Proprietăți ale interiorului unei mulțimi

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A \subset X$.

1. $\mathring{A} \subset A$

Justificare:

Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \in \mathcal{V}_x$, deci $(\exists)\ D \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D \subset A$.

Deci $x \in A$.

Prin urmare, $\mathring{A} \subset A$ $\square$

2. $$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$$

Justificare:

„$\subset$":

Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \in \mathcal{V}_x$, deci $(\exists)\ D \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D \subset A$.

Prin urmare, $x \in \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$

Așadar, $\mathring{A} \subset \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$.

„$\supset$":

Fie $x \in \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$. Atunci $(\exists)\ D \in \mathcal{T}$, $D \subset A$ a.î. $x \in D$.

Deci $A \in \mathcal{V}_x$.

Prin urmare, $x \in \mathring{A}$.

Așadar, $\bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D \subset \mathring{A}$.

Deci $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$ $\square$

3. $\mathring{A}$ este mulțime deschisă (i.e. $\mathring{A} \in \mathcal{T}$).

Justificare:

Conform 2, avem $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$ (reuniune arbitrară de mulțimi deschise)

Deci, $\mathring{A} \in \mathcal{T}$. $\square$

Observație! Din proprietățile 2 și 3 deducem că $\mathring{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă (în sensul incluziunii) inclusă în A.

4. A deschisă $\iff A = \mathring{A}$

Justificare:

„<=":

$$\left.\begin{array}{l} \mathring{A} \text{ deschisă (din 3)} \\ A = \mathring{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ deschisă}$$

„=>":

A deschisă

$A \subset A$

$\mathring{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă (în sensul incluziunii) inclusă în A

$\Rightarrow A \subset \mathring{A}$

$\mathring{A} \subset A$ (din 1)

Deci $\mathring{A} = A$. $\square$

5. Fie $B \subset X$ a.î. $A \subset B$. Atunci $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

6. Fie $B \subset X$. Atunci:

a) $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$

b) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

Observație! Inegalitatea de la 6.b) poate fi strictă.

Proprietăți de aderență unei mulțimi

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic, $A \subset X$ și $B \subset X$.

1. $A \subset \overline{A}$

Justificare:

Fie $x \in A$. Fie $V \in \mathcal{V}_x$. Avem $x \in V \cap A$.

Prin urmare, $V \cap A \neq \emptyset$, deci $x \in \overline{A}$.

Așadar, $A \subset \overline{A}$. $\square$

2. $\overline{A} = \bigcap F$

F închisă

$A \subset F$

Justificare:

„$\subset$":

Fie $x \in \overline{A}$. Presupunem prin absurd că $(\exists)$ F_0 închisă,

$A \subset F_0$ a.î. $x \notin F_0$. Deci $x \in CF_0$.

F_0 închisă $\Rightarrow CF_0 \in \mathcal{T}$

Deci $CF_0 \in \mathcal{V}_x$. $\left.\begin{matrix} \\ x \in \bar{A} \end{matrix}\right\} \Rightarrow CF_0 \cap A \neq \emptyset$, contradicție cu $A \subset F_0$

Rămâne că $x \in \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F$

Deci, $\bar{A} \subset \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F$

„$\supset$":

Fie $x \in \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F$. Presupunem prin absurd că $x \notin \bar{A}$.

Deci $(\exists)\ V_0 \in \mathcal{V}_x$ a.î. $V_0 \cap A = \emptyset$.

$V_0 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow (\exists)\ D_0 \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D_0 \subset V_0$.

$\left.\begin{matrix} V_0 \cap A = \emptyset \\ D_0 \subset V_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_0 \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset CD_0$

$D_0 \in \mathcal{T} \Rightarrow CD_0$ închisă

Așadar, $x \in CD_0$, contradicție cu $x \in D_0$.

Rămâne că $x \in \bar{A}$.

Deci $\bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F \subset \bar{A}$.

Prin urmare, $\bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F = \bar{A}$. $\square$

3. $\bar{A}$ închisă

Justificare:

Din 2 avem că $\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow C\bar{A} = C\Big(\bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F\Big) = \bigcup\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} CF \in \tau$, deoarece $CF \in \tau$, $(\forall)$ F închisă, $A \subset F$.

Deci $\bar{A}$ este închisă. $\square$

Observație! Din proprietățile 2 și 3, deducem că $\bar{A}$ este cea mai mică mulțime închisă (în sensul incluziunii) care include A.

4. A închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Justificare:

„$\Leftarrow$":

$\left.\begin{array}{l} \bar{A} \text{ închisă (din 3)} \\ A = \bar{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ închisă

„$\Rightarrow$":

A închisă

$A \supset A$

$\bar{A}$ este cea mai mică mulțime închisă (în sensul incluziunii) care include A

$\Rightarrow A \supset \bar{A}$

$A \subset \bar{A}$ (din 1)

Deci $A = \bar{A}$ $\square$

5. Dacă $A \subset B$, atunci $\bar{A} \subset \bar{B}$.

6. a) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$

b) $\bar{A} \cap \bar{B} \supset \overline{A \cap B}$

Observație! Incluziunea de la 6.b) poate fi strictă.

Propoziție: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A \subset X$. Atunci:

1) $\complement \bar{A} = \complement \mathring{A}$

2) $\mathring{\complement A} = \complement \bar{A}$

Proprietăți ale mulțimii punctelor de acumulare

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A \subset X$.

1. $A' \subset \bar{A}$

Justificare:

Fie $x \in A'$. Fie $V \in \mathcal{V}_x$. Avem $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Deci $V \cap A \neq \emptyset$. Așadar, $x \in \bar{A}$.

Prin urmare, $A' \subset \bar{A}$. $\square$

2. $\bar{A} = A \cup A'$

Justificare:

„$\supset$":

$$\left.\begin{array}{l} A' \subset \bar{A} \text{ (din 1)} \\ A \subset \bar{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup A' \subset \bar{A}, \text{ i.e. } \bar{A} \supset A \cup A'.$$

„C":

Fie $x \in \overline{A}$.

I. Dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cup A'$, deci $\overline{A} \subset A \cup A'$.

II. Presupunem că $x \notin A$.

Fie $V \in \mathcal{V}_x$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in \overline{A} \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \\ x \notin A \end{array}\right\} \Rightarrow V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in A \cup A' \Rightarrow \overline{A} \subset A \cup A'$

Deci $\overline{A} \subset A \cup A'$.

Aşadar, $\overline{A} = A \cup A'$ $\square$

Propoziţie: Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$.

1) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow (\exists)\ (x_n)_n \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \overset{d}{=} x$

2) $x \in A' \Leftrightarrow (\exists)\ (x_n)_n \subset A \setminus \{x\}$ a.î. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \overset{d}{=} x$

Considerăm spaţiul metric $(\mathbb{R}, d)$, unde

$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.

Observaţie! Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $r > 0$.

1) $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < r\} =$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < r\} = \{y \in \mathbb{R} \mid -r < y - x < r\}$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid x - r < y < x + r\}$

$= (x - r, x + r)$

2) $B[x, r] = \overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$

Observație! În spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$:

1) Intervalele de forma $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ și (a, b) sunt mulțimi deschise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

2) Intervalele de forma $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ și $[a, b]$ sunt mulțimi închise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Exercițiu: Faceți analiza topologică a mulțimii $A \subset \mathbb{R}$ (i.e. determinați $\mathring{A}$, $\bar{A}$, A', $Fr(A)$ și $Izo(A)$), unde:

a) $A = \mathbb{Q}$

Sol.:

1) $\mathring{A} = ?$

$$x \in \mathring{A} \iff (\exists)\, r > 0 \text{ a.î. } \underset{(x-r,\, x+r)}{\underset{\parallel}{B(x, r)}} \subset \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\parallel}{A}}$$

$\mathring{A} = \emptyset$, deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere iraționale și o infinitate de numere raționale

2) $\bar{A} = ?$

$$x \in \bar{A} \iff (\forall)\, r > 0, \text{ avem } \underset{(x-r,\, x+r)}{\underset{\parallel}{B(x, r)}} \cap \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\parallel}{A}} \neq \emptyset$$

$\bar{A} \subset \mathbb{R}$ (din definiție)

Fie $x \in \mathbb{R}$. Fie $r > 0$. Avem $(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere iraționale și o infinitate de numere iraționale

Deci $x \in \bar{A}$. Așadar, $\mathbb{R} \subset \bar{A}$.

Prin urmare, $\bar{A} = \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

3) $A' = ?$

$x \in A' \iff \forall\, r > 0$, avem $\underbrace{B(x,r)}_{(x-r,\,x+r)} \cap (\underbrace{A \setminus \{x\}}_{\mathbb{Q} \setminus \{x\}}) \neq \emptyset$.

$A' \subset \mathbb{R}$ (din definiție)

Fie $x \in \mathbb{R}$. Fie $r > 0$. Avem $(x-r, x+r) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, deoarece între oricare două numere reale există o infinitate de numere iraționale și o infinitate de numere raționale

Deci $\mathbb{R} \subset A'$.

Așadar, $A' = \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

4) $Fr(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

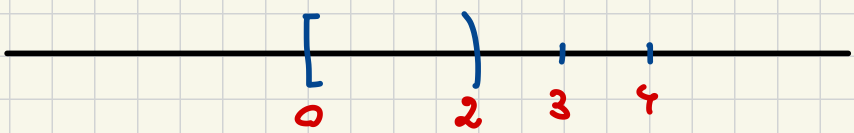
5) $Izo(A) = {}^{i}A = \bar{A} \setminus A' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ $\square$

2) $A = [0,2) \cup \{3,4\}$

Sol.:

1) $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \iff \exists\, r > 0$ a.î. $(x-r, x+r) \subset A$.



$\mathring{A} \subset A$

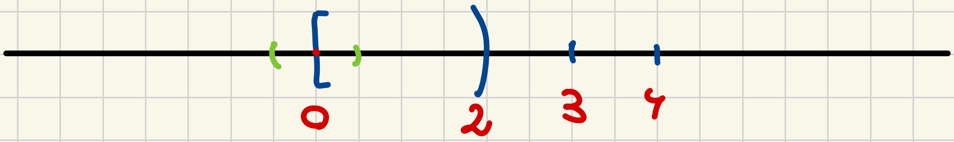
$(0,2)$ deschisă $\Big\}$ $\Rightarrow (0,2) \subset \mathring{A}$

$(0,2) \subset A$

Avem $(0,2) \subset \mathring{A} \subset [0,2) \cup \{3,4\}$

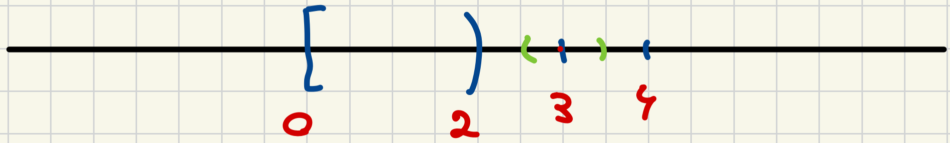
Studiem dacă $0 \in \mathring{A}$, $3 \in \mathring{A}$, $4 \in \mathring{A}$.

$0 \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r>0$, a.î. $\underbrace{(0-r, 0+r)}_{=(-r,r)} \subset A$



Deci $0 \notin \mathring{A}$.

$3 \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r>0$ a.î. $(3-r, 3+r) \subset A$



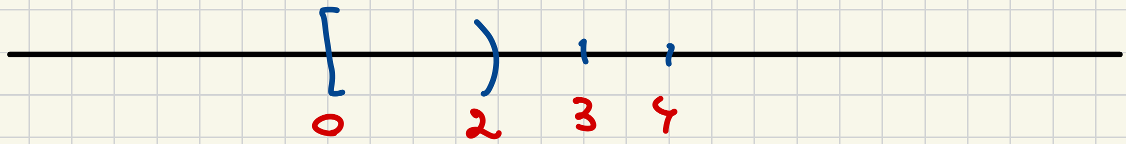
Deci $3 \notin \mathring{A}$.

Analog $4 \notin \mathring{A}$.

Așadar, $\mathring{A} = (0,2)$

2) $\bar{A} = ?$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall)\, r>0$, avem $(x-r, x+r) \cap A \neq \emptyset$



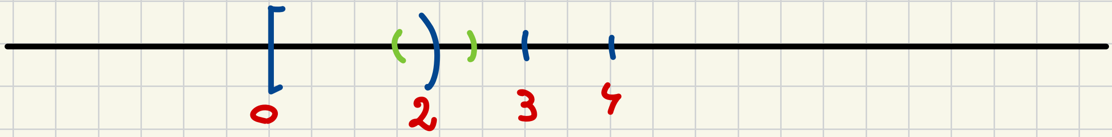
$A \subset \bar{A}$

$$\left.\begin{array}{l} [0,2] \cup \{3,4\} \text{ închisă} \\ [0,2] \cup \{3,4\} \supset A \end{array}\right\} \Rightarrow [0,2] \cup \{3,4\} \supset \bar{A}$$

Deci $[0,2) \cup \{3,4\} \subset A \subset [0,2] \cup \{3,4\}$

Studiem dacă $2 \in \bar{A}$.

$2 \in \bar{A} \iff (\forall)\, r > 0$, avem $(2-r, 2+r) \cap A \neq \emptyset$

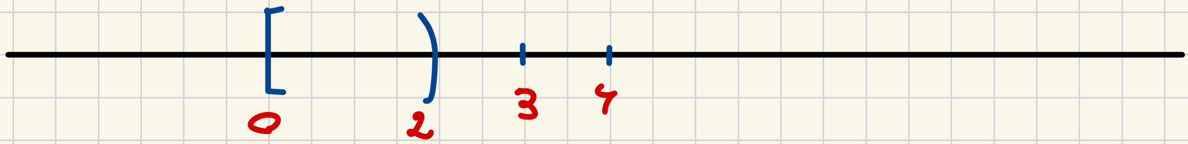


Deci $2 \in \bar{A}$.

Așadar, $\bar{A} = [0,2] \cup \{3,4\}$

3) $A' = ?$

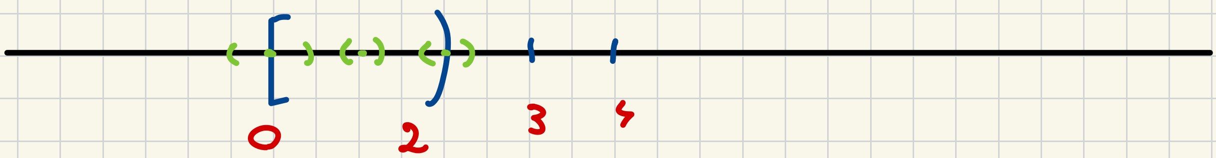
$x \in A' \iff (\forall)\, r > 0$ a.î. $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$



$A' \subset \bar{A} = [0,2] \cup \{3,4\}$

Fie $x \in [0,2]$.

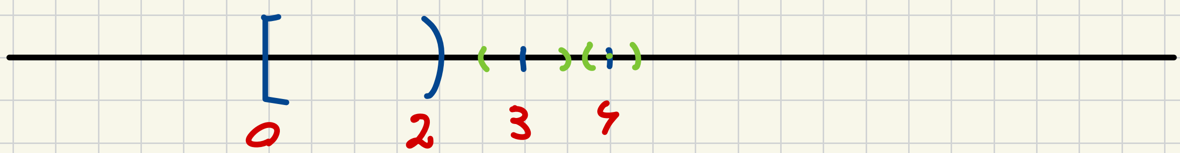
$x \in A' \iff (\forall)\, r > 0$, avem $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$



Deci $x \in A'$.

Fie $x \in \{3,4\}$

$x \in A' \iff (\forall)\, r > 0$, avem $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$



Deci $x \notin A'$.

Așadar, $A' = [0,2]$.

4) $\operatorname{Fr}(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{0, 2, 3, 4\}$

5) $\operatorname{Izo}(A) = {}'A = \bar{A} \setminus A' = \{3, 4\}$ $\square$

Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Considerăm spațiul metric $(\mathbb{R}^m, d_2)$, unde $d_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$d_2(\underset{(x_1,\dots,x_m)}{x}, \underset{(y_1,\dots,y_m)}{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$$

Observație! Dacă $m = 1$, avem $d_2(x, y) = |x - y|$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$

Def.: Metrica d_2 de mai sus s.m. **distanța** (sau **metrica**) **euclidiană pe $\mathbb{R}^m$**.

Observație! Atunci când nu este pericol de confuzie, putem scrie $d_2 \overset{\text{not.}}{=} d$

Def.: O mulțime $A \subset \mathbb{R}^m$ s.m. **mărginită** dacă $(\exists)$ $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ și $(\exists)$ $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ a.î. $A \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$.

Propoziție: Fie $A \subset \mathbb{R}^m$. Sunt echivalente:

1) A mărginită

2) $(\exists)$ $x \in \mathbb{R}^m$, $(\exists)$ $r > 0$ a.î. $A \subset B(x, r)$.

Teoremă: (Teorema Heine-Borel)

În spațiul metric $(\mathbb{R}^m, d_2)$ o mulțime $K \subset \mathbb{R}^m$ este **compactă** $\Leftrightarrow$ este închisă și mărginită.

Exercițiu: Studiați dacă mulțimile $K \subset (\mathbb{R}, d)$ sunt compacte:

a) $K = \mathbb{N}$

Sol.:

K nu este mărginită $\Rightarrow K$ nu este compactă

b) $K = (0,1)$

Sol.:

$\overline{K} = [0,1] \supsetneq K \Rightarrow K$ nu este închisă $\Rightarrow K$ nu este compactă

c) $K = [0,1] \cup \{2\}$

Sol.:

$$\left.\begin{array}{l} K \subset [0,2] \Rightarrow K \text{ mărginită} \\ \overline{K} = [0,1] \cup \{2\} = K \Rightarrow K \text{ închisă} \end{array}\right\} \Rightarrow K \text{ compactă } \square$$

Limita unei funcții într-un punct

Def.:

Fie (X, τ_1), (Y, τ_2) spații topologice, $\emptyset \neq A \subset X$, $x_0 \in A'$, $f: A \to Y$ și $l \in Y$. Spunem că l este o limită a funcției f în punctul x_0 și scriem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă $(\forall)\ V \in \mathcal{V}_l$, $(\exists)\ U \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $(\forall)\ x \in U \cap A$, $x \neq x_0$, avem $f(x) \in V$.

Observație! În general, limita unei funcții într-un punct nu este unică.

Observație! În contextul definiției precedente, dacă (Y, τ_2) este spațiu topologic separat (sau Hausdorff), atunci limita funcției f în punctul x_0 este unică.

Propoziție: Fie (X, d_1), (Y, d_2) spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $x_0 \in A'$, $f: A \to Y$ și $l \in Y$. Sunt echivalente:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

2) $(\forall)\ (x_n)_n \subset A \setminus \{x_0\}$ a.î. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \overset{d_1}{=} x_0$, avem $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} l$