Seminarul 13

Wednesday, May 19, 2021 8:56 AM

Parțial 2 - Seria 11

3. $P_1(X) = X^3 + 29X + 30$

$P_2(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$

$P_1(a) = P_2(a), \ \forall a \in K = ?$

Obs $\deg(P_1 - P_2) \leq 2$

și $(P_1 - P_2)(a) = 0, \forall a \in K$

Dacă $|K| \geq 3$, atunci

$P_1(a) = P_2(a), \forall a \in K \iff P_1(X) = P_2(X)$

- $K = \mathbb{Q}$ ✗
- $K = \mathbb{Z}_{13}$ ✗
- $K = \mathbb{Z}_3$: $P_1(X) = X^3 + \widehat{29}X + \widehat{30} = X^3 + \hat{2}X$ ✓

  $P_2(X) = X^3 + \hat{2}X$

- $K = \mathbb{Z}_2$: evident $P_1 \neq P_2$ în $\mathbb{Z}_2[X]$, dar $P_1(a) = P_2(a), \ \forall a \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$

$$\left.\begin{array}{ll} P_1(\hat{0}) = \hat{0}, & P_2(\hat{0}) = \hat{0} \\ P_1(\hat{1}) = \hat{0}, & P_2(\hat{1}) = \hat{0} \end{array}\right\} \Rightarrow P_1(a) = P_2(a), \ \forall a \in \mathbb{Z}_2$$

4. Câți factori are $X^{12} - 1$ în:

a) $\mathbb{C}$ (12?)

~~b)~~ $\mathbb{R}$ 7! ~~(6?)~~

c) $\mathbb{Q}$ (6?)

~~d)~~ $\mathbb{Z}_{29}$ ≥ 8 (7?)

-1, 1 sunt singurele rad de ord 12 ale unității reale

$X^{12} - 1 = (X-1)(X+1) \cdot$ (factori de grad 2)

de grad total 10

$\Rightarrow 5$ factori

$$X^{12} - 1 = (X^6 - 1)(X^6 + 1) = (X^3 - 1)(X^3 + 1)(X^6 + 1) \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= (X-1)(X^2 + X + 1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 1)\underbrace{(X^4 - X^2 + 1)}_{\text{ireductibil?}}$$

Pp $X^4 - X^2 + 1$ reductibil în $\mathbb{Q}[X]$

ireductibil?

Dp X^4-X^2+1 reductibil în $\mathbb{Q}[X]$

X^4-X^2+1 nu are rădăcini $(X^2+aX+b)(X^2+cX+d)$, a,b,c,d pot fi presupuse în $\mathbb{Z}$ (Lema Gauss)

$$\Rightarrow \begin{cases} bd = 1 \Rightarrow b=d=\pm 1 \\ ad+bc=0 \Leftrightarrow a+c=0 \\ ac+b+d=-1 \\ a+c=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} ac=-3, \ a+c=0 \ ⚡ \\ ac=1, \ a+c=0 \ ⚡ \end{matrix}$$

În $\mathbb{Z}_{29}[X]$

$$X^{12}-1 = (X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)\underbrace{(X^2+1)}_{=(X-12)(X+12)}\underbrace{(X^4-X^2+1)}_{=(X^2-12X-1)(X^2+12X-1)}$$

$29 \equiv 1 \ (4)$

$\Rightarrow -1$ e rest pătratic i.e. $X^2+1=(X-a)(X+a)$, $a^2\equiv -1 \pmod{29}$

$a=12$

$$(X^2-1)^2+X^2 = (X^2-1)^2-a^2X^2$$
$$=((X^2-1)-aX)((X^2-1)+aX)$$
$$=(X^2-12X-1)(X^2+12X-1)$$

nr de rădăcini // distincte

$\mathbb{C}[X]$ factori liniari

nr de factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$ ai polinomului

1 e rădăcină dublă

5. Considerăm următoarele afirmaţii: **(1p)**

(1) Numărul de ideale maximale ale inelului $\mathbb{C}[X]/(X^4-8X^3+17X^2-14X+4)$ este egal cu 4.

(2) Numărul de ideale maximale ale lui $\mathbb{Z}[X]$ care conţin idealul $(13, X^{507}+34X^{338}+36)$ este egal cu 2.

(3) Numărul de polinoame monice ireductibile din $\mathbb{R}[X]$ care-l divid pe $X^{60}+5X^{30}+8$ este 30.

$$\{ I \in \mathrm{Max}(\mathbb{Z}[X]) \mid I \supset (13, X^{507}+34X^{338}+36) \}$$

I ... ideale (maximale)

$\{ I \in \mathrm{Max}(\mathbb{Z}[X]) \mid I \supset (13, X^{507} + 34X^{338} + 36) \}$

$\Big\updownarrow$ Th de corespondență a idealelor (maximale)

$$\mathrm{Max}\left(\frac{\mathbb{Z}[X]}{(13, X^{507} + 34X^{338} + 36)}\right)$$

$$\Big\updownarrow$$

$$\mathrm{Max}\left(\frac{\mathbb{Z}_{13}[X]}{(X^{507} + \widehat{34}X^{338} + \widehat{36})}\right)$$

$$\Big\updownarrow$$

$\{$ factorii ireductibili ai lui $X^{507} + \hat{8}X^{338} + \widehat{10} \in \mathbb{Z}_{13}[X] \}$

$$X^{507} + \hat{8}X^{338} + \widehat{10}$$

$338 = 2 \cdot 13^2$

$507 = 3 \cdot 13^2$

$$X^{3 \cdot 13^2} + \hat{8}X^{2 \cdot 13^2} + \widehat{10} \underset{\mathrm{char}=13}{\overset{\mathbb{Z}_{13}[X]}{=\!=}} (X^3 + \hat{8}X^2 + \widehat{10})^{13^2}$$

$\underbrace{X^3 + 8X^2 + \widehat{10}}_{P(X)} \xrightarrow{\mathbb{Z}_{13}}$ ireductibil (verificăm rădăcinile)

(3) $X^{60} + 5X^{30} + 8$ — cum arată rădăcinile?

$t = x^{30} \implies t^2 + 5t + 8 = 0$ ⟶ $t_1 = z \notin \mathbb{R}$, $t_2 = \bar{z} \notin \mathbb{R}$

$\implies X^{60} + 5X^{30} + 8$ are rădăcini strict complexe

$\implies$ ... de ... de grad 2!

⇒ 30 de produse de grad 2!

6. $P(X,Y,Z) = 2\sum_{sym} X^3Y^2Z - 7\sum_{sym} X^2Y \in \mathbb{Q}[X,Y,Z]$

P_1 $\qquad$ P_2

Metoda coeficienților nedeterminați se aplică pentru polinoame simetrice omogene!

⇒ facem pt P_1 și P_2 separat.

Însă $P_1 = s_3 P_2$, deci e suficient pt P_2

$LT_{lex}(P_2) = X^2Y$, - - - $P_2 = s_1 s_2 - 3s_3$?

<u>Rezolvarea ecuațiilor algebrice</u>

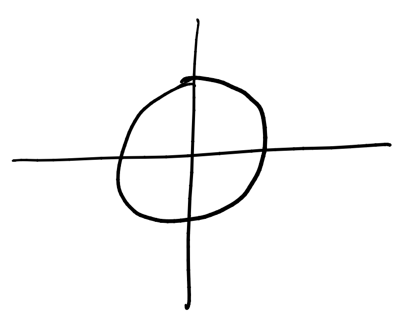
2.1. Rezolvați în $\mathbb{C}$:

a) $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$

b) $z^2 = 1 + 2i$

a) $w = 1 + i\sqrt{3} = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$



În general, dacă $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$, atunci ecuația

$z^n = w$ are soluțiile $z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right)$, În general, dacă ...

$z^n = w$ are soluțiile $z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right)$,

$k=\overline{0,n-1}$

La noi, $z^3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)}$

<u>Obs</u> Dacă avem z a.î. $z^n = w$, celelalte rădăcini sunt

$$z_k = z\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\quad k=\overline{1,n-1}.$$

b) $z^2 = 1+2i = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}i\right)$

$\cos\theta$ $\sin\theta$, $\theta = ?$

$z = a+ib \Rightarrow z^2 = (a^2-b^2)+2abi$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=1 \\ ab=1 \end{cases},\ a,b\in\mathbb{R} \qquad ab=1 \xrightarrow{a\neq 0} b=\frac{1}{a} \Rightarrow a^2-\frac{1}{a^2}=1$$

$\Leftrightarrow a^4-a^2-1=0 \Rightarrow 4$ rădăcini? Împreună, vor rezulta <u>două</u> rădăcini reale

$t=a^2 \Rightarrow t^2-t-1=0 \Rightarrow t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$

$t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$

$a^2 = t_1 \Rightarrow a_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \quad a_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$a^2 = t_2 < 0 \Rightarrow a \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \quad b_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

$\Rightarrow z = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$

<u>Ex 2.2</u> $\underline{\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 6}$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = (a+b)((a+b)^2-3ab)$

<u>Var 1</u> $a = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$

$b = \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$

$a^3+b^3 = 90$

$ab = \sqrt[3]{45^2 - 2\cdot 29^2} = \sqrt[3]{2025-1682} =$
$= \sqrt[3]{343} = 7$

$90 = (a+b)\left((a+b)^2 - 3\cdot 7\right) \Rightarrow (a+b)^3 - 21(a+b) - 90 = 0$

$z = a+b \Rightarrow z^3 - 21z - 90 = 0$

$\Rightarrow 6$ e rădăcină

$216 - 126 - 90 = 0$

$\Rightarrow z^3 - 21z - 90 = (z-6)\underbrace{(z^2+6z+15)}_{\Delta<0} \Rightarrow \overset{z}{\overset{\|}{a+b}} = 6$

este singura soluție reală

$z^3 - 6z^2 + 6z^2 - 36z + 15z - 90$

Dar $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{a+b=6}$

<u>Var 2</u> Sperăm să găsim $u+v\sqrt{2}$ a.î. $(u+v\sqrt{2})^3 = 45+29\sqrt{2}$

$u, v \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow (u-v\sqrt{2})^3 = 45-29\sqrt{2}$$

și $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = (u+v\sqrt{2}) + (u-v\sqrt{2}) = 2u$

Avem: $\underbrace{(u+v\sqrt{2})^3}_{=\,45+29\sqrt{2}} = u^3 + 3u^2v\sqrt{2} + 6uv^2 + 2v^3\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 45 = u^3 + 6uv^2 \\ 29 = 3u^2v + 2v^3 \end{cases}$$

Obs. că $u=3$ respectiv $v=1$

$\Rightarrow$ $3+\sqrt{2}$ este <u>unicul</u> nr. real a.î. $(3+\sqrt{2})^3 = 45+29\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ expresia $= (3+\sqrt{2}) + (3-\sqrt{2}) = 6.$

Metoda lui Cardano de rezolvare a ecuațiilor de grad 3

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ — Ideea 1 — formăm un cub $\rightarrow$ $y^3 + py + q = 0$

$y = x + \frac{a}{3}$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - 3x\cdot\frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + bx + c$$

$$\overset{y = x + \frac{a}{3}}{=} y^3 + (\text{termeni de grad} \le 1 \text{ în } y)$$

Obs. că avem ecuația $x^3 + px + q = 0$

Ideea 2 $x = u+v$ $\Rightarrow$ $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$

Ideea 2 $\quad x = u+v \quad \Rightarrow \quad (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$

$$\Leftrightarrow u^3 + \underbrace{3u^2v + 3uv^2} + v^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv+p)(u+v) + q = 0$$

Ideea 2.5 : vrem $3uv + p = 0 \Rightarrow u^3 + v^3 = -q$

Căutăm u, v a.î. $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ u^3 și v^3 sunt rădăcinile polinomului de grad 2

$$T^2 + qT - \frac{p^3}{27}$$

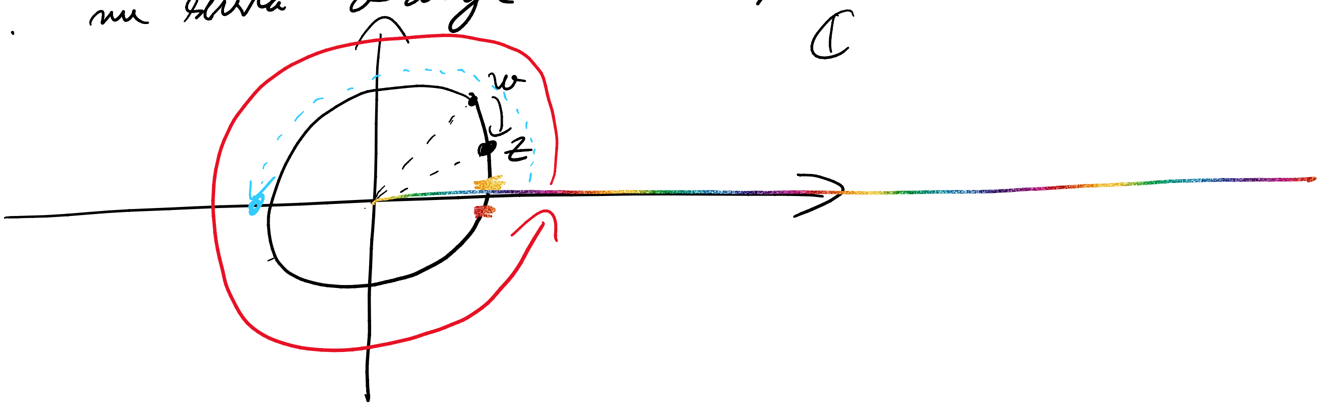
$$\Rightarrow \boxed{u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

Obs • Rolurile lui u și v sunt interschimbabile, de aceea am ales $+$ în expresia de mai sus

• Rolurile lui u și v sunt interschimbabile, deci $\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$ înseamnă unul din cele două numere complexe z a.î. $z^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$

Obs. În $\mathbb{C}$, funcția $\sqrt{}$ nu este corect definită!
(i.e. nu există o alegere "bună" pt z a.î. $z^2 = w$)

$\mathbb{C}$



• $i = "\sqrt{-1}"$ $\cancel{\Rightarrow} -1 = i^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$
doar o notație

Deci $\boxed{u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} \Rightarrow u_1, u_2, u_3 \Downarrow v_1, v_2, v_3 \Big\} \Rightarrow x_1, x_2, x_3$

în practică, dificil

Ex 2.3. a) $x^3 - 9x - 12 = 0$

Obs Prin calcule, nu are soluții raționale

$p = -9, \quad q = -12$

Caut x de forma $x = u + v$ cu $uv = -\frac{p}{3} = 3$ și

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{12 + \sqrt{144 - \frac{4\cdot 9^3}{27}}}{2}$$

$9^3 = 3^6\ 3^3$

$$= \frac{12+\sqrt{144-108}}{2} = \frac{12+6}{2} = 9$$

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt[3]{9}$$

$$u_2 = \sqrt[3]{9}\cdot\varepsilon \quad , \text{unde } \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad de ord 3 a unității}$$

$$u_3 = \sqrt[3]{9}\cdot\varepsilon^2$$

$$v = \frac{3}{u} \Rightarrow \quad v_1 = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{3}$$

$$v_2 = \sqrt[3]{3}\cdot\varepsilon^2$$

$$v_3 = \sqrt[3]{3}\cdot\varepsilon$$

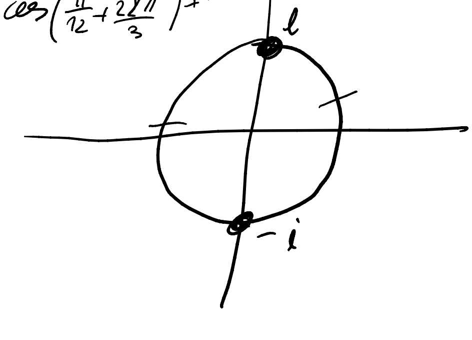
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} \\ x_2 &= \sqrt[3]{9}\cdot\varepsilon + \sqrt[3]{3}\cdot\varepsilon^2 \\ x_3 &= \sqrt[3]{9}\cdot\varepsilon^2 + \sqrt[3]{3}\cdot\varepsilon \end{aligned}}$$

b) $x^3 - 3x = 0 \iff x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$

<u>Cardano</u> $\quad p = -3, \quad q = 0$

$$\Rightarrow u^3 = \frac{\sqrt{-\frac{4\cdot \cancel{27}}{\cancel{27}}}}{2} = \frac{\sqrt{-4}}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$u_k = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3}\right)$$



$$\Rightarrow u_1 = -i \qquad v = \frac{1}{u} \Rightarrow \quad v_1 = i$$

$$u_2 = -i\varepsilon \qquad v_2 = i\cdot\varepsilon^2$$

$$u_3 = -i\cdot\varepsilon^2 \qquad v_3 = i\cdot\varepsilon$$

$$\Rightarrow x_1 = -i + i = 0$$

$$x_2 = -i\varepsilon + i\varepsilon^2 = -i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$x_2 = -i\varepsilon + i\varepsilon^2 = -i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$x_3 = -i\varepsilon^2 + i\varepsilon = -x_2 = -\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ u și v pot fi pur imaginare, iar x real!

<u>Temă</u> restul (4 exc)

2.5. K corp, $R : K[X] \to K[X]$, $\boxed{R(f)(X) = X^{\deg f} f\left(\frac{1}{X}\right)}$

i.e. $R(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = a_n + a_{n-1}X + a_{n-2}X^2 + \dots + a_1X^{n-1} + a_0X^n$

<u>Def</u> Un polinom se numește reciproc dacă $R(f)(X) = f(X)$.

a) Data trecută: dacă $f(0) \neq 0$, atunci $f(X)$ ireductibil $\Updownarrow$ $R(f)(X)$ ireductibil

b) Dem că, dacă f reciproc și $\deg f = 2n$, atunci $f(X) = X^n g\left(1 + \frac{1}{X}\right)$, unde $g \in K[X]$, $\deg g = n$.

$$\frac{1}{X^n} f(X) = h(X) + h\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$f(X) = a_{2n}X^{2n} + a_{2n-1}X^{2n-1} + \dots + a_{n+1}X^{n+1} + a_n + a_{n+1}X^{n-1} + a_{2n-1}X + a_{2n}$$

$$= X^n\left(\underbrace{a_{2n}}\left(X^n+\frac{1}{X^n}\right)+\underbrace{a_{2n-1}}\left(X^{n-1}+\frac{1}{X^{n-1}}\right)+\dots+\underbrace{a_{n+1}}\left(X+\frac{1}{X}\right)+a_n\right)$$

$$f(X)= a_{2n}X^n+a_{2n-1}X^{n-1}+\dots+a_{n+1}X+\frac{a_n}{2}$$

<u>Recap</u> X, Y variabile $\Rightarrow X^k+Y^k$ se scrie ca polinom în $X+Y$ și XY

$Y=\frac{1}{X} \Rightarrow X^k+\frac{1}{X^k}$ se scrie ca polinom în $X+\frac{1}{X}$ • (și 1...)

$\Rightarrow$ fiecare dintre $X^k+\frac{1}{X^k}$ de mai sus e polinom în $X+\frac{1}{X} \longrightarrow g$

$$\Rightarrow f(X)= X^n g\left(X+\frac{1}{X}\right)$$

c) Dacă f reciproc și $\deg f = 2n+1$, atunci $f(X)=(X+1)f_1(X)$, cu $f_1(X)$ reciproc de grad par.

Într-adevăr, dacă

Într-adevăr, dacă

$$f(X) = a_{2n+1}X^{2n+1} + a_{2n}X^{2n} + \dots + a_{n+1}X^{n+1} + a_{n+1}X^{n} + \dots + a_{2n}X + a_{2n+1}$$

$$\Rightarrow f(-1) = a_{2n+1}\Big[\underbrace{(-1)^{2n+1} + (-1)^0}_{0}\Big] + a_{2n}\Big(\underbrace{(-1)^{2n} + (-1)^1}_{0}\Big) + \dots$$

$$= 0$$

$$\overset{\text{Bezout}}{\Longrightarrow} f(X) = (X+1)f_1(X). \text{ În plus}$$

$$\Downarrow R$$

$$\underset{f(X)}{\underset{\parallel}{R(f)(X)}} = \underset{X+1}{\underset{\parallel}{R(X+1)}}\, R(f_1)(X) \Rightarrow R(f_1) = f_1 \;!$$

<u>Ex 2.6.</u> Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0 \quad (*)$

Fie $z^2 = w \quad \Rightarrow \quad w^4 + 4w^3 - 10w^2 + 4w + 1 = 0$

<u>Obs</u> că $w_1 = 1$ e soluție

$$\Rightarrow (w-1)(w^3 + 5w^2 - 5w - 1) = 0$$

$$(w-1)\big[(w-1)(w^2 + w + 1) + 5w(w-1)\big] = 0$$

$$(w-1)\left[(w-1)(w^2+w+1)+5w(w-1)\right]=0$$

$$\Rightarrow (w-1)^2\,(w^2+6w+1)=0$$

$$w_1=w_2=1$$

$$w_3=\frac{-6+4\sqrt{2}}{2}=-3+2\sqrt{2}$$

$$w_4=-3-2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad w_1=1 \begin{cases} z_1=1 \\ z_5=-1 \end{cases}$$

$$w_2=1 \begin{cases} z_2=1 \\ z_6=-1 \end{cases}$$

$$\sqrt{2}-1$$

$$w_3=-3+2\sqrt{2} \begin{cases} z_3=i\sqrt{-3+2\sqrt{2}} \\ z_7=-i\sqrt{2\sqrt{2}-3} \end{cases}$$

$$w_4=-3-2\sqrt{2} \begin{cases} \_\_ \\ \_\_ \end{cases}$$

Var 2

$$z^8+4z^6-10z^4+4z^2+1 \overset{\text{regrupare}}{=\!=} z^4\left(\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-10\right)$$

$$p_k=z^k+\frac{1}{z^k}, \qquad s_1=z+\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow p_2=s_1^2-2$$

$$\boxed{p_k-s_1p_{k-1}+s_2p_{k-2}=0,\ \forall k\geq 2}$$

$$p_3=s_1p_2-s_1=s_1^3-2s_1-s_1=s_1^3-3s_1$$

$$p_4=s_1p_3-p_2=s_1^4-3s_1^2-s_1^2+2=s_1^4-4s_1^2+2$$

Cum $z=0$ nu e rădăcină, $(*) \Leftrightarrow p_4+4p_2-10=0$

$$\Leftrightarrow s_1^4-\cancel{4s_1^2}+2+4(\cancel{s_1^2}-2)-10=0$$

$$\Leftrightarrow s_1^4-16=0 \quad \Leftrightarrow s_1^4=16 \quad \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^4=16$$

- $z + \frac{1}{z} = 2 \Rightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{z_1 = z_2 = 1}$ ✓

- $z + \frac{1}{z} = 2i \Rightarrow z^2 - 2iz + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-i)^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (z-i)^2 - (i\sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - i - i\sqrt{2})(z - i + i\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} z_4 = i(1+\sqrt{2}) \\ z_8 = i(1-\sqrt{2}) \end{matrix}}$ ✓

- $z + \frac{1}{z} = -2 \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_5 = z_6 = -1}$

- $z + \frac{1}{z} = -2i \Rightarrow z^2 + 2iz + 1 = 0 \Leftrightarrow (z+i)^2 - (i\sqrt{2})^2 = 0$

$\Leftrightarrow (z + i - i\sqrt{2})(z + i + i\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} z_3 = i(-1+\sqrt{2}) \\ z_7 = i(-1-\sqrt{2}) \end{matrix}}$

b) $4z^{11} + 4z^{10} - 21z^9 - 21z^8 + 17z^7 + 17z^6 + 17z^5 + 17z^4 - 21z^3 -$

$-21z^2 + 4z + 4 = 0 \quad (*)$

<u>Obs</u> Este ecuație reciprocă!

Ex 2.5 c)

$\Longrightarrow (*) \Leftrightarrow (z+1)\big(\underbrace{4z^{10} - 21z^8 + 17z^6 + 17z^4 - 21z^2 + 4}_{\text{reciproc de grad par}}\big) = 0$

$z_{11} = -1$

$\Rightarrow 4z^{10} - 21z^8 + 17z^6 + 17z^4 - 21z^2 + 4 =$

$z = w^2$ ... 4 ... w^3 ... $17w^2 - 21w + 4$

$\rightarrow$ "

$z = w^2$ $4w^5 - 21w^4 + 17w^3 + 17w^2 - 21w + 4$

Exc 2.5 c) $(w+1)\left(\underbrace{4w^4 - 25w^3 + 42w^2 - 25w + 4}_{\text{reciproc de grad par}}\right) = 0$

$4w^5 + 4w^4 - 25w^4 - 25w^3 + 42w^3 + 42w^2 - 25w^2 - 25w + 4w + 4$

$\Leftrightarrow (w+1)\, w^2 \left(4\left(w^2 + \frac{1}{w^2}\right) - 25\left(w + \frac{1}{w}\right) + 42\right) = 0 \quad (**)$

$w_1 = -1$

$(**) \Leftrightarrow w = -1$ sau $4\left(w^2 + \frac{1}{w^2}\right) - 25\left(w + \frac{1}{w}\right) + 42 = 0$

$a = w + \frac{1}{w} \Rightarrow 4(a^2 - 2) - 25a + 42 = 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 25a + 36 = 0$ + Temă!

Exc 2.9. Fie $n > 1$ natural.

Arem că $X^n + 5X^{n-1} + 3$ ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$

Pp că $X^n + 5X^{n-1} + 3 = (X^k + b_{k-1}X^{k-1} + \dots + b_0)\cdot(X^l + c_{l-1}X^{l-1} + \dots + c_0)$

Lema Gauss: pot pp $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b_0 = \pm 3,\ c_0 = \pm 1$. Pp că $k, l \geq 1$.

Temă – Relucăm data viitoare!