CURS#9

11. Metode de ortogonalizare:

    (vii) aplicaţie: factorizarea QR prin metoda reflexiilor (Householder);

    (viii) aplicaţie: factorizarea QR cu pivotare prin metoda reflexiilor (Householder);

    (ix) metoda rotaţiilor (Givens);

    (x) aplicaţie: factorizarea QR prin metoda rotaţiilor (Givens).

PROBLEME

1) Fie $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$ şi $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$. Considerăm factorizarea QR a matricei $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\,\mathbf{R}\,, \tag{1}$$

unde $\mathbf{Q} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală şi $\mathbf{R} \in \mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})$ este o matrice superior triunghiulară cu elementele de pe diagonală strict pozitive, respectiv factorizarea Cholesky a matricei $\mathbf{A}^\mathsf{T}\,\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\,\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}^\mathsf{T}\,, \tag{2}$$

unde $\mathbf{L} \in \mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})$ este o matrice inferior triunghiulară cu elementele de pe diagonală strict pozitive.

   (i) Arătaţi că $\mathbf{R}^\mathsf{T}\,\mathbf{R} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}^\mathsf{T}$.

   (ii) Puteţi concluziona că $\mathbf{R}^\mathsf{T} = \mathbf{L}$? Justficaţi răspunsul.

2) Fie $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$ şi $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$.

   Determinaţi o altă metodă de factorizare QR a matricei $\mathbf{A}$ folosind matricea $\mathbf{A}^\mathsf{T}\,\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})$ (i.e. matricea sistemului asociat de ecuaţii normale) şi faptul că aceasta este simetrică şi pozitiv definită (SPD).

3) După cum am văzut, există două tipuri de factorizare QR ale matricei $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde $m \geq n$ şi $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$. Mai exact, au loc relaţiile

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\,\mathbf{R}_1\,, \quad \mathbf{Q}_1 \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})\,, \quad \mathbf{R}_1 \in \mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})\,, \tag{3a}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0}_{m-n,n} \end{bmatrix}\,, \quad \mathbf{Q}_2 \in \mathscr{M}_{m}(\mathbb{R})\,, \quad \mathbf{R}_2 \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})\,. \tag{3b}$$

   Care este legătura între matricele din relaţiile (3a) şi (3b)?

ALGORITM Factorizarea QR - Metoda reflexiilor (Householder)

Date: $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $m \geq n$,

rang $A = n$

Pasul 1:

$$A \equiv A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Vrem să determinăm matricea Householder $H_1 := I_m - 2 \dfrac{\underline{v}_1 \underline{v}_1^T}{\underline{v}_1^T \underline{v}_1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

a.î. $H_1 \underline{a}_1^{(1)} = \alpha_1 \underline{e}_1$ (vezi Lema #3)

$$\begin{cases} \underline{a}_1^{(1)} := \left(a_{11}^{(1)}\ a_{21}^{(1)} \dots a_{m1}^{(1)}\right)^T \in \mathbb{R}^m \\ c_1 := \operatorname{sign}\left(a_{11}^{(1)}\right) \|\underline{a}_1^{(1)}\|_2 \in \mathbb{R}^* \\ \underline{v}_1 := \underline{a}_1^{(1)} + c_1 \underline{e}_1 \in \mathbb{R}^m \\ H_1 := H_{\underline{v}_1} = I_m - 2\dfrac{\underline{v}_1 \underline{v}_1^T}{\underline{v}_1^T \underline{v}_1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Astfel, obținem:

$$H_1 A^{(1)} = \left[-c_1 \underline{e}_1\ H_1 \underline{a}_2^{(1)} \dots H_1 \underline{a}_n^{(1)}\right]$$

$$= \left[-c_1 \underline{e}_1\ \underline{a}_2^{(2)} \dots \underline{a}_n^{(2)}\right]$$

unde

$$\underline{a}_k^{(2)} := H_1 \underline{a}_k^{(1)} = \left(I_m - 2\frac{\underline{v}_1 \underline{v}_1^T}{\underline{v}_1^T \underline{v}_1}\right) \underline{a}_k^{(1)}$$

$$= \underline{a}_k^{(1)} - 2\underline{v}_1 \frac{\underline{v}_1^T \underline{a}_k^{(1)}}{\underline{v}_1^T \underline{v}_1}, \quad k = \overline{2,n}$$

Pasul 2

$$H_1 A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|ccc} -c_1 & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ \hline 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{array}\right] =: \begin{bmatrix} -c_1 & \left(\underline{A}_{12}^{(2)}\right)^T \\ \underline{0}_{m-1} & A^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{A}_{12}^{(2)}\right)^T := \left(a_{12}^{(2)} \ a_{13}^{(2)} \cdots a_{1n}^{(2)}\right) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$$

$$A^{(2)} = \left(a_{ij}^{(2)}\right)_{\substack{i=\overline{2,m} \\ j=\overline{2,n}}} \in \mathcal{M}_{m-1,n-1}(\mathbb{R})$$

Vrem să determinăm matricea Householder $\tilde{H}_2 := I_{m-1} - 2\,\frac{\underline{v}_2 \underline{v}_2^T}{\underline{v}_2^T \underline{v}_2} \in \mathcal{M}_{m-1}(\mathbb{R})$ a.î. $H_2 \underline{a}_2^{(2)} = \alpha_2 \underline{e}_2$ (vezi Lema #3).

Folosind Lema #2, înfapt căutăm

$H_2 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ matrice Householder de forma

$$H_2 := \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{m-1}^T \\ \underline{0}_{m-1} & \tilde{H}_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

unde $\tilde{H}_2 \in \mathcal{M}_{m-1}(\mathbb{R})$ matrice Householder, ie lucrăm în $\mathbb{R}^{m-1}$.

$$\begin{cases} \underline{\tilde{a}}_2^{(2)} := \left(a_{22}^{(2)} \;\; a_{32}^{(2)} \cdots a_{m2}^{(2)}\right)^T \in \mathbb{R}^{m-1} \\ c_2 := \operatorname{sign}\left(a_{22}^{(2)}\right) \|\underline{\tilde{a}}_2^{(2)}\|_2 \\ \underline{v}_2 := \underline{\tilde{a}}_2^{(2)} + c_2 \, \underline{e}_1\big|_{\mathbb{R}^{m-1}} \in \mathbb{R}^{m-1} \\ \tilde{H}_2 := I_{m-1} - 2 \dfrac{\underline{v}_2 \underline{v}_2^T}{\underline{v}_2^T \underline{v}_2} \in \mathcal{M}_{m-1}(\mathbb{R}) \\ H_2 := \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^T \\ \underline{0}_{m-1} & \tilde{H}_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Astfel, obținem

$$H_2 H_1 A = \left[\begin{array}{c|cc} -c_1 & \multicolumn{2}{c}{\left(\underline{A}_{12}^{(2)}\right)^T} \\ \hline \underline{0}_{m-1} & -c_2 & \left(\underline{A}_{23}^{(3)}\right)^T \\ \cline{2-3} & \underline{0}_{m-2} & A^{(3)} \end{array}\right]$$

unde

$$\tilde{H}_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} -c_2 & \left(\underline{A}_{23}^{(3)}\right)^T \\ \underline{0}_{m-2} & A^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{A}_{23}^{(3)}\right)^T := \left(a_{23}^{(3)} \; a_{24}^{(3)} \cdots a_{2n}^{(3)}\right) \in \mathcal{M}_{1,n-2}$$

$$A^{(3)} := \left(a_{ij}^{(3)}\right)_{\substack{i=\overline{3,m} \\ j=\overline{3,n}}} \in \mathcal{M}_{m-2,n-2}(\mathbb{R})$$

<u>OBS</u>: Procedura continuă în mod similar până la <u>Pasul n/n-1</u> pt $m>n$ / $m=n$ (când se epuizează dimensiunea cea mai mică a lui A).

Acest algoritm produce următoarea factorizare a lui A:

$$H_{n/n-1} \cdots H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} R \\ O_{m-n,n} \end{bmatrix}$$

unde $R \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice superior triunghiulară.

Cum $H_k^T H_k = I_m$, $k = \overline{1,n} / \overline{1,n-1}$, rezultă $(H_{n/n-1} \cdots H_2 H_1)^T (H_{n/n-1} \cdots H_2 H_1) = I_n$ și astfel obținem <u>factorizarea QR</u> a lui A prin intermediul metodei reflexiilor (Householder):

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ O_{m-n,n} \end{bmatrix}$$

- $Q := (H_{n/n-1} \cdots H_2 H_1)^T \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ort.
- $R \in M_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară

3.4. FACTORIZAREA QR CU PIVOTARE: METODA REFLEXIILOR (HOUSEHOLDER)

<u>OBS</u>: Din rațiuni de stabilitate numerică, este indicat ca, la fiecare pas al factorizării QR, metoda Householder să se aplice vectorului coloană optim, i.e. prin alegerea celui mai potrivit vector coloană.

$\Rightarrow$ Este necesară <u>o pivotare în raport cu coloanele</u> la fiecare pas al factorizării QR prin metoda Householder!

1) <u>Pivotare pe coloane la pasul k:</u> interschimbul coloanei k a matricei A de la pasul k, $A^{(k)}$, cu coloana optimă $j > k$.

2) <u>Criteriu de alegere a coloanei optime $j > k$ la pasul k:</u>

$$(H_{k-1}\cdots H_2H_1)\,A\,(P_{1j_1}P_{2j_2}\cdots P_{k-1\,j_{k-1}}) =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} -c_1 & (\underline{A}^{(2)}_{12})^T \\ \hline \underline{0}_{m-1} & \begin{array}{c|c} -c_2 & (\underline{A}^{(3)}_{23})^T \\ \hline \underline{0}_{m-2} & \begin{array}{c} \ddots \\ \hline \begin{array}{c|c} -c_{k-1} & (\underline{A}^{(k)}_{k-1,k})^T \\ \hline \underline{0}_{m-k+1} & A^{(k)} \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

- $H_i := H_{\underline{v}_i} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ matrice Householder, $i=\overline{1,k-1}$

- $P_{ij_i} := [e_1 \dots e_{i-1}\; e_{j_i}\; e_{i+1} \dots e_{j_i-1}\; e_i\; e_{j_i+1} \dots e_n]$ $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ permutare simplă, $i=\overline{1,k-1}$

- $A^{(k)} := (a^{(k)}_{pq})_{\substack{p=\overline{k,m}\\ q=\overline{k,n}}} = [\underline{a}^{(k)}_k\;\; \underline{a}^{(k)}_{k+1} \dots \underline{a}^{(k)}_n] \in$

  $\in \mathcal{M}_{m-k+1,\,n-k+1}(\mathbb{R})$, rang $A^{(k)} = n-k+1$

- $\underline{a}^{(k)}_j := (a^{(k)}_{kj}\;\; a^{(k)}_{k+1,j} \dots a^{(k)}_{mj})^T \in \mathbb{R}^{m-k+1}$, $j=\overline{k,m}$

Criteriul de alegere a coloanei optime:

$$\|\overline{a}^{(k)}_{j_k}\|_2 := \max_{j=\overline{k,n}} \left\{ \|\overline{a}^{(k)}_j\|_2 \,\middle|\, a^{(k)}_{kj} \neq 0 \right\}$$

$\Rightarrow$ $P_{kj_k} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ permutare simplă

$$(H_{k-1} \dots H_2 H_1) A (P_{1j_1} P_{2j_2} \dots P_{k-1, j_{k-1}} P_{kj_k})$$

$\Rightarrow$ Determină $H_k := H_{\underline{v}_k} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ matrice Householder pt pasul k

OBS: După $n/n-1$ pași, obținem:

$$(H_{n/n-1} \dots H_2 H_1) A (P_{1j_1} P_{2j_2} \dots P_{nj_n / n-1, j_{n-1}}) = R$$

unde $R \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ superior triunghiulară cu $R_{ij} > 0$, $i,j = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &AP = QR, \\ &Q := H_1 H_2 \dots H_{n/n-1} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ ortogonală} \\ &P := P_{1j_1} P_{2j_2} \dots P_{nj_n/n-1, j_{n-1}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ permutare} \end{aligned}}$$

3.5. METODA ROTAȚIILOR (GIVENS)

OBSERVAȚII:

1) Metoda reflexiilor (Householder) transformă un vector nenul $\underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\underline{0}_m\}$ într-un vector coliniar cu $\underline{e}^{(1)} := (1\ 0 \ldots 0)^T \in \mathbb{R}^m$, i.e. versorul axei 1 din $\mathbb{R}^m$.

2) Prin urmare, metoda reflexiilor (Householder) asociază vectorului nenul $\underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\underline{0}_m\}$ vectorul

$$\boxed{H_{\underline{v}}\, \underline{x} = \alpha\, \underline{e}^{(1)} = (\alpha\ 0 \ldots 0)^T \in \mathbb{R}^m \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*}$$

adică anihilează $(m-1)$ componente ale vectorului $\underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\underline{0}_m\}$ transformat prin $H_{\underline{v}} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$:

$$\boxed{(H_{\underline{v}}\, \underline{x})_i = (\underline{e}^{(i)})^T (H_{\underline{v}}\, \underline{x}) = 0, \ i = \overline{2,m}}$$

3) Chiar dacă metoda reflexiilor este, în general, eficientă, aceasta poate deveni greoaie sau nenecesară când numărul de componente nenule ale vectorului $\underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\underline{0}_m\}$ este <u>mic</u>.

4) Astfel, pentru vectori $\underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\underline{0}_m\}$ care au numeroase componente nule, trebuie <u>modificată strategia</u> folosită în cazul metodei reflexiilor (i.e. introducerea a $(m-1)$ componente nule în vectorul transformat $H_{\underline{v}}\underline{x}$ / anihilarea a $(m-1)$ componente ale vectorului $\underline{x}$).

<u>Noua strategie</u>: introducerea, pe rând, a câte unei componente nule în

vectorul transformat / anihilarea, pe rând, a componentelor lui $\underline{x}$.
Aceasta este <u>motivația</u> <u>metodei rotațiilor plane (Givens)</u>.

<u>DEFINIȚIE</u>:
Sn <u>rotație plană de unghi $\theta \in [0, 2\pi)$</u>

$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

<u>OBSERVAȚIE</u>: De ce $G(\theta)$ este o rotație plană de unghi θ?

Fie $\underline{y} = (y_1 \;\; y_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}_2\} \Rightarrow$

$$\underline{y} = \|\underline{y}\|_2 \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg}(y_2/y_1) \\ \|\underline{y}\|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \end{cases}$$

Atunci, transformarea lui y prin matricea $G(\theta)$ este dată de:

$$G(\theta)\,y = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|y\|_2 \cos\varphi \\ \|y\|_2 \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \|y\|_2 \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

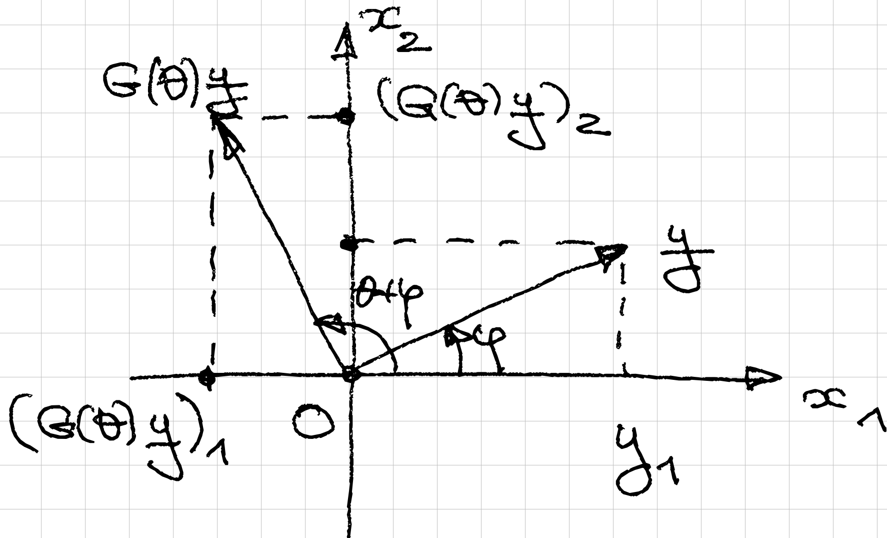
$$= \|y\|_2 \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \|y\|_2 \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) \end{bmatrix}$$

Prin urmare:

$$\begin{cases} \|G(\theta)\,y\|_2 = \|y\|_2 \\ \theta+\varphi = \operatorname{arctg}\left[(G(\theta)\,y)_2 / (G(\theta)\,y)_1\right] \end{cases}$$

Interpretare geometrică:



OBSERVAȚIE:

Ȋn fapt, rotația plană de unghi θ, $G(\theta)$, este o rotație de unghi θ în jurul axei Ox_3 (verticale), ie

$$\tilde{G}(\theta) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ liniară, ie } \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\tilde{G}(\theta) := \left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} G(\theta) & \underline{0}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LEMA#1:

$\forall\, \underline{x} = (x_1\ x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}_2\}$

$\exists\, \theta \in [0, 2\pi)$ a.î. $\begin{cases} \underline{y} := (y_1\ y_2) = G(\theta)\underline{x} \\ y_2 = 0,\ y_1 > 0 \end{cases}$

Dem:

Trebuie rezolvat, în raport cu:

$c := \cos\theta \in [-1, 1]$

$s := \sin\theta \in [-1, 1]$

următorul sistem de ecuații liniare cu constrângeri:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c x_1 - s x_2 = y_1 \\ s x_1 + c x_2 = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

pentru $\underline{x} = (x_1\ x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}_2\}$ dat.

Cazul I: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 \neq 0$

$$\begin{cases} c x_1 = y_1 \\ s x_1 = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = c x_1 \\ s = 0 \\ c = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \operatorname{sign}(x_1) \\ s = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \begin{cases} 0, & x_1 > 0 \\ \pi, & x_1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{G(\theta) = \operatorname{sign}(x_1)\, I_2}$$

Cazul II: $x_2 \neq 0$

$$\begin{cases} c x_1 - s x_2 = y_1 \\ s x_1 + c x_2 = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = -s \frac{x_1}{x_2}} \Rightarrow$$

$$\left(-s \frac{x_1}{x_2}\right)^2 + s^2 = 1 \Leftrightarrow s^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow \boxed{s = \pm \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}$$

Cum vrem $y_1 > 0$, trebuie ca

$$0 < y_1 = c x_1 - s x_2 = -s \frac{x_1^2}{x_2} - s x_2$$

$$= -\frac{s}{x_2}(x_1^2 + x_2^2) = -\frac{s}{x_2}(x_1^2 + x_2^2) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{sign}(s) = -\operatorname{sign}(x_2)}$$

Prin urmare, obținem

$$\boxed{\begin{aligned} s &= -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = -\frac{x_2}{\|\underline{x}\|_2} \\ c &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{\|\underline{x}\|_2} \end{aligned}}$$

și rezultă

$$\boxed{y_1 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|\underline{x}\|_2 > 0}$$

$$\boxed{G(\theta) := \frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix}}$$

$\square$

Pornind de la o rotație plană de unghi $\theta \in [0, 2\pi)$ putem extinde această definiție la spațiul $\mathbb{R}^m$, $m > 2$, astfel:

$$G^{(kl)}(\theta_{kl}) :=$$

$$:= \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
I_{k-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 \\
\hline
0 \ldots 0 & c & 0 \ldots 0 & -s & 0 \ldots 0 \\
\hline
0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & I_{l-k-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 \\
\hline
0 \ldots 0 & s & 0 \ldots 0 & c & 0 \ldots 0 \\
\hline
0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & I_{m-l}
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \leftarrow l \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} \underbrace{\qquad\quad}_{k-1} & \uparrow k & \underbrace{\qquad\quad}_{l-k-1} & \uparrow l & \underbrace{\qquad\quad}_{m-l} \end{array}
\end{array}$$

• $G^{(kl)}(\theta_{kl}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ liniară,
ie $G^{(kl)}(\theta_{kl}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$;

• $\theta_{kl} \in [0, 2\pi)$;

• $c := \cos \theta_{kl}$; $s := \sin \theta_{kl}$;

<u>OBSERVAȚII</u>:

1) Înmulțirea la stânga a matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ cu matricea rotație plană de unghi $\theta_{kl} \in [0, 2\pi)$, unde $1 \leq k < l \leq m$, afectează doar liniile k și l ale matricei A.

2) $\forall\, 1 \leq k < l \leq m$, matricea rotație plană de unghi $\theta_{kl} \in [0, 2\pi)$ poate fi aleasă a.î. elementul de pe poziția (l, k) să fie <u>anihilat</u>, ie

$$\left[G^{(kl)}(\theta_{kl})\, A\right]_{lk} = 0$$

3) Pentru $k=\overline{1,m}$ fixat, considerăm acei $l\in\overline{k+1,m}$ (deci $k<l\leq m$) pt care $a_{lk}\neq 0$ și construim rotația plană $G^{(kl)}(\theta_{kl})$ care anihilează elementul a_{lk}, i.e. $\left[G^{(kl)}(\theta_{kl})A\right]_{lk}=0$.
Astfel, toate elementele de pe coloana k, aflate sub elementul de pe diagonala principală (a_{kk}), sunt anihilate (devin zero).

4) Aplicând procedura de mai sus, obținem <u>factorizarea QR</u> a matricei $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m\geq n$, $\operatorname{rang}A=n$, sub forma

$$\boxed{\begin{gathered} Q^TA:=\prod_{k=1}^{m-1}\left[\prod_{l=k+1}^{m}G^{(kl)}(\theta_{kl})\right]A=R \\ R\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ superior triunghiulară} \\ Q\in\mathcal{M}_{m}(\mathbb{R}) \text{ ortogonală/ortonormată} \end{gathered}}$$

5) Factorizarea QR de la punctul 4) a fost obținută prin intermediul rotațiilor plane (Givens) și are forma:

$$A = QR$$

unde

- $Q := \left(\prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^{m} G^{(k,l)}(\theta_{kl}) \right)^T \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ ortogonală / ortonormată;
- $R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ \\ O_{m-n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a.î.

$\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sup. triunghiulară.

EXEMPLU (rotație plană - Givens):

Să se determine rotația plană (Givens) care anihilează a doua componentă a vectorului

$$\underline{x} = (4 \quad 3)^T \in \mathbb{R}^2$$

Vrem să determinăm

$$\begin{cases} c := \cos\theta \in [-1, 1] \\ s := \sin\theta \in [-1, 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_1 > 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4c - 3s = y_1 \\ 4s + 3c = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = -\frac{4}{3}s} \Rightarrow$$

$$0 < y_1 = 4c - 3s = 4\left(-\frac{4}{3}s\right) - 3s$$

$$= -\frac{25}{3}s \Rightarrow \boxed{s < 0} \quad (*)$$

$$\left(-\frac{4}{3}s\right)^2 + s^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{9}s^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$s = \pm\frac{3}{5} \overset{(*)}{\Rightarrow} \boxed{s = -3/5} \Rightarrow \boxed{c = 4/5}$$

Rezultă $\boxed{y_1 = 5}$

Prin urmare, rotația plană (Givens) este dată de:

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

Verificare:

$$G(\theta)\,\underline{x} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\checkmark$