- Forme biliniare. Forme pătratice
- Reducerea unei forme pătratice la forma canonică

Metoda Gauss
Metoda lui Jacobi
Metoda transformărilor ortogonale (Metoda valorilor proprii)

· G-S, Criteriul lui Sylvester

Forme biliniare

S.n formă biliniară pe spațiul vectorial V (de dimensiune n) o aplicație $F: V\times V \to \mathbb{R}$ care satisface condițiile:

i) $F(\alpha x+\beta y, z) = \alpha F(x,z) + \beta F(y,z)$, $\forall\ x,y,z\in V$, $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

ii) $F(x, \alpha y+\beta z) = \alpha F(x,y) + \beta F(x,z)$, $\forall\ x,y,z\in V$, $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

cu alte cuvinte, o formă biliniară este o aplicație $F: V\times V\to\mathbb{R}$, liniară în ambele argumente.

Exemplu: Produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$ este o formă biliniară

$<,>: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad <x,y> = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

Def: O formă biliniară $F: V\times V\to\mathbb{R}$ s.n:

i) simetrică dacă $F(x,y) = F(y,x)$, $\forall\ x,y\in V$

ii) antisimetrică dacă $F(x,y) = -F(y,x)$, $\forall\ x,y\in V$

Def: O formă biliniară simetrică F s.n pozitiv (negativ) semidefinită dacă $F(x,x)\geq 0$ (respectiv $F(x,x)\leq 0$), pentru $\forall x\in V$. Dacă în plus $F(x,x)=0$ numai pentru $x=0_V$, F s.n pozitiv (respectiv negativ) definită.

Forme pătratice

Def: Fie $F: V\times V\to\mathbb{R}$ o formă biliniară și simetrică. Aplicația $Q: V\to\mathbb{R}$, $Q(x) = F(x,x)$ s.n forma pătratică asociată formei biliniare simetrice F. F s.n polara formei pătratice Q.

Prop: Între mulțimea formelor pătratice pe spațiul vectorial V și mulțimea formelor biliniare și simetrice definite pe $V\times V$ există o corespondență bijectivă.

Într-adevăr, dat $F: V\times V\to\mathbb{R}$ biliniară și simetrică există o formă pătratică $Q: V\to\mathbb{R}$, definită prin $Q(x) = F(x,x)$. Dată o formă pătratică $Q: V\to\mathbb{R}$, există o formă biliniară și sime

$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$ (identitatea de polarizare)

Reducerea unei forme pătratice la forma canonică

Def: Spunem că o formă pătratică este redusă la forma canonică dacă se poate scrie sub forma:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2, \ \alpha_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}$$ într-o anumită bază a lui V.

Reducerea la forma canonică înseamnă a găsi o scriere a lui $Q(x)$ în care să apară numai termeni la pătrat.

Metoda lui Gauss

cazul I: Există $i=\overline{1,n}$ a.î. $a_{ii}\neq 0$ (în expresia formei pătratice apare cel puțin un termen la pătrat)

Ex: Se consideră forma pătratică $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$. Să se reducă forma pătratică la forma canonică cu metoda lui Gauss.

Scriem matricea atașată lui Q în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{2} & \frac{2}{2} \\ -\frac{2}{2} & 4 & 0 \\ \frac{2}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pe diag se pun coef termenilor la pătrat.
Simetric față de diag ceilalți coef (împărțiți la 2).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(grupăm toți termenii care conțin pe x_1)

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$Q(x) = \left[(x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3\right] + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$Q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3$$ (grupăm termenii cu x_2)

$$Q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$Q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3\left(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right)$$

$$Q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3\left[\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 - \frac{1}{9}x_3^2\right]$$

$$Q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 - \frac{1}{3}x_3^2$$

Notăm $\begin{cases} \overline{x_1} = x_1 - x_2 + x_3 \\ \overline{x_2} = x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \overline{x_3} = x_3 \end{cases}$ $\quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q(x) = \overline{x_1}^2 + 3\overline{x_2}^2 - \frac{1}{3}\overline{x_3}^2$ (forma canonică)

În ce bază forma pătratică are această formă canonică? → ex suplimentar

În baza $B=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ x are coordonatele x_1, x_2, x_3

În baza $\overline{B}=\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ x are coordonatele $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$.

Din formula de schimbare a coordonatelor unui vector la schimbarea bazei știm:

$x[B]=C\,x[\overline{B}]$

$C \rightsquigarrow$ matricea de trecere de la B la $\overline{B}$

Trb să exprimăm pe x_1, x_2, x_3 în funcție de $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$

Avem: $\begin{cases} x_1=\overline{x_1}+x_2-x_3 = \overline{x_1}+\overline{x_2}-\frac{1}{3}\overline{x_3} - \overline{x_3} = \overline{x_1}+\overline{x_2}-\frac{4}{3}\overline{x_3} \\ x_2=\overline{x_2}-\frac{1}{3}x_3 = \overline{x_2}-\frac{1}{3}\overline{x_3} \\ x_3=\overline{x_3} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1=\overline{x_1}+\overline{x_2}-\frac{4}{3}\overline{x_3} \\ x_2=\overline{x_2}-\frac{1}{3}\overline{x_3} \\ x_3=\overline{x_3} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} \overline{x_1}\\ \overline{x_2}\\ \overline{x_3}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{4}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} \overline{x_1}\\ \overline{x_2}\\ \overline{x_3}\end{pmatrix}$$

V: $\overline{A}=C^tAC$

Cazul II: În expresia formei pătratice apar numai termeni micști (i.e. $a_{ii}=0$)

$Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ Q(x)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

$B=\{e_1,e_2,e_3\}$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

Se face schimbarea de coordonate $\boxed{\begin{cases} x_1=x_1'+x_2' \\ x_2=x_1'-x_2' \\ x_3=x_3'\end{cases}}$!

și rezultă cazul I avem termeni la pătrat

$Q(x)=(x_1'+x_2')(x_1'-x_2')+(x_1'-x_2')x_3'+x_3'(x_1'+x_2')$

$Q(x)=x_1'^2-x_2'^2+x_1'x_3'-\cancel{x_3'x_2'}+x_3'x_1'+\cancel{x_3'x_2'}$

$Q(x)=x_1'^2-x_2'^2+2x_1'x_3'$

$Q(x)=(x_1'^2+2x_1'x_3')-x_2'^2$

$Q(x)=(x_1'+x_3')-x_3'^2-x_2'^2$

Notăm $\begin{cases} \overline{x_1}=x_1'+x_3' \\ \overline{x_2}=x_2' \\ \overline{x_3}=x_3'\end{cases}$

$\Rightarrow Q(x)=\overline{x_1}^2-\overline{x_2}^2-\overline{x_3}^2.$

Metoda lui Jacobi

Teoremă (Jacobi) Fie V un spațiu vectorial, $B=\{e_1,e_2,\dots e_n\}$ o bază a lui V și $Q: V\to\mathbb{R}$ o formă pătratică având expresia

$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j$ în baza B.

Dacă matricea $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{R})$ asociată formei pătratice Q în baza B are toți minorii principali

$\Delta_1=a_{11}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, $\Delta_3=\dots$, Δ_n nenuli, atunci există o bază $\overline{B}=\{\overline{e_1},\overline{e_2},\dots \overline{e_n}\}$ a lui V față de care Q are forma canonică:

$$Q(x)=\frac{1}{\Delta_1}\cdot\overline{x_1}^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x_2}^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\overline{x_3}^2+\dots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\overline{x_n}$$

Exercițiu: Fie forma pătratică $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, dată prin $Q(x)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+3x_3^2$. Să se determine forma canonică pt Q utilizând metoda Jacobi și baza corespunzătoare în care Q are această formă.

① Fie $B=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$.
În baza B matricea asociată formei pătratice Q este:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Calculăm minorii principali și verificăm dacă sunt nenuli (doar în acest caz se poate utiliza Jacobi)

$\Delta_1=1\neq0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq0$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=3\neq0$$

$$Q(x)=\frac{1}{\Delta_1}\cdot\overline{x_1}^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x_2}^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\overline{x_3}^2$$

$$\Rightarrow Q(x)=\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2+\frac{1}{3}\overline{x_3}^2$$

Dacă $\overline{B}=\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$ este matricea în care Q are această formă canonică, matricea asociată lui Q în această bază este

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Determinăm baza $\overline{B}=\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$

$$\begin{cases}\overline{e_1}=c_{11}e_1\\ \overline{e_2}=c_{12}e_1+c_{22}e_2\\ \overline{e_3}=c_{13}e_1+c_{23}e_2+c_{33}e_3\end{cases}$$

unde valorile c_{ij}, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,i}$ se dau din relațiile

$$c_{11}=\frac{1}{\Delta_1},\quad \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}}_{\Delta_2}\begin{pmatrix}c_{12}\\ c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\quad \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}}_{\Delta_3}\begin{pmatrix}c_{13}\\ c_{23}\\ c_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$c_{11}=\frac{1}{1}=1$

$$\begin{cases}c_{12}-c_{22}=0 \Rightarrow c_{12}=c_{22}\\ -c_{12}+2c_{22}=1\end{cases}\Rightarrow c_{22}=1\Rightarrow c_{12}=1$$

$$\left.\begin{cases}c_{13}-c_{23}=0\Rightarrow c_{13}=c_{23}\\ -c_{13}+2c_{23}=0\Rightarrow c_{23}=0\\ 3c_{33}=1\Rightarrow c_{33}=\frac{1}{3}\end{cases}\right\}\Rightarrow c_{13}=0$$

$\Rightarrow \overline{e_1}=e_1=(1,0,0)$
$\overline{e_2}=e_1+e_2=(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)$
$\overline{e_3}=\frac{1}{3}e_3=(0,0,\frac{1}{3})$

$\Rightarrow \overline{B}=\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$

② Verificăm formula de schimbare a matricei la schimbarea bazei: $\overline{A}=C^tAC$, C – matricea de trecere de la B la baza $\overline{B}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ (coloanele: $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$)

$$C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \overline{A}$$

Metoda transformărilor ortogonale

matrice ortogonale

- O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s.n ortogonală dacă $AA^t = I_n$ $\nearrow$ $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
- Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală atunci:
  - i) $\det(A) = \pm 1$
  - ii) A^{-1} este o matrice ortogonală
  - iii) A, B matrice ortogonale $\Rightarrow A \cdot B$ matrice ortogonală
- $A \in M_n(\mathbb{R})$. V.A.S.E:
  - i) A e matrice ortogonală
  - ii) liniile lui A formează o bază ortonormată a spațiului euclidian din $\mathbb{R}^n$.
  - iii) coloanele lui A formează o bază ortonormată a spațiului euclidian $\mathbb{R}^3$

matrice simetrice

- O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s.n simetrică dacă $A = A^t$ i.e $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i,j = \overline{1,n}$
- Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ e o matrice simetrică, atunci toate valorile proprii ale lui A sunt reale.
- Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ e o matrice simetrică, atunci la valori proprii distincte ale lui A corespund vectori proprii ortogonali
- Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ e o matrice simetrică, atunci $\exists$ o matrice ortogonală $C \in M_n(\mathbb{R})$ a.î. $C^{-1}AC = D$

unde $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n)$ e forma diagonală a matricei A.

Reducerea la forma canonică prin metoda transf. ortogonale se aplică numai formelor pătratice definite pe spații euclidiene.

Teoremă: Fie V un spațiu euclidian de dimensiune n și $Q: V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci există o bază ortonormată a lui V în raport cu care forma pătratică Q este redusă la forma canonică.

ALG: Reducerea la formă canonică prin metoda transf. ortogonale

1. Se fixează o bază în V și se scrie matricea $A = A^t$
2. Se det valorile proprii și ma
3. Se det subspațiile proprii coresp. valorilor proprii
4. Pt fiecare subsp. se det o bază ortonormată $\tilde{B}_i$, $i = \overline{1,p}$
5. Forma canonică $\rightsquigarrow Q(x) = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \ldots + \lambda_n \tilde{x}_n^2$
6. $\tilde{B} = \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2 \cup \ldots \cup \tilde{B}_p$

Ex:

$Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = A^t$ ✓

$$P_\lambda = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ 4-\lambda & 3-\lambda & 2 \\ 4-\lambda & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1}$$

$$= (4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & -\lambda-2 \end{vmatrix} = -(4-\lambda)^2(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4, \quad ma(4) = 2$$

$$\lambda_3 = -2, \quad ma(-2) = 1$$

$V_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid Av = 4v \}$

$V_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid (A - 4I_3)v = 0 \}$

Fie $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -a - b + 2c = 0$, considerăm $a = a$, $b = 2c - a$, $c = c$

$V_{\lambda_1} = \{(a, 2c-a, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\} = \{a(1,-1,0) + c(0,2,1) \mid a, c \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1,0), (0,2,1) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

Deci $B_1 = \{v_1, v_2\}$ – bază în V_{λ_1}

$V_{\lambda_3} = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -2v \}$

$V_{\lambda_3} = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid (A + 2I_3)v = 0 \}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5a - b + 2c = 0 \\ -a + 5b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a - 6b = 0 \Rightarrow a = b \\ a + b + c = 0 \Rightarrow c = -2a \end{cases}$$

$V_{\lambda_3} = \{ (a, a, -2a) \mid a \in \mathbb{R} \} = \{ a(1,1,-2) \mid a \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{1,1,-2}_{v_3} \rangle = \langle v_3 \rangle$

Deci $B_2 = \{v_3\}$ bază în V_{λ_3}

Dacă am calculat corect, trebuie să avem $\begin{cases} v_3 \perp v_1 \\ v_3 \perp v_2 \end{cases}$

$v_1 = (1,-1,0)$ $\quad v_3 \perp v_1 \Leftrightarrow \langle v_3, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow 1 - 1 = 0$ ✓

$v_2 = (0,2,1)$ $\quad v_3 \perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_3, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow 2 - 2 = 0$ ✓

$v_3 = (1,1,-2)$

Construim o bază ortonormată în $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, V_{\lambda_3}$

$B_1 = \{ v_1 = (1,-1,0), v_2 = (0,2,1) \}$

Construim o bază ortogonală (procedeul GRAM-SCHMIDT)

Vrem să obținem o bază ortonormată pornind de la baza B. Construim baza ortogonală $B_1' = \{ v_1', v_2' \}$

$v_1' = v_1 = (1,-1,0)$

$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_1', v_2 \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$

$v_2' = v_2 + \frac{2}{2} \cdot (1,-1,0) = (0,2,1) + (1,-1,0) = (1,1,1)$

$\langle v_1', v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -2$

$\langle v_1', v_1 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle = 1 \cdot 1 + (-1)(-1) + 0 \cdot 0 = 2$

Deci $B_1' = \{ v_1', v_2' \} = \{ (1,-1,0), (1,1,1) \}$ este bază ortogonală

$\tilde{B}_1 = \{ \tilde{v_1}, \tilde{v_2} \}$ este bază ortonormată, unde $\tilde{v_1} = \frac{v_1'}{\|v_1'\|}$, $\tilde{v_2} = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$

$\|v_1'\| = \sqrt{\langle v_1', v_1' \rangle} = \sqrt{2} \Rightarrow \tilde{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$\|v_2'\| = \sqrt{\langle v_2', v_2' \rangle} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{3} \Rightarrow \tilde{v_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow \tilde{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$ bază ortonormată în V_{λ_1}

$B_2 = \{ v_3 = (1,1,-2) \}$

$B_2' = \{ v_3' \}$

$v_3' = v_3 = (1,1,-2)$

$\tilde{B} = \{ \tilde{v_3} \} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$

$\tilde{v_3} = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$

$\|v_3\| = \sqrt{\langle v_3, v_3 \rangle} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)} = \sqrt{6}$

Forma canonică a formei pătratice Q este:

$Q(x) = \lambda_1 \bar{x}_1^2 + \lambda_2 \bar{x}_2^2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n^2$

$Q(x) = 4\bar{x}_1^2 + 4\bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_3^2$

Baza ortonormată în care se obține această formă este $\tilde{B} = \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2 = \left\{ \bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \bar{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \bar{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Verificăm $\bar{A} = C^t A C$ unde C e matricea de trecere de la baza B la $\tilde{B}$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3$

facem calculele ... ✓

Baze ortonormate

Definiţia 1. O bază $B=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{v}_n\}$ se numeşte ortonormată dacă îndeplinește două condiții: 1. Oricare doi vectori ai bazei sunt ortogonali $\bar{v}_i \perp \bar{v}_j \iff \langle \bar{v}_i, \bar{v}_j\rangle = 0, \forall i \neq j, i,j \in \{1,2,..,n\}$ 2. Toţi vectorii sunt normaţi, adică au norma/modulul 1 : $|\bar{v}_i| = 1, \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Putem rezuma cele două condiţii astfel: $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j\rangle = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i=j, \\ 0, & \text{dacă } i\neq j \end{cases}$. Exemplul 1. De exemplu, în spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$, o bază ortonormată este formată din vectorii $\bar{e}_1=(1,0,0), \bar{e}_2=(0,1,0)$ si $\bar{e}_3=(0,0,1)$.

Avantaje ale lucrului cu baze ortonormate Fie $B=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{v}_n\}$ o bază ortonormată într-un spaţiu vectorial V.
- Fie $\bar{a}\in V$. Atunci $\bar{a}=\sum_{i=1}^n \langle \bar{a}, \bar{v}_i\rangle \bar{v}_i$.
- Daţi doi vectori $\bar{b}=\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{v}_i, \bar{c}=\sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{v}_i$, atunci $\langle \bar{b}, \bar{c}\rangle = \sum_{i=1}^n \beta_i\gamma_i$.
- Matricea S de trecere între două baze ortonormate este o matrice ortogonală: $SS^t = I^n$.

Procedeul de ortonormare Gramm-Schmidt

Fie $B=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\}$ o bază în $\mathcal{V}_3$. Vrem să obţinem o bază ortonormată pornind de la baza B. Pasul 1. Construim baza ortogonală $F=\{\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3\}$. Aceştia sunt daţi de:

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = \bar{v}_1 \\ \bar{f}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\langle \bar{f}_1, \bar{v}_2\rangle}{\langle \bar{f}_1\rangle}\bar{f}_1 \\ \bar{f}_3 = \bar{v}_3 - \frac{\langle \bar{f}_1, \bar{v}_3\rangle}{\langle \bar{v}_1, \bar{f}_1\rangle}\bar{f}_1 - \frac{\langle \bar{f}_2, \bar{v}_3\rangle}{\langle \bar{f}_2, \bar{f}_2\rangle}\bar{f}_2 \end{cases}$$

Pasul 2. Se normează baza F şi se obţine baza ortonormată $B'=\{\bar{e}'_i\}_{i=\overline{1,3}}$. Au loc formulele:

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = \frac{1}{\|\bar{f}_1\|}\bar{f}_1 \\ \bar{e}'_2 = \frac{1}{\|\bar{f}_2\|}\bar{f}_2 \\ \bar{e}'_3 = \frac{1}{\|\bar{f}_3\|}\bar{f}_3 \end{cases}$$

Exerciţiul 1. In raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^3$ ortonormaţi următoarele sisteme de vectori, folosind procedeul Gram-Schmidt: (a) $\bar{v}_1=(2,1,2), \bar{v}_2=(1,1,-2), \bar{v}_3=(2,-2,1)$; (b) $\bar{v}_1=(1,2,2), \bar{v}_2=(1,1,-5), \bar{v}_3=(3,2,8)$; (c) $\bar{v}_1=(1,2,1), \bar{v}_2=(1,0,1), \bar{v}_3=(1,0,0)$.

Demonstraţie. (a) Să demonstrăm mai întâi că vectorii daţi formează o bază. Deoarece numărul vectorilor este egal cu dimensiunea spaţiului vectorial este suficient să demonstrăm că vectorii sunt liniari independenţi. Pentru aceasta este suficient ca determinantul format de coordonatele vectorilor este nenul.

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -19 \neq 0$$

deci într-adevăr vectorii sunt liniar indepndenţi. Să aplicăm acum procedeul Gram-Schmidt. Construim baza ortogonală

$F=\{f_1,f_2,f_3\}$. Obţinem

$$\begin{cases} f_1=(2,1,2) \\ f_2=(1,1,-2)-\dfrac{2\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot(-2)}{2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 2}(2,1,2)=(1,1,-2)-\dfrac{-1}{9}(2,1,2)=\left(\dfrac{11}{9},\dfrac{10}{9},\dfrac{-16}{9}\right) \\ f_3=(2,-2,1)-\dfrac{2\cdot 2+1\cdot(-2)+2\cdot 1}{2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 2}(2,1,2)-\dfrac{\frac{11}{9}\cdot 2+\frac{10}{9}\cdot(-2)+\frac{-16}{9}\cdot\frac{1}{\frac{11}{9}\cdot\frac{11}{9}+\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{9}+\frac{-16}{9}\cdot\frac{-16}{9}}\left(\frac{11}{9},\frac{10}{9},\frac{-16}{9}\right)}{} \\ \quad =(2,-2,1)-\dfrac{4}{9}(2,1,2)-\dfrac{\frac{-14}{9}}{\frac{477}{81}}\left(\dfrac{11}{9},\dfrac{10}{9},\dfrac{-16}{9}\right)=(2,-2,1)-\left(\dfrac{8}{9},\dfrac{4}{9},\dfrac{8}{9}\right)+\dfrac{14}{53}\left(\dfrac{11}{9},\dfrac{10}{9},\dfrac{-16}{9}\right) \\ \quad =\left(\dfrac{10}{9},\dfrac{-22}{9},\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{154}{477},\dfrac{140}{477},\dfrac{-224}{477}\right)=\left(\dfrac{684}{477},\dfrac{-1026}{477},\dfrac{-171}{477}\right)=\left(\dfrac{76}{53},\dfrac{114}{53},-\dfrac{19}{53}\right). \end{cases}$$

Se ortonormează baza F şi se obţine baza ortogonală $B'=\{e_i'\}_{i=\overline{1,3}}$. Au loc:

$$\begin{cases} e_1'=\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 2}}(2,1,2)=\dfrac{1}{3}(2,1,2)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right) \\ e_2'=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{11}{9}\cdot\frac{11}{9}+\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{9}+\frac{-16}{9}\cdot\frac{-16}{9}}}\left(\dfrac{11}{9},\dfrac{10}{9},\dfrac{-16}{9}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{477}{81}}}\left(\dfrac{11}{9},\dfrac{10}{9},\dfrac{-16}{9}\right)=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{53}}{3}}\left(\dfrac{11}{9},\dfrac{10}{9},\dfrac{-16}{9}\right)=\left(\dfrac{11}{3\sqrt{53}},\dfrac{10}{3\sqrt{53}},\dfrac{-16}{3\sqrt{53}}\right) \\ e_3'=\dfrac{76}{\sqrt{\frac{76}{53}\cdot\frac{76}{53}+\frac{-114}{53}\cdot\frac{-114}{53}+\frac{-19}{53}\cdot\frac{-19}{53}}}\left(\dfrac{-114}{53},\dfrac{-19}{53}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{19133}{2809}}}\left(\dfrac{76}{53},\dfrac{-114}{53},\dfrac{-19}{53}\right) \\ \quad =\dfrac{1}{\frac{19}{\sqrt{53}}}\left(\dfrac{76}{53},\dfrac{-114}{53},\dfrac{-19}{53}\right)=\left(\dfrac{4}{\sqrt{53}},\dfrac{-6}{\sqrt{53}},\dfrac{-1}{\sqrt{53}}\right) \end{cases}$$

(b) Să demonstrăm mai întâi că vectorii daţi formează o bază.

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}=-30\neq 0$$

deci într-adevăr vectorii sunt liniar indepndenţi. Să aplicăm acum procedeul Gram-Schmidt. Construim baza ortonormată $F=\{f_1,f_2,f_3\}$. Obţinem

$$\begin{cases} f_1=(1,2,2) \\ f_2=(1,1,-5)-\dfrac{1\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot(-5)}{1\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 2}(1,2,2)=(1,1,-5)-\dfrac{-7}{9}(1,2,2)=\left(\dfrac{16}{9},\dfrac{23}{9},\dfrac{-31}{9}\right) \\ f_3=(3,2,8)-\dfrac{1\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 8}{1\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 2}(1,2,2)-\dfrac{\frac{16}{9}\cdot 3+\frac{23}{9}\cdot 2+\frac{-31}{9}\cdot 8}{\frac{16}{9}\cdot\frac{16}{9}+\frac{23}{9}\cdot\frac{23}{9}+\frac{-31}{9}\cdot\frac{-31}{9}}\left(\dfrac{16}{9},\dfrac{23}{9},\dfrac{-31}{9}\right) \\ \quad =(3,2,8)-\dfrac{23}{9}(1,2,2)-\dfrac{\frac{-154}{9}}{\frac{1746}{81}}\left(\dfrac{16}{9},\dfrac{23}{9},\dfrac{-31}{9}\right)=(3,2,8)-\left(\dfrac{23}{9},\dfrac{46}{9},\dfrac{46}{9}\right)+\dfrac{154}{194}\left(\dfrac{16}{9},\dfrac{23}{9},\dfrac{-31}{9}\right) \\ \quad =\left(\dfrac{4}{9},\dfrac{-28}{9},\dfrac{26}{9}\right)+\left(\dfrac{1232}{873},\dfrac{1771}{873},\dfrac{-2387}{873}\right)=\left(\dfrac{1620}{873},\dfrac{-945}{873},\dfrac{135}{873}\right)=\left(\dfrac{180}{97},\dfrac{-105}{97},\dfrac{15}{97}\right). \end{cases}$$

Se ortonormează baza F şi se obţine baza ortonormată $B'=\{e_i'\}_{i=\overline{1,3}}$. Au loc:

$$\begin{cases} e_1'=\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 2}}(1,2,2)=\dfrac{1}{3}(1,2,2)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right) \\ e_2'=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{16}{9}\cdot\frac{16}{9}+\frac{23}{9}\cdot\frac{23}{9}+\frac{-31}{9}\cdot\frac{-31}{9}}\left(\frac{16}{9},\frac{23}{9},\frac{-31}{9}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1746}{81}}}\left(\frac{16}{9},\frac{23}{9},\frac{-31}{9}\right)=\frac{1}{\frac{\sqrt{194}}{3}}\left(\frac{16}{9},\frac{23}{9},\frac{-31}{9}\right)=\left(\frac{16}{3\sqrt{194}},\frac{23}{3\sqrt{194}},\frac{-31}{3\sqrt{194}}\right)} \\ e_3'=\dfrac{180}{\sqrt{\frac{180}{97}\cdot\frac{180}{97}+\frac{-105}{97}\cdot\frac{-105}{97}+\frac{15}{97}\cdot\frac{15}{97}}}\left(\dfrac{-105}{97},\dfrac{15}{97}\right) \\ \quad =\dfrac{1}{\sqrt{\frac{43650}{8409}}}\left(\dfrac{180}{97},\dfrac{-105}{97},\dfrac{15}{97}\right)=\dfrac{1}{\frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{97}}}\left(\dfrac{180}{97},\dfrac{-105}{97},\dfrac{15}{97}\right)=\left(\dfrac{12}{\sqrt{194}},\dfrac{-7}{\sqrt{194}},\dfrac{1}{\sqrt{194}}\right). \end{cases}$$

OBSERVAȚII: ① Metoda lui Gauss se poate utiliza pt a aduce la formă canonică orice formă pătratică.

② Metoda lui Jacobi se poate utiliza pt a aduce o formă pătratică la forma canonică numai în cazul în care matricea asociată formei pătratice are toți minorii principali nenuli.

③ Metoda transformărilor ortogonale se poate utiliza pt a aduce la forma canonică doar forme pătratice definite pe spații euclidiene.

④ Când se reduce o formă pătratică la forma canonică prin două metode diferite se pot obține rezultate diferite.

Definiție Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune n și o formă pătratică $Q: V \to \mathbb{R}$ având forma canonică $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$ în care: p coeficienți sunt strict pozitivi, q coef sunt strict negativi, iar $r = n-(p+q)$ sunt nuli.

Tripletul (p, q, r) s.n signatura formei pătratice.

Ex : $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 \xrightarrow{\text{forma canonică}} Q(x) = \overline{x_1}^2 + 3\overline{x_2}^2 - \frac{1}{3}\overline{x_3}^2$, astfel, signatura acestei forme pătratice este:

$(p, q, r) = (2, 1, 0)$

$p = 2,\ q = 1,\ r = 3 - (2+1) = 0$

Definiție: i) Spunem că o formă pătratică $Q: V \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă $Q(x) > 0$ pt $\forall\ x \in V \setminus \{0_V\}$

ii) Spunem că o formă pătratică $Q: V \to \mathbb{R}$ este negativ definită dacă $Q(x) < 0$ pt $\forall\ x \in V \setminus \{0_V\}$

O formă pătratică e pozitiv (negativ) definită $\Leftrightarrow$ polara sa e pozitiv (negativ) definită.

Teoremă (Criteriul lui Sylvester): Fie $Q: V \to \mathbb{R}$, $B = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ o bază a lui V, $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ matricea asociată formei pătratice în baza B și $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_n$ minorii principali ai matricei A. Atunci:

i) Q e pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_i > 0,\ \forall\ i = \overline{1,n}$

ii) Q e negativ definită $\Leftrightarrow (-1)^i \Delta_i > 0,\ \forall\ i = \overline{1,n}$

Ex: $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$

$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = 1$

$\Delta_3 = 3$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0 \Rightarrow$ forma pătratică Q e pozitiv definită

Prop: O formă pătratică e pozitiv definită (respectiv negativ definită) $\Leftrightarrow$ forma sa canonică, într-o bază oarecare are toți coeficienții strict pozitivi (respectiv strict negativi).