Tutoriat 2

Sunday, 19 October 2025 17:21

Obs: $\langle \emptyset \rangle = 0_V$ (subspațiul generat de mulțimea vidă este nul).

De data trecută: Fie $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ V K-sp vect

U sn subspațiu vectorial al lui V dacă

$$\left.\begin{array}{l} \forall u, v \in U \Rightarrow u+v \in U \\ \forall k \in K \Rightarrow k \cdot v \in U \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall u, v \in U \\ \forall k_1, k_2 \in K \end{array} \text{ avem } k_1 u + k_2 v \in U$$

Prop. Fie V un K sp vectorial și $U \subseteq V$ subsp $U \neq \emptyset$.

Dacă $0_V \notin U \Rightarrow U$ nu e subspațiu vectorial (condiție necesară, dar nu suficientă)

Sisteme de generatori, mulțimi liniar independente și baze.

Def: O submulțime S a lui V s.n **sistem de generatori** dacă $\langle S \rangle = V$

SAU:

O mulțime $S \subset V$ sn sistem de generatori dacă pt. orice $v \in V$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \dots a_n \in K$ și $x_1, x_2 \dots x_n \in S$ a.î. $v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$.

Definiție: Sistem liniar independent

O mulțime $\emptyset = S \subset V$ sn **liniar independentă** dacă pentru $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_1 \dots a_n \in K$, $x_1 \dots x_n \in S$ cu proprietatea că $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$, avem că: $a_1 = a_2 \dots = a_n = 0$.

Definiție: Bază

O mulțime $S \subset V$ sn **bază** dacă este și sistem de generatori și sistem liniar independent.

Obs: Fie $S \subset V$ bază. Atunci $\forall v \in V$, $\exists!\, a_1 \dots a_n \in K$, $x_1, \dots x_n \in S$ astfel încât $v = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

Def: Dimensiunea unui spațiu.

Dimensiunea unui spațiu vectorial este cardinalul unei baze.

Proprietăți:

Fie V un K spațiu vectorial de dimensiune n.

- S este S.L.i $\Rightarrow |S| \leq n$
- S este s.g $\Rightarrow |S| \geq n$
- S este bază $\Rightarrow |S| = n$
- S este S.L.i și $|S| = n \Rightarrow S$ bază
- S este sg și $|S| = n \Rightarrow S$ bază.

Obs: Dacă sistemul liniar omogen are soluție unică (soluția nulă) atunci sistemul vect este S.L.i (sist liniar independent)

Dacă sistemul liniar omogen este compatibil nedeterminat sistemul vectorial este S.L.D. (sistem liniar dependent)

1. $\dim_K K = 1$ baza $= \{1\}$
2. $\dim_K K^n = n$ baza $= \{e_1, \dots e_n\}$
3. $\dim_K 0 = 0$ baza $= \emptyset$
4. $\dim_K K_n[X] = n+1$ baza $= \{1, X, \dots X^n\}$
5. $m, n \in \mathbb{N}^*$ $\dim_K \mathcal{M}_{m,n}(K) = m \cdot n$.

- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Teorema lui Grassmann

Fie V un K sp vectorial finit generat și X, Y subspații ale lui V.

Atunci $\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)$

Suma directă $\oplus$

Fie V un K sp vect. $U_1, \dots U_n \leq V$ subspații. Sp că V este suma directă a subsp. $U_1, \dots U_n$ dacă $\forall x \in V$ se scrie în mod unic sub forma $x_1 + \dots + x_n$, $x_1 \in U_1$ … $x_n \in U_n$.

Notăm $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$.

Propoziție

Fie V un K sp vect.; $U_1, \dots U_n \leq V$ subspații. Sunt echivalente:

1) $V = U_1 \oplus U_2 \dots \oplus U_n$

2) $\begin{cases} V = U_1 + \dots + U_n \\ \text{pt. } \forall k = \overline{1,n} \quad U_i \cap \left(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} U_j \right) = 0 \end{cases}$

Operații cu subspații vectoriale (înainte de suma directă)

Fie U_1, U_2 subsp ale lui V. atunci:

1. $U_1 + U_2 \overset{\text{def}}{=} \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$ sn suma subsp. U_1 și U_2 — SUMA

   $U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$

   $\sum\limits_{i \in I} U_i = \langle \bigcup\limits_{i \in I} U_i \rangle$

2. $U_1 \cap U_2 \leq V$ INTERSECȚIA

3. $U_1 \cup U_2 \leq V \Leftrightarrow U_1 \subseteq U_2$ sau $U_2 \subseteq U_1$ REUNIUNEA

Aplicații liniare

Def: Fie U, V două K spații vectoriale. (*)

O funcție $f: U \to V$ sn aplicație liniară dacă $f(ax+by) = a f(x) + b f(y)$ $\forall a, b \in K$, $x, y \in U$.

- Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ $m, n \in \mathbb{N}^*$

  Fie $p \in \mathbb{N}^*$ Atunci

  $f: \mathcal{M}_{n,p}(K) \to \mathcal{M}_{m,p}(K)$ $f(X) = \underset{m,n}{A} \cdot \underset{np}{X}$ apl liniară.

  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

Caz particular (*)

Pt $p = 1$.

$f: \underset{K^n}{\mathcal{M}_{n,1}(K)} \to \underset{K^m}{\mathcal{M}_{m,1}(K)}$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underset{m,n}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \cdot \underset{n,1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \quad \text{apl lin.}$$

Prop: Fie $f: U \to V$ și $g: V \to W$. două apl. lin. At. $g \circ f: U \to W$ este apl lin.

Def (izomorfism liniar):

O aplicație liniară $f: U \to V$ sn izomorfism liniar de $\exists$ o apl liniară $g: V \to U$ cu $g \circ f = Id_U$ și $f \circ g = Id_V$

Def: Două K sp vect U și V sn **izomorfe** dacă există un izomorfism liniar $f: U \to V$. Notăm $U \simeq V$.

Propoziție.

Fie $f: U \to V$ o aplicație liniară

1) $X \leq U \Rightarrow f(X) \leq V$.
2) $Y \leq V \Rightarrow f^{-1}(Y) \leq U$.

Definiție. (*)

Fie $f: U \to V$. o apl liniară.

$\operatorname{Im} f = f(U)$ sn imaginea lui f

$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ sn nucleul lui f

Obs: $\operatorname{Im} f \leq V$, $\operatorname{Ker} f \leq U$.

Prop: Fie $f: U \to V$ apl lin.

1) f surj $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = V$.
2) f este inj $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Prop: Fie V un K sp vect de dimensiune n. Atunci $V \simeq K^n$.

Teoremă (proprietatea de universalitate a spațiilor vectoriale) (*)

Fie V un K-sp vect. Fie $B = \{x_1, \dots x_n\}$ o bază a lui V.

Fie W un K-sp vect. Atunci pt orice familie de elemente $(y_i)_{i=\overline{1,n}}$ din W există o unică aplicație liniară $f: V \to W$ pentru care $f(x_i) = y_i$ $\forall i = \overline{1,n}$

Mai mult:
- f inj $\Leftrightarrow (y_i)_{i=\overline{1,n}}$ S.L.i în W
- f surj $\Leftrightarrow (y_i)_{i=\overline{1,n}}$ Sg în W
- f bij $\Leftrightarrow (y_i)_{i=\overline{1,n}}$ bază în W.

Teorema Rang – Defect.

Fie $f: V \to W$ apl lin. Atunci

$$\dim V = \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\text{rangul lui } f} + \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\text{defectul lui } f}$$