— Tutoriat 4 —

<u>Definiție</u> = Sistem liniar independent (SLI)

O mulțime $\emptyset \neq S \subset V$ s.n. liniar independentă dc ptr $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, $x_1, \dots, x_n \in S$ cu proprietatea că $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, avem că: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

<u>Definiție</u> = Bază

O mulț. $S \subset V$ s.n. bază dacă este și Sistem de Generatori (SG) și SLI.

O mulț. $S \subset V$ s.n. sistem de generatori dc ptr. orice $v \in V$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n \in K$ și $x_1, \dots, x_n \in S$ a. î. $v = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$.

<u>Obs.</u> Fie $S \subset V$ s.n. bază dc este SG + SLI

<u>Def.</u> Dimensiunea unui sp. vectorial este cardinalul unei baze.

— Tutoriat 4 —

Obs.: Dacă sist. liniar omogen are soluție unică (soluția nulă) At. sistemul vectorial este S.L.I.

Dc sist. lin. omogen este compatibil nedeterminat, sist. este S.L.D.

1. $\dim_K K^n = n$; $baza = \{e_1, \dots, e_n\}$; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$
   $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$
   $\vdots$
   $e_n = (0, 0, \dots, 1)$
2. $\dim_K K_n[X] = n+1$; $baza = \{1, X, \dots, X^n\}$.
3. $\dim_K K^1 = 1$
4. $\dim_K 0 = 0$
5. $m, n \in \mathbb{N}^*$ $\dim_K \mathcal{M}_{m,n}(K) = m \cdot n$
6. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

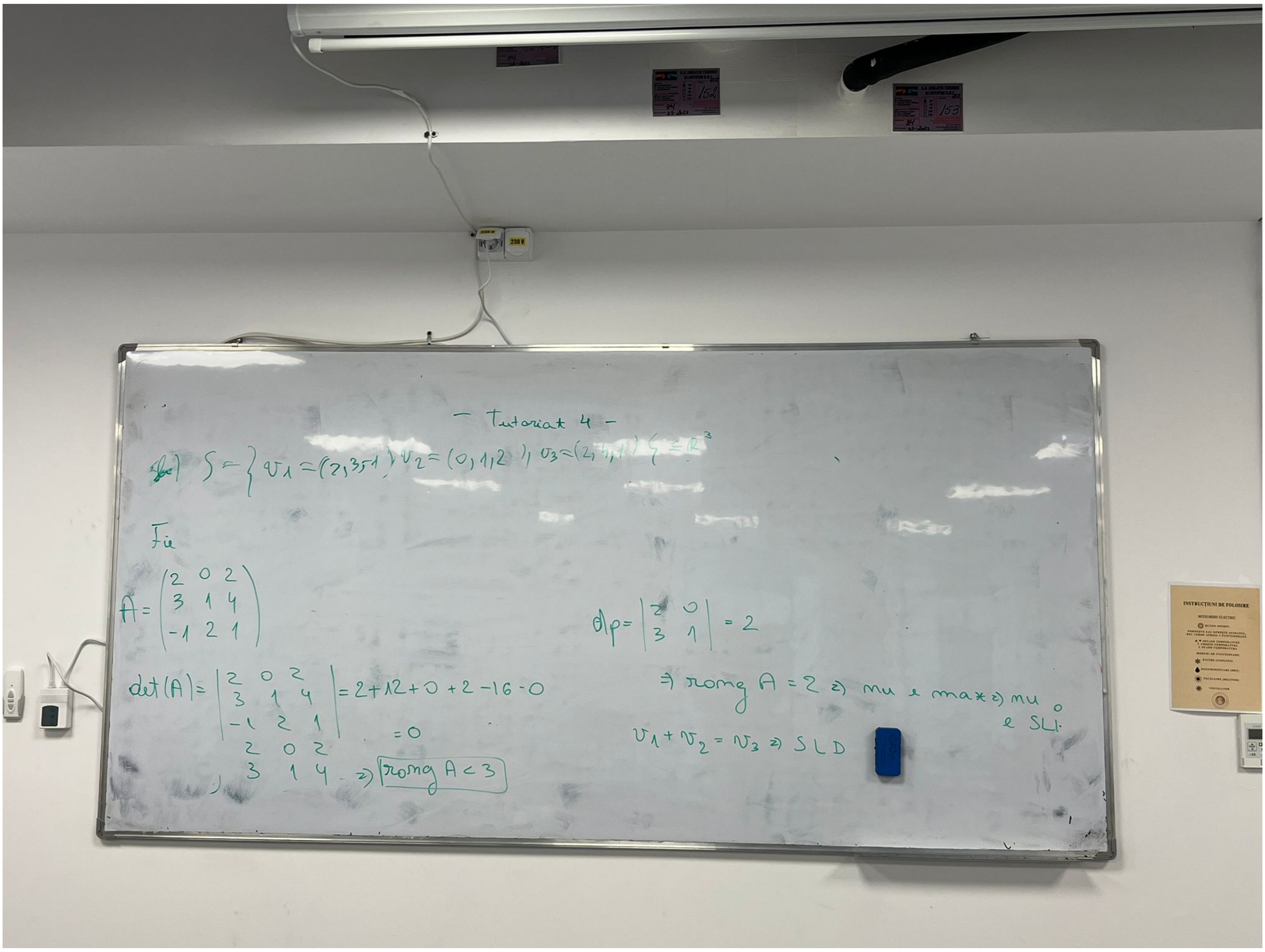
– Tutoriat 4 –

1) $S = \{ v_1 = (2,2,3),\ v_2 = (-1,2,0),\ v_3 = (3,-1,2) \} \subseteq \mathbb{R}^3$

A rg max $\Rightarrow S$ S.L.I.

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 3 - 18 + 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3 \Rightarrow \operatorname{rg} A$ max $\Rightarrow S$ este S.L.I $\left.\begin{matrix} \\ \text{S.G} \end{matrix}\right\} \Rightarrow S$ e bază


- Tutoriat 4 -
Ex) S = {v1 = (2, 3, -1), v2 = (0, 1, 2), v3 = (2, 4, 1)} ⊆ R^3
Fie
A = (2 0 2 / 3 1 4 / -1 2 1)
dp = |2 0 / 3 1| = 2
det(A) = |2 0 2 / 3 1 4 / -1 2 1| = 2 + 12 + 0 + 2 - 16 - 0 = 0 => rang A < 3
=> rang A = 2 => nu e max => nu e SLI.
v1 + v2 = v3 => SLD

— Tutoriat 4 —

$B' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ bază

$e_1' = (1,1,1,1)$; $e_2' = (1,1,-1,1)$; $e_3' = (1,-1,1,-1)$; $e_4' = (1,-1,-1,1)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 : L_2 - L_1 \\ L_3 : L_3 - L_1 \\ L_4 : L_4 - L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= -8 \cdot 1 = -8 \neq 0$

$\Rightarrow$ S.L.I. (1)

$rg\, M = 4$

$|B'| = 4$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$

$\Rightarrow$ S.G. (2)

$\xrightarrow{(1) \text{ și } (2)}$ B' este bază

— Tutoriat 4 —

b) $u = (1,2,1,1)$

$e_1' = (1,1,1,1)$; $e_2' = (1,1,-1,1)$; $e_3' = (1,-1,1,-1)$; $e_4' = (1,-1,-1,1)$.

Fie c_1, c_2, c_3, c_4

$u = c_1 \cdot e_1' + c_2 \cdot e_2' + c_3 \cdot e_3' + c_4 \cdot e_4'$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 & (1) \\ c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 2 & (2) \\ c_1 - c_2 + c_3 - c_4 = 1 & (3) \\ c_1 - c_2 - c_3 + c_4 = 1 & (4) \end{cases}$$

$\xrightarrow{(2)+(3)} 2c_1 = 3 \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{3}{2}}$

$\xrightarrow{(1)+(4)} 2c_1 + 2c_4 = 2 \Leftrightarrow 2c_4 = -1 \Rightarrow \boxed{c_4 = -\frac{1}{2}}$

$\xrightarrow{(1)+(2)} 2c_1 + 2c_2 + 2c_4 = 3$

$\Leftrightarrow 3 + 2c_2 - 1 = 3$

$\Rightarrow 2c_2 = 1 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$

$\xrightarrow{(1)+(3)} \underset{3}{\underbrace{2c_1}} + 2c_3 = 2$

$\Rightarrow 2c_3 = -1 \Rightarrow \boxed{c_3 = -\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow [u]_{B'} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

V: $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$

— Tutoriat 4 —

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 : L_3 + L_1 \\ L_4 : L_4 - L_1}]{L_2 : L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 : L_2 \div (-4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 : L_3 - 5L_2 \\ L_4 : L_4 + 2L_2}]{L_1 : L_1 - 3L_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases} ; z \in \mathbb{R}$$

OBS! Faptul că U e subspațiul generat de o mulțime arată în particular că U e subspațiu, deci verificarea nu mai este necesară.

TEMĂ

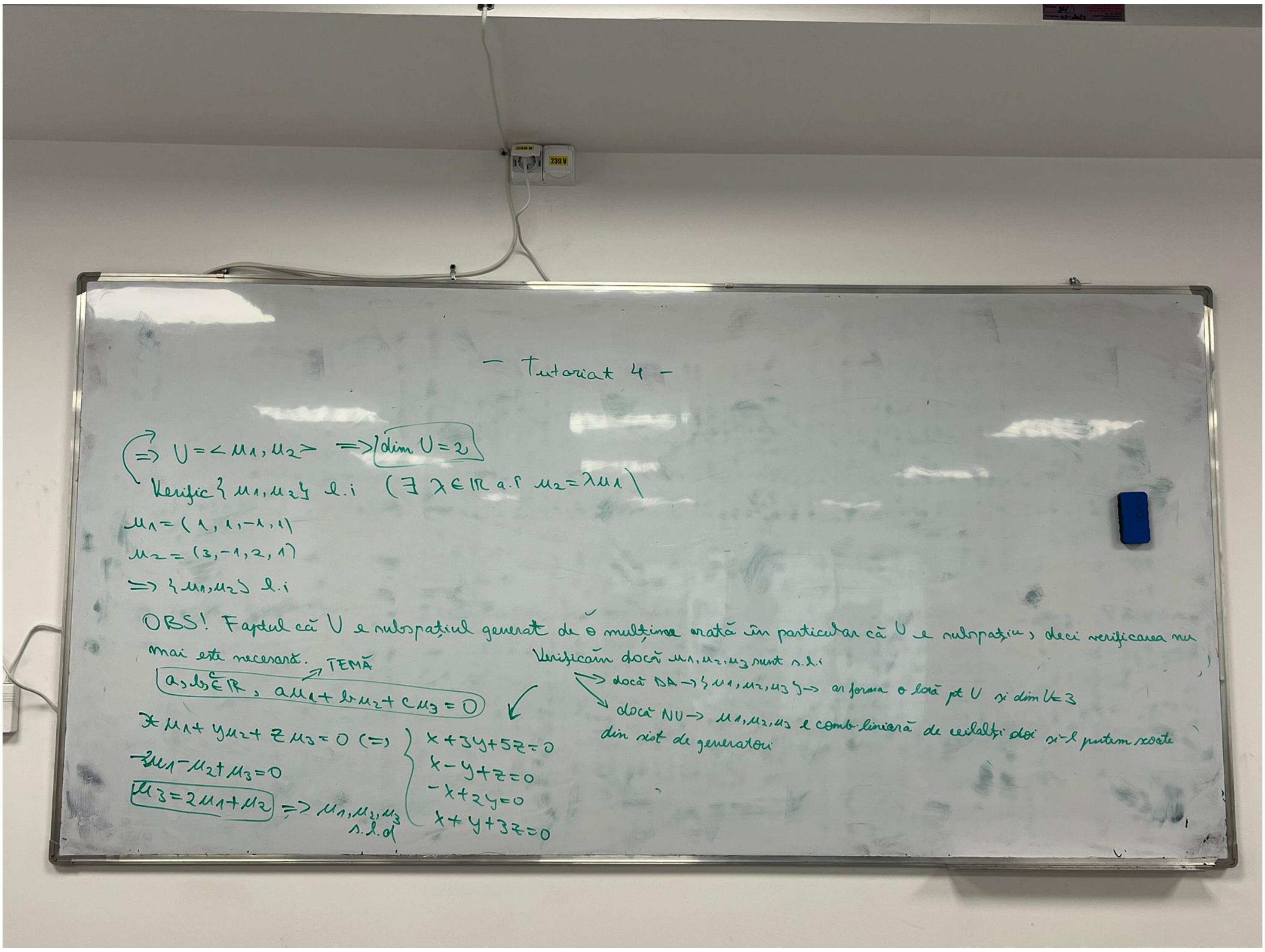
$\boxed{a, b, c \in \mathbb{R},\ a u_1 + b u_2 + c u_3 = 0}$

Verificăm dacă u_1, u_2, u_3 sunt l.i.

→ dacă DA → $\{u_1, u_2, u_3\}$ → ar forma o bază pt U și $\dim U = 3$

→ dacă NU → u_1, u_2, u_3 e comb. liniară de ceilalți doi și-l putem scoate din sist de generatori

$$x u_1 + y u_2 + z u_3 = 0 \iff \begin{cases} x + 3y + 5z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$



— Tutoriat 4 —
=> U = < u1, u2 > => dim U = 2
Verific { u1, u2 } l.i (∃ λ ∈ ℝ a.î u2 = λu1)
u1 = (1, 1, -1, 1)
u2 = (3, -1, 2, 1)
=> { u1, u2 } l.i
OBS! Faptul că U e subspațiul generat de o mulțime arată în particular că U e subspațiu, deci verificarea nu mai este necesară.
TEMĂ
a, b, c ∈ ℝ, au1 + bu2 + cu3 = 0
xu1 + yu2 + zu3 = 0 <=>
x + 3y + 5z = 0
x - y + z = 0
-x + 2y = 0
x + y + 3z = 0
-2u1 - u2 + u3 = 0
u3 = 2u1 + u2 => u1, u2, u3 s.l.d
Verificăm dacă u1, u2, u3 sunt s.l.i
dacă DA -> { u1, u2, u3 } -> ar forma o bază pt U și dim U = 3
dacă NU -> u1, u2, u3 e comb. liniară de ceilalți doi și-l putem scoate din sist de generatori

— Tutoriat 4 —

Fie $v_1 = (1,-1,2,3)$; $v_2 = (2,1,4,1) \in \mathbb{R}^4$

$\{v_1, v_2\}$ S.L.I. + să se completeze până la o bază a lui $\mathbb{R}^4$

Sol. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$;

$\alpha(1,-1,2,3) + \beta(2,1,4,1) = (0,0,0,0)$, de unde:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Bigg| \xrightarrow{(+)} 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

i.e. $\{v_1, v_2\}$ S.L.I.

— Tutoriat 4 —

Fie $v_1 = (1,-1,2,3)$; $v_2 = (2,1,4,1) \in \mathbb{R}^4$

$\{v_1, v_2\}$ S.L.I. + să se completeze până la o bază a lui $\mathbb{R}^4$

Ptn. a fi bază — S.G. + S.L.I.

Fie $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

$c_1(1,-1,2,3)+c_2(2,1,4,1)+c_3(0,0,1,0)+c_4(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$

$$\begin{cases} c_1+2c_2=0 \quad (1) \\ -c_1+c_2=0 \Rightarrow \boxed{c_2=c_1} \overset{(1)}{\Rightarrow} 3c_1=0 \Rightarrow \boxed{c_1=0} \Rightarrow \boxed{c_2=0} \quad (*) \\ 2c_1+4c_2+c_3=0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \boxed{c_3=0} \\ 3c_1+c_2+c_4=0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \boxed{c_4=0} \end{cases} \Rightarrow \text{S.L.I.}$$

— Tutoriat 4 —

T. lui Grassmann

Fie V un K sp vect finit generat și $X, Y \leq V$.

$$\dim(X+Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$$

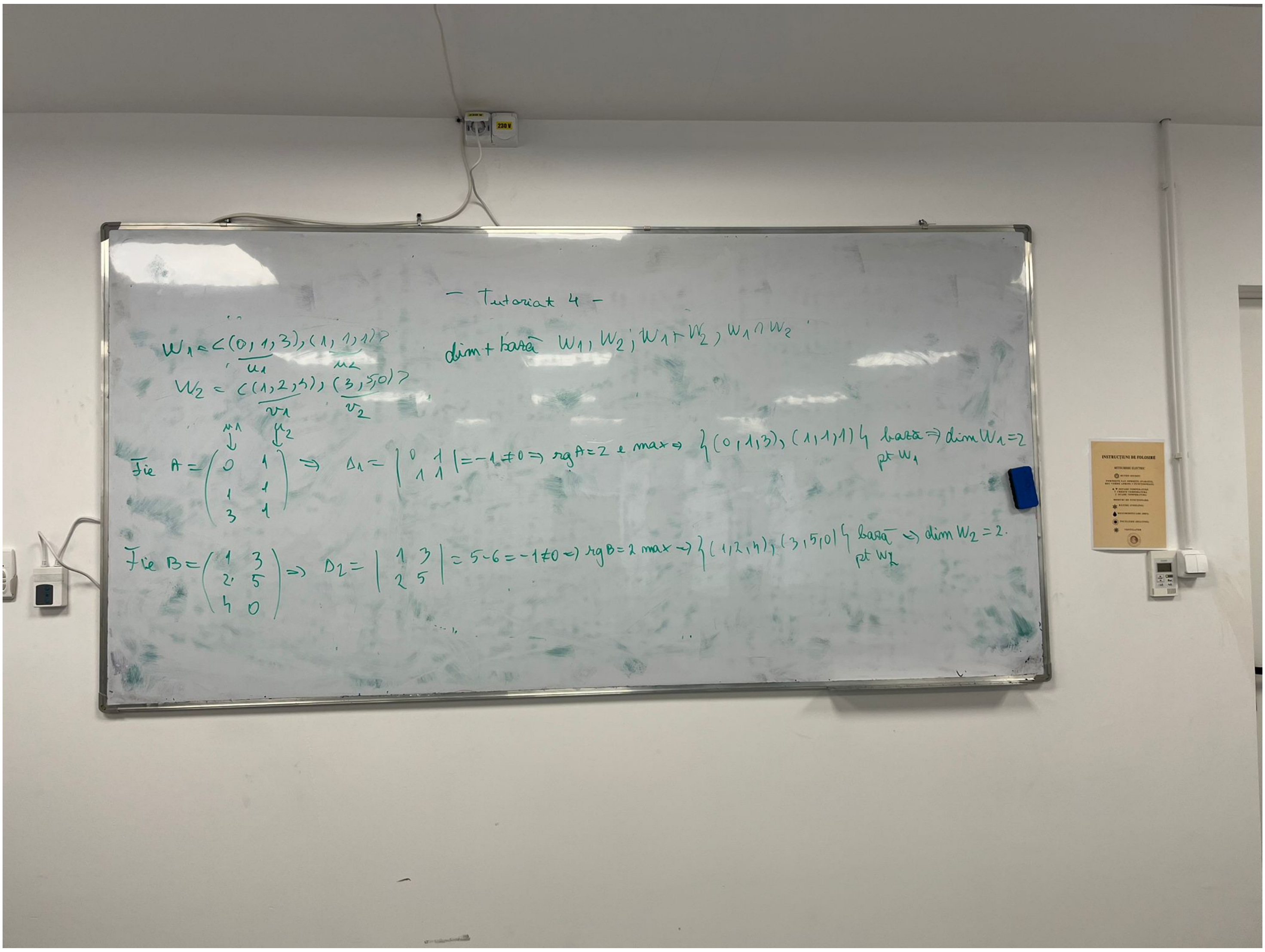
Operații cu subsp. vect.

Fie V un K sp vect, $U_1, U_2 \leq V$.

$$U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = \langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \rangle.$$

$$U_1 \cap U_2 = \{x \mid x \in U_1 \text{ și } x \in U_2\}$$



— Tutoriat 4 —
$W_1 = \langle \underbrace{(0,1,3)}_{u_1}, \underbrace{(1,1,1)}_{u_2} \rangle$
$W_2 = \langle \underbrace{(1,2,4)}_{v_1}, \underbrace{(3,5,0)}_{v_2} \rangle$
dim + bază $W_1, W_2; W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$
Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg A = 2$ e max $\Rightarrow \{(0,1,3),(1,1,1)\}$ bază pt $W_1 \Rightarrow \dim W_1 = 2$
Fie $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0 \Rightarrow rg B = 2$ max $\Rightarrow \{(1,2,4),(3,5,0)\}$ bază pt $W_2 \Rightarrow \dim W_2 = 2$.

— Tutoriat 4 —

$W_1 = \langle \underbrace{(0,1,3)}_{u_1}, \underbrace{(1,1,1)}_{u_2} \rangle$ dim + bază $W_1, W_2, W_1+W_2, W_1 \cap W_2$

$W_2 = \langle \underbrace{(1,2,4)}_{v_1}, \underbrace{(3,5,0)}_{v_2} \rangle$

Fie $x \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow x \in W_1$ şi $x \in W_2$.

$$\Downarrow$$

$x = a u_1 + b u_2$ $\quad x = c v_1 + d v_2$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$a u_1 + b u_2 = c v_1 + d v_2$

$a(0,1,3) + b(1,1,1) - c(1,2,4) - d(3,5,0) = 0.$

$$\begin{cases} b - c - 3d = 0 \\ a + b - 2c - 5d = 0 \\ 3a + b - 4c = 0 \end{cases} \rightarrow A^e = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_1}$$

— Tutoriat 4 —

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 15 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 2L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \cdot \frac{1}{9}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to 3L_3 + L_2]{L_1 \to 2L_3 + L_1}$$

$$w_1 + w_2 = (u_1, u_2, \cancel{v}_1, v_2)$$

$$a u_1 + b u_2 = c v_1 + d v_2$$

$$a(0,1,3) + b(1,1,1) - c(1,2,4) - d(3,5,0) = 0.$$

$$\begin{cases} b - c - 3d = 0 \\ a + b - 2c - 5d = 0 \\ 3a + b - 4c = 0 \end{cases} \to A^e = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_1}$$