

Tutorial 9 - Analiza

1. Dați exemple sau explicații de ce nu există

a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă cu derivația discontinuă în exact 2 puncte.

b) $g: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ mărginită care nu este integrabilă Riemann

c) $g: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă Riemann care nu este derivabilă.

d) $h: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și pe care derivația nu este integrabilă.

e)

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă Riemann. $\Leftrightarrow g$ este mărginită. Dacă g este mărginită Lebesgue.

$A \subseteq \mathbb{R}$ mărginită Lebesgue $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $\exists (I_m)_m$ o serie de intervale a.t. $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ și $\sum_{m=0}^{\infty} P(I_m) < \epsilon$.

• Orice mulțime de numărătățile numerabile este mărginită Lebesgue.

a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

g continuă.

$$g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}.$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0.$$

Ție $x_m = \frac{1}{2\pi m}$ $\xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$

$$g'\left(\frac{1}{2\pi m}\right) = -1 \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow g'(0) \text{ nu e continuă.}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{dim} \frac{1}{x} + (x-1)^2 \operatorname{dim} \frac{1}{x-1}, & x \neq 0, 1 \\ 0, & x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$f(x) = \operatorname{dim} \frac{1}{x} \rightarrow$ discontinuu imo, dar are P.D.

$f_2(x) = x \operatorname{dim} \frac{1}{x} \rightarrow$ continuu imo, dar nu e deriu imo

$f_3(x) = x^2 \operatorname{dim} \frac{1}{x} \rightarrow$ derivabilă dar nu are derivata cont

$f_4(x) = x^3 \operatorname{dim} \frac{1}{x} \rightarrow$ de 2 ori derivabilă, a doua derivată dñe.

b) simetria lui Dirichlet.

c) parteua întreagă, deoarece fractiomastă

d)

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2, x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x \rightarrow 0 \\ 3x^2 \rightarrow 0 \end{matrix}$$

2) $x_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m + \sqrt{k^2 - k + 1}}$

$\int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow$ $\text{If } (\Delta_m)_m \text{ cu } ||\Delta_m|| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ și } \forall (\beta_i)_{i=1,2, \dots, m} \text{ r.d.t}$

de pet. intermediare, avem

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} f(\beta_k)(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{k^2 - k + 1}{m^2}}} = ?$$

În particular dacă luăm $\Delta_m = (a, a + \frac{b-a}{m}, a + \frac{2(b-a)}{m}, \dots, b)$

$$\beta_i = a + \frac{b-a}{m} i$$

$$\text{Atunci } \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{m} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{m} k\right)$$

Continuare ex 2.

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$3) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{3m+2} + \frac{1}{3m+6} + \dots + \frac{1}{3m+(3m+3)}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{3m+3k-1}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{3 + \frac{3k-1}{m}}$$

$$\text{Fie } f(x) = \frac{1}{3+3x}$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$D_m = \left(0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1\right)$$

$$\bar{x}_i = \left\{ \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1 \right\}$$

integrabilită Riemann

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^1 \frac{1}{3+3x} dx$$

$$4) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m \frac{1}{3 + 3 \cdot \frac{k-\frac{1}{3}}{m}}$$

$$\frac{k-1}{m} \leq \frac{k-\frac{1}{3}}{m} \leq \frac{k}{m} \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq -\frac{1}{3} \leq 0$$

Continuare ex e.

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m g\left(\sqrt{\frac{k^2 - k + 1}{m^2}}\right)$$

$$\Delta_m = \left(0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1\right)$$

$$\mathcal{Z}_m = \left\{ \sqrt{\frac{k^2 - k + 1}{m^2}} \mid k \in \overline{1, m} \right\}$$

$$\frac{k-1}{m} \leq \sqrt{\frac{k^2 - k + 1}{m^2}} \leq \frac{k}{m}.$$

$$\Leftrightarrow k-1 \leq \sqrt{k^2 - k + 1} \leq k \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ (1)^2 \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 \leq k^2 - k + 1 \leq k^2 \quad 1 - k^2$$

$$-2k + 1 \leq -k + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 1 \quad \text{int. R.} \quad \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$5) f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Decideți dacă f, g, fg integrabile Riemann

Așa că f este mărginită

$$\forall x \in (0, 1] \quad |f(x)| = \left| x + \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 + 1 = 2.$$

$$P^2 \quad x=0 \quad |f(x)| = 3.$$

Pentru următoare: $|f(x)| \leq 3$ dacă $x \in [0, 1]$.

Dacă f este mărginită

f este pe $[0, 1] \Rightarrow D_f \subset [0, 1] \Rightarrow f$ este mărginită

D_f numărabilă

$\Rightarrow D_f$ mărginită Lebesgue

Dacă f este imprejuruită

Este f mărginită pe $[0, 1]$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\dim x} = +\infty \Rightarrow f$$
 nu este mărginită pe $[0, 1]$

Dimensiunea Lebesgue $\Rightarrow f$ nu este imprejuruită

$$f \cdot g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\dim x} + \frac{\dim \frac{1}{x}}{\dim x}, & x \in (0, 1] \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

Este fg mărginită?

$$\text{Alegem } x_m = \frac{1}{2m\bar{n} + \frac{\pi}{2}}$$

$$fg(x_m) = \frac{1}{2m\bar{n} + \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\dim\left(\frac{1}{2m\bar{n} + \frac{\pi}{2}}\right)} + \frac{1}{\dim\left(\frac{1}{2m\bar{n} + \frac{\pi}{2}}\right)}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} fg(x_m) = 1 + \infty = \infty \Rightarrow fg$$
 nu este mărginită pe $[0, 1]$

$\Rightarrow fg$ nu este imprejuruită

$$6) \sum_{m=1}^{\infty} a_m (x-7)^m \text{ e comu im } x = 8 \text{ și div im } x = 5$$

- a) Dacă seria e comu im $x \neq 0$? Date $\text{im } x = 5$?
- b) Afliți valoarea maximă pe care o poate avea raza de comu?

R = raza de comu.

$$\begin{aligned} \text{a)} \text{ Dacă e comu im } 8 \text{ și centrată im } 7 \Rightarrow R \geq 1 \\ \text{b)} \text{ Dacă e div im } 5 \text{ și centrată im } 7 \Rightarrow R \leq 2 \end{aligned}$$

Dacă seria ar fi comu im 10 $\Rightarrow R \geq 3$

$$\Rightarrow 1 \leq R \leq 2 \quad \text{a)}$$

Dacă seria nu e comu im 10.

$$\text{Fie } a_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot (-1)^m = \left(-\frac{1}{2}\right)^m.$$

$$\text{im } x = 8 : \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \rightarrow \text{comu}.$$

$$\text{im } x = 5 : \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \rightarrow \text{div}.$$

$$\text{im } x = 9 : \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m} \rightarrow \text{comu (Leibnitz)}$$

~~$$b_m = \frac{1}{2^m}$$~~

$$\text{im } x = 8 : \sum \frac{1}{2^m} \rightarrow \text{comu}.$$

$$\text{im } x = 5 : \sum (-1)^m \rightarrow \text{div}.$$

$$\text{im } x = 9 : \sum 1 \rightarrow \text{div}.$$

b) $R_{\max} = \text{raza maximă de comu}.$

Cum $a_m \neq 0$, avem că $R = 2 \Rightarrow R_{\max} \geq 2$

dacă $R_{\max} \leq 2$.

$\dim(1)$

$\Rightarrow R_{\max} = 2$.

④ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cont s.t. $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ ④

Dann ist f injektiv.

Für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x_0) = f(y_0) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} 0 \geq |x_0 - y_0| \geq 0$

$$\Rightarrow |x_0 - y_0| = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = y_0 \Rightarrow f \text{ injektiv. } \text{ (V)}$$

~~f stetig~~ cont

\Rightarrow

$\Rightarrow f$ monoton. Für eine restriktive Generalisierung, prüfen wir, ob f injektiv ist. At. Pkt $x \geq y$, queren,

$$f(x) - f(y) \geq x - y$$

$$\Downarrow y = 0.$$

$$f(x) - f(0) \geq x \quad \forall x \geq 0. / \lim_{x \rightarrow \infty}$$

$$\Rightarrow f(\infty) - f(0) \geq \infty \Rightarrow f(\infty) \geq \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$x = 0.$$

$$f(0) - f(y) \geq -y \quad \forall y \leq 0 / \lim_{y \rightarrow -\infty}$$

$$\Rightarrow f(0) - f(-\infty) \geq \infty \Rightarrow f(-\infty) \leq -\infty \Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = -\infty$$

f cont \Rightarrow feste PD.

$\Rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R}$ i.e. f surj. (Q)

Dim (1), (2) $\Rightarrow f$ bij.