University Mohammed VI
Polytechnic (UM6P)
College of computing

Année: 2023-2024

TP3: Pénalités extérieures

L'objet de ce TP est de mettre en œuvre la méthode des pénalités, en particulier les pénalités extérieures.
Considérer le problème d'optimisation avec contraintes suivant:

$$\min_{x \in X} f(x)$$

avec $X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 \leq -\frac{1}{2},\ x_2 \leq -\frac{1}{2}\right\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2.$$

1. `Étude théorique -- Optimisation avec contraintes`

   1.a) Quelle est la solution du problème de minimisation de f **sans** les contraintes de X? i.e. trouver la solution de:

   $$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

   1.b) Soit x^* solution du problème de minimisation de f **avec** les contraintes de X, i.e.

   $$x^* \in \operatorname*{argmin}_{x \in X} f(x).$$

   Démontrer que, nécessairement, $\nabla_x f(x^*) = 0$ avec $x^* \in \partial X$ où ∂X désigne la frontière de X.

2. `Étude Numérique -- Implantation dans Scilab`

   Considérer la pénalité extérieure sur l'ensemble X. La fonction pénalisée $\phi(.,\ \rho)$ s'écrit:

   $$\phi(.,\ \rho) :\ x \to \phi(x,\ \rho) = f(x) + \frac{1}{2}\rho P(x).$$

   2.a) Déterminer le gradient $\nabla_x \phi(.,\ \rho)$ de la fonction pénalisée $\phi(.,\ \rho)$.

   2.b) Tracer les courbes de niveau de la nouvelle fonction coût $\phi(.,\ \rho)$ et son gradient $\nabla_x \phi(.,\ \rho)$, pour plusieurs valeurs de ρ. Que constatez-vous quant à la vitesse de variation de la fonction coût $\phi(.,\ \rho)$?

   Dans la suite, on tracera le gradient uniquement sur le domaine admissible X.

   2.c) Pour une valeur grande de ρ, par exemple $\rho = 10^4$, et un point de départ $x^0 = (-0.3, 0.5)^T$, tester la méthode de pénalisation pour la méthode du `gradient à pas optimal`. En visualisant les itérés, peut-on dire que la vitesse de convergence est satisfaisante? Répéter le test pour $\rho = 1$. Que peut-on dire de la convergence? Que peut-on dire de la solution trouvée ?

`Le pseudo-code de la pénalisation extérieure:`

Algorithme 1 : `Algorithme de la pénalité extérieure`

`Pénalité extérieure`

{`Données:` x^0, `et` $\epsilon_1,\ \epsilon_2 > 0$}

{`Données:` c, `et` $\rho_0 > 0$}

$k = 0$

tant que $\big((\rho_k < M) \wedge (\left|P(x^k)\right| > \epsilon_1)\big)$

  {`Résolution du sous problème pénalisé:` $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x,\ \rho_k)$}

  {`Point de départ`}

  $j = 0$

  $x^j \leftarrow x^k$

  tant que $\left(\left\|\nabla\phi(x^j,\ \rho_k\right\| > \epsilon_2\right)$

    $d_j \leftarrow$ `Direction_de_descente`$(x^j,\ \rho_k)$

    $\alpha_j \leftarrow$ `Pas_admissible`$(x^j,\ d_j,\ \rho_k)$

    $x^{j+1} \leftarrow x^j + \alpha_j d_j$

    $j \leftarrow j + 1$

  fin

  $x^{k+1} \leftarrow x^j$

  $\mu_{k+1} \leftarrow c \times \mu_k$

  $k \leftarrow k + 1$

fin

Attention. La valeur de la constante c est fixe, elle sert à augmenter la valeur de μ d'une itération à l'autre dans la grande boucle de l'algorithme de pénalisation. Essayer $c = 10$ ou 2.