Mulțimea numerelor reale

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Spunem că

- $m \in \mathbb{R}$ este MINORANT $\Leftrightarrow$ $m \leq a, \forall a \in A$
- $M \in \mathbb{R}$ este MAJORANT $\Leftrightarrow$ $M \geq a, \forall a \in A$

- A este → MĂRGINITĂ SUPERIOR $\Leftrightarrow$ are un majorant
  → MĂRGINITĂ INFERIOR $\Leftrightarrow$ are un minorant
  → MĂRGINITĂ $\Leftrightarrow$ este mărginită superior și inferior
  $\Leftrightarrow \exists k > 0$ a.î. $|a| \leq k, \forall a \in A$
  → A este NEMĂRGINITĂ $\Leftrightarrow$ nu are majorant sau nu are un minorant
  de ex, dacă nu are majorant $\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A$ a.î. $M < a$.

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Spunem că

- $m \overset{\text{not}}{=} \min A$ este MINIMUL $\Leftrightarrow$ $m \leq a, \forall a \in A$ și $m \in A$
- $M \overset{\text{not}}{=} \max A$ este MAXIMUL $\Leftrightarrow$ $M \geq a, \forall a \in A$ și $M \in A$

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A mărginită → superior:

- M este marginea superioară SUPREMUM $\Leftrightarrow$ M cel mai mic majorant al lui A
  $M \overset{\text{not}}{=} \sup A$ $\Leftrightarrow \forall a \in A, a \leq M, \forall M' \in \mathbb{R}$, M' majorant $\Rightarrow M' \geq M$

→ inferior

- m este marginea inferioară INFIMUM $\Leftrightarrow$ m cel mai mare minorant al lui A
  $m \overset{\text{not}}{=} \inf A$

Obs! Dacă mulțimea A are minim, atunci $\min A = \inf A$.

Axioma lui Cantor

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A mărginită superior, atunci A are margine superioară (supremum)

OBS! $\mathbb{Q}$ nu verifică axioma lui Cantor

1) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ corp comutativ

2) "$\leq$" relație de ordine $\Rightarrow \forall a, b, x, y \in \mathbb{Q}$, $y > 0$, $a \leq b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + x \leq b + x \\ ay \leq by \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{Q}$, $x \leq 0$ sau $x > 0$

(1) + (2) $\Rightarrow$ corp ordonat

1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ corp comutativ

2) "$\leq$" relație de ordine $\Rightarrow \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, $a \leq b \Rightarrow$

$$\begin{cases} a + x \leq b + x \\ ay \leq by \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ sau $x = 0$ sau $x > 0$

3) Axioma lui Cantor

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ corp complet ordonat

OBS! Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ mărginită inferior. Atunci A are margine inferioară, $\inf A \subseteq \mathbb{R}$.

Proprietăți

1) Proprietatea lui Arhimede ($\mathbb{R}$ arhimedian)

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Atunci există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $a < nb$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Pt $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $x < n$

dem. pp $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $n \leq x$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ este mărginită superior. Fie $N = \sup \mathbb{N} \Rightarrow n \leq N$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \leq N \Rightarrow n \leq N - 1$, dar $N = \sup \mathbb{N} \Rightarrow N \leq N - 1 \Rightarrow$ contradicție

2) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există $m \in \mathbb{Z}$ a.î. $m \le a < m+1$. Notăm $m = [a]$ $\to$ partea întreagă a lui $a \in \mathbb{R}$

$\{a\} = a - [a]$ $\to$ partea fracționară a lui $a \in \mathbb{R}$, $\{a\} \in [0,1)$, $\forall a \in \mathbb{R}$

3) Principiul intervalelor închise

Fie $([a_n, b_n])_{n \ge 1}$ un șir de intervale închise a.î. $a_n < b_n$, $\forall n \ge 1$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \ge 1$ și $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $\forall n \ge 1$. Atunci

$$\bigcap_{n \ge 1} [a_n, b_n] \ne \emptyset \overset{OBS}{\iff} \text{axioma lui Cantor}$$

OBS! Principiul intervalelor închise $\Rightarrow$ Ax. lui Cantor (arhimediale)

OBS! $\bigcap_{n \ge 1} [a_n, b_n] = \{x\}$ $(x = \sup\{a_n \mid n \ge 1\} = \inf\{b_n \mid n \ge 1\})$

4) Mulțimile $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sunt dense în $\mathbb{R}$ („în sensul ordinii”), adică $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ există $x \in \mathbb{Q}$ și $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a.î. $a < x < b$, $a < y < b$

OBS! Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Atunci există o infinitate de numere raționale între ele.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Atunci există o infinitate de numere iraționale între ele.

Def: $A \ne \emptyset$. Spunem că

- A este FINITĂ $\iff$ $\exists m \in \mathbb{N}, m \ge 1$ și $f: A \to \{1, 2 \dots m\}$ bijectivă
- A este NUMĂRABILĂ $\iff$ $\exists f: \mathbb{N} \to A$ bijectivă
- A este CEL MULT NUMĂRABILĂ $\iff$ este finită sau numărabilă
- A este INFINITĂ $\iff$ nu este finită $\iff$ poate fi pusă în bijecție cu o submulțime a ei.

MULȚIMI NUMĂRABILE: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $2\mathbb{Z}$

MULȚIMI NENUMĂRABILE: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $[0,1]$, $(1, \infty)$

- A este NENUMĂRABILĂ $\iff$ nu este cel mult numărabilă

OBS! Fie $(I_n)_{n\geq 1}$ şir de mulţimi cel mult numărabile (numărabile)

Atunci $\bigcup_{n\geq 1} I_n$ este cel mult numărabilă (numărabilă)

Mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Pe $\overline{\mathbb{R}}$, $\leq_{\overline{\mathbb{R}}}$ $\begin{cases} x = -\infty, y \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow x \leq_{\overline{\mathbb{R}}} y \\ x \in \mathbb{R}, y = +\infty \Rightarrow x \leq_{\overline{\mathbb{R}}} y \\ x, y \in \mathbb{R}, x \leq_{\overline{\mathbb{R}}} y \Leftrightarrow x \leq y \ (\text{în } \mathbb{R}) \end{cases}$

$(\overline{\mathbb{R}}, \leq_{\overline{\mathbb{R}}})$ verifică axioma lui Cantor.

$\forall A \neq \emptyset, A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ există $\sup A$ (în $\overline{\mathbb{R}}$)

$\forall A \neq \emptyset, A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este mărginită superior în $\overline{\mathbb{R}}$ ($+\infty$ este majorant)

Dacă $A \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ şi a este mărginită superior în $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\limits_{(\text{în } \overline{\mathbb{R}})} A = \sup\limits_{(\text{în } \mathbb{R})} A$

Dacă $A \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dar A nu este mărginită superior în $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\limits_{(\text{în } \overline{\mathbb{R}})} A = +\infty$

Not: $\sup A = +\infty$, $A \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow A$ nemărginită superior

propr. echivalente şi pt inf A, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$

„+" şi „·" pe $\overline{\mathbb{R}}$, $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x +_{\overline{\mathbb{R}}} y = x + y$ în $\mathbb{R}$

- dacă $x = +\infty$, $y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x + y = +\infty$

  $x = -\infty$, $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $-\infty + y = -\infty$

  $x = +\infty$, $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $y > 0 \Rightarrow x \cdot y = +\infty$

  $y < 0 \Rightarrow x \cdot y = -\infty$

  $(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

NU DEFINIM: $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $(-\infty) \cdot 0$

• Dacă $x \in \mathbb{R}$, $x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$, $x^m = x \cdot x^{m-1}$, $\forall m \in \mathbb{N}$

$x \in \mathbb{R}^*$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^{-m} = (x^{-1})^m = (x^m)^{-1}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$

Def: Fie $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$. Spunem că

- f este CRESCĂTOARE $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- f este DESCRESCĂTOARE $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- f este STRICT CRESCĂTOARE $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f este STRICT DESCRESCĂTOARE $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- f este MONOTONĂ $\Leftrightarrow f$ crescătoare sau descrescătoare
- f este STRICT MONOTONĂ $\Leftrightarrow f$ strict crescătoare sau strict descrescătoare

Def: Fie $f: A \to A$. Spunem că x_0 este PUNCT FIX pentru funcția f, dacă $f(x_0) = x_0$.

Teorema lui Knaster (de punct fix)

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \to [a,b]$ crescătoare. Atunci f are un punct fix. $\Leftrightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ a.î. $f(x_0) = x_0$

OBS! Teorema lui Knaster nu funcționează pt. funcții descrescătoare

OBS! $f: [a,b] \to [a,b]$ descrescătoare. Atunci $\exists c \in [a,b]$ a.î. $f(c) = a + b - c$

Teoremă

Pentru $\forall x \in [0,\infty)$ și $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $\exists!$ $a \in [0,\infty)$ a.î. $a^m = x$. Acest număr va fi notat $a = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ și se numește radicalul aritmetică de ordin m a numărului x.

Teoremă

Fie $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ (sau $0 < x < 1$). Atunci există $\varphi: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ a.î.

1) φ crescătoare strict (sau strict descrescătoare)

2) $\varphi(a+b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 3) $\varphi(1) = x$.

OBS! f este bijectivă și se numește funcția exponențială de bază x

În plus, $f(a) = x^a$, $\forall a \in \mathbb{Q}$ și $\forall a \in \mathbb{R}$

- dacă $x > 1$ $f(a) = \sup \{ x^r / r \in \mathbb{Q}, r \leq a \}$
  $f(a) = \inf \{ x^r / r \in \mathbb{Q}, r \geq a \}$
- dacă $x < 1$ $f(a) = \inf \{ x^r / r \in \mathbb{Q}, r \leq a \}$
  $f(a) = \sup \{ x^r / r \in \mathbb{Q}, r \geq a \}$

Obs! f bijectivă $\Rightarrow \exists f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ și se numește funcția logaritmică de bază x.

Șiruri convergente

Def: Fie $M \neq \emptyset$. Se numește ȘIR cu elemente din M o funcție $f : \mathbb{N} \to M$ ($0 \leadsto f(0) = x_0 \ldots n \leadsto f(n) = x_n$)

Notație $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq M$.

Putem considera $f : \mathbb{N}^* \to M$ $(x_n)_{n \geq 1}$

$f : \{ n \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \} \to M$ $(x_n)_{n \geq n_0}$

Def: Fie $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict crescătoare și $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de elemente din M ($(x_n)_{n \geq 0}$ asociat funcției $f : \mathbb{N} \to M$). Atunci șirul $(x_{k(n)})_{n \geq 1}$ se numește SUBȘIR al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$

Def: Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ șir de numere reale. Spunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ este:

- MĂRGINIT $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}$ a.î. $m < x_n < M$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
  $\Leftrightarrow \exists R > 0$ a.î. $|x_n| < R$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- CRESCĂTOR $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
  STRICT CRESCĂTOR $\Leftrightarrow x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- DESCRESCĂTOR $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
  STRICT DESCRESCĂTOR $\Leftrightarrow x_n > x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- MONOTON $\Leftrightarrow$ este crescător sau descrescător

Def: Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul este CONVERGENT dacă $\exists \ell \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. pt $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - \ell| < \varepsilon$

Notație: $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (ℓ se numește LIMITA ȘIRULUI)

- un șir care nu este convergent se numește DIVERGENT

$\Leftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_\ell > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists n_\ell \geq n$ a.î. $|x_n - \ell| \geq \varepsilon_\ell$

Propoziție: Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ un șir convergent. Atunci orice subșir al lui este convergent.

Propoziție 2: Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ șir convergent, atunci limita șirului este unică.

Def: Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă $\exists \ell \in \mathbb{R}$ a.î. $\exists V \in \mathcal{V}_\ell$, $\exists n_V \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_V$ avem $x_n \in V$.

Def: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este ȘIR CAUCHY (FUNDAMENTAL) dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall m, n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - x_m| < \varepsilon$ ($\Leftrightarrow \forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$ avem $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$)

OBS! $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este șir Cauchy dacă $\exists \varepsilon_0 > 0$ a.î. pt $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n_{\varepsilon_0}, m_{\varepsilon_0} > N$ a.î. $|x_{n_{\varepsilon_0}} - x_{m_{\varepsilon_0}}| \geq \varepsilon_0$

Def: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că $x \in \mathbb{R}$ se numește PUNCT LIMITĂ al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă există un subșir $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$ al său a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k(n)} = x$

Notez: $\mathcal{L}((x_n)_{n\geq 1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ punct limită al șirului $(x_n)_{n\geq 1}\}$

Proprietăți:

1) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

- $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ mărginit

• dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ şir Cauchy $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\geq 1}$ mărginit

2) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

- dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ şir convergent $\Rightarrow$ $\forall (x_{k(n)})_{n\geq 1}$ convergent şi are aceeaşi limită
- dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ şir Cauchy $\Rightarrow$ $\forall (x_{k(n)})_{n\geq 1}$ este şir Cauchy

3) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$(x_n)_{n\geq 1}$ convergent $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\geq 1}$ şir Cauchy

4) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy şi $(x_n)_{n\geq 1}$ are un subşir convergent, atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent

Lema lui Cesaro

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ mărginit. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ are un subşir convergent.

Teoremă

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Sunt echivalente afirmaţiile

- $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent
- $(x_n)_{n\geq 1}$ Cauchy

OBS! Spunem că $\mathbb{R}$ este (spaţiu metric) COMPLET (orice şir Cauchy este convergent)

Def: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $x_n > \varepsilon$.

Spunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $x_n \leq -\varepsilon$.

OBS! Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$

- $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow$ x_n are limită
- $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_n \text{ nu are limită} \\ x_n \text{ are limită infinită} \end{cases}$

Teoremă:

Fie $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$.

- Dacă x_n este monoton și mărginit, atunci x_n este convergent
- Dacă x_n este doar monoton, atunci x_n are limită

Propoziție 6: Fie $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, $a \in \mathbb{R}$. Atunci

- $x < a$ (sau $x > a$) $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x_n < a$ (sau $x_n > a$) $\forall n \geq n_0$
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq a$ (sau $x_n \geq a$) $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x \leq a$ (sau $x \geq a$)

Teoremă: ⇝ teorema cleștelui

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$, $(z_n)_{n \geq 1}$, $a \in \mathbb{R}$ a.î.

$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} z_n = a$ cu $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}^*$)

Atunci $\lim_{n \to \infty} y_n = a$

Operații cu șiruri convergente

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim_{n \to \infty} y_n = y \in \mathbb{R}$. Atunci

1) $x_n + y_n$ convergent, $\lim_{n \to \infty} x_n + y_n = x + y$

2) $x_n y_n$ convergent $\lim_{n \to \infty} x_n y_n = xy$

3) $|x_n|$ convergent $\lim_{n \to \infty} |x_n| = |x|$

4) $x_n \neq 0$ $\forall n$, $x \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$

Limita inferioară și limita superioară

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$, (x_n) mărginit. Definesc

$u_n = \sup \{x_n, x_{n+1} \dots\} = \sup_{k \geq n} x_k$, $\forall n \geq 1$

$v_n = \inf \{x_n, x_{n+1} \dots\} = \inf_{k \geq n} x_k$, $\forall n \geq 1$

$u_n \to$ șir descrescător, $v_n \to$ șir crescător ($A \subseteq B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$

$\Rightarrow \sup A \leq \sup B$

$\Rightarrow u_n$ și v_n au limită

! u_n nu este subșir al lui x_n în general
$x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$; $u_n = 1$, v_n ... nu e

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{n} (u_n) = \inf\limits_{n\geq 1} (\sup\limits_{k\geq n} x_k) \rightsquigarrow$ limita superioară a șirului $(x_n)_{n\geq 1}$

Notam $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sup\limits_{n\geq 1} v_n = \sup\limits_{n\geq 1} (\inf\limits_{k\geq n} x_k) \rightsquigarrow$ limita inferioară a șirului $(x_n)_{n\geq 1}$

OBS! Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ mărginit. Atunci $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

Proprietăți

1) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ mărginit, $a = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$.
Atunci există subșiruri $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$ și $(x_{l(n)})_{n\geq 1}$ ale lui $(x_n)_{n\geq 1}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k(n)} = a$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_{l(n)} = b$.

$\Leftrightarrow a, b$ sunt puncte limită ale șirului, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \in L((x_n)_n)$

OBS! din prop. 1 $\Rightarrow$ Lema lui Cesaro

2) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ șir mărginit. Atunci $L((x_n)_{n\geq 1})$ este mărginită și închisă. (își conține inf și sup)

3) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ mărginit. Atunci

- $L((x_n)_{n\geq 1})$ are minim și maxim
- $\min L((x_n)_{n\geq 1})$ este $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$
- $\max L((x_n)_{n\geq 1})$ este $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

4) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ mărginit. Atunci sunt echivalente informațiile

- $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent ($\Leftrightarrow \forall$ subșir al lui are aceeași limită)
- $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$

6) Fie $(x_n)_{n\ge 1} \subseteq \mathbb{R}$ mărginit. Atunci

• dacă $x_n \le y_n,\ \forall n \ge n_0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \end{cases}$

• $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le$

$\le \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$

• $\underline{\lim}_{n\to\infty} (-x_n) = -\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

Numărul e

Fie $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \forall n \ge 1$

$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \forall n \ge 1$

$z_n = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!},\ \forall n \ge 1$

Avem: • $(x_n)_{n\ge 1}$ str. crescător și mărginit $\Rightarrow$ convergent

Notăm $e = \lim_{n\to\infty} x_n$

• $(y_n)_{n\ge 1}$ strict descrescător și mărginit $\Rightarrow$ convergent

$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = e$

• $(z_n)_{n\ge 1}$ strict crescător și mărginit $\Rightarrow$ convergent

$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n = e$

Obs Pentru $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\ge 1}$, $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ convergent și

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Operații cu șiruri cu limită

Fie $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$

1) $x = -\infty$, $y \in [-\infty, \infty) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty \ (x+y)$

$x = +\infty$, $y \in (-\infty, \infty] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty \ (x+y)$

2) $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$

3) $x = -\infty$, $y \in \overline{\mathbb{R}}^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy \begin{cases} -\infty, & y > 0 \\ +\infty, & y < 0 \end{cases}$

4) $x = +\infty$ sau $x = -\infty$ și $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0 = \frac{y}{x}$

pe $\overline{\mathbb{R}}$ nu sunt definite: $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, ∞^0, 1^∞, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

Lema Stoltz - Cesaro

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât I sau II se verifică

I $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \\ y_n \text{ strict monoton} \end{cases}$

II $\begin{cases} y_n \text{ nemărginit} \\ y_n \text{ strict monoton} \end{cases}$

$\Leftrightarrow y_n$ monoton și $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty / -\infty$

Presupunem că $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ și $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

OBS! Dacă nu există limita șirului $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ NU înseamnă că nu există limita șirului $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq 1}$

Serii de numere reale

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$.

Definim: $s_n = x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $\forall n \geq 1$. Perechea formată din $((x_n)_{n\geq 1}, (s_n)_{n\geq 1})$ se numește SERIA DE TERMEN GENERAL $(x_n)_{n\geq 1}$

$(x_n)_{n\geq 1}$ → termen general (x_n → termenul de rang n al seriei)

$(s_n)_{n\geq 1}$ → șirul sumelor parțiale

Notație: $((x_n)_{n\geq 1}, (s_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n\geq 1} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Spunem că SERIA $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este CONVERGENTĂ dacă șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este convergent. În această situație, limita șirului $(s_n)_{n\geq 1}$ se numește suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (se not. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$)

Dacă șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este divergent spunem că SERIA $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este DIVERGENTĂ

Seria geometrică:

$a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n = a^n$, $\forall n \geq 1$. $s_n = a + a^2 + \dots + a^n$

$a = 1 \Rightarrow s_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow$ serie divergentă

$a \neq 1 \Rightarrow s_n = a \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$ $\Rightarrow$ convergentă pt $a \in (-1, 1)$

$\Rightarrow$ divergentă în rest

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ → convergentă pt $a \in (-1, 1)$

→ divergentă pt $|a| \geq 1$

Propoziție: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ a.î. seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

Atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

$\nLeftarrow$

Obs! Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ nu tinde la 0 => seria nu este convergentă

Seria armonică:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{cases} \text{convergentă pentru } \alpha > 1 \\ \text{divergentă pentru } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Teoremă 1 (Criteriul lui Cauchy)

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci sunt echivalente informațiile:

- seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă
- pentru $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}$ $|x_n + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon$

Operații cu serii convergente

Fie $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente, $\alpha \in \mathbb{R}$

Atunci:

- $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)}_{\text{convergentă}} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$
- $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n}_{\text{convergentă}} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Obs! Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente, în general $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ NU este convergentă

Teoremă 2 (Criteriul Abel-Dirichlet)

Fie $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Presupunem că I sau II adevărat

I $\begin{cases} x_n \text{ descrescător cu } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ mărginit} \end{cases}$ II $\begin{cases} x_n \text{ descrescător și convergent (monoton)} \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ convergentă} \end{cases}$

Atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă

Corolar: Criteriul lui Leibniz

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ descrescător, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergentă.

$x_n \searrow^{n} 0$

OBS: În criteriul A.D este suficient ca $(x_n)_{n\geq 1}$ să fie monoton ???

Def: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este ABSOLUT CONVERGENTĂ dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Propoziție 1: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergentă

$\not\Leftarrow$

Serii cu termeni pozitivi

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq [0, \infty)$, $S_n = x_1 + \ldots + x_n$, $\forall n \geq 1$

$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0$, $\forall n \geq 1$

S_n crescătoare $\Rightarrow (S_n)_{n\geq 1}$ are limită

$\Rightarrow (S_n)_{n\geq 1}$ convergent $\Leftrightarrow (S_n)_{n\geq 1}$ mărginit

Criteriul comparației

Fie $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subseteq [0, \infty)$.

1) dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$, $x_n \leq y_n$ atunci
   - $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ convergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergentă
   - $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ divergentă

2) dacă $y_n > 0$, $\forall n \geq 1$ și $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, \infty)$, atunci
   - $l = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n\geq 1} y_n \text{ convergent} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n \text{ convergent} \\ \sum_{n\geq 1} x_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} y_n \text{ divergent} \end{cases}$
   - $l \in (0, \infty) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ și $\sum_{n\geq 1} y_n$ au aceeași natură

• $\ell = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n\geq 1} x_n \text{ convergentă} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} y_n \text{ convergentă} \\ \sum_{n\geq 1} y_n \text{ divergentă} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n \text{ divergentă} \end{cases}$

Criteriul raportului (d'Alembert)

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq (0,\infty)$ a.î. $\exists\, q \in (0,1)$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ pt. care $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$, $\forall n \geq n_0$ atunci $\sum_{n\geq 1} x_n$ este serie convergentă.

Corolar: $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq (0,\infty)$, $\ell = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}}$ ⤷ important să fie limita pt că pot avea

• $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ convergentă

• $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ divergentă

• $\ell = 1 \Rightarrow$ nu putem spune nimic

$x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ dar $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ (dar de ex $x_n = \frac{1}{n^2}$ care ...) $\Rightarrow$ serie divergentă

Corolar 2: fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^*$, $L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$, $\ell = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ atunci

• $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă

• $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă

Criteriul radicalului (rădăcinii) ~ Cauchy

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq [0,\infty)$ a.î. $\exists\, q \in (0,1)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1$, $\forall n \geq n_0$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergentă.

obs! Dacă $\exists\, q \geq 1$ a.î. $\sqrt[n]{x_n} \geq q \geq 1$, $\forall n \geq n_0$, atunci $\sum_{n\geq 1} x_n$ divergentă

Corolar: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq [0,\infty)$ a.î. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell \in [0,\infty]$ atunci:

• $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ convergentă

• $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ divergentă

• $\ell = 1 \Rightarrow$ nu putem spune nimic

Corolar 2: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, $L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|}$ atunci

• $L < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă

• $L > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă

• $L = 1$ nu putem spune nimic

Obs! $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq (0,\infty)$ atunci

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x_{n+1}}{x_n}} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Obs! Dacă funcționează criteriul raportului, atunci funcționează și criteriul radicalului $\Leftarrow\!\!\!\!/\;?$

Criteriul Raabe-Duhamel:

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq (0,\infty)$ și $q>1$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1, \forall n \geq n_0$. Atunci $\sum_{n\geq 1} x_n$ convergentă.

Corolar: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq (0,\infty)$, $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \ell$, atunci

- $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ convergent
- $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ divergent
- $\ell = 1 \Rightarrow$ nu putem spune nimic

Corolar 2: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^*$, $\ell = \varliminf_{n\to\infty} n\left(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} - 1\right)$,

$L = \varlimsup_{n\to\infty} n\left(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} - 1\right)$

- $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ absolut convergentă
- $L < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ nu este convergentă

Le dau fără să scot rap și corolarele lui

Criteriul condensării (Cauchy):

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ descrescător, atunci seriile $\sum_{n\geq 1} x_n$ și $\sum_{n\geq 1} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

! $\Rightarrow x_n \searrow 0$

Obs! $(x_n)_{n\geq 1}$ descrescător $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ are limită, $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$

- $x \in [-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \Leftrightarrow x \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ divergentă
- $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x_n \searrow 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_n \geq 0, \forall n \geq 1$

Obs! Criteriul condensării pt $x_n \nearrow 0$

$x_n \nearrow 0 \Rightarrow (-x_n)$ descrescător $\sum_{n\geq 1} (-x_n) = -\sum_{n\geq 1} x_n \sim \sum_{n\geq 1} 2^n x_{2^n}$

Teoremă

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, astfel încât $\sum_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă. Atunci pentru orice permutare $(p_n)_{n\geq 1}$ a lui $\mathbb{N}$, seria $\sum_{n\geq 0} x_{p_n}$ este absolut convergentă și are aceeași sumă ca suma inițială.

Obs! Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a.î. pentru orice permutare $(p_n)_{n\geq 0}$ a lui $\mathbb{N}$ seria $\sum_{n\geq 0} x_{p_n}$ este convergentă. Atunci $\sum_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă

Teoremă (Riemann) ?

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ a.î. $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă dar nu absolut convergentă. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci există $(p_n)_{n\geq 0}$ o permutare a lui $\mathbb{N}$ astfel încât $\sum_{n\geq 0} x_{p_n} = \alpha$.

$(x_n)_{n\geq 0}$ — are o infinitate de termeni pozitivi
— are o infinitate de termeni negativi

$(x_n^+)_{n\geq 0}$ $(x_n^-)_{n\geq 0}$ $x_n^+ = \begin{cases} x_n, & x_n > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$ $x_n^- = \begin{cases} x_n, & x_n < 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

$\sum_{n\geq 0} x_n^+ = +\infty$ $\sum_{n\geq 0} x_n^- = -\infty$

Şiruri şi serii de funcţii

Fie $A \neq \emptyset$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$ $(f_n)_{n\geq 1}$ şir de funcţii

Def: Spunem că:

- şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ CONVERGE SIMPLU (PUNCTUAL) la funcţia f, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in A$, adică $\forall x \in A$ şi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon^x \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon^x$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ depinde de x

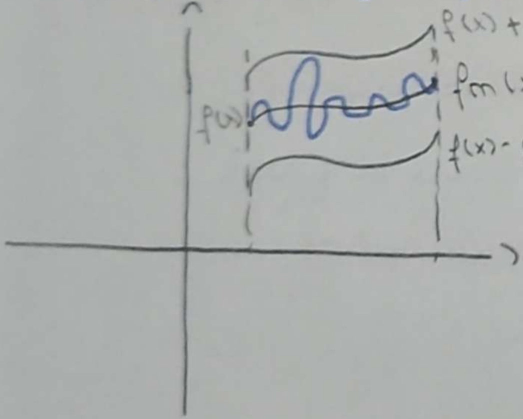
  Notăm: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ sau $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} f$

- şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ CONVERGE UNIFORM la f, dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in A$.

  Notăm: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Obs! $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ ($\not\Leftarrow$)

Obs 2! $f_n \xrightarrow{u} f$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n > n_\varepsilon$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in A \Rightarrow -\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$



Teorema de transport a continuităţii prin convergenţa uniformă:

$f_n, f : A \to \mathbb{R}$
$f_n \xrightarrow{u} f$
f_n cont pe A, $\forall n$ $\Rightarrow f$ continuă pe A

NEGAŢIA

$f_n \xrightarrow{s} f$
f_n cont pe A, $\forall n$
f NU este cont pe A $\Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow{u} f}$ NU CONVERGE UNIF

Propoziţie: Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, $f : A \to \mathbb{R}$. Notăm $a_n = \sup |f_n(x) - f(x)|$. Atunci $f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Def: Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$. Se numeşte SERIE DE FUNCŢII, perechea $\left((f_n)_{n\geq 1}, \left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\geq 1}\right)$ notată $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$

Fie $S: A \to \mathbb{R}$. Spunem că

- $\sum_{n\geq 1} f_n$ CONVERGE SIMPLU pe A dacă șirul de funcții $\left(\sum_{k\geq 1}^{n} f_k = S_n\right)_n$ converge simplu pe A

- $\sum_{n\geq 1} f_n$ CONVERGE UNIFORM pe A dacă șirul de funcții $(S_n)_{n\geq 1}$ converge uniform pe A (sau $\sum_{n\geq 1} f_n = S$).

Teoremă (Weierstrass)

Fie $f_n: A \to \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$ și $(a_n)_{n\geq 1} \subset [0, \infty)$ a.î. $\sum_{n\geq 1} a_n$ convergent. Presupunem $|f_n(x)| < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\forall x \in A$. Atunci $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniform pe A.

Def: Se numește SERIE DE PUTERI o serie de funcții $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, unde $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$, $\forall n > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Considerăm seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ și definim:

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{seria } \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ este convergentă}\} \subset [0, \infty]$$

R se numește RAZA DE CONVERGENȚĂ A SERIEI DE PUTERI

Numim mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ mulțimea $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ convergent}\}$

OBS! 1) $(-R, R) \subseteq C \subseteq [-R, R]$
2) $0 \in C$

Calculez $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \Rightarrow$
serie converg. $\left(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right)$
div pe $\left(-\infty, -\frac{1}{\rho}\right) \cup \left(\frac{1}{\rho}, \infty\right)$
mă interesare pt $-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}$ în serie și calculez

Teorema (Cauchy - Hadamard)

Fie $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$. Notăm $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci raza de converg. a seriei de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este $R = \begin{cases} 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \rho \neq 0, \rho \neq +\infty \end{cases}$

$\sum a_n x^n$ conv $\left(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right) \ni x$; div $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\rho}\right) \cup \left(\frac{1}{\rho}, \infty\right)$