Seminarul 8
Wednesday, April 7, 2021 8:57 AM

Polinoame simetrice (cont.)

2.1. Rezolvați în $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^5+y^5=33 \end{cases} \longleftarrow \quad xy = ?$$

$X^5+Y^5 \in \mathbb{R}[X,Y]$ simetric

$\Rightarrow X^5+Y^5 = g(X+Y,\ XY)$ polinom în polinoamele simetrice fundamentale.

$\boxed{p_5 = X^5+Y^5}$ (notațiile din Formulele lui Newton)

$p_5 = X^5+Y^5$; $\quad (X_1 = X,\ X_2 = Y,\ X >_{lex} Y)$

$LT_{<_{lex}}(p_5) = X^5$

Monoamele de grad 5, $\leq_{lex} X^5$ și cu $X^a Y^b$, $a \geq b$:

$$X^5 \xleftarrow{LT} s_1^5$$
$$X^4Y \xleftarrow{LT} s_1^3 s_2$$
$$X^3Y^2 \xleftarrow{LT} s_1 s_2^2$$

$\Rightarrow p_5 = s_1^5 + a s_1^3 s_2 + b s_1 s_2^2$

X	Y	s_1	s_2	$s_1^5 + a s_1^3 s_2 + b s_1 s_2^2$	f

X	Y	s_1	s_2	$s_1^5+as_1^3s_2+bs_1s_2^2$	p
1	1	2	1	$32+8a+2b$	2
-1	-1	-2	1	$-32-8a-2b$	-2
2	-1	1	-2	$1-2a+4b$	31

$$\Rightarrow \begin{cases} 32+8a+2b=2 \\ 1-2a+4b=31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+b=-15 \\ -2a+4b=30 \quad \vert \cdot 2 \end{cases}$$

$$9b=45 \Rightarrow \underline{b=5}$$

$$\Rightarrow \underline{a=-5}$$

$$\Rightarrow \underline{p_5 = s_1^5 - 5s_1^3 s_2 + 5 s_1 s_2^2} \quad (1)$$

Revenind la x, y, soluțiile $\begin{cases} x+y=3 \\ x^5+y^5=33 \end{cases}$,

prin urmare, $p_5(x,y) \overset{not}{=} p_5$, realizez (1) în x, y:

$$33 = 3^5 - 5\cdot 3^3 \cdot s_2 + 5\cdot 3\cdot s_2^2$$

$$\Rightarrow 33 = 243 - 5\cdot 27\cdot s_2 + 15 s_2^2$$

$$15s_2^2 - 135 s_2 + 210 = 0 \quad \vert :15$$

$$s_2^2 - 9s_2 + 14 = 0$$

$$\Rightarrow s_2 = \begin{cases} 2 \\ 7 \end{cases}$$

[illegible] $\Rightarrow x, y$ sunt răd. lui T^2-3T+2

I Dacă $s_2 = 2 \Rightarrow x, y$ sunt rad. lui $T^2 - 3T + 2$

$$\Rightarrow \boxed{x, y \in \{(1,2), (2,1)\}}$$

II Dacă $s_2 = 7 \Rightarrow$ ——— $T^2 - 3T + 7$

$\Rightarrow x, y \notin \mathbb{R}$

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\underbrace{\sqrt[4]{x}}_{u} + \underbrace{\sqrt[4]{97-x}}_{v} = 5. \quad , \quad x \geq 0, \quad 97 - x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97 \end{cases}$$ + la fel ca la 1.

Temă - calcule!

Formulele lui Newton

R inel, în $R[X_1, \ldots X_n]$ avem polinoamele simetrice fundamentale $s_1, \ldots s_n$.

și putem defini: $p_k = X_1^k + X_2^k + \ldots + X_n^k, \quad \forall k \geq 0.$

$(p_0 = n)$

Avem următoarele relații rezultate:

$p_k - s_1 p_{k-1} + s_2 p_{k-2} - \ldots \ldots + (-1)^k k\, s_k = 0, \quad \forall k \leq n$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_k - s_1 p_{k-1} + s_2 p_{k-2} - \dots + (-1)^k k\, s_k = 0, \quad \forall\, k \le n \\[2em] p_k - s_1 p_{k-1} + s_2 p_{k-2} - \dots + (-1)^n s_n p_{n-k} = 0, \quad \forall\, k \ge n \end{array}}$$

2.3. a) $x, y, z \in \mathbb{C}$ sunt ai $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \\ x^3+y^3+z^3 = 3 \end{cases}$,

$x^4+y^4+z^4 = ?$

Formulele lui Newton: $n = 3$,

$k=1$: $p_1 - s_1 = 0 \Rightarrow \boxed{s_1 = 1}$

$k=2$: $p_2 - s_1 p_1 + 2 s_2 = 0 \Rightarrow p_2 = s_1^2 - 2 s_2$

$\Leftrightarrow 2 = 1 - 2 s_2 \Rightarrow \boxed{s_2 = -\frac{1}{2}}$

$k=3$: $p_3 - s_1 p_2 + s_2 p_1 - 3 s_3 = 0 \Leftrightarrow 3 - 1\cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 - 3\cdot s_3 = 0$

$\Rightarrow 3 s_3 = 3 - 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 s_3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{s_3 = \frac{1}{6}}$

$\Rightarrow x, y, z$ sunt rădăcinile polinomului $X^3 - X^2 - \frac{1}{2} X - \frac{1}{6} = 0$

$k=4$: $p_4 - s_1 p_3 + s_2 p_2 - s_3 p_1 = 0$

$$\Rightarrow p_4 = s_1 p_3 - s_2 p_2 + s_3 p_1 = 1\cdot 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 1$$

$$= 3 + 1 + \frac{1}{6} = 4 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}.$$

b) Demonstrați că x, y, z nu sunt raționale, dar $x^n + y^n + z^n \in \mathbb{Q}$, $\forall\, n \geq 0$.

↳ inducție, cu formulele lui Newton!

$$p_n - \underbrace{p_{n-1} s_1 + p_{n-2} s_2 - p_{n-3} s_3}_{\in \mathbb{Q}} = 0, \quad \forall\, n \geq 3$$

$\in \mathbb{Q}$, din ipoteza de inducție.

x, y, z sunt răd. polinomului $X^3 - X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{6} = 0 \mid \cdot 6$

$$\Leftrightarrow 6X^3 - 6X^2 - 3X - 1 = 0$$

Dacă $\frac{a}{b}$ e rădăcină $\Rightarrow a \mid -1$ și $b \mid 6$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \in \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right\},$$ dar

niciuna nu e rădăcină.

Prop. Fie $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$.

Dacă $f\left(\frac{m}{n}\right) = 0 \Rightarrow m \mid a_0$ și $n \mid a_n$.

Data trecută **Exc** $f = X^3+aX^2+bX+c \in \mathbb{Z}[X]$ cu exact **unul** dintre a, b, c par.

$\Rightarrow f$ are cel mult o rădăcină rațională.

are cel mult o rădăcină întreagă

Dem I Dacă c e impar:

pp că $f(n)=0$. $n \mid c \Rightarrow n$ e impar

$$\Rightarrow \underbrace{\underset{\text{impar}}{n^3} + \underset{\text{exact unul impar}}{a n^2 + b n} + \underset{\text{impar}}{c}}_{\text{impar}} = 0 \qquad \text{Ab}$$

II Dacă c e par:

c par $\Rightarrow \exists!\, k \geq 1$ a.î. $c = 2^k \cdot d$, $2 \nmid d$.

Obs Orice rădăcină întreagă este pară!

Dacă f are două rădăcini întregi $\xRightarrow{\text{Viète}}$ **toate** trei sunt întregi și pare, dar $\underset{\text{impar}}{-a}$ e suma lor $\qquad$ Ab

---

Exc 2.4. x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3+x+1=0$

Calculați $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 = 0$

Temă!

Calculați $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 = 0$ (Temă!)

Ex 2.5. $P = X^3 - 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

Scrieți polinomul **monic** cu rădăcinile:

a) $y_1 = 3x_1 - 2,\ y_2 = 3x_2 - 2,\ y_3 = 3x_3 - 2$.

Metoda 1 Cu rel lui Viete:

Pt x_1, x_2, x_3: $\boxed{\begin{array}{l} s_1 = 2 \\ s_2 = 1 \\ s_3 = -1 \end{array}}$

Notăm $\overline{s_1} = (3x_1 - 2) + (3x_2 - 2) + (3x_3 - 2) = y_1 + y_2 + y_3$

$\overline{s_2} = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3$

$\overline{s_3} = y_1 y_2 y_3$

$\rightarrow$ y_1, y_2, y_3 sunt rădăcinile polinomului $Y^3 - \overline{s_1} Y^2 + \overline{s_2} Y - \overline{s_3}$

Calculăm: $\overline{s_1} = 3s_1 - 6 = 0$

$\overline{s_2} = (3x_1 - 2)(3x_2 - 2) + (3x_1 - 2)(3x_3 - 2) + (3x_2 - 2)(x_3 - 2)$

$= 9s_2 - 12s_1 + 12 = 9 - 24 + 12$

$= -3$

$\overline{s_3} = (3x_1 - 2)(3x_2 - 2)(3x_3 - 2) = 27s_3 - 18s_2 + 12s_1 - 8$

$$= -27 - 18 + 24 - 8$$

$$= -29$$

$$\Rightarrow Q = Y^3 - 0 \cdot Y^2 - 3Y + 29 = 0.$$

<u>Metoda 2</u> $\quad P(X) = X^3 - 2X^2 + X + 1$ are rad x_1, x_2, x_3

<u>Mai simplu</u>: • ce polinom are rad $x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1$?

$$P(x_i) = 0$$

$P(X+1)$ are rad $x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1$

• Ce polinom are rad $2x_1, 2x_2, 2x_3$? $P\left(\frac{X}{2}\right)$

• ________________ $3x_1 - 2, 3x_2 - 2, 3x_3 - 2$?

$P\left(\frac{X+2}{3}\right)$, dar nu e monic

Coef dominant al lui $P\left(\frac{X+2}{3}\right)$ este $\frac{1}{3^3}$!

$$\Rightarrow Q = 3^3 \cdot P\left(\frac{X+2}{3}\right) !$$

$$Q = 27 \cdot \left[\left(\frac{X+2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{X+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{X+2}{3}\right) + 1\right]$$

$$= (X+2)^3 - 2 \cdot 3 (X+2)^2 + 9(X+2) + 27$$

$$= X^3 + 6X^2 + 12X + 8 - 6(X^2 + 4X + 4) + 9X + 18 + 27$$

$$= X^3 + 6X^2 + 12X + 8 - 6(X^2+4X+4) + 9X + 18 + 27$$

$$= X^3 + \cancel{6X^2} + 12X + 8 - \cancel{6X^2} - 24X - 24 + 9X + 18 + 27$$

$$= X^3 - 3X + 29 \;!$$

b) Polinomul monic cu rădăcinile $z_1 = \frac{1}{x_1}$, $z_2 = \frac{1}{x_2}$, $z_3 = \frac{1}{x_3}$.

<u>Metoda 1</u> (Viète)

$s_1 = 2$, $s_2 = 1$, $s_3 = -1$

$$\overline{s_1} = z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{s_2}{s_3} = -1$$

$$\overline{s_2} = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{s_1}{s_3} = -2$$

$$\overline{s_3} = z_1z_2z_3 = \frac{1}{s_3} = -1$$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ sunt rădăcinile polinomului monic

$$X^3 + X^2 - 2X + 1 \longrightarrow \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \text{ rădăcini}$$

$$X^3 - 2X^2 + X + 1 \longrightarrow x_1, x_2, x_3 \text{ rădăcini}$$

<u>Exc</u> Fie $f \in D[X]$, D domeniu

$$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0, \quad \deg f = n$$

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \quad , \deg f = n$$
$$(a_n \neq 0)$$

și $f(0) \neq 0 \iff a_0 \neq 0.$

Pp că f are răd $x_1, x_2, \dots x_n$.

Atunci $g = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_0$ are răd

$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots \frac{1}{x_n}$.

<u>Dem</u> $f(x) = 0 \iff a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \;\Big|\cdot \frac{1}{x^n}$

$\Downarrow$

$x \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 \cdot \frac{1}{x^n} + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{x} + a_n = 0}$$

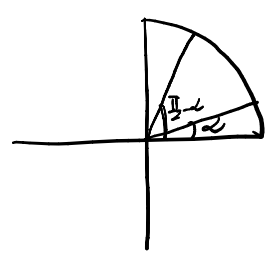
c) Temă: polinomul cu rădăcinile x_1^2, x_2^2, x_3^2.

<u>Ex 2.6.</u> Calculați $(\sin 20°)^7 + (\sin 40°)^7 - (\sin 80°)^7$.

$$= (\sin 20°)^7 + (\sin 40°)^7 + (\sin -80°)^7$$

Pot găsi un polinom de grad 3 cu rădăcinile

$\sin 20°$, $\sin 40°$ și $\sin(-80°)$?



$\sin 3 \cdot 20° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 3 \cdot 40° = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 3(-80°) = \sin(-240°) = \sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad \forall x \in \{20^\circ, 40^\circ, -80^\circ\}$$

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x$$

$$= (2\sin x \cos x)\cdot \cos x + \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) =$$

$$= 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x$$

$$= -4\sin^3 x + 3\sin x$$

$$\Rightarrow \boxed{4\sin^3 x - 3\sin x + \sin 3x = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{4\sin^3 x - 3\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0}, \quad \forall x \in \{20^\circ, 40^\circ, -80^\circ\}$$

$\Rightarrow \sin 20^\circ, \sin 40^\circ, \sin(-80^\circ)$ rădăcinile polinomului

$$\boxed{4Y^3 - 3Y + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= -\frac{3}{4} \\ s_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}}$$

$$p_1 = s_1 = 0$$

$$p_2 - s_1 p_1 + 2s_2 = 0 \Rightarrow p_2 = -2s_2 = \frac{3}{2}$$

$$p_3 - s_1 p_2 + s_2 p_1 - 3s_3 = 0 \Rightarrow p_3 = -s_2 p_1 + 3s_3 = 3s_3 = \frac{-3\sqrt{3}}{8}$$

$k > n$

$p_4 - \cancel{s_1 p_3} + s_2 p_2 - \cancel{s_3 p_1} = 0 \Rightarrow p_4 = -s_2 p_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$

$p_5 - \cancel{s_1 p_4} + s_2 p_3 - s_3 p_2 = 0 \Rightarrow p_5 = -s_2 p_3 + s_3 p_2 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{-3\sqrt{3}}{8}\right)$

$-\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{3}{2}$

$= \frac{-9\sqrt{3}}{32} - \frac{3\sqrt{3}}{16} = -\frac{15\sqrt{3}}{32}.$

$p_6 - s_1 p_5 + s_2 p_4 - s_3 p_3 = 0 \Rightarrow p_6 = \dots$

Temă: Exc 2.7, 2.8.

2.10.a) Fie K un corp cu char $K = 0$ și $x_1, \dots, x_n \in K$ a.î. $x_1^k + \dots + x_n^k = 0$, $\forall\, 1 \le k \le n$.

Dem că $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Fie polinomul monic $P \in K[X]$ cu răd $x_1, x_2, \dots, x_n$.
($\Rightarrow \deg P = n$)

$p_k(x_1, \dots, x_n) \stackrel{not}{=} p_k = 0, \quad \forall\, k = \overline{1,n}$

$k \ge n \Rightarrow \quad p_k - p_{k-1} s_1 + \dots + (-1)^k p_{k-n} s_n = 0 \Rightarrow p_k = 0, \forall k \ge 1.$
(inducție)

$\forall k = \overline{1,n}, \quad p_k - p_{k-1} s_1 + p_{k-2} s_2 - \dots + (-1)^k k\, s_k = 0 \Longrightarrow k\, s_k = 0$

$\xrightarrow{\text{char } K = 0} s_k = 0, \ \forall\, k = \overline{1,n} \Rightarrow P = X^n \Rightarrow x_i = 0, \forall i = \overline{1,n}.$

b) Dați un contraexemplu în char $K = p > 0$.

În $\mathbb{Z}_3$: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ $\Rightarrow$ $1+1+1=0$
$n=3$ $\qquad 1^2+1^2+1^2=0$

În K, char $K = p$: $x_1 = 1, x_2 = 1, \dots x_p = 1$ $(n=p)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} x_i^k = 0, \quad \forall k \geq 1$$

2.11. a) K corp, char $K \neq 2$ și $A \subset K[X,Y]$ subinelul polinoamelor simetrice din $K[X,Y]$.

Dem că $A/(X^2+Y^2) \simeq K[X]$.

Th (fundamentală a polinoamelor simetrice)
$\forall f \in A$, $\exists!\ g \in K[X,Y]$ a.î. $f = g(s_1, s_2)$.

$\overset{\text{reformulare}}{\Longleftrightarrow}$ $A \simeq K[s_1, s_2]$ $\left(\simeq K[T,Z]\right)$

2 nedeterminate

$$\Rightarrow \frac{A}{(X^2+Y^2)} \simeq \frac{K[s_1,s_2]}{(s_1^2-2s_2)} \overset{\text{renot}}{\simeq} \frac{K[T,S]}{(T^2-2S)} \simeq$$

$$X^2+Y^2 = s_1^{\,2}-2s_2 \qquad \Bigg| \quad \overset{\mathrm{char}\,K\neq 2}{\simeq} \frac{(K[T])[S]}{(S-\underbrace{\tfrac{1}{2}T^2}_{\in K[T]})} \simeq K[T]$$

$$R[X]/(X-a) \simeq R$$

b) Dem că $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2) \not\simeq \mathbb{C}[X]$.

c) Dem că $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2) \not\simeq \mathbb{R}[X]$.

d) Dem că $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2) \not\simeq \mathbb{C}[X]$.

<u>Dem</u> b) $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2)$ nu e domeniu: $\underset{\neq 0}{\overline{(X+iY)}} \cdot \underset{\neq 0}{\overline{(X-iY)}} = \overline{0}$

Dar $\mathbb{C}[X]$ <u>este</u> domeniu.

c) În $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2)$, avem $\overline{X}^2+\overline{Y}^2=\overline{0}$, deşi $\overline{X},\overline{Y}\neq\overline{0}$.

Î. $\mathbb{R}[X]$. dacă $P^2+Q^2=0 \Rightarrow P^2(x)+Q^2(x)=0, \ \forall x\in\mathbb{R}$

În $\mathbb{R}[X]$, dacă $P^2 + Q^2 = 0 \Rightarrow P^2(x) + Q^2(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$P, Q \in \mathbb{R}[X]$

$\Downarrow P(x), Q(x) \in \mathbb{R}$

$P(x) = Q(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P = Q = 0.$

d) $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2) \not\simeq \mathbb{C}[X].$

$\Uparrow$

$\exists\, i$ ai $i^2 = -1$.

Pp $\exists\, \bar{f} \in \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2)$ ai $\bar{f}^2 = \overline{-1}$

$\Rightarrow f^2 + 1 = g\,(X^2+Y^2) \xRightarrow{\text{în }(0,0)} \big(f(0,0)\big)^2 + 1 = 0$

$\text{\quad}f(0,0) \in \mathbb{R}$ ✗

<u>Ex 2.13.</u> R inel

a) $f = (X_1 - X_2)^2 (X_1 - X_3)^2 (X_2 - X_3)^2 \in R[X_1, X_2, X_3]$

f ca polinom în poli. sim. fundamentale

$LT(f) = X_1^4 X_2^2$

$$LT_<(f) = x_1^4 x_2^2$$

$$x_1^4 x_2^2 \longrightarrow s_1^2 s_2^2$$
$$x_1^4 x_2 x_3 \longrightarrow s_1^3 s_3$$
$$x_1^3 x_2^3 \longrightarrow s_2^3$$
$$x_1^3 x_2^2 x_3 \longrightarrow s_1 s_2 s_3$$
$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 \longrightarrow s_3^2$$

$$\Rightarrow f = s_1^2 s_2^2 + a s_1^3 s_3 + b s_2^3 + c s_1 s_2 s_3 + d s_3^2$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$s_1^2 s_2^2 + a s_1^3 s_3 + b s_2^3 + c s_1 s_2 s_3 + d s_3^2$	f
1	-1	0	0	-1	0	$-b$	4
1	ε	ε^2	0	0	1	d	-27
1	1	0	2	1	0	$4 + b$	0
1	1	1	3	3	1	$81 + 81a + 27b + 9c + d$	0
1	-1	-1	-1	-1	1	$1 - a - b + c + d$	0

$$f(1, \varepsilon, \varepsilon^2) = \underbrace{(1-\varepsilon)^2 (1-\bar{\varepsilon})^2}\,(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2$$
$$= \left((1-\varepsilon)(\overline{1-\varepsilon})\right)^2 \cdot (i\sqrt{3})^2$$
$$= -9 \cdot 3 = -27$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon - \bar{\varepsilon} =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ d = -27 \\ \text{[illegible]} \end{cases}$$

[illegible]

$\varepsilon - \varepsilon =$

$1-\varepsilon = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(1-\varepsilon)\overline{(1-\varepsilon)} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = -27 \\ 1-a-b+c+d = 0 \\ 81a+27b+9c+d = -81 \end{cases}$$

$\Rightarrow a=-4,\ b=-4,\ c=18,\ d=-27$

b) x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului X^3+pX+q

$$\begin{pmatrix} s_1 = 0 \\ s_2 = p \\ s_3 = -q \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2 = \boxed{-4p^3-27q^2}$$