Propoziție: Considerăm $\overline{\mathbb{R}} \overset{not.}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, funcția bijectivă $\overline{\varphi}: \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$,

$$\overline{\varphi} = \begin{cases} -1, & x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = +\infty \end{cases}$$ și

$\overline{d}: \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $\overline{d}(x,y) = |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)|$.

Atunci $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ este spațiu metric.

Limite remarcabile

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

5) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ a>0$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{r}-1}{x} = r,\ r\in\mathbb{R}$

Funcții continue

Propoziție: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic, $\emptyset \neq A \subset X$ și $\mathcal{T}_A = \{ D \cap A \mid D \in \mathcal{T} \}$. Perechea $(A, \mathcal{T}_A)$ este spațiu topologic.

Def.: Topologia $\mathcal{T}_A$ din propoziția precedentă s.n. **topologia indusă de A.**

Propoziție: Fie (X, d) un spațiu metric, $\emptyset \neq A \subset X$ și $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$, $d_A(x, y) = d(x, y)$. Perechea (A, d_A) este spațiu metric.

Def.: Metrica d_A din propoziția precedentă s.n. **metrica indusă de A.**

Notație: În cadrul de mai sus, notăm, atunci când nu este pericol de confuzie, $d_A \overset{\text{not.}}{=\!=} d$

Def.: Fie $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ spații topologice, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ și $f : A \to Y$. Spunem că **f este continuă în a** dacă $(\forall)\ V \in \mathcal{V}_{f(a)}$, $(\exists)\ U \in \mathcal{V}_a$ a.î. $(\forall)\ x \in U \cap A$, avem $f(x) \in V$ (i.e. $f(U \cap A) \subset V$).

Def.: În contextul definiției precedente, dacă f este continuă în orice $a \in A$, spunem că **f este continuă** (pe A).

Exemple:

Fie $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ spații topologice, $\emptyset \neq A \subset X$ și $y_0 \in Y$.

1) Funcția identitate $1_A : A \to A \subset X$, $1_A(x) = x$, este continuă (pe A).

2) Funcția constantă $f : A \to Y$, $f(x) = y_0$ este continuă (pe A).

Propoziție: Fie $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$, $(Z, \mathcal{T}_3)$ spații topologice, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$, $f : A \to Y$ o funcție continuă în a și $g : Y \to Z$ o funcție continuă în $f(a)$. Atunci $h \overset{def}{=} g \circ f : A \to Z$ este continuă în a.

Observație: 1) Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ și $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă în $a \iff (\forall)\, \varepsilon > 0, (\exists)\, V_\varepsilon \in \mathcal{V}_a$ a.î. $(\forall)\, x \in V_\varepsilon \cap A$, avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2) Fie (X, d_1), (Y, d_2) spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ și $f : A \to Y$. Atunci f este continuă în $a \iff (\forall)\, \varepsilon > 0, (\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)\, x \in A$ cu proprietatea că $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

3) Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ și $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă în a dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0, (\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)\, x \in A$ cu proprietatea că $|x - a| < \delta_\varepsilon$, avem

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

4) Fie $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def.}}{=\!=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a.î. $+\infty \in A$ și $f: A \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă în $+\infty$ dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0, (\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)\, x \in A$ cu proprietatea că $x > \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - f(+\infty)| < \varepsilon$.

5) Fie $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def.}}{=\!=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a.î. $+\infty \in A$ și $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că $f(+\infty) = +\infty$. Atunci f este continuă în $+\infty \Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)\, x \in A$ cu proprietatea că $x > \delta_\varepsilon$, avem $f(x) > \varepsilon$.

Observație! Atunci când nu specificăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $\mathbb{R}^n$ ca spațiu metric având metrica $d_2 \overset{\text{not.}}{=\!=} d$ (mai exact, considerăm, de fapt, $(\mathbb{R}^n, d_2 \overset{\text{not.}}{=\!=} d)$)

Propoziție: Fie $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ spații topologice. Sunt echivalente:

a) f continuă (pe X)

b) $(\forall)\, D \in \mathcal{T}_2$, avem $f^{-1}(D) \in \mathcal{T}_1$.

c) $(\forall)\, F \subset Y$, F închisă (i.e. $\complement F \in \mathcal{T}_2$), avem $f^{-1}(F) \subset X$, $f^{-1}(F)$ închisă (i.e. $\complement f^{-1}(F) \in \mathcal{T}_1$).

d) $(\forall)\, B \subset Y$, avem $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$

e) $(\forall)\, A \subset X$, avem $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Propoziție: Fie (X, τ_1), (Y, τ_2) spații topologice, $f: X \to Y$ continuă și $A \subset X$, A compactă. Atunci $f(A) \subset Y$ este compactă.

Propoziție: Fie (X, d_1), (Y, d_2) spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ și $f: A \to Y$. Sunt echivalente:

1) f continuă în a

2) $(\forall)(x_n)_n \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \overset{d_1}{=\!=} a$, avem $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \overset{d_2}{=\!=} f(a)$

Propoziție: Fie (X, τ_1), (Y, τ_2) spații topologice, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A \cap A'$ și $f: A \to Y$. Sunt echivalente:

1) f continuă în a

2) $f(a)$ este o limită a funcției f în punctul a (i.e. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$).

Propoziție: Fie (X, τ) un spațiu topologic, $\emptyset \neq K \subset X$, K compactă și $f: K \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci $(\exists)$ $x^*, x_* \in K$ a.î.

- $f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in K\}$ și
- $f(x_*) = \min\{f(x) \mid x \in K\}$

Propoziție: Fie (X, τ) un spațiu topologic, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $f, g: A \to \mathbb{R}$ continue în a. Atunci $f+g$, αf, $f \cdot g$, $|f|: A \to \mathbb{R}$ sunt continue în a, unde $f+g, \alpha f, f\cdot g$, $|f|: A\to\mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha\cdot f(x)$$
$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$
$$|f|(x) = |f(x)|.$$

Dacă, în plus, $f(x)\neq 0$, $(\forall)\, x\in A$, atunci $\frac{1}{f}: A\to\mathbb{R}$ este continuă în a, unde

$$\frac{1}{f}: A\to\mathbb{R},\ \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Funcții uniform continue

Fie (X,d_1), (Y,d_2) spații metrice, $\emptyset\neq A\subset X$ și $f: A\to Y$.

Def: Spunem că **f este uniform continuă** (f u.c.) dacă $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\, x, x'\in A$ cu proprietatea că $d_1(x,x')<\delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x),f(x'))<\varepsilon$.

Propoziție: Dacă f u.c., atunci f continuă.

Observație! Reciproca propoziției precedente nu este adevărată.

Propoziție: Dacă A este compactă și f este continuă, atunci f este u.c.

Propoziție: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat (i.e. $I \neq \emptyset$ și I nu se reduce la un singur element) și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata mărginită (i.e. $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|f'(x)| \leq M, (\forall)\ x \in I$).
Atunci f este u.c.

Propoziție: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ (A nu este neapărat interval) și $f: A \to \mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) f u.c.

2) $(\forall)\ (x_n)_n \subset A, (\forall)\ (y_n)_n \subset A$ a.î. $\lim_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0$, avem $\lim_{n \to +\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$

Propoziție: Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$ și $f: A \to Y$. Sunt echivalente:

1) f u.c.

2) $(\forall)\ (x_n)_n \subset A, (\forall)\ (y_n)_n \subset A$ a.î. $\lim_{n \to +\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$, avem $\lim_{n \to +\infty} d(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Propoziție: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ (A nu este neapărat interval) și $f: A \to \mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) f u.c.

2) $(\exists)\ a \in A$ a.î. f u.c. pe $A \cap [-\infty, a]$ (i.e. $f|_{A \cap (-\infty, a]}$ este u.c.) și f u.c. pe $A \cap [a, +\infty)$ (i.e. $f|_{A \cap [a, +\infty)}$ este u.c.).

Propoziție: Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ și $f:(a,b]\to\mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) f u.c.

2) $(\exists)\ \tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă a.î. $\tilde{f}\big|_{(a,b]}=f$

($\tilde{f}$ prelungire continuă a lui f)

<u>Def.</u>: Fie (X,d) un spațiu metric și $(x_n)_n \subset X$. Spunem că $(x_n)_n$ este **șir Cauchy în raport cu metrica d** dacă $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ m,n\in\mathbb{N}$, $m\geq n_\varepsilon$, $n\geq n_\varepsilon$, avem $d(x_m, x_n)<\varepsilon$.

Observație! Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul metric (X,d).

Propoziție: Fie (X,d_1), (Y,d_2) spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $f:A\to Y$ o funcție u.c. și $(x_n)_n \subset A$ un șir Cauchy în raport cu metrica d_1. Atunci $(f(x_n))_n \subset Y$ este șir Cauchy în raport cu metrica d_2.

Funcții derivabile

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $f: A \to \mathbb{R}$.

Def.: 1) Spunem că **f are derivată** în punctul a dacă există (în $\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def.}}{=\!=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

2) Spunem că **f este derivabilă** în a dacă există și este finită $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Notație: În contextul de mai sus, dacă f are derivată în a, notăm $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Def.: Dacă f este derivabilă în toate punctele unei mulțimi $\emptyset \neq B \subset A$, spunem că f este derivabilă pe B, definim funcția $f': B \to \mathbb{R}$,

$$\underset{B}{\underset{\cap}{x}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{f'(x)}}$$

și numim această funcție **derivata funcției f.**

Teoremă: Dacă f este derivabilă în a, atunci f este continuă în a.

Observație! Reciproca teoremei precedente nu este adevărată.

Propoziție: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$, $f, g: A \to \mathbb{R}$ derivabile în a și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

1) $f+g$ este derivabilă în a și $(f+g)'(a) =$

$= f'(a) + g'(a)$

2) αf este derivabilă în a și $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$

3) $f \cdot g$ este derivabilă în a și $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

4) Dacă, în plus, $g(x) \neq 0$ $(\forall)$ $x \in A$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă în a și $\left(\frac{f}{g}\right)' =$

$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Teoremă: Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval nedegenerat, $J \subset \mathbb{R}$ interval nedegenerat, $a \in I$, $f: I \to J$ și $g: J \to \mathbb{R}$.

Dacă f este derivabilă în a și g este derivabilă în $f(a)$, atunci $h \overset{def.}{=\!=} g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a și $h'(a) = (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Teoremă: Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval nedegenerat, $J \subset \mathbb{R}$ interval nedegenerat, $a \in I$ și $f: I \to J$ continuă și bijectivă.

Dacă f este derivabilă în a și $f'(a) \neq 0$, atunci funcția $f^{-1}: J \to I$ este derivabilă în $b \overset{not.}{=\!=} f(a)$ și $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

Def.: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ (A nu este neapărat interval), $f: A \to \mathbb{R}$ și $a \in A$. Spunem că a este:

1) punct de minim local al lui f dacă $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \leq f(x)$, $(\forall)$ $x \in V \cap A$.

2) punct de maxim local al lui f dacă $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \geq f(x)$, $(\forall)$ $x \in V \cap A$.

3) punct de extrem local al lui f dacă a este punct de minim local al lui f sau a este punct de maxim local al lui f.

Teorema lui Fermat:

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ și $f: A \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) $a \in \mathring{A}$

2) a este punct de extrem local al lui f

3) f este derivabilă în a

Atunci $f'(a) = 0$.

Teorema lui Rolle:

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f continuă pe $[a,b]$

2) f derivabilă pe (a,b)

3) $f(a) = f(b)$

Atunci $(\exists)$ $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$

Teorema lui Lagrange:

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f continuă pe $[a,b]$

2) f derivabilă pe (a,b)

Atunci $(\exists)$ $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Corolar: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci:

1) $f'(x) = 0, (\forall)\, x \in I \iff f$ constantă
2) $f'(x) \geq 0, (\forall)\, x \in I \iff f$ crescătoare
3) $f'(x) \leq 0, (\forall)\, x \in I \iff f$ descrescătoare

Corolar: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $a \in I$ și $f: I \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f continuă (pe I)
2) f derivabilă pe $I \setminus \{a\}$
3) $(\exists) \lim\limits_{x \to a} f'(x) \overset{\text{not.}}{=\!=} l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Atunci f are derivată în a și $f'(a) = l$.

Teorema lui Cauchy:

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f, g continue pe $[a, b]$
2) f, g derivabile pe (a, b)

Atunci $(\exists)\, c \in (a, b)$ a.î. $f'(c)(g(b) - g(a)) =$
$= g'(c)(f(b) - f(a))$.

Teorema lui Darboux:

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci $(\forall)\, J \subset I$, J interval, avem că $f'(J) \subset \mathbb{R}$ este interval (i.e. f' are proprietatea lui Darboux).