Tutoriat 1

Algebră 1

17 Octombrie 2025

Mulțimi și funcții

1. Operații cu mulțimi

Definiție 1.1. *Fie A și B două mulțimi. Se numește produsul cartezian (direct) al mulțimilor A și B, mulțimea*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

Observație. Produsul cartezian $A \times A$ se notează și A^2.

2. Funcții

Definiție 2.1 (Kuratowski)**.** *Fie A și B două mulțimi. Se numește funcție (sau aplicație) f de la A la B și notăm $f : A \to B$ o submulțime*

$$f \subseteq A \times B$$

astfel încât

$$(\forall a \in A)(\exists!\, b_a \in B) \text{ cu } (a, b_a) \in f.$$

Acest unic b_a se notează cu $f(a)$.

Observație. A se numește domeniul de definiție al lui f, iar B codomeniul lui f.

Definiție 2.2. *Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea*

$$G_f := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$$

se numește graficul funcției f.

Definiție 2.3. *Pentru două mulțimi A și B, mulțimea*

$$\mathrm{Hom}(A, B) := \{\, f : A \to B \mid f \text{ este funcție}\} = B^A$$

se numește mulțimea tuturor funcțiilor de la A la B.

Definiție 2.4. *Fie $f : A \to B$ o funcție și fie $A' \subseteq A$. Se notează*

$$f(A') := \{ f(a') \mid a' \in A' \} \subseteq B$$

și se numește imaginea lui A' prin f.

Dacă $A' := A$, atunci

$$f(A) = \mathrm{Im}(f),$$

care se numește imaginea funcției f.

Definiție 2.5. *Fie $f : A \to B$ o funcție și fie $B' \subseteq B$. Se notează*

$$f^{-1}(B') := \{ a \in A \mid f(a) \in B' \}$$

și se numește imaginea inversă (sau fibra) lui B' prin f.

Definiție 2.6. *Fie $f : A \to B$ și $g : B \to C$ două funcții. Funcția*

$$g \circ f : A \to C, \qquad (g \circ f)(a) := g(f(a)), \quad \forall a \in A,$$

se numește compunerea funcțiilor f și g.

Definiție 2.7. *Fie A o mulțime nevidă. Funcția*

$$\mathrm{id}_A : A \to A, \qquad \mathrm{id}_A(a) := a, \quad \forall a \in A,$$

se numește funcția identică (sau identitatea) pe mulțimea A.

Definiție 2.8. *Fie $f : A \to B$ o funcție. Atunci:*

1. *f se numește injectivă dacă*

   $$(\forall a_1, a_2 \in A)\ (a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)).$$

   Echivalent, f este injectivă dacă

   $$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y \in A.$$

2. *f se numește surjectivă dacă*

   $$\mathrm{Im}(f) = B, \quad \textit{i.e. } (\forall b \in B)\ (\exists a \in A)\ b = f(a).$$

3. *f se numește bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.*

Teoremă 2.1 (Caracterizarea funcțiilor injective)**.** *Fie $f : A \to B$ o funcție. Sunt echivalente afirmațiile:*

a) *f este injectivă;*

b) *f are o retractă, adică există o funcție $r : B \to A$ astfel încât*

$$r \circ f = \mathrm{id}_A;$$

c) *f este monomorfism, adică pentru orice mulțime X și pentru orice funcții*

$$f_1, f_2 : X \to A$$

cu proprietatea că

$$f \circ f_1 = f \circ f_2,$$

avem că

$$f_1 = f_2.$$

Proof. **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** Presupunem că f este injectivă. Vrem să construim o retractă $r : B \to A$.

Fie $a_0 \in A$ fixat (am presupus că mulțimile sunt nevide!). Definim funcția

$$r : B \to A, \qquad r(b) := \begin{cases} a, & \text{dacă } f(a) = b, \\ a_0, & \text{dacă } b \notin \mathrm{Im}(f). \end{cases}$$

r este corect definită deoarece f este injectivă. Într-adevăr, dacă $f(a) = f(a') = b$, atunci $a = a'$, deci $r(b) = a = a'$.

În plus, pentru orice $a \in A$ avem

$$(r \circ f)(a) = r(f(a)) = a,$$

deoarece $f(a) \in \mathrm{Im}(f)$, și prin urmare $r \circ f = \mathrm{id}_A$. Astfel, r este o retractă pentru f.

(b) $\Rightarrow$ **(c)** Fie $r : B \to A$ o retractă a lui f, adică $r \circ f = \mathrm{id}_A$. Fie X o mulțime arbitrară și $f_1, f_2 : X \to A$ două funcții cu

$$f \circ f_1 = f \circ f_2.$$

Aplicăm r la ambele compoziții:

$$r \circ (f \circ f_1) = r \circ (f \circ f_2) \Rightarrow (r \circ f) \circ f_1 = (r \circ f) \circ f_2.$$

Dar $r \circ f = \mathrm{id}_A$, deci

$$\mathrm{id}_A \circ f_1 = \mathrm{id}_A \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2.$$

Prin urmare, f este monomorfism.

(c) $\Rightarrow$ **(a)** Presupunem prin absurd că f nu este injectivă. Atunci există $a_1, a_2 \in A$, cu $a_1 \neq a_2$, astfel încât $f(a_1) = f(a_2)$.

Fie $X = \{0\}$ și definim funcțiile

$$f_1, f_2 : X \to A, \qquad f_1(0) := a_1, \quad f_2(0) := a_2.$$

Avem $f_1 \neq f_2$, dar

$$(f \circ f_1)(0) = f(a_1) = f(a_2) = (f \circ f_2)(0),$$

deci $f \circ f_1 = f \circ f_2$, ceea ce contrazice ipoteza că f este monomorfism. Prin urmare, f este injectivă. □

Teoremă 2.2 (Caracterizarea funcțiilor surjective)**.** *Fie $f : A \to B$ o funcție. Sunt echivalente afirmațiile:*

a) *f este surjectivă;*

b) *f are o secțiune, adică există o funcție $s : B \to A$ astfel încât*

$$f \circ s = \mathrm{id}_B;$$

c) *f este epimorfism, adică pentru orice mulțime Y și pentru orice funcții*

$$f_1, f_2 : B \to Y$$

cu proprietatea că

$$f_1 \circ f = f_2 \circ f,$$

avem că

$$f_1 = f_2.$$

Proof. **(a) $\Rightarrow$ (b)** Fie $b \in B$. Cum f este surjectivă, există $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$. Așadar, $f^{-1}(b) \neq \varnothing$.

Folosim *axioma alegerii*: pentru fiecare $b \in B$ alegem un element $a_b \in f^{-1}(b)$, adică $f(a_b) = b$. Definim funcția

$$s : B \to A, \qquad s(b) := a_b, \quad \forall b \in B.$$

Atunci s este o *secțiune* a lui f, deoarece

$$(f \circ s)(b) = f(s(b)) = f(a_b) = b, \quad \forall b \in B,$$

adică $f \circ s = \mathrm{id}_B$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Fie $s : B \to A$ o secțiune a lui f, adică $f \circ s = \mathrm{id}_B$. Fie Y o mulțime și $f_1, f_2 : B \to Y$ funcții cu

$$f_1 \circ f = f_2 \circ f.$$

Compozând la dreapta cu s, obținem

$$(f_1 \circ f) \circ s = (f_2 \circ f) \circ s \Rightarrow f_1 \circ (f \circ s) = f_2 \circ (f \circ s) \Rightarrow f_1 \circ \mathrm{id}_B = f_2 \circ \mathrm{id}_B \Rightarrow f_1 = f_2.$$

Prin urmare, f este epimorfism.

(c) $\Rightarrow$ (a) Presupunem prin absurd că f nu este surjectivă. Atunci există $b \in B$ astfel încât $b \notin \mathrm{Im}(f)$.

Fie $Y = \{0, 1\}$ și definim funcțiile

$$f_1, f_2 : B \to Y$$

prin

$$f_1(x) := 1, \forall x \in B, \qquad f_2(x) := \begin{cases} 1, & x \neq b, \\ 0, & x = b. \end{cases}$$

Evident, $f_1 \neq f_2$, dar pentru orice $a \in A$ avem

$$(f_1 \circ f)(a) = 1 = (f_2 \circ f)(a),$$

deci $f_1 \circ f = f_2 \circ f$, ceea ce contrazice faptul că f este epimorfism. Prin urmare, f este surjectivă. $\square$

Definiție 2.9. *O funcție* $f : A \to B$ *se numește inversabilă dacă există o funcție* $g : B \to A$ *astfel încât*

$$f \circ g = \mathrm{id}_B \quad \text{și} \quad g \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Observație. Inversa unei funcții, dacă există, este unică și se notează cu f^{-1}.