$End_K(V)$ s.n. inelul endomorfismelor spațiului vectorial V.

În fapt, $R = End_K(V)$ are o structură mai bogată (decât doar cea de inel), și anume:

- R inel
- R K-spațiu vectorial

cu aceeași adunare subiacentă

- $\alpha \in K$, $r, s \in R \Rightarrow (\alpha r)s = r(\alpha s) = \alpha(rs)$

O mulțime R înzestrată cu două structuri (inel și K-spațiu vectorial) și o relație de compatibilitate între ele ca mai sus se numește <u>K-algebră</u>.

Așadar $End_K(V)$ este K-algebră.

Dacă R și S sunt două K-algebre, un morfism de K-algebre este o funcție $f: R \to S$ care este aplicație liniară (adică morfism de K-spații vectoriale) și morfism de inele. Dacă în plus f este bijectivă, atunci f s.n. izomorfism de K-algebre.

<u>Exercițiu</u>. Orice K-algebră R se scufundă într-o K-algebră de forma $End_K(V)$. În plus, dacă R este finit dimensională, atunci V poate fi ales finit dimensional.

4 Inele de matrice: dacă R este inel și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci inelul $M_n(R)$ al matricelor $n \times n$ cu elemente din R a fost construit în sem. I.

În plus, pt. K corp comutativ, $M_n(K)$ este K-algebră cu structura uzuală de K-spațiu vectorial.

Exerciții 1) Fie K un corp comutativ și V un K-spațiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci K-algebrele $End_K(V)$ și $M_n(K)$ sunt izomorfe.

2) Fie R o K-algebră de dimensiune n peste corpul comutativ K. Atunci R se poate scufunda în K-algebra $M_n(K)$.

5 Inelul opus: dacă R este un inel, atunci inelul opus R^{op} se definește astfel:

- $R^{op} = R$ ca mulțimi
- adunarea din R^{op} e aceeași din R
- înmulțirea $*$ din R^{op} este definită prin
$$a * b = ba \text{ pt. orice } a, b \in R.$$

(Exercițiu: verificați că R^{op} este inel).

Evident, dacă R e comutativ, atunci $R^{op} = R$.

Dacă R este o K-algebră, atunci structura de inel a lui R^{op}, împreună cu structura de K-spațiu vectorial a lui R definesc o structură de K-algebră, numită algebra opusă a lui R (și notată cu R^{op}).

<u>Exercițiu</u>. Fie K corp comutativ și $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci K-algebrele $M_n(K)$ și $M_n(K)^{op}$ sunt izomorfe.

⑥ Fie $d \in \mathbb{Z}$ care nu este pătrat perfect. Atunci $\{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \overset{not}{=} \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ este subinel în $\mathbb{R}$, iar $\{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \overset{not}{=} \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ este subcorp în $\mathbb{R}$.

(Demonstrație: exercițiu!).

⑦ Notăm

$$\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\} \text{ și}$$

$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Să se arate că $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ este subinel al lui $\mathbb{R}$, iar $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ este subcorp al lui $\mathbb{R}$.

[Demonstrație: exercițiu!

Indicație: arătați că

$$a, b, c \in \mathbb{Q},\ a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0\ ]$$

Ideale și inele factor: Fie R un inel comutativ.
O submulțime I a lui R se numește ideal dacă:

$$\begin{cases} \cdot\ I \leq (R,+) \\ \cdot\ a \in R,\ x \in I \Rightarrow ax \in I \end{cases}$$

În acest caz se poate construi inelul factor $\frac{R}{I}$ astfel:

- $\left(\frac{R}{I}, +\right)$ este grupul factor al lui $(R,+)$ în raport cu subgrupul I; adică

$$\frac{R}{I} = \{ a+I \mid a \in R \}.$$

deci adunarea în $\frac{R}{I}$ este $\hat{a}+\hat{b} = \widehat{a+b}$

$a+I$ se mai notează și $\hat{a}$, iar $\hat{a}=\hat{b} \Leftrightarrow a-b \in I$.

- înmulțirea pe $\frac{R}{I}$ este definită prin

$$\hat{a}\cdot\hat{b} = \widehat{ab} \quad \text{pt. orice } a,b \in R.$$

Proiecția canonică $\pi: R \to \frac{R}{I}$, $\pi(a) = \hat{a}$ pt. orice $a \in R$, este morfism surjectiv de inele.

Teorema fundamentală de izomorfism pt. inele.

Fie $f: R \to S$ morfism de inele. Atunci $\mathrm{Ker}\, f$ este ideal în R, $\mathrm{Im}\, f$ este subinel al lui S și există un izomorfism de inele

$$\frac{R}{\mathrm{Ker} f} \simeq \mathrm{Im}\, f.$$

Ideale maximale

Fie R un inel comutativ. Pentru ce ideale I inelul factor $\frac{R}{I}$ este corp?

Definiție Un ideal I al lui R se numește ideal maximal dacă $I \neq R$ și pentru orice ideal J cu $I \subset J \subset R$ avem $J = I$ sau $J = R$.

Exemple 1) Dacă $R = \mathbb{Z}$, atunci idealele maximale ale lui R sunt cele de forma $p\mathbb{Z}$, cu p prim.

2) Dacă R este corp, atunci 0 este singurul ideal maximal.

Exerciții ① Să se determine idealele maximale ale lui $\mathbb{Z}_n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

② Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $R_1, \ldots, R_n$ inele comutative. Să se determine idealele maximale ale inelului $R_1 \times \ldots \times R_n$.

Propoziție Fie I ideal în inelul comutativ R, cu $I \neq R$. Atunci $\frac{R}{I}$ este corp $\iff$ I este ideal maximal.

Dem. "$\Rightarrow$" Presupunem că $\frac{R}{I}$ este corp. Fie J ideal în R cu $I \subset J \subset R$.

Dacă $J \neq I$, fie $a \in J \setminus I$. Atunci $\hat{a} \neq 0$ în $\frac{R}{I}$, deci $\hat{a}$ este inversabil, adică există $b \in R$ cu $\hat{a}\hat{b} = \hat{1}$. Rezultă că $ab - 1 \in I$. Atunci

$$1 = \underbrace{(1 - ab)}_{\in I \subset J} + \underbrace{ab}_{\in J} \in J, \text{ deci } J = R.$$

"$\Leftarrow$" Presupunem că I este ideal maximal. Fie $\hat{a} \in \frac{R}{I}$, $\hat{a} \neq 0$, deci $a \notin I$. Atunci $I + Ra$ este ideal în R și $I \subsetneq I + Ra$ (deoarece $a \in I + Ra$, $a \notin I$). Cum I este maximal, rezultă că $I + Ra = R$, deci $1 \in I + Ra$. Așadar există $x \in I$, $b \in R$ cu $1 = x + ba$. Obținem $\hat{1} = \underset{0}{\hat{x}} + \hat{b}\hat{a} = \hat{b}\hat{a}$, deci $\hat{a}$ este inversabil în $\frac{R}{I}$.

Vom demonstra (spre sfârșitul cursului) următorul rezultat fundamental:

Lema lui Krull. Fie R un inel comutativ și I un ideal în R cu $I \neq R$. Atunci există un ideal maximal M al lui R cu $I \subset M$.

<u>Definiție</u>. Un inel comutativ R se numește <u>local</u> dacă are un singur ideal maximal.

<u>Exercițiu</u>. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Să se arate că $\mathbb{Z}_n$ este inel local dacă și numai dacă există p prim și $k \in \mathbb{N}^*$ cu $n = p^k$.

<u>Exercițiu</u>. Fie R un inel comutativ. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) R este local.

(b) $R \setminus U(R)$ este ideal în R.

(c) Dacă $a, b \in R$ și $a+b \in U(R)$, atunci $a \in U(R)$ sau $b \in U(R)$.

(Indicație: se poate folosi Lema lui Krull).

Inelele locale constituie o clasă de mare importanță în matematică. Atunci când dorim să studiem anumite obiecte (spații topologice, varietăți algebrice, varietăți diferențiabile, etc.) în vecinătatea unui punct (deci local) prin intermediul unor spații de funcții pe obiectele respective, se poate construi un inel local ale cărui proprietăți dau informații (locale) despre obiectul respectiv.

<u>Exemplu</u>. Fie $A = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcție continuă $\}$, care este inel cu adunarea și înmulțirea obișnuite ale funcțiilor. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definim pe A relația $\sim$ prin: dacă $f, g \in A$, atunci

$f \sim g \iff$ există o vecinătate a lui x_0 pe care f și g coincid $\big(\iff \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $f(x) = g(x)$ pt. orice $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \big)$.

Atunci $\sim$ este relație de echivalență (Exercițiu: verificați!).

Se verifică ușor (exercițiu!) că:

$$\cancel{f_1 \sim g_1,\ f_2 \sim g_2 \Rightarrow (f_1 + f_2) \sim (g_1 + g_2) \text{ și } (f_1 f_2) \sim (g_1 g_2)}.$$

(*) $f_1 \sim f_2$ și $g_1 \sim g_2 \Rightarrow (f_1 + g_1) \sim (f_2 + g_2)$ și $(f_1 g_1) \sim (f_2 g_2)$.

Aceste relații permit ca pe mulțimea factor

$R = \frac{A}{\sim}$ (a claselor de echivalență relativ la $\sim$)

putem defini două operații $+$ și $\cdot$ prin

$\hat{f} + \hat{g} \overset{\text{def}}{=} \widehat{f+g}$ și $\hat{f} \cdot \hat{g} = \widehat{fg}$ pt. orice

$\hat{f}, \hat{g} \in R$ (am notat cu $\hat{f}$ clasa lui f în $\frac{A}{\sim}$).

[Verificați că operațiile sunt corect definite folosind relațiile (*)] Elementele lui R se numesc germeni.

Mai mult, R este inel comutativ cu aceste operații [Exercițiu: verificare!], cu elementul neutru la înmulțire $\hat{e}$, unde $e: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $e(x)=1$ pt. orice $x\in\mathbb{R}$.

Arătăm că dacă $f\in A$, atunci

$\hat{f}$ este element inversabil în $R \iff f(x_0)\neq 0$.

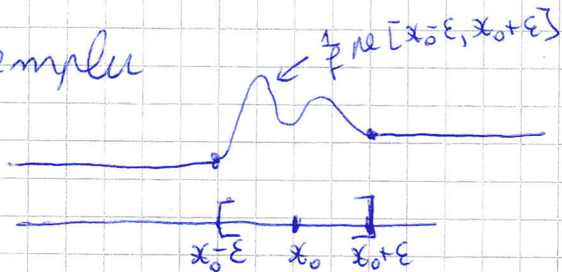
„$\Rightarrow$" Fie $\hat{g}$ inversul lui $\hat{f}$, $g\in A$, deci

$\hat{f}\hat{g}=\hat{e}$, sau $\widehat{fg}=\hat{e}$. Atunci există $\varepsilon>0$ pentru care fg și e coincid pe $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, deci $f(x)g(x)=e(x)=1$ pt. orice $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

În particular $f(x_0)g(x_0)=1$, de unde $f(x_0)\neq 0$.

„$\Leftarrow$" Cum f este continuă în x_0 și $f(x_0)\neq 0$, există $\varepsilon>0$ a.î. $f(x)\neq 0$ pt. orice $x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$.

Atunci există o funcție continuă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pt. care $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ pt. orice $x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, de exemplu



$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{f(x)}, & \text{pt. } x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\\ \frac{1}{f(x_0-\varepsilon)}, & \text{pt. } x\in(-\infty, x_0-\varepsilon)\\ \frac{1}{f(x_0+\varepsilon)}, & \text{pt. } x\in(x_0+\varepsilon, \infty)\end{cases}$$

Atunci $f(x)g(x)=1$ pt. $x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, de unde

$\hat{f}\hat{g}=\hat{e}$, adică $\hat{f}$ e inversabil în R.

Prin urmare $R \setminus U(R) = \{ \hat{f} \mid f \in A$ și $f(x_0) = 0 \}$.

Arătăm că $\hat{f}, \hat{g} \in R$ și $\hat{f} + \hat{g} \in U(R) \Rightarrow \hat{f} \in U(R)$ sau $\hat{g} \in U(R)$.

Într-adevăr, $\hat{f} + \hat{g} \in U(R) \Rightarrow f(x_0) + g(x_0) \neq 0$.

Dacă $\hat{f} \notin U(R)$ și $\hat{g} \notin U(R)$, ar rezulta că $f(x_0) = g(x_0) = 0$, deci și $f(x_0) + g(x_0) = 0$, contradicție.

Folosind exercițiul precedent, rezultă că R este inel local (iar unicul ideal maximal este $R \setminus U(R)$).