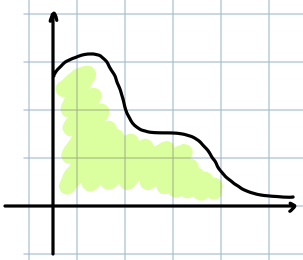
Integrali definiti monodimensionali



$I = \int_a^b f(x)\,dx$

Prendiamo $x_0, \dots, x_n$ $\quad x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ $\quad x_0, \dots, x_n \in [a,b]$

$y_0, \dots, y_n$

$f(x_0) \quad f(x_n)$

$\rightarrow p(x) \in P_n$ = polinomi di grado $\leq n$ $\quad p(x_i) = f(x_i)$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \mathcal{L}_i(x)$$

iesimo polinomio fondamentale di Lagrange $\quad \mathcal{L}_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\mathcal{L}_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b \mathcal{L}_i(x)\,dx}_{\text{PESI della FORMULA di QUADRATURA}}$$

Nodi della quadratura

FORMULA DI QUADRATURA INTERPOLATORIA

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx \cong \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i}_{=:\, Q_n(f)}$$

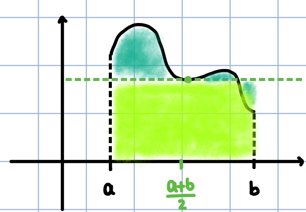
Def: Il grado di esattezza di una formula di quadratura è il massimo intero $r \geqslant 0$ per cui:

$$Q_n[p] = I[p] \qquad \forall p \in P_r$$

FORMULA DEL PUNTO MEDIO o DEL RETTANGOLO

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$= \boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)} =: Q_0[f]$$



Calcoliamo l'errore: se $f \in C^2([a,b])$, sviluppo in serie di Taylor

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta_x)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx + \int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx + \int_a^b \frac{f''(\eta_x)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= Q_0[f] + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left[\frac{x - \frac{a+b}{2}}{2}\right]_a^b + \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$= Q_0[f] + \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{(b-a)^3}{8 \cdot 3} - \frac{(a-b)^3}{8 \cdot 3}\right]^3$$

$$= Q_0[f] + \frac{f''(\xi)}{\cancel{2}}\, \frac{\cancel{2}(b-a)^3}{8 \cdot 3}$$

Teorema del valor medio integrale: se $g(x)$ ha segno costante

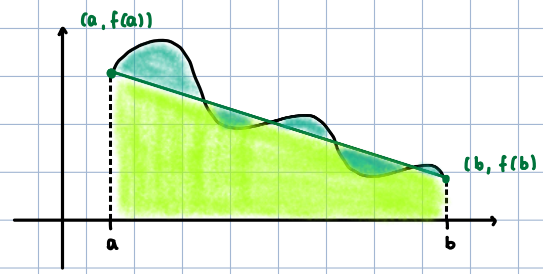
$\exists \xi \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

$$I[f] = Q_0[f] + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \quad \text{RESTO}$$

Oss: la formula del punto medio ha grado di precisione 1 perchè integra esattamente tutti i polinomi di grado $\leqslant 1$ ed esiste almeno un polinomio di grado 2 che non viene integrato esattamente.

FORMULA DEL TRAPEZIO



$$Q_1[f] = [f(a) + f(b)]\,\frac{(b-a)}{2}$$

Calcoliamo l'errore:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\, w_{n+1}(x)$$

$$w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

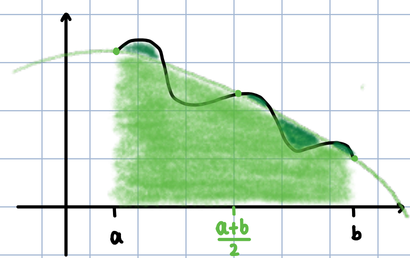
$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx \cong Q_1[f]$$

$$I[f] - Q_1[f] = \int_a^b f(x) - p_1(x)\; dx = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!}\, \underbrace{(x-a)(x-b)}_{w^2(x)\ :\ \text{sempre} \le 0}\; dx = \frac{f''(\bar{\xi})}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\; dx = \boxed{-\frac{f''(\bar{\xi})}{12}\,(b-a)^3}$$

RESTO

Oss: la formula del trapezio ha grado di precisione 1

FORMULA DI CAVALIERI- SIMPSON



$x_0 = a \qquad x_1 = \frac{a+b}{2} \qquad x_2 = b$

$$Q_2[f] = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$I[f] - Q_2[f] = -\frac{h^5}{90}\, f^{(IV)}(\xi) \qquad \boxed{h = \frac{b-a}{2}}$$

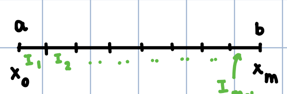
Oss: la formula di Cavalieri-Simpson ha grado di precisione 3.

Oss: Le formule di NEWTON-COTES (nodi equispaziati)
con n pari hanno grado di precisione n+1
con n dispari hanno grado di precisione n

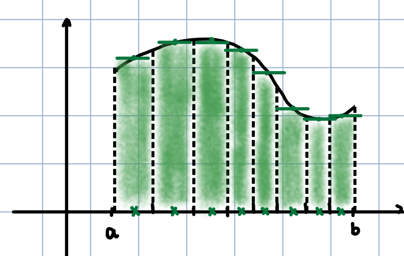
Oss: aumentare il grado del polinomio interpolatore non ci assicura convergenza (es. Runge)
e quindi conviene utilizzare FORMULE COMPOSITE

FORMULA DEL PUNTO MEDIO COMPOSITA

Suddivido l'intervallo [a,b] in m sottointervalli



m+1 nodi



m sottointervalli

$x_i = x_0 + H_i \qquad i = 0, \dots, m \qquad H = \frac{b-a}{m}$

se la griglia è uniforme

ampiezza intervallo

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \cong \sum_{i=0}^{m-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) = H\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

vado ad applicare la formula del punto medio: in ogni sottointervallo prendo il punto medio, ci calcolo la funzione e, su ogni sottointervallo, approssimo con la relativa f.ne costante a tratti

Quindi

$$\boxed{Q_0^c := H \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)}$$ dalla formula del punto medio

Studiamo l'errore:

punto interno all'intervallo

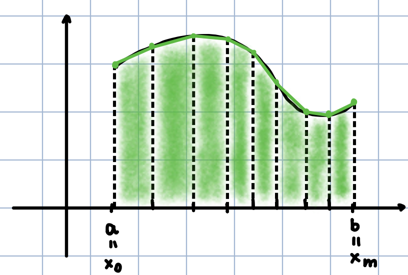
$$= Q_0^c + \sum_{i=0}^{m-1} f''(\beta_i) \left(\frac{H}{2}\right)^3$$

Errore

$$= Q_0^c + \boxed{f''(\eta) \cdot \frac{m}{24} \left(\frac{b-a}{m}\right)^3}$$ H, con m che tende all'infinito $H \to 0$

Usando una formula di inquadratura composita, fissata una tolleranza, si va convergenza.
Così come abbiamo fatto per il punto medio, possiamo fare per il trapezio.

FORMULA DEL TRAPEZIO COMPOSITA



$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \left[\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{H} - f''(\beta_i) \frac{\overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{H}{}^3}{12} \right] =$$

Hp: intervalli uniformi

Errore

$$= \underbrace{\frac{H}{2} \sum_{i=0}^{m-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]}_{Q_1^c :=} - \boxed{\frac{f''(\beta_i)}{12} m \left(\frac{b-a}{m}\right)^3}$$ H, con m che tende all'infinito $H \to 0$

Oss: se fisso una tolleranza ε

$$\boxed{|I - Q_1^c|} < \varepsilon$$

$$\left| \frac{f''(\beta)}{12} \frac{(b-a)^3}{m^2} \right| < \boxed{\overbrace{\max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}^{M}} \frac{(b-a)^3}{12 m^2} < \varepsilon$$

Quanti sottointervalli m mi servono per avere che questo errore sia minore di epsilon?
Stima del n° di sottointervalli:

$$\frac{M (b-a)^3}{12 \varepsilon} < m^2$$

Diciamo ancora qualcosa sulla forma di quadratura composita: se io suppongo che la mia griglia sia uniforme, questa formula di quadratura composita è un po' ridondante.
Ora la ottimizziamo dal punto di vista computazionale:

$$Q_1^c = \frac{H}{2} \sum_{i=0}^{m-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] =$$

$$= \frac{H}{2} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \cdots + f(x_{m-1}) + f(x_m)]$$

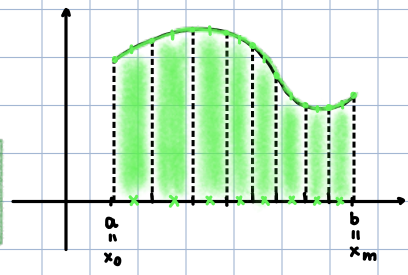
perché calcolare due volte?

$$= \frac{H}{2} [f(x_0) + f(x_m) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i)]$$

FORMULA DI CAVALIERI- SIMPSON COMPOSITA

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx =$$

suddivisione in m sottointervalli di ampiezza uniforme → H



$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{H}{6} \left[f(x_i) + 4 f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_i + 1) \right]\right.}_{Q_2^c} - \underbrace{\left.\frac{H^5}{2.4 \cdot 180} f^{IV}(\beta_i) \right\}}_{\text{Errore}}$$

$$= Q_2^c + \frac{b-a}{180} \left(\frac{H}{2}\right)^4 f^{IV}(\xi)$$

con m che tende all'infinito $H \to 0$

Andiamo a sviluppare la formula del punto medio composita:

$$Q_2^c = \frac{H}{6} \sum_{i=0}^{m-1} \left[f(x_i) + 4 f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_i + 1) \right] =$$

$$= \frac{H}{6} \left[f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f(x_1) + f(x_1) + 4 f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_2) + \cdots + f(x_{m-1}) + 4f\left(\frac{(x_{m-1} + x_m)}{2}\right) + f(x_m) \right]$$

$$= \frac{H}{6} \left[f(x_0) + f(x_m) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f\left(\frac{x_i - x_{i+1}}{2}\right) \right]$$

Oss: matlab ha già delle funzione predisposte: “TRAPZ” e “INTEGRAL”