Seminar 3
Structuri Algebrice în Informatică

1) Studiați proprietățile următoarelor relații
↳ Reflexivă, Simetrică, Antisimetrică, Tranzitivă

$\rho_1 = \{(1,2), (1,3), (3,1), (1,1)\}$

1. reflexivitate ✗ (NU)
$(2,2) \notin \rho_1$
2. Simetrică ✗ (NU)
$1 \rho 2$, dar $2 \not\rho 1$
3. Antisimetrică ✗ (NU)
$1 \rho 3$ și $3 \rho 1$, și $1 \neq 3$
4. Tranzitivă (NU)
$3 \rho 1$ și $1 \rho 2$, dar $3 \not\rho 2$

$\rho_2 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,3)\}$

1. Reflexivitate → DA, pentru $M = \{1,2,3\}$
→ NU dacă $M \supset_{\neq} \{1,2,3\}$
2. Simetrie (NU)
$1 \rho 3$, $3 \not\rho 1$

3. Antisimetrică (DA)

4. Tranzitivă (DA)

$\rho_3 = \{(1,3), (3,2), (1,2)\}$

1. Reflexivă (~~DA~~ NU)
2. Simetrică (NU)
3. Antisimetrică (DA)
4. Tranzitivă (DA)

$\rho_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots, (5,5), (1,3), (2,4),$
$(2,5), (3,1), (4,5), (4,2), (5,2)\}$

1. Reflexivă
   ↳ DA, pentru $M = \{1,2,3,4,5\}$
   ↳ NU, pentru $M \supsetneq \{1, \dots 5\}$
2. Simetrică (DA)
3. Antisimetrică (~~DA~~) (NU)
4. Tranzitivă (DA)

<u>Exemplu</u> (R, S, netranzitivă)

$\rho_5 = \{(1,2), (2,3), (2,1), (3,2), (1,1), (2,2),$
$(3,3)\}$

$M = \{1,2,3\}$

Relație de echivalență → R, S, T

Relație de ordine → R, A, T

2) Pentru rel. de echivalență ρ_4 determinați clasele de echivalență, s.p. cât și un sistem de reprezentanți.

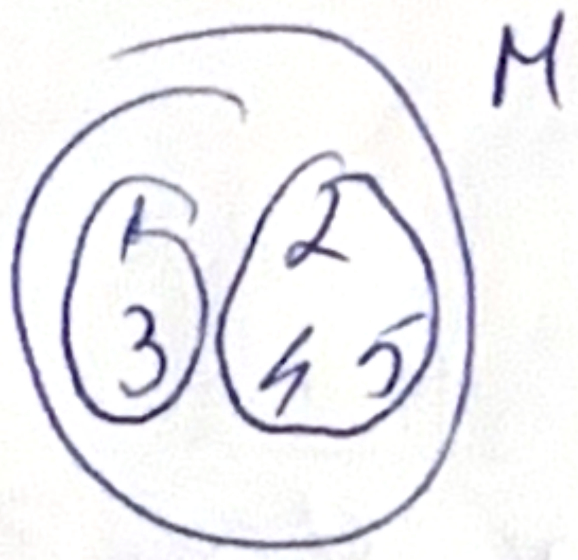
$M=\{1,2,\dots,5\}$

$\hat{x}=\{y\in M \mid y\,\rho_4\,x\}$

$\hat{1}=\{1,3\}=\hat{3}$

$\hat{2}=\{2,4,5\}=\hat{4}=\hat{5}$

M/ρ_4 (spațiul cât) $=\{\hat{1},\hat{2}\}$



$S=\{1,2\}$ (sistem de reprezentanți)

3) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Pe $\mathbb{Z}$ definim relația

$x\sim_n y$ dacă $n \mid x-y$

(adică $\exists\, a\in\mathbb{Z}$ cu $x-y=na$)

a) Arătați că $\sim_n$ este o rel. de echivalență pe $\mathbb{Z}$.

(o numim relația de congruență modulo n)

Notăm și $x \overset{n}{\equiv} y$ sau $x \equiv y \mod n$

b) Arătați că $\{0, 1, \dots, n-1\}$ este un sistem de reprezentanți pt $\sim_n$

a)

(R) Fie $x \in \mathbb{Z}$

Verificăm dacă $x \sim_n x$

$x \sim_n x \Leftrightarrow n / x-x \Leftrightarrow n/0$ (adevărat)

$\Rightarrow \sim_n$ reflexivă

(S) Fie $x, y \in \mathbb{Z}$

$\sim_n$ - simetrică $\Leftrightarrow$ ~~$x \rho y$ implică $y \rho x$~~

$x \sim_n y$ implică $y \sim_n x$

$x \sim_n y \Leftrightarrow n / x-y \Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{Z}$ a.î. $x-y = n \cdot a \,|\cdot(-1)$

~~y~~ $y - x = (-a) n, \; -a \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \sim_n x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sim_n$ simetrică

(T) Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$\sim_n$ - tranzitivă $\Leftrightarrow x \sim_n y$ și $y \sim_n z \Rightarrow$

$\Rightarrow x \sim_n z$

$$\begin{matrix} x \sim_n y \\ \text{și} \\ y \sim_n z \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} n / x-y \\ n / y-z \end{cases} \underset{\exists\, b \in \mathbb{Z}}{\overset{\exists\, a \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow}} \begin{cases} na = x-y \\ nb = y-z \end{cases}$$

$n(a+b) = x - z \; (1)$

$(a+b) \in \mathbb{Z} \; (2) \;\lfloor$ din (1) și (2) $\Rightarrow \sim_n$ - tranzitivă

Din (R), (S) și (T) $\Rightarrow$ „$\sim_n$" este o relație de echivalență

2) Fie $\hat{x} = \{y \in \mathbb{Z} \mid x \sim_n y\} = \{x + na \mid a \in \mathbb{Z}\}$
$x \in \mathbb{Z}$

Fie $a, b \in S$ ai $a \sim_n b \Leftrightarrow n \mid a - b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{a - b}_{\in \{-n+1, \dots, n-1\}} = \alpha n,\ \alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow a = b$

$\hat{0} \neq \hat{1} \neq \dots \neq \widehat{n-1}$

$(\forall)$ $c \in \mathbb{Z}$, Fie câtul q și restul r a.î. $c = n \cdot q + r$
$q \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$\left.\begin{array}{l} c - r = n \cdot q \\ n \mid c - r \end{array}\right| \Rightarrow c \sim_n r$, deci S este un sistem de reprezentanți

Pe $\mathbb{Z}$ definim relația $n \sim m \Leftrightarrow n^2 + n = m^2 + m$

Temă: Pe $\mathbb{Z}$ definim relația

$n \sim m \Leftrightarrow n^2 + m^2 = 2$

Studiați prop. acestei rel.