GEOMETRIE

Def: Fie V un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$. Se numește produs scalar pe V o funcție care este:

- biliniară (liniară în fiecare argument)
- simetrică ($b(u,v) = b(v,u)$)
- pozitiv definită ($b(v,v) \geq 0$, $\forall v \in V$ și $b(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$)

Notație: $b(u,v) := \langle u, v \rangle$

ex: $V = \mathbb{R}^n$, $\langle u, v \rangle = \langle (x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

ex: $V = \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ cont. pe } [a,b] \}$. definim:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, dt$$

! **Propoziție:** Fie $V/_{\mathbb{R}}$ spațiu vectorial și $\langle , \rangle$ produs scalar. Atunci

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle \quad \to \text{Cauchy Buniakovski Schwartz}$$

dem: Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \langle tu - v, tu - v \rangle$. Avem:

$f(t) = t \langle u, tu - v \rangle - \langle v, tu - v \rangle$ (lin. în primul argument)

$f(t) = t(t\langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle) - t(\langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle) \Rightarrow$

$f(t) = t^2 \langle u, u \rangle - 2t \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$

Dar $f(t) \geq 0$, din pozitiv definire, deci $\Delta \leq 0$ adică

$$B^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle^2 - 4 \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \leq 0$$

Norma și metrica induse de un produs scalar

Def: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ un spațiu vectorial. Se numește normă pe V o funcție $\| \cdot \| : V \longrightarrow V$ care satisface:

- inegalitatea triunghiului ($\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$)
- semiliniaritatea ($\|t \cdot u\| = |t| \cdot \|u\|$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in V$)
- pozitiv definire ($\|u\| \geq 0$, $\forall u \in V$ și $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$)

Propoziție: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ spațiu vectorial, înzestrat cu un produs scalar $\langle , \rangle$. Atunci funcția $\| \, \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ este o normă numită norma indusă de $\langle , \rangle$.

Propoziție: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ înzestrat cu un produs scalar și fie $\| \, \|$ norma indusă. Atunci pe V se induce o metrică prin:

$$d(v, u) = \|v - u\|$$

exemple de norme pe $\mathbb{R}^n$:

$$\|(x_1 \dots x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\|(x_1 \dots x_n)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$$

$$\|(x_1 \dots x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$ $\rightarrow$ este singura care provine dintr-un produs scalar

Def: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ un spațiu vectorial înzestrat cu un produs scalar și $u, v \in V$ vectori. Definim măsura unghiului dintre u și V prin:

$$\cos(m(\widehat{u,v})) \stackrel{def}{=} \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

OBS! Definiția este corectă deoarece din CBS avem $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Terminologie: Un cuplu $(V, \langle , \rangle)$ (V = spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$, $\langle , \rangle$ produs scalar) se numește spațiu vectorial euclidian)

Def: $(V, \langle , \rangle)$, $(U, (,))$ spații vectoriale euclidiene. Se numește izometrie (de la V la U) o aplicație liniară care păstrează produsul scalar.

$$\forall v_1, v_2 \in V, \ \langle v_1, v_2 \rangle = (T(v_1), T(v_2)) \ \forall v_1, v_2 \in V$$

OBS! O izometrie de spații vectoriale euclidiene induce o izometrie între spațiile metrice asociate.

Terminologie: $(V, <,>)$ spațiu vectorial euclidian. v_1 și v_2 se numesc perpendiculare $\iff$ $<v_1, v_2> = 0$ (notat $v_1 \perp v_2$)

Def: Fie $(V, <,>)$ spațiu vectorial euclidian. O bază $B = \{e_1 \dots e_n\}$ se numește bază ortonormată, dacă:

$$(*)\begin{cases} \bullet\ \forall i,j,\ i \neq j \text{ avem } e_i \perp e_j \iff <e_i, e_j> = 0,\ \forall i \neq j \\ \bullet\ \forall i,\ \|e_i\| = 1 \iff <e_i, e_i> = 1,\ \forall i = \overline{1,n} \end{cases}$$

$(*) \iff <e_i, e_j> = \delta_{ij} \to$ indicele lui Kronecker

$$\delta_{ij} \overset{def}{=} \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Algoritmul Gram-Schmidt:

Fie $(V, <,>)$ un spațiu vectorial euclidian. Fie $B = \{f_1 \dots f_n\}$ o bază arbitrară pe V. Atunci, putem produce o bază ortonormată pentru V, astfel:

- pt $i = 1$ punem $g_1 = \frac{1}{\|f_1\|} \cdot f_1$

$e_1 = f_1$

$$e_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{<e_i, f_k>}{<e_i, e_i>} \cdot e_i$$

- pas inductiv: presupunem construiți vectorii $e_1 \dots e_i$ (sistem ortonormat $<e_k, e_j> = \delta_{kj},\ \forall i = \overline{1, i-1}$). Construim vectorul g_i prin:

$$e_k' = \frac{1}{\|e_k\|} \cdot e_k$$

$$g_i \overset{def}{=} f_i - \sum_{k=1}^{i-1} <f_i, e_k> \cdot e_k.$$

Punem prin def: $e_i = \frac{1}{\|g_i\|} \cdot g_i$

Afirmație $\{e_1 \dots e_i \dots e_k\}$ este ortonormată.

dem că este corect definit + automorfism => pe caiet.

Corolar: Fie $(V, <,>)$ un spațiu vectorial euclidian de dimensiune n, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Atunci V este izomorfic cu $(\mathbb{R}^n, <,>_{can})$ unde $<,>_{can}$ este produsul scalar canonic.

$\hookrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

OBS! $(x_1 \dots x_n) = x_1(1,0 \dots 0) + x_2(0,1, \dots 0) + \dots + x_n(0 \dots 0,1)$

$\parallel$

componente $(x_1 \dots x_n)$ ale unui vector arbitrar sunt și coordonatele lui în raport cu baza canonică.

OBS! Fie $A = (a_{ij}) \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$. Fie funcția $b: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dată prin: $b((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$.

- b este biliniară, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$
- b este simetrică, $b((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = b((y_1 \dots y_n)(x_1 \dots x_n))$

$\Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$

Teoremă Jacobi

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ cu $A = A^t$ (matrice simetrică). Fie $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ biliniară, simetrică, dată de $b((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum\limits_{i,j}^{n} a_{ij} x_i y_j$.

Atunci b este un produs scalar $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} > 0 \\ \forall i \geq 2, \text{ avem } \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} > 0 \end{cases}$

unde Δ_i = minorul ce se obține din A cu primele i linii și coloane.

($\Delta_1 = a_{11}$ → prin convenție)

O matrice cu această proprietate ($\Delta_i > 0$, $\forall i$) se numește matrice pozitiv definită.

Elemente de geometrie analitică

Fixam X = "planul euclidian" $= \mathbb{R}^2$

sau "spațiul euclidian" $= \mathbb{R}^3$

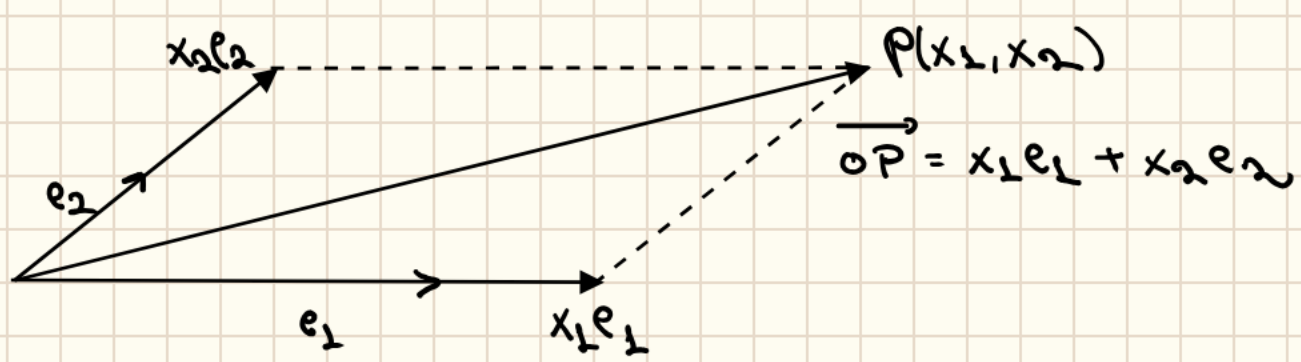
Uneori ⇒ planul: K^2 | cu K corp comutativ.
spațiul: K^3 |

Terminologie: elementele lui X le vom numi puncte.

Date fiind două puncte $A = (x_A, y_A) \in \mathbb{R}^2$, $B = (x_B, y_B) \in \mathbb{R}^2$ (sau $A = (x_A, y_A, z_A) \in \mathbb{R}^3$, $B = (x_B, y_B, z_B) \in \mathbb{R}^3$) definim vectorul $\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AB} := (x_B - x_A, y_B - y_A)$ (sau $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \in \mathbb{R}^3$)

Def: Fie X planul (respectiv spațiul) euclidian. Se numește reper cartezian în X un cuplu $R = (O, B)$ unde $O \in X$ este punct fixat (numit originea reperului) și $B = (e_1, e_2)$ (respectiv (e_1, e_2, e_3) pentru $\mathbb{R}^3$) este o bază ordonată din $\mathbb{R}^2$ (respectiv $\mathbb{R}^3$).

Def: Fie X în care am fixat un reper cartezian. Oricărui punct $p \in X$ îi asociem vectorul lui de poziție în raport cu reperul dat $\overrightarrow{r_p} = \overrightarrow{OP}$ și coordonatele carteziene în raport cu reperul dat (x_1, x_2) (respectiv (x_1, x_2, x_3)) dacă $\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2$ (respectiv $\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$)



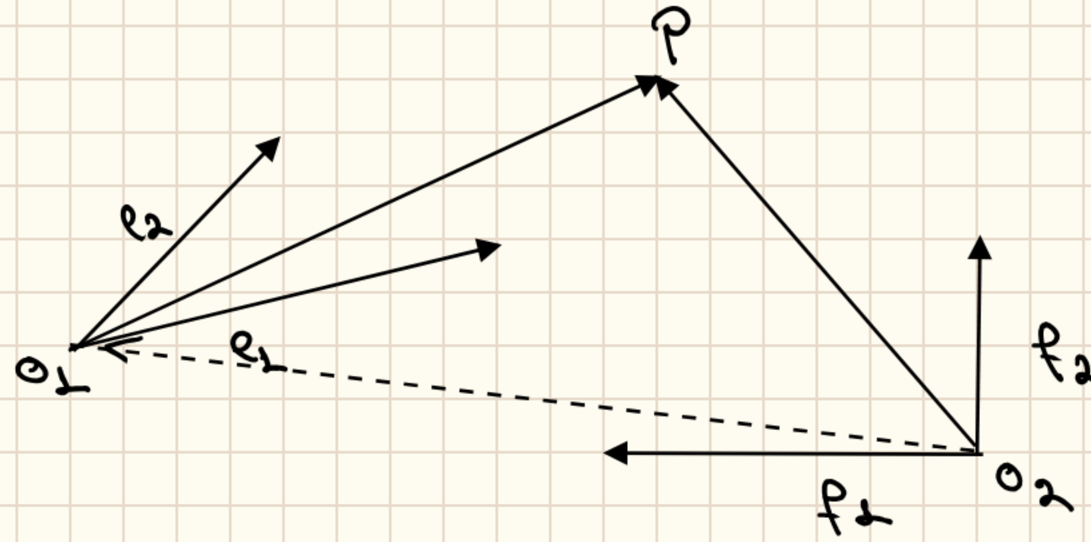
Schimbarea coordonatelor unui punct la schimbarea reperului cartezian.

$R_1 = (O_1, (e_1, e_2))$

$R_2 = (O_2, (f_1, f_2))$

Presupun că P are coordonate (x_1, x_2) în reperul R_1 și (y_1, y_2) în reperul R_2.

Notație: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$



$\overrightarrow{O_1P} = x_1e_1 + x_2e_2$

$\overrightarrow{O_2P} = y_1f_1 + y_2f_2$ (1)

$\underbrace{\overrightarrow{O_2P}}_{\text{asta îmi lipsește}} = \underbrace{\overrightarrow{O_2O_1}}_{\text{asta știu}} + \underbrace{\overrightarrow{O_1P}}_{\text{și asta}}$ (0)

fie (t_1, t_2) a.î. $\overrightarrow{O_2O_1} = t_1e_1 + t_2e_2$ (*) $\rightsquigarrow$ coord. lui O_2 în reperul R_1

dar, există o matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$, $\det A \neq 0$ astfel încât

$\begin{cases} f_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 \\ f_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \end{cases}$ $\rightarrow$ elementele bazei lui R_2 în funcție de cele ale lui R_1

Avem deci $\overrightarrow{O_2P} = y_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + y_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) =$

$= (a_{11}y_1 + a_{21}y_2)e_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)e_2$ (1)

(0)+(*) $\Rightarrow \overrightarrow{O_2P} = (t_1e_1 + t_2e_2) + (x_1e_1 + x_2e_2) = (t_1 + x_1)e_1 + (t_2 + x_2)e_2$ (2)

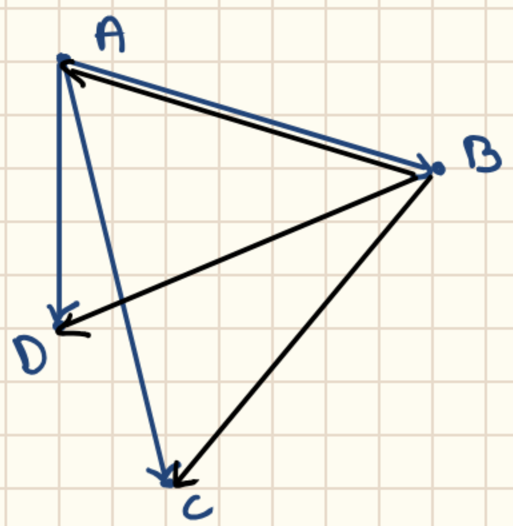
deci (1)=(2): $\begin{cases} x_1 + \overset{=t_1}{b_1} = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \\ x_2 + \underset{=t_2}{b_2} = a_{12}y_2 + a_{22}y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (a_{11}y_1 + a_{21}y_2) - b_1 \\ x_2 = (a_{12}y_2 + a_{22}y_2) - b_2 \end{cases}$

$\Rightarrow X = MY + N$, $\det M \neq 0$, $N = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}$

Def: Fie X planul (sau spațiul) și $S \subset X$, o submulțime (nevidă). Fie $O \in S$ arbitrar. Notăm $dir_O(S)$ (direcția din O a mulțimii S) mulțimea de vectori

$$dir_O(S) = \{ \overrightarrow{OP} \mid P \in S \}$$

ex:



$$dir_A(S) = \{ \overset{0}{\overset{\|}{\overrightarrow{AA}}}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \}$$

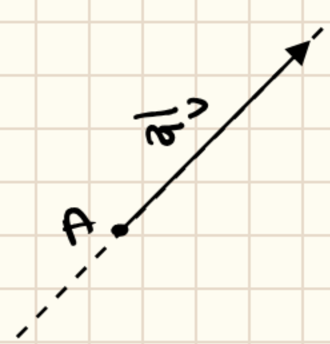
$$dir_B(S) = \{ \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \}$$

Def: O submulțime S a lui X se va numi dreaptă (respectiv plan) dacă există $O \in S$ punct astfel încât $dir_O(S)$ să fie spațiu vectorial de dimensiune 1 (respectiv de dimensiune 2)

OBS! Dacă $S \subset X$ este astfel încât $dir_O(S)$ este un spațiu vectorial, atunci $dir_O(S)$ nu depinde de punctul ales!

Ecuații de drepte și plane în raport cu repere carteziene

• **dreapta determinată de un punct $A(x_A, y_A)$** (respectiv $A(x_A, y_A, z_A)$ pt. spațiu) **și un vector** nenul din direcția sa $v=(v_1, v_2)$ (sau $v=(v_1, v_2, v_3)$)



$P \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \in dir(d)$, dar $dir(d) = \langle v \rangle$

$\Rightarrow P \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ „proporțional" cu v $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ $(t \in K)$ a.î. $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P - x_A = t v_1 \\ y_P - y_A = t v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = x_A + t v_1 \\ y_P = y_A + t v_2 \end{cases}$$ „ec. parametrică a dreptei"

OBS! „Proporționalitatea" $\overrightarrow{AP}$ și v $\Rightarrow \dfrac{x_P - x_A}{v_1} = \dfrac{y_P - y_A}{v_2}$

$$\Rightarrow \frac{x_P - x_A}{v_1} = \frac{y_P - y_A}{v_2}$$ „ec. carteziană a dreptei"

Pt. spații $A = (x_A, y_A, z_A)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

Ec. parametrică

$$\begin{aligned} x_1 &= x_A + t v_1 \\ y_1 &= y_A + t v_2 \\ z_1 &= z_A + t v_3 \end{aligned}$$

→ comp. unui vector din dir

Ec. carteziană

$$\frac{x_1 - x_A}{v_1} = \frac{x_2 - y_A}{v_2} = \frac{x_3 - z_A}{v_3}$$

→ componentele unui vector din direcție

• **dreapta determinată de două puncte distincte**

$A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ respectiv $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$

$v = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

Ec. parametrice

$$\begin{aligned} x_1 &= x_A + t(x_B - x_A) \\ x_2 &= y_A + t(y_B - y_A) \\ x_3 &= z_A + t(z_B - z_A) \end{aligned}$$

Ec. carteziene

$$\frac{x_1 - x_A}{x_B - x_A} = \frac{x_2 - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x_3 - z_A}{z_B - z_A}$$

Plane în spațiu

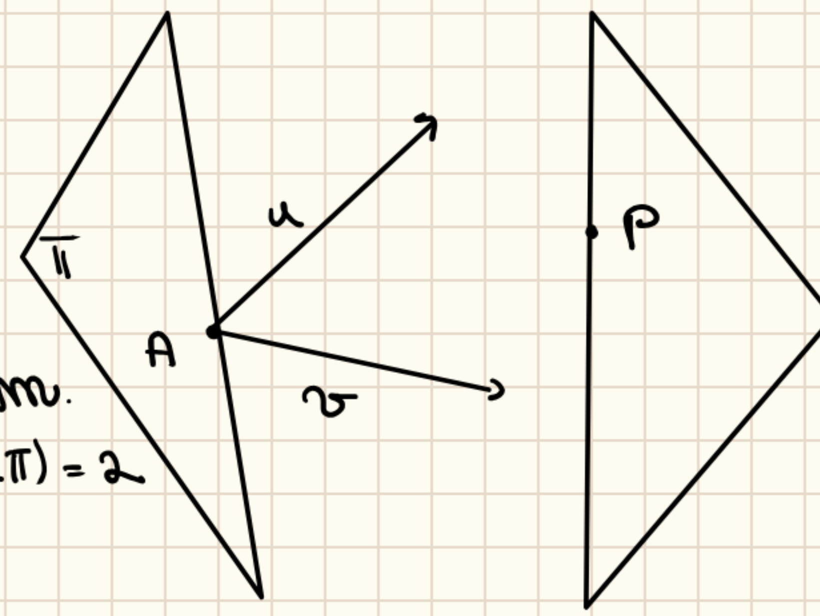
• **Planul π determinat de un punct** $A = (y_A, A, z_A)$ **și direcția sa** $\langle u, v\rangle$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

$P \in \pi \iff \overrightarrow{AP} \in \operatorname{dir} \pi \iff \overrightarrow{AP} \in \langle u, v \rangle$

$\Rightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}$ a.î. $\overrightarrow{AP} = tu + sv \iff$

$$\iff \underbrace{\begin{cases} x_1 - x_A = tu_1 + sv_1 \\ x_2 - y_A = tu_2 + sv_2 \\ x_3 - z_A = tu_3 + sv_3 \end{cases}}$$

→ este doi param. = $\dim \operatorname{dir}_0(\pi) = 2$



„ecuațiile parametrice ale planului”

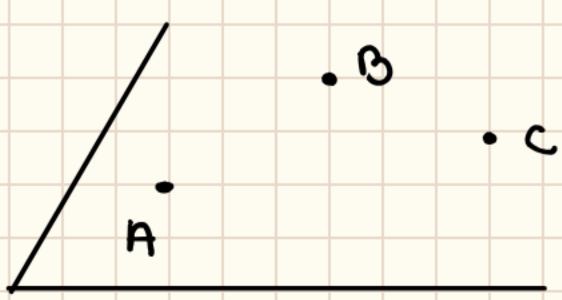
$\overrightarrow{AP} \in \langle u, v \rangle \iff$ sist. de vectori $\{\overrightarrow{AP}, u, v\}$ este liniar dependent

$$\iff \det \begin{pmatrix} x_A & u_1 & v_1 \\ y_A & u_2 & v_2 \\ z_A & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 0$$

„ecuația carteziană a planului”

• **Planul determinat de 3 puncte necoliniare** $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, $C = (x_C, y_C, z_C)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$



Ecuații parametrice

$$x_1 - x_A = t(x_B - x_A) + s(x_C - x_A)$$
$$x_2 - y_A = t(y_B - y_A) + s(y_C - y_A)$$
$$x_3 - z_A = t(z_B - z_A) + s(z_C - z_A)$$

Ecuația carteziană

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ x_2 - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ x_3 - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

$d \mid 24 \quad d \neq 1, 24$

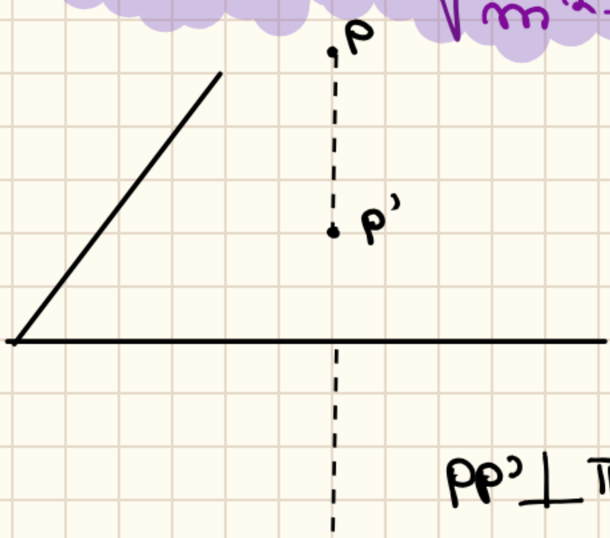
$x \subset \{1, 2, 3\}$

Distanța de la un punct la un plan de ecuație carteziană

$mx_1 + nx_2 + px_3 + q = 0$ (în $\mathbb{R}^3$ cu prod. canonic)

$F(x_1, x_2, x_3) = mx_1 + nx_2 + px_3 + q$

$$dist(P, \Pi) = \frac{F(x_1^P, x_2^P, x_3^P)}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$



Determinăm un punct P' a.î.

$$\begin{cases} P' \in \Pi \\ PP' \perp \text{ pe orice vector din } dir(\Pi) \end{cases}$$

$PP' \perp \Pi \iff PP' \perp v, \forall v \in dir(\Pi) \iff \langle PP', v \rangle = 0$

Dar $dir(\Pi) = \langle u_1, u_2 \rangle$ cu u_1, u_2 necoliniari (liniari independenți)

Deci $\langle \overrightarrow{PP'}, v \rangle = 0$, $\forall v \in dir(\Pi) \iff \begin{cases} \langle PP', u_1 \rangle = 0 \\ \langle PP', u_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \langle PP', \alpha u_1 + \beta u_2 \rangle = \alpha \langle PP', u_1 \rangle + \beta \langle PP', u_2 \rangle$

$dir(\Pi) = \{ \overrightarrow{MN} \mid M, N \in \Pi \}$

$\left.\begin{matrix} M(x_1, x_2, x_3) \\ N(y_1, y_2, y_3) \end{matrix}\right| \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$

Deci $\overrightarrow{MN} \in \Pi \iff \begin{cases} mx_1 + nx_2 + px_3 + q = 0 \\ my_1 + ny_2 + py_3 + q = 0 \end{cases}$

$\iff m(y_1 - x_1) + n(y_2 - x_2) + p(y_3 - x_3) = 0$

$\iff \langle (m, n, p), (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3) \rangle = 0 \Rightarrow (m, n, p) \perp \overrightarrow{MN}$

deci $N_\Pi = (m, n, p)$ este perpendicular pe $dir(\Pi)$, deci $PP' = t N_\Pi$

Pentru a determina P' mai trebuie doar să verificăm $P' \in \Pi$.

Fie (x_1', x_2', x_3') coordonatele lui P'.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' - x_1^P = tm \\ x_2' - x_2^P = tn \\ x_3' - x_3^P = tp \end{cases} \Rightarrow m(tm + x_1^P) + n(tn + x_2^P) + p(tp + x_3^P) + q = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2+n^2+p^2)t + (mx_1^P + nx_2^P + px_3^P + q) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{mx_1^P + nx_2^P + px_3^P + q}{\|N_\pi\|^2}$$

deci, dacă π este de ecuație: $F(x_1, x_2, x_3) = mx_1 + nx_2 + px_3 + q = 0$

iar $P(x_1^P, x_2^P, x_3^P)$

$$\Rightarrow \text{dist}(P, \pi) = \frac{|F(x_1^P, x_2^P, x_3^P)|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

ex: $\pi: x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$

$P(1, 2, 3)$

$N_\pi = (1, 1, 1)$ $\quad \text{dist}(P, \pi) = \frac{|1+2+3-1|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

$\uparrow$ vectorul normal

obs: dir(π) nu are leg. cu vectorul normal pt.că N_π e doar un vector și dim $\pi = 2$. Mai mult N_π este perpendicular pe direcția planului.

Transformări ale planului (spațiului) euclidian

① Transformări afine (~ „schimbări de coordonate")

Def: O funcție $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$) bijectivă se numește transformare afină dacă este de forma $f(X) = AX + B$ cu $A \in M_2(\mathbb{R})$ (respectiv $A \in M_3(\mathbb{R})$) nesingulară ($\Leftrightarrow \det A \neq 0$).

OBS! Mulțimea transformărilor afine formează un grup în raport cu compunerea funcțiilor, notat $Aff_2(\mathbb{R})$ (resp. $Aff_3(\mathbb{R})$)

Def: O transformare afină se numește translație dacă este de forma $f(X) = X + B$ ⇝ translație

OBS! Mulțimea translațiilor formează un subgrup în grupul afin. Acest subgrup este normal, iar grupul factor este izomorf cu grupul de transformări liniare ale lui $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$).

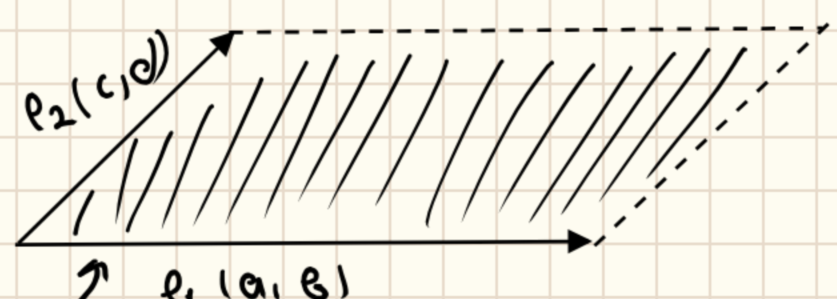
OBS! Transformările afine păstrează coliniaritatea și coplanaritatea.

② Transformări afine care păstrează aria ($\mathbb{R}^2$) și volumul ($\mathbb{R}^3$)

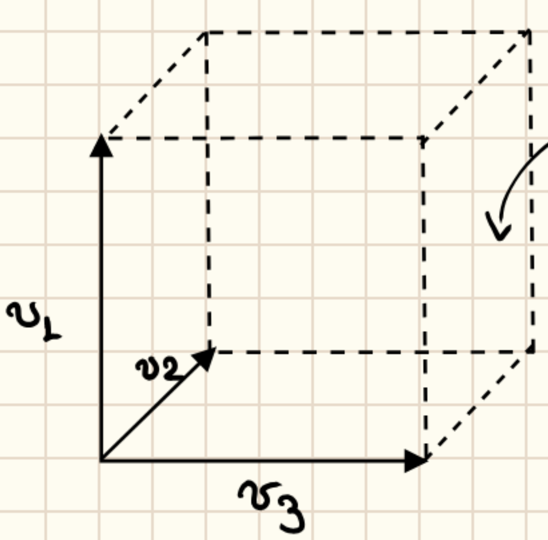
det = 1

• sunt transformări de forma

$$f(X) = AX + B, \ |\det A| = 1$$



$$S = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$$



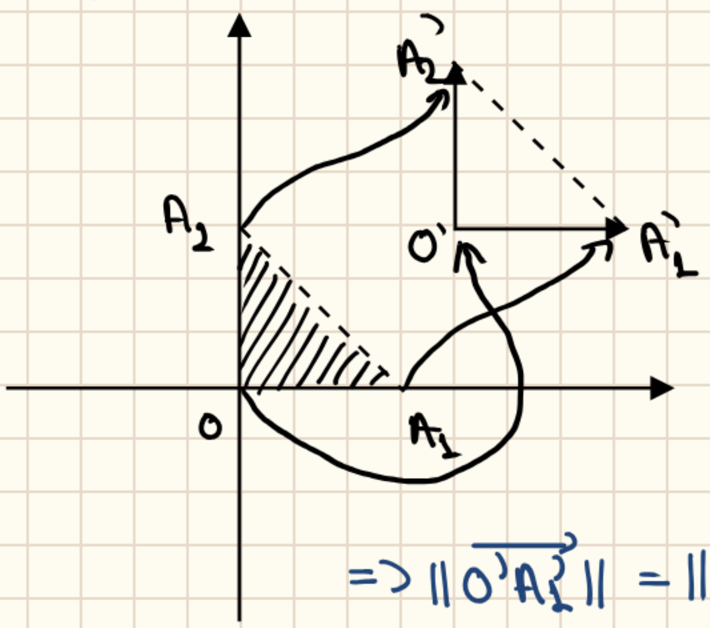
$$V = |\det(v_1, v_2, v_3)|$$

③ Transformări care păstrează distanțele și unghiurile (izometrii)

izometrii → păstrează produsul scalar

Caz particular pe $X = \mathbb{R}^2$:

$$f(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2)$$



Fie $A_1(1,0)$, $A_2(0,1)$, $O(0,0)$

$$\left.\begin{aligned} f(O) &= (b_1, b_2) = O' \\ f(A_1) &= (a_{11} + b_1,\ a_{21} + b_2) = A_1' \\ f(A_2) &= (a_{12} + b_1,\ a_{22} + b_2) = A_2' \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \|\overrightarrow{O'A_1'}\| &= \|\overrightarrow{OA_1}\| \\ \|\overrightarrow{O'A_2'}\| &= \|\overrightarrow{OA_2}\| \\ \|\overrightarrow{A_1'A_2'}\| &= \|\overrightarrow{A_1A_2}\| \end{aligned}\right| \Rightarrow \overrightarrow{O'A_1'} = (a_{11}, a_{21}) \Rightarrow$$

$$\|\overrightarrow{O'A_1'}\| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \|\overrightarrow{OA_1}\| = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$

la fel $\Rightarrow a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$

$$\overrightarrow{O'A_1'} \perp \overrightarrow{O'A_2'} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{O'A_1'}, \overrightarrow{O'A_2'} \rangle = 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ o.î. } a_{11} = \cos\alpha,\ a_{21} = \sin\alpha \\ \exists\, \beta \in \mathbb{R} \text{ o.î. } a_{12} = \cos\beta,\ a_{22} = \sin\beta \end{cases}$$

$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0 \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ sau $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$

<u>Caz A</u>:

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_{12} = \cos\beta = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$$

$$a_{22} = \sin\beta = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$$

<u>Caz B</u>:

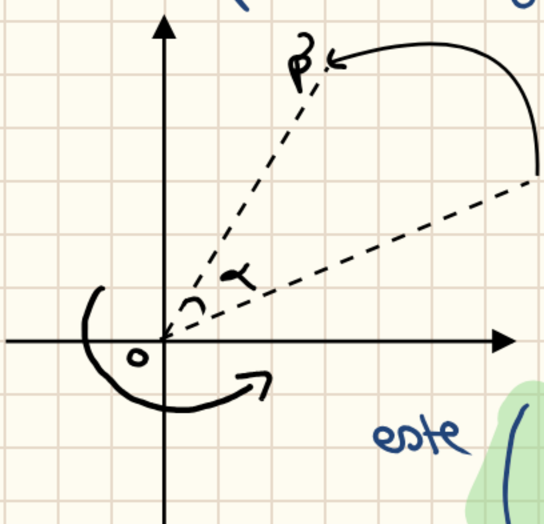
$$\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_{12} = \sin\beta = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

din cor A $\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \overset{not}{=} S_\alpha$ simetrie $\rightarrow$ cosinus

„−" se mută oriunde, dar doar pe diagonale

din cor B $\Rightarrow$ $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \overset{not}{=} R_\alpha$ rotația $\rightarrow$ sinus

Interpretarea geometrică a R_α și S_α



Fie rotația de centru O și unghi α

$r_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

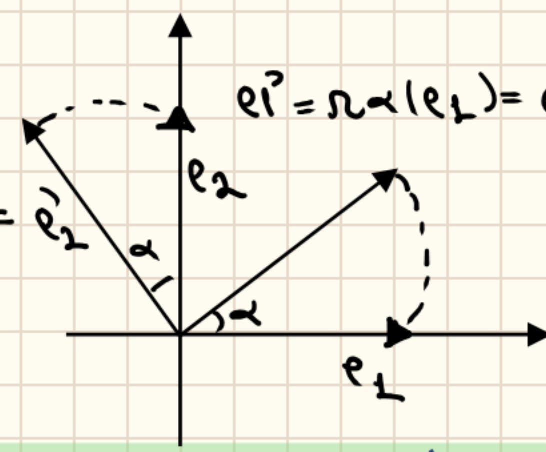
matricea lui r_α în baza canonică $\{e_1, e_2\}$

este $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$r_\alpha(e_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)e_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)e_2$

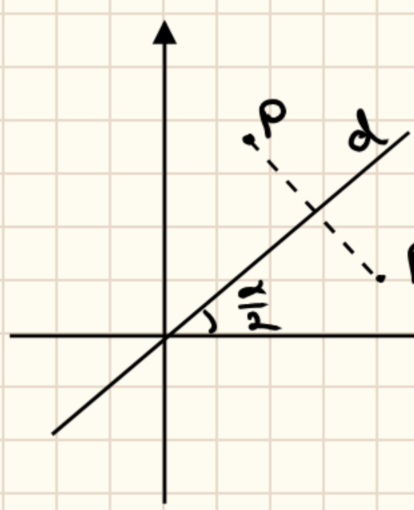
$= -\sin\alpha\, e_1 + \cos\alpha\, e_2$

$e_1' = r_\alpha(e_1) = \cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2$



Pt. S_α fixăm o dreaptă prin O ce face unghi de $\frac{\alpha}{2}$ cu axa Ox.

Definim $s_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,



$s_\alpha(P) = P'$, unde P' este simetricul

$P' = s_\alpha(P)$ ortogonal al lui P față de d

matricea va fi $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

OBS! 1) $R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta}$

2) $(\{R_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \cdot)$ grup

3) $S_\alpha \cdot S_\beta = R_{\alpha-\beta}$

4) $S_\alpha \cdot S_\alpha = id$

Conice nedegenerate

Fie $\mathbb{R}^2$ cu structura euclidiană canonică

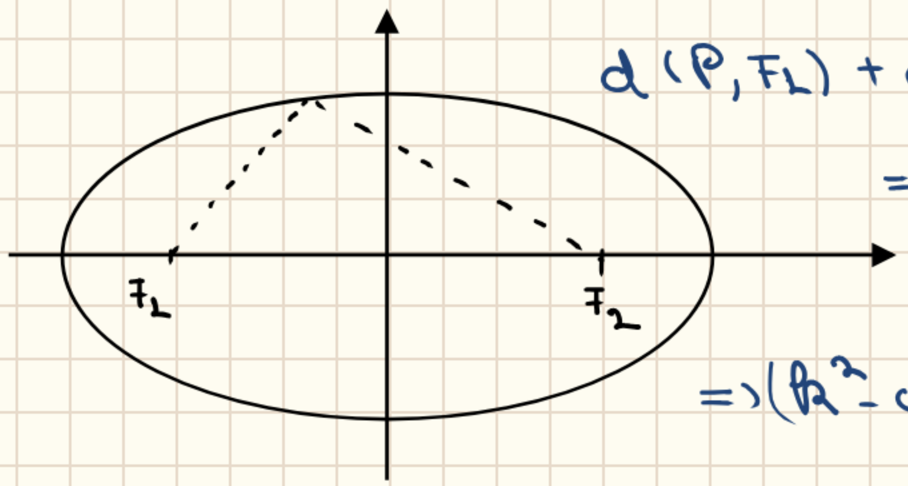
Def: Se numește elipsă de focare punctele (distincte) F_1, F_2 locul geometric (i.e. mulțimea punctelor P din plan) cu proprietatea:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2k \quad (k \text{ constantă}, 2k > d(F_1,F_2))$$

Ecuația elipsei

Alegem un reper cartezian astfel:

- axa Ox = dreapta F_1F_2
- centrul = mijlocul F_1F_2
- axa Oy = mediatoarea segmentului F_1F_2



$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2k$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2k - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 4cx - 4k^2 = -4k\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (k^2-c^2)x^2 + k^2y^2 = k^2(k^2-c^2)$$

$\Rightarrow \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2-c^2} = 1.$ Notație standard: $a = k$

$b = \sqrt{k^2-c^2}$

$\Rightarrow$ ecuația canonică a elipsei: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

OBS! caz particular: $a = b \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow$ cerc de rază a

OBS! Fie $\mathcal{E}$ elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Atunci aria ei este πab.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;/\cdot ab \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{a}{b}} + \frac{y^2}{\frac{b}{a}} = ab \Rightarrow \begin{cases} x' = \sqrt{\frac{b}{a}}\,x \\ y' = \sqrt{\frac{a}{b}}\,y \end{cases}$$

făcând transformarea afină $f(x,y) = \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x, \sqrt{\frac{a}{b}}\,y\right)$ elipsa devine $(x')^2 + (y')^2 = ab$, adică cerc de rază $\sqrt{ab}$.

dar f se scrie sub forma $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{b}{a}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{a}{b}} \end{pmatrix} X$ iar $\det = 1 \Rightarrow$

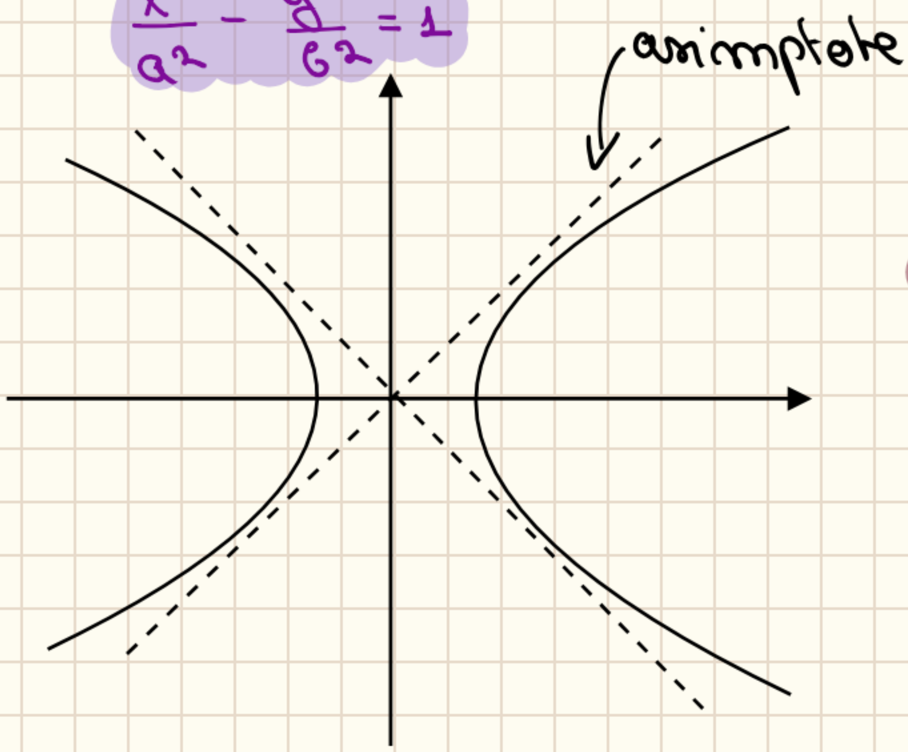
$\Rightarrow f$ păstrează ariile $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ aria elipsei = aria cercului de rază $\sqrt{ab}$

Def: Se numește hiperbolă de focare $F_1 \neq F_2$ locul geometric al punctelor $P(x,y)$ care satisfac $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$

Propoziție: Ecuația canonică a hiperbolei este de forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



OBS! Hiperbola este necompactă și neconexă (are două componente conexe)

Def: Fie d o dreaptă fixată, $F \notin d$. Se numește parabolă de dreaptă directoare d și focar F locul geometric al punctelor P care satisfac:

$$d(P,F) = dist(P,d)$$

Ecuația parabolei raportată la un reper cartezian convenabil.

Alegem:
- O (originea) ca fiind punctul a.î. $FO \perp d$ cu $dist(F,O) = dist(O,d)$
- axa Oy este FO
- axa Oy perpendiculară pe FO în O

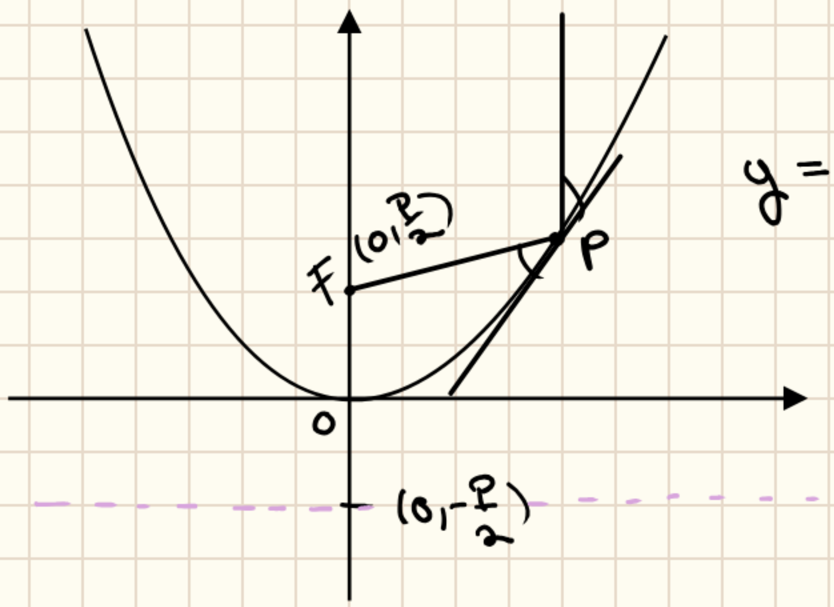
Fie P un punct arbitrar pe parabolă, avem:

$d(P,F) = \sqrt{x^2+(y-\frac{p}{2})^2}$

$dist(P,d) = |y+\frac{p}{2}|$

$x^2+(y-\frac{p}{2})^2 = (y+\frac{p}{2})^2 \Rightarrow x^2-2py=0$ ← ecuația canonică

graficul $f(x) = \frac{x^2}{2p}$



$y = 2px^2$

asta este dreapta directoare

Conice

Def: Fie $\mathbb{R}^2$ (cu structura canonică euclidiană). Se numește **conică (geometrică)** o submulțime a sa de forma:

$$C_F = \{(x,y) \mid F(x,y)=0\} \text{ unde } F(x,y) \in \mathbb{R}[x,y] \text{ este polinom de gradul doi.}$$

ex: $F(x,y) = \underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{partea pătratică a lui } F} + 2b_1x + 2b_2y + c$

Propoziție: „forme canonice afine ale cuadricelor".

Ecuația oricărei cuadrice poate fi adusă făcând transformări afine la una dintre următoarele forme:

A: $\begin{cases} x^2+y^2+1=0 \Rightarrow \text{conica vidă} \\ x^2+y^2=0 \Rightarrow \text{punct dublu} \\ x^2+y^2-1=0 \Rightarrow \text{elipsă} \end{cases}$

C: $\begin{cases} x^2-y^2-1=0 \text{ hiperbola} \\ x^2-y^2=0 \text{ pereche de drepte secante} \end{cases}$

B: $\begin{cases} x^2+2y=0 \Rightarrow \text{parabola} \\ x^2+1=0 \\ x^2-1=0 \Rightarrow \text{pereche de drepte paralele} \\ x^2=0 \Rightarrow \text{dreapta dublă} \end{cases}$

Algoritm + demonstrație

Pasul 1: punem partea pătratică în forma canonică:

$$q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

- dacă $a_{11} \neq 0$ sau $a_{22} \neq 0$ (pot presupune că $a_{11} \neq 0$, făcând eventual transformarea afină de coordonate

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

împărțind eventual cu a_{11}, pot presupune $a_{11} = 1$, adică partea pătratică este de forma: $x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$

$x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x + a_{12}y)^2 - a_{12}^2y^2 + a_{22}y^2 =$

$= (x + a_{12}y)^2 + (a_{22} - a_{12}^2)y^2$ → fac pătrat perfect cu x și apoi schimbare de variabilă.

Fac schimbarea afină de coord.

$$\begin{cases} x' = x + a_{12}y \\ y' = y \end{cases}$$

↓ îl scot pe x în funcție de x', y'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⚠ trebuie o mereu să scriu matriceal ca să fiu sigură că e permisă transf.

Ecuația devine: $x^2 + \underbrace{(a_{22} - a_{12}^2)}_{k}y^2$

Dacă $k > 0$ ⇒ schimbarea afină de coord. $\begin{cases} x' = x \\ y' = \sqrt{k}y \end{cases}$

⇒ ecuația devine $x^2 + y^2$

- $k < 0$ ⇒ $\begin{cases} x' = x \\ y' = -\sqrt{-k}y \end{cases}$

⇒ ecuația devine $x^2 - y^2$

- dacă $a_{11} = a_{22} = 0$. Atunci $a_{12} \neq 0$.

$g(x, y) = 2a_{12}xy$

Fac schimbarea afină de coord:

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$x' = \frac{x+y}{2}$

$y' = \frac{x-y}{2}$

⇔ $\det = 2 \neq 0$ ($\text{char} \neq 2$)

Ecuația devine $2a_{12}x^2 - 2a_{12}y^2$ ⇒ aplic raționamentul anterior.

<u>Pasul 2</u>: finalizare. După pasul 1 știm că putem pune ecuația conicei în una din formele:

a) $x^2 + y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$

β) $x^2 - y^2 + 2b_1x_1 + 2b_2y + c = 0$

γ) $x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$

α) $(x+b_1)^2 + (y+b_2)^2 + (c - b_1^2 - b_2^2) = 0$ ⇝ fac pătrate perfecte grupând x^2 cu x și y^2 cu y

fac. schimbare afină de coordonate:

$$\begin{cases} x' = x + b_1 \\ y' = y + b_2 \end{cases}$$

ec. devine: $x^2 + y^2 + d = 0$ ← rescalez

- $d > 0 \Rightarrow$ împart cu d: $\frac{x^2}{d} + \frac{y^2}{d} + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 = 0$
- $d < 0 \Rightarrow$ împart cu $-d$: $\frac{x^2}{-d} + \frac{y^2}{-d} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$

β) analog

MEREU ÎMPART LA POZITIV

γ) $(x+b_1)^2 + 2b_2y + \underbrace{(c - b_1)^2}_{d} = 0$ → fac pătrat perfect cu x^2 și x și ie cu ... în pace pe y

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + b_1 \\ y' &= y \end{aligned}\right| \Rightarrow x^2 + 2b_2y + d = 0$$

- $b_2 = 0 \Rightarrow x^2 + d = 0$ ⇝ rescalez
  - $d > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{d} + 1 = 0 \to x^2 + 1 = 0$

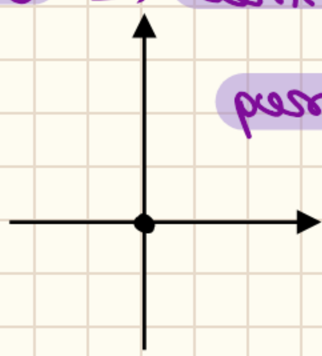
    $x' = \frac{x}{\sqrt{d}}$, $y' = y$
  - $d < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{-d} - 1 = 0$
  - $d = 0 \Rightarrow x^2 = 0$
- $b_2 \neq 0 \Rightarrow x^2 + 2(b_2y + \frac{d}{b_2}) = 0$ ⇝ grupez y cu restul dând factor com. cu 2

fac schimbarea $\begin{cases} x' = x \\ y' = b_2y + \frac{d}{2} \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix}$ ⇓ o parabolă

$\Rightarrow x^2 + 2y = 0$

Reprezentări grafice ale conicelor în formă canonică

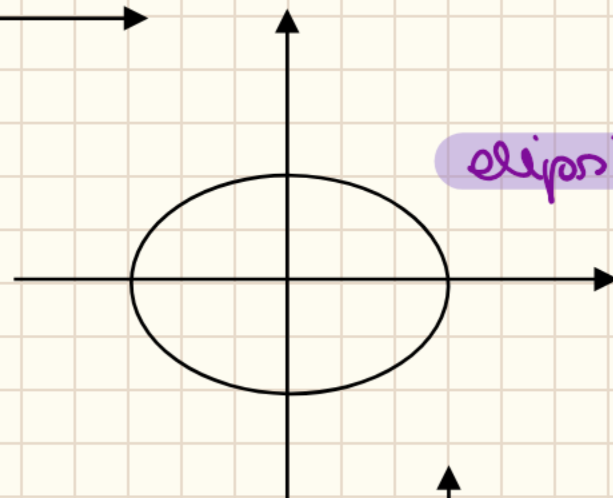
- $x^2+y^2+1=0$ => conică vidă
- $x^2+y^2=0$



punct dublu

elipsă

- $x^2+y^2-1=0$



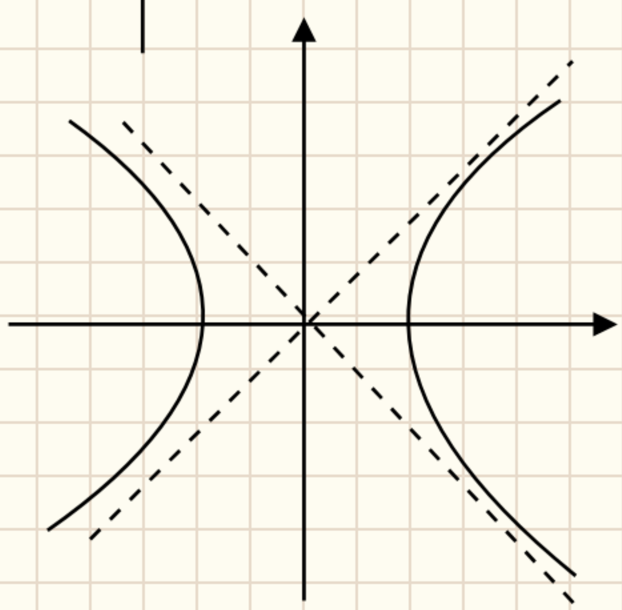
- $x^2-y^2-1=0$

hiperbolă

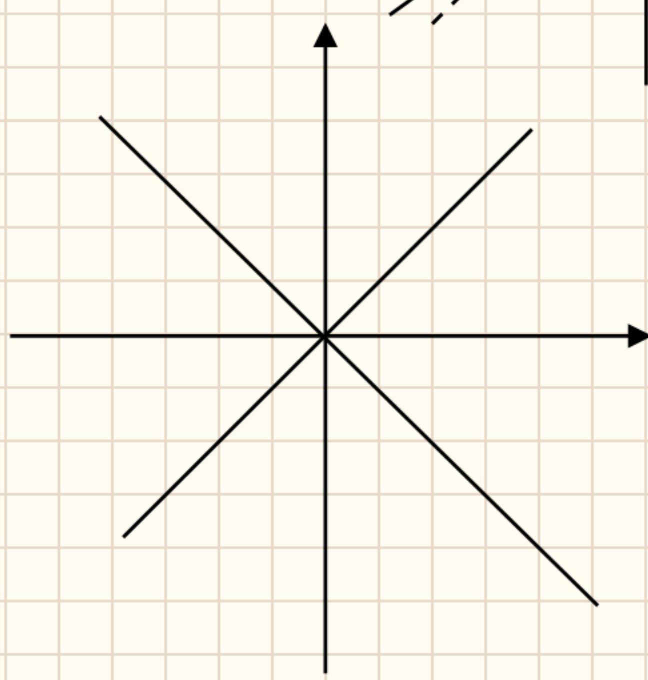
$f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=0$$

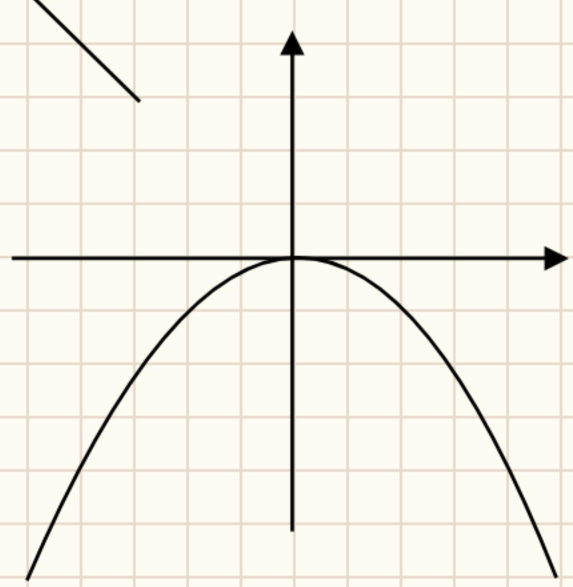


- $x^2-y^2=0$



pereche de drepte secante

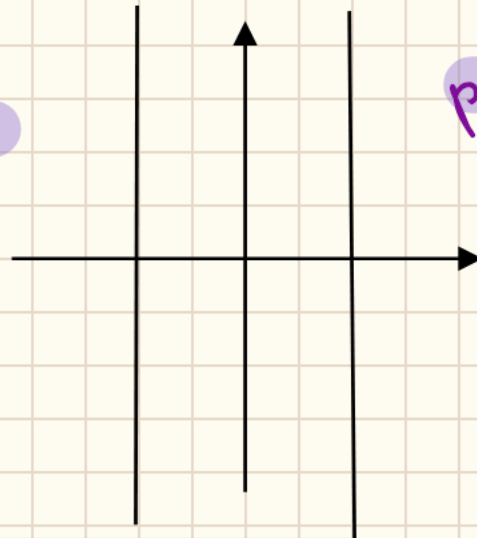
- $x^2+2y=0$ $\left(y=-\frac{x^2}{2}\right)$



parabolă

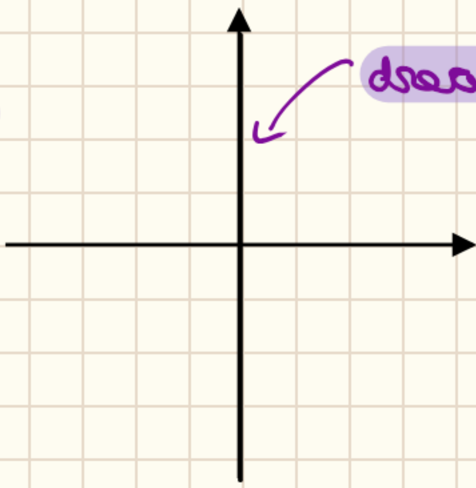
• $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

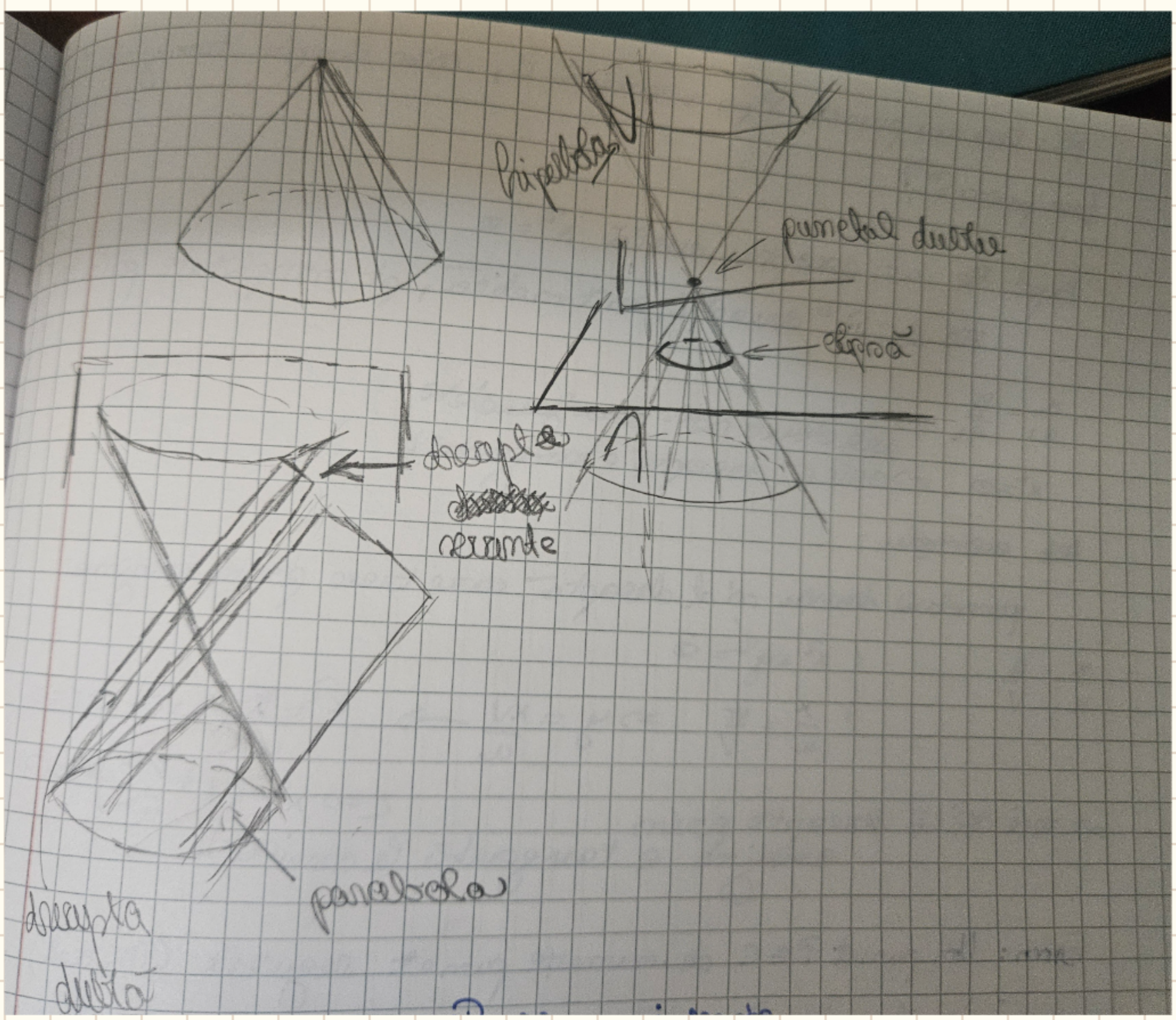
pereche de drepte paralele



$x^2 = 0$

dreapta dublă





Poziția unei drepte față de o conică

Fie $d : \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}$ (1) și conica $C_F : F(x,y) = 0$ (2)

$d \cap C_F \iff$ soluțiile sistemului format cu ecuațiile (1) și (2).

Făcând substituția (ec(1) $\longrightarrow$ ec(2)) ecuația de intersecție devine o ecuație de grad doi cu o necunoscută. Aceasta poate avea

- două rădăcini distincte (adică dreapta intersectează conica în două puncte distincte. Spunem că dreapta este secantă la conică)
- două rădăcini confundate: spunem că dreapta d este tangentă la conică.
- nicio rădăcină: spunem că dreapta este exterioară conicei.

Problemă: Dat un punct P pe o conică C, câte drepte tangente la C trec prin P?

ex: Fie C = dreapta dublă $x^2 = 0$

Fie $d \subset \mathbb{R}^2$ dreaptă arbitrară, pentru simplitate prin origine

$\frac{x}{u_1} = \frac{y}{u_1}$, $x^2 = 0$ are două soluții confundate

ORICE dreaptă este tangentă.

ex2: punctul dublu și d dreapta care trece prin origine

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} \quad \begin{cases} x^2+y^2 = 0 \\ \frac{x}{u} = \frac{y}{v} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{xv}{u} \Rightarrow x^2 + \frac{v^2x^2}{u^2} = 0 \iff$$

$$\iff x^2\left(1 + \frac{v^2}{u^2}\right) = 0 \Rightarrow \forall \text{ dreaptă trece prin origine e tangentă la conică}$$

Terminologie: Un punct $P \in C$ se numește punct regulat (neted) pe conică dacă prin P există o unică tangentă la c. Altfel, punctul se numește singular.

OBS! mediatoarele => centrul cercului circumscris => se intersectează într-un punct egal depărtat de vârfuri.

bisectoarele => centrul cercului înscris

medianele => P mediana din A <=> $S_{APC} = S_{APB}$

înălțimile => ortocentrul