Corpul cuaternionilor

Fie $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \middle| \, u, v \in \mathbb{C} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$.

Atunci $\mathbb{H}$ este subinel al lui $M_2(\mathbb{C})$, deoarece:

- $\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & z \\ -\overline{z} & \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-y & v-z \\ -\overline{(v-z)} & \overline{u-y} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$

- $\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & z \\ -\overline{z} & \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uy - v\overline{z} & uz + v\overline{y} \\ -\overline{v}y - \overline{u}\overline{z} & -\overline{v}z + \overline{u}\overline{y} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} uy - v\overline{z} & uz + v\overline{y} \\ -\overline{(uz + v\overline{y})} & \overline{uy - v\overline{z}} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}.$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ (pt. $u=1, v=0$).

Mai mult, $\mathbb{H}$ este chiar corp, deoarece dacă $A = \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$,

$A \neq 0$, deci nu ambele u și v sunt nule, atunci

$\det(A) = u\overline{u} + v\overline{v} = |u|^2 + |v|^2 \neq 0$, deci A e inversabilă

în $M_2(\mathbb{C})$ și $A^{-1} = \dfrac{1}{|u|^2 + |v|^2} \begin{pmatrix} \overline{u} & -v \\ \overline{v} & u \end{pmatrix}$, care se găsește

în $\mathbb{H}$ (deoarece $\overline{\overline{u}} = u$ și $-\overline{(-v)} = \overline{v}$).

Aplicația $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, $\varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, este morfism de corpuri.

Identificăm $\mathbb{R}$ cu $\varphi(\mathbb{R})$ (adică fiecare a cu $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$).

În plus notăm $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $(\in \mathbb{H})$.

Avem $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$, $\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}$,

$\boldsymbol{k}\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}$.

În plus, fie $u=a+bi$, $v=c+di\in\mathbb{C}$. Atunci

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}$$

$= a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ [obs. că am identificat a cu $\varphi(a)$, b cu $\varphi(b)$, etc.].

Așadar $\mathbb{H}=\{a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k} \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$.

În plus, dacă $a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}=a'+b'\mathbf{i}+c'\mathbf{j}+d'\mathbf{k}$, atunci $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, $d=d'$. Într-adevăr, aceasta rezultă din faptul că

$\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, $\alpha+\beta\mathbf{i}+\gamma\mathbf{j}+\delta\mathbf{k}=0 \overset{\text{calcul}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i\end{pmatrix}=0$,

de unde $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i=0$, deci $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

Așadar $\mathbb{H}$ este corp necomutativ (deoarece $\mathbf{i}\mathbf{j}\neq\mathbf{j}\mathbf{i}$), în care se scufundă $\mathbb{R}$. Observăm că și $\mathbb{C}$ se scufundă în $\mathbb{H}$ prin $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{H}$, $\varphi(u)=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u}\end{pmatrix}$, iar imaginea lui φ este chiar $\{a+b\mathbf{i} \mid a,b\in\mathbb{R}\}$.

$\mathbb{H}$ s.n. corpul cuaternionilor.

<u>Exercițiu</u>. Să se rezolve ecuația $z^2=-1$ în $\mathbb{H}$.