Tutoriat 7 CDI

Teorema de medie pt. funcții cu val. reale

Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferențiabilă.

Atunci $\forall a, b \in D$, a.î. $[a,b] \subset D$,

$\exists\ \xi \in \{x = a + \lambda(b-a);\ \lambda \in (0,1)\}$ a.î.

$f(b) - f(a) = df(\xi)(b-a)$

Teorema de medie pentru funcții cu val. vectoriale

$F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferențiabilă

$C \subset D$ mulțime convexă

Presupunem $\exists\ M > 0$ a.î. $\|df(x)\| \leq M$, $\forall x \in C$

Atunci $\|F(b) - F(a)\| \leq M \|b - a\|$, $\forall a, b \in C$.

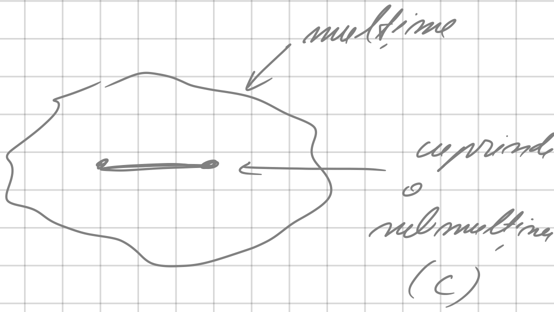
REMINDER:

$\|x\|$ = norma lui x =

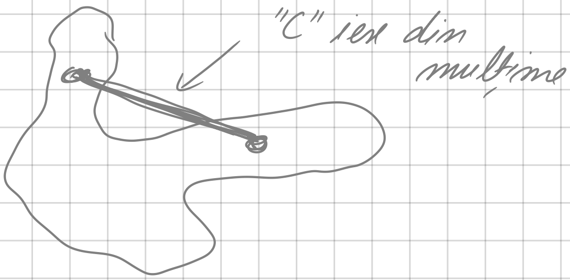
convexă $\cup$

concavă $\cap$

mulțime convexă



mulțime concavă



Derivate parțiale de ordin superior

Def: $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabilă parțială pe D

a) Spunem că f are derivată parțială de ordin al doilea în raport cu x_k dacă $\exists$ derivata parțială $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(a)$

Notăm: $$\frac{\partial f^2}{\partial x_k \partial x_y} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_y}\right)(a)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă $\Bigg/ \Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

$\downarrow$ cum arăt?

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \exists \quad 0 < R \leq \sqrt{a^2+b^2}$ a.î.

$B((a,b), R) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mulțime deschisă $\square$

CRITERIUL LUI SYLVESTER

- aplicăm în toate punctele critice în care f este diferențiabilă de două ori.

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a} & b \\ c & b \end{pmatrix}$$

Δ_1

Δ_2

$\rightarrow$ matricea Hessiană

$\Delta_1 = a_{11} = a$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

1) $\Delta_1, \Delta_2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ minim local

2) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ maxim local

3) $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0$ NU ȘTIM
$\Delta_1 = 0$ sau $\Delta_2 = 0$

4) $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0$ NU ȘTIM
$\Delta_1 = 0$ sau $\Delta_2 = 0$

5) în orice alt caz $\neq$ 1), 2), 3), 4) $\Rightarrow (x_0, y_0)$ nu e punct de extrem local

Algoritm

(P1) continuitatea lui f — D_f = mulțimea pct de discontinuitate

(P2) diferențiabilitatea f — D_1 = mulțimea pct. unde f nu e diferențiabilă

(P3) puncte critice — C = mulțimea punctelor critice

(P4) diferențiabilitatea f de ordin 2 — $D_2 = \ldots$

(P5) Sylvester

(P6) Verificăm elementele din D_f, D_1, D_2 și C în care Sylvester a eșuat. Pct de extrem local sau nu?

$$f(x,y) - f(0,0) \ ? \ 0$$

$\geq$ → punct de minim local

$\leq$ → punct de maxim local