Tutoriat 8

Algebră 1

5 Decembrie 2025

Grupuri

1. Grupuri. Subgrupuri

Definiție 1.1. *Se numeşte* grup *un monoid* $(G, \cdot)$ *în care orice element este inversabil, i.e.* $U(G) = G$.

Explicit, un grup este un triplet $G = (G, \cdot, 1)$*, unde* G *este o mulţime (nevidă),* $\cdot : G \times G \to G$ *este o lege de compoziţie,* $1 \in G$ *astfel încât:*

1. *"$\cdot$" este* asociativă*, i.e.*
$$\forall x, y, z \in G, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$
2. 1 *este* element neutru *pentru "$\cdot$", i.e.*
$$\forall x \in G, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x;$$
3. $\forall x \in G,\ \exists y \in G$ *astfel încât*
$$x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

În plus, un grup G *se numeşte* abelian *(sau* comutativ*) dacă legea de compoziţie este comutativă, i.e.*
$$\forall x, y \in G, \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Definiție 1.2. *Fie* G_1, G_2 *două grupuri. O funcţie* $f : G_1 \to G_2$ *se numeşte* morfism de grupuri *dacă*
$$\forall x, y \in G_1, \qquad f(xy) = f(x)f(y).$$

În plus, f *se numeşte* izomorfism de grupuri *dacă există* $g : G_2 \to G_1$ *morfism de grupuri astfel încât*
$$f \circ g = \mathrm{Id}_{G_2} \qquad \text{şi} \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_{G_1}.$$

Două grupuri G_1 *şi* G_2 *se numesc* izomorfe*, notat* $G_1 \cong G_2$*, dacă există* $f : G_1 \to G_2$ *un izomorfism de grupuri.*

Definiție 1.3. $(\mathrm{Aut}(G), \circ) := \{ f : G \to G \mid f \text{ este izomorfism de grupuri} \}$ *este un grup cu operaţia de compunere uzuală şi se numeşte* grupul automorfismelor *lui* G*; elementul neutru este* $1_{\mathrm{Aut}(G)} = \mathrm{Id}_G$.

Propoziție 1.1. *Fie $f : G_1 \to G_2$ un morfism de grupuri. Atunci:*

1. $f(1) = 1$;
2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, *pentru orice* $a \in G_1$;
3. $f(a^n) = f(a)^n$, *pentru orice* $a \in G_1$ *şi* $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. 1. Avem
$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)\, f(1).$$
Multiplicând la stânga cu $f(1)^{-1}$, obţinem
$$f(1)^{-1} f(1) = f(1)^{-1} f(1) f(1) \qquad \Rightarrow \qquad 1 = f(1),$$

2. Pentru orice $a \in G_1$,
$$f(a)\, f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(1) = 1,$$
şi de asemenea
$$f(a^{-1})\, f(a) = f(a^{-1}a) = f(1) = 1.$$
Rezultă că $f(a)$ este inversabil şi
$$f(a)^{-1} = f(a^{-1}).$$

3. Pentru $n = 0$, afirmaţia este adevărată din (1), deoarece
$$f(a^0) = f(1) = 1 = f(a)^0.$$
Pentru $n > 0$ procedăm prin inducţie după n. Cazul $n = 1$ este evident. Presupunem că $f(a^n) = f(a)^n$ şi arătăm pentru $n + 1$:
$$f(a^{n+1}) = f(a^n \cdot a) = f(a^n)\, f(a) = f(a)^n\, f(a) = f(a)^{n+1}.$$
Pentru $n < 0$, scriem $n = -m$ cu $m > 0$. Atunci:
$$f(a^n) = f(a^{-m}) = f\big((a^{-1})^m\big) = f(a^{-1})^m = \big(f(a)^{-1}\big)^m = f(a)^{-m} = f(a)^n.$$

$\square$

Propoziție 1.2 (Transfer de structură)**.** *Fie G un grup, X o mulţime şi $f : G \to X$ o funcţie bijectivă. Atunci există o* unică *structură de grup "$*$" pe mulţimea X astfel încât f este un izomorfism de grupuri.*

În acest caz, spunem că "$*$" se obţine prin transferul structurii de grup *de pe G pe X via f.*

Proof. Fie "$\perp$" o structură de grup pe X astfel încât $f : G \to (X, \perp)$ este izomorfism de grupuri. Atunci
$$f(gh) = f(g) \perp f(h), \qquad \forall g, h \in G.$$
De asemenea,
$$f^{-1}(x \perp y) = f^{-1}(x)\, f^{-1}(y), \qquad \forall x, y \in X.$$

Aplicând f avem

$$x \perp y = f\big(f^{-1}(x)\, f^{-1}(y)\big)\,, \qquad \forall x, y \in X.$$

Aceasta arată că structura de grup pe X este *unic determinată* de f şi de structura de grup pe G.

Definim acum

$$x * y := f\big(f^{-1}(x)\, f^{-1}(y)\big)\,, \qquad \forall x, y \in X.$$

Atunci se poate arăta că $(X, *)$ este un grup, iar identitatea sa este

$$1_X := f(1_G).$$

□

Definiție 1.4. *Fie $G = (G, \cdot)$ un grup şi $H \subseteq G$ o submulţime. H se numeşte* subgrup *al lui G (notăm $H \leq G$) dacă:*

1. *H este parte stabilă la legea lui G, i.e.*

$$\forall x, y \in H, \quad x \cdot y \in H;$$

2. *$1 \in H$;*
3. *dacă $x \in H$, atunci $x^{-1} \in H$.*

Observație. Fie G un grup şi $H \subseteq G$. Atunci

$$H \leq G \iff xy^{-1} \in H, \qquad \forall\, x, y \in H.$$

2. Exemple de grupuri

Exemplu. Fie X o mulţime nevidă şi

$$\Sigma_X := \{\, f : X \to X \mid f \text{ este funcţie bijectivă} \,\}.$$

Atunci Σ_X este un grup cu compunerea uzuală a funcţiilor, $1_{\Sigma_X} = \mathrm{Id}_X$, numit *grupul simetric al lui X* sau *grupul de permutări* pe X.

Observație. Dacă $|X| \geq 3$, atunci Σ_X este necomutativ.

Alte notaţii pentru el:

$$\Sigma_X := S_X.$$

Dacă $X := \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci $\Sigma_X := S_n$, numit grupul permutărilor de ordin n.

Un element $\tau \in S_n$ se notează prin valorile pe care le ia, astfel:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

Un subgrup în Σ_X se numeşte *grup de transformări.*

Exemplu.

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) := \{\, f \in \Sigma_{\mathbb{R}^2} \mid f \text{ este izometrie} \,\}$$

este un grup în compunerea uzuală, numit *grupul de izometrii al planului.* El este un subgrup al lui $\Sigma_{\mathbb{R}^2}$, deci $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ este un grup de transformări.
Caz special: *grupul rotaţiilor.*

Fie $\theta \in [0, 2\pi)$ şi $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f_θ fiind rotaţia de unghi θ, i.e.

$$f_\theta(x, y) = (\, x\cos\theta - y\sin\theta, \;\; x\sin\theta + y\cos\theta \,).$$

Pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, fie

$$\mathrm{Rot}(\mathbb{R}^2) := \{\, f_\theta \mid \theta \in [0, 2\pi) \,\} \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2).$$

Acesta este un subgrup în $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, numit *grupul rotaţiilor din planul* $\mathbb{R}^2$.

Exemplu. Grupul de simetrie al unei mulţimi $Y \subseteq \mathbb{R}^2$.

Fie $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ o submulţime fixată. Atunci

$$\mathrm{Sim}(Y) := \{\, f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \mid f(Y) = Y \,\}$$

este un subgrup în $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, numit *grupul de simetrie al lui Y*.

Caz special: grupul diedral.
Fie $n \geq 3$ şi

$$P_n := \text{un poligon regulat cu } n \text{ laturi în plan.}$$

Atunci

$$\mathrm{Sim}(P_n) = \{\, f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \mid f(P_n) = P_n \,\} \equiv D_n,$$

numit *grupul diedral.*

Exemplu.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ este inversibil} \,\},$$

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) := \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1 \,\},$$

sunt grupuri cu înmulţirea uzuală a matricilor.

Acestea se numesc *grupul general* (respectiv *special*) *linear de ordin n.*