Tutoriat 1

1) Contraexemplu la principiul intervalelor închise

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

(intersecție numărabilă de intervale nevide care nu sunt închise poate fi $\emptyset$)

2) sup, inf, min, max = ?

$$\left\{(-1)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) / n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$\left\{ \frac{n}{n+(-1)^n} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

3) Explicație la def limitei și limite cu def:

$$\frac{2n+1}{n-3} \longrightarrow 2$$

$$\frac{n^2+\sin n}{3n^2+n+4} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

4) Echivalența definițiilor pt densitate

Fie $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. UASE:

i) $\forall x \in B$, $\exists (x_n)_n \subset A$ a.î. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

ii) $\forall x, y \in B$ cu $x<y$, $\exists \alpha \in A$ a.î. $x<\alpha<y$

Dem:

i) $\Rightarrow$ ii): Fie $x, y \in B$ cu $x<y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$

$\frac{x+y}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (\alpha_n)_n \subset A$ a.î. $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x+y}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ a.î. $\left|\alpha_N - \frac{x+y}{2}\right| < \frac{y-x}{2} \Leftrightarrow x < \alpha_N < y$

Deci $\exists \alpha = \alpha_N \in A$ a.î. $x<\alpha<y$

ii) $\Rightarrow$ i): Fie $x \in \mathbb{R}$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \alpha_n \in A$ a.î.

$x-\frac{1}{n} < \alpha_n < x+\frac{1}{n} \Rightarrow |x-\alpha_n| < \frac{1}{n}$.

Astfel, putem forma un șir $(\alpha_n)_n \subset A$ a.î. $|x-\alpha_n|<\frac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

5) $\left\{ \frac{p}{2^q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ e densă în $\mathbb{R}$