Tutoriat 5 CDI

Serii de puteri

Notăm $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n} \to R \in [0,+\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

s.n. serie de puteri în jurul lui x_0

$R \to$ raza de convergență a seriei

- $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq \mathbb{R} \to$ interval de convergență a seriei de puteri.
- $A \subseteq \mathbb{R} \to$ mulțime de convergență a seriei de puteri
- $f: \underline{\mathbb{R} \to \mathbb{R}} \to$ suma seriei de puteri

!
$$\boxed{\rho = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \left[= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ (\text{dacă } \exists) \right]}$$

$$R = \begin{cases} 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \rho \in (0,\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} A \subseteq \mathbb{R} \\ (x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A \subseteq [x_0 - R, x_0 + R] \end{cases}$$

T: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

Atunci:
1) $\rho = 1 \Rightarrow \sum_{n=0} a_n x^n$ convergentă (absolut) $\forall x \in \mathbb{R}$
2) $\rho = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0} a_n x^n$ convergentă doar în $x = 0$
3) $\rho \in (0,\infty) \Rightarrow \sum_{n=0} a_n x^n$ absolut convergentă pt. $|x| < \frac{1}{\rho}$
   divergentă pt $|x| > \frac{1}{\rho}$

T: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\exists!\ R \in [0,+\infty]$
- $|x| < R \Rightarrow$ serie absolut convergentă
- $|x| > R \Rightarrow$ serie divergentă

Serii de puteri remarcabile

① $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ \forall x \in (-1,1)$ ← seria putere

② $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \ \forall x \in (-1,1)$

③ $\sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ ← seria exponențială

④ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ ← serii trigonometrice

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

⑤ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha, \ \forall x \in (-1,1)$

$(\alpha \neq -1)$