RCIC 21

S-a demonstrat în Sem 1:

<u>Lema chineză a resturilor</u>: Fie R inel comutativ și I, J ideale în R cu $I+J=R$. Atunci există un izomorfism de inele $\frac{R}{I\cap J} \simeq \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}$.

<u>Observație</u>. Dacă I, J sunt ideale în R, atunci $IJ \subset I\cap J$.

Într-adevăr, reamintim că

$$IJ = \{x_1y_1+\dots+x_ny_n \mid n\in\mathbb{N}^*, x_1,\dots,x_n\in I, y_1,\dots,y_n\in J\}.$$

Cum pt. $x\in I, y\in J$ avem $xy\in I$ (pt. că I este ideal) și $xy\in J$ (pt. că J este ideal), obținem $xy\in I\cap J$.

Atunci dacă $n\in\mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n\in I$, $y_1,\dots,y_n\in J$, avem $x_1y_1,\dots,x_ny_n\in I\cap J$, deci și $x_1y_1+\dots+x_ny_n\in I\cap J$.

Am obținut așadar că $IJ\subset I\cap J$.

Incluziunea poate fi strictă, de exemplu pt. $R=\mathbb{Z}$, $I=4\mathbb{Z}$, $J=6\mathbb{Z}$ avem $IJ=24\mathbb{Z}$ și $I\cap J=12\mathbb{Z}$, deci $IJ \subsetneq I\cap J$.

Arătăm că dacă $I+J=R$ (în acest caz spunem că idealele I și J sunt comaximale), atunci $IJ=I\cap J$.

RCIC 22

Într-adevăr, $I+J=R \Rightarrow$ există $a\in I, b\in J$ cu $a+b=1$.

Atunci dacă $x \in I\cap J$ avem

$$x = 1\cdot x = (a+b)x = \underbrace{\overset{\uparrow}{\underset{I}{a}}\overset{\uparrow}{\underset{J}{x}}}_{\in IJ} + \underbrace{\overset{\uparrow}{\underset{J}{b}}\overset{\uparrow}{\underset{I}{x}}}_{\in IJ} \in IJ,$$

deci $I\cap J \subset IJ$, ceea ce arată că $I\cap J = IJ$.

În acest caz, din Lema chineză a resturilor avem

$$\frac{R}{I}\times\frac{R}{J}\simeq\frac{R}{IJ}.$$

Demonstrăm acum o versiune extinsă a Lemei chineze.

<u>Teoremă</u> Fie R inel comutativ, $n\geq 2$ și $I_1,\dots,I_n$ ideale ale lui R pentru care $I_j+I_p=R$ pentru orice $1\leq j,p\leq n$, cu $j\neq p$. Atunci există un izomorfism de inele

$$\frac{R}{I_1\cap\dots\cap I_n}\simeq\frac{R}{I_1}\times\dots\times\frac{R}{I_n}.$$

<u>Demonstrație</u> Inducție după n.

Pt. $n=2$ este chiar Lema chineză a resturilor.

Presupunem adevărat pt. $n-1$ (unde $n\geq 3$) și arătăm pt. n.

Pt. fiecare $1\leq j\leq n-1$ avem $I_j+I_n=R$, deci există $a_j\in I_j$ și $b_j\in I_n$ cu $a_j+b_j=1$. Atunci

$(a_1+b_1)\ldots(a_{n-1}+b_{n-1})=1$. Făcând toate înmulțirile în membrul stâng, obținem o relație de forma $a_1\ldots a_{n-1}+b=1$, cu $b\in I_n$. Cum $a_1\ldots a_{n-1}\in I_1\cap\ldots\cap I_{n-1}$ (se găsește în fiecare I_j deoarece acesta este ideal și $a_j\in I_j$, pt. $1\leq j\leq n-1$), obținem că $I_1\cap\ldots\cap I_{n-1}+I_n=R$. Din cazul $n=2$ (pt. idealele $I_1\cap\ldots\cap I_{n-1}$ și I_n), rezultă că

$$\frac{R}{I_1\cap\ldots\cap I_{n-1}\cap I_n}\simeq\frac{R}{I_1\cap\ldots\cap I_{n-1}}\times\frac{R}{I_n}.$$

Din ipoteza de inducție $\frac{R}{I_1\cap\ldots\cap I_{n-1}}\simeq\frac{R}{I_1}\times\ldots\times\frac{R}{I_{n-1}}$ și obținem

$$\frac{R}{I_1\cap\ldots\cap I_n}\simeq\frac{R}{I_1}\times\ldots\times\frac{R}{I_{n-1}}\times\frac{R}{I_n}.$$

<u>Observație</u>. Se poate demonstra și direct (cu un anumit efort) că aplicația

$$\varphi:R\to\frac{R}{I_1}\times\ldots\times\frac{R}{I_n},\ \varphi(r)=(r+I_1,\ldots,r+I_n),$$

este morfism surjectiv de inele. Cum $\ker\varphi=I_1\cap\ldots\cap I_n$, izomorfismul dorit rezultă direct din Teorema Fundamentală de izomorfism.

Proprietatea de universalitate a corpului de fracții.

Fie R domeniu de integritate. Reamintim din sem 1. că s-a construit corpul de fracții K al lui R astfel: $K=\{\frac{a}{b} \mid a,b\in R, b\neq 0\}$ (unde $\frac{a}{b}$ este clasa de echivalență a perechii (a,b) în raport cu o anumită relație de echivalență pe $R\times R^*$).

Avem $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$.

Operațiile pe K sunt

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Aplicația $\varphi:R\to K$, $\varphi(a)=\frac{a}{1}$, este morfism injectiv de inele (adică R se scufundă în K, sau altfel spus, R e izomorf cu subinelul $\varphi(R)$ al lui K).

<u>Teoremă</u> (Proprietatea de universalitate a corpului de fracții)
Fie R domeniu de integritate, K corpul lui de fracții și $\varphi:R\to K$, $\varphi(a)=\frac{a}{1}$ pt. orice $a\in R$, scufundarea canonică. Atunci

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & K \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

pt. orice corp comutativ L și orice morfism injectiv de inele $f:R\to L$, există un unic morfism de corpuri $\bar{f}:K\to L$ pentru care $\bar{f}\varphi=f$.

RCIC (25)

Demonstrație Definim $\overline{f}: K \to L$ prin

$$\overline{f}\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) f(b)^{-1} \text{ pt. orice } \frac{a}{b} \in K.$$

Definiția are sens, deoarece $b \neq 0 \Rightarrow f(b) \neq 0$ (f fiind injectivă), deci există $f(b)^{-1}$.

Definiția este corectă (adică nu depinde de reprezentantul (a,b) ales într-o clasă de echivalență), deoarece dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci $ad = bc$, deci $f(ad) = f(bc)$, adică $f(a)f(d) = f(b)f(c)$. Înmulțind cu $f(b)^{-1} f(d)^{-1}$ obținem $f(a)f(b)^{-1} = f(c)f(d)^{-1}$.

Arătăm că $\overline{f}$ este morfism de corpuri:

$$\overline{f}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \overline{f}\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = f(ad+bc) f(bd)^{-1}$$

$$= \left(f(a)f(d) + f(b)f(c)\right) f(b)^{-1} f(d)^{-1}$$

$$= f(a)f(b)^{-1} + f(c)f(d)^{-1} = \overline{f}\left(\frac{a}{b}\right) + \overline{f}\left(\frac{c}{d}\right),$$

$$\overline{f}\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \overline{f}\left(\frac{ac}{bd}\right) = f(ac) f(bd)^{-1}$$

$$= f(a)f(c)f(b)^{-1}f(d)^{-1} = \overline{f}\left(\frac{a}{b}\right)\overline{f}\left(\frac{c}{d}\right) \text{ și}$$

$$\overline{f}\left(\frac{1}{1}\right) = f(1)f(1)^{-1} = 1.$$

Apoi $(\overline{f}\varphi)(a) = \overline{f}\left(\frac{a}{1}\right) = f(a)f(1)^{-1} = f(a)$, deci $\overline{f}\varphi = f$.

Unicitatea lui $\overline{f}$: dacă $F: K \to L$ ar fi alt morfism de corpuri cu $F\varphi = f$, atunci

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = F\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{b}\right) = F\left(\frac{a}{1}\right) F\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$= F\left(\frac{a}{1}\right)\cdot F\left(\left(\frac{b}{1}\right)^{-1}\right) = F\left(\frac{a}{1}\right) F\left(\frac{b}{1}\right)^{-1}$$

$$= f(a) f(b)^{-1} = \overline{f}\left(\frac{a}{b}\right), \text{ de unde } F = \overline{f}.$$

<u>Observație</u>. Cum $\overline{f}$ este injectiv (fiind morfism de corpuri), rezultă că corpul de fracții al lui R este "cel mai mic corp" în care se scufundă R.

<u>Exerciții</u>. 1) Fie F un corp comutativ. Atunci corpul de fracții al lui F este izomorf cu F.

<u>Indicație</u>: Se poate da o soluție bazată pe construcția corpului de fracții. Se poate da o altă soluție care folosește doar proprietatea de universalitate a corpului de fracții.

2) Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ și $\mathbb{Q}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Atunci $\mathbb{Z}[i]$ este subinel al lui $\mathbb{C}$ (inelul întregilor lui Gauss), $\mathbb{Q}[i]$ este subcorp al lui $\mathbb{C}$, iar $\mathbb{Q}[i]$ este izomorf cu corpul de fracții al lui $\mathbb{Z}[i]$.