§1. Subspații vectoriale

① $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +, \cdot)/\mathbb{C}$

a) $R = \left\{ I_2, P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ reper în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (matrice Pauli).

b) $R_0 \xrightarrow{A} R$, $A = ?$ R_0 = reperul canonic.

c) Să se afle coord. lui $M = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3 & i \end{pmatrix}$ în raport cu R.

d) $P_k^2 = I_2$, $\forall k = \overline{1,3}$, $P_a P_b = i\,\varepsilon_\sigma P_c$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$

e) Dați exemple de subspații care verifică

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = V_1 \oplus V_2 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$.

② $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$, $S = \{(1,2,3), (-1,1,5)\}$

$S' = \{(1,5,11), (2,1,-2), (3,6,9)\}$.

a) $\langle S \rangle = \langle S' \rangle = V'$

b) Să se descrie V' printr-un sistem de ec. liniare.

c) Să se det. V'' a.î. $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

③ $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \right\}$

Să se descompună $x = (-1, 3, 4)$ în raport cu

$\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

§2. Aplicații liniare

$(V_i, +_i)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect, $i = \overline{1,2}$

- $f : V_1 \to V_2$ s.n. <u>aplicație liniară</u> $\iff$ 1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
  2) $f(ax) = a f(x)$, $\forall x, y \in V_1$, $\forall a \in \mathbb{K}$

- f liniară $\iff f(ax+by) = a f(x) + b f(y)$, $\forall x, y \in V_1$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$.

- $\operatorname{Ker} f = \{ x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2} \}$ nucleul lui f

  $\operatorname{Im} f = \{ y \in V_2 \mid \exists x \in V_1 \text{ a.î. } f(x) = y \}$ imaginea lui f

<u>Teorema</u> $f : V_1 \to V_2$ liniară

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$.

<u>Matricea asociată unei apl. liniare</u>

$\mathcal{R}_1 = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{A} \mathcal{R}_2 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$

reper în V_1 reper în V_2

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \bar{e}_j$, $\forall i = \overline{1,n}$, $A = (a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$A = [f]_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}$, $f(x) = y \iff Y = AX$.

<u>Prop</u>

a) f inj $\iff \operatorname{Ker} f = \{0_{V_1}\} \iff \dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$

b) f surj $\iff \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} V_2 \iff \dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim V_2$

c) f bij $\iff \dim V_1 = \dim V_2 = \operatorname{rang}(A)$

① $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,-x_2)$

$f \in Aut(\mathbb{R}^2)$.

② $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+x_3,\ 2x_1+5x_2+3x_3,\ -3x_1-7x_2-4x_3)$

a) f liniară

b) $\ker f=?$ Precizați un reper în $\ker f$

c) $Im\, f=?$ —"— $Im\, f$

d) $[f]_{R_0,R_0}=A=?$, R_0 = reperul canonic în $\mathbb{R}^3$.

③ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x)=(3x_1-2x_2,\ 2x_1-x_2,\ -x_1+x_2)$

a) f liniară

b) f inj

c) $Im\, f=?$

d) $[f]_{R_0,R_0'}=A=?$ R_0, R_0' repere canonice în $\mathbb{R}^2$, resp $\mathbb{R}^3$

④ $f: \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(P)=P'$

a) $[f]_{R_0,R_0'}=A=?$, R_0, R_0' repere canonice în $\mathbb{R}_3[X]$, resp. $\mathbb{R}_2[X]$

b) $\dim \ker f$, $\dim Im\, f$.

⑤ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+x_3,\ -x_1-2x_2-x_3,\ x_1+x_2+x_3)$

a) $[f]_{R_0,R_0}=A=?$

b) $\dim \ker f$, $\dim Im\, f$

c) $V'=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \end{cases}\right\}$

$f(V')=?$

6. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{R}_0 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\} \xrightarrow{C} \mathcal{R}' = \{e_1' = e_1 - e_2, e_2' = e_1 + 2e_2\}$
repere

$((\mathbb{R}^2)^*, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ sp. vect. dual

$(\mathbb{R}^2)^* = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f$ liniară$\}$.

$\mathcal{R}^* = \{e_1^*, e_2^*\} \xrightarrow{D} \mathcal{R}'^* = \{e_1'^*, e_2'^*\}$ repere duale în sp. dual

$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, $e_i'^*(e_j') = \delta_{ij}$, $\forall\, i,j = \overline{1,2}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Precizați legătura dintre matricele C și D.

7. Fie $f \in End(V)$ a.î. $f^2 = 0$

Să se arate că $g = id_V + f \in Aut(V)$

8. $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}^3$, $f(ax+b) = (a, b, a+b)$

Fie $\mathcal{R} = \{2X-1, -X+1\}$, $\mathcal{R}' = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

repere în $\mathbb{R}_1[X]$, resp. $\mathbb{R}^3$

a) f liniară ; ~~dați expresia analitică pentru f.~~

b) $[f]_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} = A = ?$

c) $Ker f$, $Im f$

9. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ liniară, $g(v_i) = u_i$, $i = \overline{1,3}$

$v_1 = (-1,1,1)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (0,2,1)$

$u_1 = 2v_1 + 3v_2 - v_3$, $u_2 = v_1 + 3v_2 + v_3$, $u_3 = v_3$.

a) $g = ?$

b) $[g]_{\mathcal{R}_0,\mathcal{R}_0}$

c) $Ker(g)$, $Im(g)$

(10) $f : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(aX+b) = aX^2 + (a+2b)X + a - b$.
Fie $\mathcal{R} = \{1, X\}$ și $\mathcal{R}' = \{X^2, X^2+X+1, X^2+X\}$. repere în $\mathbb{R}_1[X]$, resp $\mathbb{R}_2[X]$

a) f liniară

b) $[f]_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}$

c) $\ker f$, $\operatorname{Im} f$

(11) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$ liniară

$f(X+2) = X+1$, $f(-X^2+3) = 2X+3$, $f(2X+5) = -X+1$

Determinați f.

(12) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + a, x_1 + x_3 + a)$ $a \in \mathbb{R}$

$a = ?$ a.î. f este apl. liniară.

(13) $f : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$ liniară.

Să se afle expresia analitică pentru f dacă

a) $[f]_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0} = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $[f]_{\mathcal{R},\mathcal{R}} = A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{R} = \{X-1, 2X+2\}$

(14) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x) = (x_1 - 2x_2 + 5x_3, mx_1 + 3x_2 - x_3, x_2 - 3x_3)$

a) $m = ?$ a.î. f inj

b) Pt $m = 1$ să se afle $\operatorname{Im} f$

c) Pt $m = -\frac{8}{3}$ să se afle dim $\operatorname{Im} f$

(15) Fie apl. lin $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $[f_m]_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & 3 & m \\ m & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$m = ?$ a.î. $f_m \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^3)$

T3 seminar

(1) Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liniară a.î.

$f(1,1) = (3,5)$

$f(-1,2) = (0,1)$

a) Să se det $f(x)$

b) Este f izomorfism?

(2) $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(a+bX+cX^2) = a+c+(2a+b)X^2$

a) $[f]_{R_0, R_0}$, $R_0 = \{1, X, X^2\}$ reperul canonic

b) $\dim \operatorname{Ker} f$, $\dim \operatorname{Im} f = ?$