Apl: Fie $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\{\Delta_n = \det A_n\}$

a.î. A_n are:
1) 3 pe orice poziție de pe diag principală
2) 2 pe pozițiile $(1,2), (2,3), (3,4), \ldots, (n-1,n)$;
3) 1 pe pozițiile $(2,1), (3,2), (4,3), \ldots, (n,n-1)$
4) 0 în rest

Arătați că: a) $\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$, $(\forall)\, n \geq 3$ → relație de recurență

b) $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$, $(\forall)\, n \geq 3$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

a) $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Deci: $$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 3 & 2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Dezvolt $\underset{L_1}{=}$ $$3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} +$$

$$+\, 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 3 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-2}}$$

$\Delta_3 = 3 \cdot \Delta_2 - 2\Delta_1$

$\Delta_3 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3$

$\Delta_3 = 21 - 6 = 15$

$$\boxed{\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}}$$ → relație de recurență (determinant recurent)

b) $\Delta_n - 3\Delta_{n-1} + 2\Delta_{n-2} = 0$

RECAPITULARE CLASA A XI-A → $\Delta_{n+2} - 3\Delta_{n+1} + 2\Delta_n = 0$

Șiruri recurente

$a_0 = 0$; $\underbrace{a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{2}}$

recurența liniară de ordinul întâi

Recurența liniară de ordinul al doilea

$a \cdot \underbrace{x_{n+2}}_{t^2} + b \cdot \underbrace{x_{n+1}}_{t} + c \cdot \underbrace{x_n}_{t^0 = 1} = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$

Ecuația caracteristică este:

$at^2 + bt + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

I $\Delta > 0 \Rightarrow t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2$

$X_n = A t_1^n + B t_2^n, n \in \mathbb{N}$

A și B se determină din condițiile inițiale

II $\Delta = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 \in \mathbb{R}$

$x_n = A t_1^n + B \cdot n \cdot t_1^{n-1}, \forall n$

III $\Delta < 0 \Rightarrow t_1, t_2 \notin \mathbb{R}$

$t_{1,2} = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$

$r = |t_1| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

$T = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Revenim,

$\Delta_{n+2} - 3\Delta_{n-1} + 2\Delta_n = 0$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$t_1 = \frac{3-1}{2} = 1$

$t_2 = 2$

$\Rightarrow \quad \Delta_n = A \cdot t_1^n + B \cdot t_2^n$

$\Delta_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n$

$\Delta_n = A + B \cdot 2^n, \forall n \geq 3$

Calculăm $\Delta_3 = 15 \Rightarrow A + B \cdot 2^3 = 15 \Rightarrow \begin{cases} 8B + A = 15 \\ 16B + A = 31 \end{cases} \mid \cdot (-1)$

$(\Delta_4 = 3 \cdot \Delta_3 - 2 \cdot \Delta_2)$ $\quad \Delta_4 = 31 \Rightarrow A + B \cdot 2^4 = 31 \Rightarrow$

$\Delta_4 = 45 - \underbrace{2 \cdot 7}_{14} = 31$

$8B = 16 \Rightarrow B = 2$

$\Rightarrow A = -1$

$\Rightarrow \Delta_n = -1 + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} - 1, (\forall) n \geq 3$

Deci $\Delta_n = 2^{n+1} - 1, \forall n \geq 3$

TEMĂ! Fie $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\{\Delta_n = \det A_n\}$

a.î. A_n are 1) 4 pe orice poziție de pe diag. principală

2) 3 pe poz $(1,2), (2,3), \dots (n-1,n)$

3) 1 pe poz $(2,1), (3,2), \dots (n,n-1)$

4) 0 pe rest. poz

a) Det. o relație de recurență pt Δ_n

b) Calculați (efectiv) Δ_n, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$