Integrarea funcțiilor de mai multe variabile

Lucrăm pe $\mathbb{R}^n$ cu distanța euclidiană.

Def 1) O mulțime $\Delta = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ s.n. dreptunghi

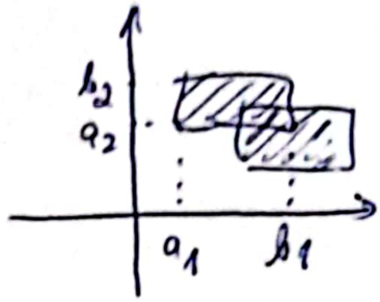
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{\Delta \subseteq \mathbb{R}^n / \Delta \text{ dreptunghi}\}$.

2) O mulțime $E = \bigcup_{i=1} \Delta_i$, $\Delta_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ s.n. elementară.

$\widetilde{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n / E \text{ mulțime elementară}\}$

3) Volumul lui Δ: $vol(\Delta) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

4) Volumul lui E: $vol(E) = \sum_{i=1} vol(\Delta_i)$



Def 1) $\mu^*(A) = \inf\{vol(F) / F \in \widetilde{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^n), A \subseteq F\}$ - măsura Jordan exterioară a lui A

2) $\mu_*(A) = \sup\{vol(E) / E \in \widetilde{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^n), E \subseteq A\}$ - măsura Jordan interioară a lui A

$\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$

3) A - măsurabilă Jordan $\Leftrightarrow \mu_*(A) = \mu^*(A) \overset{not}{=} \mu(A)$
notație: $A \in J(\mathbb{R}^n)$

Prop. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mărginită. Sunt echivalente:

1) $A \in J(\mathbb{R}^n)$; 2) $\overline{A}, \mathring{A} \in J(\mathbb{R}^n)$, $\mu(\overline{A}) = \mu(\mathring{A})$;

3) $Fr(A) \in J(\mathbb{R}^n)$, $\mu(Fr(A)) = 0$

Prop. Fie $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \cup B \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann, atunci f e integrabilă Riemann pe A și pe B.

Dacă, în plus, $\mu(A \cap B) = 0$, atunci $\int_{A \cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$

(Vom folosi propoziția asta pe funcții și mulțimi mărginite, iar mulțimile A și B vor fi submulțimi ale $\mathbb{R}^2$ în acest tutorial și $\mathbb{R}^3$ în următorul)

interpretarea
geometrică a integr multiple

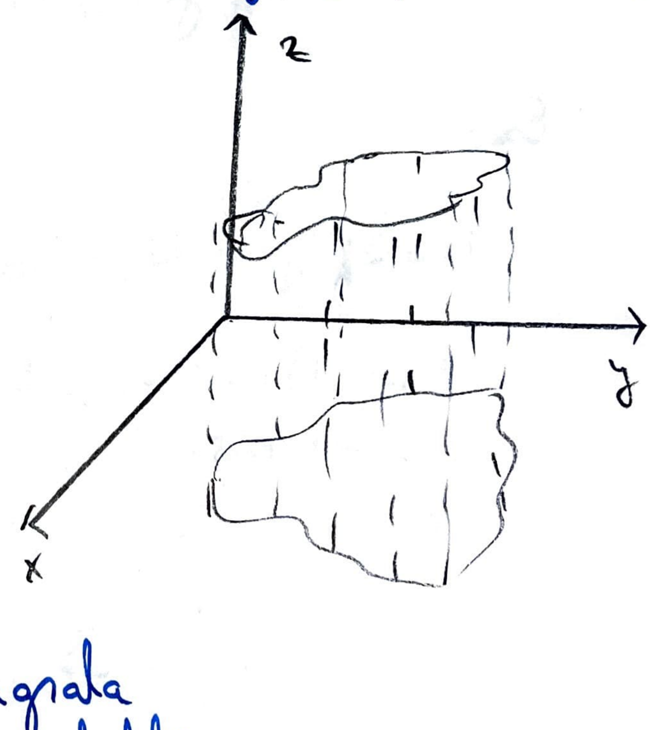
Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ integr R

1) Dacă $n = 2$ și $f(x) \geq 0$ $(\forall) x \in A$

atunci $\iint_A f(x, y)\, dx\, dy$ rep val corpului cuprins între planul xOy și graficul funcției f

2) Dacă $n = 2$, atunci $\iint_A 1\, dx\, dy$ rep aria mulț A

3) Dacă $n = 3$, atunci $\iiint_A 1\, dx\, dy\, dz$ rep val ~~mult~~ lui A



integrala dublă

i) Dacă $A = [a, b] \times [c, d]$ și $f : A \to \mathbb{R}$ e cont, atunci A e mulțime camp și măs J și

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy$$

ii) Dacă $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ unde $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont și $f : A \to \mathbb{R}$ e cont atunci A e mulț camp și măs J și

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

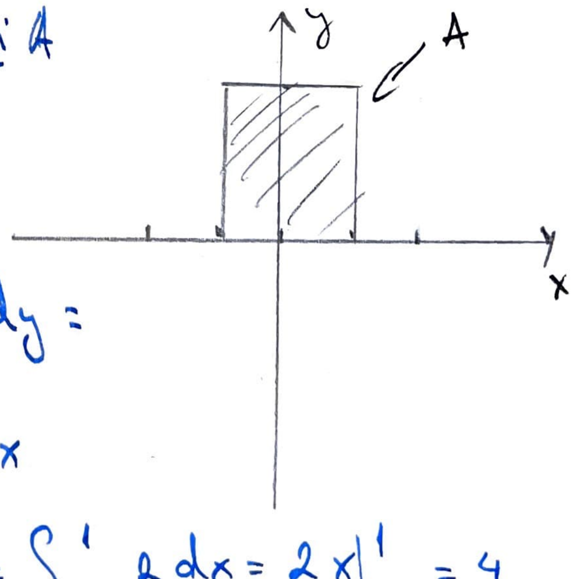
iii) Dacă $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d], \cancel{f(y) \le x \le} \ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$ unde $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ cont a. î. $\varphi(y) \le \psi(y)$ $\forall y \in [c,d]$ și $f : A \to \mathbb{R}$ cont atunci A e mulț camp și măs J și

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$$

Exc:

a) $\iint_A y\,dx\,dy$ unde $A = [-1,1] \times [0,2]$

$A = [-1,1] \times [0,2] \Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și A campactă



Fie $f : A \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = y$

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^2 y\,dy\right) dx$$

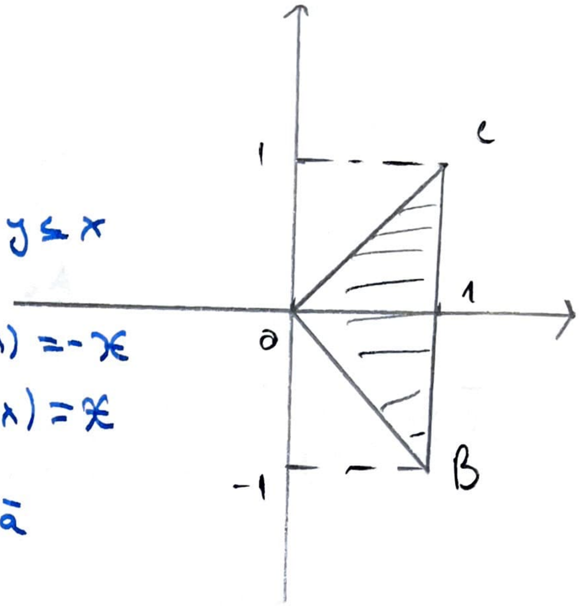
$$= \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 dx = \int_{-1}^{1} 2\,dx = 2x\Big|_{-1}^{1} = 4$$

b) $\iint_A x\,dx\,dy$, und A e o mult plană limitată de $\triangle OBC$, $O(0,0)$, $B(1,-1)$ $C(1,1)$.

Sol: Scriem ec dreptelor OB, OC și BC

$$OB = \frac{y-y_0}{y-y_0} = \frac{x-x_0}{x_B-x_0} \Rightarrow OB: y=-x$$

$OC: y=x$; $BC: x=1$



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], -x \le y \le x$

Fie $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\begin{cases} \alpha(x) = -x \\ \beta(x) = x \end{cases}$

α, β cont

A este măsurabilă și compactă

Fie $f: A \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x$

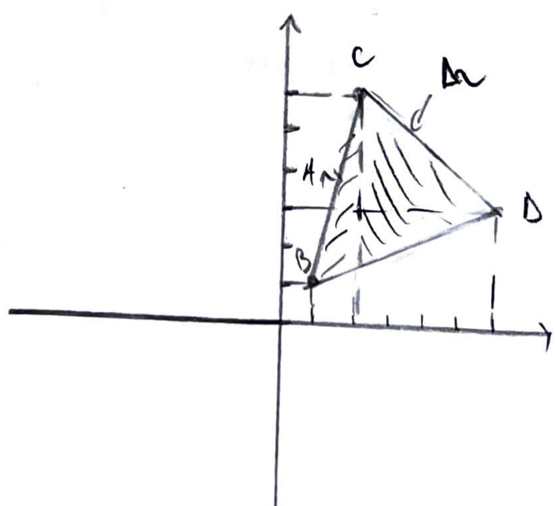
f cont

Deci $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} x\,dy\right)dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

c) $\iint_A x\,dx\,dy$ unde A e mulțimea plană limitată de ΔBCD, $B(1,1)$, $C(2,6)$, $D(6,3)$.

Scriem ec dreptelor BC, CD, DB



$$BC: \frac{y-y_B}{y_C-y_B} = \frac{x-x_B}{x_C-x_B} = \frac{y-1}{6-1} = \frac{x-1}{2-1}$$

$\Leftrightarrow y-1 = 5(x-1)$

$\Leftrightarrow y = 5x-4$

$$DB: \frac{y-y_D}{y_B-y_D} = \frac{x-x_D}{x_B-x_D} = \frac{y-3}{1-3} = \frac{x-6}{1-6} \Leftrightarrow y-3 = \frac{2(x-6)}{5}$$

$\Rightarrow DB: \dfrac{2x+3}{5} = y$

$CD: \dfrac{y-y_C}{y_D-y_C} = \dfrac{x-x_C}{x_D-x_C} \Leftrightarrow \dfrac{y-6}{3-6} = \dfrac{x-2}{6-2}$

$\Leftrightarrow y-6 = \dfrac{-3(x-2)}{4}$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{3(x-10)}{4}$

$A = A_1 \cup A_2$ unde $\begin{cases} A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,2],\ \frac{2x+3}{5} \le y \le 5x-4 \\ A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [2,6],\ \frac{2x+3}{5} \le y \le -\frac{3(x-10)}{4} \end{cases}$

Fie $\alpha_1, \beta_1 : [1,2] \to \mathbb{R}$, $\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2x+3}{5} \\ \beta_1 = 5x-4 \end{cases}$

α_1, β_1 ~~cont~~ cont

$A_1 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și A_1 comp

Fie $\alpha_2, \beta_2 : [2,6] \to \mathbb{R}$, $\begin{cases} \alpha_2(x) = \frac{2x+3}{5} \\ \beta_2(x) = -\frac{3(x-10)}{4} \end{cases}$

$A_2 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și A_2 comp

$A = A_1 \cup A_2 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și compactă

Fie $T(x_T, y_T) \in DB$ a.î. $x_T = 2 \Rightarrow y_T = \dfrac{2 \cdot 2 + 3}{5} = \dfrac{7}{5}$

$A_1 \cap A_2 = [CT] = [\frac{7}{5}, 6] = \mu(A_1 \cap A_2) = 0$

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x$

f cont

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy$

$$\iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{\frac{2x+3}{5}}^{5x-4} x\,dy\,dx$$

$$= \int_1^2 xy \Big|_{\frac{2x+3}{5}}^{5x-4} dx = \int_1^2 x\left(5x-4-\frac{2x+3}{5}\right)dx$$

$$\cancel{= \int_1^2 x\left(\frac{20x-16-2x+3}{}\right)} = \int_1^2 x\,\frac{25x-20-2x-3}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\int_1^2 x(23x-23)\,dx = \frac{23}{5}\int_1^2 x^2 - x\,dx$$

$$= \frac{23}{5}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{23}{5}\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{23}{5}\left(\frac{16}{6}-\frac{12}{6}-\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)$$

$$= \frac{23}{5}\left(\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\right) = \frac{23}{6}$$

$$\iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_2^6 \int_{\frac{2x+3}{5}}^{-\frac{3(x-10)}{4}} x\,dy\,dx$$

$$= \int_2^6 xy \Big|_{\frac{2x+3}{5}}^{-\frac{3(x-10)}{4}} dx = \int_2^6 x\left(-\frac{3(x-10)}{4}-\frac{2x+3}{5}\right)dx$$

$$= \int_2^6 x\,\frac{-3\cdot 5x+30\cdot 5-8x-12}{20}\,dx = \int_2^6 \frac{138-23x}{20}\,dx$$

$$\cancel{\frac{1}{10}\int_2^6 \ldots} = \frac{1}{20}\int_2^6 138-23x\,dx = \frac{1}{20}\left(138x-\frac{23}{2}x^2\right)\Big|_2^6$$

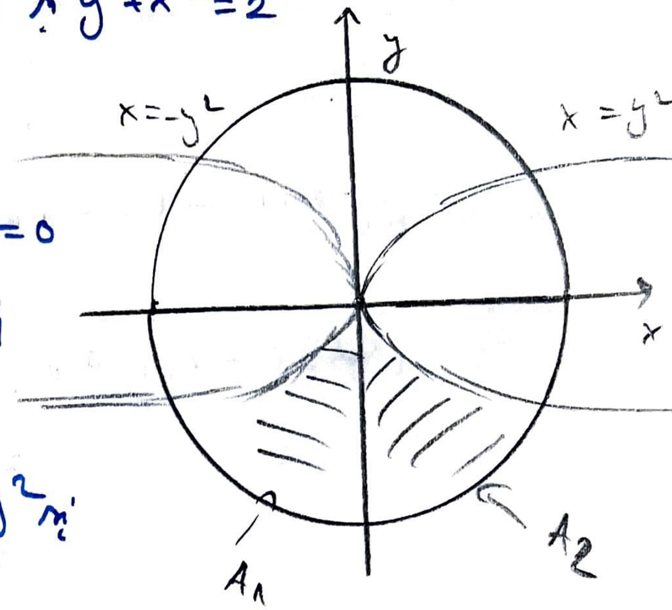
$$= \frac{1}{20}\left(138\cdot 6-\frac{23}{2}\cdot 36-\left(138\cdot 2-\frac{23}{2}\cdot 4\right)\right)$$

$$= \frac{1}{20}(\ldots) \to \text{Dacă am greșit la calcule SCUZE}$$

$$= \frac{184}{20} = \frac{46}{5}$$

d) $\iint_A y\,dx\,dy$, unde $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2,\ x\le 2y^2,\ x\ge y^2,\ y\le 0\}$

Det pct de int dintre $x=y^2$ și $y^2+x^2=2$



$\begin{cases} x=y^2 \\ x^2+y^2-2=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0$

$x \in \{-2, 1\}$

$x=1 \Rightarrow y=\pm 1$

Det pct de int dintre $x=-y^2$ și $x^2+y^2=2$

$\begin{cases} x=-y^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow x^2-x-2=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+x-2 = x(x-2)+(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0$

$x \in \{2, -1\}$

$x=-1 \Rightarrow y=\pm 1$

$x^2+y^2 \le 2 \Rightarrow y^2 \le 2-x^2 \Rightarrow -\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2}$

$x \le y^2 \Rightarrow y^2 \ge x \Rightarrow y \le -\sqrt{x}$ sau $y \ge \sqrt{x}$

$x \ge -y^2 \Rightarrow y^2 \ge -x \Rightarrow y \le -\sqrt{-x}$ sau $y \ge \sqrt{-x}$

$A = A_1 \cup A_2$ unde $\begin{cases} A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 0], -\sqrt{2-x^2} \le y \le -\sqrt{-x}\} \\ A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], -\sqrt{2-x^2} \le y \le -\sqrt{x}\} \end{cases}$

Fie $\alpha_1, \beta_1 : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} \alpha_1(x) = -\sqrt{2-x^2} \\ \beta_1(x) = -\sqrt{-x} \end{cases}$

α_1, β_1 cont

$A_1 \in \mathcal{J}_c(\mathbb{R}^2)$ și A_1 comp

Fie $\alpha_2, \beta_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} \alpha_2(x) = -\sqrt{2-x^2} \\ \beta_2(x) = -\sqrt{x} \end{cases}$

α_2, β_2 cont

$A_2 \in \mathcal{J}_c(\mathbb{R}^2)$, A_2 comp

$A_1 \cup A_2 = A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și comp

$A_1 \cap A_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-\sqrt{2}, 0]\} = \cancel{\quad} \Rightarrow \mu(A_1 \cap A_2) = 0 \cdot \sqrt{2} = 0$

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$

f cont

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-\sqrt{2-x}}^{-\sqrt{-x}} y\,dy\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} y^2 \Big|_{-\sqrt{2-x}}^{-\sqrt{-x}} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(-x-2+x^2)\,dx = \dots = -\frac{7}{12}$$

$$\iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{2-x}}^{-\sqrt{x}} y\,dy\right) dx = \dots = -\frac{7}{12}$$

Deci $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = -\frac{7}{6}$

Schimbarea de variabilă în integrala multiplă

Def. Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathring{A}$ și $h : A \to \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ o funcție care admite toate derivatele parțiale în punctul a.

Matricea $\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s.n. matricea jacobiană a lui h în a și se notează cu $J_h(a)$.

$\det(J_h(a))$ s.n. jacobianul lui h în a.

Cum schimbăm variabila?

Să zicem că avem de calculat $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy$ și schimbăm variabila

$$\begin{cases} x = u(x',y') \\ y = v(x',y') \end{cases}, \quad \varphi = (u,v) \text{ (h-ul de mai sus)}$$

Calculăm $\det(J_\varphi(x,y)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x'}(\cancel{x,y}) & \frac{\partial u}{\partial y'}(\cancel{x,y}) \\ \frac{\partial v}{\partial x'}(\cancel{x,y}) & \frac{\partial v}{\partial y'}(\cancel{x,y}) \end{vmatrix} = J$ și vom avea că

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta'} f(u(x',y'), v(x',y'))\,\cancel{dx\,dy} \cdot |J|\,dx'\,dy'.$$

Pentru a găsi mulțimea Δ', rezolvăm sistemul de ecuații/inecuații prin care am avea că $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow (u(x',y'), v(x',y')) \in \Delta \Leftrightarrow (x',y') \in \Delta'$.

În general, vom folosi schimbarea de variabilă în coordonate polare (vezi tutoriat 3, pag 4 - jos).

Schimbarea este: ~~x = r cos θ~~ ~~y = r sin θ~~

$$\begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta \\ y = \beta + r\sin\theta \end{cases}, \quad r \in [0,\infty),\ \theta \in [0, 2\pi].$$ Jacobianul este r.

(credeți-mă pe cuvânt)

În acest caz, avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r f(\alpha + r\cos\theta, \beta + r\sin\theta)\,dr\,d\theta$

unde B se găsește din condiția $(x,y)\in A$, $B \subseteq [0,\infty)\times[0,2\pi]$.

O altă schimbare de variabilă des întâlnită este trecerea la coordonate polare generalizate:

$$\begin{cases} x = \alpha + a r\cos\theta \\ y = \beta + b r \sin\theta \end{cases}, \quad r\in[0,\infty),\ \theta\in[0,2\pi],\ a,b\in(0,\infty).$$

Jacobianul este abr.

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B abr\, f(\alpha + ar\cos\theta, \beta + br\sin\theta)\,dr\,d\theta$,

iar B se găsește din condiția $(x,y)\in A$, $B\subseteq[0,\infty)\times[0,2\pi]$.

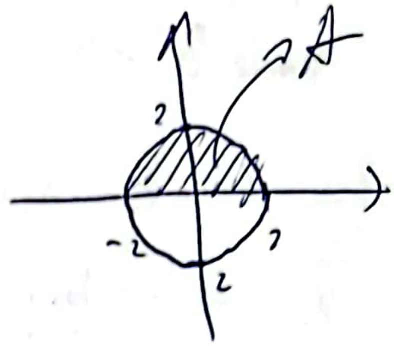
(la fel ca înainte).

B e dreptunghi, deci e ușor de integrat pe el.

Există și alte schimbări de variabilă și vom vedea asta mai departe.

Exerciții:

1) $\iint_A e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$



$A\in J(\mathbb{R}^2)$ compactă

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ cont

Fie $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$

$(x,y)\in A \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\le 4 \\ r\sin\theta\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2\le 4 \\ r\sin\theta\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$

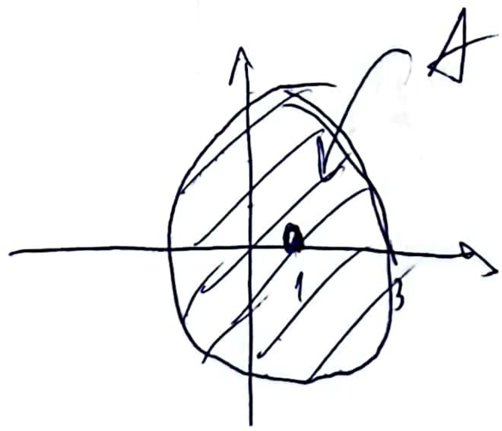
$\Rightarrow r\in[0,2]$, $\theta\in[0,\pi]$. Fie $B=[0,2]\times[0,\pi]$

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$

$=\int_0^2\left(\int_0^\pi r e^{-r^2}\,d\theta\right)dr = \int_0^2 \pi r e^{-r^2}\,dr = -\frac{\pi}{2}\int_0^2(-2r)e^{-r^2}\,dr =$

$=-\frac{\pi}{2}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=2} = \frac{\pi}{2}(1-e^{-4})$

2) $\iint_A y\,dx\,dy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x-1)^2+y^2\le 4\}$.



$A\in J(\mathbb{R}^2)$ compactă

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y$ cont

Fie ~~x = r cos θ~~

$\begin{cases} x=1+r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$

Scanned with CamScanner

$(x,y)\in A \Leftrightarrow (1+r\cos\theta-1)^2+(r\sin\theta)^2 \le 4 \Leftrightarrow r^2\le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} r\in[0,2] \\ \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$

Fie $B=[0,2]\times[0,2\pi]$.

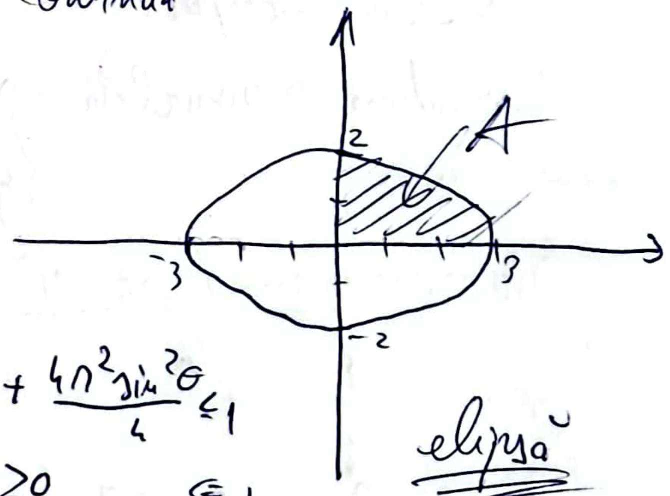
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r\, f(1+r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, d\theta\, dr = \int_0^2 r^2(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 0.$$

3) $\iint_A \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\,dx\,dy$, $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$.

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}$ continuă

$A\in J(\mathbb{R}^2)$ compactă



Fie $\begin{cases} x=3r\cos\theta \\ y=2r\sin\theta \end{cases}$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$

$(x,y)\in A \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9r^2\cos^2\theta}{9}+\frac{4r^2\sin^2\theta}{4}\le 1 \\ 3r\cos\theta\ge 0 \\ 2r\sin\theta\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2\le 1 \\ \cos\theta\ge 0 \\ \sin\theta\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow r\in[0,1],\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

Fie $B=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$.

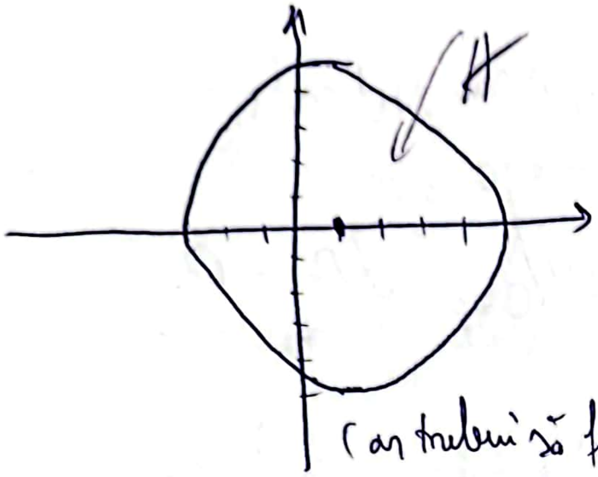
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B 3\cdot 2\cdot r\, f(3r\cos\theta, 2r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6r\sqrt{1-r^2}\,d\theta\,dr = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\, 6r\sqrt{1-r^2}\,dr = -\frac{3\pi}{2}\int_0^1 -2r(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\,dr =$$

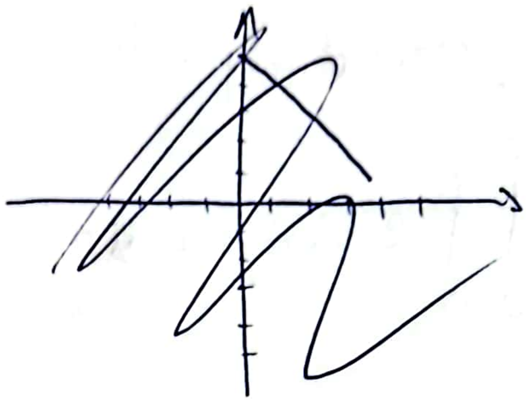
Scanned with CamScanner

$$= -\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = -\frac{3\pi}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \pi .$$

4) $\iint_A (x^2+y^2)\, dx dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{25} \le 1\}$



(ar trebui să fie o elipsă)



Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$ cont

$A \in J(\mathbb{R}^2)$ compactă

Schimbare de variabilă: $\begin{cases} x = 1 + 4r\cos\theta \\ y = 5r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$(x,y) \in A \Leftrightarrow \frac{(1+4r\cos\theta - 1)^2}{16} + \frac{(5r\sin\theta)^2}{25} \le 1 \Leftrightarrow r^2 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r \in [0,1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Fie $B = [0,1] \times [0, 2\pi]$ compactă și măsurabilă Jordan.

$$\iint_A f(x,y)\,dx dy = \iint_B 20r\, f(1+4r\cos\theta, 5r\sin\theta)\, dr\, d\theta =$$

$$\cancel{\iint_B 20r} = 20 \iint_B r\left(1 + 16r^2\cos^2\theta + 8r\cos\theta + 25r^2\sin^2\theta\right) dr\, d\theta$$

$$= 20 \iint_B r(1 + 8r\cos\theta + 41r^2)\, dr\, d\theta =$$

$$= 20 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 8r\cos\theta + 41r^2) \cdot r\, dr\, d\theta =$$

Scanned with CamScanner

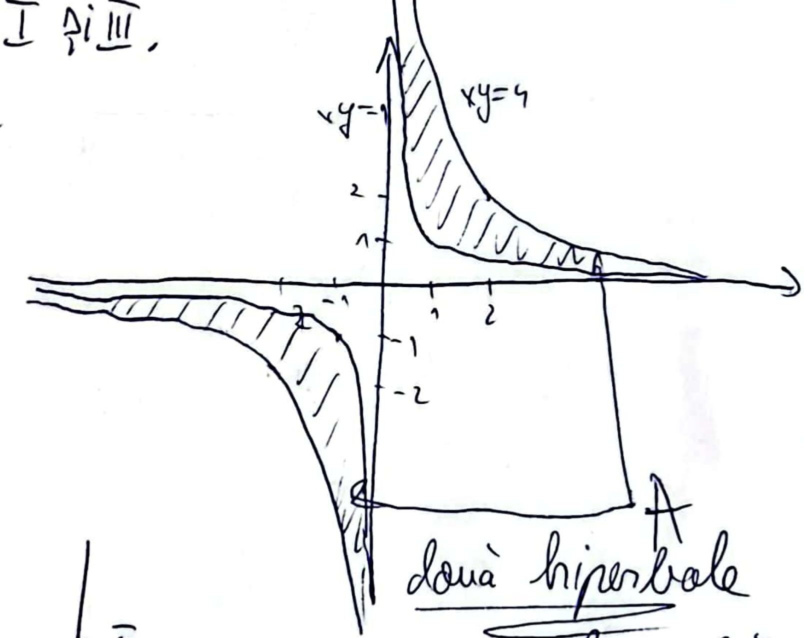
$$= 20\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta + 160\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta + 820\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta =$$

$$= 20\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\theta + 160\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right)\cos\theta\,d\theta + 820\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta =$$

$$= 20\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta + 160\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\cos\theta\,d\theta + 820\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta =$$

$$= 20\pi + 160\cdot\frac{1}{3}\cdot\sin\theta\Big|_0^{2\pi} + 410\pi = 430\pi.$$

5) $\iint_A \frac{1}{y^2-x^2}\,dx\,dy$, unde A este mulțimea plană mărginită de $xy=1$ și $xy=4$ în cadranele I și III.



două hiperbole

(nu aia de la română...)

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{1}{y^2-x^2}$ cont

Schimbare de variabilă:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{u}\sqrt{v} \\ y = \sqrt{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{v}}\end{cases}$$

Jacobianul:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{\sqrt{v}} & -\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2v\sqrt{v}}\end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\sqrt{v}\right)\left(-\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2v\sqrt{v}}\right) - \left(\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{\sqrt{v}}\right) = -\frac{1}{4v^2} - \frac{1}{4v^2} = -\frac{1}{2v^2} \overset{not}{=} J$$

$\cancel{x^2-y^2=\frac{u}{v}}$

$$y^2-x^2 = \frac{u}{v} - uv = u\left(\frac{1}{v}-v\right).$$

$xy\in[1,4] \Rightarrow u\in[1,4].$

Scanned with CamScanner

Avem că pe hiperbolele de forma $xy = t, t > 0$, $y = \frac{t}{x}$.

Pentru orice x și y cu $\mathrm{sgn}(x) = \mathrm{sgn}(y)$, $y = \frac{t}{x}$ este o funcție descrescătoare în variabila x. Deci, pentru orice hiperbolă de acest fel, y scade în timp ce x crește, iar minimul lui $\frac{x}{y}$ va fi când $x = y = $ min adică $x = y = 1 \Rightarrow v \geq 1$. Avem $|J| = \frac{1}{2v^2}$

$$\text{Deci } \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_1^\infty \frac{1}{u\left(\frac{1}{v} - v\right)} \cdot \frac{1}{2v^2}\, dv \right) du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{u} \int_1^\infty \frac{1}{v^2 \cdot \frac{1-v^2}{v}}\, dv\, du = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{u} \int_1^\infty \frac{1}{(1-v)\cdot v \cdot (1+v)}\, dv\, du.$$

Căutăm A, B și C a.î. $\frac{1}{(1-v)\cdot v\cdot(v+1)} = \frac{A}{1-v} + \frac{B}{v} + \frac{C}{1+v} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A v(1+v) + B(1-v)(1+v) + C(1-v)v = 1 \Leftrightarrow Av + Av^2 + B(1-v^2) + Cv - Cv^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A+C)v + (A-B-C)v^2 + B = 1.$

Identificând coeficienții avem:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A-B-C=0 \\ B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \overset{\oplus}{\Leftrightarrow} 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

Deci integrala devine:

$$\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{u} \cdot \int_1^\infty \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-v} + \frac{1}{v} - \frac{\frac{1}{2}}{1+v} \right) dv\, du = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{u}\left(\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{1-v}\,dv + \int_1^\infty \frac{1}{v}\,dv - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{1+v}\,dv \right) du$$

$1-v=t \Leftrightarrow v=1-t$
$dv=-dt$
$v=1 \Rightarrow t=0$
$v\to\infty \Rightarrow t\to-\infty$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{u}\left(\cancel{\frac{1}{2}\ln t}\Big|_0^\infty + \ln v \Big|_1^\infty - \frac{1}{2}\cancel{\ln(1+v)}\Big|_1^\infty \right) du = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{u}\cdot\infty\, du = \infty$$

Scanned with CamScanner