Propoziție Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R. Atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}$ are aceeași rază de convergență. Dacă $R>0$, $f:(-R,R)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, $F:(-R,R)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}X^{n+1}$ atunci F este o primitivă a lui f.

În plus
$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}X^{n+1}.$$

Teoremă (Abel).

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de conv. $R \in (0,\infty)$.

Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ este convergentă și $f : (-R, R] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ atunci $\lim\limits_{\substack{x \to R \\ x < R}} f(x) = f(R)$ (adică f este continuă în R).

Dem. Este suficient să dem. teorema pt cazul $R = 1$.

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad t_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad t_{-1} = 0.$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (t_n - t_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} t_{n-1} x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \underline{x^n(1-x)}$$

$$f(1) = t = \sum_{n=0}^{\infty} t\, \underline{x^n(1-x)}$$

$$f(x) - f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (t_n - t)\, x^n (1-x)$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $t_n \longrightarrow t$, există $N \in \mathbb{N}^*$, a.î.

$$|t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n \geq N$$

Există $\delta \in (0,1)$ a.î.

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} (t_n - t)\, x^n (1-x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, x \in (1-\delta, 1)$$

Pt. $x \in (1-\delta, 1)$ avem

$$|f(x)-f(1)| \leq \left|\sum_{n=0}^{N-1}(t_n - t)x^n(1-x)\right| + \sum_{n=N}^{\infty}|t_n - t|\,|x^n - x^{n+1}|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2}\left(x^n - x^{n+1}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deci $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = f(1)$

<u>Observație</u>. Teorema este adevărată și dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ este convergentă, caz în care $\lim\limits_{\substack{x \to -R \\ x>-R}} f(x) = f(-R)$

Exemplu Arătați că pt $\forall x \in [-1, 1]$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$x \to -x$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad \forall x \in (-1, 1)$. $(*)$

În $(*)$, $x \longrightarrow x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Funcția $F : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

obținută prin integrare termen cu termen este o primitivă a lui $\frac{1}{1+x^2}$, i.e $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in (-1,1)$

Deci $F'(x) = f'(x)$, $\forall x \in (-1,1) \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}$ a.i $f(x) = F(x) + C$.

$x=0$: $\quad \operatorname{arctg}(0) = f(0) = F(0) + C = C \Rightarrow C = 0$. Deci,

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

Pt. $x=1$, seria $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ este convergentă (Crit. Leibniz)

Din T. Abel,

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{arctg} x = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$$

Procedând la fel și pt $x=-1$, rezultă

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in [-1,1]$$

$x \to 3x$, $\operatorname{arctg} 3x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ care are derivată de orice ordin (adică $f \in C^{\infty}(I)$)

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ – formula lui Taylor de ordin n.

Seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, A – mulțimea de conv. a seriei

se numește seria Taylor asociată fct. f în x_0.

<u>Remarcă</u> Seria Taylor asociată funcției f în x_0 este convergentă în $x \in A \cap I$ către $f(x)$ dacă și numai dacă $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.

<u>Propoziție</u>:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Pol. Taylor de gradul n asociat lui $f(x) = e^x$ în $x_0 = 0$

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Fie $x \in \mathbb{R}^*$. Aplicam. form. lui Taylor cu restul lui Lagrange

rezultă că există ξ_x între 0 și x a.î.

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$f(x) = T_n(x) + \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\left|\frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{e^{|\xi_x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Așadar, cum $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, rezultă că

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Seria binomială

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Seria

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

se numește serie binomială

Dacă $\alpha \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ seria se reduce la un polinom

$$C_\alpha^n = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Pt $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \ldots\}$, raza de conv a seriei este $R = 1$

Teoremă Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2,\dots\}$ atunci pt. $\forall x \in (-1,1)$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$f(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad x \in (-1,1)$$

$$f'(x) = \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots, \quad \forall x \in (-1,1)$$

$f'(x) + x f'(x) = \alpha f(x)$ pt. că

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot\alpha.$$

$$(1+x)f'(x)=\alpha f(x), \quad \forall x\in(-1,1) \quad \Big| \cdot (1+x)^{\alpha-1}$$

$$(1+x)^{\alpha} f'(x)-\alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x)=0, \ \forall x\in(-1,1)$$

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}\right)'=0, \ \forall x\in(-1,1) \Rightarrow \exists C\in\mathbb{R}, \text{ a.i. } \frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}=C.$$

$C=f(0)=1$ și deci

$$f(x)=(1+x)^{\alpha}, \ \forall x\in(-1,1)$$

Noțiuni de topologie pe $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ - sp. vectorial peste $\mathbb{R}$.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

Aplicația $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$ pt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

este o normă, numită norma euclidiană.

1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

3) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (adică $(0, 0, 0, \dots 0)$).

distanța euclidiană $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$

$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2} = \|x-y\|$.

$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2 \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

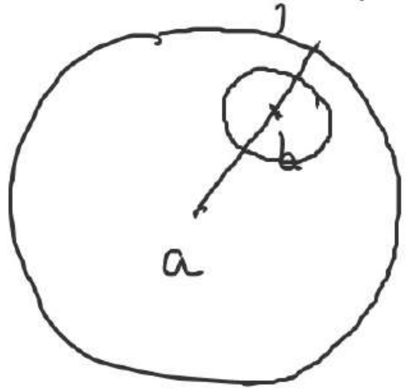
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad ,$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Dacă $a \in \mathbb{R}^n$ și $r > 0$, $B(a, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r \}$

O mulțime $D \subset \mathbb{R}^n$ este deschisă dacă $\forall a \in D, \exists r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset D$.

<u>Propoziție</u> $B(a,r)$ este o mulțime deschisă



Fie $b \in B(a,r)$, $d(a,b) = \|b-a\| = d < r$, Fie $r' = \dfrac{r-d}{2}$

Atunci $B(b,r') \subset B(a,r)$

Dacă $a \in \mathbb{R}^n$ o mulțime $V \subset \mathbb{R}^n$ este o vecinătate a lui a dacă $\exists\, r>0$ a.î. $B(a,r) \subset V$.

$\mathcal{V}(a)$ – mulțimea vecinătăților punctului $a \in \mathbb{R}^n$

$A \subset \mathbb{R}^n$

$\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, r > 0 \text{ a.î. } B(x,r) \subset A\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \in \mathcal{V}(x)\} \subset A$

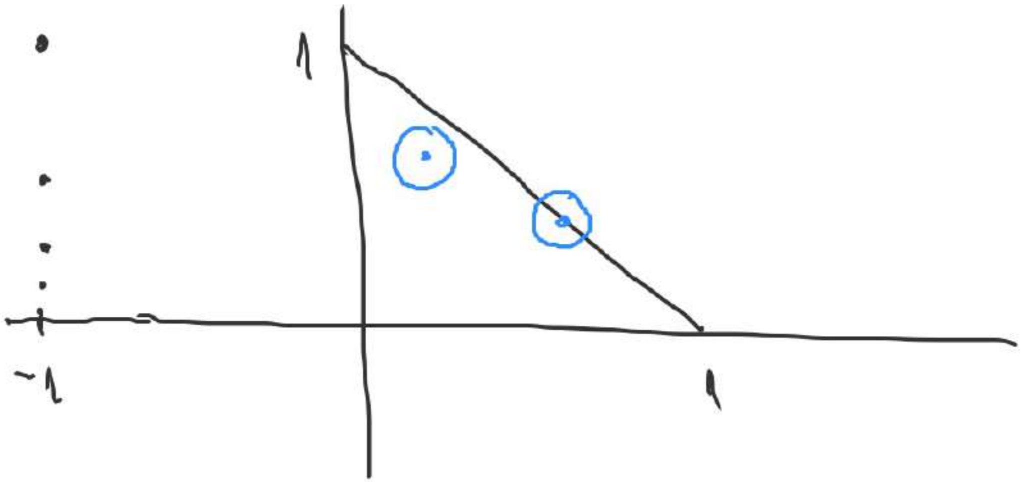
$A \subset \mathbb{R}^n$ închisă $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus A$ este deschisă

$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset\} \supset A$

$A' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}$

$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{CA}$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1,\ x,y \geq 0 \} \cup \{ (-1, \tfrac{1}{n+1}),\ n \in \mathbb{N} \}$$



$$\mathring{A} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y < 1,\ x,y > 0 \}$$

$$\overline{A} = A \cup \{(-1,0)\}$$

$$A' = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1,\ x,y \geq 0 \} \cup \{(-1,0)\}$$

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$. , $\forall\, x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| , \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i|;\ 1\le i\le n\}$$

<u>Exerciții</u> 1) Arătați că $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|_\infty$ sunt norme pe $\mathbb{R}^n$

2) desenați bila din $\mathbb{R}^2$ cu centrul în origine și de rază 1 coresp. normelor $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|_\infty$

<u>Definiție</u>- Două norme $\|\cdot\|$ și $\|\cdot\|'$ se numesc echivalente dacă există $\alpha, \beta > 0$. a.î.

$$\alpha\|x\| \le \|x\|' \le \beta\|x\|, \ \forall x\in\mathbb{R}^n$$

Propoziție 1) Orice două norme pe $\mathbb{R}^n$ sunt echivalente.

2) Dacă două norme pe $\mathbb{R}^n$ sunt echivalente atunci generează aceeași topologie.

Teoremă Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$ și $a \in A$. UASE:

1) f continuă în a, adică $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $f(U) \subset V$

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.i. $\forall x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

3) $\forall (x_n)_{n\geq 1} \subset A$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Exerciții

1*) Fie $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mulțimi închise și $C = A + B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Arătați că

1) Mulțimea C nu este în mod necesar închisă
2) Dacă A închisă și B compactă, atunci C este închisă
3) Dacă A și B sunt compacte atunci C este compactă.

2*) Fie $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ și $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Arătați că există $(x,y) \in S$ a.î. $f(x,y) = f(-x,-y)$

3) Studiați continuitatea funcției $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$