noi conosciamo qualche primitiva, supponiamo di fare l'integrale definito di questa funzione :

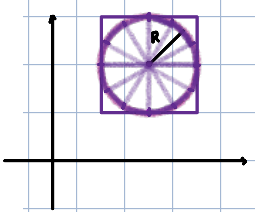
- se conosciamo la primitiva locale agli estremi;
- Altrimenti, dobbiamo pensare ad una strategia per riuscire ad approssimare quest'area, allora anziché usare la funzione che conosciamo, potrebbe essere opportuno usare una funzione non proprio uguale che tuttavia in quei nodi restituisce gli stessi valori



$y_i = f(x_i)$

$y_i = \tilde{f}(x_i)$

Ovviamente l'area non è proprio uguale a quella precedente, a volte in difetto a volte in eccesso, ma magari se di questa funzione conoscessi la primitiva, mi potrebbe convenire approssimare l'area attraverso questa.
Questa è un po' l'idea che sta alla base dal calcolo dell'area del cerchio
Qual è l'area del cerchio?



METODO di ESAUSTIONE

In generale, se ho una funzione mi viene voglia di approssimarla con rette (che possiamo vedere come polinomi di grado 1 o anche 0), primitive di polinomio di ogni grado, trigonometriche, esponenziali…

PROBLEMA DI INTERPOPOLAZIONE POLINOMIALE

Ripartiamo ridefinendo il problema

$(x_i, y_i) \qquad i = 0, \dots, n$ per comodità lo facciamo partire da 0 $\qquad x_i \neq x_j \quad$ se $i \neq j$

$\downarrow$ n+1 punti

Il problema che si pone è: trovare un polinomio $p(x)$ di grado opportuno tale per cui

$p(x_i) = y_i \qquad i = 0, \dots, n$

[che $p(x_i)$ sia INTERPOLANTE= la funzione che rappresenta i nostri dati, passi per quei punti che sono stati misurati]
Supponiamo che il nostro polinomio sia di grado m:

$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$

Quanti coefficienti ha un polinomio di grado m? $m+1$

$$\begin{cases} y_0 = p(x_0) = a_m x_0^m + a_{m-1} x_0^{m-1} + a_{m-2} x_0^{m-2} + \dots + a_1 x_0^1 + a_0 \\ y_1 = p(x_1) = a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + a_{m-2} x_1^{m-2} + \dots + a_1 x_1^1 + a_0 \\ y_2 = p(x_2) = a_m x_2^m + a_{m-1} x_2^{m-1} + a_{m-2} x_2^{m-2} + \dots + a_1 x_2^1 + a_0 \\ \vdots \\ y_n = p(x_n) = a_m x_n^m + a_{m+1} x_n^{m-1} + a_{m-2} x_n^{m-2} + \dots + a_1 x_n^1 + a_0 \end{cases}$$

FORMA MATRICIALE

$$\text{n+1 righe} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{m-1} & x_2^m \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^m \end{pmatrix}}_{\text{m+1 colonne}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ora qua si apre la questione: ha soluzioni? Se si, quante?
Noi vorremmo che ci fosse una sola soluzione, quindi che condizioni dobbiamo porre?

- Matrice quadrata
- Determinante $\neq 0$

Prop: Dati n+1 nodi distinti $x_0 \dots x_n$ e n +1 valori corrispondenti $y_0 \dots y_n$ (con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$), allora esiste un unico polinomio di grado al più n tale che sia interpolante, ossia:

$$p(x_i) = y_i \qquad i = 0, \dots, n$$

Una volta stabilito che m deve essere proprio uguale a n per potere avere una ed un'unica soluzione, come potremmo fare per trovare questo polinomio?
Abbiamo un sistema lineare, va risolto.
Potremmo usare uno dei algoritmi che conosciamo per risolverla, ma questa è una matrice particolare: matrice di Vandermonde
Es:

x_i	300	400	500
y_i	0.616	0.525	0.457

$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

valori delle ascisse al quadrato

$$\begin{pmatrix} 1 & 300 & 90\,000 \\ 1 & 400 & 160\,000 \\ 1 & 500 & 250000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.616 \\ 0.525 \\ 0.457 \end{pmatrix}$$

$cond(V) \simeq 5.893 \cdot 10^6$

Invertire un sistema lineare con matrice di Vandermonde NON è una buona scelta, sarebbero un algoritmo matematicamente corretto però numericamente inappropriato per risolvere questo problema.
Un metodo alternativo per trovare un polinomio che interpola questi punti è usare l'interpolazione lagrangiana, i cosiddetti polinomi di Lagrange

METODO ALTERNATIVO per trovare il polinomio p(x)

Bisogna definire i polinomi fondamentali di Lagrange

$\mathcal{L}_i(x)$ POLINOMI FONDAMENTALI di LAGRANGE

Li costruiamo noi, con le proprietà che desideriamo noi e vogliamo alla fine ottenere che

$$p(x) \overset{*}{=} \sum_{i=0}^{n} \underset{\text{ordinate}}{y_i}\, \mathcal{L}_i(x) = y_0 \mathcal{L}_0(x) + y_1 \mathcal{L}_1(x) + y_2 \mathcal{L}_2(x) + \dots + y_{n-1}\mathcal{L}_{n-1}(x) + y_n \mathcal{L}_n(x)$$

Vogliamo che questo polinomio sia interpolante, cosa vogliamo che succeda?

$p(x_k) = y_k \qquad k=0,\dots,n$ CONDIZIONI di interpolazione

$$y_k = p(x_k) = y_0 \mathcal{L}_0(x_k) + y_1 \mathcal{L}_1(x_k) + \dots + y_{n-1}\mathcal{L}_{n-1}(x_k) + y_n \mathcal{L}_n(x_k)$$

Se vogliamo che rimanga solo y_k , cosa devono fare gli L?

Prendiamo una valore per k, k= 0:

$$y_0 = p(x_0) = y_0 \underbrace{\mathcal{L}_0(x_0)}_{\text{vorremmo che fosse 1}} + y_1 \underbrace{\mathcal{L}_1(x_0) + y_2 \mathcal{L}_2(x_0) + \dots + y_n \mathcal{L}_n(x_0)}_{\text{che fosse 0}}$$

Alla fine voglio che questa somma dia y_0

Da qui notiamo la prima proprietà che vogliamo dei polinomi fondamentali di Lagrange.

PROPRIETÀ POLINOMI FONDAMENTALI di LAGRANGE

$$\mathcal{L}_i(x_k) = \left.\begin{cases} 1 & \text{se } i=k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}\right] = \delta_{ik} \quad \text{DELTA di Kronecker}$$

Questa condizione ci garantisce che quel polinomio* è interpolante, non che sia unico.

Def: Polinomi fondamentali di Lagrange $\quad \mathcal{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i=0,\dots,n$ sono di grado n

PRODUTTORIA

Es: $$\mathcal{L}_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n} \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \cdot \dots \cdot \frac{x-x_n}{x_0-x_n}$$

ho una moltiplicazione di n elementi di grado 1

$$\mathcal{L}_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{n} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \dots \cdot \frac{x-x_n}{x_1-x_n}$$

Vediamo se questi polinomi verificano il delta di Kronecker:

Es: $$\mathcal{L}_0(x_0) = \underset{1}{\frac{x_0-x_1}{x_0-x_1}} \cdot \underset{1}{\frac{x_0-x_2}{x_0-x_2}} \cdot \dots \cdot \underset{1}{\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n}} = 1$$

$$\mathcal{L}_0(x_1) = \underset{0}{\frac{x_1-x_1}{x_0-x_1}} \cdot \underset{\dots}{\frac{x_1-x_2}{x_0-x_2}} \cdot \dots \cdot \underset{\dots}{\frac{x_1-x_n}{x_0-x_n}} = 0$$

$$\mathcal{L}_0(x_k) = 0 \qquad k \neq 0$$

Si può esprimere un polinomio intepolatore su n+1 punti come sommatoria dei valori dei nodi per polinomi di Lagrange.

Questi polinomi di Lagrange sono polinomi di grado n che soddisfano la proprietà del delta di Kronecker.

Ci potremmo chiedere, ma esiste un altro polinomio che…? La risposta è no, perché il teorema afferma che il polinomio è unico.

Facciamo un esempio un numerico:

Prendiamo questo insieme di punti

$(x_0, y_0) = (3, 9) \qquad (x_1, y_1) = (7, 49) \qquad (x_2, y_2) = (11, 121)$

Cerchiamo il polinomio interpolatore associato a questi 3 punti.

Il polinomio sarà di grado 2, perché ha 3 coefficienti.

$p(x) = a x^2 + bx + c$

non usiamo la tecnica della ricostruzione del sistema lineare con la matrice di Vandermonde, perchè abbiamo visto che è una tecnica che non porta a risultato soddisfacenti.

Usiamo la tecnica dei polinomi fondamentali di Lagrange

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \mathcal{L}_i(x) = y_0 \mathcal{L}_0(x) + y_1 \mathcal{L}_1(x) + y_2 \mathcal{L}_2(x) =$$
$$= 9 \mathcal{L}_0(x) + 49 \mathcal{L}_1(x) + 121 \mathcal{L}_2(x)$$

$$\mathcal{L}_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x-7}{-4} \cdot \frac{x-11}{\underset{\downarrow\,-8}{-7}} = \frac{(x-7)(x-11)}{\underset{\downarrow\,32\,\dots}{28}}$$

!! c'è un errore di calcolo ma non ho voglia di calcolarmi tutto

$$\mathcal{L}_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x-3}{4} \cdot \frac{x-11}{-4} = -\frac{(x-3)(x-11)}{16}$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x-3}{8} \cdot \frac{x-7}{4} = \frac{(x-3)(x-7)}{32}$$

$$= 9 \cdot \frac{(x-7)(x-11)}{28} + 49 \cdot \left(- \frac{(x-3)(x-11)}{16}\right) + 121 \cdot \frac{(x-3)(x-7)}{32} =$$
$$= 9 \cdot \frac{x^2 - 18x + 77}{28} - 49 \frac{x^2 - 14x + 33}{16} + 121 \cdot \frac{x^2 - 10x + 21}{32} =$$
$$= \frac{9x^2 - 162x + 693}{28} + \frac{-49x^2 + 686x - 1617}{16} + \frac{121x^2 - 1210x + 2541}{32} =$$

$$= \frac{72x^2 - 1296x + 5544 - 686x^2 + 9604x - 22638 + 847x^2 - 8470x + 17787}{224} =$$

$$= \frac{233x^2 - 162x + 693}{224}$$

il coefficiente di x^2 è 1, il che è giusto

Stima dell'errore:

Abbiamo detto che se questi fossero punti su una determinata funzione, io cerco di interpolarli con un polinomio, so che commetto un errore, che si può cercare di stimare.

TEOREMA: Sia $f(x) \in C^{n+1}(I_x)$ (funzione particolarmente regolare, questa è una funzione derivabile n+1 volte in un intervallo I_x), con I_x il minimo intervallo contente i nodi $x_0 \dots x_n$ e il punto x.

$$E_n(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

$\exists C_x \in I_x$ ma non implica che io sia in grado di ricavarlo

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Oss: Supponiamo di voler stimare l'errore che commetto

$$|E_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(C_x)|}{(n+1)!} \cdot |\omega_{n+1}(x)| \underset{\uparrow}{\leq} \frac{M}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

stimiamo per eccesso

max della derivata $f^{(n+1)}$ esima nell'intervallo I_x

$$\max_{x \in I_x} |f^{(n+1)}(x)|$$

$\leq \frac{M}{(n+1)!} |I_x|^{n+1}$

↳ ampiezza dell' intervallo I_x elevato alla $n+1$: ma potrebbe essere molto elevato

Es: Esempio funzione di Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $x \in (-5, 5)$

Vedremo in Matlab come si comporta l'interpolazione di questa funzione, con nodi equispaziati nell'intervallo (-5, 5)