

-Curs 1-

Siruri de numere reale

Def

tie $A \subset \mathbb{N}$ o multime numarabila

$\hookrightarrow (\exists) g: A \rightarrow \mathbb{N}$, bijectivă

O func. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se numeste c.s.n. sir de nr. reale

Notatii

1) $f(x_n) \stackrel{\text{not}}{=} x_n$ cu $x_n \in A$

2) tinand cont de notatia 1) si de def. precedenta, obtinem sirul de nr. reale $(x_n)_{n \in A}$

Obs

1) Atunci cand A se subantelege, vom scrie doar $(x_n)_n$

2) In general $A = \mathbb{N}$ sau $A = \mathbb{N}^*$, cauzi in care vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n \geq 0}$ sau $(x_n)_n$

Def

Fie $(x_n) \subset \mathbb{R}$

1) Spunem ca $(x_n)_n$ este convergent daca $\exists l \in \mathbb{R}$ a.i. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

2) Spunem ca $(x_n)_n$ este divergent daca nu este convergent sau are limita, sau limita lui este $\pm\infty$

Monotonie:

1) crescator: $x_n \leq x_{n+1}$

2) descrescator: $x_n \geq x_{n+1}$

3) strict cresc.: $x_n < x_{n+1}$

4) strict desc.: $x_n > x_{n+1}$

5) monoton: cresc. sau desc.

6) strict monoton: strict cresc. sau strict desc.

7) margininit daca $a \leq x_n \leq b$ sau $(\exists) M > 0$

a.i. $(\forall) n \in \mathbb{N}$ avem $|x_n| \leq M$

Sol: a) fie $k \in \mathbb{N}^*$

$$\left. \begin{aligned} x_{2k} &= \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k} \\ x_{2k+1} &= -\frac{1}{2k+1} \\ x_{2k+2} &= \frac{1}{2k+2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{2k} &> x_{2k+1} \\ x_{2k+1} &> x_{2k+2} \end{aligned} \quad \text{si } x_{2k+1} < x_{2k+2} \Rightarrow$$

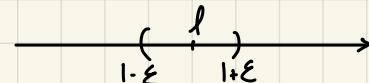
este monoton

Prop

Orice sir de nr. reale convergent este marginit.

Def

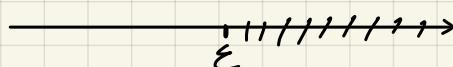
Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ si $l \in \mathbb{R}$. Spunem ca sirul $(x_n)_n$ are limita l si scriem ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ daca $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $(\forall) n \geq n_0$, avem $|x_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in l - \varepsilon, l + \varepsilon$



Def

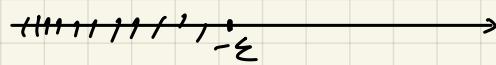
Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Spunem ca $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ si scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ daca $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $(\forall) n \geq n_0$, avem $x_n > \varepsilon$



Def

Spunem ca $(x_n)_n$ are limita $-\infty$ si scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ daca $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $(\forall) n \geq n_0$, avem $x_n < -\varepsilon$



Criteriul lui Weierstrass

Orice sir de nr. reale monoton si marginit este convergent

Obs

Recipraca teoremei precedente este falsa

Exc

Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

a) Atalati ca x_n nu e monoton

b) ca $(x_n)_n$ e conv.

b) Avem $x_n = a_n \cdot b_n$ ($\forall) n \in \mathbb{N}^*$, unde $a_n = \frac{1}{n}$ si $b_n = (-1)^n$ ($\forall) n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$(b_n) = (-1)^n = 1 \text{ si } (-1)^n = -1 \text{ si } b_n = \text{marginit}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0 \Rightarrow x_n = \text{convergent} \quad \square$$

$$(\text{``o} \cdot \text{marg.} = 0)$$

Prop (Operații cu siruri convergente)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$, $a, x, y \in \mathbb{R}$ a.i.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot x_n) = x \cdot y$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a x_n) = a x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Criteriul cleștelui

Fie $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.i. $(\exists) n_0 \in \mathbb{N}$ cu prop. că $\forall n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n \leq z_n$

Presupunem că (x_n) este convergentă. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$, atunci și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$

Ex.

Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $(n) \in \mathbb{N}^*$
Arătăți că nu e convergent

Sol.

Arătăm că $(x_n)_n$ nu e sir Cauchy

$(x_n)_n$ e sir Cauchy $\Leftrightarrow (\exists) \varepsilon > 0, (\exists) n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $(\forall) m, n \in \mathbb{N}^*, m \geq n \geq n_0, n \neq m$, avem $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$

$(x_n)_n$ nu e sir Cauchy $\Leftrightarrow (\exists) \varepsilon_0 > 0, (\forall) k \in \mathbb{N}$, $(\exists) m_k, n_k \in \mathbb{N}^*, m_k \geq k, n_k \geq k, |x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*, m > n$

$$x_m - x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m} \cdot (m-n)$$

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m} (m-n) = \frac{n}{m-n} = \frac{1}{2}$$

Alegem $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$

Fie $k \in \mathbb{N}$

Alegem $m_k = 2(k+1)$, $n_k = k+1$

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = \frac{1}{m_k} + \dots + \frac{1}{n_k} \geq \frac{1}{n_k} (n_k - m_k) = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

Deci x_n nu este sir Cauchy \Rightarrow nu e convergent

Temă:

Fie $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2^{n+1}}$, $(n) \in \mathbb{N}$

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ și dacă (\exists) limită

$$x_{2n} = 1 + \frac{2n}{2^{2n+1}} \rightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2n+1} = 0 - \frac{2n+1}{2^{2n+2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad (\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}$$

Prop

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$$

3) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ și $(y_n)_n$ e marginită, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$ ($\text{d}\overset{o}{\text{m}} \text{g} \text{r} \text{i} \text{f} \text{u} \text{t} \text{e} = 0$)

Siruri Cauchy

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_n$ e sir Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq N$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$

Terminologie

Sirurile Cauchy se mai numesc și siruri fundamentale.

Teorema

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Urm. afir. sunt echivalente:

1) $(x_n)_n$ e convergent

2) $(x_n)_n$ e sir Cauchy

Lema lui Cesaro

Orice sir de nr. reale marginite admite cel puțin un sub-sir convergent

Limitele extreme ale unui sir de nr. reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Fie $x \in \mathbb{R}$ definit ca punct limită al sirului $(x_n)_n$

Spunem că x e punct limită al sirului $(x_n)_n$ dacă $(\exists) (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ (sub-sir) a.i. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$

Notatie: $L((x_n)_n) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \text{ e punct limită al lui } (x_n)_n\}$

Prop

1) Unul cel mai mare punct limită (finit sau infinit) al sirului $(x_n)_n$ și unul cel mai mic punct limită (finit sau infinit) al sirului $(x_n)_n$.

Def

1) Cel mai mare punct limită al sirului $(x_n)_n$ se numește limită superioră a sa și se notează $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau $\overline{\lim} x_n$

2) Cel mai mic punct limită al sirului $(x_n)_n$ se numește limită inferioră a sa și se notează $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau $\underline{\lim} x_n$

Prop

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

2) $(x_n)_n$ are \lim c.e. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$

1. Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Arațati, folosind definiția, că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Sol: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.i. } (\forall) n \geq n_\varepsilon, |x_n - 0| < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$

Căutăm n_ε a.i. $(\forall) n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$

$$|x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

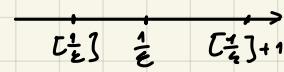
Alegem $n_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$

$$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$$

$$n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$(\forall) n \geq n_\varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$



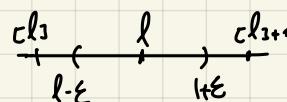
2. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ și $l \in \mathbb{R}$ a.i. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

Arațati că $l \notin \mathbb{Z}$

Sol: P.R.A. că $l \notin \mathbb{Z}$

Stim: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \Leftrightarrow (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.i. } (\forall) n \geq n_\varepsilon, |x_n - l| < \varepsilon$

$$|x_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$



Alegem $\varepsilon > 0$ a.i. $[l] < l - \varepsilon$ și $l + \varepsilon < [l] + 1$

Un astfel de ε există deoarece $l - [l] > 0$ și $[l] + 1 - l > 0$

Deci $\varepsilon > 0$, min{ $l - [l]$, $[l] + 1 - l$ }

Aveam: $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$

$\Rightarrow x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon), (\forall) n \geq n_\varepsilon \quad \left\{ \Rightarrow \text{contradicție} \right.$

$\Rightarrow x_n \in \mathbb{Z}, (\forall) n \in \mathbb{N} \quad \text{Pentru urmăre } l \in \mathbb{Z}$

Criteriul raportului pt. siruri cu termeni strict pozitivi

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ a.i. (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \stackrel{\text{not}}{=} l \in [0, \infty] \stackrel{\text{def}}{=} [0, \infty) \cup \{\infty\}$

1) Dacă $l < 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

2) Dacă $l > 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

3) Dacă $l = 1$, atunci criteriul nu decide

3. Fie $a > 0$

Det. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a^n$

Aplicăm criteriul raportului pt. siruri cu term. strict poz.

Sol.: Fie $x_n = n \cdot a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+a}{n} = a$$

1) Dacă $a < 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a^n = 0$

2) Dacă $a > 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a^n = +\infty$

3) Dacă $a = 1$, atunci crit. nu decide

Fie $a = 1$

$$x_n = n \cdot 1^n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

Am obținut:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a^n = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a < 1; \\ +\infty, \text{ dacă } a \in [1; +\infty) \end{cases}$$

Criteriul radicalului pt. siruri cu term. poz.

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0; +\infty)$ a.i. (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \stackrel{\text{not}}{=} l \in [0; \infty]$

1) Dacă $l < 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

2) Dacă $l > 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

3) Dacă $l = 1$, crit. nu decide

4. Fie $a, b \in \mathbb{R}; a > 0$. Det. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot n^2 + 5n + 8)^{\frac{1}{n}}$

Aplicăm crit. ...

1)

$$2)$$

$$3) a = b \Rightarrow x_n = \left(\frac{an^2 + 5n + 8}{an^2 + 3n + 2} \right)^n$$

$$x_n = \left(1 + \frac{2n+6}{an^2 + 3n + 2} \right)^n \stackrel{\frac{an^2 + 3n + 2}{2n+6}}{\longrightarrow} \left(1 + \frac{2n+6}{an^2 + 3n + 2} \right)^{\frac{2n+6}{an^2 + 3n + 2} \cdot n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left(1 + \frac{2n+6}{an^2 + 3n + 2} \right)^{\frac{2n+6}{an^2 + 3n + 2} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2n^2 + 6n}{an^2 + 3n + 2}} = e^{\frac{2}{a}} = \sqrt[a]{e^2}$$

Prop

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fie } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}, \text{ a.s. (3) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \text{ deci } \\ \text{Atunci (3) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l \end{array} \right.$$

5. Det. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$

Sol: Fie $x_n = n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1, \text{ i.e. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

6. Det. $\lim x_n$, $\overline{\lim} x_n$ și precizia; dacă (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, unde

$$a) x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n}{2k+1}, \text{ cu } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Sol: } x_{2k} = \frac{1+(-1)^{2k}}{2} + (-1)^{\frac{2k-1}{2}} \cdot \frac{2k}{2k+1} = 1 + \frac{2k}{4k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 + \frac{\frac{2}{4}}{1} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2k+1} = \frac{1+(-1)^{2k+1}}{2} + (-1)^{\frac{2k+1-1}{2}} \cdot \frac{2k+1}{2k+3} = 0 - \frac{2k+1}{4k+3} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$$

$$\text{Deci } L((x_n)_n) = \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$$

$$\underline{\lim} x_n = -\frac{1}{2}$$

$$\overline{\lim} x_n = \frac{3}{2}$$

$$\lim x_n \neq \overline{\lim} x_n \Rightarrow \text{d.c.} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_n$$

$$b) x_n = 1 + 2(-1)^{\frac{n+1}{2}} + 3(-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, \text{ cu } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Sol: } x_{nk} = 1 - 2 + 3 = 2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2$$

$$x_{nk+1} = 1 + 2 - 3 = 0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$x_{nk+2} = 1 - 2 - 3 = -4 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -4$$

$$x_{nk+3} = 1 + 2 + 3 = 6 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 6$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup (\mathbb{N}+1) \cup (4\mathbb{N}+2) \cup (4\mathbb{N}+3)$$

$$\underline{\lim} x_n = -4$$

$$\overline{\lim} x_n = 6$$

$$\lim x_n \neq \overline{\lim} x_n \Rightarrow \text{d.c.} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_n$$

-Curs 2-

Serii de numere reale

Def

Fie $(x_n)_{n \geq p} \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n = \sum_{k=p}^n x_k$, $\forall n \geq p$

Perechea $((x_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p})$ se numește serie de numere reale

Notăție

în contextul def. precedente, notăm

$$\sum_{n=p}^{\infty} x_n \stackrel{\text{not}}{=} ((x_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p})$$

$\|\text{not}\|$

$$\sum_{n \geq p} x_n \stackrel{\text{not}}{=} \sum_n x_n$$

Obs

În general $p=0$ sau $p=1$, cazuri pe care le vom considera în definitiile, teoreme, etc.

Exc.

Def. sumele serilor de mai jos și precizați dacă sunt conv. sau div.:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$

($0 < 1$ prin convenție)

c) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$p=1$

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \in \mathbb{R}$$

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 \in \mathbb{R}$, seria e conv.

b) $x_n = q^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

$p=0$

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}$$

$$s_n = \begin{cases} n+1, & q=1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, & q \neq 1 \end{cases}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}$$

Dacă $q=1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, deci $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \text{div.}$

Fie $g \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0, & q \in (-1, 1) \\ +\infty, & q > 1 \\ -\infty, & q < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & q \in (-1, 1) \\ \infty, & q > 1 \\ -\infty, & q < -1 \end{cases}$$

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, o serie de nr. reale ($s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

Def

1) elementele sirului (x_n) se numesc termenii seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$

2) elementele sirului (s_n) se numesc sumele parțiale ale seriei

3) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha \in \mathbb{R}$, acest α se numește suma seriei și vom scrie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha$

4) spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e convergentă dacă (s_n) e convergent

5) spunem că e divergentă dacă (s_n) e divergent

Prop → Criteriu suficient de divergență

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e conv., $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e divergentă
atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Obs

Folosind doar afirmația „ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ”, nu putem decide dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e div. sau conv.

Obs

în aplicații, putem folosi (fără justificare), convergența urm. serii de nr. reale:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ $\begin{cases} \text{conv.}, & q \in (-1, 1) \\ \text{div.}, & q \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \end{cases}$

(seria geometrică)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\begin{cases} \text{conv.}, & \alpha > 1 \\ \text{div.}, & \alpha \leq 1 \end{cases}$

(seria armonică generalizată)

Obs

q și α din obs. precedente sunt nr. reale care nu depind de n

Prop

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, 2 serii de nr. reale și $a \in \mathbb{R}^*$

1) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt conv., atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ e conv.
în plus, $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = (\sum_{n=0}^{\infty} x_n) + (\sum_{n=0}^{\infty} y_n)$

2) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e conv. cresp. div., atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (a x_n)$ e conv. cresp. div.
în plus, $\sum_{n=0}^{\infty} (a x_n) = a (\sum_{n=0}^{\infty} x_n)$

3) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e conv. și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ e div., atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ e div.

4) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt div., atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ poate fi sau conv. sau div.

Dacă $q \in (-1, 1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \text{conv.}$

Dacă $q \geq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \text{div.}$

Dacă $q \leq -1$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \text{div.}$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \text{div.}$

Criterii de convergență pt. serii cu termeni pozitivi

1. Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n > 0$, $(n \in \mathbb{N})$ a.i. (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e div.

c) Dacă $l = 1$, atunci criteriul nu decide

2. Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n \geq 0$, $(n \in \mathbb{N})$, a.i. (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e div.

c) Dacă $l = 1$, atunci criteriul nu decide

3. Criteriul Raabe-Duhamel

Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n > 0$, a.i. (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e div.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv.

c) Dacă $l = 1$, atunci criteriul nu decide

4. Criteriul condensării

Dacă $(x_n)_n \subset [0, \infty)$ este un sir desc., atunci serile $\sum_n x_n$ și $\sum_n x_{2^n}$ au aceeași convergență

5. Criteriul de comparație cu inegalitate;

Fie serile $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$, $(n \in \mathbb{N})$, a.i. (3) $n_0 \in \mathbb{N}$ cu prop. că $\forall n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n$

1) Dacă $\sum_n y_n$ e conv., atunci $\sum_n x_n$ e conv.

2) Dacă $\sum_n x_n$ e div., atunci $\sum_n y_n$ e div.

6. Criteriul de comparație cu limite

Fie serile $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0$, $y_n > 0$, $(n \in \mathbb{N})$, a.i.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty]$

1) Dacă $l \in (0; \infty)$, atunci $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$
c.i.e. av aceeași convergență (naturală)

2) Dacă $l = 0$ și $\sum_n y_n$ e conv. $\Rightarrow \sum_n x_n$ e conv.

3) Dacă $l = \infty$ și $\sum_n y_n$ e div. $\Rightarrow \sum_n x_n$ e div.

Criteriul lui Cauchy pt. serii de nr. reale

Fie $\sum_n x_n$ o serie de nr. reale.

Sunt echivalente:

i) $\sum_n x_n$ e conv.

ii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall n \geq N$, $\forall m \in \mathbb{N}$
avem $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m}| < \epsilon$

Criterii de conv. pt. serii cu term. carecare

Def

Fie $\sum_n x_n$ o serie de nr. reale. Spunem că $\sum_n x_n$ este absolut convergentă dacă seria $\sum_n |x_n|$ e conv.

Prop

Orică serie de nr. reale absolut convergentă, este convergentă.

Obs

Reciproca propoziției precedente nu e adevarată

1. Criteriile Abel-Dirichlet

I. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.i.:

i) $(x_n)_n$ este desc. și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

ii) $\exists M > 0$ a.i. $\forall n \in \mathbb{N}$, avem $|y_0 + y_1 + \dots + y_n| \leq M$

\Rightarrow Atunci $\sum_n x_n \cdot y_n$ e conv.

II Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.i.:

i) $(x_n)_n$ este monoton și mărg.

ii) $\sum_n y_n$ e conv.

\Rightarrow Atunci $\sum_n x_n \cdot y_n$ e conv.

2. Criteriul lui Leibniz

Fie $(x_n)_n \subset [0, \infty)$ a.i. x_n e desc. și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Atunci $\sum_n (-1)^n x_n$ e conv.

Ex.

Fie $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Arătați că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Arătați că $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă.

Sol:

a) Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

x_n este descrescătoare și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$$a_n = (-1)^n x_n, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Conform criteriului Leibniz aveam că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \text{div. (serie armonică generalizată cu } \alpha = 1)$

Ex. Studiați convergența serilor:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)} \cdot \frac{1}{2^n}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Sol:

$$x_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)} \cdot \frac{1}{2^n}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n+3)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} \cdot 2^n = \frac{3n(3n+1)}{(3n+3)(3n-2)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3n+1}{3n+3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge.}$$

B) convergentă.

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$$

Sol:

$$\text{Fie } y_n = \frac{1}{2^{n+3}}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$y_n = \frac{1}{2^n}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$x_n < y_n, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ convergentă (serie geometrică cu } r = \frac{1}{2})$$

Conform criteriului de comparație cu inegalități,

avem că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

$$\text{c)} \text{ Fie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$\text{Sol: } y_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Fie } y_n = \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^3}}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^3}} \cdot \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^2}} = 1 \cdot 1 = 1 \in (0, +\infty)$$

Conform criteriului de comparație cu limită.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \text{div. (serie armonică generalizată cu } \alpha = \frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \text{div.}$$

1. Det $\underline{\lim} x_n$ și $\overline{\lim} x_n$, precizând dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$a) x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sin \frac{n\pi}{3}, (n) \in \mathbb{N}^*$$

Sol:

$$x_{6k} = \left(1 + \frac{1}{6k}\right)^{6k} \sin \frac{6k\pi}{3} = \left(1 + \frac{1}{6k}\right)^{6k} \sin(2k\pi) = e \cdot 0 = 0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$x_{6k+1} = \left(1 + \frac{1}{6k+1}\right)^{6k+1} \sin \frac{6k\pi + \pi}{3} = \dots \sin(2k\pi + \frac{\pi}{3}) = e \cdot \sin \frac{\pi}{3} = e \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}e}{2}$$

$$x_{6k+2} = \left(1 + \frac{1}{6k+2}\right)^{6k+2} \sin \frac{6k\pi + 2\pi}{3} = e \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}e}{2}$$

$$x_{6k+3} = \dots \sin \pi = 0 \rightarrow 0$$

$$x_{6k+4} = \dots \sin \frac{4\pi}{3} = \dots \sin(\frac{6\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}) = \sin(2\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e$$

$$x_{6k+5} = \dots \sin \frac{5\pi}{3} = \dots \sin(\frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = e \cdot \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e$$

$$\mathbb{N}^* = 6\mathbb{N}^* \cup (6\mathbb{N} + 1) \cup \dots \cup (6\mathbb{N} + 5)$$

$$\underline{\lim} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}e$$

$$\overline{\lim} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}e$$

$$L((x_n)_n) = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}e, \frac{\sqrt{3}}{2}e\}$$

$$\underline{\lim} x_n \neq \overline{\lim} x_n \Rightarrow (\exists) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \square$$

$$b) x_n = \frac{n \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2 + 1}, (n) \in \mathbb{N}$$

$$\text{Sol: } -1 \leq \cos \frac{n\pi}{2} \leq 1, (n) \in \mathbb{N}$$

$$-\frac{n}{n^2 + 1} \leq x_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}, (n) \in \mathbb{N}$$

2. Det. suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ și prec. dacă este conv.

Sol:

$$x_n = \frac{n}{(n+1)!}, (n) \in \mathbb{N}^*$$

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}, (k) \in \mathbb{N}^*$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{1!} + \cancel{\frac{1}{2!} + \dots + \cancel{\frac{1}{n!}}} - \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} - \dots - \cancel{\frac{1}{(n+1)!}} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

3. Studiați convergența/natura seriilor:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{n}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an^2 + bn + c}{2n^2 + dn + e} \right)^n, a > 0$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n\sqrt{n}}, a > 0$$

$$d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

a) Sol: $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$x_n < y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \text{conv. c serie arm. gen., } \alpha = \frac{3}{2} \quad \square$$

b) Sol:

$$x_n = \left(\frac{a}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Aplic. crit. rad.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a}{n}} = \sqrt[2]{\frac{a}{2}}$$

Averm.:

1) Dacă $\sqrt[2]{\frac{a}{2}} < 1$, atunci seria e conv.

2) Dacă $\sqrt[2]{\frac{a}{2}} > 1$, seria e div.

3) Dacă $\sqrt[2]{\frac{a}{2}} = 1$, crit. nu decide

Fie $a = 2$, dem. că

$$x_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{2n^2 + n + 1}, \text{ care are } \lim_{n \rightarrow \infty} \neq 0 \Rightarrow \text{seria e div.}$$

c) Sol:

$$x_n = \frac{a^n}{n\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n\sqrt{n}}} = a$$

(rulezi sem. 1)

Conc. crit. rad.:

1) Dacă $a < 1$ (i.e. $a < 1$), seria e conv.

2) Dacă $a > 1$ (i.e. $a > 1$), seria e div.

3) Dacă $a = 1$, crit. nu decide

Fie $a = 1$

$$x_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \text{seria e div.}$
conform. crit. suf. div.

d) Sol: $x_n = \frac{1}{n \ln n}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

($x_n \downarrow$, desc. și poz.)

Conc. crit. condensare.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_n = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{n \ln 2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot n} \begin{cases} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{n} = \text{div.} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \text{div.} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} x_n = \text{div.}$$

e) Sol: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cdot 13 \cdots (6n+1)}{8 \cdot 13 \cdots (5n+8)} \cdot x^n, x > 0$

Aplic. crit. rap.:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 13 \cdots (6n+1)}{8 \cdot 13 \cdots (5n+8)} \cdot \frac{8 \cdot 13 \cdots (5n+8) \cdot x^{n+1}}{4 \cdot 13 \cdots (5n+4) x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6n+1}{5n+8} \cdot x = \frac{6}{5} \cdot x$$

1) Dacă $\frac{6}{5} \cdot x < 1$ (i.e. $x < \frac{5}{6}$) \Rightarrow seria e conv.

2) Dacă $\frac{6}{5} \cdot x > 1$ (i.e. $x > \frac{5}{6}$, 0)) \Rightarrow seria e div.

3) Dacă $x = \frac{5}{6}$, crit. nu decide

Fie $x = \frac{5}{6}$

$$x_n = \frac{7 \cdots (6n+1)}{8 \cdots (5n+8)} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Aplicația crit. Raabe-Duhamel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{5n+6}{5n+8} \cdot \frac{6}{5} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{30n+36}{30n+40} - \frac{30n+35}{30n+40} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{30} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \text{div.}$$

Topologie

-Curs 3-

Def

Fie $X \neq \emptyset$. O multime $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ s.n. topologie pe X daca:

- 1) $\emptyset, X \in \mathcal{G}$
 - 2) $\forall D_1, D_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{G}$
 - 3) $\bigcup_{i \in I} (D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{G}$ avem $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{G}$
- \downarrow
sunt elemente ale \mathcal{G}

Def

Fie $X \neq \emptyset$ si $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe X .

Perechea (X, \mathcal{G}) s.n. spatiu topologic.

E:

- 1) Fie $X \neq \emptyset$ si $\mathcal{G} = \{\emptyset, X\}$.
Perechea (X, \mathcal{G}) este sp. top.
- 2) Fie $X \neq \emptyset$ si $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X)$.
Perechea (X, \mathcal{G}) este sp. top.
- 3) Fie $X = \mathbb{R}$ si $\mathcal{G} = \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
Perechea (X, \mathcal{G}) este sp. top.

Fie (X, \mathcal{G}) un sp. top.

Def

Fie $(x_n)_n \subset X$ si $x \in X$. Spunem ca sirul $(x_n)_n$ are limita x (sau ca converge catre x) in raport cu top. \mathcal{G}

Si scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (sau $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$) daca

(*) $V \in \mathcal{V}_x$, $\exists n_V \in \mathbb{N}$ o.i. $\forall n \geq n_V$, avem $x_n \in V$

Obs

Sintagma „in raport cu top. \mathcal{G} ” = „in spatiu topologic (X, \mathcal{G}) ”

Obs

Fie sp. top. (X, \mathcal{G}) , $\mathcal{G} = \{\emptyset, X\}$
(*) $x \in X$, $\mathcal{V}_x = \{X\}$

Fie $(x_n)_n \subset X$. Consideram $x, y \in X, x \neq y$.

Audem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$

Deci, intr-un sp. top., limita unui sir nu este neaparat unica!

Def

Fie (X, \mathcal{G}) sp. top. Spunem ca (X, \mathcal{G}) este sp. top. separat

(sau Hausdorff), daca (*) $x, y \in X, \exists V \in \mathcal{V}_x, \exists W \in \mathcal{V}_y$ a.s. $V \cap W = \emptyset$

Prop

Intr-un sp. top. separat, limita oricărui sir este unică

Def

Fie (X, \mathcal{G}) un sp. top.

1) O multime $D \subset X$ s.n. multime deschisa daca $D \in \mathcal{G}$

2) O multime $F \subset X$ s.n. multime inchisa daca $X \setminus F \stackrel{\text{def}}{=} C \in \mathcal{G}$

3) Fie $x \in X$. O multime $V \subset X$ s.n. vecinata lui x daca $\exists D \in \mathcal{G}$ a.s. $x \in D \subset V$

Notatie: pt. orice $x \in X$, notam $\mathcal{V}_x = \{V \subset X | V$ este vecinata lui $x\}$

Def

Fie (X, \mathcal{G}) un sp. top. O multime $k \subset X$ s.n. multime compacta daca $(\forall)(\Delta_i)_{i \in I} \subset \mathcal{G}$ a.i. $k \subset \bigcup_{i \in I} \Delta_i$, $\exists J \subset I$, J finita, cu prop. ca avem induziunea $k \subset \bigcup_{j \in J} \Delta_j$

„Din orice acoperire deschisa a lui k se poate extrage o acoperire deschisa si finita a lui k ”

Analiza topologica a unei multimi

Fie (X, \mathcal{G}) un sp. top., $A \subset X$ si $x_0 \in X$. Spunem ca x_0 este:

1) punct interior al lui A , daca $A \in \mathcal{V}_{x_0}$

c.i.e. $\exists D \in \mathcal{G}$ a.i. $x_0 \in D \subset A$

2) punct aderent (de aderență) al lui A , daca

(*) $V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap A \neq \emptyset$

3) punct de acumulare al lui A , daca (*) $V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

4) punct frontiera al lui A daca este punct aderent si nu este punct interior al lui A

5) punct izolat daca nu este punct aderent sau de acumulare

Notatii

1) $A^o = \{x \in X | x$ este punct interior al lui $A\}$
cointeriorul lui A

2) $\bar{A} = \{x \in X | x$ este punct aderent al lui $A\}$
cinchiderea/aderenta lui A

3) $A' = \{x \in X | x$ este punct de acumulare al lui $A\}$
multimea derivata a lui A

4) $\text{Fr}(A) = \partial A = \{x \in X | x$ este frontiera lui $A\}$
frontiera lui A

5) $I(A) = A' = \{x \in X | x$ este punct izolat a lui $A\}$

Def

Fie $X \neq \emptyset$. O func. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se numește metrică (sau distanță) pe X dacă:

- 1) $d(x, y) \geq 0$, c.t. $x, y \in X$
- 2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, c.t. $x, y \in X$
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$, c.t. $x, y \in X$
- 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, c.t. $x, y, z \in X$
(inegalitatea triunghiului)

Def

Fie $X \neq \emptyset$ și $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ o metrică pe X .

Perechea (X, d) s.n. spatiu metric.

Ex: 1) $d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x=y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$

2) $X = \mathbb{R}$ și $d(x, y) = |x - y|$
 (X, d) e sp. metric

3) $X = \mathbb{R}^n$ și $d_1: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,
 $d_1(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$
 (x_1, \dots, x_n) și (y_1, \dots, y_n)

4) $X = \mathbb{R}^n$ și $d_2: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,
 $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
(distanță euclidiană)

5) Fie $X = \mathbb{R}^n$ și $d_\infty: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,
 $d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, n\}$

2) Fie $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{G}_d$

$\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{G}_d$

Dacă $\bigcup_{i \in I} D_i = \emptyset$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{G}_d$

P.P. că $\bigcup_{i \in I} D_i \neq \emptyset$

$(\Rightarrow (\exists) i_0 \in I$ a.i. $D_{i_0} \neq \emptyset)$

Fie $x \in \bigcup_{i \in I} D_i$. Deci $i_0 \in I$ o.i. $x \in D_{i_0}$

$D_{i_0} \in \mathcal{G}_d \Rightarrow \exists r > 0$ a.i. $B(x, r) \subset D_{i_0}$

Aveam $B(x, r) \subset D_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} D_i$

Din 1), 2), 3) $\Rightarrow (X, \mathcal{G}_d)$ e sp. top.

Obs

Fie (X, d) un sp. metric.
 \mathcal{G}_d este separat / Hausdorff,

Def

Fie (X, d) un sp. metric, $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$.

Spunem că $(x_n)_n$ are limită x în raport cu metrica d (sau că $(x_n)_n$ conv. către x în rap. cu d)

și scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ sau $x_n \xrightarrow{d} x$ dacă

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ c.i.e. $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall n \geq N$ avem $d(x_n, x) < \epsilon$

Def

Fie (X, d) un sp. metric, $x \in X$ și $r > 0$

1) $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$

(bila deschisă)

2) $\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$

(bila închisă)

$\overline{B}(x, r)$

T

Fie (X, d) un sp. metric și $\mathcal{G}_d = \{A \subset X \mid (\forall) x \in A, (\exists) r > 0$ a.i. $B(x, r) \subset A\}$

perechea (X, \mathcal{G}_d) e sp. top. $\cup \mathcal{G}_d$

Dem:

1) $\emptyset \in \mathcal{G}_d$

$\emptyset \in \mathcal{G}_d$

Fie $x \in \emptyset$

Fie $r > 0$, avem $B(x, r) \subset \emptyset$
 $\Rightarrow x \in \emptyset$

2) Fie $D_1, D_2 \in \mathcal{G}_d$

$D_1 \cap D_2 \in \mathcal{G}_d$

Dacă $D_1 = \emptyset$ sau $D_2 = \emptyset \Rightarrow D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \mathcal{G}_d$

P.P. că $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$

Dacă $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ atunci $D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \mathcal{G}_d$

P.P. că $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$

Fie $x \in D_1 \cap D_2$

Aveam $x \in D_1$, și $x \in D_2$

$D_1 \in \mathcal{G}_d \Rightarrow \exists r_1 > 0$ a.i. $B(x, r_1) \subset D_1$

$D_2 \in \mathcal{G}_d \Rightarrow \exists r_2 > 0$ a.i. $B(x, r_2) \subset D_2$

Alegem $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$

Aveam $B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset D_1 \cap D_2 \subset D_1 \cap D_2$

Def

Topologia \mathcal{G}_d se numește topologia indușă de metrică d

Obs

Dându-se un spatiu metric (X, d) , putem construi sp. top. (X, \mathcal{G}_d) .
Ca atare, are sens să vb. despre multimi deschise, închise, vecinătăți, multimi compacte, etc. într-un sp. metric. (referindu-ne la topologia indușă de acea metrică)

Obs

Sintagma „în raport cu metrică d ” poate fi înlocuită cu „sintagma „în spațiul metric (X, d) ”.

Obs

În orice sp. metric, limita oricărui sir este unică.

Studiati conv. seriei:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{c_n} x^n, x > 0$, unde $c_n = n$. div. lini n

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + n}{3^n + n^3}$

a) $1 \leq \sqrt[n]{c_n} \leq n / x^n$

$x^n \leq \sqrt[n]{c_n} x^n \leq n x^n$

$$x \leq \sqrt[n]{\sqrt[n]{c_n} x^n} \leq (\sqrt[n]{n}) x$$

↓
X ↓

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + n}{3^n + n^3}$

$x_n = \frac{a^n + n}{3^n + n^3}, (c_n) \in \mathbb{N}^*$

$x_n = \frac{a^n}{3^n + n^3} + \frac{n}{3^n + n^3}, (c_n) \in \mathbb{N}^*$

Fie $a_n = \frac{a^n}{3^n + n^3}$ și $b_n = \frac{n}{3^n + n^3}$

$b_n < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}, (c_n) \in \mathbb{N}^*$

$\leq \frac{1}{n^2}$ e conv (serie arm. gen. cu $\alpha = 2$)

Cf. crit. comp. cu ineq., avem $\leq b_n$ e conv.

Deci $\sum_n x_n \sim \sum_n a_n$

Considerăm $c_n = \frac{a^n}{3^n}, (c_n) \in \mathbb{N}^*$

calc. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{3^n + n^3} \cdot \frac{3^n}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n + \frac{n^3}{a^n}} = 1 \in (0, \infty)$

Crit. de comp. cu lim ca $\sum_n a_n \sim \sum_n c_n$

$\sum_n c_n = \sum_n \frac{a^n}{3^n} = \left(\frac{a}{3} \right)^n \begin{cases} \text{conv. dacă } a \in (0, 3) \\ \text{div. dacă } a \in [3, \infty) \end{cases}$ (serie geom. cu $q = \frac{a}{3}$)

Pt. a dem. că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$ putem folosi crit rap. pt. șiruri cu term. strict poz.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n+1}} x^n, x > 0$

$x_n = \frac{1}{n \sqrt{n+1}} x^n, (c_n) \in \mathbb{N}^*$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}} \cdot \frac{n\sqrt{n+1}}{x^n} = \frac{x \cdot n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}} = \frac{x \cdot n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

Concl. crit. rap. avem:

1) Dacă $x < 1$, at. seria e conv.

2) Dacă $x > 1$, at. seria e div.

3) Dacă $x = 1$, crit. nu decide

Fie $x = 1$, $x_n = \frac{1}{n \sqrt{n+1}}, (c_n) \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{1}{n \sqrt{n}}$, $(c_n) \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1 \in (0, +\infty)$

Concl. crit. de comp. cu lim.

$\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$

$\sum_n y_n = \sum_n \frac{1}{n \sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} =$ conv. (serie arm. gen., $\alpha = \frac{3}{2}$)

$\Rightarrow \sum_n x_n =$ conv.

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{nc(n+1)}}{(\cos \frac{1}{n})(\cos \frac{1}{n+1})}$$

$$x_n = \frac{\sin \frac{1}{nc(n+1)}}{(\cos \frac{1}{n})(\cos \frac{1}{n+1})} = \frac{\sin \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)}{(\cos \frac{1}{n}) (\cos \frac{1}{n+1})} = \frac{\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1} - \sin \frac{1}{n+1} \cos \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n} \cdot \cos \frac{1}{n+1}} = \frac{\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1}}{\cos \frac{1}{n} \cdot \cos \frac{1}{n+1}} = \tan \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \tan 1 - \tan \frac{1}{2} + \tan \frac{1}{2} - \tan \frac{1}{3} + \dots + \tan \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n+1} = \tan 1 - \tan \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \tan 1 \in \mathbb{R}^*, \text{ deci } \sum_n x_n \text{ e conv. } \square$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\cos \frac{1}{n} \cdot \cos \frac{1}{n+1}}$$

Arațăm că $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

(tr) $n \in \mathbb{N}^*$, avem $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \in (0, \frac{\pi}{2})$, deci $x_n > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

Considerăm $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \cos \frac{1}{n} \cdot \cos \frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \in (0, +\infty)$$

Conc. crit. comp. că lim.

$$\Rightarrow \sum_n x_n \sim \sum_n y_n$$

$$\sum_n y_n = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \text{div. (serie arm. gen. cu } \alpha = \frac{1}{2} \text{)}$$

$$\Rightarrow \sum_n x_n = \text{div.}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \lambda}, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+$$

Folosim crit. Abel-Dirichlet(I)

Fie $x_n = \frac{1}{n \lambda}$ și $y_n = \cos nx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$x_n = \text{desc. } \text{și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad (1)$$

$$(2) M > 0 \text{ a.i. } (\forall n \in \mathbb{N}^*, |y_1 + \dots + y_n| \leq M)$$

M nu poate depinde de n , dar poate depinde de x

Fie $z = \cos x + i \sin x$

$$z^2 = \cos 2x + i \sin 2x \text{ (formă lui Moivre)}$$

...

$$z^n = \cos nx + i \sin nx$$

""

$$y_1 + \dots + y_n = \cos x + \dots + \cos nx = \operatorname{Re}(z + z^2 + \dots + z^n)$$

P.p. că $z \neq 1$, i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi / \lambda\}$

$$\begin{aligned} z + z^2 + \dots + z^n &= z \cdot \frac{z^{n-1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - z}{z - 1} = \frac{\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x - \cos x - i \sin x}{\cos x - 1 + i \sin x} = \\ &= \frac{-2 \sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x + i \cdot 2 \sin \frac{n}{2}x \cdot \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin^2 x} = \frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin^2 x} \cdot \frac{-i \sin \frac{n+1}{2}x + i \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{n+1}{2}x + i \cos \frac{n+1}{2}x} = \frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\cos \frac{n+1}{2}x + i \sin \frac{n+1}{2}x}{\cos \frac{n+1}{2}x + i \sin \frac{n+1}{2}x} = \\ &= \frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin^2 x} \cdot \frac{(\cos \frac{n}{2}x + i \sin \frac{n}{2}x)^{n+1}}{\cos \frac{n}{2}x + i \sin \frac{n}{2}x} = \frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin^2 x} \cdot \frac{(\cos \frac{n}{2}x + i \sin \frac{n}{2}x)^{n+1}}{\sin^2 x} = \end{aligned}$$

Avem, pl. (tr) $\sum_n y_n \in \mathbb{C}$ și $|y_1 + \dots + y_n| \leq M$ cu M cteva

Din (1) și (2) ⇒ C.F. crit. Abel-Dirichlet(I) că

$$\cos x = \cos(2 \cdot \frac{x}{2}) = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin x = \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{Deci } |y_1 + \dots + y_n| \leq \frac{1}{2} \sin^2 \frac{n}{2} \cdot |1 - 2 \sin^2 \frac{n}{2}| \leq \frac{1}{2} \sin^2 \frac{n}{2}, \text{ Alegem } M = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$y_1 + \dots + y_n = \operatorname{Re}(z + z^2 + \dots + z^n) = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{n}{2}x$$

$\sum_n x_n \cdot y_n$ e conv.

Prop
Fie un sp. top. și $A \subset X$. Afunci:

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{A} = A^{\circ} \\ 2) \quad \bar{\bar{A}} = \bar{A} \end{aligned}$$

Prop ale multimii punctelor de acumulare

Fie (X, τ) un sp. top. și $A \subset X$

$$1) \quad A^{\circ} \subset \bar{A}$$

$$\begin{aligned} J) \quad \text{Fie } x \in A^{\circ} \Rightarrow \exists r > 0, \forall v \in U_x^r, v \cap A \neq \emptyset \\ \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \\ \Rightarrow x \in \bar{A}, \text{i.e. } A^{\circ} \subset \bar{A} \end{aligned}$$

$$2) \quad \bar{A} = A \cup A'$$

$$\begin{aligned} J) \quad " \Rightarrow " \\ A \subset \bar{A} \Leftrightarrow A \cup A' \subset \bar{A} \quad (1) \\ A' \subset \bar{A} \Leftrightarrow \text{c.c.} \end{aligned}$$

$$\text{Fie } x \in \bar{A} \Rightarrow \exists r > 0, \forall v \in U_x^r, v \cap A \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned} P.R.A. \text{ că } x \notin A \cup A'. \text{ Deci } x \notin A \text{ și } x \notin A' \\ x \notin A' \Rightarrow \exists r > 0, \forall v \in U_x^r, v \cap (A \cap A') = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists r > 0, \forall v \in U_x^r, v \cap A \neq \emptyset \\ \forall v \in U_x^r \Rightarrow \exists v_1 \in U_x^r, v_1 \cap (A \cap A') = \emptyset \quad (=, v_1 \cap A = \{x\} \text{ contradicție}) \\ \text{c.u. } x \notin A \end{aligned}$$

Așadar $x \in A \cup A'$, i.e. $\bar{A} \subset A \cup A'$ (2)

$$(1) + (2) \Rightarrow \bar{A} = A \cup A' \square$$

Ex

Facem analiza topologică a multimii $A \subset \mathbb{R}$, unde:
(c.i.d. det. $\bar{A}, \bar{A}, A^{\circ}, \text{Fr}(A)$ și $I_{20}(A)$)

$$1) \quad A = \mathbb{Q}$$

Sol:

$$1) \quad \bar{A} = ?$$

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ s.t. } B(x, r) \cap A \neq \emptyset \\ \text{(c.u. } x \in \mathbb{Q} \text{)}$$

Arem $\bar{A} = \mathbb{Q}$, deoarece între orice 2 nr. reale,
există o inf. de nr. rationale și
irationale.

$$2) \quad \bar{A} = ?$$

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists r > 0, \text{ avem } B(x, r) \cap A \neq \emptyset \\ \text{(c.u. } x \in \mathbb{Q} \text{)}$$

$$\bar{A} \subset \mathbb{R}$$

Arătăm că $\mathbb{R} \subset \bar{A}$

Fie $x \in \mathbb{R}, r > 0$

Arem $(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$,
deoarece între orice 2 nr. reale,
există o inf. de nr. rationale și
irationale.

Prin urmare, $x \in \bar{A}$, adică $\mathbb{R} \subset \bar{A}$
Așadar $\bar{A} = \mathbb{R}$

Prop

Fie (X, d) un sp. metric, $A \subset X$ și $x \in X$

$$\begin{aligned} 1) \quad x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } d(x_n, x) < \varepsilon \\ 2) \quad x \in A' \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A \text{ s.t. } x_n \neq x \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \end{aligned}$$

Obs

(\mathbb{R}, d) este sp. metric unde $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$

Considerăm sp. metric (\mathbb{R}, d) , $x \in \mathbb{R}$ și $r > 0$

$$\begin{aligned} 1) \quad B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < r\} = \\ = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\} \end{aligned}$$

$$2) \quad B[x, r] = \overline{B(x, r)} = [x - r, x + r]$$

Obs

în sp. metric (\mathbb{R}, d) :

1) Intervalele de forma $(-\infty, a), (a, +\infty)$ și $[a, b]$ sunt mult. deschise,
unde $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

2) Intervalele de forma $(-\infty, a], [a, +\infty)$ și $[a, b]$ sunt mult. închise,
unde $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$3) \quad A' = ?$$

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0, (x - r, x + r) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

$$A' \subset \mathbb{R}$$

Arătăm că $\mathbb{R} \subset A'$

Fie $x \in \mathbb{R}$. Fie $r > 0$. Avem $(x - r, x + r) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$
deoarece între orice 2 nr. reale,
există o inf. de nr. rationale și
irationale.

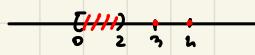
Prin urmare, $x \in A'$, adică $\mathbb{R} \subset A'$. Așadar $A' = \mathbb{R}$

$$4) \quad \text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus A^{\circ} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$$

$$5) \quad I_{20}(A) = \bar{A} \setminus A' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset \square$$

$b) A = [0, 2] \cup \{3, 4\}$

Sol:



$1) \bar{A} = ?$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (x) r > 0, \text{ avem } (x-r, x+r) \cap A \neq \emptyset$

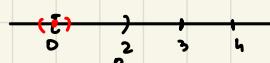
$A^c \cap A = [0, 2] \cup \{3, 4\}$

$[0, 2]$ - mult. deschisă incl. în A

Aveam $x \in \bar{A} \subset [0, 2] \cup \{3, 4\}$

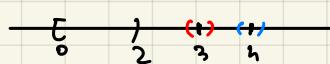
Studiem dacă $0 \in \bar{A}$, $3 \in \bar{A}$, $4 \in \bar{A}$

$0 \in A \Leftrightarrow (0) r > 0 \text{ și } (0-r, 0+r) \subset A$



Deci $0 \in \bar{A}$

$3 \in A \Leftrightarrow (3) r > 0 \text{ și } (3-r, 3+r) \subset A$



Deci $3 \notin \bar{A}$

Analog $4 \notin \bar{A}$

$2) \bar{A}' = ?$

$x \in \bar{A}' \Leftrightarrow (x) r > 0, \text{ avem } (x-r, x+r) \cap A \neq \emptyset$

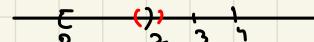
$A \cap A' = [0, 2] \cup \{3, 4\}$ - mult. închisă ce conține A

$\Rightarrow \bar{A}' \subset [0, 2] \cup \{3, 4\}$

Deci $[0, 2] \cup \{3, 4\} \subset \bar{A}' \subset [0, 2] \cup \{3, 4\}$

Studiem dacă $2 \in \bar{A}'$

$2 \in \bar{A}' \Leftrightarrow (2) r > 0, \text{ avem } (2-r, 2+r) \cap A \neq \emptyset$



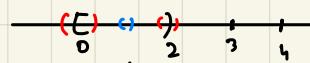
Deci $2 \in \bar{A}'$

$3) A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow (x) r > 0, \text{ avem } (x-r, x+r) \cap (A \setminus \{3, 4\}) \neq \emptyset$

$A' \cap \bar{A} = [0, 2] \cup \{3, 4\}$

Fie $x \in [0, 2]$



Deci $x \in A'$, i.e. $x \in [0, 2]$

$3 \in A' \Leftrightarrow (3) r > 0, \text{ avem } (3-r, 3+r) \cap (A \setminus \{3, 4\}) \neq \emptyset$

Deci $3 \notin A'$

Analog $4 \notin A'$

Așadar $A' = [0, 2]$

$w) \text{ Fr}(A) = \partial A = \bar{A} \setminus A = \{0, 2, 3, 4\}$

$s) \text{ Fr}(A) = \partial A = \bar{A} \setminus A' = \{3, 4\} \quad \square$

1. Stud. conv. seriilor

$a) \sum_{n=1}^{\infty} (\cos \frac{1}{n}) \cos n$

Sol

Vom aplica crit. Abel-Dirichlet (ii)

$\text{Fie } x_n = \cos \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$y_n = \frac{\cos n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$-1 \leq x_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, (x_n)_n \text{-mărg.}$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \text{ - conv. crezzi ult. ex din sem. 3)}$

c2)

Din (i) și (ii) avem că $\sum_n x_n \cdot y_n$ - conv.

$$\begin{aligned} x &\mapsto \cos x \text{ este descil.} \\ (0, \frac{\pi}{2}) &\quad (0, 1) \\ \frac{1}{n} \in (0, \frac{\pi}{2}), \forall n \in \mathbb{N}^* & \\ (\frac{1}{n})_n \text{-desc.} & \end{aligned} \quad \Rightarrow (x_n)_n \text{-cresc.}$$

Deci $(x_n)_n$ - monoton și mărg., strictonc (i)

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n}$$

Sol
 $x_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$z_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vom folosi criteriul lui Leibniz pt. $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - \text{conv. criteriu lui Leibniz}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{div. c serie arit. geom., } \alpha = 1$$

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \text{div. } \square$

2. a) Arăt. că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

b) Stabil. conv. seriei $\sum_n (1-\cos \frac{1}{n}) x^n, x > 0$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{IH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
 $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$

a) Arăt. că d_1 este metrică pe \mathbb{R}^n

1) $d_1(x, y) \geq 0$, ($\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ evident, fiind suma de module)

2) $d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow (\forall i \in \overline{1, n}), \text{ avem } |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall i \in \overline{1, n}), \text{ avem } x_i = y_i$

3) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d_1(y, x)$, ($\Rightarrow x = y$)
 $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$

4) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

Arătăm că $d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$

$$d_1(x, z) = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| = d_1(x, y) + d_1(y, z)$$

Așadar d_1 este metrică pe \mathbb{R}^n

b) Fie $x^k \in \mathbb{R}^n$, $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ si $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

Arafați că $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k \stackrel{d_1}{=} x \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i, \forall i = 1, n$

Sol: \Rightarrow

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k \stackrel{d_1}{=} x \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} d_1(x^k, x) = 0$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall k \geq k_0$, avem $d_1(x^k, x) < \varepsilon$ \Rightarrow

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$$
 a.i. $\forall k \geq k_0$, avem $\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i| < \varepsilon$ \Rightarrow

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall k \geq k_0$, $i \in \overline{1, n}$, avem $|x_i^k - x_i| < \varepsilon$ \Rightarrow

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i, \forall i \in \overline{1, n}$$

\therefore

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (x_i^k - x_i) = 0, \text{ cu } i \in \overline{1, n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |x_i^k - x_i| = 0, \text{ cu } i \in \overline{1, n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n (|x_i^k - x_i|) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^k - x_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} d_1(x^k, x) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x^k \stackrel{d_1}{=} x$$

$$\left(\frac{2}{n}, \frac{2n+1}{n+2} \right) \stackrel{d_1}{\rightarrow} (0, 2)$$

Ineg. Cauchy-Buniakowski-Schwarz (CBS)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

c) Fie ne \mathbb{N}^* ; $d_2 \stackrel{\text{def}}{=} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

Arați că d_2 e metrică pe \mathbb{R}^n

Sol:

$(x, y) \in \mathbb{R}^n$

1) $d(x,y) > 0$ (evidență, fiind radical)

$$2) d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow \forall i \in \overline{1, n}$, avem $(x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, n}$, avem $x_i = y_i$ $\Rightarrow x = y$

$$3) d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = d(y,x)$$

4) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

Arațăm că $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$$d(x,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i + y_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n ((x_i - y_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i) + (y_i - z_i)^2)} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \stackrel{\text{C.B.S.}}{\leq} \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}_{a^2}} + \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}_{b^2}} + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} = d_2(x,y) + d_2(y,z)$$

Deci d_2 e metrică pe \mathbb{R}^n

d) Fie ne \mathbb{N}^* ; $d_1, d_2 \stackrel{\text{def}}{=} d$.

Arațati că $\forall a, b, c \in (0, \infty)$ a.i. $ad_1(x,y) \leq d(x,y) \leq bd_1(x,y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Sol:

$$d_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} =$$

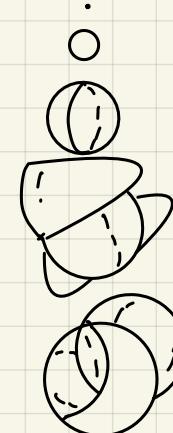
$$= \sqrt{n} d(x,y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Alegem $a = \sqrt{n}$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right)^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = d_1$$

Alegem $b = 1$ \square



-Curs 5-

Fie $n \in \mathbb{N}^*$

sp. metrică (\mathbb{R}^n, d_2)

$$d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Obs

$$\text{Dacă } n=1, \text{ atunci } d_2(x, y) = |x - y|$$

Def

d_2 sună distanță euclidiană a lui \mathbb{R}^n

Notatie

Atunci când nu este pericol de confuzie,
notăm $d := d_2$

Ex

Studiati dacă mult. K de mai jos sunt compacte în sp. met. (\mathbb{R}, d)

a) $K = \mathbb{N}$

Sol
 K nu e mărg. \Rightarrow nu e compactă

b) $K = [0, 1]$

Sol
 $\overline{K} = [0, 1] \ni K \Rightarrow K$ nu e închisă
(închiderea) \Rightarrow nu e compactă

c) $K = [0, 1] \cup \{2\}$

Sol

$K \subset [0, 2] \Rightarrow K$ mărg. $\Rightarrow K$ compactă

$$\overline{K} = K \Rightarrow K$$
 închisă

Def

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Spunem că A e mărg. dacă $\exists a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$
a.i. $A \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Prop

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Multimea A este mărg. $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists r > 0$
a.i. $A \subset B(x, r)$

Teorema Heine-Borel

În sp. metric (\mathbb{R}^n, d_2) , o mulțime $K \subset \mathbb{R}^n$ e compactă \Leftrightarrow
este închisă și mărginită.

Limite de funcții

Fie $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ sp. top., $\emptyset \neq A \subset X, a \in A, l \in Y$; $f: A \rightarrow Y$

Spunem că f are lim. l în a și scriem $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ dacă
($\forall \epsilon \in \mathcal{V}_l, \exists V \in \mathcal{D}_a$ a.i. $\forall x \in V \cap A, x \neq a$, avem $|f(x) - l| < \epsilon$)

Obs

În general, limita unei func. într-un punct nu este unică.

Obs

Dacă sp. top. (Y, \mathcal{T}_2) e separabil Hausdorff, atunci $l \in Y$ e unic

Prop

Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ sp. metric, $\emptyset \neq A \subset X, a \in A$,
 $l \in Y$; $f: A \rightarrow Y$. Sunt echiv:

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

2) $\forall \epsilon \in \mathcal{V}_l, \exists \delta > 0$ a.i. $\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(f(x_n), l) = 0$,
avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$

Obs

Pe $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se introduce distanță

$d: \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|$,
unde \tilde{f} este func. bij. def. pe $\bar{\mathbb{R}}$
cu valori în $[-1, 1]$ prin $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \\ -1, & x = -\infty \\ 1, & x = +\infty \end{cases}$

Perechea $(\bar{\mathbb{R}}, d)$ este sp. metrică și sp.
top. Hausdorff/separabilă

Prop

Fie (X, \mathcal{T}_1) sp. top., $\emptyset \neq A \subset X, a \in A, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ și $f, g: A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$
a.i. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$ și $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$. Atunci:

1) $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = l_1 + l_2$

2) $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = l_1 l_2$

3) $\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l_1|$

10) (\exists) $V \in \mathcal{D}_a$ a.i. $V \subset A$ și $f(x) \neq 0$,

(\forall) $x \in V$ și $|l_1| \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\frac{1}{|f(x)|}) = 0$

4) $\lim_{x \rightarrow a} (-f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -l_1$

5) $l_1 = +\infty$ și $l_2 > -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = +\infty$

6) $l_1 = -\infty$ și $l_2 < \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = -\infty$

7) $l_1 = +\infty$ și $l_2 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = +\infty$

8) $l_1 = +\infty$ și $l_2 < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = -\infty$

9) (\exists) $V \in \mathcal{D}_a$ a.i. $V \subset A$ și $f(x) \neq 0$, cu $x \in V$ și

$$l_1 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{l_1}$$

Limite remarcabile

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x / \operatorname{tg} x / \arcsin x / \operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} (1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a \in (0; \infty)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, \quad r \in \mathbb{R}$$

Obs

Fie $(X, \mathcal{B}_1), (Y, \mathcal{B}_2)$ sp. top., $\emptyset \neq A \subset X$ și $\mathcal{B}_A = \{D \cap A | D \in \mathcal{B}\}$.
 (A, \mathcal{B}_A) e sp. top.

C, topologia indușă de A

Prop

Fie $(X, \mathcal{B}_1), (Y, \mathcal{B}_2)$ sp. top., $\emptyset \neq A \subset X, a \in A$ și $f: A \rightarrow Y$.

Sunt echiv:

1) f - cont. în a

2) $\forall \epsilon \in \mathcal{U}_{f(a)}, \exists \delta \in \mathcal{B}_a$ o.s. $f(V \cap A) \subset W$

Ex

Fie (X, \mathcal{B}_1) și (Y, \mathcal{B}_2) sp. top. Fie $y_0 \in Y$

1) Func. identitate $i_X: X \rightarrow X$ este cont.

2) Func. const. $f: X \rightarrow Y, f(x) = y_0$ e cont.

Obs

1) Fie (X, \mathcal{B}) - sp. top., $a \in X$ și $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Atunci f - cont. în a c.e., c.v. $\epsilon > 0$, c.d. $\delta_\epsilon \in \mathcal{B}_a$, a.i. $\forall x \in V_\epsilon$, avem $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

2) Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, a \in A$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f e

cont. în a c.e. c.v. $\epsilon > 0$, c.d. $\delta_\epsilon > 0$ a.i. C.V.

$x \in A$ cu prop. că $|x - a| < \delta_\epsilon$, avem

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

3) Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f e

cont. în a c.e. c.v. $\epsilon > 0$, c.d. $\delta_\epsilon > 0$ a.i. C.V.

$x \in A$ cu prop. că $x > a + \delta_\epsilon$, avem $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

4) Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ a.i. $+\infty \in A$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Atunci f e cont. în $+\infty$ c.e. c.v. $\epsilon > 0$, c.d. $\delta_0 > 0$,

a.i. $\forall x \in A$ cu prop. că $x > \delta_0$, avem $|f(x) - f(+\infty)| < \epsilon$

Functii continue

Fie $(X, \mathcal{B}_1), (Y, \mathcal{B}_2)$ sp. top., $a \in X$ și $f: X \rightarrow Y$.

Fie cont. în a daca $\forall \epsilon \in \mathcal{U}_{f(a)}$, avem $\exists \delta \in \mathcal{B}_a$ c.d. $\forall x \in V_\delta$, avem $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

Def

în contextul def. precedente spunem că f e cont. (pe X) daca f e cont. in orice $x \in X$

Prop

Fie $(X, \mathcal{B}_1), (Y, \mathcal{B}_2), (Z, \mathcal{B}_3)$ sp. top.,

$a \in X, f: X \rightarrow Y$, cont. în a și $g: Y \rightarrow Z$ cont. în f(a).

Atunci $g \circ f: X \rightarrow Z$ e cont. în a

Prop

Fie (X, \mathcal{B}_1) un sp. top., $\emptyset \neq A \subset X, a \in A, (Y, \mathcal{B}_2)$ un sp. top., $f: X \rightarrow Y$

1) f - cont. în a, atunci $f|_A: A \rightarrow Y$ e cont. în a

2) Daca $A \in \mathcal{U}_a$ si $f|_A: A \rightarrow Y$ e cont. în a,

atunci $f: X \rightarrow Y$ e cont. în a

2) Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ sp. metrice, $a \in X$ și $f: X \rightarrow Y$.

Atunci f e cont. în a c.e. c.v. $\epsilon > 0$, c.d. $\delta_\epsilon > 0$ a.i.

c.e. $x \in X$ cu prop. că $d_1(x, a) < \delta_\epsilon$, avem $d_2(f(x), f(a)) < \epsilon$

c.i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$ a.i. c.e. $x \in X$ cu prop. că $x \in B(a, \delta_\epsilon)$, avem $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$

5) Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ a.i. $+\infty \in A$ și $f: A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ a.i. $f(+\infty) = +\infty$

Atunci f e cont. în $+\infty$ c.e. c.v. $\epsilon > 0$, c.d. $\delta_\epsilon > 0$ a.i. c.e. $x \in A$

cu prop. că $x > \delta_\epsilon$ avem $f(x) > \epsilon$

Prop

Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ sp. metrice și $f: X \rightarrow Y$. Sunt echivalente:

- 1) f cont. în a
- 2) $\forall (x_n)_n \subset X$ a.i. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$

Prop

Fie $(X, \mathcal{B}_1), (Y, \mathcal{B}_2)$ sp. top., $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in \text{AFA}'$ și $f: A \rightarrow Y$. Sunt echiv:

- 1) f -cont. în a
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Prop

Fie $(X, \mathcal{B}_1), (Y, \mathcal{B}_2)$ -sp. top. și $f: X \rightarrow Y$. Sunt echiv:

- 1) f continuă
- 2) $\forall D \subset Y$, o deschisă, avem ca $f^{-1}(D) \subset X$ e deschisă
($D \in \mathcal{B}_2$) $\quad (f^{-1}(D) \in \mathcal{B}_1)$
- 3) $\forall F \subset Y$, o închisă, avem că $f^{-1}(F) \subset X$ e închisă
- 4) $\forall B \subset Y$, avem $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$
- 5) $\forall A \subset X$, avem $f(A) \subset \overline{f(A)}$

Functii uniform continue

Def

Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ sp. metrice și $f: X \rightarrow Y$.

Spunem că f e uniform cont. (u.c.) dacă
 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ a.i. $\forall x, a \in X$ cu prop. că
 $d_1(x, a) < \delta$ avem $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Prop

Oricine func. uniform continuă este func. continuă

Obs

Reciproca prop. precedente este falsă

Prop

Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ sp. metrice, $(X_n)_n \subset X$, și Cauchy în raport cu metриea d_1 și $f: X \rightarrow Y$ o func. u.c. Atunci $(f(x_n))_n \subset Y$ e și Cauchy în rap. cu d_2 .

Prop

Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ sp. metrice, și $f: X \rightarrow Y$. Sunt echiv.:

- 1) f -u.c.
- 2) $\forall (x_n)_n \subset X, \forall (y_n)_n \subset X$ a.i.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, y_n) = 0, \text{ avem } \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) = 0.$$

Prop

Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ sp. metrice, $(x_n)_n \subset X$, și Cauchy în rap. cu metriica d_1 și $f: X \rightarrow Y$ o func. u.c. Atunci $(f(x_n))_n \subset Y$ e și Cauchy în rap. cu d_2 .

Prop

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cresc. $f: [a, b] \subset \mathbb{R}$ sau $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Sunt echiv:

- 1) f e u.c.
- 2) $\exists \tilde{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}$ -cont. a.i. $\tilde{f}|_{[a, b]} = f$

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Sunt echiv.

- 1) f -u.c.

2) $\forall (x_n)_n \subset A$ și $(y_n)_n \subset A$ a.i. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$$

Prop
 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat c.i.e. $I \neq \emptyset$ și I nu se reduce la un singur el.)
 și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, o func. derivabilă, cu derivabila mărg.

Atunci f e u.c.

Prop

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Sunt echiv.

1) f e u.c.

2) Dacă A o.i. f e u.c. pe $A \cap (-\infty, a]$

și f e u.c. pe $A \cap [a, \infty)$ e u.c.

Seminar 5

1. Faceti analiza topologică a mult.

$$a) A = (0,1) \cup \{2\} \subset (\mathbb{R}, d)$$

$\overset{\circ}{A} = ?$

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ a.i. } B(x, r) \subset A = (0,1) \cup \{2\}$$

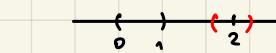
$(x-r, x+r)$

$$\begin{array}{l} \overset{\circ}{A} \subset A \\ (0,1) \subset A \\ \text{c, deschisă} \end{array} \quad \left\{ \Rightarrow (0,1) \subset \overset{\circ}{A} \right.$$

$$\text{Avem } (0,1) \subset \overset{\circ}{A} \subset (0,1) \cup \{2\}$$

Stud. dacă $\{2\} \subset \overset{\circ}{A}$

$$z \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ o.i. } (z-r, z+r) \subset (0,1) \cup \{2\}$$



Deci $2 \notin \overset{\circ}{A}$

$$\overset{\circ}{A} = (0,1)$$

$\bar{A} = ?$

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

$(x-r, x+r) \cap (0,1) \cup \{2\}$

$$A \subset \bar{A}$$

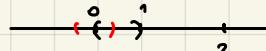
$$A = (0,1) \cup \{2\} \quad \left\{ \Rightarrow \bar{A} \subset (0,1) \cup \{2\} \right.$$

$\text{c, } \{2\} - \text{închisă}$

$$\text{Deci } (0,1) \cup \{2\} \subset \bar{A} \subset (0,1) \cup \{2\}$$

Stud. dacă $0,1 \in \bar{A}$

$$0 \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, (-r, r) \cap (0,1) \cup \{2\} \neq \emptyset$$



Deci $0 \in \bar{A}$

A analog $1 \in \bar{A}$

$$\text{Deci } \bar{A} = (0,1) \cup \{2\}$$

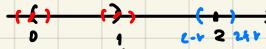
$A' = ?$

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \text{ avem } (x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

$$A' \subset \bar{A} = (0,1) \cup \{2\}$$

$$\text{Fie } x \in (0,1)$$

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \text{ avem } (x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$



Deci $[0,1] \subset A'$

$$2 \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \text{ avem } (2-r, 2+r) \cap (A \setminus \{2\}) \neq \emptyset$$

Deci $2 \notin A'$ Agădar $A' = (0,1)$

$$\text{Fr}(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \{0,1,2\} \quad \text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus A' = \{2\}$$

$$A = \mathbb{N} \subset (\mathbb{P}, d)$$

b) $\overset{\circ}{A} = ?$

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0, \text{ a.i. } (x-r, x+r) \subset "N"$$

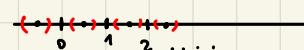
Deci $\overset{\circ}{A} = \emptyset$

2) $A' = ?$

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \text{ avem } (x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

$$\text{Fie } x \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{N}$$

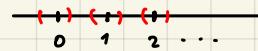
$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \text{ avem } (x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$



Deci $x \notin A'$

$$\text{Fie } x \in \mathbb{N}$$

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0, (x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$



Deci $x \notin A'$

$$A' = \emptyset$$

$$3) \bar{A} = A \cup A' = \mathbb{N}$$

$$4) \text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathbb{N}$$

$$5) \text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus A' = \mathbb{N}$$

$$c) A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < n\} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}, d)$$

3. Faceti analiza top. a mult. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, y \geq 0\} \cup \{(3, y) \mid y \geq 0\} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^2, d)$

$$1) \overset{\circ}{A} = ?$$

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots\}$$

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0, (x-r, x+r) \subset A$$

Două rețele orice interval de forma $(x-r, x+r)$ conține o inf de nr. irationale și rationale, avem că

$$\overset{\circ}{A} = \emptyset$$

$$2) \bar{A} = ?$$

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall (r_k) \subset A \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$$

orice sir de el. din A poate avea drept limită un element al lui A constant de la un rang încolo sau 0
Deci $\bar{A} = A \cup \{(3, y) \mid y \geq 0\}$

$$3) A' = ?$$

$x \in A' \Leftrightarrow \exists (x_k) \subset A \setminus \{x\}$ a.s. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$
conț celor discutate la pasul precedent,
avem că $A' = \{(3, 0)\}$

$$4) \text{frc}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = A \cup \{(3, 0)\}$$

$$5) \text{loc}(A) = \bar{A} \setminus A' = A$$

Obs

(\mathbb{R}^2, d_2) este sp. metric, unde

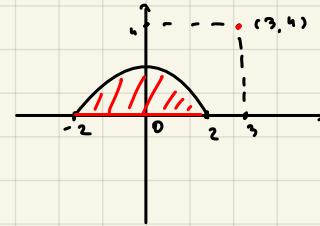
$$d_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Obs

Fie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ și $r > 0$

$$1) B((x, y), r) = \{(z, t) \in \mathbb{R}^2 \mid d_2((x, y), (z, t)) < r\} \\ = \{(z, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} < r\} \\ = \{(z, t) \in \mathbb{R}^2 \mid (z-x)^2 + (t-y)^2 < r^2\} \\ = \text{discul deschis de centru } (x, y) \text{ și raza } r$$

$$2) \bar{B}((x, y), r) = \bar{B}((x, y), r) = \\ = \{(z, t) \in \mathbb{R}^2 \mid (z-x)^2 + (t-y)^2 \leq r^2\} \\ = \text{discul inclus de centru } (x, y) \text{ și raza } r$$



$$1) \overset{\circ}{A} = ?$$

$$(x, y) \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ s.t. } B((x, y), r) \subset A$$

$$\overset{\circ}{A} \subset A$$

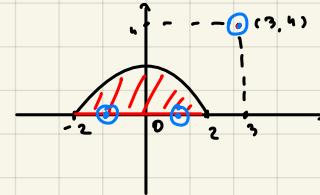
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, y > 0\} \subset A \Rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, y > 0\} \subset \overset{\circ}{A}$$

— II — deschisă

$$\text{Avem } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, y > 0\} \subset \overset{\circ}{A} \subset A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, y > 0\} \cup \{(3, y) \mid y > 0\}$$

Stud. dacă $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-2, 2), y = 0 \Rightarrow \{(3, y) \mid y > 0\} \subset \overset{\circ}{A}$

$$\text{Fie } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ a.s. } x \in (-2, 2), y = 0$$



$$\text{Deci } (x, y) \notin \overset{\circ}{A}$$

$$\text{Deci } (3, 0) \notin \overset{\circ}{A}$$

$$\text{Așadar } \overset{\circ}{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, y > 0\}$$

$$2) \bar{A} = ?$$

$$(x, y) \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists r > 0, B((x, y), r) \cap (\bar{A} \setminus \{(x, y)\}) \neq \emptyset$$

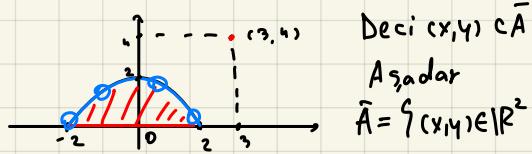
$$A \subset \bar{A}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\} \subset \bar{A} \Rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\} \subset \bar{A}$$

— II — închisă

$$\text{Așadar } A \subset \bar{A} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

Stud. dacă $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0 \subset \bar{A}$



$$\text{Deci } (x, y) \in \bar{A}$$

Așadar

$$\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

$$3) A' = ?$$

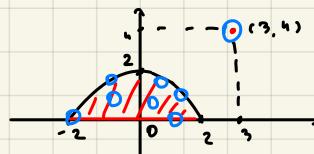
$$(x, y) \in A' \Leftrightarrow \exists r > 0, B((x, y), r) \cap (A \setminus \{(x, y)\}) \neq \emptyset$$

$$A' \subset \bar{A}$$

$$\text{Fie } (x, y) \in \bar{A}$$

$$\text{Deci } (3, 0) \in A'$$

$$\text{Așadar } A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$



$$4) \text{frc}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} =$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-2, 2), y = 0\}$$

$$5) \text{loc}(A) = \bar{A} \setminus A' = \{(3, 0)\} \square$$

Curs 6

Func. derivabile

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Spunem că funcția:

1) are derivată în a dacă (3) în $\bar{\mathbb{R}}$
limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

2) este derivabilă în a dacă există
și este finită limita de la 1)

Notatie

În contextul def. precedente, dacă f
are derivată în a, notăm $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ și $B \subset A$ a.i.

f derivabilă pe B c.e. f derivabilă
în orice punct din B).

Definim funcția $f': B \rightarrow \mathbb{R}$ și o numim
derivată lui B

Teorema

Orică funcție der. într-un punct este cont. în acel punct
(Reciproca nu e adevarată)

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Spunem că a este:

1) pct. de minim local al lui f dacă
(3) $\forall \delta > 0$ a.i. $f(a) \leq f(x)$, $(\forall x \in V \cap A)$

2) pct. de maxim local al lui f dacă
(3) $\forall \delta > 0$ a.i. $f(a) \geq f(x)$, $(\forall x \in V \cap A)$

3) pct. de extrem local al lui f dacă
a este 1) sau 2)

Prop. consecințe Lagrange

Fie un $I \subset \mathbb{R}$ - int. nedegenerat și
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I

1) Dacă $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$,
atunci f e const.

2) Dacă $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$,
atunci f e cresc.

3) Dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$,
atunci f e desc.

Prop

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ și $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$,

2 funcții der. în a. Atunci:

1) $f + g$ e derivabilă în a, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2) $k \cdot f$ e derivabilă în a, $(k \cdot f)'(a) = k \cdot f'(a)$

3) $f \cdot g$ e derivabilă în a, $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

4) Dacă $g(a) \neq 0$ (3) $\forall a \in A$ a.i. $g(x) \neq 0$, $x \in V \cap A$

atunci $\frac{f}{g}$ e derivabilă în a, $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$

Teorema

Fie $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$, intervale nedegenerate, $a \in I$,

$f: I \rightarrow J$ o funcție der. în a și $g: J \rightarrow \mathbb{R}$,
o funcție der. în $f(a)$ și J .

Atunci $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e derivabilă în a și $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Teorema

Fie $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$, intervale nedegenerate, $a \in I$,

$f: I \rightarrow J$, o funcție cont. și bij.

Dacă f - derivabilă în a și $f'(a) \neq 0$, atunci funcție inv.

$f^{-1}: J \rightarrow I$ e derivabilă în $b = f(a)$ și $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

Teorema lui Fermat

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$ a.i.

1) $a \in A$

2) a , pct. de extrem local

3) f derivabilă în a

Atunci: $f'(a) = 0$

Teorema lui Rolle

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a.i.

1) f cont. pe $[a, b]$

2) f derivabilă pe (a, b)

3) $f(a) = f(b)$

Atunci: (3) $\exists c \in (a, b)$ a.i. $f'(c) = 0$

Teorema lui Darboux

$I \subset \mathbb{R}$ - int. ned. și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ - deriv.

Atunci: (3) I, j interval, avem ca
 $f(j)$ e interval c.e. f' e
prop. lui Darboux

Teorema lui Lagrange

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a.i.:

1) f - cont. pe $[a, b]$

2) f - derivabilă pe (a, b)

Atunci: (3) $\exists c \in (a, b)$ a.i. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Teorema lui l'Hospital

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I \subset \mathbb{R}$ interval ned. a.s.

$c, d \in I \subset [a, b], x_0 \in [a, b]$ și

$f, g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ a.s.:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

cresc. $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$

2) f, g - derivabili și $g'(x) \neq 0$, $x \in I \setminus \{x_0\}$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Teorema lui Cauchy

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a.i.:

1) f, g - cont. pe $[a, b]$

2) f, g - derivabilă pe (a, b)

Atunci: (3) $\exists c \in (a, b)$ a.i. $(f'(c) - f(a))/(g'(c) - g(a)) = (g(b) - g(a))/(f(b) - f(a))$

d) $g(x) \neq 0$, $x \in I \setminus \{x_0\}$

Atunci: (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Fie $\phi \in A \cap \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$; $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Def

Suntem că f e deriv. de 2 ori în a dacă $\exists \forall \epsilon \in \mathbb{R}$ a.i. f -deriv. pe $V \cap A$ și func.

$f': V \cap A \rightarrow \mathbb{R}$ e deriv. în a. În acest caz, derivata func. f' în a se numește deriv. a doua alături de f în a și s.n. $f'':a$, sau $f''(a)$.

Inductiv, se def. $f^{(n)}$, $(n) \in \mathbb{N}$

Fie $I \subset \mathbb{R}$ - int. ned., $n \in \mathbb{N}$ și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

Def

Suntem că f e de clasa C^n pe I dacă f e deriv. de n ori pe I și $f^{(n)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ e cont.

Notatie

$C^n(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ e de clasa } C^n\}$

Suntem că f e de clasa C^∞ dacă f este derivabilă de orice ordin pe I (i.e. f e indefinit derivabilă).

Notatie

$C^\infty(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ e de clasa } C^\infty\}$

Teorema

Dacă $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s} f$

Obs

Reciproca e falsă

Def

O func. $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ se numește mărg. dacă $\exists M > 0$ a.i. $|g(x)| \leq M$, $\forall x \in X$

Prop

Fie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un sir de func., $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ a.i. f_n - mărg. $(\forall n \in \mathbb{N}$ și $f: X \rightarrow \mathbb{R}$). Sunt echiv:

1) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s} f$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|) = 0$

Conv. uniformă

I. Varianta cu majorări, minorări

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{1+u^2x^2} - 0 \right| = \frac{|x|}{1+u^2x^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [-1, 1]} \frac{|x|}{1+u^2x^2} \right) = ?$$

$$\sup_{x \in [-1, 1]} \frac{|x|}{1+u^2x^2} = \begin{cases} \leq a_n & \text{daca } u^2x^2 \geq 0 \\ > b_n & \text{daca } u^2x^2 < 0 \\ 0 & \text{daca } u^2x^2 = 0 \end{cases}$$

Teorema (Formula lui Taylor cu rest Lagrange)

Fie, în plus, $a \in I$. P.p. că f e deriv. de n ori pe I

Atunci $\exists x \in I$, $y \in A$, $\exists c \in$ între a și x a.i.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

II not $T_n(x)$

III not $R_n(x)$

(polinomul Taylor de ordin n)

(restul de ordin n al form. lui Taylor)

Def

Fie $I \subset \mathbb{R}$ int. ned. și $f, F: I \rightarrow \mathbb{R}$.

F e o primitivă a lui f dacă F e deriv.

$$\text{și } F'(x) = f(x), \forall x \in I$$

Siruri de func.

Fie $X \neq \emptyset$, (d, d) un sp. metric, $(f_n)_n$ un sir de func., $f_n: X \rightarrow Y$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) și $f: X \rightarrow Y$.

Def

Suntem că $(f_n)_n$:

1) Converge simplu punctual către f , dacă $(\forall x \in X)$, avem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (\text{i.e. } \forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\epsilon \text{ a.i. } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

În acest caz notăm $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s} f$

2) Converge uniform către f dacă $\forall \epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall n \geq n_\epsilon$, $\forall x \in X$, avem $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$

În acest caz notăm $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} f$

Ex:

Fie $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+u^2x^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *

stud. convergența simplă și uniformă pt. acest sir, $(f_n)_n$

Sol Conv. simplă

Fie $x \in [-1, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+u^2x^2} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s} f, \text{ unde } f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$$

$$1+u^2x^2 = 1 + u^2x^2 \geq 2 \cdot 1 \cdot u|x| = 1 \geq \frac{2u|x|}{1+u^2x^2} = \frac{1}{2u} \geq \frac{|x|}{1+u^2x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|x|}{1+u^2x^2} \leq \frac{1}{2u}, (\forall n \in \mathbb{N}), (\forall x \in [-1, 1])$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [-1, 1]} \frac{|x|}{1+u^2x^2} \leq \frac{1}{2u}, (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [-1, 1]} \frac{|x|}{1+u^2x^2} \right) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} f$$

II Calculul supremului

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{1+u^2x^2} - 0 \right| = \left| \frac{x}{1+u^2x^2} \right|, \forall u \in \mathbb{N}^*,$$

$$\text{Fie } f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+u^2x^2}, \forall u \in \mathbb{N}^*$$

$$f_n'(x) = \frac{1+u^2x^2 - x \cdot 2xu^2}{(1+u^2x^2)^2} = \frac{1-u^2x^2}{(1+u^2x^2)^2}, \forall u \in \mathbb{N}^*,$$

$$f_n'(x)=0 \Leftrightarrow 1-u^2x^2=0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{u}$$

x	-1	$-\frac{1}{u}$	0	$\frac{1}{u}$	1
$f_n(x)$		- - - - 0 + + + + 0 - - - -			
$f_n'(x)$		$\frac{-1}{u^2}$	$-\frac{1}{2u}$	$\frac{1}{2u}$	$\frac{1}{u^2}$

$$\text{Deci: } \sup_{x \in [-1, 1]} \frac{|x|}{1+u^2x^2} = \frac{1}{u}, \forall u \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Prin urmare } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x)|) = 0$$

Așadar $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

Teorema lui Bernstein

Fie $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ o func. continuă.
Atunci $(\exists) (f_n)_n$ un sir de func. poli.,
 $f_n: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema de permutare a limitei cu derivata

Fie $(f_n)_n$, un sir de func., $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ a.i.:

- 1) I - i.u.f. ned. și mărginit
- 2) $(\exists) x_0 \in I$ a.i. $(f_n(x_0))_n$ e convr.
- 3) f_n deriv. ($\forall n \in \mathbb{N}$)
- 4) $(\exists) g: I \rightarrow \mathbb{R}$ a.i. $f_n' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$

Atunci $(\exists) F: I \rightarrow \mathbb{R}$ deriv. a.i. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ și $f' = g$

$$\text{c.i.e. } (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'$$

Teorema

Fie (X, \mathcal{B}) un sp. top., (Y, d) un sp. metric, $(f_n)_n$ un sir de func., $f_n: X \rightarrow Y$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), $f: X \rightarrow Y$ a.i.

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ și } x \in X.$$

Dacă f_n e cont. în a, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci f e cont. în a

Teorema lui Dini

Fie (X, \mathcal{B}) un sp. top., $\emptyset \neq K \subset X$ o mult. compactă, $(f_n)_n$ un sir monoton de func. continue, $f_n: K \rightarrow \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ și $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, continuă

Dacă $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, atunci $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

Teorema lui Tönya

Fie sirul de func. monotone $(f_n)_n$, $f_n: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ și func. cont. $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, atunci $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

1. Stud. cont. func. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol.

f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ cop. cu func. el.

Stud. cont. lui f în $(0,0)$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), (n) \in \mathbb{N}^*$

Aveam $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} f(0,0) = f(0,0)$$

$\Rightarrow f$ nu e cont. în origine \square

$$b) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f - cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu func. el.)

Stud. cont. lui f în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \frac{|y|}{\sqrt{x^2+x^2}} = |x| \frac{|y|}{\sqrt{2x^2}} = \frac{|y|}{\sqrt{2}} \xrightarrow{|x| \rightarrow 0} 0$$

Deci $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

$\Rightarrow f$ - cont. în origine \square

$$\text{pt. că } \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| \\ \Rightarrow 1 \geq \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$2. \text{ Fie } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Stud. cont. și unif. cont. func. f

f - cont. pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ cop. de func. el.

Stud. dacă f este cont. în 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{0-mărg.} = 0)$$

$\subseteq [-1;1] \setminus \{0\}$

Deci f cont. în 0

Fie $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = (x \sin \frac{1}{x})' = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

$$|f'(x)| = \left| \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right| \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1 + \left| \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1 + 1 \cdot 1 = 2, \forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Deci f - unif. cont. pe $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

(pt. că derivata e mărg.)

f - cont. pe $[-1, 1]$ $\{=\}$, f - uc. pe $[-1, 1]$
 $[-1, 1]$ - compactă

Deci f este u.c. pe \mathbb{R}

3. Fie $A = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $B = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\}$

$$f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 2, & x \in B \end{cases}$$

Arațati că:

- a) f u.c. pe A și pe B
- b) f nu e u.c. pe $A \cup B$

Sol

a) Fie $(x_n)_n \subset A$ și $(y_n)_n \subset A$ a.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1) = 0$$

Deci f e u.c. pe A

Analog f e u.c. pe B

b) Alegem $(x_n)_n \subset A \cup B$, $x_n = n$, cu $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$\text{și } (y_n)_n \subset A \cup B, y_n = n + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - n - \frac{1}{n}) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{Dar } \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2) = -1 \neq 0 \text{ deci } f \text{ nu este u.c. } \square$$

4. Stud. u.c. func.:

a) $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$

b) $f: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \forall x \in [1; 2]$$

$$|f'(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} \leq 1, \forall x \in [1; 2]$$

c) $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$

Alegem $(x_n)_n \subset (0, \infty)$, $(y_n)_n \subset (0, \infty)$

$$x_n = \frac{1}{2^n}, y_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - n) = \dots$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - n) = \infty \neq 0$$

5. Fie a>0 și $f: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$

Arațati că f e u.c. c.e., $a > 0$

Sol. \therefore

Stim că $a > 0$, arătăm că f e u.c.

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in (a, +\infty)$$

$$|f'(x)| = \frac{1}{x} < \frac{1}{a}, \forall x \in (a, +\infty) \Rightarrow f \text{ e u.c.}$$

$$x \in (a, +\infty) \Rightarrow a < x \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{x}$$

\therefore

Stim că f e u.c. și arătăm că $a > 0$

P.R.A. că $a = 0$

Alegem $(x_n)_n \subset (0; +\infty)$, $(y_n)_n \subset (0; +\infty)$,

$$x_n = e^{-n}, y_n = e^{-2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{2n}}) = 0$$

$$\text{și } \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n + 2n) = \infty \neq 0$$

Deci f nu e u.c., contradicție,
așadar $a > 0$

6. Fie $f: [0, \frac{2}{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$. Arăt că f nu e u.c.

Sol.

P.R.A. că f u.c.

Deci $\tilde{f}: [0, \frac{2}{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$ o.i. \tilde{f} cont. și $\tilde{f}|_{[0, \frac{2}{\pi}]} = f$

\tilde{f} - cont. în 0 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} \quad (\tilde{f}(x) = f(x) = \sin \frac{\pi}{x}, \forall x \in (0, \frac{2}{\pi}))$$

Deci $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} \in \mathbb{R}$

$$\text{Alegem } x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = 0 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \right) = 1,$$

contradictie cu $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{\pi}{x}) (0 \neq 1)$

Așadar f nu e u.c.

7. Fie $(x, d_1), (y, d_2)$ sp. metrice, $(x_n) \subset X$ un sir Cauchy în rap. cu metr. d_1

și $f: X \rightarrow Y$ - o func. u.c.

Arătată că $(f(x_n))$ este tot sir Cauchy

Sol.

f - u.c. $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ a.i. } (\forall x, y \in X \text{ cu })$

prop. că $d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$ ($\exists \delta > 0$ de mai sus)

(x_n) sir Cauchy în rap. cu metr. $d_1 \Rightarrow$

$\exists \delta \in \mathbb{R} \text{ a.i. } (\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq \delta, n \geq \delta, d_1(x_m, x_n) < \delta)$

Fie $m, n \in \mathbb{N} \geq \delta$

$$d_2(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

Deci $(f(x_n))$ este sir Cauchy în rap. cu metr. $d_2 \square$

CURS 7

Serii de funcții

Fie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un sir de funcții $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $c_i \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $s_n(x) = f_p(x) + \dots + f_{c_i}(x)$, $c_i > n$.

Def

Perechea $(f_n)_n$, $(s_n)_n$ s.n. serie de funcții.
s.i se notează $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ sau $\sum_{n=p}^{\infty} s_n$

Obs

în general $p=0$ sau $p=1$

Fie $\sum_n f_n$ o serie de funcții $s_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $s_n = f_0 + \dots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$

Def

Spunem că seria de funcții $\sum_n f_n$.

1) converge simplu

dacă sirul $(s_n)_n$ este simplu conv.

2) converge uniform

dacă sirul $(s_n)_n$ este uniform conv.

3) converge absolut

dacă seria $\sum_n |f_n|$ e conv.

Def

Dacă $\sum_n f_n$ converge simplu, limita (simpla) a sirului $(s_n)_n$ se numește suma seriei $\sum_n f_n$
s.i se notează tot cu $\sum_n f_n$

Theoremă

P.p. că (X, \mathcal{G}) e sp. top. Fie $x \in X$.

Dacă $\sum_n f_n$ converge uniform către funcția $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$) și f_n cont. în a , $\forall i \in \mathbb{N}$, atunci f cont. în a .

Theoremă (Weierstrass)

P.p. că $(d_n)_n \subset (0, \infty)$ a.i.

1) $\sum_n d_n$ conv.

2) $|f_n(x)| \leq d_n$, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Afăuci $\sum_n f_n$ converge uniform și absolut

Ex

Arați că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2}$ este u.c. ($x \in \mathbb{R}$)

$$\text{Alegem } d_n = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Avem } \left| \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ (Serie armonică gen., } \alpha = 2\text{)}$$

Def Conf. teoremei lui Weierstrass avem că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$ e u.c.

Multimea $A = \{x \in X \mid \sum_n f_n(x)\}$ e conv.

s.n. mult. de conv. a seriei de funcții $\sum_n f_n$

Serii de puteri

Fie $r, r_n \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$, $n \geq p$
($0^0 = 1$ prin convenție)

Def

Seria de funcții $\sum_{n=p}^{\infty} a_n x^n$ s.n. serie de puteri

Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri

Def

1) Definiție $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}$ ($\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$)

croza de conv. a seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$

2) Intervalul $(-R, R)$ s.n. intervalul de conv. al seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$

3) Multimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_n a_n x^n \text{ e conv.}\}$

s.n. multimea de conv. a $\sum_n a_n x^n$

Theoremă

Fie $\sum_n a_n x^n$ și R :

1) Dacă $\exists \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \in [0, \infty]$, atunci $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}$

2) Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, atunci $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$

Theoremă I a lui Abel

1) Pt. orice $x \in (-R, R)$, seria $\sum_n a_n x^n$ e abs. conv.

2) Pt. orice $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, $\sum_n a_n x^n$ e div.

Corolar

avem $(-R, R) \subset A \subset [-R, R]$

Ex

Det. mult. de conv. pt. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$

Sol

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(1 + \dots + \frac{1}{n+1}\right)}{(-1)^n \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} \left(1 + \dots + \frac{1}{n+1}\right)}{(-1)^n \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right)} + \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \dots + \frac{1}{n}} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \dots + \frac{1}{n}} \right) = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

$$0 \leq \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \dots + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Fie A-mult. de conv. a $\sum_n a_n x^n$

Aveam $-1, 1 \in A \subset [-1, 1]$

Stud. dacă $x \in A$ și $-x \in A$

Fie $x_n = (-1)^n \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ Pt. $x = 1$ seria devine $\sum_n a_n x^n$

Arațăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

P.R.A. că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = 0$

contradictie cu faptul că sirul $(1 + \dots + \frac{1}{n})$ nu e conv. (vezi Curs 1)

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Conf. crit. suf. de dir. avem că $\sum_n a_n x^n$ e div.

Prin urmare $x \notin A$

Pt. $x = -1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \dots + \frac{1}{n}) (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \dots + \frac{1}{n})$

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \dots + \frac{1}{n}) \neq 0$ rezultă confl. crit. suf. de div.
că $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \dots + \frac{1}{n})$ e div.

Deci $-1 \notin A$
Astfel $A = (-1, 1)$ \square

Teorema a II-a a lui Abel

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu $R > 0$ și mult. de conv. A.

Atunci func. $s: A \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e cont.

Explicații

1) pt. orice $a \in (-R, R)$, s e cont. în a

2) Dacă $R \in A$ cresc. - $R \in A$, atunci s e cont. în R (resp. în $-R$), i.e.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow R \\ x < R}} s(x) = s(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Teorema de derivare „termen cu termen” a seriilor de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu R. Atunci $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} =$
 $= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ are același R

Dacă $R > 0$; $s: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, atunci
 s e derivabilă și $s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Teorema de integrare „termen cu termen” a seriilor de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu R. Atunci $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ are același R.

Dacă $R > 0$ și $S: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

atunci S e o primitivă a lui s

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $a \in I$ și $f \in C^{\infty}(I)$

Def

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$
 s.u. seria Taylor asociată func. f în a

Teorema

Seria Taylor asociată func. f în punctul a este
 conv. în punctul $x \in I$, $x \neq a$ și are suma $f(x)$
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, unde $R_n(x)$ e restul Formulei
 lui Taylor

Obs

în general $a = 0$

Def

Seria lui Taylor asociată lui f în 0 se mai
 numește și seria MacLaurin asociată lui f.

Ex.

Folosind teorema prec., arătați că $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Sol.

$$I = \mathbb{R}$$

$$a = e^I$$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$$

$$f \in C^\infty(I)$$

$$f^{(k)}(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$f^{(k)}(0) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_n \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Conț. Formulei lui Taylor cu rest Lagrange, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, y \neq 0$,
 $\exists z$ între 0 și $x - y$. $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}}_R(x)$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Arătăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$

Fie $x \in \mathbb{R}^*$

Arătăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$

$$0 \leq |R_n(x)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{c|x|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

între 0 și $x \Rightarrow c < e^{|x|}$

Este suf. să arătăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{|x|} |x|^{n+2}}{e^{|x|} |x|^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1$$

Conț. crit rap. pt. că există un term strict pozitiv

$$\text{arătăm că } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

$$\text{Așadar } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \square$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

Obs

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \forall x, x \in (-1, 1)$$

înlocuim x cu $-x$ în relație precedență și obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}, \forall x, x \in (-1, 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

înlocuim x cu x^2 în ult. relație și obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \forall x, x \in (-1, 1)$$

Ex

Arațați că $\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \forall x, x \in [-1, 1]$

Sol

Cons. $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \forall x, x \in (-1, 1)$$

(Integrator, termen cu termen" și obt. că (2))

$$C \in \mathbb{R} \text{ o.i. } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C, \forall x, x \in (-1, 1)$$

$\arctg x$

$$f(0) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 0^{2n+1} + C = 0 + C = C \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \Rightarrow C = 0$$

Deci $\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \forall x, x \in (-1, 1)$

Pf. $x=1$ seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$, conu. crit. lui Leibniz?

Conform teoremei lui Abel, avem

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctg x = \arctg 1$$

Pf. $x=-1$ seria devine ...

$$\text{Deci } \arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \forall x, x \in [-1, 1]$$

Seria binomială

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in (-1, 1)$, avem

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

(?) Fix $(X, d_1), (X, d_2)$ sp. mtr., $(x_n)_n \subset X$ nr. sîr
Cauchy în sp. cu mtrica d_1 , și $f: X \rightarrow Y$, o funcț u. c.
Fie $\tilde{d}_2(f(x_n))$ este sîr Cauchy în sp. cu mtrica d_2 .

δ u. c. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s. t. $\forall x, y \in X$ cu prop. că:

$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Fix $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ (de mai sus).

$(x_n)_n$ nr. sîr Cauchy în sp. cu mtrica $d_1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$

$$d_1(x_n, x_m) < \delta.$$

Fix $n, m \in \mathbb{N}, m, n \neq n$ aram $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

Deri $(f(x_n))_n$ nr. sîr Cauchy în sp. cu mtrica d_2 .

(1) Studiulică convexitatei uniformă zt. ^{16.9.2023}
sîrurilor de funcții:

a) $f_n: [\bar{0}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Sol! C.S.: Fix $x \in [\bar{0}, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x+n} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \text{ unde } f: [\bar{0}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$$

C.U.:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{x+n} \right| = \frac{x}{x+n} \quad \forall x \in [\bar{0}, \infty), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sup_{x \in [\bar{0}, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [\bar{0}, \infty)} \frac{x}{x+n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\frac{x}{x+n}} \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

Seminar 7

a) Stud. conv. simplă și uni. pt.
urm. siruri de funcții.

b) $f_n : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x+n}, (\forall) n \in \mathbb{N}$

c.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, unde $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$

c.v.u.
 $\sup_{x \in [2, 3]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [2, 3]} \frac{x}{x+n}$

Fie $f_n : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x+n}$

$$f'_n(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} \geq 0, (\forall) x \in [2, 3], (\forall) n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow f_n$ cresc, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

x	2	3
$f'_n(x)$	+	+
$f_n(x)$		

Deci $\sup_{x \in [2, 3]} f_n(x) = \frac{3}{3+n}, (\forall) n \in \mathbb{N}$

Așadar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3+n} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

c) $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Sol.

c.s.

Fie $x \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, f : [0, \infty), f(x) = x$$

c.v.u.

$$\sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, \infty)} |\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x| = \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + x} \right| =$$

$$= \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + x} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

d) $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{n}{n+x}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Sol.

c.s.

Fie $x \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+x} = 1 \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$
, unde $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1$

c.v.u.

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{n}{n+x} - 1 \right| = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{n+x}$$

Fie $g_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g_n(x) = \frac{x}{n+x}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$$g'_n(x) = \frac{n}{(n+x)^2} > 0, (\forall) x \in [0, \infty), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow g_n$ cresc., $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

x	0	∞
$g_n(x)$	+	+
$g_{n+1}(x)$		

Deci $\sup_{x \in [0, \infty)} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{n+x} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Prin urmare $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

e) $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n, (\forall) n \in \mathbb{N}$

Sol.

c.s. Fie $x \in (0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$
, unde

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

c.v.u.

$$\begin{aligned} f_n &\text{ continuă, } (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ f &\text{ nu e continuă în 1} \end{aligned} \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \square$$

f) $f_n : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Sol.

c.s.

$$f_n(x) = \left(\frac{1+x}{e^{2x}} \right)^n = (f_1(x))^n, (\forall) x \in [\frac{1}{2}, 1], (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

Așadar că $0 \leq f_1(x) \leq 1, (\forall) x \in [\frac{1}{2}, 1]$
evidență

Fie $g : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1+x - e^{2x}$

$$g'(x) = 1 - 2e^{2x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 2e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x = -\ln 2 \Leftrightarrow$$

x	$\frac{1}{2}$	1	$x = \frac{-\ln 2}{2}$
$g(x)$	—	—	

$g(x) \leq 1 - 2e^{-\ln 2} < 0, (\forall) x \in [\frac{1}{2}, 1]$

Așadar $1+x < e^{2x}, (\forall) x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Prin urmare, $f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}} < 1, (\forall) x \in [\frac{1}{2}, 1]$

Fie $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos x)^n = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \\ \text{unde } f: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$$

c.v.

Aveam:

- 1) $[\frac{1}{2}, 1]$ - compactă
- 2) $(f_n)_n$ e desc.
- 3) f_n, f sunt cont.
- 4) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

Conform teoremei lui Dini aveam că:

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

g) $f_n: [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = (\cos x)^n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Sol. c.s.

$$f_n(x) = (\cos x)^n = (\cos x)^n, (\forall) x \in [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}], (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

$$0 \leq \cos x < 1, (\forall) x \in [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

Fie $x \in [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \text{ unde } f: [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$$

c.v.

$$x \longmapsto \cos x \quad \text{desc.} \Rightarrow f_n - \text{desc.}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

$\overbrace{[\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}]}^{n} \quad [0, 1]$

Aveam:

- 1) $f_n, f: [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$
- 2) f_n - desc., $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$
- 3) f - cont.
- 4) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

Din teorema lui Polya aveam:

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

Pt. $f_n'(x)$:

$$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{n} \sin x \cdot n^2}{x^n} = \frac{1}{n^{n-2} x^n}, (\forall) x \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

Fie $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{n-2} x^n} = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases} = f_n' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g, \text{ unde } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

c.v.

$$\left. \begin{array}{l} f_n' \text{ continuu}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ g \text{ nu e continuu (in 0)} \end{array} \right\} \Rightarrow f_n' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$$

2. Fie $f_n, f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N} \text{ a.i. } f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, și g e cont.

$(a, b \in \mathbb{R})$

$(a < b)$

Arațați că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n g = f g$

Sol.

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ cont.} \quad \left[\begin{array}{l} [a, b] - \text{compactă} \\ \exists M > 0 \text{ a.i. } |g(x)| \leq M, (\forall) x \in [a, b] \end{array} \right] \Rightarrow (\exists) M > 0 \text{ a.i. } |g(x)| \leq M, (\forall) x \in [a, b]$

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \Rightarrow (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) N \in \mathbb{N} \text{ a.i. } (\forall) n \geq N, (\forall) x \in [a, b] \text{ avem } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Aveam $n \geq N$ de mai sus

Fie $n \geq N$ și $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} & |f_n(x) g(x)| - |f(x) g(x)| = \\ & = |g(x)| |f_n(x) - f(x)| \leq M \cdot |f_n(x) - f(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \\ & \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n g = f g \end{aligned}$$

3. Stud. conv. s.s.; v. pt:

$(f_n)_n$ și $(f'_n)_n$, unde $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\arctan x}{n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Sol.

Pt. $(f_n)_n$:

c.s.

Fixăm $x \in \mathbb{R}$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

$$-\frac{\pi}{2n} < f_n(x) < \frac{\pi}{2n}, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

c.v.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\arctan x}{n} \right| \leq \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

Prin urmare $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$,

unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$

Teme:

$$f_n: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

Curs 8

Fie pe \mathbb{N}^* Considerăm $\mathbb{R}^P = \{(x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i=1, \dots, p\}$

Def.

Fie $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^P$
 $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$
 $s_i, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x+y = (x_1+y_1, \dots, x_p+y_p) \\ 2) \quad & d \cdot x = (d \cdot x_1, \dots, d \cdot x_p) \end{aligned}$$

Obs

Atunci când nu specificăm se subînțeleg că notăm $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_p)$, etc.

Def.

Pt. orice $x \in \mathbb{R}^P$, def. normă lui prin:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$$

Prop

Func. $\|\cdot\|: \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \|x\|$ are prop.:

- 1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^P$
- 2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^P} \in \mathbb{R}^P$
- 3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^P$
- 4) $\|d \cdot x\| = |d| \cdot \|x\|, \forall d \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^P$

Obs

Pt. orice $x, y \in \mathbb{R}^P$, avem $d_2(x, y) = \|x-y\|$

Obs

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*, \emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^P$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}^P$

Pt. orice $a \in A$ avem $f(a) = (f_1(a), \dots, f_q(a))$

Prin urm. am def. func..

$$f_1, \dots, f_q: A \rightarrow \mathbb{R}$$

Derivate parțiale și funcții diferențiable

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*, \emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^P$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \dots, f_q)$ și $a \in A$

Def

1) Spunem că f este deriv. parțial (admete derivate parțiale) în raport cu variabila x_i ($i \in \{1, \dots, p\}$ fixat), în punctul a dacă există în \mathbb{R}^q lim. urm.:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t \cdot e_i) - f(a)}{t}, \text{ unde } e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^P$$

$$\text{În acest caz notăm } \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t \cdot e_i) - f(a)}{t}$$

derivata parțială a func. f în rap. cu var. x_i și în punctul a

2) Spunem că f este diferențabilă sau derivabilă în punctul a dacă există o aplicație liniară $T: (\mathbb{R}^P) \rightarrow (\mathbb{R}^q)$ a.i.:

$$(T(x+y)) = T(x) + T(y)$$

$$(T(d \cdot x)) = d(T(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0_{\mathbb{R}^q} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^q$$

Obs

Aplicația liniară T , dacă există, este unică, se notează cu $d f(a)$ sau $\Delta f(a)$ sau $f'(a)$

și se numește diferențială lui f în a
 $(d f(a): \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^q)$

Obs

1) Fie $c \in A$. Sunt echiv.:

- i) f cont. în c
- ii) f_1, \dots, f_q cont. în c

2) Fie $i \in \{1, \dots, p\}$. Sunt echiv.:

i) f admite der. parțială în rap. cu var. x_i , în punctul a

ii) f_1, \dots, f_q admit der. parțiale în rap. cu var. x_i , în punctul a

Dacă i) sau ii) de la 2) e adeuță, atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(c), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(c) \right)$$

3) Sunt echiv.:

- i) f dif. în a
- ii) f_1, \dots, f_q dif. în a

Dacă i) sau ii) de la 3) e adeuță, atunci:

$$df(a) = (df_1(a), \dots, df_q(a))$$

Teorema

Dacă f este dif. în a , atunci f este der. parțială în rap. cu var. x_i , în punctul a , ($i \in \{1, \dots, p\}$) și $d f(a): \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^q$,

$$df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

Obs

Dacă $g=1$, form. prec. devine:

$$\begin{aligned} df(a): \mathbb{R}^P &\rightarrow \mathbb{R}, \\ df(a)(v) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)v_p \end{aligned}$$

Teorema
f dif. în a \Rightarrow f cont. în a

Obs
Reciproca e falsă

Obs
Orice aplicație liniară $f: \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^Q$
e dif. în orice punct $a \in \mathbb{R}^P$
și $dF(a) = f$

Obs

Pt. orice $i \in \{1, \dots, P\}$, proiecția
 $p_{ri}: \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$, $p_{ri}(u) = u_i$ este dif. în orice $u \in \mathbb{R}^P$
și $d(p_{ri}) = p_{ri}$, deoarece p_{ri} e liniară

Notăm: $p_{ri} = dx_i, \forall i = 1, \dots, P$

Cu această notație, dacă $f: A \subset \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$
e dif. în $a \in A$, atunci $dF(a): \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$
 $dF(a)(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_P}(a)u_P =$
 $= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(u) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_P}(a)dx_P(u) =$
 $= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_P}(a)dx_P$

Teorema (Crit. de dif.)

Pp. că $\forall a \in D_f, \forall A \subset \mathbb{R}^P$ a.i. f admite toate
deriv. parțiale pe V (i.e. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ cu } i \in \{1, \dots, P\}$)
și $\frac{\partial f}{\partial x_i}: V \rightarrow \mathbb{R}$ e cont în a pt. orice $i = 1, \dots, P$.

Atunci f e dif. în a

Exc

Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ \Rightarrow f dif. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă

a) Stud. cont. lui f

b) Det. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

c) Stud. dif. lui f

a) Vezi seminar 6

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)_x^1 = \frac{(xy)_x^1 \sqrt{x^2+y^2} - (xy)(\sqrt{x^2+y^2})_x^1}{x^2+y^2} = y \sqrt{x^2+y^2} - xy \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)_y^1 = \frac{(xy)_y^1 \sqrt{x^2+y^2} - (xy)(\sqrt{x^2+y^2})_y^1}{x^2+y^2} = x \sqrt{x^2+y^2} - xy \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + te_1) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + (t,0)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0$$

Analog $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Exc

Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 z^2 - xy - x + 2z$$

Stud. dif. func. f în $(1,2,3)$ și în cazul în care
f e dif. în $(1,2,3)$, det. dif.

Sol

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - y - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - x \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \text{ continue pe } \mathbb{R}^3$$

\mathbb{R}^3 -mult. deschisă
căci este verificată
pt. toate punctele sale

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Crit. de} \\ \text{dif.} \end{array} \right. \Rightarrow f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3$
 $\Rightarrow f \text{ dif. în } (1,2,3)$

$$dF(1,2,3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$dF(1,2,3)(u,v,w) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) \right] \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)}_{2 \cdot 1 - 2 - 1 = -1} u + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)}_{2 \cdot 2 - 1 = 3} v + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)}_{2 \cdot 3 + 2 = 8} w =$$

$$= -u + 3v + 8w$$

$$\text{i.e. } dF(1,2,3) = -dx + 3dy + 8dz \quad \square$$

Stud. dif. lui f în $(0,0)$

Dacă f ar fi dif. în $(0,0)$, atunci

$$dF(0,0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, dF(0,0)(u,v) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0u + 0v = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - dF(0,0)(x,y)}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ nu e dif.
în $(0,0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} \quad \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

<math

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)}{\|(x,y) - (0,0)\|}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$

Aveam $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Deci $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq 0 \Rightarrow f \text{ nu e dif. in } (0,0)$ \square

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} (x+3)^n$$

Notam $y = x+3$
Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} y^n$

$$a_n = \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = 3$$

$$R = \frac{1}{3}$$

Fie B mulț. de conv. a seriei de puteri $\sum_n a_n y^n$

$$(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}) \subset B \subset [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$$

Stăd. dacă $\pm \frac{1}{3} \in B$

$$\text{Dacă } y = -\frac{1}{3}, \text{ seria devine } \sum_n \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} (-\frac{1}{3})^n = \sum_n \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_n (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ - conv. (Leibniz)}$$

$$\text{Deci } -\frac{1}{3} \in B$$

$$\text{Dacă } y = \frac{1}{3}, \text{ seria devine } \sum_n \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ - div. c serie armonică gen. } \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\text{Deci } \frac{1}{3} \notin B$$

$$\text{Așadar } B = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$$

Fie A - mulț. de conv. a seriei de puteri din enunț

$$y \in B \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x+3 < \frac{1}{3} \quad / -3$$

$$-\frac{10}{3} \leq x < -\frac{8}{3}$$

$$A = [-\frac{10}{3}, -\frac{8}{3})$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-2)^n$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2^n} \cdot x^n$$

c) vezi (a) Matei)

f) Se se dezvoltă în serie de puteri alături x funcțiile:

$$a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$$

$$I = \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

Conf. Form. lui Taylor cu rest Lagrange,

(*) $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, (k) \in \mathbb{N}, (3) \in$ între 0 și x a.s.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{\text{Rest}}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}, \text{ cu } x \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$$

Fie $x \in \mathbb{R}^*$
Arătăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

Este suf. să arătăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Fie } x_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ cu } n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

Conf. crit. rap. pt. siruri cu ferm. strict poz.

avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$, prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

$$\text{Așadar } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}^*$$

(când n e par, term. e 0)

$$f(0) = 0 \quad \frac{(-1)^0}{(2 \cdot 0 + 1)!} \cdot 0^{2 \cdot 0 + 1} = 0$$

Deci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Curs 9

Teorema

Fie $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $0 \neq B \subset \mathbb{R}^q$,

$g: A \rightarrow B$, $g = (g_1, \dots, g_q)$, $h: B \rightarrow \mathbb{R}^r$, $h = (h_1, \dots, h_r)$,
 $f = \text{hog}: A \rightarrow \mathbb{R}^r$, $f = (f_1, \dots, f_r)$ și $a \in A$ a.i. $g(a) \in B$

Dacă g e dif. în a și h e dif. în $g(a)$. Atunci:

1) $f = \text{hog}$ e dif. în a și $d(f(a)) = d(\text{hog}(a)) = dh(g(a)) \circ dg(a)$

$$2) \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(g(a)) = \sum_{j=1}^q \frac{\partial h_i}{\partial y_l}(g(a)) \cdot \frac{\partial g_l}{\partial x_k}(a),$$

(V) $i = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, p$

Explicații teorema

$$1) \mathbb{R}^p \xrightarrow{dg(a)} \mathbb{R}^q \xrightarrow{dh(g(a))} \mathbb{R}^r$$

$df(a) = dh(g(a)) \circ dg(a)$

$$2) A \subset \mathbb{R}^p \xrightarrow{g = (g_1, \dots, g_q)} B \subset \mathbb{R}^q \xrightarrow{h = (h_1, \dots, h_r)} \mathbb{R}^r$$

$f = \text{hog}$

Au sens: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ $\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)$ $\frac{\partial h}{\partial y_l}(g(a))$

(V) $k = 1, \dots, p$ (V) $l = 1, \dots, q$ (V) $i = 1, \dots, r$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial (\text{hog})}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial h}{\partial v}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) +$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) +$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial y}(x, y, z) =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial v}(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, x + yz) \cdot xz +$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, x + yz) \cdot 2y +$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, x + yz) \cdot 2z, (V)(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial (\text{hog})}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial h}{\partial v}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) +$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) +$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial z}(x, y, z) =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial v}(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, x + yz) \cdot yz +$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, x + yz) \cdot 2z +$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, x + yz) \cdot 4, (V)(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Ex

Fie $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o func. dif.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = h(xy^2, x^2 + y^2 + z^2, x + yz)$$

Arătați că f e dif și det. derivatele ei parțiale
 $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$

Sol

$$\text{Fie } g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y, z) = (xy^2, x^2 + y^2 + z^2, x + yz) \quad \text{și } f = \text{hog}$$

$$\text{Fie } g_1, g_2, g_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x, y, z) = xy^2$$

$$g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$g_3(x, y, z) = x + yz$$

Aveam $g = (g_1, g_2, g_3)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g_3}{\partial x}(x, y, z) \right) = \\ &= (yz, 2x, 1), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = (x^2, 2y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = (0, 0, 1), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} - \text{cont. pe } \mathbb{R}^3 \\ \Rightarrow g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \text{R deschisă}$$

$$\left. \begin{array}{l} h \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3 \\ g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow f = \text{hog} \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g = (g_1, g_2, g_3)} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

$f = \text{hog}$

$$(x, y, z) \quad (u, v, w)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial (\text{hog})}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial h}{\partial v}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) + \\ &\quad \frac{\partial h}{\partial v}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) + \\ &\quad \frac{\partial h}{\partial w}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x}(x, y, z) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial h}{\partial v}(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, x + yz) \cdot xz +$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, x + yz) \cdot 2y +$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, x + yz) \cdot 2z, (V)(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Obs

În exc. precedent, putem nota $g = (u, v, w)$ i.e.

$$g_1 = u, g_2 = v, g_3 = w,$$

$$u, v, w: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, u(x, y, z) = xy^2,$$

$$v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, w(x, y, z) = x + yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial h}{\partial v}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) +$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) +$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(g(x, y, z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x}(x, y, z) +$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g = (u, v, w)} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

$f = \text{hog}$
 $(x, y, z) \quad (u, v, w)$

$$f(x_1, y_1, z_1) = h(u_1, v_1, w_1), u_1(x_1, y_1, z_1), v_1(x_1, y_1, z_1), w_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$f = h(u, v, w)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

Derivate parțiale de ordin superior
și diferențiale de ordin superior

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*, p \neq 0, A \subset \mathbb{R}^p, f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in A$

Def.

Fie $i, j \in \{1, \dots, p\}$

Pp. că $\exists V \in \mathcal{U}_a, V \subset A$, a.i. f admite derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pe V
c.i.e. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)$ cu $c \in V$

Dacă func. $\frac{\partial f}{\partial x_j}: V \rightarrow \mathbb{R}^q$ admite derivată parțială

în rap. cu var. x_i , în punctul a , această derivată parțială s.u. derivata parțială de ord. 2 a func. f în rap. cu var. x_i și x_j , în punctul a și se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a)$, dacă $i \neq j$ și s.u. cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a)$, dacă $i=j$

Similar se def. der. parțiale de ord. $k \geq 3$

Notății corecte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a), \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a), \text{ etc.}$$

Notății gresite:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a), \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2}(a) \text{ etc.}$$

Formula lui Taylor cu rest Lagrange, cazul multidimensional

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*, p \neq 0, A \subset \mathbb{R}^p$ deschisă și convexă
(i.e. $\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1]$, avem $(1-t)x + ty \in A$),
 $n \in \mathbb{N}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ func. care admite toate derivatale parțiale de ord. $n+1$ pe A și acestea sunt continue pe A și fie $a \in A$. Atunci:

$$(t) \quad x \in A, x \neq a, \exists (t) \in [0, 1] \text{ c.c. } x = (1-t)a + t \bar{x} \quad t \in [0, 1], \exists \alpha, \beta \in A$$

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{1!} d^1 f(a)(x-a)}_{T_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{2!} d^2 f(a)(x-a)^2}_{T_2(x)} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n!} d^n f(a)(x-a)^n}_{T_n(x)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\bar{x})(x-a)^{n+1}}_{R_{n+1}(x)}$$

Lema lui Schwarz

Fie $i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j$ și $V \in \mathcal{U}_a, V \subset A$ a.i. f admite derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ pe V

Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: V \rightarrow \mathbb{R}^q$ este cont. în a , atunci

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Def.

Pp. că $\exists V \in \mathcal{U}_a, V \subset A$ a.i. V admite toate derivatele parțiale de ordinul 2 a lui f în a

prin $d^2 f(a): (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^q$,

$$d^2 f(a)(v, u) = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i u_j \quad v, u \in \mathbb{R}^p$$

Def.

Pp. că $\exists V \in \mathcal{U}_a, V \subset A$ a.i. V admite toate derivatele parțiale de ordinul 3 a lui f în a

prin $d^3 f(a): (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^q$,

$$d^3 f(a)(v, u, w) = \sum_{i,j,k=1}^p \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) v_i u_j w_k$$

Similar se def. $d^k f(a)$, $k \geq 3$

Notății

$$d^2 f(a)(v, u) \stackrel{\text{not}}{=} d^2 f(a)(v, u)^2$$

$$d^3 f(a)(v, u, w) \stackrel{\text{not}}{=} d^3 f(a)(v, u, w)^3$$

.....

Obs.

Dacă $p=2, q=1$ și $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ atunci:

$$d^2 f(a)(v, u)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) v_2^2$$

$$d^k f(a)(v) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a) v_1^k + \dots + \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a) v_2^k$$

Ex $8 + 4 - 2 + 3 =$

Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = xy^3 + 2xy - 2x^2 + 3x + y - 2$$

a) Det. deriv. part. de ord. 2 ale lui f

Sol

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^3 + 2y - 4x + 3 \quad \text{c.v. } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + 2x + 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 3y^2 + 2 \quad \text{Lema Schwarze} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 6xy \end{aligned}$$

b) Det. $df_{(1,2)}$ și $d^2f_{(1,2)}$

Sol

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont. pe } \mathbb{R}^2 \\ (\mathbb{R}^2 \text{ desch.}) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^2$$

$$df_{(1,2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, df_{(1,2)}(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)v_1}_{11} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)v_2}_{15} = 11v_1 + 15v_2$$

Toate deriv. part. de ord. 2 sunt continue

$$\begin{aligned} d^2f_{(1,2)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, d^2f_{(1,2)}(v, w) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) \cdot v_1 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) \cdot v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2) \cdot v_2 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) \cdot v_2 v_2 = \\ &= -4v_1 v_1 + 14v_1 v_2 + 14v_2 v_1 + 12v_2 v_2 \end{aligned}$$

c) Det. polinomul Taylor de ord. 2 asoc. func. f în $(1,2)$ (i.e. $T_2(x, y)$)

Sol

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f_{(1,2)} + \frac{1}{1!} df_{(1,2)}((x, y) - (1,2)) + \dots + \frac{1}{2!} d^2f_{(1,2)}((x, y) - (1,2))^2 = \\ &= f_{(1,2)} + \frac{1}{1!} (11(x-1) + 15(y-2)) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)(x-1)(y-2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2 \right) = \\ &= 13 + 11(x-1) + 15(y-2) + \frac{1}{2} (-4(x-1)^2 + 28(x-1)(y-2) + 12(y-2)^2) = \\ &= 13 + 11(x-1) + 15(y-2) - 2(x-1)^2 + 14(x-1)(y-2) + 6(y-2)^2 \quad \square \end{aligned}$$

Puncte de extrem local

Def

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Spunem că este:

- 1) punct de minim local al lui f , dacă
 - (a) $\forall \delta > 0$ s.t. $x \in U \cap A$
- 2) punct de maxim local al lui f , dacă
 - (a) $\forall \delta > 0$ s.t. $x \in U \cap A$
- 3) punct de extrem local dacă este 1) sau 2)

Def

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$

Spunem că a este pt. critic al lui f
dacă f e dif. în a și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, $i = 1, p$

Teorema lui Fermat

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$ a.i.:

- 1) $a \in \overset{\circ}{A}$
- 2) a este punct de extrem local al lui f
- 3) f este dif. în a

Afuncii $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ ($i = 1, p$)

Def

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, D deschisă, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^q$

să $f \in C^1$. spunem că f e de clasă C^k pe D ,
dacă f admite toate der. partiiale de ord. k (pe D)
și acestea sunt continue (pe D)

Criteriul de stabilire a punctelor de extrem local

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, D deschisă, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, o func.
de clasă C^2 (pe D) și $a \in D$, un punct critic al lui f .

Notăm $H_f(a)$ = $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$,
 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}$,
 $\Delta_p = \det(H_f(a))$

1) Dacă $\Delta_1 > 0 \dots \Delta_p > 0$,

atunci a este punct de minim

local al lui f

2) Dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{p-1} > 0$, $\Delta_p > 0$,

a e punct de maxim local
al lui f

3) Dacă $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_p > 0$, sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_{p-1} \geq 0$, $\Delta_p \geq 0$

și $(\exists) i_0 \in \{1, \dots, p\}$ a.t. $\Delta_{i_0} = 0$, atunci următoarele se poate trage nicio concluzie

4) În toate celelalte cazuri,
 a nu este punct de extrem
local al lui f

Ex:

Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
Dacă punctele de extrem local ale lui
 f și precizați natura lor

Curs 10

Exc

$$\text{Fie } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Det. pct. de extrem ale lui f și prec. natura lor.

Sol

\mathbb{R}^2 deschisă

Det. pct. critice ale lui f
 f cont.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 \end{cases}, \quad (\forall) (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont. pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ desc.} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 /:3 \\ 6xy - 12 = 0 /:6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

Notăm $t = x^2$

Aveam $t^2 - 5t + 4 = 0$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \quad t_1 = 4, \quad t_2 = 1$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x \in \{-2, 2\} \Rightarrow y \in \{-1, 1\}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x \in \{-1, 1\} \Rightarrow y \in \{-2, 2\}$$

Soluțiile sist. de mai sus sunt:

$$(2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, -2)$$

f este dif. pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ orice sol. a sist.
 este pct. critical lui f

Lema
 lui Schurzare

Obs. că f este de clasă C^2

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}, \quad (\forall) (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} = (2,1) \text{ pct.} \\ \Delta_1 = 12 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{de minim local al lui } f \\ \text{al lui } f \end{cases}$$

$$Hf(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{c}-2,-1 \text{ pct. de} \\ \text{maximum local} \\ \text{al lui } f \end{cases}$$

$$Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 = -108 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (1,2) \text{ nu} \\ \text{este pct.} \\ \text{de extrem} \\ \text{local al lui } f \end{cases}$$

Analog nici $(-1,-2)$ nu este \square

T.F.I., cas general

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{p+2}$ D deschis, $F: D \rightarrow \mathbb{R}^q$ ($F = (F_1, \dots, F_q)$)

dacă $(x^0, y^0) \in D \subset x^0 = (x_1^0, \dots, x_p^0), y^0 = (y_1^0, \dots, y_q^0)$

α.i.:

$$1) F(x^0, y^0) = 0_{\mathbb{R}^q} = (0, \dots, 0)$$

2) F este de clasă C^1 pe D

$$3) \frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)}(x^0, y^0) \text{ def} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_q}(x^0, y^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_q}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial y_q}(x^0, y^0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Atunci $\exists U = \bigcup_{i=1}^p V_i \in \mathcal{V}_{(x_1^0, \dots, x_p^0)}, \exists V = V \in \mathcal{V}_{(y_1^0, \dots, y_q^0)}$ și

(3!) $f: U \rightarrow V$, funcție implicită,

$$f = (f_1, \dots, f_q) \text{ cu prop.}$$

$$a) f(x^0) = y^0$$

$$b) F(x, f(x)) = 0_{\mathbb{R}^q}, \forall x \in U$$

c) f este de clasă C^1 și

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)}(x, f(x))}{\frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)}(x, f(x))}, \forall i = \overline{1, p}, \forall x \in U$$

$$\frac{\partial f_q}{\partial x_1}(x) = - \frac{\frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)}(x, f(x))}{\frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)}(x, f(x))}, \forall i = \overline{1, p}, \forall x \in U$$

Extreme cu legături

Fie $p \in \mathbb{N}^*, Q = E \subset \mathbb{R}^P, Q \neq \emptyset, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$.

Def

Suntem că a este:

- 1) pct. de minim local al lui f conditionat de A
dacă $\exists V \in \mathcal{V}_A$ a.i. $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in V \cap A$
- 2) pct. de maxim local al lui f conditionat de A
dacă $\exists V \in \mathcal{V}_A$ a.i. $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in V \cap A$
- 3) pct. de extrem local al lui f conditionat de A
dacă a este 1) sau 2)

Obs

Dacă $A = E$, se omite sintagma „cond. de A”

Denumire alternativă

Punctele de extrem local ale lui f conditionate de A s.n. și pcte. de extrem local ale lui f relative la A

Fie $1 \leq p \leq k \in \mathbb{N}$

$g_1, \dots, g_k : E \rightarrow \mathbb{R}$

Def

Dacă $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$, punctele de extrem local ale lui f cond. de A se numesc puncte de extrem local ale lui f cu legături $g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$

Pp, în continuare, că $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$, E este multime deschisă. și f, g_1, \dots, g_k sunt de clasă C^1 ($p \in E$)

Teorema urm. dă condiții necesare de existență pt. punctele de extrem local cu legături.

Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $a \in A$ și $g_1(a) = \dots = g_k(a) = 0$

Pp. că $\text{rang} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq p}} = k$ și răi a este pct. de extrem local al lui f conditionat de A

Afunci $(\exists) \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ a.i.

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(a) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(a) = 0, \\ \text{unde } L : E \rightarrow \mathbb{R}, L(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x) \end{cases}$$

Def

1) Un pct. $a = (a_1, \dots, a_p) \in E$ a.i. $g_1(a) = \dots = g_k(a) = 0$ c.i.e. $a \in A$,

$$\text{a.i. } \text{rang} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq p}} = k$$

și $(\exists) \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ o.i. A verif. cist. (1)
s.n. punct stationar al lui f cond. de A
(sau cu leg. $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$)

2) Nr. reale $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ s.n. multiplicatori lui Lagrange

3) Func. L s.n. lagrangeianul problemei de extreme

Obs

Valorile $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ se schimbă odată cu punctul stationar conditionat

Obs

Teorema prec. se poate reformula astfel:
Orice pct. de extrem local cond. este punct „stationar conditionat”

Obs

Reciproca este falsă

Algoritm pt. det. punctelor stationare conditionate

1) Se cons. func. $L : E \rightarrow \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x)$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nedeterminatii

2) Se formează sist.:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(x) = 0 \\ g_1(x) = 0 \\ \dots \\ g_k(x) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{daca } \text{se } \text{cavă } \text{sol.} \\ \text{acestuiu} \\ \text{(pt k ec. si pt k nec.)} \\ \downarrow \\ x_1, \dots, x_p \\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \end{array}$$

3) Dacă $(a_1, \dots, a_p, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e sol. a sist. de la 2)

și $\text{rang} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq p}} = k$ atunci (a_1, \dots, a_p) e pct. stationar al lui f cu leg. $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$

Obs

Printre aceste pcte. stationare cond., se pot afla și punctele de extrem local cond.

Cătăin acum condiții suficiente care să ne permită să identificăm dintre pcte. stat. cond., pe cele care sunt pcte. de extrem local rand.

Fie $a = (a_1, \dots, a_p) \in E$ un pct. stat. al lui f rand. de A.

Aceasta înseamnă că $a \in A$ c.i.e. $g_1(a) = \dots = g_k(a) = 0$,

$$\text{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i \leq k} = k \quad \text{s.i. } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

$$1 \leq j \leq p$$

a.i. a să fie sol. a sist. (1)

Pp. că lagrangeianul L ... este de clasă C^2 pe E

Diferențiem în punctul a relațiile sist. $\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \\ \dots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$ și obținem $\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) dx_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_p}(a) dx_p = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a) dx_1 + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial x_p}(a) dx_p = 0 \end{cases}$

Douăreces matricea acestui sistem liniar este

$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq p}}$ și rangul ei este k, putem exprima k diferențiale în func. de celelalte $p-k$

Pp. că det. urm. $\frac{\det(g_1, \dots, g_k)}{\det(x_{p-k+1}, \dots, x_p)}$ $a_1 \neq 0$ (rangul e k)

Exprimăm dx_{p-k+1}, \dots, dx_p în func. de dx_1, \dots, dx_{p-k}

$$\text{Putem scrie } \begin{cases} dx_{p-k+1} = \sum_{i=1}^{p-k} \theta_i^1 dx_i \\ \dots \\ dx_p = \sum_{i=1}^{p-k} \theta_i^p dx_i \end{cases} \quad (*)$$

Reamintim că $d^2 L(a) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$d^2 L(a)(u, v) = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i \cdot v_j$$

Fie $F(a) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $F(a)(u) = d^2 L(a)(u)^2$

$$= \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i u_j$$

$$\text{Putem scrie } F(a) = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j$$

Inlocuim în expresia lui $F(a)$ pe dx_{p-k+1}, \dots, dx_p cu (*) și:

def. $F(a)_{\text{leg.}} = \sum_{i,j=1}^{p-k} A_{ij} dx_i dx_j$, unde A_{ij} rez. din calcul

$$(F(a))_{\text{leg.}} : \mathbb{R}^{p-k} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(a)_{\text{leg.}}(u) = \sum_{i,j=1}^{p-k} A_{ij} u_i u_j$$

1) Dacă $F(a)_{\text{leg.}}(u) \geq 0$, (u), $u \in \mathbb{R}^{p-k}$

$$\text{s.i. } F(a)_{\text{leg.}}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^{p-k}},$$

atunci a e pct. de minimum local al lui f cu leg. $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$

2) Dacă $F(a)_{\text{leg.}}(u) \leq 0$, (u), $u \in \mathbb{R}^{p-k}$

$$\text{s.i. } F(a)_{\text{leg.}}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^{p-k}},$$

atunci a e pct. de maximum local al lui f cu leg. $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$

Denumire alt.

Pcte. stat. cond. s.n. s.i. pcte. critice cond.

Obs

în aplicații noastre avem $dx_i \cdot dx_j = dx_j \cdot dx_i$, (u)

Seminar 9

1. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția

$$a) \mathbb{R} : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2-x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$\text{Fie } y = \frac{x}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-y} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{2} \cdot \sum_n \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_n \frac{1}{2^{n+1}} x^n, \forall x \in (-2, 2)$$

$$x \in (-2, 2) \Rightarrow y \in (-1, 1)$$

$$b) f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1-x)$$

2) Stud. cont. lui f

$$b) \text{ Det. } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

c) Stud. dif. lui f

$$\text{unde: i) } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

so)

a) Vezi seminar 6

$$b) \text{ Fie } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)'_x = \frac{(xy)'_x \cdot (x^2+y^2) - (xy) \cdot (x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y + y^3 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)'_y = \frac{x(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + te_1) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (t, 0)) - f(0, 0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + te_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

$$\text{Aur ob} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2+y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ - cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ \Rightarrow f dif. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ - desc.

Stud. dif. lui f in (0,0)

f nu e cont. in (0,0)
 \Rightarrow f nu e dif. in (0,0) \square

ii) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 y^2}{x^8 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol.

a) f - cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Stud. cont. in (0,0)

V₁

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^5 y^2}{x^8 + y^4} - 0 \right| = \left| \frac{x^5 y^2}{x^8 + y^4} \right| = \frac{|x^5 y^2|}{x^8 + y^4} = |x| \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} \leq \frac{|x|}{2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \Rightarrow f \text{-cont. in (0,0)}$$

$\leq \frac{1}{2} \left(\text{expl: } \frac{x^8 + y^4}{2} \geq \sqrt{x^8 + y^4} = \frac{x^8 + y^4}{2} \geq x^4 y^2 / : x^8 + y^4 \right)$

V₂

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^5 y^2}{x^8 + y^4} - 0 \right| = \frac{|x^5 y^2|}{x^8 + y^4} = \frac{|x^5| \cdot |y^2|}{x^8 + y^4} = \left(\frac{|x|^8}{x^8 + y^4} \right)^{\frac{5}{8}} \cdot \left(\frac{|y|^4}{x^8 + y^4} \right)^{\frac{2}{8}} \cdot (x^8 + y^4)^{\frac{5}{8} + \frac{2}{8} - 1} =$$

$$= \left(\frac{x^8}{x^8 + y^4} \right)^{\frac{5}{8}} \cdot \left(\frac{y^4}{x^8 + y^4} \right)^{\frac{2}{8}} \cdot (x^8 + y^4)^{\frac{5}{8} - 1} \leq (x^8 + y^4)^{\frac{5}{8} - 1} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \Rightarrow f \text{ cont. in (0,0)}$$

$$\leq 1 \quad \leq 1$$

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{5x^4 y^2 (x^8 + y^4) - x^5 y^2 \cdot 8x^4}{(x^8 + y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^5 y (x^8 + y^4) - x^5 y^2 \cdot 4y^3}{(x^8 + y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + te_1) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ - cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ \Rightarrow f dif. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă

Stud. dif. lui f in (0,0)

Dacă f ar fi dif. în (0,0), atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(u,v) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) \left(\frac{u}{v} \right) \right] = uv + ov = 0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(0,y)}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^5 y^2}{x^8 + y^4} - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^5 y^2}{x^8 + y^4}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^2}{(x^2+y^2) \sqrt{x^2+y^2}}$$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$

Aveam $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^5 y_n^2}{(x_n^2+y_n^2) \sqrt{x_n^2+y_n^2}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^5} \cdot \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^9}}{\frac{2}{n^6} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{10}}}{2n^9 \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{Deci } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^2}{(x^2+y^2) \sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$$

Deci f nu este dif. în (0,0) \square

iii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^4+y^2} & ; (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x, y) = (0,0) \end{cases}$

Sol

a) f cont. pe $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

Stud. cont. lui f în (0,0)

Fie $(x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{y^3}{x^4+y^2} \right| = \frac{|y|^3}{x^4+y^2} = |y| \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\leq 1} \leq |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \Rightarrow f \text{ cont. în (0,0)}$$

(Expl. $x^4+y^2 \geq y^2 \Rightarrow \frac{y^2}{x^4+y^2} \leq 1$)

b) Rezolvăți voi! \square

1. a) Stud. cont. lui f

$$b) \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

c) Stud. dif. lui f

unde: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^4+y^2} & \text{c: } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{c: } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{0 \cdot (x^4+y^2) - y^3 \cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{-4x^3y^3}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2(x^4+y^2) - y^3 \cdot 2x}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + te_1) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \dots = 0$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont. in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\left\{ \Rightarrow f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă

Stud. dif. lui f în (0,0)

Dacă f ar fi dif. în (0,0), atunci $d(f(0,0)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(f(0,0))(u,v) = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] =$$

$$= 0 \cdot u + 1 \cdot v = v$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - d(f(0,0))(x,y)}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{y^3}{x^4+y^2} - 0 - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{y^3 - x^4y^2 - y}{x^4+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\left| \frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x^4y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{|x|^4|y|}{x^4+y^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2} |x| \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} |x| \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0$$
$$\leq \frac{1}{2} \quad (\text{Explic. } \frac{x^4y^2}{2} \geq \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2} = |x|)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{|x^4y|}{x^4+y^2} \quad (\text{Explic. } \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|)$$
$$\Rightarrow 1 \geq \frac{|x^4y|}{x^4+y^2}$$

Deci $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Leftrightarrow f \text{ dif. în (0,0)}$

$$\text{ii)} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^8}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (cop. cu func. e.l.)

Stud. cont. lui f in (0,0)

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^4 y^8}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{|x|^4 |y|^8}{\sqrt{x^2 + y^2}^8} = |y| \underbrace{\frac{|y|^4 |y|^4}{\sqrt{x^2 + y^2}^8}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{2}}} \leq |y| \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|y|}{\sqrt{2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \Rightarrow f \text{ cont. in } (0,0)$$

(Exp. $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq x^2 y^2$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2}} \geq |x| |y|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{|x| |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} x^4 y^8 \sqrt{x^2 + y^2} - x^4 y^8 \cdot 2x \cdot 2y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{t} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{0}{t} - 0 = 0$$

$$2. \text{ Fie } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Arătați că f e cont.

b) Det. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ și arătați că sunt continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

și nu sunt cont. in (0,0)

c) Arătați că f e dif.

a) f e cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Stud. cont. in (0,0)

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0| = |xy| \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq |xy| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \Rightarrow f \text{ cont. in } (0,0)$$

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + xy \left(\cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \cdot \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + xy \left(\cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \cdot \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0)+te_1) + f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) + f(0,0)}{t} = 0$$

Amen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy (\cos \frac{1}{x^2+y^2}) \cdot \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dots \dots \dots$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Arah. ca $\frac{\partial f}{\partial x}$ nu e cont. in $(0,0)$

$$Alegem (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{1}{2\sqrt{n}} \right) \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Amen $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(y_n \sin \frac{1}{x_n^2 + y_n^2} - \cos \left(\frac{1}{x_n^2 + y_n^2} \right) \cdot \frac{-2x_n^2 y_n}{(x_n^2 + y_n^2)^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{1}{(\frac{1}{2\sqrt{n}})^2 + (\frac{1}{2\sqrt{n}})^2} - \cos \left(\frac{1}{(\frac{1}{2\sqrt{n}})^2 + (\frac{1}{2\sqrt{n}})^2} \right) \cdot \frac{2 \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^2} = \\ &= 0 - \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2n\pi \cdot \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^3}{2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^4} = \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} (1 \cdot \sqrt{n}) = -\infty \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} \text{ nu e cont. in } (0,0)$$

Analog se arata ca $\frac{\partial f}{\partial y}$ este cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f dif. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ desc.

Stud. dif. lui f in (0,0)
Daca f ar fi dif in (0,0),

atunci $dF(0,0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$dF(0,0)(u, v) = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - dF(0,0)((x,y) - (0,0))|}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \sin \frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{1}{x^2+y^2}$$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\longrightarrow} 0 = f \text{ dif. in } (0,0)$$

(Expl. $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$)

3. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dif. si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, y_1, z) = f(x_1 y_1, x^2 + y^2 - z^2).$$

Arațati că f este dif. și $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1, z) - y_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1, z) + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z}(x_1, y_1, z) = 0$, $(x_1, y_1, z) \in \mathbb{R}^3$

Fie $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, y_1, z) = (x_1 y_1, x^2 + y^2 - z^2)$

$$f = f \circ g$$

Fie $u, v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x_1, y_1, z) = x_1 \cdot y_1$
 $v(x_1, y_1, z) = x^2 + y^2 - z^2$

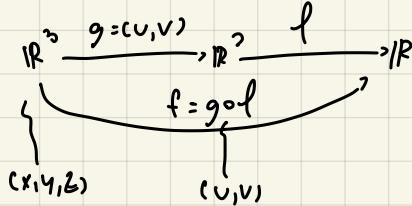
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_1, z) = (y_1, 2x) \quad \text{că } (x_1, y_1, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_1, y_1, z) = (x_1, 2y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x_1, y_1, z) = (0, 2z)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \text{ cont. pe } \mathbb{R}^3 \\ (\mathbb{R}^3 \text{ deschis}) \end{array} \right\} \Rightarrow g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3 \\ g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow f = f \circ g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1, z) &= \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x}(x_1, y_1, z) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x_1, y_1, z)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y_1, z) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x_1, y_1, z)) \frac{\partial v}{\partial x}(x_1, y_1, z) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x_1, y_1, z)) \cdot y_1 + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x_1, y_1, z)) \cdot 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1, z) &= \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y}(x_1, y_1, z) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x_1, y_1, z)) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y_1, z) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x_1, y_1, z)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x_1, y_1, z) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x_1, y_1, z)) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x_1, y_1, z)) \cdot 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(x_1, y_1, z) &= \frac{\partial(f \circ g)}{\partial z}(x_1, y_1, z) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x_1, y_1, z)) \cdot \frac{\partial u}{\partial z}(x_1, y_1, z) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x_1, y_1, z)) \cdot \frac{\partial v}{\partial z}(x_1, y_1, z) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x_1, y_1, z)) \cdot (-2z) \end{aligned}$$

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1, z) - y_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1, z) + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z}(x_1, y_1, z) = \dots = 0$$

4. Det. patle. de extrem local ale func. de mai jos si prec. natura lor:

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

\mathbb{R}^2 -desc., f . cont.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 4x^3 \quad (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} - \text{cont. pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{-desc.} \end{cases} \Rightarrow f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 4x^3 = 0 \\ -4y^3 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ y = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - y^3 = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-y^2) = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0, x=0 \\ y=1, x=1 \end{cases}$$

sau
 $y=-1 \quad x=-1$

Punctele crit. ale lui f sunt: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

obs ca f e de clasa C^2

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 0 \quad \Delta_2 = |0 \ 4| = -16 < 0 \stackrel{(0,0)}{\Rightarrow} \text{Nu e pct. de ext. local}$$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -12 < 0 \\ \Delta_2 &= 144 - 36 > 0 \end{aligned} \stackrel{\Delta_2 > 0}{\Rightarrow} (1,1) - \text{pct. de max. local}$$

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (-1,-1) \text{ e pct. de max. local}$$

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$

$$c) f: (\mathbb{R}, \mathbb{R})^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + z$$

$(\mathbb{R}, \mathbb{R})^3 \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Sol.

$(\mathbb{R}, \mathbb{R})^3$ descrește.

f este cont.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} \quad (\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R})^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \text{ cont. pe } (\mathbb{R}, \mathbb{R})^3 \\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})^3 \text{ descrește.} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ dif. pe } (\mathbb{R}, \mathbb{R})^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow -z^2 + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 (1 - z^2) = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow -x z^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x z^2 = y^2 \Rightarrow x = \frac{y^2}{z^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right. \\ -\frac{y}{z^2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{y}{z^2} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{z^2} \end{array} \right.$$

Singurul pt. crit al lui f este (1, 1, 1)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = \frac{2x}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = \frac{2y}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z)$$

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & -\frac{1}{z^2} \\ 0 & -\frac{1}{z^2} & \frac{2y}{z^3} \end{pmatrix}$$

$$Hf(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = 6 > 0$$

$$\Delta_3 = 6 - 2 - 2 = 2 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow (1, 1, 1) \text{ pt. de extr. min.} \end{array} \right\}$$

Curs 11

Ex

Fie $f: (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz$$

Să se determine punctele de extrem local ale lui f
cu legătura $xyz = 1$

Sol.

$E = (0, \infty)^3$ dex.

Fie $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = xyz - 1$

$$(g = g_1) \text{ și } A = \{(x, y, z) \in E \mid g(x, y, z) = 0\}$$

$$\begin{aligned} \text{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)\right) &= \\ &= \text{rang}(yz, xz, xy) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in E \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x} = y+z & \frac{\partial g}{\partial x} = yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x+z & \frac{\partial g}{\partial y} = xz \\ \frac{\partial f}{\partial z} = x+y & \frac{\partial g}{\partial z} = xy \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \text{ cont. pe } E$$

$$\begin{aligned} \text{Fie } L: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, z) &= f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = \\ &= xy + yz + xz + \lambda(xy - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z + \lambda yz = 0 \\ x+z + \lambda xz = 0 \\ x+y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Scadem prima ec. din
a doua și obtin:

$$\begin{aligned} x-y + \lambda z(x-y) &= 0 \\ \Rightarrow (x-y)(1+\lambda z) &= 0 \Rightarrow \\ x=y \text{ sau } \lambda z &= -1 \end{aligned}$$

Cazul 1

$$x=y$$

Din a 3-a ec. avem:

$$\begin{aligned} x+x+\lambda x^2 &= 0 \Rightarrow \\ x(2+\lambda x) &= 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{\lambda} \\ x \in (0, \infty) & \Rightarrow x = -\frac{2}{\lambda} \\ & \Rightarrow y = -\frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

Din prima ec. avem:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\lambda} + 2 + \lambda(-\frac{2}{\lambda}) - 2 &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{2}{\lambda} - 2 &= 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{2} \\ -\frac{2}{\lambda} = 1 & \Rightarrow \lambda = -2 \end{aligned}$$

$$\text{Deci } (x, y, z) = (1, 1, 1)$$

Singurul pct. stationar al lui f cu leg. $xyz = 1$
este $(1, 1, 1)$

$$\text{Avem } L(1, 1, 1) = xy + xz + yz - 2(xy - 1)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 - 2z = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1 - 2y = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1 - 2x = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}$$

$$(1, 1, 1) \in E$$

Obs. că L este de clasa C^2

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1, 1, 1) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1, 1, 1) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1, 1, 1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(1, 1, 1) = \dots = -1$$

$$\text{Fie } F_{(1, 1, 1)}: (\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F_{(1, 1, 1)}(u, v, w) = d^2L_{(1, 1, 1)}(u, v, w))^2$$

$$\begin{aligned} \text{Avem } F_{(1, 1, 1)} &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1, 1, 1) dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1, 1, 1) dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1, 1, 1) dz^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(1, 1, 1) dx dy + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(1, 1, 1) dy dz + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(1, 1, 1) dx dz = \\ &= -2(dx dy + dx dz + dy dz) \end{aligned}$$

Diferențiem legătura $xyz = 1$ în (x, y, z) și obtin:

$$yz dx + xz dy + xy dz = 0$$

În $(1, 1, 1)$ rel prec. devine:

$$dx + dy + dz = 0$$

$$\text{Avem } dz = -dx - dy$$

$$\begin{aligned} \text{Fie } F_{(1, 1, 1)} &= -2(dx dy + dx dz - dy dz) \\ &+ dy(-dx - dy) = \\ &= -2(dx dy - dx^2 - dy^2 - dx dy) \end{aligned}$$

$$-dy^2 \quad -$$

$$-2(dx^2 + dx dy + dy^2) =$$

$$= 2\left(\left(\frac{1}{2}dx + dy\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}dx\right)^2\right) \text{ evident!}$$

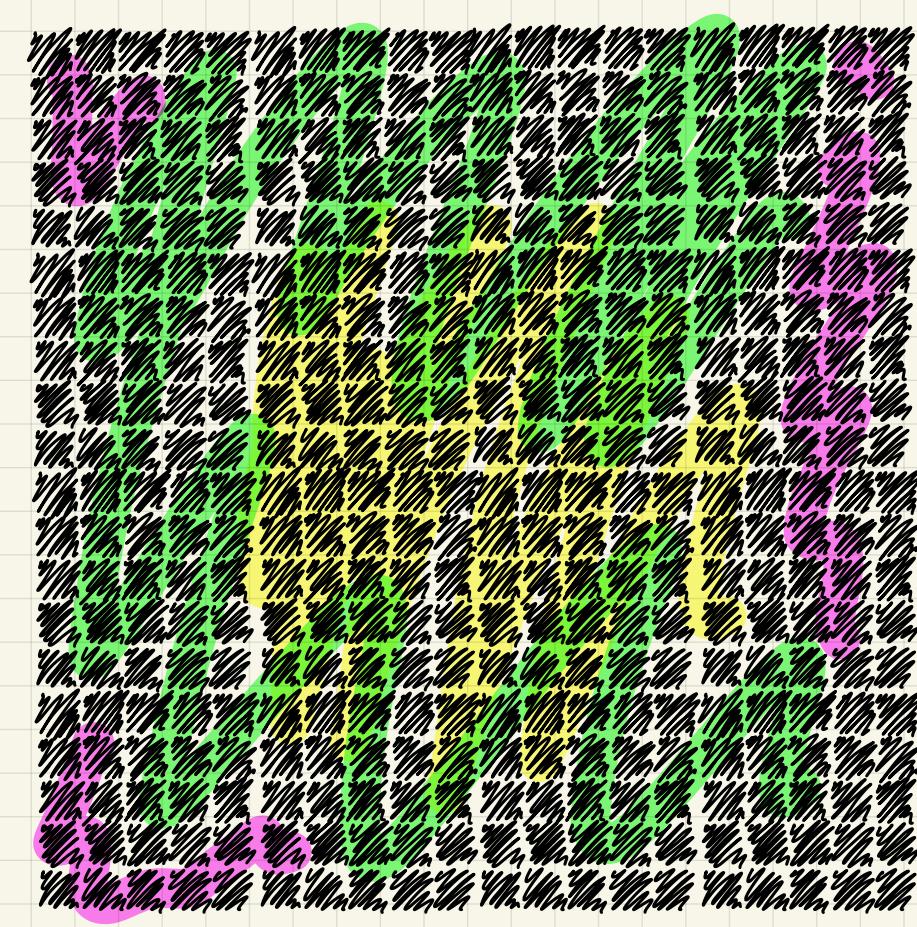
$$= 2\left(\frac{1}{2}dx + dy\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}dx\right)^2$$

$$F_{(1, 1, 1)}(u, v, w) = 2\left(\frac{1}{2}u_1 + u_2\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u_1\right)^2$$

$$F_{(1, 1, 1)}(u, v, w) \geq 0, \quad u, v, w \in \mathbb{R}^2$$

$$F_{(1, 1, 1)}(u, v, w) = 0 \Rightarrow u = (0, 0)$$

Deci $(1, 1, 1)$ este pct. de
min. local al lui f
cu leg. $xyz = 1$



Teorema Riemann pentru func. de o var. reală

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Def

1. S.n. divizuire a $[a, b]$, un sist. de puncte

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Notăm $D([a, b]) = \{ \Delta \mid \Delta \text{ div. a } [a, b] \}$

2. Numărul $\|\Delta\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$
s.n. norma div. Δ

3. S.n. sist. de puncte intermediare
asoc. div. Δ , un sist. de puncte:

$$\tilde{\xi} = (\tilde{x}_i)_{i=1, n} \text{ a.i. } \tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (\forall) i \in \overline{1, n}$$

4. Suma $\sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i)(x_i - x_{i-1})$ s.n.

Suma Riemann asoc. func. f ,

$$\text{div. } \Delta \text{ și s.p.i. } \tilde{\xi} = (\tilde{x}_i)_{i=1, n}$$

și s.n. cu $\sigma_\Delta(f, \tilde{\xi})$

Def

Spunem că f e integr. Riemann dacă

(a) $I \in \mathbb{R}$ a.i. (b) $\varepsilon > 0$, (c) $\int_\varepsilon > 0$ o.i.

(c) D e $D([a, b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și

(d) $\tilde{\xi} = (\tilde{x}_i)_{i=1, n}$ s.p.i., avem $|I - \sigma_\Delta(f, \tilde{\xi})| < \varepsilon$

Obs

Nr. real I din def. prec., dacă există, este unic
și se notează $I = \int_a^b f(x) dx$

Teorema

f integr. Riemann $\Rightarrow f$ mărg. (\Leftarrow)

Teorema

f cont. $\Rightarrow f$ integr. Riemann (\Leftarrow)

Teorema

f monotonă $\Rightarrow f$ integr. Riemann (\Leftarrow)

Teorema de permutare a lim. cu integr.

Fie sirul de func. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o.i.:

1) f_n integr. R, cu $\int_a^b f_n = I_n$

$$2) f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

Atunci f e integr. R

$$\text{și } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Ex

$$\text{Def. } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}} dx$$

Sol

Fie $f_n: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}, \forall n \in \mathbb{N}$

Cum din seminar știi că $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$,

unde $f: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$

f_n e cont. $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f_n$ integr. R, $\forall n \in \mathbb{N}$

Concl. T.P.L.i. avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = 0 \quad \square$

Def

O mult. A C R s.n. neglijabilă Lebesgue dacă
pt. orice $\varepsilon > 0$, există un sir $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervale
desc. și mărg. a.i. :

$$1. A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon, l(I_n) = \text{lung. inf. } I_n$$

$$l((c, d)) = d - c$$

Obs

1. Orice submultime a unei mult. neglij. Lebesgue
este neglij. Lebesgue

2. Orice mult. cel mult numărabilă este
neglij. Lebesgue

3. Orice reunire cel mult numărabilă de
mult. neglij. Lebesgue este neglij. Lebesgue

Notatie

$D_f = \{x \in [a, b] \mid f \text{ nu e cont in } x\}$
multimea discontinuitatilor lui f)

Criteriu lui Lebesgue de integrabilitate R

Sunt echiv.:

1. f integr. R
2. f mărg. și Df neglij. Lebesgue

Exercițiu

Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ \neq, & x=0 \end{cases}$$

Arată că f e integr. R

Soluție

$|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f$ mărg.

$Df \subset \{0\}$

finită \Rightarrow neglij. Lebesgue

Cf. Crit. lui Lebesgue de integr. R
avem că f integr. R \square

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mărg.

Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,

$\Delta \in D([a, b])$

Fie $M_i = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ $\forall i = 1, \dots, n$
și $m_i = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ $\forall i = 1, \dots, n$

Definiție

1. $S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$
cșuma Darboux superioară
asoc. lui f și Δ)

2. $s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$

(—||— inf —||—)

3. $\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \{S_\Delta(f) \mid \Delta \in D([a, b])\}$

cșintegr. Darboux superioară a func. f)

4. $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup \{s_\Delta(f) \mid \Delta \in D([a, b])\}$
(—||— inf —||—)

Obs

1) $s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f)$

2) $\underline{\int_a^b} f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx$

Criteriu lui Darboux de integrabilitate R

Sunt echiv.:

1) f integr. R

$$2) \underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$$

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta \in D([a, b]) \text{ a. i.}$

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$$

4. $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta \in D([a, b]) \text{ a. i. } (\forall i) \Delta \in D([a, b])$

cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

Obs

Dacă una dintre afirmații de mai sus e adevarată, $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Exercițiu

Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & x \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Dacă $\underline{\int_a^b} f(x) dx, \overline{\int_a^b} f(x) dx$ și prec. dacă f e integr. R

Soluție

$|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ = mărg.

Fie $\Delta : -1 = x_0 < \dots < x_n = 1, \Delta \in D([-1, 1])$

$$M_i = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1, \forall i = 1, \dots, n$$

(deoarece între orice 2 nr. reale există inf. nr. Q)

$$m_i = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = -1, \forall i = 1, \dots, n$$

(deoarece între orice 2 nr. reale există inf. nr. Q)

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = 1 - (-1) = 2$$

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = -2$$

Cum Δ a fost aleasă arbitrară:

$$\overline{\int_{-1}^1} f(x) dx = \inf \{S_\Delta(f) \mid \Delta \in D([-1, 1])\} = \inf \{2 \mid \Delta \in D([-1, 1])\} = 2$$

$$\underline{\int_{-1}^1} f(x) dx = \inf \{s_\Delta(f) \mid \Delta \in D([-1, 1])\} = \inf \{-2 \mid \Delta \in D([-1, 1])\} = -2$$

$\underline{\int_{-1}^1} f(x) dx \neq \overline{\int_{-1}^1} f(x) dx \Rightarrow f$ nu e integrabilă R

Integrale improprii

I. Fie $-\infty < a < b \leq +\infty$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
o func. integr. R pe orice interval $[c, d]$, $a < c < b$

Def

Dacă există $\lim_{d \rightarrow b^-} \int_a^d f(x) dx \in \bar{\mathbb{R}}$, val. ei s.n. integr. improprie
a lui f pe $[a, b]$ și s.n.
 $\int_a^b f(x) dx$

Def

1. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x) dx$ e conv.
dacă $\lim_{d \rightarrow b^-} \int_a^d f(x) dx$ e finită

2. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x) dx$ e div.
dacă nu e conv.

II. Fie $-\infty \leq a < b < +\infty$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
o func. integr. R pe orice interval $[c, b]$, $a < c < b$

Def

Dacă există $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx \in \bar{\mathbb{R}}$, val. ei s.n. integr. improprie
a lui f pe $[a, b]$ și s.n.
 $\int_a^b f(x) dx$

Def

1. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x) dx$ e conv.
dacă $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$ e finită

2. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x) dx$ e div.
dacă nu e conv.

III. Fie $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ și $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, o func.
integr. pe orice interval (c, d) , $a < c < d < b$

Def

Dacă există $\lim_{\substack{c \rightarrow a^+ \\ d \rightarrow b^-}} \int_c^d f(x) dx \in \bar{\mathbb{R}}$, val. ei s.n. integr. improprie
a lui f pe (a, b) și s.n.
 $\int_a^b f(x) dx$

Def

1. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x) dx$ e conv.
dacă $\lim_{\substack{c \rightarrow a^+ \\ d \rightarrow b^-}} \int_c^d f(x) dx$ e finită

2. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x) dx$ e div.
dacă nu e conv.

Prop

Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$), o func.
integr. R pe orice interval (c, d) , $a < c < d < b$.

Dacă $\int_a^b f(x) dx$ e integr. improprie

$\int_a^b f(x) dx$ și $\int_b^b f(x) dx$ sunt conv.,

atunci și integr. improprie $\int_a^b f(x) dx$ e conv.

$$\text{și } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^b f(x) dx$$

Criterii de conv. pt. integrale improprio

Vom enunța crit. de conv. doar pt. func.

def. pe $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

1. Crit. de comp. cu inegalități

Fie $f, g: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, 2 func. integr. R pe orice interval $[a, d]$, $a < d < \infty$

a.i. $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, \infty)$

1) Dacă $\int_a^\infty g(x) dx$ e conv., atunci $\int_a^\infty f(x) dx$ e conv.

2) Dacă $\int_a^\infty f(x) dx$ e div., atunci $\int_a^\infty g(x) dx$ e div.

2. Crit. de comp. cu limite

Fie $f, g: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, 2 func. integr. R pe orice interval $[a, d]$, $a < d < \infty$ a.i.

1) $g(x) > 0, \forall x \in [a, +\infty)$

2) $(\exists) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0, \infty]$

i) Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci

$\int_a^\infty f(x) dx$ și $\int_a^\infty g(x) dx$ au aceeasi natură

ii) Dacă $l=0$ și $\int_a^\infty g(x) dx$ e conv.,

atunci $\int_a^\infty f(x) dx$ e conv.

iii) Dacă $l=\infty$ și $\int_a^\infty g(x) dx$ e div.,

atunci $\int_a^\infty f(x) dx$ e div.

3. Crit. integral al lui Cauchy

Fie $f: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, o func. desc.

cdeci este integr. R pe orice interval $[a, d]$, $a < d < \infty$.

Atunci: $\int_a^\infty f(x) dx$ și seria de nr. reale $\sum_{n=p}^\infty f(n)$ au aceeasi natură
 $(\forall p \in [a, \infty) \cap \mathbb{N})$

Functiile Gamma și Beta

(Γ) (Β)

Def

1) $I: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$,

$$I(x) = \int_0^x t^{x-1} e^{-t} dt$$

2) $B: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

Prop

1) $I(1) = 1$

2) $I(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

3) $I(1+x) = x I(x), \forall x \in (0, \infty)$

În particular, $I(1+n) = n! \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

$$4) I(x) I(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (\forall x \in (0, 1))$$

$$5) B(x, y) = B(y, x) \quad (\forall x, y \in (0, \infty))$$

$$6) B(x, y) = \frac{I(x) I(y)}{I(x+y)} \quad (\forall x, y \in (0, \infty))$$

$$7) B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2x-1} (\sin t)^{2y-1} dt, \quad (\forall x, y \in (0, \infty))$$

Denumire alt.:

func. I și B s.n. și integrale euleriane

Ex:

$$\text{Def } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

$$\text{Sol: } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_1^d \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= \lim_{d \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^d = \lim_{d \rightarrow \infty} (-\frac{1}{d} + 1) = 1 \quad \square$$

Seminar 11

1. Det. pcte. de extrem local ale func. și prec. natura lor, unde:

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4$

Sol.

\mathbb{R}^2 desc.

f cont.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} &\text{ cont. pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 &\text{ desc.} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &f \text{ dif.} \\ &\text{pe } \mathbb{R}^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{array} \right. \\ &\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \end{aligned} \right\}$$

Singurul pct. critic al lui f este $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \quad (\forall) (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Obs. că f e de clasă C^2

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad (\forall) (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{Crit. nu decide}$$

$$f(x,y) \geq f(0,0) \quad (\forall) (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

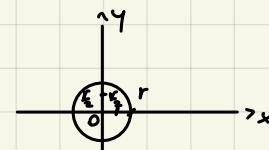
$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &\geq 0 \quad \Rightarrow (0,0) \text{ pct. de min.} \\ &\quad \text{global al lui } f \\ &\Rightarrow (0,0) \text{ pct. de min.} \\ &\quad \text{local al lui } f \quad \square \end{aligned}$$

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - y^4$

Sol.

ca la punctul $a, (0,0)$ e singurul pct. critic și criteriul cu Hessiana nu decide

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 - y^4 \\ &\stackrel{x=0}{=} 0 \end{aligned}$$



$$(\forall) r > 0, \text{ avem } \left(\frac{r}{2}, 0\right) \in B((0,0), r) \text{ și } \left(0, \frac{r}{2}\right) \in B((0,0), r)$$

$$(\forall) r > 0, \text{ avem } f\left(\frac{r}{2}, 0\right) = \frac{r^4}{16} > 0 = f(0,0)$$

$$\text{și } f\left(0, \frac{r}{2}\right) = -\frac{r^4}{16} < 0 = f(0,0)$$

Deci $f(0,0)$ nu e pct. de extrem local al lui f

2. Sa se arate ca ec. $x \cos y + \cos z + 2 \cos x = 0$
 defineste intr-o vec. a lui $(1,0,0)$ func.
 impl. csi unicat $z = z(x,y)$ si det. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0), \frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ si $d_2(1,0)$

$$a) z(1,0) = 0$$

$$b) F(x,y,z(x,y)) = 0, \forall (x,y) \in U$$

c) ...

Pt. a det. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$ si $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ avem zvarante:

Ve (fol. a) si c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y, z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y, z(x,y))} = -\frac{\cos y - z(x,y) \sin x}{-y \sin z(x,y) + \cos x}, \forall (x,y) \in U \\ &= 1) \frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{\cos 0 - z(1,0) \sin 1}{-0 \sin z(1,0) + \cos 1} = -\frac{1}{\cos 1} \\ &\quad (z(1,0) = 0) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \dots = -\frac{1}{\cos 1}$$

z de clasa $C^1 \Rightarrow$ 2 dif. (pe U)

$$\begin{aligned} d_2(1,0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, d_2(1,0)(v,v) &= \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} \right] = \\ &= -\frac{v}{\cos 1} - \frac{v}{\cos 1} \text{ (i.e. } d_2(1,0) = -\frac{1}{\cos 1} dx - \frac{1}{\cos 1} dy) \end{aligned}$$

Ve (fol. a) si b)

Concl. b, avem $F(x,y, z(x,y)) = 0, \forall x, y \in U$, deci

$$x \cos y + y \cos z + z(x,y) \cos x - 1 = 0 \quad (\forall) (x,y) \in U \quad (\star)$$

Derivam parcial relatiunea (\star) in raport cu x si obt.:

$$\cos y - y \sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \sin x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) (-y \sin z \cdot \cos x + \cos x) = -\cos y + z(x,y) \sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{-\cos y + z(x,y) \sin x}{-y \sin z \cdot \cos x + \cos x} \quad (\forall) (x,y) \in U$$

C, se repeta V,

3. Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + xz + yz$. Def patr. de ext. local, cu legaturile $-x+y+z=1$ și $x-z=0$

Sol.

\mathbb{R}^3 desc.

Fie $g, h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = -x+y+z-1$

$$h(x,y,z) = x-z$$

și $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0 \text{ și } h(x,y,z) = 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y+z \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -1 \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x+z \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x+y \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial h}{\partial z} = -1$$

Toate deriv. parțiale de mai sus sunt cont.

Fie $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z) =$
 $= xy + xz + yz + \lambda(-x+y+z-1) + \mu(x-z)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-\lambda+\mu=0 \\ x+z+\lambda=0 \\ x+y+\lambda-\mu=0 \\ -x+y+z=1 \\ x-z=0 \Rightarrow x=z \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow y=1 \\ \Rightarrow \lambda=2 \\ \Rightarrow \mu=2 \end{array} \right.$$

Adunăm ec. 1 și 3 și obținem:

$$x+2y+z=0 \xrightarrow[y=1]{x=z} 2x=-2 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow z=-1$$

$$x+z+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$$

$$y+z-\lambda+\mu=0 \Rightarrow \mu=2$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(-1,1,-1) & \frac{\partial g}{\partial y}(-1,1,-1) & \frac{\partial g}{\partial z}(-1,1,-1) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(-1,1,-1) & \frac{\partial h}{\partial y}(-1,1,-1) & \frac{\partial h}{\partial z}(-1,1,-1) \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Sigurul patr. stationar al lui f cu leg. $g(x,y,z)=0$ și $h(x,y,z)=0$ este $(-1,1,-1)$

Arem: $L(x,y,z) = xy + xz + yz + 2(-x+y+z-1) + 2(x-z)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} &= 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} &= 1 = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} && \text{Deriv. parțiale} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} &= 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} &= 1 = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} && \text{sunt cont.} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} &= 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} &= 1 = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} && \therefore L \text{ de clasa } C^2 \end{aligned}$$

Fie $F_{(-1,1,-1)}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F_{(-1,1,-1)}(u) = d^2L_{(-1,1,-1)}(u)^2$, i.e. $F_{(-1,1,-1)} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(-1,1,-1)dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(-1,1,-1)dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(-1,1,-1)dz^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(-1,1,-1)dxdy + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(-1,1,-1)dx dz + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(-1,1,-1)dy dz = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

Diferențiem leg. din enunț în (x_1, y_1, z_1) și obtii:

$$\begin{cases} -1dx + 1dy + 1dz = 0 \\ 1dx - 1dz = 0 \end{cases}$$

în punctul stat. $(-1, 1, -1)$, sistemul devine:

$$\begin{cases} -dx + dy + dz = 0 \\ dx - dz = 0 \Rightarrow dz = dx \Rightarrow dy = 0 \end{cases}$$

Fie $F(-1, 1, -1) \log^{z^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(-1, 1, -1) \log = 2(dx \cdot 0 + 0 \cdot dz + dx \cdot dr) = 2dx^2 \quad (\text{i.e. } F(-1, 1, -1) \log|_{\mathbb{R}^2} (u) = 2u^2)$$

$F(-1, 1, -1) \log(u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}$

$F(-1, 1, -1) \log(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$\left. \begin{array}{l} \text{⇒ } (-1, 1, -1) \text{ este pct. de min. local} \\ \text{al lui } f \end{array} \right\}$

CURS 12

Integrarea func. de mai multe variabile

Obs

Totuște intervalele de forma $[a_1, b_1], [a_1, b_1], [a_1, b_1]$
sunt considerate cu $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i$

Obs

Lucrăm cu sp. metric (\mathbb{R}^n, d_2) cu $n \in \mathbb{N}^*$
 d_{not}

Def

1) D mult. de forma $D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$
s.n. dreptunghi

$$D(\mathbb{R}^n) = \{D \subset \mathbb{R}^n \mid D \text{ dreptunghi}\}$$

2) O mult. de forma $E = \bigcup_{i=1}^p D_i$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ și $D_i \in D(\mathbb{R}^n)$ cu $i=1, p$
s.n. mult. elementara.

$$\tilde{E}(\mathbb{R}^n) = \{E \subset \mathbb{R}^n \mid E \text{ mult. el.}\}$$

3) Fie $D = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \in D(\mathbb{R}^n)$

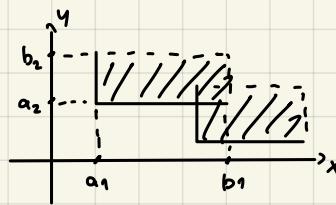
$$\text{Numărul } \text{vol}(D) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

s.n. volumul lui D

4) Fie $E = \bigcup_{i=1}^p D_i \in \tilde{E}(\mathbb{R}^n)$ a.i. $D_i \in D(\mathbb{R}^n)$ cu $i=1, p$

și $D_i \cap D_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

$$\text{vol}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^p \text{vol}(D_i) \text{ s.n. volumul lui } E$$



Prop

Orice mult. el. poate fi scrisă ca reuniune finită
de dreptunghiiuri disjuncte 2 cu 2. Deci putem
defini $\text{vol}(E)$ pt. orice $E \in \tilde{E}(\mathbb{R}^n)$.

Fie $A \subset \mathbb{R}^n, A$ mărg.

Def

$$\mu^*(A) = \inf \{ \text{vol}(F) \mid F \in \tilde{E}(\mathbb{R}^n), A \subset F \}$$

(măsură Jordan exteriorează a lui A)

$$\mu_*(A) = \sup \{ \text{vol}(E) \mid E \in \tilde{E}(\mathbb{R}^n), E \subset A \}$$

(măsură Jordan inferioară a lui A)

Obs

$$\mu_*(A) \leq \nu^*(A)$$

Def

Suntem că A este măsurabilă jordan dacă $\mu_*(A) = \nu^*(A)$

Notatie

$$J(\mathbb{R}^n) = \{ A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ măsurabilă jordan}\}$$

Def

Dacă $A \in J(\mathbb{R}^n)$, valoarea comună $\mu_*(A) = \nu^*(A)$
se numește măsură jordan a lui A și se notează cu $\mu(A)$

Prop

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărg. Atunci

- 1) $\nu^*(A) \leq \nu^*(\text{Fr}(A)) + \mu_*(\bar{A})$
- 2) $\nu^*(\bar{A}) = \mu_*(A)$
- 3) $\mu_*(A) = \mu_*(\bar{A})$

Exemplu de mult. măsurabile Jordan / nemăsurabile

1. Fie $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

A este mărg., deoarece A ⊂ [0,1]

Justificare

$$\nu^*(A) = \nu^*(\bar{A}) = \nu^*([0,1]) = \nu^*([0,1]) = \nu^*([0,1]) = \mu([0,1]) = 1 - 0 = 1$$

$$\mu_*(A) = \mu_*(\bar{A}) = \mu_*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu_*(A) < \mu^*(\bar{A}) \Rightarrow A \notin J(\mathbb{R}^n)$$

Prop

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărg. Sunt echiv.

- 1) $A \in J(\mathbb{R}^n)$
- 2) $\bar{A}, \bar{\bar{A}} \in J(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\bar{A}) = \mu(\bar{\bar{A}})$
- 3) $\text{Fr}(A) \in J(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\text{Fr}(A)) = 0$

Prop

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$

1) Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $B \subset \mathbb{R}^q$ mărg.

Atunci $A \times B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ este mărg. și avem ineq.:

$$\begin{aligned} \mu^*(A \times B) &\leq \mu^*(A) \cdot \mu^*(B) \\ \mu_*(A \times B) &\geq \mu_*(A) \cdot \mu_*(B) \end{aligned}$$

2) Fie $A \in J(\mathbb{R}^p)$ și $B \in J(\mathbb{R}^q)$.

Atunci $A \times B \in J(\mathbb{R}^{p+q})$ și $\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$

2. $A = \{x, 0\} \mid x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$

$\underset{[0,1] \cap \mathbb{Q}}{\overset{\text{''}}{\times}} \text{go3}$

Audem că $A \in J(\mathbb{R}^2)$

Justificare

$A \subset [0,1] \times [0,1] = A$ mărg.

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(\bar{A}) = \mu^*([0,1] \times \text{go3}) \leq \mu^*([0,1]) \cdot \mu^*(\text{go3}) = \mu^*([0,1]) \cdot \mu^*(\text{go3}) = \\ &= (\mu([0,1])) \cdot \mu(\text{go3}) = \\ &= (1-0) \cdot \mu^*(\text{go3}) = \mu^*(\text{go3}). \end{aligned}$$

Pt. orice $\varepsilon > 0$, avem $\text{go3} \subset [0, \varepsilon]$,

$$\text{deci } \mu^*(\text{go3}) \leq \text{vol}([0, \varepsilon]) = \varepsilon$$

Așadar $\mu^*(\text{go3}) = 0$, deci $\mu^*(A) = 0$

Deci $\mu_*(A) = \mu^*(A) = 0$

Deci $A \in J(\mathbb{R}^2)$ \square

Prop

1) Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integr. R

și $f(x_1) \in g(x_1), \forall x \in [a, b]$, atunci

mult: $\int_{f,g}^t g(x,y) dx \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], f(x_1) \leq y \leq g(x_1) \subset \mathbb{R}^2$
 e măsurabilă Jordan și $\mu(\int_{f,g}^t) = \int_a^b (g(x_1) - f(x_1)) dx$

2) Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e integr. R, atunci

$Gf = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$ e măs. $\int Gf = 0$

Exe

Fie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq x^2\}$

Ast. că $A \in J(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(A) = 0$

Sol

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$|y| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq y \leq x^2$$

Dacă $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], -x^2 \leq y \leq x^2\}$

Fie $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = -x^2, g(x) = x^2 \Rightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in [-1, 1]$$

f, g cont. $\Rightarrow f, g$ integr. R

$$A = \int_{f,g}^t$$

$$\text{Deci } A \in J(\mathbb{R}^2) \text{ și } \mu(A) = \int_{-1}^1 (g(x_1) - f(x_1)) dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3} \square$$

Def

Fie $X \neq \emptyset, \emptyset \neq \mathcal{A} \subset P(X)$ și $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]]$

Spunem că tripletul $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ e sp. cu măsură aditivă dacă:

1) $\forall a, b \in \mathcal{A}$, avem $a \cup b \in \mathcal{A}$ și $A \setminus B \in \mathcal{A}$ (cărează că $A \cap B \in \mathcal{A}$)

2) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ s.f. $A \cap B = \emptyset$ avem $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$

Prop

$(\mathbb{R}^n, \sim(\mathbb{R}^n), \text{vol})$ și $(\mathbb{R}^n, \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), \mu)$ sunt sp. cu măsură aditivă

Def

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Spunem că $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1, p}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

e o descompunere Jordan a lui A dacă:

$$1) A = \bigcup_{i=1}^p A_i;$$

2) $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j$, avem $\mu(A_i \cap A_j) = 0$

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{P} = (A_i)_{i=1, \overline{P}} \subset J(\mathbb{R}^n)$ o descompunere Jordan a lui A

Def

1) $\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ \text{diam}(A_i) \mid i=1, \overline{P} \}$, unde $\text{diam}(A_i) = \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in A_i \} \mid i=1, \overline{P}$
(normă lui A)

2) O familie $(x_i)_{i=1, \overline{P}} \subset \mathbb{R}^n$ s.n. sistem de puncte intermediare asoc.
desc. (u: \mathcal{P} dacă $x_i \in A_i \forall i=1, \overline{P}$)

Obs

1) Pt orice $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și pt. orice $\varepsilon > 0$, $\exists \mathcal{P}$, o descompunere Jordan a lui A
o.i. $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$

2) Dacă $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{P} = (A_i)_{i=1, \overline{P}}$ e o descompunere Jordan a lui A,
atunci $\mu(A) = \sum_{i=1}^P \mu(A_i)$

Exemplu

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ și $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$

Să stim că A e masurabil Jordan

Fie Δ : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$, o
diviziune a intervalului $[a, b]$

Familia $\mathcal{P} = \{ [x_{i-1}, x_i] \mid i=1, \overline{P} \}$ e desc. J. a lui A

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{P} = (A_i)_{i=1, \overline{P}}$ o descompunere J. a lui A

și $(d_i)_{i=1, \overline{P}}$ un sist. de p.c. inter. asoc. lui \mathcal{P} .

Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Def

Suma $\sum_{i=1}^P f(d_i) \nu(A_i)$ s.n. suma Riemann asoc. func. f,
desc. \mathcal{P} și s.p.i. $(d_i)_{i=1, \overline{P}}$ și s.n. cu $\bar{V}_{f, \mathcal{P}}(f, (d_i)_{i=1, \overline{P}})$

Să spunem că f e integrabil R (pe A) dacă $\exists I \in \mathbb{R}$ o.i.

(*) $\varepsilon > 0$, $\exists \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ cu prop. ca (*) $\mathcal{P} = (A_i)_{i=1, \overline{P}}$
desc. J. a lui A cu $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$ și $(d_i)_{i=1, \overline{P}}$
s.p.i. asoc. lui \mathcal{P} , avem că $|I - \bar{V}_{f, \mathcal{P}}(f, (d_i)_{i=1, \overline{P}})| < \varepsilon$

Obs

Nr. real I din def. prec., dacă există, este unic

Notatie

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_A f(x) dx$$

Notatii

- 1) Dacă $n=2$, scriem $I = \iint_A f(x, y) dx dy$
- 2) Dacă $n=3$, scriem $I = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$

Obs

în contextul def. prec. avem $\int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \bar{V}_{f, \mathcal{P}}(f, (d_i)_{i=1, \overline{P}})$

Exc

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(A) = 0$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.
Arață că f e integrabilă pe R și $\int_A f(x) dx = 0$

Sol

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=1,p}$ descompunere a lui A

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A_i) = 0, \forall i = 1, p$$

Fie $(x_i)_{i=1,p}$ s.p.i. asociate lui \mathcal{A}

$$\nabla_{\mathcal{A}}(f, (x_i)_{i=1,p}) = \sum_{i=1}^p f(x_i) \underbrace{\mu(A_i)}_0 = 0$$

Deci f e integrabilă pe R și $\int_A f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{A}\| \rightarrow 0} \nabla_{\mathcal{A}}(f, (x_i)_{i=1,p}) = 0 \quad \square$

Exc

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a$
Arață că f e integrabilă pe R și $\int_A f(x) dx = a\mu(A)$

Sol

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=1,p}$ o descompunere a lui A

$\exists_i (x_i)_{i=1,p}$ s.p.i. asociate lui \mathcal{A}

$$\nabla_{\mathcal{A}}(f, (x_i)_{i=1,p}) = \sum_{i=1}^p f(x_i) \mu(A_i) = a \sum_{i=1}^p \mu(A_i) = a\mu(A)$$

Deci f e integrabilă pe A și $\int_A f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{A}\| \rightarrow 0} \nabla_{\mathcal{A}}(f, (x_i)_{i=1,p}) = a\mu(A) \quad \square$

Prop

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

1) Dacă f e cont. și mărg., atunci f e integrabilă pe R

2) Dacă A e compactă și f e cont., atunci f e integrabilă pe R

Prop

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$ și $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, 2 func. integrabile pe R

Atunci $f \pm g$ și $a \cdot f$ sunt integrabile pe R și $\int_A (f \pm g)(x) dx = \int_A f(x) dx \pm \int_A g(x) dx$

$$\text{și } \int_A a f(x) dx = a \int_A f(x) dx$$

Dacă în plus $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$

$$\text{atunci } \int_A f(x) dx \leq \int_A g(x) dx$$

Prop

Fie $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă.

Atunci f este integrabilă pe A și pe B .

Dacă în plus, $\mu(A \cap B) = 0$, atunci $\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx$

Prop

Fie $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită.

și integrabilă pe A și pe B . Atunci f este integrabilă pe $A \cup B$.

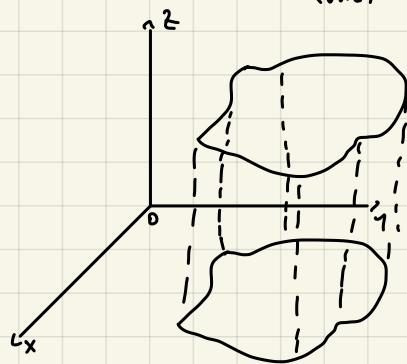
Dacă în plus, $\mu(A \cap B) = 0$, atunci $\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx$

Interpretare geometrică a integralei multiple

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă.

1) Dacă $n=2$ și $f(x, z) \geq 0 \forall (x, z) \in A$,

atunci $\iint_A f(x, z) dx dz$ reprezintă volumul corpului cuprins între planul xoy și graficul funcției f .



2) Dacă $n=2$, atunci $\iint_A 1 dx dy$ reprezintă aria multiplă a lui A .

3) Dacă $n=3$, atunci $\iiint_A 1 dx dy dz$ reprezintă volumul lui A .

Teorema lui Fubini

Fie $B \subset \mathbb{R}^n$ compactă și măsurabilă. și $\alpha, \beta: B \rightarrow \mathbb{R}$ cont.

a.i. $\alpha(x) \leq \beta(x), \forall x \in B$

Fie $A = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) \in B \text{ și } \alpha(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) \leq x_j \leq \beta(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$
Unde $(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$

Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ cont. Atunci $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ este compactă și măsurabilă,

f este integrabilă pe A și $\int_A f(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_1 \dots dx_{n+1} = \int_B \int_{\{x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}\}} f(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_j dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_{n+1}$

cazuri particolare ale teoremei pr.

1. Integrala dubla

i) Dacă $A = [a, b] \times [c, d]$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e cont., atunci A e mult. comp. și măs. J. și

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

ii) Dacă $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, unde $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cont. și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e cont., atunci A e mult. comp. și măs. J. și

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

iii) Dacă $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [c, d], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$, unde $\varphi, \psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ cont. și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ cont., atunci A e mult. comp. și măs. J.

$$\text{și } \iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

2. Integrala triplă

i) Dacă $A = [a, b] \times [c, d] \times [k, l]$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e cont., atunci A e mult. comp. și măs. J. și

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_k^l f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

ii) Fie $B \subset \mathbb{R}^2$ o mult. comp. și măs. J. și $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in B, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$, unde $\varphi, \psi: B \rightarrow \mathbb{R}$ cont.

Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ cont.

Atunci A e mult. comp. și măs. J. și

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_B \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy, \text{ etc.}$$

1. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y$

Araț. că $(0,0)$ este pct. stationar

al lui f cu leg. $y=0$ și nu este pct. de ext. local al lui f

Sol.

Fie $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = y$ și

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\} = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

\mathbb{R}^2 desc.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad (\forall) (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Toate deriv. parțiale
de mai sus sunt cont.
(decid f este de clasă C^1)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

Fie $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $L(x,y) = x^3 + y + xy = f(x,y) + yg(x,y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1 \\ y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right.$$

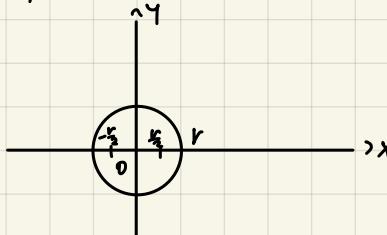
$$\text{rang} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \right) = \text{rang} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1, \quad (\forall) (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \supset \{(0,0)\}$$

Singurul pct. stationar al lui f cu leg. $g(x,y) = 0$ este $(0,0)$

Araț. că $(0,0)$ nu este pct. de ext. local al lui f cu leg. $g(x,y) = 0$

(*) $(x,y) \in A$, avem $f(x,y) = f(x,0) = x^3$

$$f(0,0) = 0$$



(**) $r > 0$, avem $(\frac{r}{2}, 0)$ și $(-\frac{r}{2}, 0) \in A \cap B(0,0), r)$

$$f(-\frac{r}{2}, 0) < f(0,0) < f(\frac{r}{2}, 0), \quad (\forall) r > 0$$

Deci $(0,0)$ nu e pct. de ext. local al lui $f|_A$ (f cu leg. $g(x,y) = 0$)

2. Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$

Det. ptfle. de ext. global și val. ext.

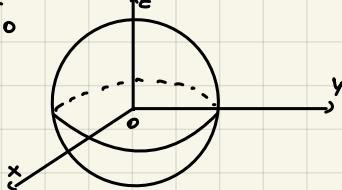
ale lui $f|_{B([0,0,0],1)}$ unde $B([0,0,0],1) = \overline{B}([0,0,0],1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Sol.

f cont.

$B([0,0,0],1)$ compactă (închisă și mărg.) $\Rightarrow f$ mărg. și atinge marginile

Notăm $(0,0,0) \neq 0$



Căutăm ptfle. critice și staționare ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$)
și calc. valorile func. și alegem max. și min.

Notăm $h = f|_{B(0,1)}$

$B(0,1)$ - desc.

h - cont.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y \quad (\forall (x,y,z) \in B(0,1))$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 6z$$

$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}$ cont. pe $B(0,1) \Rightarrow h$ -dif. pe $B(0,1)$
 $B(0,1)$ desc.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \\ \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (0,0,0) \text{ ptf. critic}$$

3. Fie $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, 2x + 2y + 2z = 1\}$

și $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x + y + z$. Det. val. ext. ale lui $f|_A$
(globale)

Sol.

$A \subset B([0,0,0],1) \Rightarrow A$ mărg.

Fie $g_1, g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $g_2(x,y,z) = 2x + 2y + 2z - 1$

$$A = g_1^{-1}(\{0\}) \cap g_2^{-1}(\{0\})$$

g_1, g_2 cont.

$\{0\}$ - inc. $\Rightarrow g_1^{-1}(\{0\})$ închisă și $g_2^{-1}(\{0\})$ $\Rightarrow A$ închisă

Continuăți voi.

4. Stud. posibilitatea aplicării Teoremei de permutare a limitelor cu integrala
pt. limitele de mai jos și apoi calculați-le:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x \sin(nx)}{n^2 + nx^2} dx$$

Sol.

Fie $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x \sin(nx)}{n^2 + nx^2}$, $(n) \in \mathbb{N}^*$
 f_n cont. $\Rightarrow f_n$ integr. R, (n) , $n \in \mathbb{N}^*$

Conv. s.

Fie $x \in [0,1]$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x \sin(nx)}{n^2 + nx^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad (n) \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s} f, f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$$

Conv. u.

$$\sup_{x \in [0,1]} (|f_n(x)| - f(x)) = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x \sin(nx)}{n^2 + nx^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f.$$

Deci putem aplica th. de perm. a lim. cu integrala

și avem că:

1) f e integr. R

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x \sin(nx)}{n^2 + nx^2} dx = \int_0^1 0 dx = 0 \quad \square$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx(x^2 - x^2)^n dx$$

Sol.

Fie $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(x^2 - x^2)^n$, $(n) \in \mathbb{N}^*$

f_n cont. $\Rightarrow f_n$ integr. R $(n) \in \mathbb{N}^*$

c.s.

Dacă $x \in [0,1]$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

Fie $x \in (0,1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{f_n(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(nx)^n (1-x^2)^{n+1}}{n x^n (1-x^2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(nx)^n (1-x^2)^{n+1}}{n} = 1-x^2 < 1$$

Concl. c.v.d. rap. pt. siruri de nr. poz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

Deci $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, unde $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

C.U.

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} n x (1-x^2)^n \geq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

\downarrow
 $x = \frac{1}{n}$

$$\text{Decoare } \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \quad \text{si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = e^0 = 1 \neq 0$$

Deri avem $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{v} f$

Așadar nu putem aplica th. de perm. a lim. cu integrală

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n x (1-x^2)^n dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^1 n (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^n dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2(n+1)} \int_0^1 ((1-x^2)^{n+1})' dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2(n+1)} (1-x^2)^{n+1} \Big|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{dif. de } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0) \quad \square \end{aligned}$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$

Sol.

Fie $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \ln(1+x^n)$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

C.S. f_n - cont. $\Rightarrow f_n$ - integr. R

$$\text{Fie } x \in [0,1] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \ln 2, & x=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s} f, \text{ unde } f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \ln 2, & x=1 \end{cases}$$

C.U.

$$\begin{array}{l} f_n \text{ - cont.}, (\forall n \in \mathbb{N}^*) \\ f_n \text{ nu e cont. (in 1)} \end{array} \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{v} f$$

Așadar nu putem aplica th. de perm. a lim. cu integrat.

$$0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n, \quad (\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

\downarrow
 $n \rightarrow \infty$

$$\text{Deri: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0 \quad (= \int_0^1 f(x) dx = 0)$$

5

Det.

$$a) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^d = \lim_{d \rightarrow \infty} \arctan d = \frac{\pi}{2}$$

$$b) \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 e^x dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} e^x \Big|_c^0 = \lim_{c \rightarrow -\infty} (1 - e^c) = 1 - 0 = 1$$

$$c) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{d \rightarrow 1} \int_0^d \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{d \rightarrow 1} \arcsin x \Big|_0^d = \lim_{d \rightarrow 1} (\arcsin d - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$d) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_1^{\frac{1}{2}} t^{-2} dt = \lim_{c \rightarrow 0} -\frac{1}{t} \Big|_1^{\frac{1}{2}} = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} + \frac{1}{\ln 1} \right) = -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln 2} \quad \square$$

$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
 $x=c \Rightarrow t = \ln c$
 $x=\frac{1}{2} \Rightarrow t = \ln \frac{1}{2}$

$$e) \int_0^1 \frac{1}{x^5} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_0^1 x^{-5} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4x^4} \Big|_0^1 \right) = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4c^4} \right) = +\infty \quad \square$$

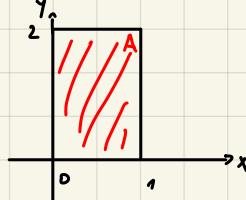
Curs 13

Ex.

a) $\iint_A (2x+y) dx dy$

$A = [0,1] \times [0,2]$

Sol.



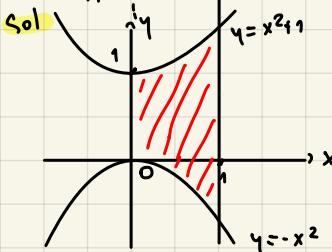
$A = [0,1] \times [0,2] \Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, și A compactă

Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x+y$

f cont.

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x+1} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\left(2x+y \right) \Big|_{y=0}^{y=2x+1} \right] dx = \\ &= \int_0^1 (4x+1) dx = \left. 2x^2 + 2x \right|_0^1 = 4 \quad \square \end{aligned}$$

b) $\iint_A x dx dy$, unde A este mult. plană marginală de $y = x^2 + 1$, $y = -x^2$, $x = 0$ și $x = 1$



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], -x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$

Fie $\alpha, \beta: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(x) = -x^2$, $\beta(x) = x^2 + 1$

α, β - cont.

$A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și A compactă

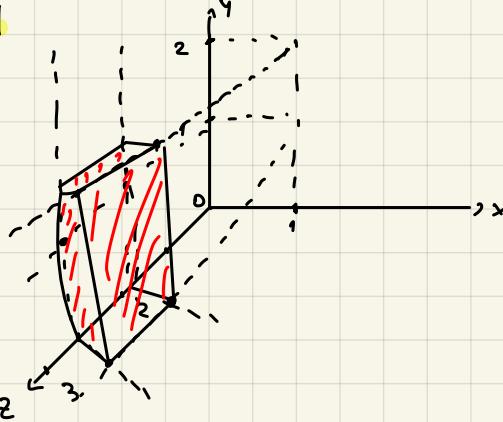
Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$

f cont.

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} x dy \right) dx = \int_0^1 \left(xy \Big|_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}+1} \right) dx = \int_0^1 (\sqrt{x}x + x^3) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \square$$

c) $\iint_A f(x,y) dxdy$, unde $A = [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$

Sol.



$$A = [0,1] \times [1,2] \times [2,3] \Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3) \text{ și } A \text{ comp.}$$

Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y$

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y,z) dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_2^3 y dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_1^2 y^2 \Big|_{z=2}^{z=3} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 y^2 dy \right) dx = \int_0^1 \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 dx = \int_0^1 \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Lucrăm în sp. metrică (\mathbb{R}^n, d_2)
"not"

Prop.

Fie $\phi \neq A \subset \mathbb{R}^n$ o mult. convexă și mtrg.

Atunci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

Def

Fie $\phi \neq A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ și $h: A \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$h = (h_1, \dots, h_n)$ o func. care admete

toate deriv. partiale în punctul a .

$$\text{Matricea } \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \text{ s.n.}$$

matricea jacobiană
(sau matricea Jacobis)

Def. matricei

C, jacobianul lui h în a

a (îi h în a și s.n cu $J_h(a)$)

Teorema de schimbare ale variabile - Varianta 1

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V mult. desc.,

$h: U \rightarrow V$ un difeomorfism de clasa C^1
(i.e. h e bij. și h, h^{-1} sunt de clasa C^1),

$\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.i. $A \subset U$ și;

$f: h(A) \rightarrow \mathbb{R}$ o func. integr. R și
mărg. cărem din cele de mai sus că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$)

Atunci func. $(f \circ h) \cdot |\det J_h|: A \rightarrow \mathbb{R}$ e integr. R și

$$\text{mărg. și } \int_{h(A)} f(y) dy = \int_A (f \circ h)(x) \cdot |\det J_h(x)| dx$$

Def

O mult. $A \subset \mathbb{R}^n$ s.n. neglij. Lebesgue dacă

$\forall \epsilon > 0$, $\exists (\exists)(D_k)_{k \geq 0} \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ a.s.

$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$ și $\sum_{k=0}^{\infty} \text{vol}(D_k) < \epsilon$

Obs

1) Orice submult. a unei mult. neglij. Lebeg este,
la rândul ei, neglij. Loeb este

2) Orice mult. c.m. numărabilă este neglij. Lebeg

3) Orice reunire c.m. numărabilă de mult. neglij. Lebesgue
este neglij. Lebesgue

4) Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.i. $N(A) = 0$.

Atunci A este neglij. Loeb

Teorema deschimbare ale variabilelor. Varianta 2

c Teorema lui Pejsier

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V deschise, $h: U \rightarrow V$

un difeomorfism de clasa C^1 a.i. Fie V e neglij. Loebeske,

$\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.i. $A \subset U$, h și $|\det J_h|$ sunt mărg. pe A și;

$f: h(A) \rightarrow \mathbb{R}$ integr. R și mărg.

c din cele de mai sus avem că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

Atunci func. $(f \circ h) \cdot |\det J_h|: A \rightarrow \mathbb{R}$ e integr. R și

$$\text{mărg. și } \int_{h(A)} f(y) dy = \int_A (f \circ h)(x) \cdot |\det J_h(x)| dx$$

Urmări standard de variabilă pentru integrală dublă

1. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta.$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta.$$

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (putem avea $\alpha = \beta = 0$).

Fie $\phi \neq A \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integr. R si mărg.



$$S.V. \begin{cases} x = \alpha + r \cos \theta \\ y = \beta + r \sin \theta, \quad r \in [0, \infty), \quad \theta \in [\bar{0}, 2\pi]. \end{cases}$$

Avem $\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B r f(\alpha + r \cos \theta, \beta + r \sin \theta) dr d\theta$, unde B se găsește din condiția $(x, y) \in A$. $B \subset [0, \infty) \times [\bar{0}, 2\pi]$

2. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare generalizate

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (putem avea $\alpha = \beta = 0$) și $a, b \in (0, \infty)$. Fie $\phi \neq A \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integr. R si mărg.

$$S.V. \begin{cases} x = \alpha + ar \cos \theta \\ y = \beta + br \sin \theta, \quad r \in [0, \infty), \quad \theta \in [\bar{0}, 2\pi] \end{cases}$$

Avem $\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\alpha + ar \cos \theta, \beta + br \sin \theta) dr d\theta$,

unde B se găsește din condiția $(x, y) \in A$, $B \subset [0, \infty) \times [\bar{0}, 2\pi]$

exerc. Calcula $\iint_A y \, dx \, dy$, unde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Sol.: A mărg. și convexă $\Rightarrow A \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$.
 A închisă și mărginită $\Rightarrow A$ compactă

Ei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y$ - funcț.

S.V. $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, r \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$x, y \in A \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \leq 4 \Rightarrow r^2 \leq 4 \Rightarrow r \in [-2, 2] \cap r \in [0, \infty) \Rightarrow r \in [0, 2].$$

Fie $B = [0, 2] \times [0, 2\pi]$.

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \iint_B r f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, dr \, d\theta = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\theta \right) r^2 (-\cos \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \int_0^2 r^2 (-1)(1-1) \, dr = 0.$$

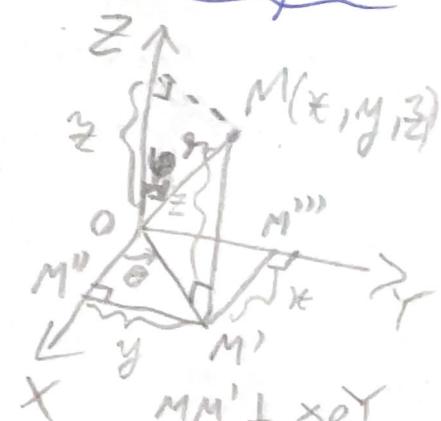
[h: (0, 2) \times (0, 2 π) \rightarrow \mathbb{R}^2 sau \mathbb{R}
 deschisă, h $\rightarrow A \setminus ([0, 2] \times \{0\})$
 pt. a fol. teorema Fuglesig
 deschisă h: (0, ∞) \times (0, 2 π) \rightarrow \mathbb{R}^2
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \neq 0$]

schimbarea standard de variabilă în integrata triplă

1) Trucerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice

$$\begin{aligned} z &= r \cos \varphi & \sin \varphi &= \frac{OM'}{r} \Rightarrow OM' = r \sin \varphi \\ x &= (r \sin \varphi) \cos \theta = r \cos \theta \sin \varphi \\ y &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

[deducere intuitivă]



Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = \gamma = 0$). Fie
 $\phi \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă.

S.V. $\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi + \alpha, & r \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi] \\ y = r \sin \theta \sin \varphi + \beta \\ z = r \cos \varphi + \gamma \end{cases}$

Avem $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B r^2 \sin \theta \cdot f(\alpha + r \cos \theta \sin \varphi, \beta + r \sin \theta \sin \varphi, \gamma + r \cos \varphi) dr d\theta d\varphi$, unde B se găsește din condiția $(x, y, z) \in A$.

2. Transformarea de la coordonate carteziene la coordonate sferice generalizate

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$. Fie $\phi \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă.

S.V. $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \sin \varphi \\ y = b + r \sin \theta \sin \varphi \\ z = c + r \cos \varphi \end{cases}, \quad r \in [0, \infty], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$

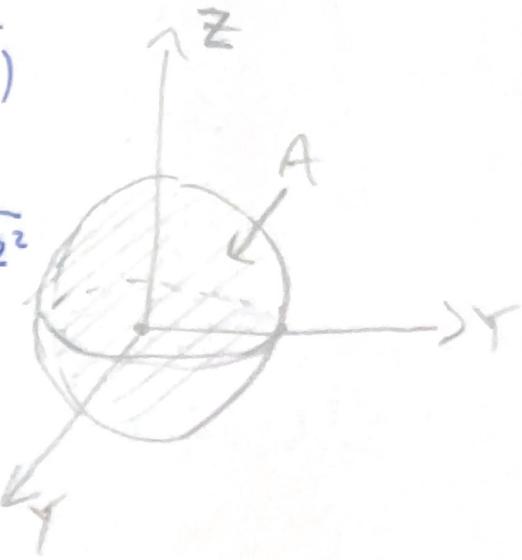
Avem $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B abc r^2 \sin \varphi f(a + r \cos \theta \sin \varphi, b + r \sin \theta \sin \varphi, c + r \cos \varphi) dr d\theta d\varphi$, unde B se găsește din condiția $(x, y, z) \in A$.

Exercice Calculer $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, où où
 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Sol. A convient de noter $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$
 A est compacte.

Fixons $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 f est continue.

S.V. $\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, r \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi] \\ z = r \cos \varphi \quad \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$



$$\begin{aligned} (x, y, z) \in A &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \\ &+ r^2 \cos^2 \varphi \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \sin^2 \varphi (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) + r^2 \cos^2 \varphi \leq 1 \\ &\Leftrightarrow r^2 \leq 1 \Leftrightarrow r \in [0, 1] \end{aligned}$$

$r \in [0, \infty)$

$$\text{Fixons } B = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_B r^2 \sin \varphi f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) dr d\theta d\varphi \\ dr d\theta d\varphi &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi r^2 \sin \varphi \sqrt{r^2} dr \right) d\varphi \right) d\theta dr = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^3 (-\cos \varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \right) d\theta dr = \int_0^1 2r^3 e \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi \end{aligned}$$

Teorema (Crit. lui Lebesgue de integrabilitate Riemann)

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$. Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ marginita. Pentru \exists :

1) f int. R

2) D_f e neg. Lebesgue, unde $D_f = \{x \in A \mid f(x) \text{ este continuu}\}$

Ex. Fie $f: [\bar{0}, 1] \times [\bar{2}, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x + 3y, & (x, y) \in [\bar{0}, 1] \times [\bar{2}, 3] \setminus \{(0, 2)\} \\ 1, & x = 0 \text{ și } y = 2. \end{cases}$$

Studiati integr. R. a funct. f .

$$\underline{\text{Sol}} \quad : \quad |f(x, y)| = |2x + 3y| \leq 2|x| + 3|y| \leq 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11,$$

$$\forall (x, y) \in [\bar{0}, 1] \times [\bar{2}, 3] \setminus \{(0, 2)\} \quad \left. \begin{array}{l} |f(x, y)| \leq 11, \\ |f(0, 2)| = 1 \leq 11 \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x, y)| \leq 11, \forall (x, y) \in [\bar{0}, 1] \times [\bar{2}, 3] \Rightarrow f \text{ mărg.}$$

$D_f \subset \{(0, 2)\}$. $\{(0, 2)\}$ finită $\Rightarrow \{(0, 2)\}$ neg. Leb.

$\Rightarrow D_f$ negl. Lebesgue. Astăzi f e int. R. conform crit. de integrabilitate Riemann.

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ a.fct. margin. și

$\mathcal{A} = (A_i)_{i=1, n}^n$ o descomp. a lui A

Notăm $M_i = \sup \{f(x) \mid x \in A_i\} \quad \forall i \in \overline{1, n}$, și

$m_i = \inf \{f(x) \mid x \in A_i\} \quad \forall i \in \overline{1, n}$.

Def.: 1) $\Delta_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^n m_i M(A_i)$ suma Darboux inferioră asociată lui f și \mathcal{A} .

2) $S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^n M_i m(A_i)$ suma Darboux superioră

3) $\underline{\int}_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \sup \{ S_{\mathcal{P}}(f) | \mathcal{P} \text{ disc. 3. adm. A} \}$
integrala Darboux inferioră, asociată la funcție f
int. Darboux superioră

4) $\overline{\int}_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \inf \{ S_{\mathcal{P}}(f) | \mathcal{P} \text{ disc. Jordan a lui } A \}$

Teorema (Crit. lui Darboux de integrabilitate Riemann)

Urmt. arhivat:

1) f integrabilă.

2) $\underline{\int}_A f(x) dx_1 \dots dx_n = \overline{\int}_A f(x) dx_1 \dots dx_n$, c.a.z. în care avem $\underline{\int}_A f(x) dx = \overline{\int}_A f(x) dx$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{P}_{\varepsilon}$ disc. Jordan a lui A a.i. $S_{\mathcal{P}_{\varepsilon}}(f) - \underline{\int}_A f(x) dx < \varepsilon$

- $\underline{\int}_{\mathcal{P}_{\varepsilon}}(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0$ a.i. $\forall \mathcal{P}$ disc. J. a lui A cu proprietatea ca $\|\mathcal{P}\| < \delta_{\varepsilon}$ avem $S_{\mathcal{P}}(f) - \underline{\int}_A f(x) dx < \varepsilon$

(Arb. 1) $\underline{\int}_{\mathcal{P}}(f) \leq S_{\mathcal{P}}(f)$ 2) $\underline{\int}_A f(x) dx = \overline{\int}_A f(x) dx_1 \dots dx_n$

Exemplu Fie $A \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$ a.i. $\mu(A) > 0$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x, y \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{altele} \end{cases}$. Determina $\overline{\int}_A f(x, y) dx dy$, precizând că f integrabilă Riemann.

Sol. $|f(x, y)| \leq 1 \forall (x, y) \in A \Rightarrow f$ mărginită.

Fie $\mathcal{P} = (A_i)_{i=1, n}$ a disc. Jordan a lui A și

$M_i = \sup \{ f(x, y) | (x, y) \in A_i \}$ $\forall i = 1, n$,

$m_i = \inf \{ f(x, y) | (x, y) \in A_i \}$ $\forall i = 1, n$.

$$S_A(f) = \sum_{i=1}^n M_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n m_i \mu(A_i) \quad (A \text{ acil})$$

$$s_A(f) = \sum_{i=1}^n m_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n m_i \mu(A_i) > 0$$

$M(A_i) > 0 \Rightarrow \mu_{\mathbb{Q}}(A_i) > 0 \Rightarrow \exists D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), D \subset A_i:$
 $\text{vol}(D) > 0.$

Für $B_i = \{(x, y) \in A_i \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$, $C_i = \{(x, y) \in A_i \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ und } y \notin \mathbb{Q}\}$

Penetr. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ a.i. $\mu(A_i) > 0$, avem $D \cap B_i \neq \emptyset \forall i$

$\forall D \cap C_i \neq \emptyset$. Deci $\forall i = 1, \dots, n$ a.i. $\mu(A_i) > 0$, avem $M_i = 1$
 $m_i = 0$. Aşağıda $s_A(f) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot M_i = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \mu(A)$ ni
 $s_A(f) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \mu(A_i) = 0$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \inf \{ S_D(f) \mid D \text{ direk. yordamla } A \} \\ = \inf \{ \mu(A) \} = \mu(A). \quad \iint_A f(x, y) dx dy = \sup \{ \dots \} = \sup \{ 0 \} = 0$$

Seminar 1101

1. Det. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

Sol

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} \arctg(x^2) \right]_0^a = \\ &= \frac{1}{2} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} (0 - \arctg^2 a^2) \right] = -\frac{1}{2} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} (\arctg(a^2)) \right] = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^d \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$$

2. Stud conv. urm. integr. improprii:

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{4/3}} dx$

Fie $f, g: [1, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^{4/3}}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$

Audem $f(x) \leq g(x)$ ($\forall x \in [1, \infty)$)

$$\int_1^{\infty} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3} x^{-3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Deci $\int_1^{\infty} g(x) dx$ este conv.

Concl. crit. de comp. cu ineq. avem ca $\int_1^{\infty} f(x) dx$ este conv.

b) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

Sol

Fie $f, g: [2, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = 1 \in (0, \infty)$$

Concl. crit. de comp. cu lim. avem ca:

$$\int_2^{\infty} f(x) dx \sim \int_2^{\infty} g(x) dx$$

$$\int_2^{\infty} g(x) dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_2^d \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_2^d x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} 2 \sqrt{x} \Big|_2^d = \lim_{d \rightarrow \infty} 2(\sqrt{d} - 2) = \infty$$

$$\int_2^{\infty} f(x) dx \text{ div.} \Rightarrow \int_2^{\infty} f(x) dx \text{ - div.}$$

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

$$d) \int_1^\infty \sin \frac{1}{x^2} dx$$

Sol. $\frac{1}{x^2} \in (0, 1] \text{ cu } x \in (1, \infty)$

$(0, \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \sin \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (1, \infty)$$

Fie $f: (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \sin \frac{1}{x^2}$

$$\begin{array}{l} x \mapsto \sin x \text{ cresc.} \\ (0, \frac{1}{2}) \quad \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2} \text{ desc.} \\ (1, \infty) \quad \mathbb{R} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sin x \text{ cresc.} \\ \frac{1}{x^2} \text{ desc.} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ este desc.}$$

Conform crit. integral al lui Cauchy

$$\text{avem ca } \int_1^\infty f(x) dx \sim \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$$

Fie $x_n = \sin \frac{1}{n^2}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ si $y_n = \frac{1}{n^2}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0, \infty)$$

Conform crit. de comp. cu limite,

$$\text{avem ca } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \text{conv. c serie arm. gen. cu } \alpha = 1/2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2} \text{ conv. } \square$$

3) Folosind, eventual, func. I^q : B, dat:

$$a) \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_1^\infty \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} I^1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

S.V. $x^2=t$
 $\Rightarrow x=\sqrt{t}$
 $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$
 $x=0 \Rightarrow t=0$
 $x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$

b) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$

$$c) \int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{I(\frac{1}{2})}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{6!}{2^{\frac{1}{2}}} \quad \square$$

S.V. $2x=t \Rightarrow x=\frac{t}{2}$
 $\Rightarrow x=\frac{t}{2}$
 $dx = \frac{1}{2} dt$
 $x=0 \Rightarrow t=0$
 $x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$

$$d) \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} \cdot t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \quad \square$$

S.V. $x^2=t \Rightarrow x=\sqrt{t}$
 $\Rightarrow x=\sqrt{t}$
 $dx = \frac{1}{2} dt$
 $x=0 \Rightarrow t=0$
 $x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$

$$e) \int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx = 2 \int_0^1 \frac{u t^2}{\sqrt{2-u^2}} dt = \int_0^1 \frac{u t^2}{\sqrt{2(1-t)}} dt = \frac{8}{\sqrt{2}} \int_0^1 u^{1+\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt - \frac{8}{\sqrt{2}} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{2}} dt$$

S.V. $t=\frac{x}{2} \Rightarrow x=2t \quad dx=2dt$
 $\Rightarrow x=0 \Rightarrow t=0$
 $x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 1$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} B(3, \frac{1}{2}) = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{16}{15} = \frac{128}{15\sqrt{2}} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

$$B(3, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(3) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3 + \frac{1}{2})} = \frac{2! \cdot \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{5}{2})}}{\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{7}{2})}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}} = \frac{16}{15}$$

$$\Gamma(3 + \frac{1}{2}) = \Gamma(1 + 2 + \frac{1}{2}) = (2 + \frac{1}{2}) \Gamma(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{2} \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$$

$$f_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\frac{5}{2}} (\cos)^{\frac{3}{2}} dt$$

Sol

$$2x-1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$2y-1 = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{7}{4}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2-\frac{3}{4}-1} (\cos t)^{2-\frac{5}{4}-1} dt \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi\sqrt{2}}{32} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{64}$$

$$B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{6}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2!} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{64}$$

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

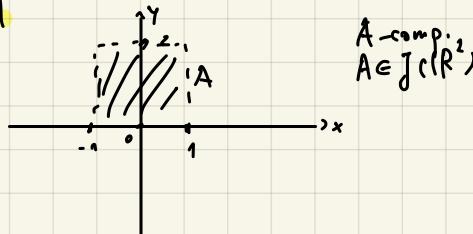
$$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{4})} = \frac{3}{16} \cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6\pi}{16\sqrt{2}} = \frac{6\pi\sqrt{2}}{32} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16} \quad \square$$

a) Det:

$$a_1 \text{ SSA } y dx dy, \text{ unde } A = [-1, 1] \times [0, 2]$$

Sol

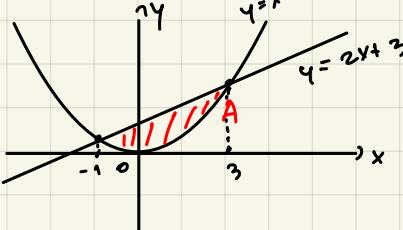


$$\text{Fie } f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = y$$

f-cont.

$$\Rightarrow \text{SS}_A f(x, y) dx dy = \text{SS}_A y dx dy = \int_{-1}^0 \left(\int_0^{2x+3} y dy \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x+3} dx = \int_{-1}^0 2x+3 dx = 2x \Big|_{-1}^0 = 4 \quad \square$$

$$b. \text{ SSA } x dx dy, A - \text{mult. plană margin. de } y = x^2 \text{ și } y = 2x+3$$



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [-1, 3], x^2 \leq y \leq 2x+3\}$$

$$\text{Fie } \alpha, \beta : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x) = x^2, \beta(x) = 2x+3$$

α, β cont $\Rightarrow A \in J(\mathbb{R}^2), A$ comp.

$$\text{Fie } f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x$$

f-cont

$$\begin{aligned} \text{SS}_A f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^3 \left(\int_{x^2}^{2x+3} x dy \right) dx = \int_{-1}^3 xy \Big|_{x^2}^{2x+3} dx = \\ &= \int_{-1}^3 (-x^3 + 2x^2 + 3x) dx = \dots = \end{aligned}$$

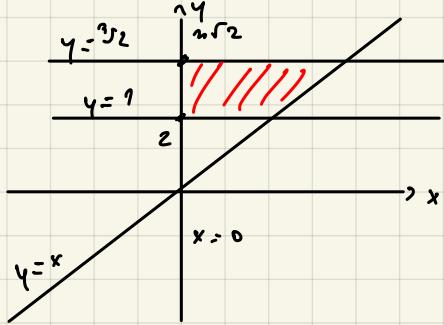
Sol Det. pctile. de intersecție dintre

$$y = x^2 \text{ și } y = 2x+3$$

$$\begin{aligned} \int y = x^2 \\ y = 2x+3 \Rightarrow x^2 = 2x+3 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \\ (x+1)(x-3) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 3 \Rightarrow y = 9 \end{aligned}$$

$$c) \text{ SSA } x dx dy, A - \text{mult. plană lim. de } y = -x^2 - x + 2 \text{ și } y = x - 1$$

d) $\iint_A y \, dx \, dy$, mult. plană mrg. de $x=0, y=1, y=\sqrt[3]{x}, y=x$



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [1, \sqrt[3]{x}], 0 \leq x \leq y^3\}$$

Fie $f, g : [1, \sqrt[3]{x}] \rightarrow \mathbb{R}$. $f(x)=0, g(x)=y$

f, g cont.

$A \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$ și compact.

Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$

f cont.

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\sqrt[3]{x}} (\int_0^y x \, dx) \, dy =$$

Curs 14

**Teorema de permutare a limitei cu integrala,
Cazul multidimensional**

Fie $\rho \in \mathbb{N}^*, \emptyset \neq A \subset J(\mathbb{R}^2)$, $f_n, f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ a.s. :

1) f_n integr. R si mărg. (pe A)

2) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

Afuncii f este integr. R si mărg. si

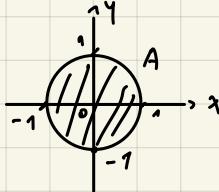
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_A f_n(x) dx = S_A f(x) dx$$

Exercițiu

Fie $A = B((0,0), 1) = \overline{B}(0,0, 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\text{Det. } \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_A \frac{\cos(n(x+y)) + 2(x^2 + y^2)}{n^2 + nx^2 + y^2} dx dy$$

Sol



A convexă și mărg. $\Rightarrow A \in J(\mathbb{R}^2)$

A compactă

$$\text{Fie } f_n: A \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x,y) = \frac{\cos(n(x+y)) + 2(x^2 + y^2)}{n^2 + nx^2 + y^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

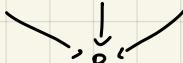
f_n cont. pe A ne \mathbb{N}^* $\Rightarrow f_n$ integr. R si mărg. (cu) ne \mathbb{N}^*
 $A \in J(\mathbb{R}^2)$ si comp.

C.5

Fie $(x,y) \in A$

$$0 \leq |f_n(x,y)| = \frac{|\cos(n(x+y))| + 2(x^2 + y^2)|}{n^2 + nx^2 + y^2} \leq \frac{|\cos(n(x+y))| + 2(x^2 + y^2)}{n^2 + nx^2 + y^2} \leq \frac{1+2}{n^2} = \frac{3}{n^2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Aveam $0 \leq |f_n(x,y)| \leq \frac{3}{n^2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$



Dar $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x,y)| = 0$. Prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x,y) = 0$

Asadar $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, unde $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 0$

C.v

$$\sup_{(x,y) \in A} |f_n(x,y) - f(x,y)| = \sup_{(x,y) \in A} \left| \frac{\cos(n(x+y)) + 2e^{x^2+y^2}}{n^2 + x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{3}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

Concl. Th. de perm. a lim. cu integr. avem ca' f e integr. R si mrg.

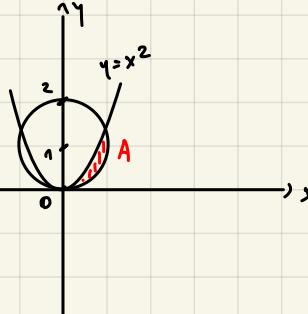
$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x,y) dx dy = \int_A f(x,y) dx dy = 0 \quad \square$$

Seminar 1h

1. Det:

$$\text{a)} \int_A (1-y) dx dy, unde$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y-1)^2 \leq 1, y \leq x^2, x \geq 0\}$$



Det. poite. de inter. dintre $x^2 + (y-1)^2 = 1$ si $y = x^2$

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2x^2 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$$

$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 1$
 $x_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$
 $x_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 1$

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \Rightarrow (y-1)^2 \leq 1 - x^2 \Rightarrow -\sqrt{1-x^2} \leq y-1 \leq \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0,1], 1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}\}$$

$$\text{Fie } \alpha, \beta : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}, \beta(x) = x^2$$

α, β cont.

$$\Rightarrow A \in J(\mathbb{R}^2) \text{ si } A \text{ comp.}$$

$$\text{Fie } \varphi : A \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x,y) = 1 - y$$

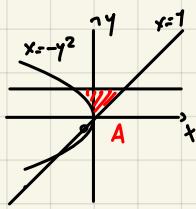
φ - cont

$$\int_A \varphi(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+x^2} (1-y) dy dx = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} (1-y) dy dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 [(1-x^2)^2 - (1-x^2 + \sqrt{1-x^2})^2] dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + 2x^2 - 1 + x^2) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{15} \quad \square$$

b) $\iint_A xy \, dx \, dy$, unde A e mult. plană mărg. de $x = -y^2$, $x = y^2$, $y = 1$

Sol.



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,1], -y^2 \leq x \leq y^2\}$$

Fie $f, \varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(y) &= -y^2, \\ \varphi_{y \mapsto y} &\text{ cont.} \end{aligned}$$

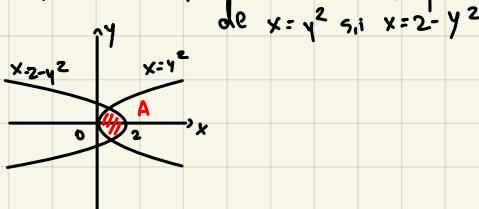
$A \in J(\mathbb{R}^2)$ și comp.

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$

f cont.

$$\iint_A f(x,y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{-y^2}^{y^2} y \, dx \right) dy = \int_0^1 x \Big|_{x=-y^2}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y^2 + y^2 \, dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \square$$

c) $\iint_A xy \, dx \, dy$, unde A e mult. plană limitată



Det. puncte de intersecție între $x = y^2$ și $x = 2 - y^2$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 2 - y^2 \Rightarrow y^2 = 1, y = \pm 1, x = 1$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1,1], y^2 \leq x \leq 2 - y^2\}$$

Fie $f, \varphi : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = y^2$, $\varphi_{y \mapsto 2-y^2}$

f cont.

$A \in J(\mathbb{R}^2)$, A comp.

Fie $\ell : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell_{min} = xy$

ℓ cont.

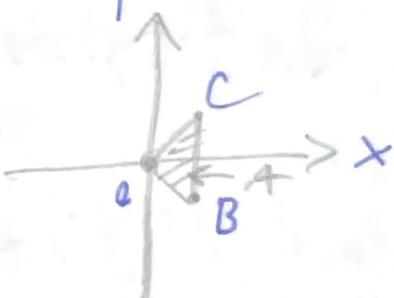
$$\iint_A f(x,y) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{y^2}^{2-y^2} xy \, dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^{2-y^2} \right) dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \underbrace{\left((2-y^2)^2 - y^2 \right)}_{\text{func. impară}} dy = 0 \quad \square$$

d) $\iint_{\Delta} xy \, dx \, dy$, unde A este triunghiul plană înzins de

$$\Delta ABC (A(0,0), B(1,-1), C(1,1))$$

sol.: ~~$\int_0^1 \int_{-1}^{2-x} xy \, dy \, dx$~~

orișnec. dreptelor:



$$OB: \frac{y - y_0}{y_B - y_0} = \frac{x - x_0}{x_B - x_0} \Rightarrow \frac{y}{-1} = \frac{x}{1} \Rightarrow y = -x$$

$$OC: \frac{y - y_0}{y_C - y_0} = \frac{x - x_0}{x_C - x_0} \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{x}{1} \Rightarrow y = x$$

$$BC: \frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B} \Rightarrow \frac{y + 1}{-2} = \frac{x - 1}{1 - 1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

CD I - C 14

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], -x \leq y \leq x\}.$$

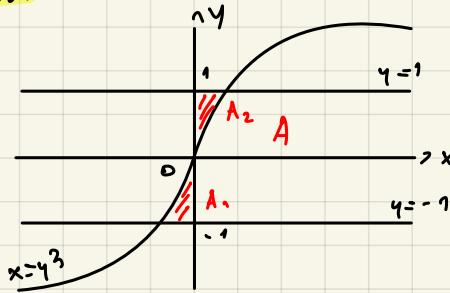
Fix $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(x) = -x$, $\beta(x) = x$ α, β cont.

A maz. y. si comp. Fix $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$, f const.

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-x}^x x dy \right) dx = \int_0^1 x y \Big|_{y=-x}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 (x^2) dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

e) $\iint_A e^{y^4} dx dy$, A mảng de $x=y^3, y=1, y=-1, x=0$

Sol.



$A = A_1 \cup A_2$, unde $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1,0], y^3 \leq x \leq 0\}$
 $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,1], 0 \leq x \leq y^3\}$

Fie $f_1, \varphi_1 : [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2, \varphi_2 : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f_1 = y^3, \varphi_1 = 0$ $f_2 = 0, \varphi_2 = y^3$
 f_1, φ_1 cont f_2, φ_2 cont
 $\Rightarrow A_1 \in J(\mathbb{R}^2)$ și A_1 comp. $A_2 \in J(\mathbb{R}^2)$ și comp.

$\Rightarrow A = A_1 \cup A_2 \in J(\mathbb{R}^2)$ și comp.

$$A_1 \cap A_2 = \{(0,0)\} \Rightarrow \mu(A_1 \cap A_2) = 0 \cdot 0 = 0$$

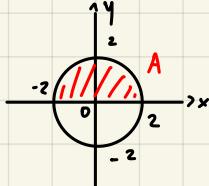
Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = e^{y^4}$
 f - cont

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y) dx dy &= \iint_{A_1} f(x,y) dx dy + \iint_{A_2} f(x,y) dx dy = \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_{y^3}^0 e^{y^4} dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^{y^3} e^{y^4} dx \right) dy = \\ &= \int_{-1}^0 \left(e^{y^4} x \Big|_{x=y^3}^{x=0} \right) dy + \int_0^1 \left(e^{y^4} x \Big|_{x=0}^{x=y^3} \right) dy = \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 y^8 e^{y^4} dy + \frac{1}{4} \int_0^1 y^8 e^{y^4} dy = \\ &= -\frac{1}{4} e^{y^4} \Big|_{y=-1}^{y=0} + \frac{1}{4} e^{y^4} \Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{4}(1-e) + \frac{1}{4}(e-1) = \\ &= -\frac{1}{4}(1-e) - \frac{1}{4}(1-e) = -\frac{1}{4}(1-e+1-e) = \\ &= -\frac{1}{4}(2-2e) = \frac{e-1}{2} \quad \square \end{aligned}$$

2. Det:

a) $\iint_A e^{-x^2-y^2} dx dy, A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

Sol



A convex à si mārg

$$\Rightarrow A \in J(\mathbb{R})$$

A comp.

Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2-y^2}$

f cont.

S.V. $x = r \cos \theta, r \in [0, \infty), \theta \in [0, \pi]$
 $y = r \sin \theta$

$$(x,y) \in A \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \leq 4 \\ r \sin \theta \geq 0 \end{cases}$$

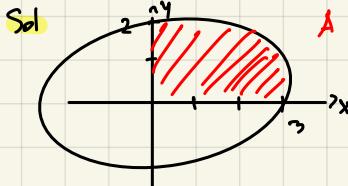
$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 \leq 4 \\ r \sin \theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \in [0, 2] \\ \theta \in [0, \pi] \end{cases}$$

Fie $B = [0, 2] \times [0, \pi]$

$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B r(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$:

$$= \int_0^2 \left(\int_0^\pi r^2 e^{-r^2} d\theta \right) dr = \int_0^2 \pi r^2 e^{-r^2} dr = -\frac{\pi}{2} e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=2} = -\frac{\pi}{2} e^{-4} = -\frac{\pi}{2} (e^{-4} - 1) = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-4}) \square$$

b) $\iint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} dx dy, A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$



A conv. si mārg

$$\Rightarrow A \in J(\mathbb{R}^2)$$

A comp.

Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$

S.V. $x = 3r \cos \theta, r \in [0, \infty), \theta \in [0, \pi]$
 $y = 2r \sin \theta$

$$(x,y) \in A \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9r^2 \cos^2 \theta}{9} + \frac{4r^2 \sin^2 \theta}{4} \leq 1 \\ 3r \cos \theta \geq 0 \\ 2r \sin \theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 \leq 1 \\ \cos \theta \geq 0 \\ \sin \theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow r \in [0, 1], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

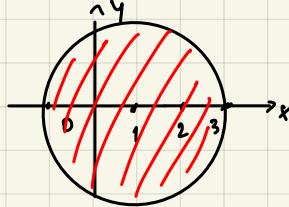
$B = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} SS_A f(x,y) dx dy &= SS_B r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{3/2} 6r \sqrt{1-r^2} dr \right) dr = \int_0^1 \frac{3}{2} 6r \sqrt{1-r^2} dr = -\frac{3}{2} \int_{-2r}^1 (1-r^2)^{1/2} dr = -\frac{3}{2} \left[\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3} \right] \Big|_{r=0}^{r=1} = -\frac{3}{2} \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \quad \square \end{aligned}$$

1. Bem.

a) $\int \int_A y dx dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$

Sol:



A convex \Rightarrow mäng. =
 $\Rightarrow A \in J(\mathbb{R}^2)$

A - kompakt

Für $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$
 f - cont.

S.V.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, r \in [0, \infty], \theta \in [0, 2\pi]$$

$$(x,y) \in A \Leftrightarrow (r \cos \theta - 1)^2 + (r \sin \theta)^2 \leq 4$$

$$r^2 \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} r \in [0, 2] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

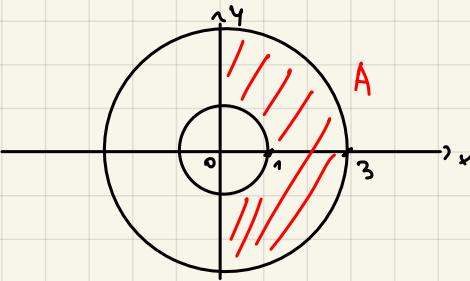
Fig. $B = [0, 2] \times [0, 2\pi]$

$$\int \int_A y dx dy = \int \int_B r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta =$$

$$-\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\theta \right) dr = \int_0^2 (r^2 \cdot -\cos \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 0 \quad \square$$

$$b) \iint_A \sqrt{x^2+y^2} dx dy, A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0\}$$

Sol



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\text{Deci } A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$$

A comp.

$$\text{Fie } f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

f cont.

S.v.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, r \in [0, \infty), \theta \in [0, \pi] \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

$$(x,y) \in A \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq r^2 \leq 9 \\ r \cos \theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \in [1, 3] \\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

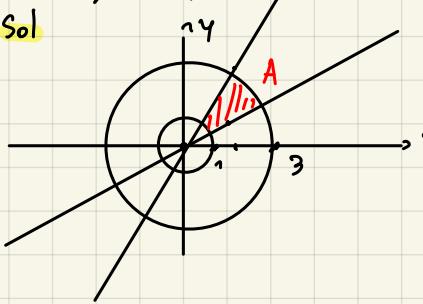
$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta =$$

$$= \int_1^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{r^2} dr d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} r \sqrt{r^2} dr d\theta \right) dr =$$

$$= \int_1^3 \left(r^2 \cdot \frac{\pi}{2} + r^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) dr = \pi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^3 = \pi \cdot \frac{26}{3}$$

c) $\iint_A \arctg \frac{y}{x} dx dy$, unde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq \sqrt{3}y \leq 3x\}$

Sol.



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9, x \leq \sqrt{3}y \leq 3x\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$$

Deci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

A comp.

Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \arctg \frac{y}{x}$
 f -cont.

S.V.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, \infty)$$

$$(x,y) \in A \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq r^2 \leq 9 \\ r \cos \theta \leq \sqrt{3}r \sin \theta \\ r \sin \theta \leq 3r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \in [1, 3] \\ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \in [1, 3] \\ \operatorname{tg} \theta \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{tg} \theta \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$$

Fie $B = [\pi/6, \pi/3] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y) dx dy &= \iint_B f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta = \\ &= S_1^3 \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(r \arctg \left(\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} \right) \right) d\theta \right) dr = S_1^3 \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r \theta d\theta \right) dr = S_1^3 \left(r \cdot \frac{\theta^2}{2} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \right) dr = S_1^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36} \right) dr = \\ &= S_1^3 \frac{\pi^2}{36} \cdot \frac{1}{2} \cdot r dr = \frac{\pi^2}{24} S_1^3 r dr = \frac{\pi^2}{48} (9-1) = \frac{\pi^2}{6} \quad \square \end{aligned}$$

Obs

Atunci rând calc. integr. triple nu este nevoie:

- 1) să schităm grafic mult. din \mathbb{R}^3
- 2) să justificăm că mult. din \mathbb{R}^3 sunt mas. J. (și nici compacte)
- 3) să arătăm că func. def. pe mult. din \mathbb{R}^3 sunt integr. R. (și nici mărg.)

Affirmațiile de la 2) și 3) se cons. ader. din enunțurile ex.

1. Def:

$$a) \iiint_A (xy^2 + y^2) dx dy dz, A = [-1, 1] \times [2, 3] \times [0, 2]$$

Sol

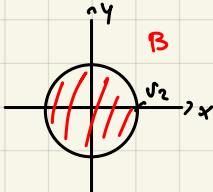
$$\begin{aligned} \iiint_A (xy^2 + y^2) dx dy dz &= S_{-1}^1 \left(S_2^3 \left(S_0^2 (xy^2 + y^2) dz \right) dy \right) dx = \\ &= S_{-1}^1 \left(S_2^3 \left(\frac{xy^2}{2} + y^2 z \Big|_0^2 \right) dy \right) dz = \\ &= S_{-1}^1 \left(S_2^3 \left(2xy + 2y^2 \right) dy \right) dz = \\ &= S_{-1}^1 \left(xy^2 + \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^3 \right) dz = S_{-1}^1 \left(5x + \frac{2}{3} \cdot 19 \right) dx = \\ &= \frac{5}{2} x^2 + \frac{19}{3} x \Big|_{-1}^1 = \frac{38}{3} \end{aligned}$$

$$b) \iiint_A x dy dz, A = [-2, 3] \times [0, 1] \times [2, 3]$$

$$c) \iiint_A (x^2 + y^2)^2 dx dy dz, A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in B, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\} \text{ și } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2^2\}$$

Sol

$$\begin{aligned} \iiint_A (x^2 + y^2)^2 dx dy dz &= \iiint_B \left(S_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)^2 dz \right) dx dy = \\ &= \iiint_B \left(\frac{(x^2 + y^2)^2 z^2}{2} \Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} \right) dx dy = \iiint_B \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} (6 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2) dx dy \end{aligned}$$



B convexă și mărg.
⇒ $B \subseteq \mathbb{R}^2$

B comp.

$$\text{Fie } f: B \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} (6 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2) dx dy$$

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y) dx dy &= \iint_C r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \cdot \frac{r^2}{2} (6 - r^2 - r^4) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{r^3}{2} (6 - r^2 - r^4) dr d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^2 \frac{r^3}{2} (6r^3 - \frac{r^5}{2} - \frac{r^7}{2}) dr = \\ &= 2\pi \left(\frac{3}{4} r^4 \Big|_0^2 - \frac{1}{12} r^6 \Big|_0^2 - \frac{1}{16} r^8 \Big|_0^2 \right) = \\ &= 6\pi - \frac{4}{3}\pi = 20\pi = \frac{80}{3}\pi \end{aligned}$$

S.V.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, r \in [0, \sqrt{2}], \theta \in [0, 2\pi]$$

$$(x, y) \in B \Rightarrow x^2 + y^2 \leq z \Rightarrow r^2 \leq z \Rightarrow r \in [0, \sqrt{z}]$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Fie } C = [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$$

$$d) \iiint_A xy^2 dx dy dz, A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in B, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 9x^2 + y^2 \leq 25\}$$