Tutoriat 2

Algebră 1

24 Octombrie 2025

Produsul cartezian și mulțimi numărabile

1. Produsul direct/cartezian de două mulțimi

Vom începe prin prezentarea cazului finit de produs direct, după care vom trece la cel arbitrar. Este de observat faptul că următoarea construcție va putea fi generalizată la orice context în care vom avea de a face cu ceva similar cu mulțimi (obiecte) și funcții între ele (morfisme). Studentul interesat poate consulta Teoria Categoriilor. [1]

Observație. Produsul direct se mai numește și produs cartezian în cazul mulțimilor, numele venind de la matematicianul francez René Descartes.

Definiție 1.1. *Fie A și B două mulțimi. Se numește produsul cartezian (direct) al mulțimilor A și B, mulțimea*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

Observație. Produsul cartezian $A \times A$ se notează și A^2.

Această construcție ne-a definit o nouă mulțime, $A \times B$, formată din perechi de elemente din A și din B. Însă o dată cu această mulțime avem și două funcții naturale, numite proiecțiile (canonice) pe componente. În mod natural vom indexa prima componentă cu 1 și pe a doua cu 2.

Definiție 1.2. *Fie A și B două mulțimi și $A \times B$ produsul lor cartezian. Următoarele funcții naturale sunt proiecțiile canonice pe componente ale produsului cartezian.*

$$\begin{aligned} \pi_1 : A \times B \to A \;; \quad \pi_1(a, b) &= a \\ \pi_2 : A \times B \to B \;; \quad \pi_2(a, b) &= b \end{aligned}$$

Acum vom observa că mulțimea $A \times B$ împreună cu proiecțiile canonice π_1 și π_2 ne dau o proprietate esențială produsului cartezian (direct). Aceasta poartă numele de proprietate de universalitate întrucât $A \times B$ este considerat un obiect universal prin existența și unicitatea din propoziție.

Teoremă 1.1. *(Proprietatea de universalitate a produsului direct).*

Fie A și B două mulțimi și $A \times B$ produsul lor cartezian cu proiecțiile canonice π_1 și π_2. Atunci pentru orice altă mulțime C și funcții $f_1 : C \to A$ și $f_2 : C \to B$ există și este unică o funcție $f : C \to A \times B$ care pe componente este f_1 și f_2, adică $\pi_1 \circ f = f_1$ și $\pi_2 \circ f = f_2$.

Sau echivalent următoarea diagramă comută (adică rezultatul obținut este independent de drumul parcurs pe săgeți, contând doar începutul și finalul).

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Observație. Evaluată într-un punct existența și unicitatea lui f devine aproape evidentă:

$$f(c) \ = \ (f_1(c),\ f_2(c)) \quad \forall\, c \in C$$

Am convenit ca prima componentă a produsului cartezian să fie reprezentată de indexul 1 și a doua de indexul 2, astfel este corectă și următoarea interpretare a produsului cartezian:

Fie A_1 și A_2 două mulțimi, $A = A_1 \sqcup A_2$ și $I = \{1, 2\}$, numită mulțimea de indici. (Obs: $\sqcup$ este reuniunea disjunctă, este ca reuniunea normală însă considerăm că mulțimile nu au elemente în comun.) Produsul cartezian $A_1 \times A_2$ se mai poate interpreta și astfel:

$$\prod_{i \in I} A_i = A_1 \times A_2 = \{x : I \to A \mid x(i) \in A_i \quad \forall i \in I\}.$$

Astfel dacă $x \in \prod_{i \in I} A_i$ atunci x reprezintă perechea $(x(1), x(2)) \in A_1 \times A_2$. Invers dacă $(a, b) \in A_1 \times A_2$ atunci $x : I \to A$ cu $x(1) = a$ și $x(2) = b$ reprezintă un element din $\prod_{i \in I} A_i$.

Definiția anterioară poate părea ușor neintuitiva la prima vedere, însă utilitatea acesteia este că permite generalizarea la o mulțime arbitrară I de indici.

Definiție 1.3. *Fie $I \neq \varnothing$ și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi nevide. Se numește* produsul direct (cartezian) *al familiei de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ indexată după I.*

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ x : I \to \bigsqcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; x(i) \in A_i,\ \forall i \in I \right\}$$

Observație. Conform observațiilor anterioare, definiția aceasta se restrânge la cea inițială, cu perechi (a,b) pentru cazul $I = \{1, 2\}$. Pentru cazul I finită mulțimea produsului cartezian se poate reprezenta sub formă de perechi explicite, cum a fost cazul de 2 mulțimi, de exemplu pentru 3 mulțimi vom avea triplete (a,b,c).

În mod natural se vor generaliza și proiecțiile canonice pe componentele produsului direct cât și proprietatea de universalitate văzută anterior.

Definiție 1.4. *Fie $I \neq \varnothing$, $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi nevide și $\prod_{i \in I} A_i$ produsul ei cartezian. Următoarele funcții naturale sunt proiecțiile canonice pe componente ale produsului cartezian.*

$$\pi_i : \prod_{i \in I} A_i \to A_i \ ; \quad \pi_i(x) \ = \ x(i); \quad \forall i \in I$$

Teoremă 1.2. *(Proprietatea de universalitate a produsului direct).*

Fie $I \neq \varnothing$, $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi nevide și $\prod_{i \in I} A_i$ produsul ei cartezian cu proiecțiile canonice π_i. Atunci pentru orice altă mulțime B și funcții $f_i : B \to A_i$ există și este unică o funcție $f : B \to \prod_{i \in I} A_i$ care pe componente este f_i, adică $\pi_i \circ f = f_i$.

Sau echivalent următoarea diagramă comută pentru orice $i \in I$:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\prod\limits_{i \in I} A_i \arrow[rr, "\pi_i"'] & & A_i
\end{tikzcd}$$

Observație. Proprietatea de universalitate este echivalentă cu a zice că următoarele mulțimi sunt în bijecție: $Hom(C, \prod_{i \in I} A_i) \simeq \prod_{i \in I} Hom(C, A_i)$

Pentru cine dorește și demonstrația proprietății de universalitate, o găsiți în cursul domnului Gigel Militaru, însă intuiția este similară cazului cu 2 mulțimi.

2. Mulțimi Numărabile

Definiție 2.1. *Două mulțimi A și B se numesc echipotente (au același cardinal) dacă există o bijectie $f : A \to B$.*

Definiție 2.2. *O mulțime A se numește numărabilă dacă este echipotentă cu mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$. Adică avem o funcție bijectivă $f : \mathbb{N} \to A$.*

Intuitiv numerele naturale sunt un lucru "numărabil", adică putem înșira toate numerele naturale și să ne apucăm să spunem care e primul, al doilea, al treilea etc. (0, 1, 2, 3... ș.a.m.d). De aceea este folosită în definiția unei mulțimi numărabile.

Observație. Dată o mulțime numărabilă A și o funcție bijectiva $f : \mathbb{N} \to A$, ne putem apuca să numărăm elementele mulțimii A: f(0), f(1), f(2)... ș.a.m.d.

Bijectivitatea funcției ne asigură că astfel vom număra fiecare element al mulțimii exact o dată.

Definiție 2.3. *O mulțime A se numește cel mult numărabilă dacă ori este finită ori este numărabilă.*

References

[1] Saunders Mac Lane (1971): Categories for the Working Mathematician