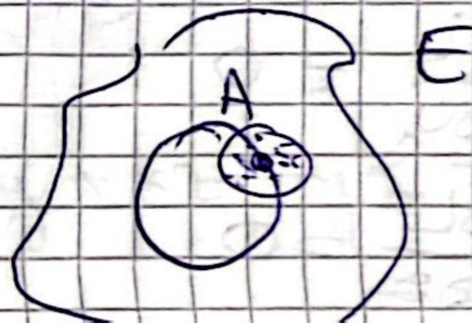
Curs 11

<u>Ex</u> Fie $f : (0;\infty)^3 \to \mathbb{R}$

$$(0;\infty)^3 = (0;\infty) \times (0;\infty) \times (0;\infty)$$

$f(x,y,z) = xy + xz + yz$. Să se det pct de extr. local ale lui f cu legătura $xyz = 1$.



<u>Sol</u>

$E = (0,\infty)^3$ deschisă

Fie $g: E \to \mathbb{R}$ $\quad g(x,y,z) = xyz - 1$

$(g = g_1)$ şi $A = \{(x,y,z) \in E \mid g(x,y,z) = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in E \mid xyz - 1 = 0\}$

rang $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \right)$

$=$ rang $(yz, \ xz \ \ xy) = 1 \quad \forall (x,y,z) \in E$

Nu are cum să dea 0

8

$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x + y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z \qquad \forall (x,y,z) \in E$

$\frac{\partial g}{\partial x} = yz \qquad \forall (x,y,z) \in E$

$\frac{\partial g}{\partial y} = xz$

$\frac{\partial g}{\partial z} = xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$ cont pe E

Fie $L: E \to \mathbb{R}$ $\quad L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = xy + xz + yz + \lambda (xyz - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \end{cases}$

Scădem prima ec. din a doua și obținem:

$x - y + \lambda z(x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(1+\lambda z) = 0$

$\Downarrow$

$x = y$ sau $\lambda z = -1$

<u>Cazul 1</u> $x = y$

Din a treia ecuație avem:

$x + x + \lambda x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 + \lambda x) = 0 \Rightarrow$
$x \in (0;\infty)$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{2}{\lambda} \\ x = y \end{array} \right| \Rightarrow y = -\frac{2}{\lambda}$

Din prima ec, avem:

$-\frac{2}{\lambda} + z + \cancel{\lambda}\left(-\frac{2}{\cancel{\lambda}}\right)z = 0$

$-\frac{2}{\lambda} - z = 0 \Rightarrow z = -\frac{2}{\lambda}$

Din a patra ec avem $-\frac{8}{\lambda^3} = 1 \Rightarrow \lambda = -2$

Deci, $(x,y,z) = (1,1,1)$

<u>Cazul 2</u> $\lambda z = -1 \Rightarrow z = -\frac{1}{\lambda}$

~~y~~ : Din prima ec, avem:

$y \cdot \frac{1}{\lambda} + \cancel{\lambda} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}}\right) = 0$

$-\frac{1}{\lambda} = 0$ contrad

Singurul pct staționar al lui f cu leg $xyz = 1$ este tripletul $(1,1,1)$

Avem $L(x,y,z) = xy + xz + yz - 2(xyz - 1)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 - 2z = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1 - 2y = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1 - 2x = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}$$

$$\forall (x, y, z) \in E$$

Obs că L este de clasă C^2

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(1,1,1) = \dots$$

$$= \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}(1,1,1) = -1$$

~~$d^2L(1,1,1)$~~ Fie $F(1,1,1) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(1,1,1)(u, v, w) = d^2L(1,1,1)(u, v, w)^2$$

Avem $F(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1)\,dx^2 +$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1)\,dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1)\,dz^2 +$$

$$2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(1,1,1)\,dx dy + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(1,1,1)\,dx dz +$$

$$2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(1,1,1)\,dy\,dz = -2(dx dy +$$

$$dx\,dz + dy\,dz)$$

Diferent. leg. $xyz-1=0$ în (x,y,z) și obținem

$$yz\,dx + xz\cdot dy + xy\cdot dz = 0$$

În $(1,1,1)$ rel precedentă devine $dx+dy+dz=0$

Avem $dz = -dx-dy$

Fie $F(1,1,1)_{leg} = -2(dxdy + dx(-dx-dy) + dy(-dx-dy))$

$$= -2(\cancel{dxdy} - dx^2 - \cancel{dxdy} + dydx - dy^2)$$

$$= 2(dx^2 + dxdy + dy^2)$$

$$= 2\left(\left(\frac{1}{2}dx + dy\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}dx\right)^2\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}dx+dy\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}dx\right)^2$$

$F(1,1,1)_{leg} : \mathbb{R}^{\overset{3-1}{2}} \to \mathbb{R}$ nr. leg

$F(1,1,1)_{leg}(\underset{(u_1,u_2)}{u}) = 2\left(\frac{1}{2}u_1+u_2\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u_1\right)^2$

$F(1,1,1)_{leg}(\underset{(u_1,u_2)}{u}) \geq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^2$ și

$F(1,1,1)_{leg}(u) = 0 \Rightarrow u=(0,0)$

Deci, $(1,1,1)$ este pct de minim local al lui f cu leg $xyz=1$

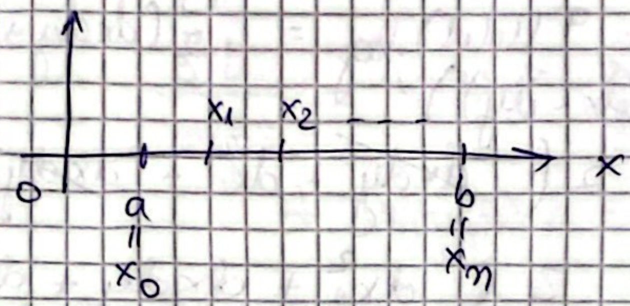
$dx \times dy\,((u_1,\dots,u_p)\,(v_1\dots v_2))$
$= u_1\cdot v_2$

$dy \times dx\,(\dots) = u_2\cdot v_1$

Integrala Riemann pt fct de o var. reală

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Def: 1) Se numește diviziune a int $[a,b]$ un sistem de puncte $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$



Notăm $\mathcal{D}([a,b]) = \{\Delta \mid \Delta$ diviz a intervalului $[a,b]\}$

2) Numărul $\|\Delta\| \overset{def}{=} \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = \overline{1,n}\}$ s.n norma diviz. Δ

3) Se numește sist. de pct intermed. asociat diviz. Δ, un sistem de puncte

$$\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}} \text{ a.î. } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \forall i = \overline{1,n}$$

4) Suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ s.n suma Riemann asoc. fct. f, diviziunii Δ și s.p.i (sist de pct. intermed) $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ și se notează cu $\sigma_\Delta(f, \xi)$

Def: Spunem că f e integr. Riemann dacă $\exists\, I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și $\forall \xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ s.p.i asociată diviziu

Obs: Nr real I din def precedentă, dacă există, este unic și se notează $I = \int_a^b f(x)\,dx$

Teoremă: Dacă f este integrabilă Riemann, atunci f este mărginită

Teoremă: Dacă f este cont, atunci f este integrab. Riemann

Teoremă: Dacă f este monot, atunci f este integrab Riemann.

Obs Reciprocele celor 3 teoreme anterioare, NU sunt adevărate.

Teoremă (Teorema de permut. a limitei cu integrala)
Fie șirul de fct $(f_n)_n$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ și $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f_n integrab Riem. $\forall n \in \mathbb{N}$

2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Atunci, f e integr. Riem. și $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Exc Det $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}\,dx$

Sol Fie $f_n : [\frac{1}{2}; 1] \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Știm din Seminar 7 că

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, unde $f : [\frac{1}{2}; 1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = 0$

f_n cont $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n$ integr Riem. $\forall n \in \mathbb{N}$

Cf. Th de perm a limite cu integrala avem că

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = 0 \quad \square$$

Def: O mult $A \subset \mathbb{R}$ s.n neglijabilă ~~dacă~~ Lebesgue dacă pt. orice $\varepsilon > 0$ există un șir $(I_n)_n$ de intervale deschise și mărg. a.î:

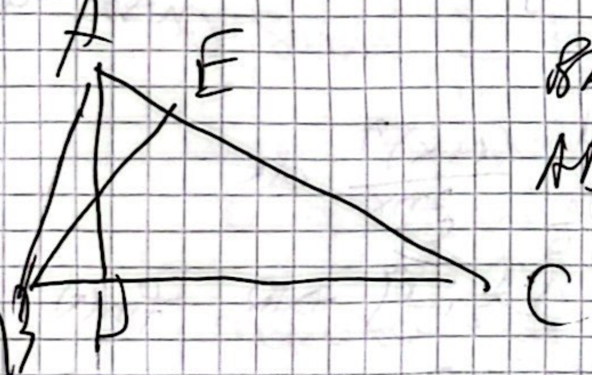
1) $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$, unde $\ell(I_n)$ repres. lg. interv. I_n $\forall n \in \mathbb{N}$ ($\ell(c,d) = d-c$)

Obs: 1) Orice submult a unei mult neglij Lebesgue este neglij. Lebesgue

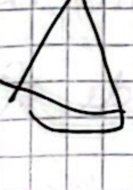
2) Orice mult cel mult numărabilă (i.e finită sau numărab) este neglij. Lebesgue

3) Orice reuniune cel mult numărab de mult neglij. Lebesgue este neglij. Lebesgue



$BE = BC$

$AD = AC$



$\frac{AD \cdot l}{2}$

Notație: $D_f = \{ x \in [a,b] \mid f$ nu e cont în $x \}$

$\Downarrow$ mult discont lui f

Teoremă (Crit lui Lebesgue de integrab. Riemann)

Sunt echivalente:

1) f integrab. Riemann

2) f mărg şi Δ_f neglij Leb.

exe Fie $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 7, & x = 0 \end{cases}$$

Ar. că f este integr. R.

Sol $|f(x)| \le 7 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow f$ mărg

$\Delta_f \subset \underbrace{\{0\}}_{\text{finita} \to \text{neglij Leb}}$ $\Rightarrow \Delta_f$ negl. Leb.

Cf. crit lui Leb. de integr. Riem. avem că f int. R. $\square$

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărg (deci $\exists M > 0$ a.î. $|f(x)| \le M \quad \forall x \in [a,b]$). Fie

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$

Fie $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \ \forall i = \overline{1,n}$

şi $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ \forall i = \overline{1,n}$

Def 1) $S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ (suma Darboux superioară asociată lui f şi Δ)

2) $s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ (suma Darboux inferioară asociată lui f şi Δ)

3) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$

(integr. Darboux superioară a lui f)

4) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$

(int. Darb. inf a lui f)

Obs 1) $s_\Delta(f) \le S_\Delta(f)$

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Teoremă (Crit lui Darboux de integrab Riem.)

Sunt echivalente:

1) f integr R.

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}([a,b])$ a.î. $S_{\Delta_\varepsilon}(f) - s_{\Delta_\varepsilon}(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

Obs: Dacă una din afirm de mai sus este adev atunci $\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

ex Fie $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1;1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \underbrace{[-1;1] \setminus \mathbb{Q}}_{= [-1;1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} \end{cases}$

Det $\overline{\int_{-1}^1} f(x)\,dx$, $\underline{\int_{-1}^1} f(x)\,dx$ și prec dacă f e integr Riemann

Sol $|f(x)| \le 1\ \forall x \in [-1;1] \Rightarrow f$ mărg

Fie $\Delta : -1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, $\Delta \in \mathcal{D}([-1;1])$

$M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} = 1\ \forall i = \overline{1,n}$

(deoarece între orice 2 nr reale există o inf de nr raț și o inf de nr iraționale)

Analiză

$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = -1 \ \forall i \in \overline{1,n}$

(acelaşi raţionament)

$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1})$

$= (x_1 - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \dots + (x_n - \cancel{x_{n-1}})$

$= x_n - x_0 = 1 - (-1) = 2$

$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)(x_i - x_{i-1})$

$= -[(\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \dots + (x_n - \cancel{x_{n-1}})]$

$= -(x_n - x_0) = -(1+1) = -2$

Cum Δ a fost aleasă în mod arbitrar,

$\overline{\int_{-1}^{1}} f(x)\,dx = \inf\{S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([-1,1])\}$

$= \inf\{2 \mid \Delta \in \mathcal{D}([-1,1])\} = 2$ şi

$\underline{\int_{-1}^{1}} f(x)\,dx = \sup\{s_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([-1,1])\}$

$= \sup\{-2 \mid \Delta \in \mathcal{D}([-1,1])\} = -2$

$\overline{\int_{-1}^{1}} f(x)\,dx \neq \underline{\int_{-1}^{1}} f(x)\,dx \Rightarrow$

f nu e integr. R $\square$

Integrale improprii

(I). Fie $-\infty < a < b \le +\infty$ și $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ o fct integr R pe orice interval $[a,d]$ $a<d<b$

~~Def~~ Dacă există $\lim\limits_{\substack{d\to b\\ d<b}} \int_a^d f(x)\,dx \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

valoarea ei s.n. INTEGRAL. IMPROPRIE a lui f pe intervalul $[a,b)$ și se notează cu $\int_a^b f(x)\,dx$.

Def:

1) Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv dacă $\lim\limits_{\substack{d\to b\\ d<b}} \int_a^d f(x)dx$ e finită.

2) Sp. că integr. improprii $\int_a^b f(x)\,dx$ e div dacă nu e conv

(II) Fie $-\infty \le a < b < +\infty$ și $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ o fct, integrab R pe orice interval ~~[...]~~ $[c,b]$ $a<c<b$

Def

1) Dacă $\exists \lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$ valoarea ei s.n integr. improprie a lui f pe interv. $(a,b]$ și se not. $\int_a^b f(x)\,dx$.

Def: 1) Spunem că integr improp. $\int_a^b f(x)dx$ e conv dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)dx$ e finită.

2)

III: Fie $-\infty \le a < b \le +\infty$ și $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ o fct. integr. R pe orice interval $[c,d]$ $a < c < d < b$

Def: Dacă există $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a \\ d \to b \\ d < b}} \int_c^d f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$, valoarea ei s.n. integrala improprie a lui f pe (a,b) și se notează $\int_a^b f(x)\,dx$.

Def: 1) Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ e conv dacă e finită

2) fix la fel ca anterior

Prop: Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ o fct ~~integrală~~ integr. R pe orice interval $[c,d]$, $a < c < d < b$.
Dacă $\exists\ \alpha \in (a,b)$ a.î. integr. improprii $\int_a^\alpha f(x)\,dx$ și $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ sunt conv, atunci integr. improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ e conv și $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)dx$

- <u>Crit de conv pt integr. improprii</u>

Vom ~~cu~~ enunța crit de conv doar pt fct definite pe $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

1. Crit de comp cu ineg.

Fie $f, g : [a, \infty) \to [0, \infty)$ două fct integr. R pe orice interval $[a,d]$, $a < d < \infty$ a.î.
$0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall\ x \in [a; \infty)$

Funcțiile Gama și Beta
(Γ) (β)

Def 1) $\Gamma:(0;\infty)\to(0;\infty)$, $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$
(fct Gama)

2) $\beta:(0;\infty)\times(0;\infty)\to(0;\infty)$
$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (fct Beta)

Prop 1) $\Gamma(1)=1$

2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

3) $\Gamma(1+x)=x\,\Gamma(x)\ \forall x\in(0,\infty)$
(în part, $\Gamma(1+n)=n!\ \forall n\in\mathbb{N}$)

4) $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\ \forall x\in(0,1)$

5) $\beta(x,y)=\beta(y,x),\ \forall x,y\in(0,\infty)$

6) $\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ \forall x,y\in(0,\infty)$

7) $\beta(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}\,dt$, $\forall x,y\in(0,\infty)$

Den. alternativă: Fct Γ și β se mai numesc și
INTEGRALE EULERIENE

exc Det $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

Sol $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{d\to\infty}\int_1^d \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{d\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^d\right)$

$=\lim_{d\to\infty}\left(-\frac{1}{d}+1\right)=1$ $\square$

1.) Dc integ. impr. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ e conv, atunci integr impr. $\int_a^\infty f(x)dx$ e conv.

2) Dc integ imp $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e div, atunci integr imp $\int_a^\infty g(x)dx$ e div

2. <u>Crit. de comp cu limită</u>

Fie $f, g : [a,\infty) \to [0,\infty)$ două fct integr. R. pe orice interval $[a,d]$, $a < d < \infty$ a.î.

1) $g(x) > 0 \quad \forall x \in [a,+\infty)$

2) $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{not}{=} l \in [0,\infty)$

i) Dacă $l \in (0,\infty)$ atunci integralele improprii $\int_a^\infty f(x)\,dx$ și $\int_a^\infty g(x)\,dx$ au aceeași natură

ii) Dacă $l = 0$ și integr improp. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ e conv, at. integr. impr. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e conv.

iii) Dacă $l = \infty$ și integr improp. $\int_a^\infty g(x)$ e div

atunci integr. improp. $\int_a^\infty f(x)dx$ e div.

3. <u>Crit integral</u> al lui Cauchy

Fie $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ o fct descresc, deci este integrab. R. pe orice interval $[a,d]$, $a < d < \infty$.

Atunci, integrala impr. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ și seria de nr reale $\sum\limits_{n=p}^{\infty} f(n)$ au aceeași natură, pt orice

$p \in [a;\infty) \cap \mathbb{N}$

Scanned with CamScanner