Nume[1]:..

Grupa:.............

Păstrez nota de la parţial (DA/NU):.........[2]

Subiecte[3]

I. *Încercuiţi literele corespunzătoare răspunsurilor corecte.*[4]

1. Fie $X = S^1 \times S^1$ şi $Y = \mathbb{R}$ cu topologiile uzuale şi fie $f : X \to Y$ o funcţie continuă. Atunci putem afirma că:
a) $f(X) \subset \mathbb{R}$ este un interval închis şi mărginit.
b) există f ca în enunţ astfel încât $f(X) = [0, 1]$.
c) există f ca în enunţ astfel încât $f(X) \subset (0, 1)$.
d) există funcţii f ca în enunţ pentru care $f(X) = Y$. **(0.5p)**

2. În $\mathbb{R}^2$ cu topologia uzuală considerăm subspaţiul $X = \{(x, 0)|x \in [0, 1]\} \cup \{(0, x)|x \in [0, 1]\} \cup \{(x, x)|x \in [0, 1]\}$ cu topologia indusă. Cu care dintre spaţiile topologice următoare este homeomorf X?
a) $\mathbb{R}$ cu topologia uzuală.
b) cercul unitate S^1 din $\mathbb{R}^2$, cu topologia indusă de cea uzuală pe $\mathbb{R}^2$.
c) $[0, 1]$, cu topologia indusă de cea uzuală pe $\mathbb{R}$.
d) $[0, +\infty)$, cu topologia indusă de cea uzuală pe $\mathbb{R}$. **(0.5p)**

3. Fie $X := \mathbb{R}^2$ cu topologia uzuală şi funcţia $f : X \to X$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$. Atunci
a) f este un homeomorfism.
b) f este continuă dar nu e homeomorfism.
c) f este bijectivă dar nu este homeomorfism.
d) f nu este nici bijectivă şi nici nu este homeomorfism. **(0.5p)**

4. În $\mathbb{R}^3$ cu produsul scalar canonic considerăm sistemul de vectori $\mathcal{S} = \{(1, 0, \alpha), (\beta, 1, -1), (3, 4, \gamma)\}$ unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui α, β, γ sistemul dat este o bază ortonormată:
a) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 2$;
b) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 2$;
c) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 2$;
d) nu există α, β, γ pentru care sistemul să fie o bază ortonormată. **(0.5p)**

5. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, \sqrt{2}x_1 + \sqrt{3}x_2)$. Considerăm $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu produsul scalar canonic. Atunci:
a) f este transformare afină.
b) f este izometrie.
c) f păstrează aria, dar nu este izometrie.
d) f este translaţie. **(0.5p)**

6. În $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiana canonică considerăm dreptele:

$$(d_1) : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}, \quad (d_2) : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Atunci:
a) $d_1 || d_2$;
b) $d_1 \perp d_2$;
c) $d_1 \cap d_2 = \emptyset$;
d) d_1 şi d_2 sunt coplanare. **(0.5p)**

[1]Punctajul de seminar se ia în considerare doar dacă punctajul pe lucrare este mai mare sau egal cu 4.5
[2]Parţialul este luat în considerare doar dacă aţi avut minim nota 7.
[3]Timp de lucru: două ore.
[4]Studenţii care îşi păstrează nota de la parţial nu trebuie să trateze grilele 1,2 3.

II. *Scrieţi rezolvările complete.*[5]

1. Considerăm spaţiile topologice: $A = S^1 \times [0,1]$ şi $B = \mathbb{R} \times [0,1]$ înzestrate cu topologia produs (S^1 desemnează cercul unitate din $\mathbb{R}^2$).

a) Arătaţi că nu există nici o funcţie $f : A \to B$ continuă şi surjectivă. **(1p)**

b) Arătaţi că există o funcţie $f : B \to A$ continuă şi surjectivă. **(1p)**

c) Fie $P, Q \in B$ arbitrare. Arătaţi că există o funcţie continuă $f : A \to B$ astfel încât $P, Q \in Im(f)$ (unde $Im(f)$ desemnează imaginea lui f). **(0.5 p)**

2. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ cu structura canonică fie punctele $A = (0,0,0), B = (1,0,0), C = (0,2,0), D = (1,2,0), A' = (1,1,1)$.

a) Determinţi punctele B', C', D' astfel încât $ABCDA'B'C'D'$ să fie o prismă. **(1p)**

b) Determinaţi măsura unghiului dintre dreapta AC şi planul (ABA'). **(1p)**

c) Determinaţi un punct P aparţinând planului (ABA') pentru care distanţa de la D la P este minimă. **(0.5p)**

3. Daţi exemple de spaţii topologice X şi Y pentru care există funcţii $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ continue şi injective dar X şi Y nu sunt heomeomorfe. **(1p)**

[5] Studenţii care îşi păstrează nota de la parţial nu trebuie să trateze subiectul **1**.