Determinanți

Def: Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$S_n \rightarrow$ mulțimea tuturor permutărilor de grad n

$\varepsilon(\sigma) \rightarrow$ signatura permutării σ

OBS! 1) Noțiunea de determinant are sens doar pt m. pătratice.

2) MATRICE V_S DETERMINANTUL M

$\downarrow$ funcție

$\downarrow$ un scalar (nr)

3) Determinantul unei matrici are $n!$ termeni

$\frac{n!}{2} \rightarrow (+)$

$\frac{n!}{2} \rightarrow (-)$

4) Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($A \in M_n(\mathbb{Q})$ / $\mathbb{Z}$)

$\Rightarrow \det A \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ / $\mathbb{Z}$)

PROPRIETĂȚILE DETERMINANTULUI

1) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

2) $\det(A^k) = (\det A)^k$, $k \in \mathbb{N}^*$

3) $\det A = \det({}^tA)$

4) Dacă elementele unei linii/coloane ale unui determinant sunt nule, atunci determinantul e nul

5) Schimbând 2 linii/coloane (diferite), determinantul își schimbă semnul.

6) Un determinant cu 2 linii/coloane egale e zero (sau proporționale $L_2 = 3L_2$)

REGULA LUI LAPLACE

↳ să ne facem pivot

① Calculați det A

a) folosind dezvoltarea după prima coloană

b) folosind regula lui Laplace prin dez. după primele 2 linii

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

det A = suma produselor minorilor de ordin p și complemenților lor algebrici

a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2\to L_2-L_1 \\ L_3\to L_3-2L_1 \\ L_4\to L_4+L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} =$

→ c_1

$$= \underbrace{1\cdot(-1)^{1+1}}_{1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -7 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0+12+7-3-0-21$$

$$= 19-3-21$$

$$= 16-21 = -5$$

alegem p=2

L_1, L_3

ceea ce intersect liniile (1,3) și coloanele (1,2)

indicii liniilor

indicii coloanelor

ceea ce rămâne neintersectat

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}_{3} \cdot \underbrace{(-1)^{1+3+1+2}}_{(-1)^7=-1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{12-8=4} +$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{1-4=-3} \cdot \underbrace{(-1)^{1+3+1+3}}_{(-1)^8=1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}_{4+8=12} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{-7} \cdot \underbrace{(-1)^{1+3+1+4}}_{(-1)^9=-1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}_{8}$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}_{1-10=-9} \cdot \underbrace{(-1)^{1+3+2+3}}_{(-1)^9=-1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}_{8} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}_{-1-15=-16} \cdot \underbrace{(-1)^{1+3+2+4}}_{(-1)^{10}=1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{2+3=5} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{-2-3=-5} \cdot \underbrace{(-1)^{1+3+3+4}}_{(-1)^{11}=-1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}_{-2+1=-1}$$

$$= -12 - 36 + 56 + 72 - 80 - 5$$

$$= -48 + 56 + 72 - 85$$

$$= 8 + \underbrace{72 - 85}_{-13} = 8 - 13 = -5$$