Curs 6

Funcții derivabile

Def: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $f: A \to \mathbb{R}$.
Spunem că fct f:

1) are derivată în a, dacă $\exists$ în $\overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ limita $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

2) este derivabilă în a, dacă există și este finită limita $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

Notație: În contextul definiției precedente, dacă f are derivată în pct a notăm $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

$f'(a)$ – derivata fct f în pct a

Def: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ și $B \subset A$ a.î. f derivabilă pe B (i.e. f este derivab. în orice pct al lui B).
Definim fct $f': B \to \mathbb{R}$, $\underset{\in B}{x} \longmapsto \underset{\in \mathbb{R}}{f'(x)}$

și numim această fct derivata lui f

Teoremă: Orice fct derivabilă într-un pct este continuă în acel pct.

Obs: Reciproca NU e adevărată

Prop: Fie $\emptyset \neq A$, $a \in A \cap A'$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ 2 fct derivabile în $\underline{a}$

Atunci

1) $f+g$ e deriv în a şi $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2) αf e deriv în a şi $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$

3) $f \cdot g$ e deriv în a şi $(f \cdot g)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

4) Dacă $g(a) \neq 0$ (va rezulta că $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $g(x) \neq 0 \ \forall\, x \in V \cap A$), atunci funcția

def pe $V \cap A$ $\to$ $\frac{f}{g}$ e derivab în a şi ~~$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a) g(a)$~~ şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g^2(a)}$$

Teoremă: Fie $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ interv. nedegenerate. $a \in I$, $f : I \to J$ o fct derivab în a şi $g : J \to \mathbb{R}$ o fct derivab. în $f(a) \in J$. Atunci $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ e deriv. în a şi

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Teoremă: Fie $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ interv nedeg, $f : I \to J$ o fct cont şi biject şi $a \in I$. Dacă f e deriv în a şi $f'(a) \neq 0$, atunci fct inversă $f^{-1} : J \to I$ e derivab în $b \overset{not}{=} f(a) \in J$ şi

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Def: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că a este

1) punct de minim local al lui f dacă

Orice fct din interv, e fct de acum.

$\exists\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \le f(x)\ \forall\ x \in V \cap A$).

2) pct de max local al lui f dacă $\exists\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \ge f(x)\ \forall\ x \in V \cap A$).

3) pct de extrem local al lui f dacă a este pct de minim local al lui f sau a este pct de max. local al lui f

Teoremă (Fermat)

Fie $\emptyset \ne A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ și $a \in A$ a.î.

1) $a \in \overset{\circ}{A}$

2) a - pct de extrem local

3) f derivab. în a

Atunci $f'(a) = 0$ ($\Rightarrow a$ - pct critic)

Teoremă (Rolle)

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $(a<b)$, $a, b \in \mathbb{R}$)

1) f cont. pe $[a,b]$

2) f derivab. pe (a,b)

3) $f(a) = f(b)$

Atunci $\exists\ c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$

Teoremă (Lagrange)

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $(a<b$, $a, b \in \mathbb{R})$

1) f cont pe $[a,b]$

2) f derivab. pe (a,b)

Atunci $\exists\ c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Prop: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interv nedegenerat și $f: I \to \mathbb{R}$ o fct derivabilă (pe I)

1) Dacă $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$, atunci f e constantă.

2) Dacă $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ (respect $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$) atunci f e ~~strict~~ cresc (respect f - st. cresc)

3) Dacă $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$ (respect $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$) atunci f e descresc (respect f - st descresc)

Teoremă (Cauchy)

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ai $(a<b, a,b \in \mathbb{R})$

1) f, g cont pe $[a,b]$

2) f, g derivab pe (a,b)

Atunci $\exists\, c \in (a,b)$ ai:

$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c)$

Teoremă (Darboux): Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedeg. și $f: I \to \mathbb{R}$ o fct derivab

Atunci $\forall J \subset I$, J interval, avem că $f'(J)$ e interval (i.e. f' are prop lui Darboux)

Teoremă (l'Hospital)

Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a<b$, $I \subset \mathbb{R}$ interval nedegenerat ai $(a,b) \subset I \subset [a,b]$

$x_0 \in [a,b]$ și $f, g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ ai

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$)

2) f și g sunt derivab. pe $I \setminus \{x_0\}$ și $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$

3) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci:

α) $g(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ (resp $\exists V \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $g(x) \neq 0$ $\forall x \in V \cap (I \setminus \{x_0\})$)

β) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ și $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

• Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $f: A \to \mathbb{R}$

Def: Spunem că f e derivab. de două ori în a dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. f derivab. pe $V \cap A$ și funcț. $f': V \cap A \to \mathbb{R}$ e derivab. în a. În acest caz, derivata funcț. f' în a se numește DERIV. A DOUA a lui f în a și se notează $f''(a)$ sau $f^{(2)}(a)$ sau $(f')'(a)$

Def: Fie $\emptyset \neq B \subset A$ a.î. f este derivab. de două ori pe B. Definim funcț.

$f'': B \to \mathbb{R}$, $\quad x \longmapsto f''(x) = f^{(2)}(x) = (f')'(x)$, $x \in B$, $f''(x) \in \mathbb{R}$

$f^{(2)} = (f')'$

și numim această funcț. derivata a doua a lui f

Obs: Inductiv, se definește derivata de ordin n

$f^{(n)}$

Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval nedegen., $n \in \mathbb{N}$, $f: I \to \mathbb{R}$

Def Spunem că f e de clasă C^n (pe I) dacă f e derivab. de n ori (pe I) și $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ e cont.

Notație: $C^n(I) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f$ e de clasă C^n (pe I) $\}$

Def: Spunem că f e de clasă C^∞ (pe I) dacă f este derivab. de orice ordin (pe I) (i.e. f e indefinit derivab ~~derivab~~ (pe I))

$C^0 \to f$ cont

Notație: $C^\infty(I) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f$ e de clasă C^∞ (pe I) $\}$

Teoremă (Formula lui Taylor cu rest Lagrange)

Fie, în plus, $a \in I$. Pp. că f este deriv. de $n+1$ ori pe I. Atunci $\forall x \in I$, $x \neq a$ $\exists c$ între a și x (i.e. $c \in (a,x)$ sau $c \in (x,a)$) a.î.:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{not } T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{not } R_n(x)}$$

$T_n(x)$ = polinom Taylor de ordin n

$R_n(x)$ = restul de ordin n al formulei lui Taylor

Dacă $R_n(x) \to 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$

$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Def: Fie $I \subset \mathbb{R}$ interv. nedegen și $f, F : I \to \mathbb{R}$. Spunem că F e o primitivă a lui f dacă F e deriv (pe I) și $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Șiruri de fct

$$f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \int f_n \to \int f$$

Fie $X \neq \emptyset$, (Y, d) un sp metric, $(f_n)_n$ un șir de fct, $f_n : X \to Y$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) și $f : X \to Y$.

Def Spunem că $(f_n)_n$:

1) converge simplu (sau punctual) către f dacă $\forall x \in X$ avem $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{d}{=} f(x)$ (i.e. $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_{\varepsilon}$ avem $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$).

În acest caz notăm:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f \left(\text{sau } f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} f \right)$$

2) converg. uniform către f dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall x \in X$, avem $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. În acest caz notăm $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Teoremă: Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$.

Obs: Reciproca NU e adev: $[0;1] \to$

Def: O funcție $g: X \to \mathbb{R}$ s.n. mărg. dacă $\exists M > 0$ a.î. $|g(x)| \leq M \ \forall x \in X$

Prop: Fie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un șir de fct. $f_n: X \to \mathbb{R}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) a.î. f_n mărg. $\forall n \in \mathbb{N}$ și $f: X \to \mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$

2) $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0}$

Exc Fie $f_n: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Studiați conv. simplă și uniformă pt $(f_n)_n$?

Sol

1) Conv. simplă

Fie $x \in [-1, 1]$

$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x}{1 + n^2 x^2} = 0 \Rightarrow$?

$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{s} f$ unde $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = 0$

2) Conv. uniformă

$\underline{\underline{V_1}}$: (Cu majorări + minorări)

$|f_n(x) - f(x)| = \left| \dfrac{x}{1 + n^2 x^2} - 0 \right|$

$= \dfrac{|x|}{1 + n^2 x^2}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sup\limits_{x \in [-1, 1]} \dfrac{|x|}{1 + n^2 x^2} \right) = 0$?

$\sup\limits_{x \in [-1, 1]} \dfrac{|x|}{1 + n^2 x^2}$

$\leq a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$

$\geq b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow f_n \not\xrightarrow[n \to \infty]{u} f$

$1+n^2x^2 = 1^2 + n^2|x|^2 \geq 2 \cdot 1 \cdot n|x|, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1,1]$

$(a^2+b^2 \geq 2ab)$

$$\Rightarrow \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1,1]$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$$

$\underline{V_2}$ (Calculul supremului)

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1,1]$

Fie $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

$$f_n'(x) = \frac{(1+n^2x^2) - x(0+2xn^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in [-1,1]$$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-n^2x^2 = 0 \Leftrightarrow n^2x^2 = 1$

$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{n}$

x	-1	$-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	1
$f_n'(x)$	$- - - -$	$0 + + + +$	$+ \; 0$	$- - -$
$f_n(x)$	$\frac{-1}{1+n^2} \searrow$	$-\frac{1}{2n} \nearrow$	$\frac{1}{2n} \searrow$	$\frac{1}{1+n^2}$

Deci $\sup\limits_{x\in[-1,1]} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[-1,1]}\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|\right) = 0$

Așadar $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ $\square$

<u>Teoremă</u>: Fie (X, τ) un sp topol, (Y, d) un sp metric, $(f_n)_n$ un șir de fct $f_n : X \to Y$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $f: X \to Y$ a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, și $a \in X$.

Dacă f_n e cont în a $\forall n \in \mathbb{N}$ atunci f e cont în a.

<u>Teoremă (Dini)</u>

Fie (X, τ) un sp topol, $\emptyset \neq K \subset X$ o mulț compactă, $(f_n)_n$ un șir monoton de funcții continue, $f_n : K \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ și $f: K \to \mathbb{R}$ continuă

Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

<u>Teoremă (Polya)</u>: Fie șirul de fct monoton $(f_n)_n$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b,\ a, b \in \mathbb{R})$ și fct continuă $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

<u>Teoremă (Bernstein)</u>

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b,\ a, b \in \mathbb{R})$ o fct continuă. Atunci $\exists\, (f_n)_n$ un șir de fct polinom. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Teoremă (Teorema de permutare a limitei cu derivata)

Fie $(f_n)_n$ un șir de fct $f_n : \underset{\subseteq \mathbb{R}}{I} \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ a.î. :

1) I - interv. nedegenerat și mărginit
2) $\exists x_0 \in I$ a.î. $(f_n(x_0))_n$ e conv
3) f_n deriv (pe I) $\forall n \in \mathbb{N}$
4) $\exists$ $g : I \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n' \xrightarrow[n \to \infty]{u} g$

Atunci, $\exists$ $f : I \to \mathbb{R}$ derivab a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ și $f' = g$ (i.e $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$)