1. Suma Riemann:

Fie $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\xi=(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ un sistem de puncte intermediare asoc. lui P, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

$\sigma_P(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ s.n. suma Riemann, asociată fct. f, partiției P și sist. de pct. inter.

Suma Darboux superioară/inferioară

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită, $P=(x_0,\ldots,x_n)$.

$m_i=\inf\{f(x) \mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$
$M_i=\sup\{f(x) \mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$ $\forall i=\overline{1,n}$.

$s_D(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$ - suma Darboux inf.

$S_D(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$ - suma Darboux sup.

Integrala Riemann

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $I\in\mathbb{R}$, ($\sigma_D(f,\xi^n)$ converge către I), a.î. $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon>0$, a.î.

$\|\Delta\|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |I-\sigma_D(f,(\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})|<\varepsilon$

$(\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma(f,(\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}))$

Integrala Darboux Superioară/Inferioară

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită

$\overline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf S_D(f)$ - superioară

$\underline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup s_D(f)$ - inferioară

$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_D(f,(\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})$.

2. Lema lui Darboux

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită, atunci

$\overline{\int_a^b} f = \lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(f) \Leftrightarrow \forall (\Delta_n)_n$ nr de div. a lui $[a,b]$, a.î.

$\|\Delta_n\|\to 0 \Rightarrow S_{\Delta_n}(f) \to \overline{\int_a^b} f \Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$, a.î. $\forall\, \Delta$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$

$\Rightarrow (0\leq)\ S_\Delta(f) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon$

Teorema lui Darboux

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită, AUASE:

1) f este int. Riemann

2) $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

3) $\forall\, \varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, \Delta$, a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

4) $\forall\, \varepsilon>0 \Rightarrow \exists\ \delta_\varepsilon>0$, a.î. $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon \Rightarrow$

$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

Th. care cuprinde clasele de fct. integrabile. (Radon-Nikodym)

Fie (X,Σ,μ) spațiu măsurabil $\Rightarrow$

$\exists\ f:X\to[0,+\infty)$ măsurabilă, numită derivata Radon-Nikodym, a.î.

$$v(A) = \int_A f\,d\mu,\ \forall\ A\in\Sigma\ \ (v \ll \mu)$$

$$f = \frac{\partial v}{\partial \mu} \text{ și este unică}$$

Prop. integrabilității în raport cu operațiile

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ int. Riemann și $\lambda \in \mathbb{R}$.
atunci $f+g$, λf, $|f|$, $f \cdot g$ sunt int. Riemann și
$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$ și $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

Th. păstrarea integrabilității prin conv unif/simplă

Fie $f_n, f : [a, b]$, $f_n \xrightarrow{cu} f$ și f_n să fie integr, $\forall n \geq 1 \Rightarrow f$ integrabilă și $\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n$

Fie $f_n, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a.î. $f_n \xrightarrow{cs} f$, f_n să fie int. Riemann, f să fie int. Riemann și $\exists M$, a.î. $|f_n| \leq M \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Th. Leibniz-Newton

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă, a.î. f' să fie integrabilă Riemann, atunci:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

3. Th. Lebesgue

O funcție mărginită este integrabilă $\Leftrightarrow$ mulțimea discontinuităților ei este neglijabilă Lebesgue.

Neglijabile Lebesgue

O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ s.n. neglijabilă Lebesgue, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $I_n = (a_n, b_n)_{n \geq 1}$, a.î.

1) $A \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n$

2) $\sum_{n \geq 1} \ell(I_n) = \sum_{n \geq 1} (b_n - a_n) < \varepsilon$

4. Drum

O funcție continuă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ s.n. drum

γ de clasă C^1

γ s.n. drum de clasă C^1 dacă $\exists$ γ și γ' cont.

Lungimea unui drum

Fie $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}$ un drum și $\Delta = x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

$$V_\Delta(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d_2(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1}))$$ -variația

$$I_\gamma = \sup_\Delta V_\Delta(\gamma)$$ s.n. lungimea drumului

Integrala curbilinie de primul și al doilea tip.

$\gamma:[a,b]\to D = \overset{\circ}{D} \in \mathbb{R}^n$ drum de clasă C^1

$f: D\to\mathbb{R}$ continuă, s.n. integrală curbilinie de primul tip al funcției f pe drumul γ:

$$\int_\gamma f\,dl = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|_2\,dt.$$

ω- formă diferențială continuă pe D. Atunci s.n. integrală curbilinie de al doilea tip:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n}\int_a^b P_i(\gamma(t))\cdot\gamma_i'(t)\,dt = \int_a^b \langle F\omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,dt$$

5. Lema lui Pain Care

Fie $D = \overset{\circ}{D}$ un domeniu stelat în raport cu $a\in D$ și $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i\,dx_i$ o forma diferențială de clasă C^1.

Dacă $\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial P_j}{\partial x_i}$, $\forall i,j = \overline{1,n}$, $i\neq j$, atunci ω este exactă, adică $\exists\, f: D\to\mathbb{R}$, a.î.

$$df = \omega.$$

6. Prop. int. curbilinii de primul tip

1) $\int_{\gamma} (f+g)\, dl = \int_{\gamma} f\, dl + \int_{\gamma} g\, dl$

2) $\int_{\gamma} \alpha f\, dl = \alpha \int_{\gamma} f\, dl$

3) $|f| \leq M \to \left|\int_{\gamma} f\, dl\right| \leq M \cdot l_{\gamma}$

4) $f \leq g \to \int_{\gamma} f\, dl \leq \int_{\gamma} g\, dl$

5) $\int_{\gamma} f\, dl = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} f\, dl$, $(\gamma_i)_{i=\overline{0,n-1}}$

6) $\int_{\gamma^-} f\, dl = \int_{\gamma} f\, dl$

prop. int curbilinii de al doilea tip

1) $\int_{\gamma} (\omega_1 + \omega_2) = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2$

2) $\int_{\gamma} \alpha\omega = \alpha \int_{\gamma} \omega$

3) $\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} \omega$, $(\gamma_i)_{i=\overline{0,n-1}}$

4) $\int_{\gamma^-} \omega - \int_{\gamma_i} \omega$, dacă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$\gamma^- = \gamma(a+b-t)$ $[\gamma^-(a) = \gamma(b), \gamma^-(b) = \gamma(a)]$

5) $\int_{\gamma_1} \omega \int_{\gamma_2} \omega$, dacă $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

7. Integrala improprie

Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. să fie integrabilă pe $[a,c]$ $\forall c \in [a,b)$ (f local integrabilă)

Dacă $\exists \lim\limits_{c \nearrow b} \int_a^c f = l$ și $l \in \mathbb{R}$ spunem că f este integrabilă improprie pe (a,b) și

$\int_a^b f = \lim\limits_{c \nearrow b} \int_a^c f$ (mai $\int_a^{b^-} f$).

Dacă $l = \infty$ scriem $\int_a^b f = \infty$.

8. Th. K-N. pentru integrala improprie

Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilă cu f' local integrabilă.
Dacă $\exists \lim_{c\nearrow b} f(c)\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists$ integr. improprie
$\int_a^b f'$ și $\int_a^b f' = \lim_{c\nearrow b} f(c)-f(a)$.

9. Dreptunghi în $\mathbb{R}^n$

O mulțime $D=\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ s.n. dreptunghi

~~$v(D)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$~~

$D=D(\mathbb{R}^n)=\{D\in\mathbb{R}^n, D \text{ dreptunghi}\}$.

Volumul unui dreptunghi

$v(D)=v(\bar{D})=v(\mathring{D})=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$

Mulțime elementară

O mulțime $E=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ s.n. elementară, unde
D_i - dreptunghi. $E(\mathbb{R}^n)$ - mulțime elementară.

Volumul unei mulțimi elementare

$v(E)=\sum_{i=1}^{n} v(D_i)$, dacă $D_i\cap D_j=\emptyset, \forall i\neq j$

Spațiu cu măsură aditivă

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), v)$ și $(\mathbb{R}^n, \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), \mu)$ sunt spații cu măsură aditivă.

$\mu: A\to(0,+\infty)$, a.î. $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$, $A\cap B=\emptyset$

1. $\mu(\emptyset)=0$
2. $A\subset B \Rightarrow \mu(A)\leq\mu(B)$
3. $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$
4. $A\subset\bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \mu(A)\leq\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$

Inel de mulțimi

O mulțime $\mathcal{A} \subset P(E)$ s.n. inel de mulțimi, dacă $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2,\ A_1 \setminus A_2,\ A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

10. Măsură Jordan, superioară/inferioară

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime mărginită

s.n. măsură Jordan interioară a mult. A

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(E) \mid E \subseteq A, E \in \mathcal{E}_J^n\}$$

S.n. măsură Jordan superioară a mult. A

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(E) \mid E \supseteq A, E \in \mathcal{E}_J^n\}.$$

Mulțimi măsurabile Jordan

O mulțime elementară măsurabilă în sens Jordan în $\mathbb{R}^n$ e o mulțime $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E = \bigcup_{l=1}^{q} I_l$,

unde $I_l = [a_1^l, b_1^l] \times [a_2^l, b_2^l] \times \ldots \times [a_n^l, b_n^l]$ $l = \overline{1,q}$

a.î. $E = \bigcup_{l=1}^{q} I_l$ și $I_j \cap I_l = \emptyset, \forall j, l \in \{1, 2, \ldots, q\}$

$\mu^*(A) = \mu_*(A)$ - mult. s.n. măsurabilă Jordan.

11. Descompunerea Jordan

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. S.n. descompunere Jordan a lui $A \Leftrightarrow$ familie finită $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$, unde $A_i \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ și } \mu(A_i \cap A_j) = 0, \forall i \neq j, i, j \in I$$

$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$$

12. Proprietățile reuniunii, intersecției și diferenței pt. mulțimi măsurabile Jordan.

Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mărg. Atunci:

1) $\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

2) $\mu_*(A\cap B)+\mu_*(A\cup B)\geq \mu_*(A)+\mu_*(B)$

3) $A,B\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A\cup B, A\cap B\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și

$$\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=\mu(a)+\mu(B)$$

Pp. că $B\subset A$

4) $\mu^*(A\setminus B)\leq \mu^*(A)-\mu_*(B)$

5) $\mu_*(A\setminus B)\geq \mu_*(A)-\mu^*(B)$

6) $A,B\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)\Rightarrow A\setminus B\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și

$$\mu(A\setminus B)=\mu(A)-\mu(B).$$

13. Caracterizarea mult. măsurabile Jordan legate de frontieră

Fie $A\in \mathbb{R}^n$ mărginită, AUASE:

1) $A\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2) $\mu^*(Fr(A))=0 \Leftrightarrow \mu(Fr(A))=0)$

$$0\leq \mu_*(B)\leq \mu^*(B)$$

3) $\bar{A},\mathring{A}\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\bar{A})=\mu(\mathring{A})$

$(Fr(A)=\bar{A}\setminus\mathring{A})$.

14. Suma Riemann

$f:A\to\mathbb{R}$ mărginită

$S_A(f)=\sum_{i\in I} M_i\,\mu(A_i)$, $M_i=\sup f(A_i)$ suma Darb. sup.

$\sigma_A(f,(\alpha_i)_{i\in I})=\sum_{i\in I} f(\alpha_i)\mu(A_i)$, $\alpha_i\in A_i$

$s_A(f)=\sum_{i\in I} m_i\,\mu(A_i)$, $m_i=\inf(f(A_i))$ suma Darb. inf

$M_i\geq f(\alpha_i)\geq m_i \Rightarrow S_A(f)\geq \sigma_A(f,(\alpha_i)_i)\geq$

$\geq s_A(f)$

Integrala Riemann

$$\int_A f = \int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f, (\xi_i)_{i \in I})$$

Int. Darboux sup/inf pentru fct. mai multe variabile.

$$\overline{\int_A} f = \overline{\int_A} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \overline{\int_A} f(x)\, dx$$
$$= \inf_\Delta S_\Delta(f).$$

$$\underline{\int_A} f = \sup_\Delta s_\Delta(f).$$

15. Lema lui Darboux

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită

$$\overline{\int_A} f = \lim_{\|\Delta\| \to 0} S_\Delta f$$

$\to (\forall)(\Delta_n)_{n \geq 1}$, a.î. $\|\Delta_n\| \to 0 \Rightarrow S_{\Delta_n}(f) \to \overline{\int_A} f$

$\to \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \delta_\varepsilon > 0$, a.î. $\|\Delta\| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\left| S_{\Delta_n}(f) - \overline{\int_A} f \right| < \varepsilon.$$

Teorema lui Darboux

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită AUASE

1) f e integrabilă

2) $\overline{\int_A} f = \underline{\int_A} f$

3) $(\forall)\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \delta_\varepsilon > 0$, a.î. $(\forall)\ \Delta$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$

$$\Rightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$$

4) $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \Delta$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

Prop. privind prop. fct. integrabile

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi $f, g: A \to \mathbb{R}$ integrabile. At:

1) $\int_A f + g = \int_A f + \int_A g$

2) $\int_A \alpha \cdot f = \alpha \cdot \int_A f$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Dacă $f < g \Rightarrow \int_A f < \int_A g$ ($m \le f \le M \Rightarrow m\mu(A) \le \int_A f \le M \cdot \mu(A)$).

4) $|\int_A f| \le \int_A |f| \le \mu(A) \cdot \sup_{x \in A} |f|(x)$

Th. privind integrabilitatea unui şir de funcţii (cont).

Fie $f_n, f: A \to \mathbb{R}$, unde $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ şi f_n sunt int. $(\forall) n \ge 1 \Rightarrow f$ este int şi $\int_A f_n \xrightarrow{u} \int_A f$.

Fie $f_n, f: A \to \mathbb{R}$, unde $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi f_n şi f sunt int. Dacă $f_n \xrightarrow{n} f$ şi $|f_n| \le M \Rightarrow$

$\int_A f_n = \int_A f$.

Th. lui Fubini

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+m})$ şi $f: A \times B \to \mathbb{R}$ integrabilă (mărginită).

Considerăm fct. $\overline{F}, \underline{F}: A \to \mathbb{R}$ date de

$\overline{F}(x) = \overline{\int_B} f(x,y)\,dy$

$\underline{F}(x) = \underline{\int_B} f(x,y)\,dy$.

Atunci $\overline{F}$ şi $\underline{F}$ sunt int R şi $\iint_{A \times B} f(x,y)\,dx\,dy$

$= \int_A \overline{F}(x)\,dx = \int_A \overline{\int_B} f(x,y)\,dy\,dx =$

$= \int_A \underline{F}(x)\,dx = \int_A \underline{\int_B} f(x,y)\,dy$.

Th. de schimbare de var. de fct. mai multe variabile

Fie $D = \overset{\circ}{D}$ şi $G = \overset{\circ}{G} \subset \mathbb{R}^n$

$\varphi: D \to G$ bijectivă a.î. φ şi $\varphi^{-1} \in C^1$

$A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, a.î. $\overline{A} \in D$ şi $f: \varphi(A) \to \mathbb{R}$ (int)

Atunci $\varphi(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f \circ \varphi |\det \varphi'| : A \to \mathbb{R}$
este int R și

$$\int f \circ \varphi(x) \, |\det \varphi'(x)| = \int_{\varphi} f(y) \, dy.$$

Th. lui Lebesgue

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mărginită. Atunci f este integrabilă Riemann $\Leftrightarrow$ Δf (discontinuitatea lui f) e neglijabilă Lebesgue.

16. Def. int. de suprafață Tip I, II ($E(s) = \ldots$)

De primul tip: $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $m \geq n$

$s : A \to \mathbb{R}^m$ suprafață (n-dimensională)

($s : \mathring{A} \to \mathbb{R}^m$ de clasă C^1 și $s' : \mathring{A} \to \mathbb{R}^m$ mărginită)

$E_s(x) = \sqrt{\sum |\det s_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x)|^2}$ elem. de suprafață.

$$\int_{int(A)} E_s(x) \, dx = V(s) \text{ - volumul lui } s$$

$$\int_s f \, dV = \int_{int(A)} f \circ s(x) \, E_s(x) \, dx$$

De al doilea tip:

Fie $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $m \leq n$, $\omega = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m} f_{i_1 \ldots i_n} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n}$

o formă diferențială de ordin m și clasă C^1 pe D

și $s : A \to D$ o suprafață de clasă C^1.

$$\int_s \omega = \int_{int(A)} s_*(\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m} \int_A f_{i_1, \ldots, i_n} \circ s \det\left(\frac{\partial s_{ij}}{\partial x_{ij}}\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n}$$

SAU

$$\int_{S = Fr(K)} (P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy) =$$

$$= \iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$$

o formă diferențială alternată ω, de ordin $m > 0$, clasă C^k

$$\sum_{1 \leq \ldots < n} f_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m}.$$

17. Teorema lui Green

Fie $\mathcal{D} = \mathring{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2$ și K un domeniu Green simplu și $\omega = P\,dx + Q\,dy$ formă diferențială de ordin 1 și clasă C^k pe $\mathcal{D}$ cu $K \subset \mathcal{D}$ și $k \geq 1$. Atunci

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega \Leftrightarrow \int_{K} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial K} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy$$

Th. Stokes var. particulară

$f : [a,b] \to \mathbb{R} \in C^1 \Rightarrow \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) =$

$$= \int_{\partial[a,b]} f$$

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_{\partial\gamma} f$$

Th. Ostrogradski (Gauss)

Fie $\mathcal{D} = \mathring{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda = \sum_{i=1}^{p} n_i c_i$ un lanț de cuburi singulare, unde $c_i : [0,1]^3 \to \mathcal{D}$ sunt 3-cuburi singulare de clasă C^1 și $\omega = P\,dx \wedge dy + Q\,dz \wedge dx + R\,dy \wedge dz$ o formă diferențială de ordin 2 de clasă C^1 pe $\mathcal{D}$.

$$\int_{\partial\lambda} \omega = \int_\lambda \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Th. Stokes var. generală

Fie $\lambda = \sum_{i=1}^{p} c_i$ un lanț de cuburi singulare $c_i : [0,1]^n \to \mathcal{D}$, unde $\mathcal{D} = \mathring{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^n$ și ω o formă diferențială de clasă C^1 pe $\mathcal{D}$.

Atunci:

$$\int_\lambda d\omega = \int_{\partial\lambda} \omega$$

18. Th. Cauchy privind existența globală/locală a sol. unei ec. diferențiale

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ și $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $g = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b_i, y_0 + b_i] \to \mathbb{R}^n$ continuă. Atunci problema Cauchy $f' = g(x, f)$ și $f(x_0) = y_0$ are o soluție unică pe $[x_0 - h, x_0 + h]$ dacă $\exists$ L, a.î. $\| f(x,y) - f(x,\tilde{y})\|_2 \leq L \|y - \tilde{y}\|_2$, $\forall (x,y), (x,\tilde{y}) \in g$

$h < \min\{a, \frac{b_1}{K}, \frac{b_2}{K}, \dots, \frac{b_n}{K}\}$, unde

$$K = \max_{i=1}^{n} \{ \sup_{(x,y) \in M} |f(x,y)| \}.$$

Globală: Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ și $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $g: [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}^n$, a.î. $\exists$ $L > 0$ cu prop. că $\| g(x,y) - g(x,\tilde{y}) \|_2 \leq L \|y - \tilde{y}\|_2$. Atunci problema Cauchy $f'(x) = g(x, f(x))$ și $f(x_0) = y_0$ are soluție unică pe $[x_0 - a, x_0 + a]$.

19. Th. Cauchy-Riemann

Analiză completă

Fie $D = \mathring{D} \in \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$. Atunci f este $\mathbb{C}$-derivabilă în punctul c $\Leftrightarrow$

1) $\mathbb{R}$-diferențiabilă

2)
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(c) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(c)$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(c) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(c)$$

Funcție $\mathbb{C}$-derivabilă

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{C}$, $a \in D$, $f = f_1 + i f_2 = (f_1, f_2)$

f este $\mathbb{C}$ derivabilă în a, dacă $\exists$

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \overset{\text{Not.}}{=} f'(a)$$

20. Th. Cauchy-Hadamard

Fie seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ cu $\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$ și D domeniu de convergență. Atunci:

I. $\rho = 0 \Rightarrow D = \{a\}$

$\rho = \infty \Rightarrow D = \mathbb{C}$

$0 < \rho < \infty \Rightarrow B(a, \rho) \subset D \subset \overline{B(a, \rho)}$

II. $R < \rho \Rightarrow$ seria e normal convergentă pe $B(a, R)$

III. $s_k(z) = \sum_{n\geq 1} (a_n (z-a)^n)^k = \sum_{n\geq 1} a_n \cdot n(n-1)\dots(n-k+1)(z-a)^{n-k}$

IV. $s^{(k)} = s_k$, $s^{(k)}(a) = n!\, a_n$ pe $B(a, \rho)$.

21. Inegalitatea lui Lagrange

Fie $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D)$ și $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, a.î. $[z_0, z_1] \subset D$.

Atunci $\exists\ c \in [z_0, z_1]$, a.î. $|f(z_1) - f(z_0)| \leq |f'(c)||z_1 - z_0|$

$\gamma : [0,1] \to D$, $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$

22. Def. integrala complexă (curbilinie)

Fie $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{C}$ și $f : D \to \mathbb{C}$ continuă și $\gamma : [a,b] \to D$ de clasă C^1. Se numește int. curbilinie $\mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

23. Th. derivare sub integrală var. $\mathbb{C}$

Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \in C^1$, $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{C}$ și $g : D \times K \to \mathbb{C}$ cont, unde $K = \gamma([a,b])$.

Fie $G(z) = \int_\gamma g(z,w)\,dw$. Dacă există $\frac{\partial g}{\partial z}(z,w)$ și e continuă în z și $w \Rightarrow$

$$G'(z) = \int_\gamma \frac{\partial g(z,w)}{\partial z}\,dw$$

24. Th. Cauchy pentru domenii Green.

Fie $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(D)$ și $K \subset D$ un domeniu Green. Atunci

$$\int_K f(z)\,dz = 0.$$

25. Formulele lui Cauchy pentru disc.

Fie $f: B[a, r] \to \mathbb{C}$ continuă pe $B[a, r]$ și f e olomorfă pe $B(a, r)$ atunci $\forall z \in B(a, r)$,

$$\exists f^{n}(z) \text{ și } f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

, $\partial B(a, r)$ - drumul $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = (a + r\cos t,\ b + r\sin t)$$

Inegalitățile lui Cauchy

Fie $f: \overline{B(a, r)} \to \mathbb{C}$, a.î. f e olomorfă și

$M = \sup\limits_{|z| = r} |f(z)|$, atunci $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

26. Teorema lui Liouville

Fie f o funcție olomorfă pe $\mathbb{C}$ și mărginită.
Atunci funcția e o constantă.
Atunci funcția e σ.

27. Th. de identitate a funcției e σ.

Fie $f, g \in \mathcal{O}(D) \subset \mathbb{C}$. Dacă $\exists \{z_n\}_n \subset D$, a.î. $f(z_n) = g(z_n)$, $\forall n \Rightarrow f(z) = g(z)$, $\forall z \in D$.

28. Punct singular

Un punct s.n. punct singular pentru f dacă $f \in \mathcal{O}(B(a, r)) \Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$$

$$a_n = \operatorname{Rez}(f, a)$$

29. Serie Laurent

O serie de forma $s(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$,

$z_0, a_n \in \mathbb{C}$ şi $n\in\mathbb{Z}$ s.n. serie Laurent.

30. Th. privind dezvoltarea în serii Laurent a fct. $\in \mathcal{O}$

Fie f olomorfă pe un inel $A=\{z\in\mathbb{C} \mid r<|z-z_0|<R\}$

$$f(z)=\sum_{n} c_n(z-z_0)^n$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\gamma)}{(\gamma-z_0)^{n+1}}\,d\gamma$$

31. Th. reziduurilor

Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{C}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$

$f\in\mathcal{O}(D\setminus\{a_1,\dots,a_n\})$, $\gamma:[a,b]\to D\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$

drum închis de clasă C^1 pe porţiuni.

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n} n_{\gamma}(a_i)\cdot \operatorname{Rez}(f,a_i)$$

32. Th. lui Rouche

Prin ordinul lui f în z_0 — $\mathcal{O}(f,z_0)$ — cel mai mare nr. $n\in\mathbb{Z}$, a.î. $f(z)$ divizibilă prin $(z-z_0)^n$.

Fie $f,g\in\mathcal{O}(B(a,r))\cap C(\overline{B(a,r)})$, dacă

$|f(z)-g(z)|<|g(z)|$, $\forall z\in\partial B(a,r) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{O}(f,D)=\mathcal{O}(g,d)$.