Seminarul 2

Wednesday, February 24, 2021 8:53 AM

Recapitulare - cont.

1.1. Fie R un inel (care nu e neapărat unitar). Atunci

$$M_n(R) \text{ e comutativ} \iff \begin{cases} n=1 \text{ și } R \text{ e comutativ} \\ \text{sau} \\ ab=0, \ \forall a,b \in R \end{cases}$$

Dem „$\Leftarrow$" Evident:

- Dc $n=1$ și R comutativ, $M_n(R) = R$, comutativ
- Dc $ab=0, \forall a,b \in R \Rightarrow AB=BA=O_n, \forall A,B \in M_n(R)$

„$\Rightarrow$"

Pp că $M_n(R)$ comutativ și $n \neq 1$. Vrem $ab=0, \forall a,b \in R$.

Fie $a,b \in R$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & & \\ & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & b \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & ab \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & b \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{Comutativitate}}$ $\underline{ab=0}$

1.2. R inel comutativ. Dem că

$$Z(M_n(R)) = \{ aI_n \mid a \in R \} (\simeq R)$$

$$Z(M_n(R)) = \{aI_n \mid a\in R\} \ (\simeq R)$$

$$\| $$

$$\{A\in M_n(R) \mid AB=BA,\ \forall B\in M_n(R)\}$$

Dem „$\supset$" Fie $a\in R$ și $B\in M_n(R)$.

$\Rightarrow (aI_n)\cdot B = aB.$

$B\cdot(aI_n) = aB.$

$$\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&10\\2&4\end{pmatrix}$$

„$\subset$" Fie $A\in Z(M_n(R))$.

(Fie E_{ij} - matricea cu 1 pe poz (i,j) și 0 în rest.

$E_{ij}\cdot A =$)

$P_{ij}A$ - A în care am interschimbat liniile i și j

$$P_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

$D_i(u)\cdot A$ - A în care am înmulțit linia i cu u.

$$D_i(u) = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & u & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\end{array}.$$

$$D_i(u) = i\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & u & \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă $A \cdot D_i(u)$ – A în care am înmulțit coloana i cu u.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Revenind, $A \in Z(M_n(\mathbb{R})) \Rightarrow D_i(u)\, A = A \cdot D_i(u)$, $\forall i=\overline{1,n}$, $\forall u \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (înmulțirea liniei i cu u $\Leftrightarrow$ înmulțirea coloanei i cu u)

$\Leftrightarrow A =$ matrice diagonală.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$ Vrem $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$

Fie $B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}.$

$$B_n \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & \cdots & & 0 \\ \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} ; \quad A \cdot B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_n.$

În general, $$B_i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_i \cdot A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \\ \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} ; \quad A \cdot B_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \\ \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_i, \quad \forall i = \overline{1,n}} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix}$$

1.3. Fie K, L corpuri comutative. Dem că

$$M_m(K) \simeq M_n(L) \Leftrightarrow K \simeq L \text{ și } m = n.$$

Dem „$\Rightarrow$" $M_m(K) \simeq M_n(L) \Rightarrow \underbrace{Z(M_m(K))}_{\overset{\text{Ex c2}}{\simeq} K} \simeq \underbrace{Z(M_n(L))}_{\overset{\text{Ex c2}}{\simeq} L}$

$\Rightarrow K \simeq L.$

În plus, $\dim_{Z(M_m(K))} M_m(K) \overset{\text{Ex c2, } Z(M_m(K)) \simeq K}{=} m^2$

$\dim_{Z(M_n(L))} M_n(L) = n^2$ $\Bigg\} \Rightarrow m = n.$

$$\dim_{Z(M_n(L))} M_n(L) = n^2 \Big)$$

(Am folosit că o bază pt $M_n(K)$ ca un K-sp. vect. este
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
deci $\dim_K M_n(K) = n^2$).

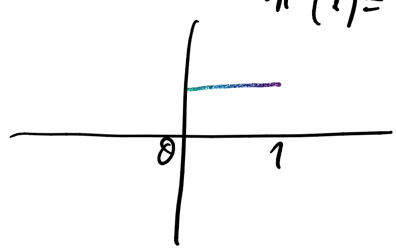
„$\Leftarrow$" Evident.

1.4. Fie $\mathcal{C} = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă} \}$

a) $\mathcal{C}$ este inel cu adunarea și înmulțirea (punctuale):

$$(f+g)(x) \overset{def}{=} f(x) + g(x).$$
$$(f \cdot g)(x) \overset{def}{=} f(x) \cdot g(x).$$

De exemplu: • el. neutru la înmulțire: $\mathbb{1} : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$\mathbb{1}(x) = 1$.



• asociativitate: Fie $f, g, h \in \mathcal{C}$.

• distributivitate: Fie $f, g, h \in \mathcal{C}$.

Vrem $f(g+h) = fg + fh$:

Fie $x \in [0,1]$. $\boxed{\big(f\cdot(g+h)\big)(x)} = f(x)\cdot\big((g+h)(x)\big) =$

$= f(x)\cdot\big(g(x) + h(x)\big) \xlongequal[\mathbb{R}]{\text{are loc în}} f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot h(x) =$

$= (f\cdot g)(x) + (f\cdot h)(x) = \boxed{(f\cdot g + f\cdot h)(x)}.$

b) Dacă $t \in [0,1]$, aplicația $\varphi_t : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{\varphi_t(f) = f(t)}$$

este morfism de inele.

$\varphi_t(\square) = \square(t)$

Dem Vrem: $\varphi_t(f+g) = \varphi_t(f) + \varphi_t(g)$

$\varphi_t(f\cdot g) = \varphi_t(f)\cdot\varphi_t(g)$, $\forall f, g \in \mathcal{C}$

$\varphi_t(\mathbb{1}) = 1$

$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ ✓ din definiție

$(f\cdot g)(t) = f(t)\cdot g(t)$ ✓

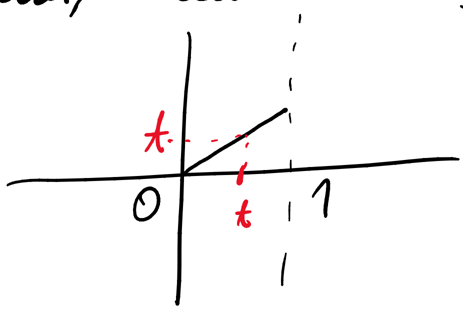
$\mathbb{1}(t) = 1$ ✓

c) **Orice** morfism de inele $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ este de această formă i.e. $\exists t \in [0,1]$ a.î. $\varphi = \varphi_t$.

Fie $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ morfism de inele.

Obs Dacă φ ar fi φ_t pt un anume $t \in [0,1]$, atunci $t = \varphi(id)$, unde $id : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$id(x) = x$.

Într-adevăr, dacă $\varphi = \varphi_t \Rightarrow \varphi(id) = \varphi_t(id) = id(t) = t$.



Notez $id = X$ și fie $t = \varphi(X)$. $\boxed{\text{Vrem } \varphi = \varphi_t.}$

Obs 1. $\varphi(X) = \varphi_t(X) \; (= t)$.

2. Fie $c \in \mathbb{R}$ și fcția $c : [0,1] \to \mathbb{R}$, $c(t) = c$, $\forall t \in [0,1]$.

$$\Rightarrow \varphi(c) = \varphi_t(c)$$

$$\varphi(1) = \varphi_t(1) = 1 \quad | \cdot c$$

$\varphi(c\cdot 1\!\!1) = \varphi_t(c\cdot 1\!\!1) = c$ iar $c\cdot 1\!\!1 = \cancel{c}$.

$1 \Rightarrow 3.\ \varphi(X^2) = \varphi_t(X^2)$ și, în general, $\varphi(X^n) = \varphi_t(X^n)$
$(= t^n)$

$2\ \&\ 3 \Rightarrow \boxed{\varphi(P) = \varphi_t(P),\ \forall P \text{ polinom}}$

II (Weierstrass) Orice fcție continuă $f \in \mathcal{C}$ se aproximează cu polinoame.

i.e. $\exists P_n$ polinoame a.î. $P_n \xrightarrow{u} f$.

$\Leftrightarrow \|P_n - f\| \to 0$, unde $\|g\| = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

Vrem φ, φ_t continue i.e. $P_n \to f \Rightarrow \varphi(P_n) \to \varphi(f)$

$\boxed{(\Leftrightarrow)\ \|P_n - f\| \to 0 \Rightarrow |\varphi(P_n) - \varphi(f)| \to 0.}$

De ce vrem asta:

$$\varphi(P_n) = \varphi_t(P_n), \ \forall P_n \text{ polinom.}$$

$$P_n \to f \qquad \begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(f) & = & \varphi_t(f) \end{array}$$

<u>Temă</u> Dacă $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ este morfism de inele, atunci ϕ e ~~și~~ continuă: $g_n \xrightarrow{u} g$ i.e. $\|g_n - g\| \to 0$

$\Rightarrow \phi(g_n) \to \phi(g)$ i.e. $|\phi(g_n) - \phi(g)| \to 0$

<u>Ideale. Recap</u> Fie R inel $\boxed{\text{comutativ}}$.

$\underline{I} \subset R$ e un <u>ideal</u> dacă

- $(I, +) \leq (R, +)$ (subgrup)
- $ax \in I, \ \forall a \in R, \ x \in I \iff R \cdot I \subseteq I$.

Fie $x \in R$.

$$(x) = \{ax \mid a \in R\}$$

În general, $x_1, \dots, x_n \in R$,

$$(x_1, \dots, x_n) = \{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \mid a_1, \dots, a_n \in R\}.$$

<u>Exemplu</u> $R = \mathbb{Z}$: $n \in \mathbb{Z}$

$$(n) = n\mathbb{Z} = \{an \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{m \in \mathbb{Z} \mid n \mid m\}.$$

$$(m) \subset (n) \iff n \mid m$$

$$(6) \subset (2)$$

$$\{0, 6, -6, 12, -12, \dots\} = (6) \subset (2) = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \dots\}$$

$$(2, 3) = (1) = \mathbb{Z}$$

<u>Fapte despre idealele lui $\mathbb{Z}$</u>

1. <u>Orice</u> ideal al lui $\mathbb{Z}$ este de tipul $n\mathbb{Z} = (n)$ pt un $n \in \mathbb{Z}$.

(Un ideal s.n. <u>principal</u> dacă e generat de un singur element

și R s.n. principal dacă toate idealele sale sunt principale)

Deci $\mathbb{Z}$ inel principal.

<u>Operații cu ideale</u>

R inel comutativ, $I_1, I_2 \trianglelefteq R$. Atunci

$I_1 \cap I_2$

$I_1 + I_2 = \{ x_1 + x_2 \mid x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2 \}$

$I_1 \cdot I_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_1^i x_2^i \;\middle|\; x_1^i \in I_1,\ x_2^i \in I_2,\ n \in \mathbb{N}^* \right\} \Leftarrow$

sunt ideale ale lui R. În plus,

sunt ideale ale lui R. În plus,

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} & & & I_1 & & & \\ I_1\cdot I_2 & \subset & I_1\cap I_2 & \subset \quad \supset & & \subset & I_1+I_2 \\ & & & I_2 & & & \end{array}}$$

$$I_1\cdot I_2 \subset I_1\cap I_2 \subset I_1 \subset I_1+I_2, \qquad I_1\cap I_2 \subset I_2 \subset I_1+I_2$$

Exc 15 a) Demonstrați

- $I_1\cdot I_2 \subset I_1\cap I_2$.

Fie $x\in I_1\cdot I_2 \Rightarrow x = \underbrace{x_1^1\cdot x_2^1}_{} + x_1^2\cdot x_2^2 + \dots + x_1^n\cdot x_2^n \in I_1\cap I_2$

$\in I_1$ pt că $x_1^1\in I_1$

$\in I_2$ pt că $x_2^1\in I_2$

- $I_1\cap I_2 \subset I_1 \subset I_1+I_2$ (de exemplu)

b) Dacă $\boxed{I_1+I_2=R}$ (idealele sunt comaximale), atunci $I_1\cdot I_2 = I_1\cap I_2$.

Dem $\underline{I_1\cap I_2 \subset I_1\cdot I_2}$

$I_1+I_2=R \Rightarrow \exists\, a_1\in I_1,\ a_2\in I_2$ a.î. $a_1+a_2=1$.

Fie $x\in I_1\cap I_2$. $x = x\cdot 1 = x(a_1+a_2) = \underset{I_2}{x}\,\underset{I_1}{a_1} + \underset{I_1}{x}\,\underset{I_2}{a_2} \in I_1\cdot I_2$

Exc $I \trianglelefteq R$. $I = R \Leftrightarrow \exists\, a \in I$, a inversabil.

„$\Leftarrow$" Fie $a \in I$, $a \in U(R)$.

$1 = \underline{a^{-1}} a \in \underline{I} \Rightarrow 1 \in I$

$\underline{b}\, 1 \in \underline{I}$, $\forall b \Rightarrow b \in I, \forall b \in R$.

Recap ideale $\mathbb{Z}$:

$I_1 = (m) = m\mathbb{Z}$, $I_2 = (n) = n\mathbb{Z}$

$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m, n) = (m, n)\mathbb{Z} \leftarrow$

$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}$

$m\mathbb{Z} \cdot n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$

Exc 16 Calculați

$18\mathbb{Z} + (2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}) = 18\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$

$15\mathbb{Z} \cap (12\mathbb{Z} + 16\mathbb{Z}) = 15\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$

$(2\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}) \cdot (5\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot 35\mathbb{Z} = 35\mathbb{Z}$

TH (de corespondență a idealelor)

Fie $f: R \to S$ morfism surjectiv de inele (com și unitare).

Fie $f: R \to S$ morfism surjectiv de inele (com. și unitare).
Atunci există o corespondență bijectivă între idealele lui S și idealele lui R care conțin $\operatorname{Ker} f$.

Adică:

$$\{I \trianglelefteq R \mid \operatorname{Ker} f \subset I\} \xrightarrow{\varphi} \{J \trianglelefteq S\}, \ \varphi(I) = f(I)$$

$$\{I \trianglelefteq R \mid \operatorname{Ker} f \subset I\} \xleftarrow{\psi} \{J \trianglelefteq S\}, \ \psi(J) = f^{-1}(J)$$

sunt bijective și mutual inverse: $\psi \circ \varphi = id$

$\varphi \circ \psi = id$

Dem. • φ, ψ corect def? $\boxed{J \trianglelefteq S \Rightarrow f^{-1}(J) \trianglelefteq R \text{ și } I \trianglelefteq R \Rightarrow f(I) \trianglelefteq S}$

• $\psi \circ \varphi = id \Leftrightarrow \psi(\varphi(I)) = I, \ \forall I \trianglelefteq R, \ \boxed{I \supset \operatorname{Ker} f}$

$$\psi(\varphi(I)) = f^{-1}(f(I)) \supset I \quad (\text{în general})$$

Vrem $f^{-1}(f(I)) \subset I$

Fie $x \in f^{-1}(f(I)) \Longleftrightarrow f(x) \in f(I) \Leftrightarrow \exists y \in I$ a.î.
$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f \subset I$

$y \in I \quad \cancel{\Rightarrow} \ x \in I$

• $\varphi \circ \psi = id \Leftrightarrow \forall J \trianglelefteq S, \ \varphi(\psi(J)) = J$

• $\varphi \circ \psi = id \iff \forall\, J \trianglelefteq S,\ \varphi(\psi(J)) = J$

$\iff f(f^{-1}(J)) = J,$

adevărat pt că f surjectivă!

<u>Obs</u> $f : R \to S$ morfism $\Rightarrow$ $f(I)$ <u>nu</u> e neapărat ideal, pt $I \trianglelefteq R$

<u>Exemplu</u> $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, f = incluziunea.

$f(2\mathbb{Z}) = \{0, 2, -2, 4, -4, \dots\} \subset \mathbb{Q}$ ← nu e ideal în $\mathbb{Q}$

Dar, dacă f surjectivă, $f(I)$ este ideal (Exc!)

deci φ din Th de corespondență e corect definită.

<u>Aplicație</u> : idealele unui inel factor.

<u>Recap</u> $I \trianglelefteq R$ ideal al unui inel comutativ, unitar.

Are sens, cum $(I,+) \leq (R,+)$, grupul factor

$$R/I = \{\hat{a} \mid a \in R\}.$$

$\hat{a} = \hat{b} \iff a - b \in I.$

__Obs__: $\hat{0} = I$.

Pt că I ideal, are sens: $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{ab}$ (e corect def)

$\Rightarrow \left(R/I, +, \cdot \right)$ e inel comutativ.

__Exemplu__ $I = n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$.

__Explicație__ $\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \mid a - b$.

__Aplicație a Th de corespondență__

Fie $f : R \to R/I$ proiecția canonică,

$f(a) = \hat{a}$.

f e, prin construcția lui R/I, morfism de inele.

Th de coresp: $\{\text{Idealele lui } R/I\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{Idealele lui } R \text{ care conțin } \operatorname{Ker} f = I\}$

__Notație__ $I \subset J \trianglelefteq R \longrightarrow f(J) \trianglelefteq R/I$

$f(J) = \{\hat{a} \mid a \in J\}$

Not: $f(J) = \boxed{J/I} \trianglelefteq R/I$

Din nou, $I \subset J \trianglelefteq R$, $\quad J/I = \{\hat{a} \mid a \in J\} \trianglelefteq R/I$

și acestea sunt toate idealele lui R/I.

<u>Ex</u> $\{$Idealele lui $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ $\xrightarrow{1-1}$ $\{$Idealele lui $\mathbb{Z}$ care conțin $n\mathbb{Z}\}$

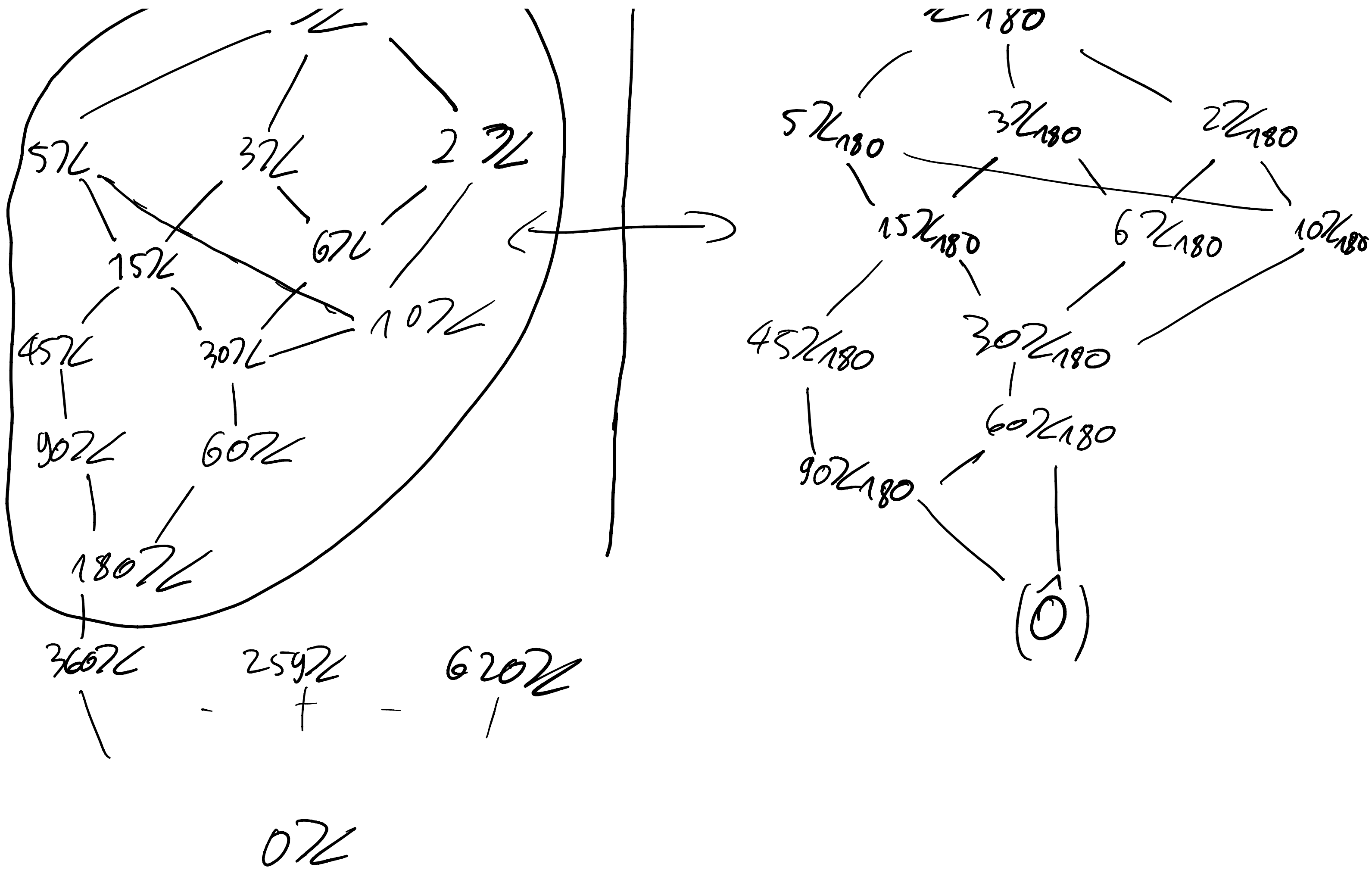
$= \{m\mathbb{Z} \mid m \mid n\}$

$\Longrightarrow$ cu notațiile de mai sus, $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$

$$\boxed{m \mid n}$$

<u>Exemplu</u> Ce ideale are $\mathbb{Z}_{180}$?

(Parte din) idealele lui $\mathbb{Z}$	Idealele lui $\mathbb{Z}_{180}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_{180}$



$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Vineri, 26 febr, ora 15 - online Zoom.