Curs 1 - Geometrie - 28.02.2024

Notă
- 10p. examen (1p. of)
- max 1p. seminar
- max 0,5p. tutoriat

} pt. notă ≥ 4,5.

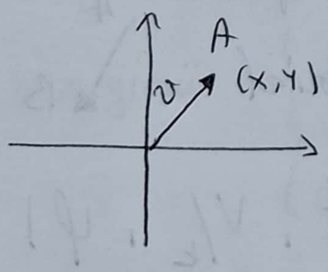
Curs
- geometrie afină (≃ 60%)
- geometrie proiectivă (≃ 40%)

Office hours: 4h ____, cabinetul GTA (et 1) ← sala 122

Bibliografie:
1) L. Ornea, A. Turtoi - "O introducere în geometrie" (Ed. Theta - 2011) - curs
2) J. Agricola, T. Friederich - "Elementary Geometry" - 2005

Geometrie afină

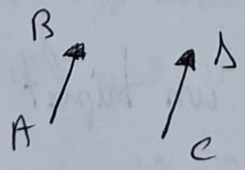
În $\mathbb{R}^2$



v - vector de coord (x,y)

A pct. de coord $(x,y) \Rightarrow v = \vec{OA}$

Vectori liberi în $\mathbb{R}^2$: $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AC \parallel BD \end{cases}$



pt. A-B-C-D col $\vec{AB} = \vec{CD}$

dc. $\exists \begin{cases} \vec{MN} = \vec{AB} \\ \vec{MN} = \vec{CD} \\ M, N \text{ necol } A, B \end{cases}$

Obs:

1) $\mathcal{V} = \{v \mid v \text{ vector liber}\}$ este un $\mathbb{R}$ sp. vect.

2) vectorii se pot
- aduna
- înmulți cu scalari

Prop: Fixez $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un pct. Atunci:

1) pt. $\forall\, v \in \mathcal{V} \Rightarrow (\exists!)\, P \in \mathbb{R}^2$ a.î. $\boxed{v = \overline{\Omega P}}$

2) pt. $\forall\, P \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (\exists!)\, v \in \mathcal{V}$ a.î. $\boxed{v = \overline{\Omega P}}$

$\Bigg\}$ $\Leftrightarrow$ Dc. aleg $\Omega \Rightarrow \exists$ o bij între $\underset{\text{vectori}}{\mathcal{V}}$ și $\underset{\text{puncte}}{\mathbb{R}^2}$

$\boxed{Q}$ Adunarea pct ???

$A, B \in \mathbb{R}^2 \overset{?}{\Rightarrow} A + B = (x_A + x_B,\ y_A + y_B) = C \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ care nu depinde doar de A și B, ci și de O

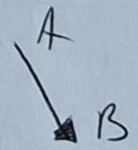
Dc. iau $O, O' \in \mathbb{R}^2$ a.î. $\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{O'C'} \end{cases} \not\Rightarrow C = C'$

Obs:

1) Adunarea pct. nu are sens. Dc. am A și B pct. $\Rightarrow \alpha A + \beta B$ nu e corect definit în general

2) În geometria vectorilor (alg. lin) ~~ad~~ depinde de O.

3) În geometria punctelor (geom. afină) $\nexists$ pct. speciale.



4) $\forall\, A, B \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ trăiește într-un sp. vectorial

Def: Un spațiu afin este un triplet $(\underset{\text{mț. de pct}}{\mathcal{A}},\ \underset{k\text{-sp. vect.}}{V/_k},\ \varphi)$

$\varphi: A \times A \to V$ funcție a.î.:

$(x, y) \rightsquigarrow \overrightarrow{xy}$

1) $\varphi(A,B) + \varphi(B,C) = \varphi(A,C)$ ← egalitate în sp. vect. V.

2) $\exists\, O \in A$ a.î. $\varphi_O : A \to V$, $\varphi_O(P) = \varphi(O,P)$ e bij

Notație: $\varphi(A,B) = \overline{AB}$ => $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

$\overline{AB} = -\overline{BA}$

$\overline{AA} = 0$.

Def: $(\mathcal{A}, V/_k, \varphi)$ s.n. spațiu afin, având spațiul director V, iar φ s.n. structură afină.

Prop: $(\mathcal{A}, V/_k, \varphi)$ sp. afin => $\forall O \in \mathcal{A}$ => φ_O e bij.

Dem: Fie O cel din def => φ_O bij.

Fie $O' \in A$ și vrem $\varphi_{O'}$ bij.

$\varphi_{O'}(P) = \overline{O'P} = \overline{O'O} + \overline{OP}$

$= \varphi(O', P) = \varphi(O', O) + \varphi(O, P)$

$\Rightarrow \varphi_{O'} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{translație}}}{T_{\overline{O'O}}} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bij}}}{\varphi_O} \Rightarrow \varphi_{O'}$ bij.

Exemple:

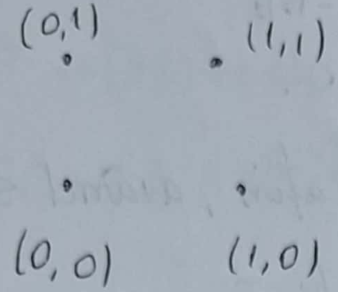
1) $V/_k$ sp. vect, îi putem da și o str. afină prin o "uitare" a originii: $\begin{cases} \mathcal{A} = V \\ V = V \text{ (sp. director)} \\ \varphi(v, w) = w - v \end{cases}$

$\varphi(v, w) + \varphi(w, u) = w - v + u - w = u - v = \varphi(v, u)$

=> $(\mathcal{A}, V/_k, \varphi)$ sp. afin.

$\Rightarrow k^n$ are o str. canonică de sp. afin

$\mathbb{Z}_2^2$



sp. afin $\Rightarrow$ nu are sens lungime, dist, $\measuredangle$, $\perp$.

2) $AX = b$, $A \in M_{m\times n}(k)$, $b \in k^m$ sist. lin

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \{X \in k^n \mid AX = b\} \\ V = \{X \in k^n \mid AX = 0\} \\ \varphi(X,Y) = Y - X \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{A}, V, \varphi) \text{ sp. afin}$$

Combinații afine

Fie $(\mathcal{A}, V/_k, \varphi)$ un sp. afin. (affine space)

$\boxed{Q}$ Pt. $P, Q \in \mathcal{A}$ când are sens $\alpha P + \beta Q$???

Prop: Pt. $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$, $O \in \mathcal{A}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ cu $\sum \alpha_i = 1$ $\Big\} \Rightarrow \sum \alpha_i \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OP}$ nu depinde de O.

Dem: Pt. O și O' $\quad \sum \alpha_i \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OP}$

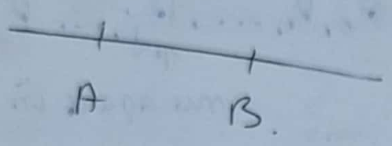
$$\cancel{\sum \alpha_i \overrightarrow{OO'}} + \sum \alpha_i \overrightarrow{O'P} = \cancel{\overrightarrow{OO'}} + \overrightarrow{O'P}$$

Notație: Dc. $\sum \alpha_i = 1 \Rightarrow$ Scriem $\sum \alpha_i P_i = P$ și înțelegem $\sum \alpha_i \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OP}$ pt. $\forall\, O \in \mathcal{A}$ și spunem că P e combinație afină de P_i cu coef α_i

$\boxed{Ex}$: 1) Dacă char $k \neq 2 \Rightarrow$ are sens $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = M$ "mij" AB.

2) Dc. char $k \neq 3 \Rightarrow$ are sens $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = G$ c.d.g. $\triangle ABC$
(baricentru cu ponderi egale)

3) $\boxed{k = \mathbb{R}}$ $A, B \in \mathcal{A}$, $tA + (1-t)B$ < pt. $t \in [0,1] \Rightarrow$ segm$[AB]$; pt $t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ dreapta AB.



Def: Dc. am $(\mathcal{A}, V_{/k})$ sp. afin și $M \subset \mathcal{A}$ mt. atunci

$$\boxed{Af(M) = \left\{ \sum_{1}^{n} \alpha_i P_i \;\middle|\; \forall n \geq 1 \text{ cu } \alpha_i \in k \text{ a.î. } \sum \alpha_i = 1,\ P_i \in M \right\}} \text{ s.n.}$$

acoperirea afină a lui M

Obs: 0) $M \subset Af(M)$
1) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow Af(M_1) \subset Af(M_2)$
2) $Af(Af(M)) = Af(M)$

$\boxed{ex}$ $M = \{A, B\} \Rightarrow Af(M) = \{tA + (1-t)B \mid t \in k\}$

$\boxed{\text{în } \mathbb{R}^2}$ $A - B - C$ col. $C \in Af(A,B) \Leftrightarrow Af(\{A,B,C\}) = Af(\{A,B\})$

$\boxed{Q}$ Dat M mt. $\exists\, N \subset M$ minim a.î. $Af(M) = Af(N)$
în sensul când

Def 1: O mt. $M = \{P_0, \dots, P_m\}$ s.n. afin dependentă

dc. $\exists\, i_0 \in \{0, \dots, m\}$ a.î. $P_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i P_i$ cu $\sum \alpha_i = 1$.

Echivalent cu $Af(M) = Af(M \setminus \{P_{i_0}\})$. Dc. nu e afin dep. s.n. afin independentă

Obs:

1) Dc. $A \neq B \Rightarrow \{A, B\}$ afin indep.

2) Dc. $P_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i P_i$ și j cu $\alpha_j \neq 0 \Rightarrow P_j$ e comb. lin de $P_{i_0}, P_0, P_1, \dots, \hat{P}_j, \dots P_m$

nu apare în șir.

Dem: $j = 0 \Rightarrow P_{i_0} = \underset{\neq 0}{\alpha_0} P_0 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \alpha_i P_i$ cu $\alpha_0 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i = 1$.

Fie $O \in A \Rightarrow \vec{OP}_{i_0} = \alpha_0 \vec{OP}_0 + \sum_{\substack{i \neq i_0 \\ i \geq 1}} \alpha_i \vec{OP}_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{OP}_0 = \frac{1}{\alpha_0} \vec{OP}_{i_0} - \sum_{\substack{i \geq 1 \\ i \neq i_0}} \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \vec{OP}_i$

$\frac{1}{\alpha_0} - \sum_{\substack{i \geq 1 \\ i \neq i_0}} \frac{\alpha_i}{\alpha_0} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0} = 1 \Rightarrow$ comb. afină $\Rightarrow$

$P_0 = \frac{1}{\alpha_0} P_{i_0} + \sum_{\substack{i \geq 1 \\ i \neq i_0}} \left(\frac{-\alpha_i}{\alpha_0}\right) P_i$

Prop: $P_0, \dots, P_m$ pct. $\Rightarrow \{P_0, \dots, P_m\}$ e afin indep $\Leftrightarrow \{\vec{P_0P_1}, \dots, \vec{P_0P_m}\}$ form un sist lin. indep. $\Rightarrow$ dc. $\dim_{\mathbb{K}} V = n \Rightarrow$ un sist. afin indep. are cel mult $n+1$ pct.

Dem $\boxed{"\Rightarrow"}$ Pp. $\vec{P_0P_1} = \sum_2^m \alpha_i \vec{P_0P_i} = (1 - \sum \alpha_i) \vec{P_0P_0} + \sum_2^m \alpha_i \vec{P_0P_i}$

$\Rightarrow P_1 = (1 - \sum \alpha_i) P_0 + \sum_2^m \alpha_i P_i$ fals.

$\boxed{"\Leftarrow"}$ Pp. $P_0 = \sum_1^m \alpha_i P_i$ cu $\sum \alpha_i = 1 \Rightarrow 0 = \vec{P_0P_0} = \sum_1^m \alpha_i \vec{P_0P_i}$

~~x~~ cu $\{\vec{P_0P_1}, \dots, \vec{P_0P_m}\}$ s.l.i.

Curs 2 - Geometrie - 6.03.2024

Def: $(A, V/_k)$ - sp. afin, $S \subset A$ s.n. sistem afin de generatori

de $\boxed{Af(S) = A}$ $\Leftrightarrow$ $\forall P \in A \Rightarrow \exists \alpha_i \in k$ și $\exists P_i \in S$ a.î. $\sum_{1}^{n} \alpha_i P_i = P$

$\sum \alpha_i = 1.$

! Pe parcursul cursului, când scriem $\sum_{1}^{n} \alpha_i P_i = P \in A$ se subînțelege că $\sum_{1}^{n} \alpha_i = 1$

Prop: Dc. $S = \{P_0, \dots, P_n\}$ e sist. afin de generatori $\Leftrightarrow$ $\{\overline{P_0P_1}, \dots, \overline{P_0P_n}\}$ e sist. lin. de generatori

Dem: $\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ Fie $v \in V \xrightarrow{\varphi_{P_0} \text{ bij}} (\exists!)\, Q \in A$ a.î. $v = \overline{P_0Q}$

$Q = \sum_{0}^{n} \alpha_i P_i \Rightarrow \overline{P_0Q} = \sum_{1}^{n} \alpha_i \overline{P_0P_i} \Rightarrow \{\overline{P_0P_1}, \dots, \overline{P_0P_n}\}$ sist. lin de gen.

$\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ Ex:

Corolar:

1) $M \subset A$ mt. $\Rightarrow M$ e sistem afin $\begin{cases} \text{independent} \Rightarrow |M| \leq n+1 \\ \text{de generatori} \Rightarrow |M| \geq n+1 \end{cases}$
$\dim_k V = n$

2) Dc. $\dim_k V < \infty \Rightarrow \exists$ un sistem de generatori finit.

Def: $\{P_0, \dots, P_n\}$ s.n. reper afin dc. este sistem afin $\begin{cases} \text{indep} \\ \text{de gen.} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{\overline{P_0P_1}, \dots, \overline{P_0P_n}\}$ bază în V.

Obs $\begin{cases} 1)\ \dim_k V = n \Rightarrow \forall R \text{ reper } |R| = n+1 \\ 2)\ \exists \text{ repere afine} \\ 3)\ \{P_0, \dots, P_n\} \text{ e rep. afin} \Leftrightarrow \forall P \in \mathcal{A} \Rightarrow (\exists!)\ \lambda_i \in k \end{cases}$

cu $\sum \lambda_i = 1$ a.î. $P = \sum_{i}^{n} \lambda_i P_i$

Def: O pereche $(O, \mathcal{B})$ cu $\begin{cases} O \in \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ bază în } V \end{cases}$ s.n. reper cartezian.

Corespondența:

$\{P_0, \dots, P_n\}$ reper afin $\longrightarrow$ $(P_0, \mathcal{B} = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\})$

reper cartezian

$\{P_0, \dots, P_n\}$ reper afin cu $\overrightarrow{OP_i} = v_i$ $\longleftarrow$ $(O, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\})$

Coordonatele unui punct

Def:

1) $R_{af} = \{P_0, \dots, P_n\}$ reper afin. Dc $P = \sum_{0}^{n} \lambda_i P_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = [P]_{R_{af}}}$ s.n. coord. lui P în raport cu rep. afin.

2) $R_{cart} = (O, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\})$. Dc. $\overrightarrow{OP} = \sum_{1}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [P]_{R_{cart}}}$ s.n. coord lui P în raport cu rep. cart

Obs: $[P]_{R_{af}} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \longrightarrow [P]_{R_{cart}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$[P]_{R_{cart}} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longrightarrow [P]_{R_{af}} = (1 - \sum_1^n \lambda_i, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

Def: $\dim \mathcal{A} = \dim_k V$ s.n. dimensiunea sp. afin.

$\left.\begin{array}{l} R_1 = (O_1, \mathbb{B}_1) \\ R_2 = (O_2, \mathbb{B}_2) \end{array}\right\}$ rep. cart. și $[P]_{R_1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightsquigarrow [P]_{R_2} = ?$

$\mathbb{B}_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$ și $\mathbb{B}_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$.

$\overrightarrow{O_1 P} = \sum_1^n \alpha_i b_i$

$\overrightarrow{O_2 P} = \overrightarrow{O_2 O_1} + \sum_1^n \alpha_i b_i$ și $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} f_j$; $a_{ij} = (M_{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2})$

matr. de trecere de la $\mathbb{B}_2$ la $\mathbb{B}_1$.

$M_{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2} \cdot [v]_{\mathbb{B}_1} = [v]_{\mathbb{B}_2}$

$M_{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [b_1]_{\mathbb{B}_2} & \dots & [b_n]_{\mathbb{B}_2} \\ | & & | \end{pmatrix}$

Prop (schimbarea de reper): Fie $(O_1, \mathbb{B}_1)$ și $(O_2, \mathbb{B}_2)$ 2 repere carteziene $\Rightarrow$ $\boxed{[P]_{R_2} = M_{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2} \cdot [P]_{R} + [O_1]_{R_2}}$

Subspații afine

Def: $(\mathcal{A}, V/_k)$ sp. afin. $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ s.n. subspațiu afin dc.

$\left.\begin{array}{l} \forall k \geq 1, \forall \alpha_i \in k \\ \forall P_i \in \mathcal{A}' \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_1^m \alpha_i P_i \in \mathcal{A}' \Leftrightarrow \boxed{Af(\mathcal{A}') = \mathcal{A}'}$

Ex: $Af(M)$ e subsp. afin $\forall M \subset \mathcal{A}$ $\left(Af(Af(M)) = Af(M)\right)$

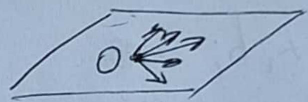
$\boxed{Q}$ Un subsp. afin e sp. afin? (în mod canonic).

Caut un V' care să îi fie sp. director ($V' \leq_k V$)

Idee: $V' = \varphi(A', A') \subset V$.

Prop: Fie $O \in \mathcal{A}'$. $\mathcal{A}'$ e subsp. afin $\Leftrightarrow$ $V_0' = \{\overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{A}'\}$ e subsp. vect.

Dem $\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$: Vreau $\alpha v + \beta w \in V_0'$ $\forall \alpha, \beta \in V$
$\forall v, w \in V_0'$



$$\Updownarrow$$

$$\alpha \overrightarrow{OP} + \beta \overrightarrow{OQ} \in V_0'$$

Știm că $(\exists!)$ $R \in \mathcal{A}$ cu $\alpha \overrightarrow{OP} + \beta \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ și vrem $R \in \mathcal{A}'$.

$$\Updownarrow$$

$$(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OO} + \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = (1-\alpha-\beta)\underbrace{O}_{\in A'} + \alpha \underbrace{P}_{\in A'} + \beta \underbrace{Q}_{\in A'} \in A'.$$

$\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ Fie $P = \sum_1^n \alpha_i P_i$ cu $P_i \in \mathcal{A}'$

$$\overrightarrow{OP} = \sum_1^n \alpha_i \underbrace{\overrightarrow{OP_i}}_{\in V_0'} \in V_0' \Rightarrow \underline{P \in \mathcal{A}'}$$

Obs: O din prop e arbitrar. În plus, $V_{O_1}' = V_{O_2}'$ $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{A}'$.

Dem: $V_{O_1}' \subset V_{O_2}'$. Fie $v \in V_{O_1}' \Rightarrow v = \overrightarrow{O_1P}$; $P \in \mathcal{A}'$
$= \overrightarrow{O_2Q}$ (φ_{O_2} bij.)

$\Rightarrow \overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MO_2} - \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MP}$

$$Q = \underbrace{O_2}_{\in A'} - \underbrace{O_1}_{\in A'} + \underbrace{P}_{\in A'} \in A'$$

Miercuri - 14^{00} - 17^{00} - consultații

<u>Cor</u>: $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ subsp. afin cu $V' \leq_k V$.

1) Dat $\mathcal{A}'$ subsp. afin aleg $O \in \mathcal{A}'$ și $V_0' = \{\vec{OP} \mid P \in \mathcal{A}'\} \leq_k V$.

2) Dat $V' \leq_k V \Rightarrow$ aleg $\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} \mid \vec{OP} \in V', O \in \mathcal{A}'\} \overset{not}{=} O + V'$

<u>Terminologie</u>:
1) $\dim \mathcal{A}' = 1 \Rightarrow$ s.n. dreaptă afină
2) $\dim \mathcal{A}' = 2 \Rightarrow$ s.n. plan afin
3) $\dim \mathcal{A}' = n-1 \Rightarrow$ s.n. hiperplan afin ($\dim \mathcal{A} = n$)

<u>Prop</u>: $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ submulțime ($\operatorname{char} k \neq 2$). $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ subsp. af

$\Leftrightarrow [\forall P, Q \in \mathcal{A}' \Rightarrow \alpha P + (1-\alpha) Q \in \mathcal{A}' \ \forall \alpha \in k]$

<u>Dem</u>: $\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ evident

$\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ Fie $O \in \mathcal{A}'$. Vrem $V_0' = \{\vec{OP} \mid P \in \mathcal{A}'\} \leq_k V$.

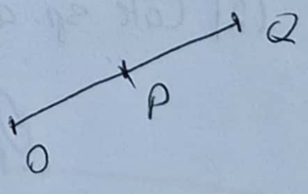
1) $\forall v \in V_0' \Rightarrow \alpha v \in V_0'$

2) $\forall v, w \in V_0' \Rightarrow v + w \in V_0'$

---

1) $v = \vec{OP}$, $\alpha v = \vec{OQ}$, $Q \in \mathcal{A}$.

$Q = (1-\alpha) O + \alpha P \in \mathcal{A}'$



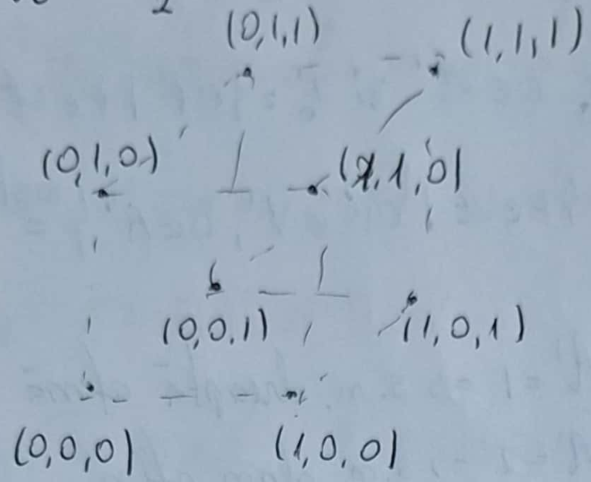
2) $v = \vec{OP}$, $w = \vec{OQ}$ $\Rightarrow \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} w = \frac{1}{2}\vec{OP} + \frac{1}{2}\vec{OQ} = \vec{OR}$.

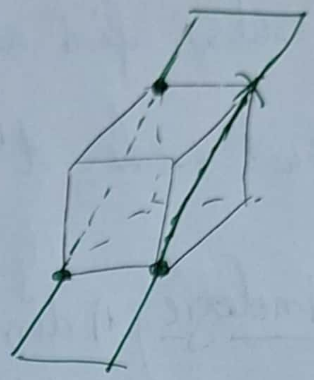
$\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q = R \in \mathcal{A}'$

<u>Obs</u>: Dc. $k = \mathbb{Z}_2$ cond ($\alpha P + (1-\alpha) Q \in \mathcal{A}' \ \forall \alpha \in k$)

e mereu îndeplinită.

$\underline{Ex}$: $A = \mathbb{Z}_2^3$





$\underline{\text{Dr. afine}}$: $Af(\{(0,0,0),(1,0,0)\}) = \{(1,0,0),(0,0,0)\}$

$\uparrow$ $\quad = \alpha(0,0,0) + (1-\alpha)(1,0,0)\ ,\ \alpha \in \mathbb{Z}_2.$

mt. cu 2 pct.

$\underline{\text{Plane afine}}$: $Af(\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1)\} =$

$= \alpha(0,0,0) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,1,1)$ cu $\alpha+\beta+\gamma \in \mathbb{Z}_2$

$= \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\}.$

$\underline{Ex}$: 1) Câte plane are $\mathbb{Z}_2^3$?

2) Câte sp. afine de dim k are $\mathbb{Z}_p^n$?

Operații cu subspații afine

$\underline{\text{Notăm}}$: $Dir(A) = V \leftarrow$ sp. director.

1) $\underline{\text{Intersecția}}$: $A_i \leq A$ subsp. afine $\forall i \in J \Rightarrow \bigcap_{i\in J} A_i$ subsp. afin A dc. $\bigcap_{i\in J} A_i \neq \emptyset$.

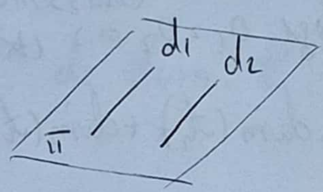
Ex: 1) $\boxed{Din\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} Din(A_i)}$ dc. $\bigcap A_i \neq \emptyset$

2) $Af(M) = \bigcap_{M\subset A' \text{ subsp. afin}} A'$

2) Join-ul (uniunea) a 2 sp. afine $A_1, A_2 \le A \Rightarrow$

$A_1 \vee A_2 \overset{def}{=} Af(A_1 \cup A_2)$ s.n. join-ul subsp. A_1 și A_2.

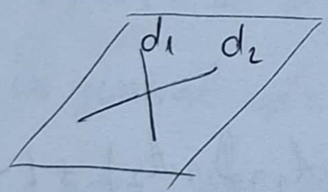
ex: $\boxed{\text{În } \mathbb{R}^3}$ 1)



$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \overbrace{din(d_1)+din(d_2)}^{din(d_1)} \neq \underbrace{din(d_1 \vee d_2)}_{\pi}$

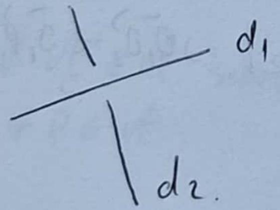
În general $din(A_1 \vee A_2) \neq din\, A_1 + din\, A_2$.

2)



$din(d_1 \vee d_2) = din\, d_1 + din\, d_2$.

3)



$d_1 \vee d_2 = \mathbb{R}^3$

Prop: $\boxed{Din(A_1 \vee A_2) = Din(A_1) + Din(A_2) + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle}$

cu $O_1 \in A_1$, $O_2 \in A_2$

Dem: "$\supseteq$" evident

"$\subseteq$" $O_1 \in A_1 \Rightarrow O_1 \in A_1 \vee A_2$.

~~$O_2 \in A_2$~~ $P \in A_1 \vee A_2$.

$\overrightarrow{O_1P} \in Din(A_1 \vee A_2) \Rightarrow P = \underbrace{\sum_{1}^{m_1} \alpha_i P_1^i}_{\in A_1} + \underbrace{\sum_{1}^{m_2} \beta_i P_2^i}_{\in A_2}$

$$\overrightarrow{O_1P} = \underbrace{\sum_{1}^{m_1} \alpha_i \overrightarrow{O_1P_1^i}}_{\in A_1} + \underbrace{\left(\sum_{1}^{m_2} \beta_j\right) \overrightarrow{O_1O_2}}_{\in \langle O_1O_2 \rangle} + \underbrace{\sum_{1}^{m_2} \overrightarrow{O_2P_2^j}}_{\in A_2}.$$

Obs: Dc. $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \Rightarrow$ pot alege $O_1 = O_2 \Rightarrow Din(A_1 \vee A_2) = Din(A_1) + Din(A_2)$

Cor: $\boxed{\dim(A_1 \vee A_2) \overset{def}{=} \dim(Din(A_1 \vee A_2)) = \dim(Din(A_1) + Din(A_2) + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle)}$ $(*)$

Caz 1: $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \Rightarrow$ pot alege $O_1 = O_2 \overset{Grassmann}{\Rightarrow} (*)$ $\dim(A_1 \vee A_2) = \dim(A_1) + \dim(A_2) - \dim(A_1 \cap A_2)$

Caz 2: $A_1 \cap A_2 = \emptyset \overset{(*)}{\Rightarrow} \dim(A_1 \vee A_2) = \dim(Din(A_1) + Din(A_2)) + 1$

$- \underbrace{\dim((Din(A_1) + Din(A_2)) \cap \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle)}_{N} =$

$\cancel{= \dim(Din} = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim(Din A_1 \cap Din A_2) + 1 - N.$

$\boxed{\text{Vrem } N = 0}$ P.p. $\overrightarrow{O_1O_2} \in Din(A_1) + Din(A_2) \Rightarrow \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}$

cu $P \in A_1$, $Q \in A_2$.

$\overrightarrow{PO_2} = \overrightarrow{O_2Q} \in Din(A_2) \Rightarrow$ ~~P ∈ Q~~ $P \in A_2 \Rightarrow A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ (F).

Curs 3 - Geometrie - 13.03.2025

Paralelismul sp. afine:

Def: $(\mathcal{A}, V/_k)$ sp. af., $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ subsp. $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Dir\, \mathcal{A}_1 \subset Dir\, \mathcal{A}_2 \text{ sau} \\ Dir\, \mathcal{A}_1 \supset Dir\, \mathcal{A}_2 \end{cases}$

Obs: Nu e rel. tranzitivă în general. E rel. de echiv. pe mt. subsp. af. de dim. k.

Prop:

1) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$ şi $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ sau $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2$

2) în general $\not\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ sau $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2$ sau $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$

3) e adev. pt. hiperplane

3) $\begin{cases} \forall\, \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \text{ subsp.} \\ \forall\, P \in \mathcal{A} \end{cases} \Rightarrow \exists!\, \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$ subsp. a.i. $\begin{cases} \dim \mathcal{A}'' = \dim \mathcal{A}' \\ P \in \mathcal{A}'' \\ \mathcal{A}' \parallel \mathcal{A}'' \end{cases}$

Dem: $\mathcal{A}'' = P + Dir(\mathcal{A}')$

Ec. parametrice şi implicite pt. subsp. af.

Obs: $(\mathcal{A}, V/_k)$ sp. af., $R = (\Omega, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\})$ rep. cart.

$\Rightarrow \exists\, \varphi : \mathcal{A} \to k^n$ bij, $P \longmapsto [P]_R$

I. Ec. parametrice

Fie $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ subsp., $\dim \mathcal{A}' = k$

Fie $O \in \mathcal{A}'$ și $\{w_1, \dots w_k\}$ s.g. pt. $\mathcal{D}in(\mathcal{A}')$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}' = \{ [O]_R + \sum_1^k \lambda_i [w_i]_R \mid \lambda_i \in k \}}$$

$\mathcal{A}' = \{P \mid \vec{OP} \in \mathcal{D}in\, \mathcal{A}'\} = \{P \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ a.î. $\vec{OP} = \sum_1^k \lambda_i w_i\}$

$\Rightarrow [OP]_R = \sum \lambda_i [w_i]_R$

II. Ec. implicite:

$R = (\Omega, \mathbb{B})$ rep. cart. $\quad V' = \mathcal{D}in(\mathcal{A}') \leq V \simeq k^n$ (izo lin)

$\overset{\text{sem 1}}{\Longrightarrow} \exists A \in M_{m \times n}(k)$ a.î. $V' = \{v \mid A[v]_{\mathbb{B}} = 0\}$. În plus poate fi ales $m = \cancel{\mathbb{B}} \dim V'$

$\mathcal{A}' = \{P \mid \vec{OP} \in V'\} = \{P \mid A[\vec{OP}]_{\mathbb{B}} = 0\} = \{P \mid A([P]_R - [O]_R) = 0\}$

$= \{P \mid A[P]_R = \underset{A \cdot [O]_R}{\underset{\shortparallel}{b}}\}$

Teorema de ~~st~~ structură: $\mathcal{A}$ sp. af. $R = (O, \mathbb{B})$ rep. cart.

At. $\mathcal{A}'$ e subsp. afin $\Leftrightarrow \exists A \in M_{m,n}(k)$, $b \in k^n$ a.î.:

$\mathcal{A}' = \{P \mid A \cdot [P]_R = b\}$

$\mathcal{D}in(\mathcal{A}') = \{v \mid A[v]_B = 0\}$

Cor: $\forall$ subsp. af. e $\cap$ de hiperplane.

Aplicații liniare

Def: $(A_1, V_1/_k)$, $(A_2, V_2/_k)$ sp. af. $\varphi: A_1 \to A_2$ s.n. aplicație liniară dc. $\varphi(\sum_1^m \alpha_i P_i) = \sum_1^m \alpha_i \varphi(P_i)$ cu $\sum_1^m \alpha_i = 1$ $\forall P_i \in A_1$

Ex: $A_1 = \mathbb{R}^n$, $A_2 = \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$; $b \in \mathbb{R}^m$

$x \longmapsto Ax + b$ apl. lin.

Prop: Fie $\varphi: A_1 \to A_2$ apl. ~~lin~~ afină $\Rightarrow \exists\, O \in A_1$ a.î. $f_0: V_1 \to V_2$

$f_0(\vec{v}) = f_0(\vec{OP}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ e apl. liniară.

Dem: $\boxed{1_n \Rightarrow 4}$ $f_0(\alpha v + \beta w) \overset{?}{=} \alpha f_0(v) + \beta f_0(w)$

$\alpha\vec{OP} + \beta\vec{OQ} = OR$ unde $R = (1-\alpha-\beta)O + \alpha P + \beta Q$.

$\underbrace{(1-\alpha-\beta)\varphi(O) + \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)}_{=\varphi(R)} \Rightarrow \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(R)} = \alpha\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} + \beta\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(Q)}$

$\Rightarrow f_0(R) = \alpha f_0(P) + \beta f_0(Q)$

$f_0(\alpha v + \beta w) = \alpha f_0(v) + \beta f_0(w)$

$\boxed{1_n \Leftarrow 4}$ $P = \sum_1^m \alpha_i P_i$

$\vec{OP} = \sum_1^m \alpha_i \vec{OP_i} \overset{f_0}{\Rightarrow} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} = \sum_1^m \alpha_i \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P_i)}$

$\Rightarrow \varphi(P) = \sum_{i}^{n} \lambda_i \varphi(P_i)$

<u>Prop</u>: $\varphi: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ apl. af. $\Leftrightarrow \{\exists O \in \mathcal{A}_1$ a.î. $f_O: V_1 \to V_2$

$f_O(v) = f_O(\vec{OP}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ e apl. lin.

~~<u>Dem</u>: $\forall v \in V_1$, $f_{O_1}(v) = f_{O_2}(v)$~~

$\cancel{\overset{\shortparallel}{\vec{O_1P}} \qquad \overset{\shortparallel}{\vec{O_2 ?}}}$

<u>Def</u>: $\varphi: (\mathcal{A}_1, V_1) \to (\mathcal{A}_2, V_2)$ apl. af. $\Rightarrow f: V_1 \to V_2$ s.n. urma liniară a lui φ.

<u>Prop</u>:

1) φ inj $\Leftrightarrow f$ inj
2) φ surj $\Leftrightarrow f$ surj
3) φ bij $\Leftrightarrow f$ bij
4) $\mathcal{A}_1 \xrightarrow[\varphi_1]{} \mathcal{A}_2 \xrightarrow[\varphi_2']{} \mathcal{A}_3 \Rightarrow V_1 \xrightarrow[f]{} V_2 \xrightarrow[f']{} V_3$ și avem $\varphi' \circ \varphi = f' \circ f$

Curs 4 - Geometrie - 20.03.2024

Clase de transformări afine

Recap: $\varphi: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ afină $\Rightarrow \varphi(\sum \alpha_i P_i) = \sum \alpha_i \varphi(P_i)$

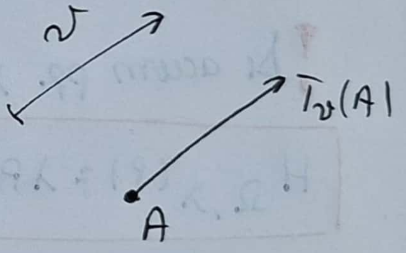
$\Leftrightarrow$ într-un rep. afin $X \longmapsto AX + b$, unde A e mat. urmei lui φ.

1) Translații: $\forall\, v \in V = \mathrm{Dir}(\mathcal{A})$ putem defini $T_v: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $T_v(A) = A + v$

$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{A\,T_v(A)} = v}$

Prop: (urma liniară): $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e translație $\Leftrightarrow$

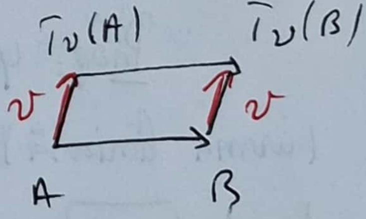
$\Leftrightarrow \vec{\varphi}: V \to V$ (urma ei) e identitatea.



"$\Rightarrow$" $\varphi = T_v$ pt. un v

$\vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{T_v(A)\,T_v(B)}$

$\overrightarrow{A\,T_v(A)} = \overrightarrow{B\,T_v(B)} = v \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{T_v(A)\,T_v(B)}$



"$\Leftarrow$" $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{T_v(A)\,T_v(B)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{A\,T_v(A)} = \overrightarrow{B\,T_v(B)} \overset{not}{=} v$.

Cor: Într-un reper, translațiile sunt $[\varphi(P)]_R = [P]_R + \underset{[v]_R}{\underset{\parallel}{b}}$

Prop:

1) T_v are pct. fixe $\Leftrightarrow v = 0$

2) $T_v \circ T_w = T_w \circ T_v = T_{v+w} \Rightarrow (\{T_v \mid v \in V\}, \circ) \overset{\text{are str. de sp. vect.}}{\simeq} (V, +)$

3) $\{T_v \mid v \in V\} \trianglelefteq GAf(\mathcal{A})$ (subgrup normal)

transf. af. arbitrară

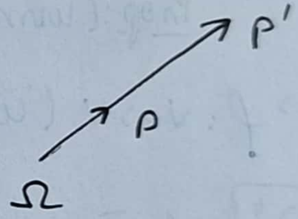
$$\boxed{\frac{GAf(\mathcal{A})}{\{T_v \mid v \in V\}} \simeq GL(V)}$$ ← transf. $X \longmapsto AX$

4) $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ subsp $\Rightarrow \begin{cases} T_v(\mathcal{A}') \parallel \mathcal{A}' \\ \dim(\mathcal{A}') = \dim(T_v(\mathcal{A}')) \end{cases}$

- $T_v(\mathcal{A}') = \mathcal{A}' \Leftrightarrow v \in \mathcal{D}in(\mathcal{A}')$

Omotetii : $\forall \Omega \in \mathcal{A}, \lambda \in k \setminus \{1\} \Rightarrow H_{\Omega,\lambda}(P) = P'$ a.î. $\overrightarrow{\Omega P'} = \lambda \overrightarrow{\Omega P}$

Dc. $\lambda = 0 \Rightarrow H_{\Omega,\lambda}(P) = \Omega$.

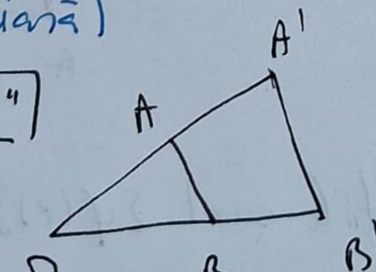


! De acum pp. $\lambda \neq 0$.

$$\boxed{H_{\Omega,\lambda}(P) = \lambda P + (1-\lambda)\Omega}$$

Prop: φ omotetie $\Leftrightarrow [\exists \lambda \in k$ a.î. $f(v) = \lambda v \ \forall v \in V]$
(urma liniară)

Dem: $\boxed{\text{„}\Rightarrow\text{"}}$



Vrem $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}$

Știm $\overrightarrow{\Omega A'} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$

$\overrightarrow{\Omega B'} = \lambda \overrightarrow{\Omega B}$ (-)

$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}$

$\boxed{\text{„}\Leftarrow\text{"}}$ $\mathcal{H}_{0,\lambda}(P) = \lambda P + (1-\lambda)\Omega$

$$\boxed{\varphi(P) = \lambda P + b \text{ în coord} \Rightarrow \Omega = \frac{1}{1-\lambda} b}$$

Prop:

1) $H_{O,\lambda}$ are pct. fix O $\Leftrightarrow$ $\lambda \neq 1$.

2) $H_{\Omega,\lambda} \circ H_{\Omega,\mu} = H_{\Omega,\lambda\mu}$ $\forall \lambda,\mu \in k$.

$(\mathcal{H}_{\Omega}, \circ) \simeq (k \setminus \{0\}, \cdot)$

3) $H_{\Omega,\lambda} \circ H_{O,\mu} = \begin{cases} \text{omotetie de rap } \lambda\mu \neq 1 \\ \text{translatie}, \ \lambda\mu = 1 \end{cases}$

4) $H_{O,\lambda}(\mathcal{A}') \parallel \mathcal{A}'$ $\forall \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ subsp.

$\dim \mathcal{A}' = \dim(H_{O,\lambda}(\mathcal{A}'))$

Proiecții afine:

Recap: $V = W \oplus W' \Rightarrow pr_W^{W'}(v) = pr_W^{W'}(w + w') = w$

(pr. lui V pe W de-a lungul lui W')

Obs: $pr_W^{W'}: V \to V$ e apl. afină și $\begin{cases} \text{Im } pr_W^{W'} = W \\ \text{Ker } pr_W^{W'} = W' \end{cases}$

Prop: $f: V \to V$ e o pr. vectorială $\Leftrightarrow$ $f^2 = f$.

Dem: $\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ evident

$\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ Dc. f ar fi proiecție $\Rightarrow f = pr_{\text{Im} f}^{\text{Ker} f}$. Vreau

$V = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$. și $f = pr_{\text{Im} f}^{\text{Ker} f}$

Oricum $\dim V = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$ (th. rk. defect)

$\Rightarrow$ e suficient $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

Fie $v \in \ker f \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(v) = 0. \\ v = f(w) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = f(v) = f(f(w)) \overset{f^2 = f}{=} f(w) = v$

<u>Def</u>: Fie A sp. af., $L \subset A$ subsp. (pe care proiectez) și $w' \leq V$ subsp. vect. (de-a lungul căruia proiectez) a.î. $\boxed{\mathrm{Din}(L) \oplus w' = V}$

Atunci def. $pr_L^{w'}(P) = P'$ a.î. $\{P'\} = (P + w') \cap A'$ s.n. proiecție afină.

<u>Ex</u>: 1) este corect def. (se intersectează doar într-un pct)

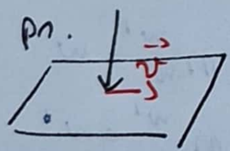
2) are pct. fixe L

3) e apl. lin.

4) urma $pr_L^{w'} = pr_{\mathrm{Din}(L)}^{w'} \leftarrow$ pr. lin.

5) φ e pr. af $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ (urma) e pr. lin.} \\ \text{are un pct. fix.} \end{array}\right.$

pr.



$T_v \circ pr$ nu e pr. af.

<u>Simetrii afine</u>:

<u>Recap</u>: V sp. vect., $V = W \oplus W'$. Are sens $sym_W^{W'} : V \to V$

$sym_W^{W'}(v = w + w') = w - w'$ și s.n. sim. lin. față de W de-a lungul lui W'. $\Leftrightarrow [Id_V + sym_W^{W'} = 2pr_W^{W'}]$

<u>Obs</u>: $sym_W^{W'}$ e izo și $(sym_W^{W'})^2 = id_V$.

Prop: $s: V \to V$ apl. lin. Atunci s e sim $\Leftrightarrow s^2 = id_V$.

~~Prop~~ **Def**: În context afin $\left.\begin{array}{l} L < A \text{ subsp. af.} \\ \vec{D}in(L) \oplus W' = V \end{array}\right\} \Rightarrow$ def.

$$sym_L^{W'}(P) \overset{def}{=} 2\, pr_L^{W'}(P) - P) \quad (2-1=1)$$

Ex: 1) pct. fixe : L

2) $\sigma: A \to A$ apl. af.

σ = sim. af $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \text{urma } s: V \to V \text{ e sim. lin.} \\ \sigma \text{ are un pct. fix.} \end{array}\right.$

3) $\sigma: A \to A$ apl. af.

$\sigma^2 = id_A \Leftrightarrow \sigma$ e simetric.

! Nu are sens $\not\leftarrow$ (notația).

Recap: Sp. vect. euclidieni

- **Def**: V un sp. vect. $\boxed{\text{real}}$ s.n. euclidian dc. este înzestrat cu un prod. scalar $\langle -, - \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$.

↑ formă bilin, sim, poz. def.

- $h: V \times V \to \mathbb{R}$ formă bilin., $\mathcal{B}$ bază $\Rightarrow$ se poate construi A a.î.

$\boxed{a_{ij} = h(b_i, b_j)} \Leftrightarrow \boxed{h(v, w) = {}^t[v]_{\mathcal{B}} \cdot A\,[w]_{\mathcal{B}}}$

h	A
sim.	sim
antisim.	antisim.
nedeg.	inv.
poz. def.	val proprii $\oplus$.

- A da un prod. scalar pe V $\Leftrightarrow$ a da o bază $\mathcal{B}$ și o mat. sim cu val proprii $\oplus$ ($\Rightarrow A$ diag)

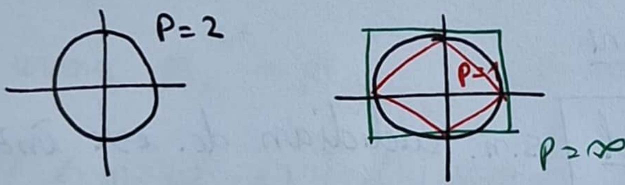
$$\boxed{A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^{-1}}$$ cu ${}^tU = U^{-1}$ mat. ortog.

<u>Ex</u>: pe $\mathbb{R}^n$ $\langle x, y \rangle_0 = \sum_1^n x_i y_i$ prod. scalar canonic.

- <u>norma</u>: $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$
- <u>sp. normat</u>: $(V, \|\_\|)$ dc. $\|\_\| : V \to \mathbb{R}$ cu prop. $\begin{cases} \|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle} \\ \|v + w\| \le \|v\| + \|w\| \\ \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \\ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0. \end{cases}$

Pe $\mathbb{R}^n$ $\forall 1 < p < \infty \Rightarrow \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum x_i^p} \Rightarrow \begin{cases} \|x\|_1 = \sum_1^n |x_i| \\ \|x\|_\infty = \max |x_i| \end{cases}$

$\boxed{\mathbb{R}^2}$



$\boxed{Q}$ Dat V cu normă $(V, \|\ \|) \overset{?}{\Rightarrow} \exists \langle \_, \_ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ prod. scalar? cu $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \leftarrow \text{polarizare}$$

$\uparrow$

nu e mereu prod. scalar.

<u>Teoremă</u>: $(V, \|\_\|)$ cu normă $\|\ \|$ vine dintr-un prod. scalar $\Leftrightarrow 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$ (eg pll.)

Curs 5. Geometrie - 27.03.2024

Spații vect. euclidiene - de știut

- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
- normă: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

$\Big\} \Rightarrow$ sp. metric: $d(v, w) = \|v - w\|$

$\boxed{\text{sp. vect cu normă}} \Rightarrow \boxed{\text{sp. metric}} \Rightarrow \boxed{\text{sp. topologic}}$

$\boxed{\text{sp. cu prod. scalar}} \Rightarrow \boxed{\text{sp. vect cu normă}}$

- Cauchy-Schwartz: $\boxed{|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|}$
- $\boxed{\cos \sphericalangle(v, w) = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}}$ (ca definiție)
- au sens baze ortogonale + ortonormate

ortogonale: $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, $i \neq j$

ortonormate: $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$

- Alg. Gram-Schmidt: Dată o bază $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $\exists$ $\{f_1, \dots, f_n\}$ bază ortonormată a.î. $\langle b_1, \dots, b_2 \rangle = \langle f_1, \dots, f_2 \rangle$
- a alege o bază ortonormală în V $\Leftrightarrow$ a alege un izo $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ ortogonal $\left(\boxed{\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle v, w \rangle_V} \right)$

$\varphi(b_i) = e_i$

$\{f_1, \dots, f_n\}$ ortonormată $\Rightarrow v = \sum_{i}^{n} v_i f_i$
$\Rightarrow w = \sum_{i}^{n} w_i f_i$ $\Bigg\} \Rightarrow \boxed{\langle v, w \rangle = \sum_{1}^{n} v_i w_i}$

• pt $W \leq (V, \langle -,- \rangle)$ are sens $W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$

complement ortogonal $\begin{cases} W \oplus W^{\perp} = V \Rightarrow V/_W \simeq W^{\perp}. \\ W_1 \subset W_2 \Rightarrow \cancel{W_2^{\perp}} \; W_1^{\perp} \supset W_2^{\perp} \\ (W^{\perp})^{\perp} = W \end{cases}$

• $(V, \langle -,- \rangle) \Rightarrow \exists$ un izo canonic $V \simeq V^*$ (th. de repr. ~~Reisz~~ Reisz)

$$\boxed{\varphi(v) = \langle -, v \rangle : V \to \mathbb{R}}.$$

Def: $T : (V, \langle -,- \rangle) \to V$ s.n. apl. ortogonală dc.

$\boxed{\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle}$ păstrează norma + $\measuredangle$

doar norma: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(z) = |z|$

doar $\measuredangle$: omotetie

Prop: T ortogonală $\Rightarrow$ T liniară

Dem: Se arată că $\langle T(\alpha v + \beta w) - \alpha T(v) - \beta T(w),$
$T(\alpha v + \beta w) - \alpha T(v) - \beta T(w) \rangle = 0$

— — — —

Prop: $T : (V, \langle -,- \rangle) \to (V, \langle -,- \rangle)$ apl. lin., $\mathcal{B}$ bază ortonormată, $A = [T]_{\mathcal{B}}$. U.A.S.E:

1) $\|T(x)\| = \|x\|$ (păstrează norma)

2) $d(T(x), T(y)) = d(x,y)$ (păstrează dist.)

3) $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

4) ${}^tA = A^{-1}$

Dem: $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ $d(T(x),T(y)) = \|T(x)-T(y)\| = \|T(x-y)\| =$
$= \|x-y\| = d(x,y)$.

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Știm: $2\langle x,y\rangle = \|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ (form. de polarizare)

$$2\langle T(x), T(y)\rangle = \|T(x)-T(y)\|^2 - \|T(x)\|^2 - \|T(y)\|^2$$
$$= d(T(x),T(y))^2 - d(T(x),0) - d(T(y),0)$$
$$= d^2(x,y) - d(x,0) - d(y,0) = 2\langle x,y\rangle.$$

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ evident

$\boxed{3) \Rightarrow 4)}$ $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
|| în $\mathcal{B}$ bază
$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, {}^tA \cdot Ay\rangle$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $y = {}^tA \cdot A y \ \forall y \Rightarrow$
$\Rightarrow {}^tA \cdot A = I_n$

Obs: Dc. $T: V \to V$ cu $\begin{cases} T(0) = 0 \\ T \text{ păstrează dist} \end{cases} \Rightarrow T$ ortog. $\Rightarrow T$ lin.

$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot {}^tA = I_n\}$

$O(n) = SO(n) \cup (O(n) \setminus SO(n))$ $\quad$ $O(2)$ = rotații ∪ simetrii

$\uparrow$ $\det A = 1$ $\qquad$ $\uparrow$ $\det A = -1$

Obs: $A \in O(n) \iff$ col/liniile form. o bază ortonormată

Spații afine euclidiene

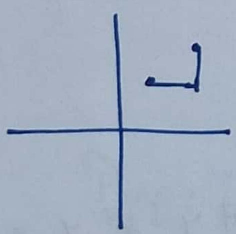
Def: $(\mathcal{A}, V, \mathbb{R})$ s.n. sp. afin euclidian dc. $(V, \langle -,- \rangle)$ este sp. vect. euclidian
$\overset{\shortparallel}{\mathcal{E}}$

Obs: are sens doar pe $\boxed{K = \mathbb{R}}$!

Consecință: Avem o metrică pe $\mathcal{E}$: $d(P,Q) = \|\vec{PQ}\|$

$$\begin{cases} \Rightarrow d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) \\ \Rightarrow d(P,Q) = d(Q,P) \\ \Rightarrow d(P,Q) = 0 \iff P = Q \end{cases}$$

• X mt., $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} \Rightarrow$ topologia discretă



$\Rightarrow$ normă 1

$\mathcal{E}$ esp. topologic: $x_n \to x$ are sens, fct. cont ✓

2) putem măsura $\measuredangle$

$$\boxed{\cos \widehat{BAC} \overset{def}{=} \frac{\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}} \Rightarrow \text{are loc th. cos}$$

$$\|BC\|^2 = \|AC\|^2 + \|AB\|^2 - 2\cos(\widehat{BAC}) \cdot \|AB\| \cdot \|AC\|$$

$\Rightarrow$ are sens L.U.L (congr. de Δ)

- Au sens rep. ortogonale sau ortonormate

  ex: rep. cart. ortonormal : (Ω, B) cu B bază ON

  rep. afin ortonormal : $\{P_0, \dots, P_m\}$ a.î. $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_m}\}$ e ON.

- Dat $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ subsp. af $\Rightarrow$ are sens $(\mathcal{E}')^{\perp} \overset{def}{=} (\text{dir } \mathcal{E}')^{\perp}$ subsp. normal la $\mathcal{E}'$ (nu afin)

~~Dir $\mathcal{E}' \oplus$ (Dir $\mathcal{E}'$)~~

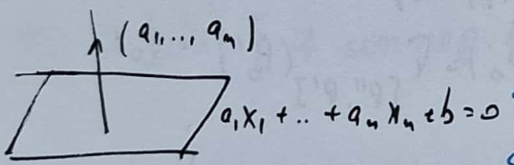
Din $\mathcal{E}' \oplus (\mathcal{E}')^{\perp} = V$

$\forall P \in \mathcal{E}' \Rightarrow \exists! \ \mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}$ subsp. a.î. $\begin{cases} P \in \mathcal{E}'' \\ \text{dir } \mathcal{E}'' = (\mathcal{E}')^{\perp} \end{cases}$

Notație : $\mathcal{E}' \perp \mathcal{E}'' \overset{def}{\Leftrightarrow}$ dir $\mathcal{E}' \perp$ dir $\mathcal{E}''$

- Caz particular: $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ hip. afin. $\Rightarrow \dim \mathcal{H}^{\perp} = 1 \Rightarrow$ are sens "vectorul normal" n a.î. $\langle n \rangle = \mathcal{H}^{\perp}$

- În coord. ortonormale, dc. $\mathcal{H} : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0 \Rightarrow$



Din $\mathcal{H} : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle (a_1, \dots a_n)(x_1, \dots, x_n) \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathcal{H}^{\perp} = \langle (a_1, \dots, a_n) \rangle$.

- Formula dist. până la un hiperplan :

$\mathcal{H} : \sum a_i x_i + b = 0$, $P = (y_1, \dots, y_n)$

$$\boxed{\text{dist}(P, \mathcal{H}) = \frac{|a_1y_1 + \dots + a_ny_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}}$$

Izometriile unui sp. euclid.

Def: $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ s.n. izometrie dc. păstrează dist $\Leftrightarrow d(f(A), f(B)) = d(A, B)$

$\boxed{?}$ Sunt cont, inj, bij, af ?

Obs: $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ izo. Fie $\Omega \in \mathcal{E}$, $T: V \to V$, $T(\overrightarrow{\Omega A}) = \overrightarrow{f(\Omega)f(A)}$

Dc. T liniară $\Rightarrow$ f e af.

ex: $T(0) = 0$
T păstr. dist $\}$ $\Rightarrow$ T ortogonală $\Rightarrow$ liniară

Teoremă: $\forall$ izometrie $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ = compunere de max $n+1$ simetrii ortogonale față de hiperplane ($n = \dim \mathcal{E}$)

Obs: $\forall$ 2 izom. care coincid pe un rep. af. sunt egale

Dem: Fie $\{P_0, \dots, P_n\}$ rep. af. și $P_i' = f(P_i)$

Not: $\forall A, B \in \mathcal{E}$ $\sigma_{[A,B]} = \begin{cases} id, & A = B \\ \text{sym față de hip. mediator}, & A \neq B \end{cases}$

Pas 1: iau $h_0 = \sigma_{[P_0, P_0']} \Rightarrow h_0(P_0) = P_0'$
$h_0(P_j) = P_j''$

Pas 2: iau $h_1 = \sigma_{[P_1'', P_1']} \circ h \Rightarrow h_1(P_1) = P_1'$
$h_1(P_0) = \sigma_{[P'', P']}(P_0') = P_0'$

Tot așa ... $h = \underbrace{\sigma_{[\,]} \circ \dots \circ \sigma_{[\dots]}}_{\text{max } n+1 \text{ si}}$

$\Rightarrow$ izo sunt af, surj

$\Rightarrow$ izomorfism afin și urma T e ortogonală

Th. fundam. a geom. euclid.: Fie $(\mathcal{E}, (V, \langle , \rangle))$ un sp. af. euclid. și $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ afină. Atunci într-un rep. af. ortonormat, $f(x) = Ax + b$ pt $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, f izometrie $\Leftrightarrow A \in O(n)$.

Curs 6 - Geometrie - 3.04.2024

Hipercuadrice afine

Fie $(\mathcal{A}, V/_k)$ sp. af., $n = \dim \mathcal{A}$

Def: O hipercuadrică algebrică = pol de deg 2

$f \in k[X_1, X_2, \dots, X_n]$.

Def: O hipercuadrică geometrică $\overset{(1)}{=}$ [o submt. $\Gamma \subset \mathcal{A}$

a.î. $\left\{ \begin{array}{l} \exists\ R \text{ rep. cart.} \\ \exists \text{ o hipercuadrică alg } f \end{array} \right.$ a.î. $\Gamma = Z_R(f) = \{P \mid f([P]_R) = 0\}$]

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ [$\exists$ un rep R a.î. pct. lui Γ sunt sol unei ec de deg 2] $\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$ [$\exists$ un rep. R : $\boxed{\Gamma : \underbrace{\sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j}_{\text{deg } 2} + \underset{\text{pt. char } k \neq 2}{2} \underbrace{\sum_{1}^{n} b_i x_i}_{\text{deg } 1} + \underset{\text{deg } 0}{c} = 0}$]

$\overset{(4)}{\Leftrightarrow}$ [$A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ simetrică

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in k^n$ a.î. $\boxed{\Gamma : {}^tX A X + 2\,{}^tb X + c = 0}$ unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\overset{(5)}{\Leftrightarrow}$ [$\tilde{X} \tilde{A} \tilde{X}$ unde $\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^tb & c \end{array}\right] \in M_{n+1}(k)$]

$\tilde{X} = \left(\frac{X}{1}\right) \in k^{n+1}$

Convenție: • "Hipercuadrică" = hip. geom

• $Z_R(f) = Z(f)$ dc. $\mathcal{A} = k^n$ sau dc. se subînțelege rep. ales în $\mathcal{A}$).

Obs: Hipercuadrica Γ dată ca ec. de deg 2 în R => e dată în orice rep. de o ec. de deg 2.

Dem: În R $\Gamma: {}^t X A X + 2\,{}^t b X + c = 0$

X - coord în R.

X' - coord în R' => $X = \underset{\in GL_n(k)}{M} X' + \underset{\in k^n}{v}$! am obt. dem prop.

$\Gamma: {}^t X A X + 2\,{}^t b X + c = 0$

$\Gamma: {}^t(MX' + v) A (MX' + v) + 2\,{}^t b (MX' + v) + c = 0.$

$\Gamma: {}^t X' ({}^t MAM) X' + 2\,{}^t v AM X' + 2\,{}^t b M X' + {}^t v A v + 2\,{}^t b v + c = 0$

$\Gamma: {}^t X' \underbrace{({}^t MAM)}_{A'} X' + 2\,{}^t \underbrace{({}^t MAv + {}^t Mb)}_{b'} X' + \underbrace{({}^t vAv + 2\,{}^t b v + c)}_{c'} = 0$

Ex: $\tilde{A}' = {}^t\tilde{M}\,\tilde{A}\,\tilde{M}$ unde $\tilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & v \\ 0 & 1 \end{array}\right)$ (se înmulțește pe blocuri)

$$(*)\begin{cases} A' = {}^t MAM \\ b' = {}^t MAv + {}^t Mb \\ c' = {}^t vAv + 2\,{}^t b v + c \end{cases}$$

Obs: Din (*) $\Rightarrow$ rk A și rk $\tilde{A}$ sunt constante la schimbarea de reper ($M \in GL_n(k)$
$\tilde{M} \in GL_{n+1}(k)$)

$$\boxed{\begin{aligned} \delta &= \det A \\ \Delta &= \det \tilde{A} \end{aligned}}$$

Obs: Dată o hipercuadrică alg $f \in k[X_1, \dots X_n]$

$\downarrow$ alegerea unui reper

$\Gamma = Z_R(f)$ hipercuadrică geom.

$\boxed{Q}$ Γ = hipercuadrică geom $\Rightarrow \Gamma = Z(f)$ și f e unic?

$\boxed{NU}$ $Z(f) = Z(\alpha f)$ $\forall \alpha \in k \setminus \{0\}$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{Q}$ Dar f e unic până la înmulțirea cu scalari? (sau f monic)

$\boxed{NU}$ în $\boxed{\mathbb{R}^2}$ Γ: $x^2 + y^2 + 5 = 0$ $\Rightarrow \Gamma = \emptyset$
$x^2 + y^2 + 5 = 0$

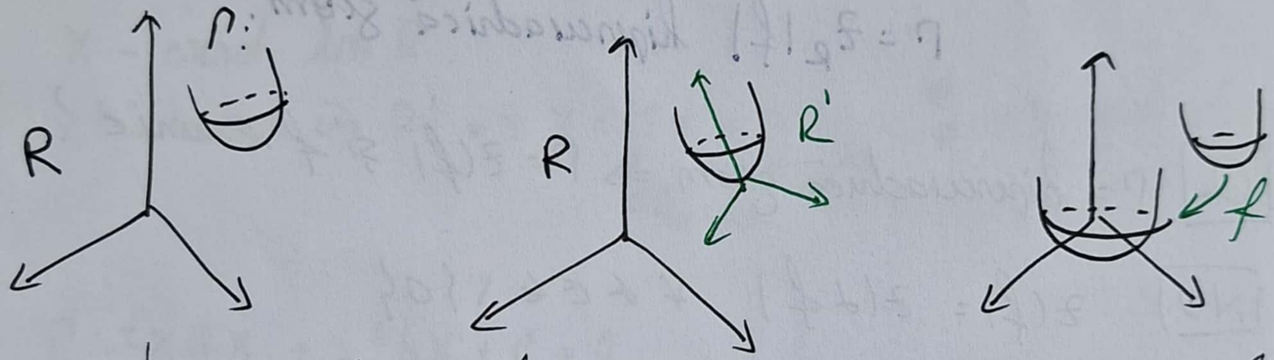
Γ: $x^2 + y^2 = 0$
$\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$

$\boxed{\text{în } \mathbb{Z}_2^2}$ Γ: $x^2 + y^2 = 0$ rk $A = 0$
$x^2 + y = 0$ rk $A = 1$.

Obs: Orice prop decurge din ec. unei hipercuadrice (de ex $\Delta = 0$) este a priori doar o prop. algebrică, nu a lui Γ (doar a ec. prin care e dat Γ)

Aducerea la forma canonică:

$\boxed{Q}$ Dată o hipercuadrică, putem face o schimbare de reper a.î. să fie cât mai simplă?



$\Rightarrow$ pot găsi f izo afin a.î. $f(\Gamma)$ are o ec. simplă în raport cu R?

Teoremă (de aducere la formă canonică): Fie Γ o hipercuadrică $\Rightarrow \exists R$ a.î. Γ în raport cu R să aibă una din urm. forme:

1) $\boxed{\sum_{1}^{r} \lambda_i x_i^2 = 0}$, $1 \le r \le n$ și $\lambda_i \neq 0$

2) $\boxed{\sum_{1}^{r} \lambda_i x_i^2 - 1 = 0}$ $1 \le r \le n$ și $\lambda_i \neq 0$

3) $\boxed{\sum_{1}^{r} \lambda_i x_i^2 - 2\alpha x_{r+1} = 0}$ $1 \le r \le n-1$ și $\lambda_i \neq 0$, $\alpha \neq 0$.

<u>Dem</u>: Metoda Gauss / formare de pătrate (vezi sem I)

<u>Obs</u>:

1) forma canonică nu e unică

2) tipul e unic (se ajunge la exact unul dintre cele 3 tipuri)

<u>Dem</u>: 1) $$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & & \\ & & \lambda_r & & & & 0 \\ & 0 & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ \hline & & & 0 & & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rk\,\tilde{A} = r = rk\,A$$

2) $$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & & \\ & & \lambda_r & & & & 0 \\ & 0 & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ \hline & & & 0 & & & -1 \end{array}\right) \Rightarrow rk\,\tilde{A} = r+1$$

$$rk\,A = r$$

3) $$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} \lambda_1 & & & & & 1 & 0 \\ & \ddots & & 0 & & & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & 0 & & 0 & & & -\frac{1}{2} \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & -\frac{1}{2} & & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rk\,\tilde{A} = r+2$$

$$rk\,A = r.$$

<u>Corolar</u>: $\boxed{k = \mathbb{R}}$ Același enunț....

1) $\boxed{\sum_{1}^{p} x_i^2 - \sum_{p+1}^{p+q} x_j^2 = 0}$ cu $p \geq q$

2) $\boxed{\sum_{1}^{p} x_i^2 - \sum_{p+1}^{p+s} x_j^2 - 1 = 0}$

3) $\boxed{\sum_{1}^{p} x_i^2 - \sum_{p+1}^{s+p} x_j^2 - 2x_{p+s+1} = 0}$ $\quad p \geq s$

$\boxed{k = \mathbb{C}}$ Același enunț...

1) $\sum_{1}^{2} x_i^2 = 0$

2) $\sum_{1}^{2} x_i^2 - 1 = 0$

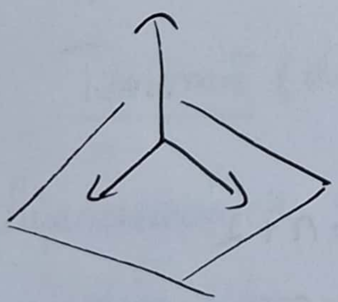
3) $\sum_{1}^{2} x_i^2 - 2x_{2+1} = 0$

$\left.\begin{matrix} x^2+y^2-1 \\ x^2-y^2-1 \end{matrix}\right\}$ conice izomorfe peste $\mathbb{C}$

Clasificarea cuadricelor reale ($k = \mathbb{R}$, $n = 3$)

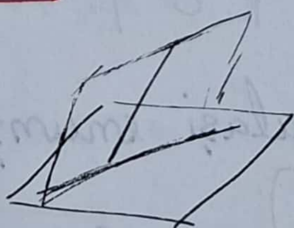
$\boxed{\text{Tipul 1)}}$

$p = 1$, $s = 0$ $\quad \boxed{x^2 = 0}$ ← plan dublu



$p = 1$, $s = 1$ $\quad \boxed{x^2 - y^2 = 0}$ ← plane secante

$(x-y)(x+y) = 0$

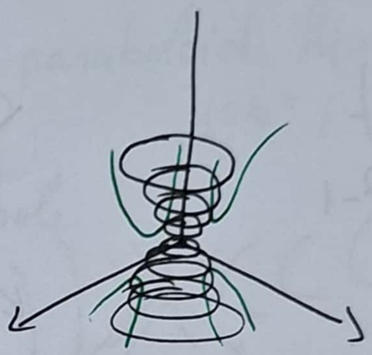


$p=2,\ s=0$ $\boxed{x^2+y^2=0}$ ← dreaptă dublă

$p=2,\ s=1$ $\boxed{x^2+y^2-z^2=0}$ ← conul

$z=k$ const. $\Rightarrow x^2+y^2=k^2$

$y=k$ const $\Rightarrow x^2-z^2=-k^2$

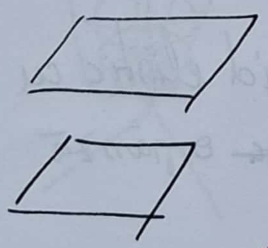


$p=3,\ s=0$ $\boxed{x^2+y^2+z^2=0}$ ← punctul dublu

Tipul 2)

$p=1,\ s=0$ $\boxed{x^2-1=0}$ ← plane paralele

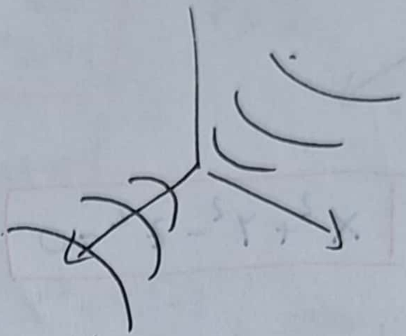
$x=\pm 1$



$p=1,\ s=1$ $\boxed{x^2-y^2-1=0}$ ← cilindru hiperbolic

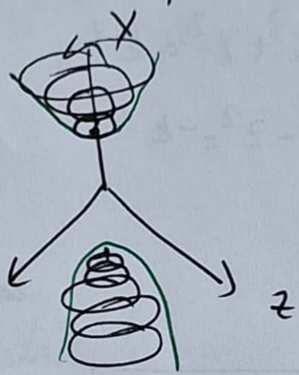
$\underline{p=1,\ q=2}$ $\boxed{x^2-y^2-z^2-1=0}$ ← hiperboloid eliptic cu 2 pânze

$z=k$ const $\Rightarrow x^2-y^2=k^2+1$

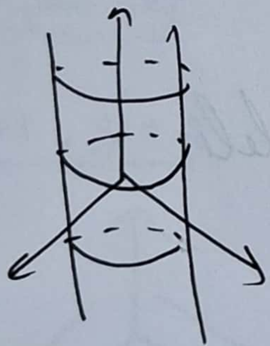


$x=k$ const

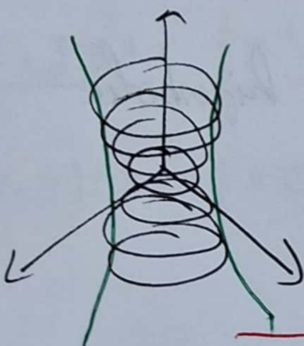
$y^2+z^2=k^2-1$



$\underline{p=2,\ q=0}$ $\boxed{x^2+y^2-1=0}$ ← cilindru eliptic



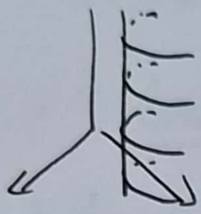
$\underline{p=2,\ q=1}$ $\boxed{x^2+y^2-z^2-1=0}$ ← hiperboloid eliptic cu ~~2 pa~~ o pânză



$\underline{p=3,\ q=0}$ $\boxed{x^2+y^2+z^2-1=0}$ ← elipsoid

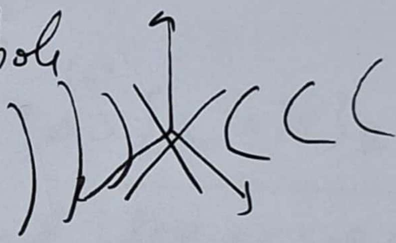
Tipul 3)

$p=1,\ s=0$ $\quad \boxed{x^2-2y=0}$ ← cilindru parabolic

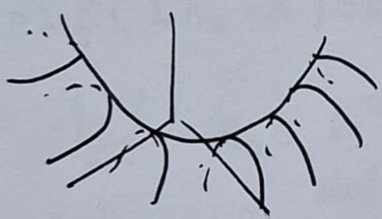


$p=1,\ s=1$ $\quad \boxed{x^2-y^2-2z=0}$ ← paraboloid hiperbolic („şa")

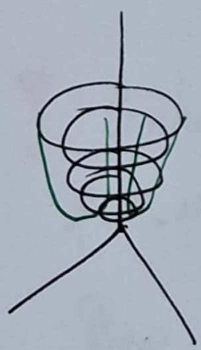
$z=k$ const $\Rightarrow x^2-y^2=2k$ hiperbole



$x=k$ const $\Rightarrow y^2+2z=k^2$



$p=2,\ s=0$ $\quad \boxed{x^2+y^2-2z=0}$ ← paraboloid eliptic



Ex: Care din ele au $\Delta \neq 0$?

Curs 7 - Geometrie - 10.04.2024

$(\mathcal{A}, V/_k)$ sp. af. și $\boxed{\Gamma : {}^t X A X + 2\,{}^t b X + c = 0}$

Centrul unei hipercuadrice:

Def: Γ: hipercuadrică, $\Gamma = Z_R(f)$, $P_0 \in \mathcal{A}$ s.n. centru geometric $\overset{(1)}{\iff} \{ S_{P_0}(\Gamma) \subseteq \Gamma \} \overset{(2)}{\underset{S_{P_0}^2 = id}{\iff}} \{ S_{P_0}(\Gamma) = \Gamma \}$

S_{P_0} ← sim față de P_0

$\overset{(3)}{\iff} \{$ dc. $P \in \Gamma \Rightarrow S_{P_0}(P) \in \Gamma \} \overset{(4)}{\iff} \{ X_0 = [P]_R$ și $f(X) = 0 \Rightarrow f(2X_0 - X) = 0 \} \overset{(5)}{\iff} \{ \forall X \in \mathcal{A}, \boxed{f(X_0 + X) = 0 \iff f(X_0 - X) = 0} \}$

Def: $X_0 \in k^n$ s.n. centru algebric pt. hipercuadrica algebrică $f \overset{def}{\iff} \boxed{f(X_0 + X) = f(X_0 - X)}$

↑ eg. în $k[X_1, \dots, X_n]$

! Centru alg $\longrightarrow$ Centru geometric

$f(X_0 + X) = f(X_0 - X) \;\not\Leftarrow\; Z_R(f(X_0 + X)) = Z_R(f(X_0 - X))$

Prop: Dc. k e algebric închis, atunci centru geometric $\iff$ centru algebric.

Prop:

1) Dc. char $k = 2 \Rightarrow \forall$ pct. e centru alg / geom.

2) Dc. char $k \neq 2$ $\boxed{X_0 \text{ e centru} \iff A X_0 = -b}$

Dem: $f(X_0 \pm X) = {}^t(X_0 \pm X) A (X_0 \pm X) + 2\,{}^t b (X_0 \pm X) + c = 0$

$0 = {}^t X A X \underline{\pm} \underline{2\,{}^t}(\underline{AX_0 + b})\underline{X} + f(X_0)$

Prop 2: Fie $\Gamma \subset \mathcal{A}$ o hipercuadrică geom. care nu e inclusă într-un hiperplan. Atunci P_0 e centru geom $\Leftrightarrow AX_0 = -b$ (centru algebric) cu $X_0 = [P_0]_R$

Dem: P_0 centru geom $\Leftrightarrow \{ f(X_0 - X) = 0 \Rightarrow f(X_0 + X) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{E}^n$

$f(X_0 \pm X) = {}^t X A X \pm 2\,{}^t(AX_0 + b) X + f(X_0)$

Dc. $f(X_0 - X) = 0 \Rightarrow f(X_0 + X) = 4\,{}^t(AX_0 + b) X = 0$

$\forall X$ cu $X_0 - X \in \Gamma \Leftrightarrow$

${}^t(AX_0 + b)(X - X_0) = 0 \quad \forall X \in \Gamma$

Dc. $AX_0 + b \neq 0 \Rightarrow \Gamma \subset$ într-un hiperplan $\lightning$

Temă*: Peste $\mathbb{R}$ centru alg $\Leftrightarrow$ centru geometric.

(Hint: Rez ex 7.10 și folosiți-l)

Cor: 1) Centrul (alg) e unic $\Leftrightarrow \underset{\det A}{\delta} \neq 0$

$AX_0 = -b$

2) Mt. centrelor unei hipercuadrice = subsp. af sau $\emptyset$.

Ex 0: elipsa, hiperbola au centru unic
parabola nu are centru

Ex 1: $\Gamma: 2x^2+3y^2+5z^2-1=0$ elipsoid

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & & & 0 \\ & 3 & & 0 \\ & & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\delta \neq 0 \Rightarrow$ centru unic

$AX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ex 2: $\Gamma: x^2+y^2-z^2=0$ conul

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & -1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \delta \neq 0 \Rightarrow AX_0 = 0 \Rightarrow X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex 3: $\Gamma: x^2+y^2-1=0$ cilindrul eliptic

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 0 & \\ \hline & 0 & & -1 \end{array}\right)$$

$\delta = 0$

$AX_0 = 0 \Rightarrow X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$.

Ex 4: $x^2+y^2-2z=0$ ~~...~~

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow AX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ nu are centru

Prop 3: $\Gamma: {}^t X A X + 2\,{}^t b X + c = 0$ în R și X_0 centru unic al lui $\Gamma \Rightarrow \boxed{f(X_0) = \frac{\Delta}{\delta}}$

Dem: ex....

Cor: Dc X_0 e unic și $X_0 = 0$ originea reperului $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f(X) = {}^tXAX + \frac{\Delta}{\delta}}$$

Prop 4 (formulă alternativă de calcul):

$$[X_0 \text{ centru alg. } f] \Leftrightarrow \left[\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0} \quad i = \overline{1,n}\right]$$

derivata parțială formală

Dem: $f(X) = {}^tXAX + 2\,{}^tbX + c$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e_i$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = {}^te_i\,A\,\cancel{X} + {}^tXAe_i + 2\,{}^tb\,e_i$$

$$= \underbrace{2\,{}^te_i\,{}^t(AX+b)}_{\text{linia } i \text{ a lui } AX+b} \;\Rightarrow\; AX_0 + b = 0.$$

Intersecții de hipercuadrici cu drepte:

$\Gamma: {}^tXAX + 2\,{}^tbX + c = 0$

$d: X_0 + tv, \quad t \in \mathbb{R}$

$\langle v \rangle = \mathrm{Dir}(d)$

$d \cap \Gamma: {}^t(X_0 + tv)A(X_0 + tv) + 2\,{}^tb(X_0 + tv) + c = 0$

pol în t de deg ≤ 2

$\Leftrightarrow ({}^tvAv)t^2 + (2\,{}^t(AX_0 + b)v)t + f(X_0) = 0. \quad (\star)$

Obs:

1) Faptul că $(\star)$ e de deg 2 dep. doar de $\mathcal{D}_{in}(d)$ și de A

2) Dc $d \cap \Gamma$ are ≥ 3 pct. cu multiplicități $\Rightarrow d \subset \Gamma$

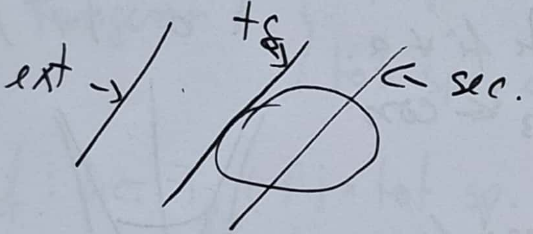
($\star$ e pol nul)

$\boxed{\text{Caz 1}}$ $(\star)$ de deg 2 $\Leftrightarrow$ $\boxed{{}^t v A v \neq 0}$

1) dc. $\star$ are răd. distincte în $\mathbb{K}$ $\Rightarrow$ d e secantă

2) dc. $\star$ are răd. dublă în $\mathbb{K}$ $\Rightarrow$ d e tangentă

3) dc. $\star$ nu are rădăcini $\Rightarrow$ d e exterioară



$\boxed{\text{Caz 2}}$ $(\star)$ de deg ≤ 1 $\Leftrightarrow$ $\boxed{{}^t v A v = 0}$ $\Rightarrow$

v s.n. direcție asimptotică (celălalt pct. de intersecție e la ∞)

Principiu: Th. Bezout: O curbă de deg n și o curbă de deg m se $\cap$ în $n \cdot m$ pct. cu multiplicități peste $\mathbb{C}$ sau în proiectiv.

1) d.c. nu are rădăcini în $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ dr. asimptotică ext.

2) d.c. are exact o răd în $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ dr. asimptotică secantă

3) este pol. nul ($d \subset \Gamma$) $\Rightarrow$ d s.n. generatoare a lui Γ

! Aceasta este o clasificare geometrică

$$\boxed{\mathcal{C}(\Gamma) = \{ v \in V \mid {}^t v A v = 0 \}}$$

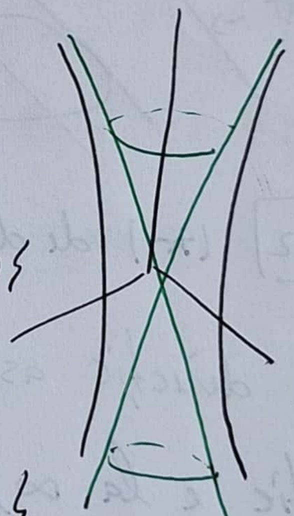
↑
conul asimptot al lui Γ.

$v \in \mathcal{C}(\Gamma) \Rightarrow \lambda v \in \mathcal{C}(\Gamma)$

<u>Ex</u>: 1) $\mathcal{H}_1 : x^2+y^2-z^2-1=0$ $\quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ \hline & 0 & & -1 \end{array}\right)$

poate fi $\neq$ a.

$\Gamma : {}^t v A v = v_1^2 + v_2^2 - v_3^2$ ← con



2) $\mathcal{E} : x^2+y^2+z^2-1=0$ elipsoid.

$\mathcal{C}(\Gamma) : v_1^2+v_2^2+v_3^2=0 \Rightarrow \mathcal{C}(\Gamma) = \{0\}$

3) $x^2+y^2-1=0$ cilindru eliptic

$\mathcal{C}(\Gamma) : v_1^2+v_2^2=0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$

<u>Def</u>: $P_0 \in \Gamma$ s.n. spațiu tangent în P_0 la Γ :

$$T_{P_0}\Gamma = \bigcup_{\substack{d \text{ e tg în } P_0 \text{ la } \Gamma \\ \text{sau} \\ d \text{ e generatoare pt } \Gamma \text{ în } P_0}} d$$

în ec. $\star$ iau $d = X_0 + tv$ cu $X_0 \in \Gamma$
$$\overset{\shortparallel}{[P_0]_R}$$

$\star \iff t^2({}^t v A v) + 2\,{}^t(AX_0 + b)\,v\,t = 0 \quad (\star\star)$

d e tg $\Rightarrow (\star\star)$ e de deg 2 cu răd dublă 0

d e generatoare $\Rightarrow (\star\star)$ e pol nul

$\Rightarrow {}^t(AX_0 + b)X = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} T_{P_0}\Gamma &= \{X_0 + tv \mid t \in \mathbb{k},\ {}^t(AX_0+b)v = 0\} \\ &= \{X \mid {}^t(AX_0+b)(X - X_0) = 0\} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ sp. tangent e $\begin{cases} \text{hiperplan, dc. } X_0 \neq \text{centru (alg)} \\ \text{tot sp. dc. } X_0 = \text{centru. (alg)} \end{cases}$

<u>Def</u>: Dc. $T_{P_0}(\Gamma) =$ tot sp. $\Rightarrow P_0$ s.n. pct. singular.

Deci $P_0 =$ pct. singular $\iff \begin{cases} P_0 = \text{centru} \\ P_0 \in \Gamma \end{cases}$. Dc. $\mathcal{H}$ nu are

pct. singular $\Rightarrow$ hipercuadrica s.n. netedă

$$\boxed{T_{P_0}\Gamma : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_0)(X_i - X_{i,0}) = 0}$$

<u>Dem</u> ex

O ~~cuadrică~~ hipercuadrică Γ cu pct. singular are $\Delta = 0$

Vom dem că $\Delta = 0 \iff \Gamma$ are pct. singular (eventual la ∞)

7/.

Curs 8 - Geometrie - 17.04.2024

[Q] Dc. $A = \mathcal{E}$ euclidian ($\Rightarrow k = \mathbb{R}$) ce putem spune despre hipercuadrice relativ la sh. izometrică?

Reamintire: Teoremă: $\forall \Gamma$ hipercuadrică $\Rightarrow \exists R$ rep. în care Γ are una din urm. forme:

1) $\sum_{1}^{p} x_i^2 - \sum_{p+1}^{p+r} x_j^2 = 0$, $\boxed{p \geq r}$

2) $\sum_{1}^{p} x_i^2 - \sum_{p+1}^{p+r} x_j^2 - 1 = 0$

3) $\sum_{1}^{p} x_i^2 - \sum_{p+1}^{p+r} x_j^2 - 2x_{p+r+1} = 0$

Obs: Forma normală e unică! (Th Sylvester, p, r = invariante)

[Q] La ce formă (cât mai simplă) pot fi aduse hipercuadricele euclidiene prin izometrii?

($\Leftrightarrow$ la ce formă (cât mai simplă) poate fi adusă în rap. cu un rep. ortonormal?)

Teoremă: Pt $\forall$ hipercuadrică $\Gamma \subset \mathcal{E}$, $\exists$ un rep R ortonormal în care Γ are una din urm. ec:

1) $\sum_{1}^{p} \lambda_i x_i^2 - \sum_{p+1}^{p+r} \lambda_j x_j^2 = 0$ cu $\boxed{\lambda_i > 0}$

2) $\sum_{1}^{p} \lambda_i x_i^2 - \sum_{p+1}^{p+r} \lambda_j x_j^2 - 1 = 0$ cu $\boxed{\lambda_i > 0}$

3) $\sum_{1}^{p} \lambda_i x_i^2 - \sum_{p+1}^{p+r} \lambda_j x_j^2 - 2\lambda_{p+r+1} x_{p+r+1}$ cu $\boxed{\lambda_i > 0}$

$\boxed{Q}$ Transf. din met. veche (Gauss) sunt izo?

NU $\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m + b, & a_1 \neq 0. \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_m = x_m. \end{cases}$

$\Updownarrow$ mat. urmei

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

aproape niciodată nu e diagonală (DA doar pt. translatile $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_i = 0 \quad \underline{i \geq 2} \end{array} \right.$)

Dem: $\Gamma : {}^t X A X + 2 {}^t b X + c = 0$ într-un rep R_0 (de obicei R_0 = rep. canonic)

I) Diagonalizăm forma pătratică

$A \in M_m(\mathbb{R})$ e <u>sim</u> $\Rightarrow$ diagonalizabilă și în plus.

$$\boxed{V_\lambda \perp V_\mu \quad \text{dc. } \lambda \neq \mu \in Spec(A)}$$

$\Downarrow$

$\Rightarrow \exists P \in O(m)$ a.î. $A = P \Delta P^{-1} = P \Delta {}^t P$ cu $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

$\begin{cases} R_0 = (\Omega, B_0) \text{ rep. inițial.} \\ B = \text{baza în care } A \text{ devine diag.} \end{cases}$ $\longrightarrow \boxed{P = M_{B, B_0}}$

$M_{B_0}(f) = M_{B, B_0} \cdot M_B(f) \cdot M_{B_0 B}$

$\begin{cases} X = \text{coord în } B_0 \\ X' = \text{coord în } B \end{cases} \Rightarrow X = M_{B, B_0} \cdot X' \Rightarrow \boxed{X = P X'}$

$\Gamma = {}^t(PX') A (PX') + 2 {}^t b P X' + c = 0$

$\Gamma : {}^t X' ({}^t P A P) X' + 2 {}^t b' X' + c = 0$

$\Rightarrow$ în rep $R' = (\Omega, \mathcal{B})$, $\boxed{\Gamma: \underbrace{{}^t X' \Delta X'}_{\text{diagonală (are numai pătrate)}} + 2\,{}^t b' X' + c = 0}$

(II) Formăm pătrate cu $x_1', \dots, x_m'$ care apar în ${}^t X' \Delta X'$

$$\Gamma: \sum_1^m \lambda_i {x_i'}^2 + 2 \sum_1^n b_i' x_i' + c = 0 \quad \text{cu } \boxed{\lambda_i \neq 0}$$

$$\Gamma: \underbrace{\sum_1^m \lambda_i \left(x_i' + \frac{b_i}{\lambda_i}\right)^2}_{\text{translații} \Rightarrow \text{izo.}} + 2 \sum_{m+1} \frac{b_i'}{2} x_i' + c' = 0.$$

$\Rightarrow$ în rep $R'' = (\Omega'', \mathcal{B})$ am $\boxed{\Gamma: \sum_1^m \lambda_i (x_i'')^2 + 2 \sum_{m+1}^n b_i' (x_i'') + c' = 0}$

(III) Găsim un reper ortonormat în care $\begin{cases} x'''_{m+1} = \sum \frac{b_i'}{\beta} x_i'' + \frac{c'}{2\beta} \\ x'''_{m+2} = \dots \text{ (nu mă interesează, că nu apar în } \Gamma) \end{cases}$

Dc $b_i' = 0$ și $c' = 0$ cu $i = \overline{m+1, n}$ $\Rightarrow$ caz 1)

Dc. $b_i' = 0$ și $c' \neq 0$ cu $i = \overline{m+1, n}$ $\Rightarrow$ caz 2) după înmulțirea cu $\frac{-1}{c'}$

$$\Gamma: \sum_1^m \lambda_i (x_i'')^2 + 2 \sum_{m+1}^n b_i' x_i'' + c' = 0$$

Iau $\beta = \| (b'_{m+1}, b'_{m+2}, \dots, b'_n) \| \neq 0$

$$\Gamma: \sum_1^m \lambda_i (x_i'')^2 + 2\beta \sum_{m+1}^n \frac{b_i'}{\beta} x_i'' + c' = 0.$$

$\left\| \left(\frac{b_{m+1}}{\beta}, \dots, \frac{b_n}{\beta} \right) \right\| = 1 \xRightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$ poate fi completat la o bază ortonormală în $\mathbb{R}^{n-m}$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \frac{b_{m+1}}{\beta} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{\beta} \end{matrix} \quad \star \end{array}\right) \in O(n) \Rightarrow \begin{cases} x'''_{m+1} = \sum \frac{b_i'}{\beta} x_i'' + \frac{c'}{2\beta} \\ x'''_{m+2} = \dots \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P: \sum_{1}^{m} \lambda_i (x_i''')^2 + 2\beta x'''_{m+1} = 0}$$ tip 3) după împ. cu -2β.

Ex pt. pașii II și III

$P: 3x^2 + 6x - 2y + 4z + 3 = 0$ în R_0

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$ A e diagonală (I e gata)

II : $3\underbrace{(x+1)}_{x'}{}^2 - 2y + 4z = 0$

III : $P: 3(x')^2 - 2y' + 4z' = 0$ în rep $R' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_0\right)$

$P: 3(x')^2 - 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} y' - \frac{2}{\sqrt{5}} z'\right) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in O(n) \Rightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{5}} y' - \frac{2}{\sqrt{5}} z' \\ z'' = \frac{2}{\sqrt{5}} y' + \frac{1}{\sqrt{5}} z' \end{cases}$$

$P: 3(x'')^2 - 2\sqrt{5}\, y'' = 0 \;/ : \sqrt{5}$

$P: \frac{3}{\sqrt{5}} (x'')^2 - 2y'' = 0$ cilindru parabolic

Plane proiective

$\mathcal{A}$ mt., $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ = drepte.

Toate planele afine pe care le-am def. $(\mathcal{A}, V/_k)$ $\dim V = 2$ respectă urm. axiome / submodele pt:

A1) : Prin $\forall$ 2 pct. trece o unică dr. distinctă

A2) : $\forall$ dr. are cel puțin 2 pct.

A3) : $\exists$ cel puțin 3 pct. necol.

A4) (Axioma pll) : Prin $\forall$ pct. trece o unică dr $\parallel$ cu o dr. dată,

unde "paralel" $d_1 \parallel d_2 \iff \begin{cases} d_1 \cap d_2 = \emptyset \\ \text{sau} \\ d_1 = d_2. \end{cases}$

Ex 1) Pll e tranzitiv

$d_1 \parallel d_2$ și $d_2 \parallel d_3 \overset{?}{\Rightarrow} d_1 \parallel d_3$.

Pp. $d_1 \cap d_3 \neq \emptyset \overset{A1)}{\Rightarrow} \begin{cases} \text{și } d_1 \cap d_3 = \{P\} \\ \text{și } d_1 = d_3 \quad ✓ \end{cases}$

$\hookrightarrow$ din A4) d_1, d_3 sunt unica dr. care trece prin P și e pll d_2 $\Rightarrow d_1 = d_3$.

2) $\forall$ 2 dr. au același cardinal (Seminar)

$\boxed{Q}$ Există plane afine $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ care respectă axiomele, dar nu sunt de forma $(\mathcal{A}, V/_k)$, $\dim V = 2$?

Q Cum se poate nega A4 ?

- mai multe pll
- niciuna <=> $\forall$ 2 dr. se intersectează

Au sens axiomele planului proiectiv: $(\mathcal{P}, \Delta)$, $\Delta \subset \mathcal{P}(\mathcal{P})$

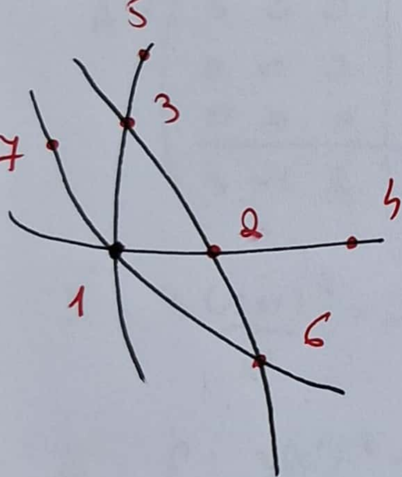
P1) Prin 2 pct. distincte trece o unică dr.

P2) $\forall$ dr. conține cel puțin 3 pct.

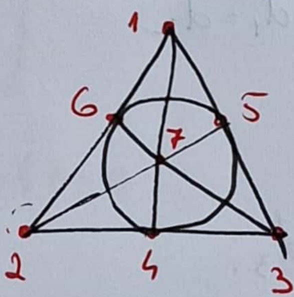
P3) $\exists$ 3 pct. necol.

P4) $\forall$ 2 dr. se intersectează

Ex1: $\forall$ plan proiectiv are cel puțin 7 pct.



Model: Planul Fano



$\mathcal{P}$ = cele 7 pct.

3 pct. sunt pe ac. dr <=>
- sunt pe ac. segm (în desen)
- sunt pe ac. cerc.

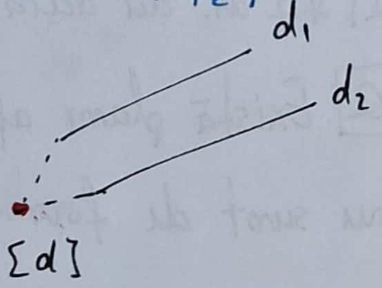
$\{(1,6,2),(4,5,6)\} \subset \Delta$

$\{1,4,6\} \notin \Delta$.

Completarea unui plan afin (cu pct. „la ∞")

Fie $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ un model de plan af. (de ex $(\mathcal{A}, V/_k)$ cu $\dim V = 2$)

Rel de pll e rel de echiv. Pe $\mathcal{D}$, ~

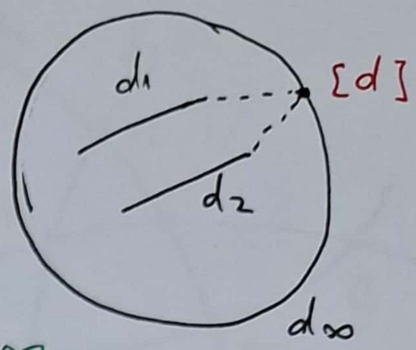


$d_1 \sim d_2 \Leftrightarrow d_1 \parallel d_2$

$[d]$ cls lui d.

Def: $\overline{d} = d \cup \{[d]\}$ s.n. închiderea proiectivă a lui d

↑ pct la ∞.



$\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \{[d] \mid d \in \mathcal{D}\}$

$\Delta = \{\overline{d} \mid d \in \mathcal{D}\} \cup d_\infty$

$\boxed{d_\infty = \{[d] \mid d \in \mathcal{D}\}}$ ← dr. de la ∞.

Proiectivizarea unui sp. vectorial

Def: Proiectivizarea unui sp. vect.: V în k sp vect.

$\boxed{\mathbb{P}(V) = V\setminus\{0\}/\sim}$ a.î. $v \sim w \iff \exists \lambda \in k\setminus\{0\}$ a.î. $v = \lambda w$

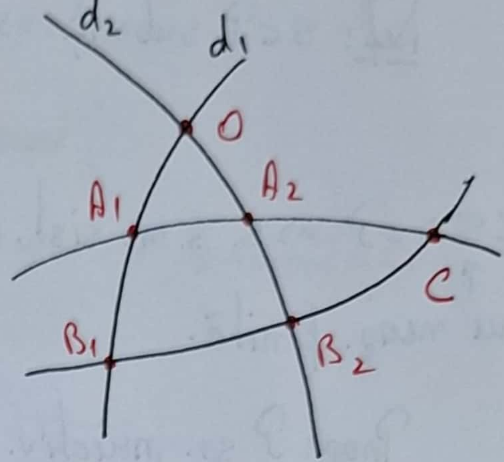
$\mathbb{P}[V]$ = mț. dr. vect. din V (din care scoatem 0)

$\mathcal{P} = \mathbb{P}(V)$

$\Delta = \{p(\pi \setminus \{0\}) \mid \pi < V$ cu $\dim \pi = 2\}$ unde $p : V\setminus\{0\} \to \mathbb{P}(V)$ proiecție

V	$\mathbb{P}(V)$
dr. vect.	pct. proiectiv
plan vect.	dr. proiectivă

Curs 9 - Geometrie - 24.04.2024



Spații proiective

$(\mathcal{P}, \Delta)$, $\mathcal{P}$ = mt., $\Delta \in 2^{\mathcal{P}}$ a.î.:

P1) Prin 2 pct. dif. trece o unică dr.

P2) $\forall$ dr. conține cel puțin 3 pct.

P3)

PV) Axioma Veblen: Fie $\forall\, d_1, d_2 \in \Delta$ a.î. $d_1 \cap d_2 = \{O\}$ și

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, A_1, B_1 \in d_1 \setminus \{O\} \\ \forall\, A_2, B_2 \in d_2 \setminus \{O\} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, A_1A_2 \cap B_1B_2 \neq \emptyset$$

(În config. plane, $\forall$ 2 dr. se intersectează)

Ex:
1) $\mathcal{P} = \{\cdot\}$, $\Delta = \emptyset$ -> pct. dim 0
2) $\Delta = \{\mathcal{P}\}$ -> dr. proiectivă, dim 1
3) $\exists$ 3 pct. necol și $\forall$ 2 dr. se intersectează => dim 2
4) $\exists$ 3 pct. necol și $\exists$ 2 dr. care nu se intersectează => dim ≥ 3

$\boxed{Q}$ Cum def. dim?

Def: O submulțime $L \subset (\mathcal{P}, \Delta)$ a sp. proiectiv s.n. varietate liniară dc. $\forall\, A, B \in L \Rightarrow AB \in L$.

Obs: Dc. $L \subset \mathcal{P}$ e var. lin $\Rightarrow (L, \Delta_L)$ e sp. proiectiv, $\Delta_L = \{d \in \Delta \mid d \subset L\}$

În particular au sens plane pr $\subset$ în var. lin.

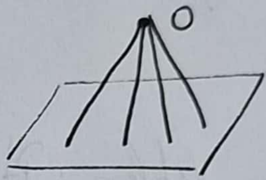
Obs: $\cap$ var. lin. e tot var. lin.

Def: $S \subset \mathcal{P}$ submt. $\Rightarrow$ $\boxed{\langle S \rangle = \bigcap\limits_{\substack{L \supset S \\ L \text{ var lin}}} L}$ s.n. var. lin gen. de S.

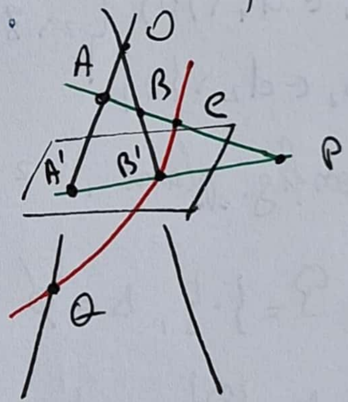
$\langle S \rangle = \mathcal{P} \Rightarrow S$ s.n. sist. de gen.
$\uparrow$
nu neap. finită.

Prop: $\mathcal{P}$ sp. proiectiv, $L \subset \mathcal{P}$ var. lin, $O \notin L$, $O \in \mathcal{P}$

$$\boxed{\langle L \cup \{O\} \rangle = \bigcup_{P \in L} OP}$$



Dem: $M = \bigcup\limits_{P \in L} OP \supseteq L \cup \{O\}$. E suf. ca M să fie var. lin.
$\supseteq$, $\langle L \cup \{O\} \rangle$.



Fie $A, B \in M$ și vrem $AB \subset M$

$\exists A', B' \in L$ a.î. $A \in OA'$
$B \in OB'$

Fie $\boxed{C \in AB}$ Vreau $OC \cap L \neq \emptyset$.

Veblen pt. $\left.\begin{matrix} O \\ A, B \\ A', B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \{P\} = AB \cap \underbrace{A'B'}_{\subset L} \Rightarrow \boxed{P \in L}$

Veblen $\left.\begin{matrix} P \\ A, C \\ A', B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \{Q\} = \underset{OA}{\overset{\parallel}{AA'}} \cap B'C$

Veblen $\left.\begin{matrix} Q \\ O, A' \\ C, B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \{C'\} = OC \cap \underbrace{A'B'}_{\subset L} \Rightarrow \underline{C' \in L} \Rightarrow \boxed{C \in M}$

Teoremă: $\forall$ 2 sist. de gen. minimale au ac. cardinal (finit / infinit)

Dem: O vom face peste câteva cursuri.

Def: $\boxed{\dim \mathcal{P} = |S| - 1}$ unde $\langle S \rangle = \mathcal{P}$, S minimal.

Ex: $\mathcal{P} = \{\cdot\} \Rightarrow |S| = 1 \Rightarrow \dim \mathcal{P} = 2$

$\Delta = \{\mathcal{P}\}$, $|S| = 2 \Rightarrow \dim \mathcal{P} = 1$

$\uparrow$

$\forall$ 2 pct. distincte.

$\mathcal{P}$ = pl. proiectiv (e gen de 3 pct. necol) $\Rightarrow \dim \mathcal{P} = 2$.

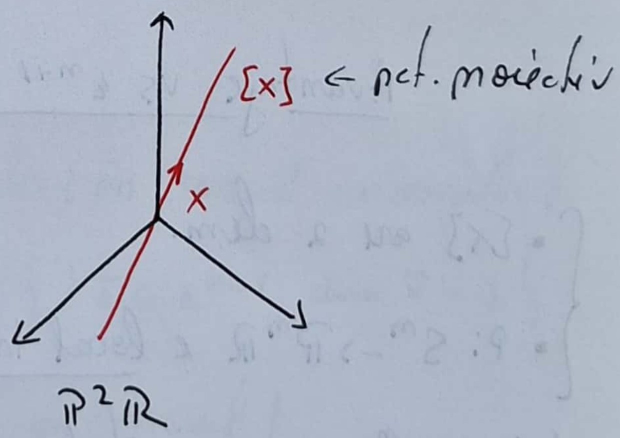
Modelul 1 Proiectivizarea unui sp. vect: Fie k corp com, k^{n+1} sp. vect canonic (mai general $\dim_k V = n+1$).

$\mathbb{P}(k^{n+1}) = \dfrac{k^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$, $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \setminus \{0\}$ a.î. $v = \lambda v$

s.n. proiectivizarea sp. k^{n+1}

$\mathbb{P}(k^{n+1}) = \mathbb{P}^n k = k\mathbb{P}^n$

$$\begin{array}{ccc} k^{n+1} \setminus \{0\} & \ni & v \\ \downarrow p & & \downarrow \\ \mathbb{P}^n k & \ni & [v] \end{array}$$



$\mathbb{P}^2\mathbb{R}$

Coord. omogene: $k^{n+1} \setminus \{0\} \ni x = (x_0, \ldots, x_n)$

$\downarrow$

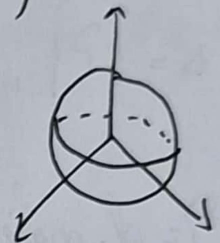
$[x] \overset{not}{=} [x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$.

În plus $[x_0 : \ldots : x_n] = [\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n]$

Îm $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ de ex $[1:0:6:-3] = [3:0:18:-9] = [\frac{1}{6}:0:1:\frac{-1}{2}]$

Obs: nu are sens ec $x_3 = 5$ în $\mathbb{P}^n k$ sau $x_1^2 - x_1 + 7 = 0$, dar are sens $\boxed{x_1 = 0}$ sau $\boxed{x_1 - 2x_3 = 0}$. Mai general pt. $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ omogen are sens $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

De ex: în $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ are sens $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (conul)



Dc. $\boxed{k = \mathbb{R}}$ $\mathbb{P}^n k = k^{n+1} \setminus \{0\} / k \setminus \{0\}$

Fie S^n = sfera din $\mathbb{R}^{n+1}$

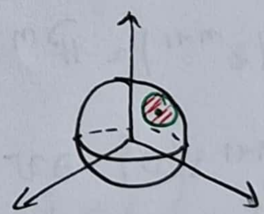
$\boxed{S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}}$. $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \Rightarrow |[x] \cap S^n| = 2$

Deci $x \in S^n \Rightarrow [x] \cap S^n = \{\pm x\} \Rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R} \simeq S^n/_\sim = S^n/_{\{\pm 1\}}$

$x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$.

$\boxed{\mathbb{P}^n\mathbb{R} \simeq S^n/_{\mathbb{Z}_2}}$

Avantaje vs $k^{n+1} \setminus \{0\} /_\sim$:

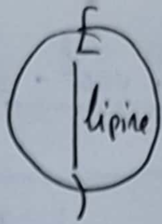


- $[x]$ are 2 elem.
- $p : S^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ e local inversabilă

($\forall x \in S^n$, $\exists U$ vecinătate a lui x pe S^n a.î. $p|_U : U \xrightarrow{\sim} p(U)$ este bij (homeomorfism))

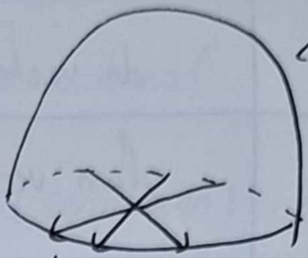
Corolar: $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ e compact (S^n e compact, $p : S^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ continuă)

Ex: 1) $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \simeq S^1/\{\pm 1\}$

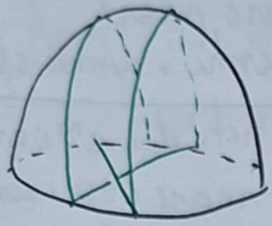


$\simeq$ cercul S^1

2) $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \simeq S^2/\{\pm 1\}$



← un ob. care cont. o bandă a lui Möbius $\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}^2\mathbb{R} \not\simeq S^2}$



← banda lui Möbius.

Dc. $\boxed{k = \mathbb{C}} \Rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2} \supset S^{2n+1}$ sferă

$[X] \cap S^{2n+1}$ = un cerc S^1
$\uparrow$
dr. complexă $\Leftrightarrow$ plan real.

$\Rightarrow X \in S^{2n+1} \Rightarrow [X]$ e un cerc

$$\boxed{\mathbb{P}^n\mathbb{C} = S^{2n+1}/S^1} \Rightarrow$$

1) p nu e local inversabilă

2) la fel, $\mathbb{C}P^n$ e tot compact

Ex: $\mathbb{C}P^1 = ?$

Prop: $\mathbb{P}^n k$ e un sp. proiectiv (în sensul axiomelor) de dim n, unde $\Delta = \{p(\pi \setminus \{0\}) \mid \pi \leq k^{n+1}, \dim \pi = 2\}$.

Dem: Ex de seminar (se face cu dicționarul)

Dicționarul proiectiv - vect - sferic ($k = \mathbb{R}$)

$\mathbb{P}^n(k)$	k^{n+1}	$S^n(k = \mathbb{R})$
pct. proiectiv	dr. vectorială	perechi de pct. op.
dr. proiectivă	plan vect.	arc mare (centru = centru sferei)
P1: $\forall$ 2 pct. distincte se află pe o unică dr.	$\forall$ 2 dr. vect. distincte se află într-un unic pl. vect $\pi = d_1 + d_2$	$\forall$ 2 pct. din S^n $\exists$ unic arc mare (care conține și diam. op. lor)
P2: - - - - . .		
Veblen: $\forall d_1, d_2 \in \Delta, d_1 \cap d_2 = \{0\}$ $\forall A_1, B_1 \in d_1 \setminus \{0\}$ $\forall A_2, B_2 \in d_2 \setminus \{0\}$ $\Rightarrow A_1A_2 \cap B_1B_2 \neq \emptyset$	$\forall \pi_1, \pi_2 \leq k^{n+1}$ plane cu $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 1$, $\forall d_1, d_1' \leq \pi_1$ $\forall d_2, d_2' \leq \pi_2$ de dim 1 $\dim(d_1 + d_1') \cap (d_2 + d_2') \geq 1$	
$n = 2$ $\forall$ 2 dr. se $\cap$	$\pi_1, \pi_2 \leq k^3$ de dim 3 $\Rightarrow$ $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) \geq 1$	$\forall$ cercuri mari se $\cap$ într-o pereche de pct. diam. op. 
L var. lin $A, B \in L \Leftrightarrow AB \in L$	$W < k^{n+1}$ $v \in W \Rightarrow \langle v \rangle \subset W$ $\forall d_1, d_2 \subset W$ dr. $\Rightarrow$ $\Rightarrow d_1 + d_2 \subset W \Leftrightarrow W$ e sp. vect.	

Pt. modelul 2 avem nevoie de o def. axiomatică a sp. afin.

$(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \overline{\pi})$ triplet cu $\mathcal{D}, \overline{\pi} \subset 2^{\mathcal{A}}$

pct. dr. plane

A1: Prin $\forall$ 2 pct. trece o unică dr.

A2: $\forall$ dr. conține cel puțin 2 pct.

$\underline{A3}$: $\forall \pi \in \mathcal{J}$ e pl. afin (cu dr. din el) și $\forall$ 3 pct. necol se află pe un unic plan.

$\underline{A4}$: Paralelismul dr. e tranzitiv.

Obs: Dr. au același cardinal.

Dem: Dc. d_1, d_2 coplanare (seminar)

Dc d_1, d_2 necoplanare iau d_3 a.î. $d_3 \cap d_1 \neq \emptyset$, $d_3 \cap d_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow |d_1| = |d_2| = |d_3|$

Fapt: Th. ~~Buek~~ Buekenhout: Dc. $|d| \geq 4$ atunci

$A_4 \Leftarrow$ din $\begin{cases} A_1 \\ A_2 \\ A_3. \end{cases}$

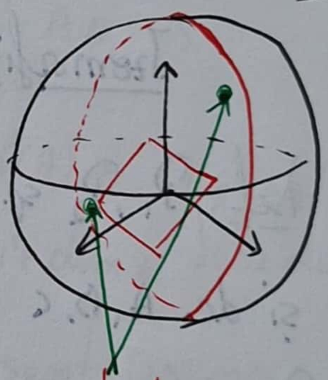
Curs 10 - Geometrie - 15.05.2024

Spații proiective

Modelul 2 - Completarea unui sp. afin

(Generalizare a completării planelor af. la sp. af.)

Fie $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \Pi)$ un sp. af. Atunci punem prin def rel de pll = rel. de echiv. pe $\mathcal{D}$. =>



- $\mathcal{H}_\infty \overset{def}{:=} \mathcal{D}/_{\parallel}$ ← pct. la ∞
- $\forall d \in \mathcal{D} \Rightarrow \bar{d} \overset{def}{=} d \cup \{[d]\}$
- $\forall \pi \in \Pi$ plan $\Rightarrow \pi_\infty \overset{def}{=} \{[d] \mid d \subset \pi\}$
- $\Delta \overset{def}{=} \{\bar{d} \mid d \in \mathcal{D}\} \cup \{\pi_\infty \mid \pi$ e plan$\}$

↑ dr. compl. la ∞ ↑ dr. de la ∞

Prop: $(\mathcal{P}, \Delta)$ e sp. proj. de ac. dim. ca a lui $\mathcal{A}$

! Dc. $\boxed{n > 2}$ => avem mai multe dr. la ∞ (<=> $\mathcal{P}$ conține mai multe plane proj).

Dem: Seminar.

$(\pi_1)_\infty = (\pi_2)_\infty \Leftrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

Def: $\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{P}$ este o var. lin de dim $n-1$ (codim 1) <=> hiperplan proj. s.n. hiperplanul de la ∞

Extragerea unui hiperplan dintr-un sp. proj

$(\mathcal{P}, \Delta)$ sp. proj. $\mathcal{H}$ hiperplan arbitrar ($\forall P \notin \mathcal{H} \Rightarrow \langle P, \mathcal{H} \rangle = \mathcal{P}$)

- $\mathcal{A} \overset{def}{=} \mathcal{P} \setminus \mathcal{H}$
- $\mathcal{D} \overset{def}{=} \{ d \setminus \mathcal{H} \mid d \in \Delta, d \not\subset \mathcal{H} \}$
- $\Pi \overset{def}{=} \{ L \setminus \mathcal{H} \mid L \subset \mathcal{P}$ var lin dim 2, $L \not\subset \mathcal{H} \}$

<u>ex</u>: $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \Pi)$ e sp. afin.

Izomorfisme proj.

<u>Def</u>: $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ sp. proj., $f: \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ s.n. izo proj. $\overset{def}{\Leftrightarrow} [$ f e bij și dc. A, B, C col $\Rightarrow f(A), f(B), f(C)$ col $]$

<u>Prop</u>:

1) f izo proj $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ bij} \\ f \text{ duce dr. în dr.} \end{cases}$

2) dc. f izo proj $\Rightarrow f^{-1}(d_2)$ e dr. în $\mathcal{P}_1$ $\forall d_2$ dr. în $\mathcal{P}_2$

3) $\left.\begin{array}{l} \text{dc. } f: \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2 \text{ e izo proj} \\ L \subset \mathcal{P}_1 \text{ var. lin de dim } k \end{array}\right\} \Rightarrow f(L) =$ var. lin de dim k

(în part. $\dim \mathcal{P}_1 = \dim \mathcal{P}_2$)

4) dc. $\mathcal{P}$ e sp. proj $PAut(\mathcal{P}) = \{ f: \mathcal{P} \to \mathcal{P} \mid f$ izo proj $\}$ e subgrup cu comp.

<u>Dem</u>: 1) evident

2) $f: P_1 \to P_2$ izo proj

$A, B, C \in P_1$ dif a.î. $f(A), f(B), f(C)$ col

AB dr $\Rightarrow f(AB) =$ dr $= f(A)f(B) \Rightarrow f(C) \Rightarrow C \in AB$

3) Inducție după $\underline{\dim L}$

$\boxed{\dim L = 1} \Rightarrow L$ e dr $\overset{def}{\Rightarrow} f(L)$ în P_2 e dr. $\Rightarrow \dim f(L) = 1$.

$\boxed{\dim L \leq k \overset{?}{\Rightarrow} \dim L = k+1}$

Iau $L \subset P$ de dim $= k+1$. Fie $L' \subset L$ de dim k (L' hiperplan)

și $A \in L \setminus L' \Rightarrow L = \langle \{A\} \cup L' \rangle \Rightarrow L = \bigcup_{P \in L'} AP \Rightarrow$

$\Rightarrow f(L) = \bigcup_{P \in L'} f(AP) = \bigcup_{Q \in f(L')} f(A)Q = \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ip. inducție dim } k}}{f(L')}, f(A) \rangle \Big\} \Rightarrow$ obt. ceva de dim $k+1$

4) $\Leftarrow \forall f, g: P \to P$ izo proj $\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ 2)}}{f^{-1}}$ și $\underset{\substack{\uparrow \\ def}}{f \circ g}$ sunt izo proj

Clase de izo proj ale lui $\mathbb{P}^n k$

$$\mathbb{P}^n k = \frac{k^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

I) Fie $A \in GL_{n+1}(k)$ ($\Leftrightarrow \forall f: k^{n+1} \to k^{n+1}$ izo lin)

$\Downarrow$

$f_A: \mathbb{P}^n k \to \mathbb{P}^n k$, $f_A([x]) = [Ax]$

$$x \mapsto [x]$$

$$\begin{tikzcd} k^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & k^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d] \\ \mathbb{P}^n(k) \arrow[r, dashed, "f_A"] & \mathbb{P}^n(k) \end{tikzcd}$$

Obs:

1) f_A e corect def $\Leftrightarrow [X \sim \exists \lambda X \Rightarrow AX \sim A(\lambda X) = \lambda AX]$

2) f_A bij și $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$

3) f_A păstrează coliniaritatea ($P, Q, R \in \mathbb{P}^n k$ col $\Leftrightarrow \{u, v, w\}$ lin dep $\Leftrightarrow \{Au, Av, Aw\}$ lin dep $\Leftrightarrow f(A), f(Q), f(R)$ col).

$P = [u]$, $Q = [v]$, $R = [w]$

Def: f_A s.n. proiectivitatea asoc. mat. A. (izo lin).

! f_A e izo proj a lui $\mathbb{P}^n k$, $\forall A \in GL_{n+1}(k)$

Ex. de seminar

Pb1: $f_A = f_B \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \setminus \{0\}$ a.î. $A = \lambda B$ și proiectivitățile form. un grup $PGL_{n+1}(k) = \{f_A \mid A \in GL_{n+1}(k)\} \leq \mathcal{P}Aut(\mathbb{P}^n k)$

II) Transformări galoisiene ale lui $\mathbb{P}^n k$

Ex: Arătați $Aut(\mathbb{R})$ și $Aut(\mathbb{C}) \ni id$, conjugarea

Def: $\sigma \in Aut(k)$. Definim $f_\sigma : \mathbb{P}^n k \to \mathbb{P}^n k$

$\boxed{f_\sigma([x_0 : \ldots : x_n]) = [\sigma(x_0) : \ldots : \sigma(x_n)]}$ s.n. transf. galoisiană

Obs:

1) Corect def + bij

2) f_σ păstrează coliniaritatea

$w = \alpha u + \beta v \Rightarrow f_\sigma(w) = \sigma(\alpha) f_\sigma(u) + \sigma(\beta) f_\sigma(v) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ izo proj

Ex: $PGal(\mathbb{P}^n k) = \{ f_\sigma \mid \sigma \in Aut(k) \} \leq PAut(\mathbb{P}^n k)$

Q: Acestea sunt toate $f \in PAut(\mathbb{P}^n k)$? (compuneri de I și II)

Reamintire: $L \subset \mathbb{P}^n k$ var. lin $\Leftrightarrow L = p(W \setminus \{0\})$ unde $W \leq k^{n+1}$ subsp. În plus, $\dim L = \dim_k W - 1$ sau, altfel spus, $\boxed{\operatorname{codim} L = \operatorname{codim}_k W}$

! Dc. $\operatorname{codim} W = k \Rightarrow$ e sol unui sist. omogen de k ecuații ($W = \{ x \in k^{n+1} \mid AX = 0,\ A \in M_{k,n+1} \}$)
(*)

Obs: Ecuațiile (*) fiind omogene au sens în $\mathbb{P}^n k$! $\Rightarrow$

$\Rightarrow L = \{ [X] \in \mathbb{P}^n k \mid A[X] = 0 \}$

Am dem:

Prop: $\forall L \subset \mathbb{P}^n k$ var. lin. de dim $k \Rightarrow \exists A \in M_{k,n+1}(k)$ cu $rk A = k$ a.î. $L = \{ [X] \in \mathbb{P}^n k \mid A[X] = 0 \}$ și invers.
(În particular, $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^n k$ hiperplan $\Rightarrow \mathcal{H} : \sum_0^n a_i x_i = 0$.

Hărțile afine canonice ale lui $\mathbb{P}^n k$

Fie $\mathbb{P} = \mathbb{P}^n k$. Știm $\mathbb{P} \setminus \mathcal{H}$ e în mod natural un sp. af. (și invers). În plus, $\mathcal{H}_i = \{ [X] \in \mathbb{P}^n k \mid x_i = 0 \}$, $i = \overline{0,n}$

↑
hiperplane canonice

$U_i = \mathbb{P}^n k \setminus \mathcal{H}_i = \{ [x] \in \mathbb{P}^n k \mid x_i \neq 0 \}$ are o str. de sp. af.

↑
deschiși afini de coord.

Putem scrie explicit o funcție $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} k^n$

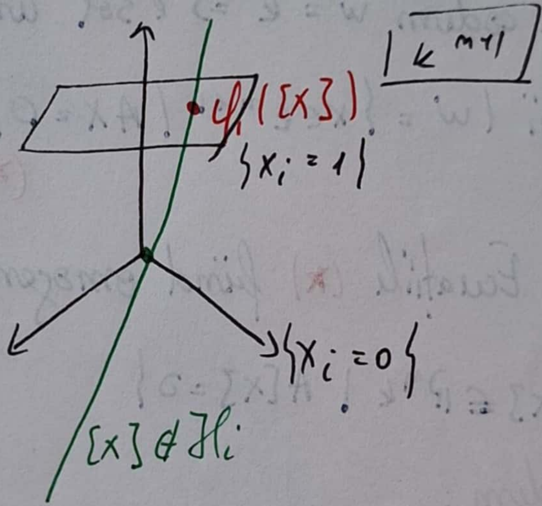
$$\boxed{\varphi_i([x_0 : x_1 : \ldots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \qquad [x_0:\ldots:x_n] = \left[\frac{x_0}{x_i} : \ldots : 1 : \ldots \frac{x_n}{x_i}\right]}$$

cu inversa $\varphi_i^{-1} : k^n \to U_i$

$$\varphi_i^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = [y_1 : \ldots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \ldots : y_n]$$

$\Rightarrow \mathbb{P}^n k = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, acoperit cu $n+1$ sp. af $\simeq k^n$

Interpretare geom:



Remarcă: Ăn sens

$$k^n \supset \varphi_i(U_i \cap U_j) \xleftarrow{\varphi_i|_{U_i \cap U_j}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j|_{U_i \cap U_j}} \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset k^n$$

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} / \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

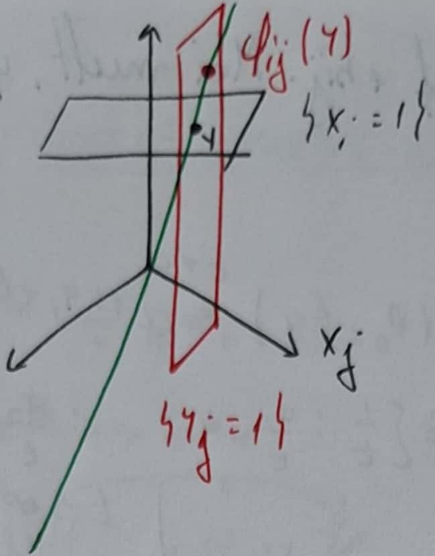
"schimbarea de coord proj. a sp. afin"

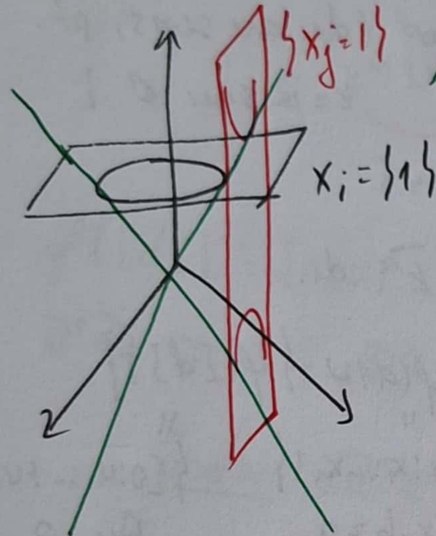
$\varphi_{01} : k^n \setminus \{y_1 = 0\} \to k^n \setminus \{y_1 = 0\}$

$\varphi_{01}(y_1, \ldots, y_n) = (\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(y_1, \ldots, y_n)$

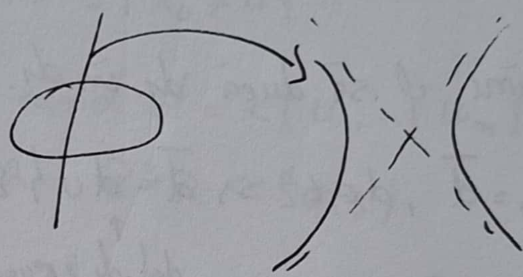
$= \varphi_1([1 : y_1 : \ldots : y_n]) = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right)$

Geometric:





$x_i=\{1\}$ φ_{ij}(elipsă) = hiperbolă



Prop: $\overline{k^n}$ (completarea lui k^n cu pct. la ∞). Atunci $\boxed{\overline{k^n} \simeq \mathbb{P}^n k}$
izo proiectiv

Dem: $\overline{k^n} = k^n \cup \mathcal{H}_\infty$

$\downarrow \varphi_0^{-1}$ $\qquad \varphi_0^{-1}(y_1, \dots y_n) = [1 : y_1 : \dots : y_n]$

$\mathbb{P}^n k = U_0 \cup \mathcal{H}_0$

$\overline{k^n}$: $(y_1, \dots, y_n) \in k^n \quad \cup \mathcal{H}_\infty \ni [d]$

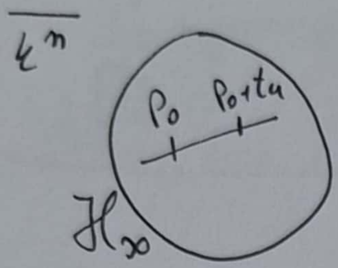
$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\mathbb{P}^n k$: $[1 : y_1 : \dots : y_n] \in U_0 \quad \cup \mathcal{H}_0 \ni [0 : ? : \dots : ?]$

Def $\varphi : \overline{k^n} \to \mathbb{P}^n k$. $\begin{cases} \varphi(y_1, \dots, y_n) = [1 : y_1 : \dots : y_n] \ \forall y \in k^n \\ \varphi(d : P + t(u_1, \dots u_n)) = [0 : u_1 : \dots : u_n] \\ \quad t \in k) \end{cases}$

Obs: φ e corect def. e bij. Mai mult, φ e cont. + homeomorfism

dr. $\exists$ topologie



$$\varphi(P_0+tu) \overset{t\neq 0}{=} [1: a_1+tu_1 : \dots : a_n+tu_n]$$

$$= \left[\frac{1}{t} : \frac{a_1}{t}+u_1 : \dots : \frac{a_n}{t} : u_n\right]$$

$\downarrow$ $t\to\infty$ (dc. are sens, pt. $k=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$)

$$[0:u_1:\dots:u_n]$$

Rămâne φ să ducă dr. în dr. Fie $\Delta \in \overline{k^n}$ dr.

I) dc. $\Delta = \overline{d}$, $d \in k^n \Rightarrow \overline{d} = d \cup \{[d]\} \xrightarrow{\varphi} \varphi(d) \cup \{\varphi([d])\}$

dat. de ecuație $AX-b=0$, $A \in M_{n-1,n}(k)$, $b \in k^{n-1}$; $\varphi(d) = \{[1:x_1:\dots:x_n]\}$, $AX-b=0$, din d: $Au=0$; $\varphi([d]) = \{[0:u_1:\dots:u_n]\}$, $Au=0$.

$$\varphi(\overline{d}) = \left\{[x_0:\dots:x_n] \;\middle|\; A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} - x_0 b = 0\right.$$

$n-1$ ec. omogene $\Rightarrow \varphi(\overline{d})$ e dr. proj.

II $\Delta = \overline{\pi}_\infty$, $\pi = \{AX-b \mid A \in M_{n-2,n}(k)\}$

din $\pi = \{u \mid Au=0\} \Rightarrow \pi_\infty = \{[d] \mid d \subset \pi\} = \{[d] \mid d \subset \text{dir } \pi\}$

$$\varphi(\pi_\infty) = \left\{[0:u_1:\dots:u_n] \;\middle|\; A\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} = 0\right\}$$

$n-2$ ecuații, $X_0=0$ $\Big\} \Rightarrow$ dr. proj.

Curs 11 - Geometrie - 22.05.2023

Data trecută: $\overline{k^n} \simeq \mathbb{P}^n k$ prin

$$\varphi : \overline{k^n} \to \mathbb{P}^n k.$$

$$\begin{array}{ccc} \overline{k^n} & & \mathbb{P}^n k \\ \| & & \| \\ k^n \cup \mathcal{H}_\infty & & U_0 \cup \mathcal{H}_0 \\ & & \| \\ & & \{[x] \mid x_0 \neq 0\} \end{array}$$

$\varphi([d]) = [0 : u_1 : \dots : u_n]$ când $d = \langle (u_1, \dots u_n) \rangle$

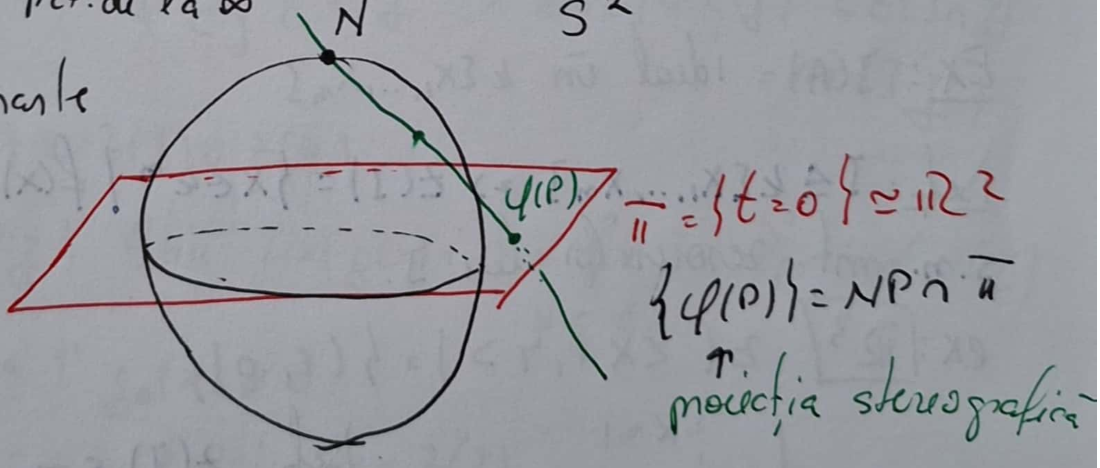
$\mathbb{P}^1\mathbb{R} \simeq S^1$, $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \not\simeq S^2$, $\mathbb{P}^3\mathbb{R} \simeq SO(3)$

Corolar: $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \simeq S^2$ (sfera din $\mathbb{R}^3$ = sfera Riemann)

$\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

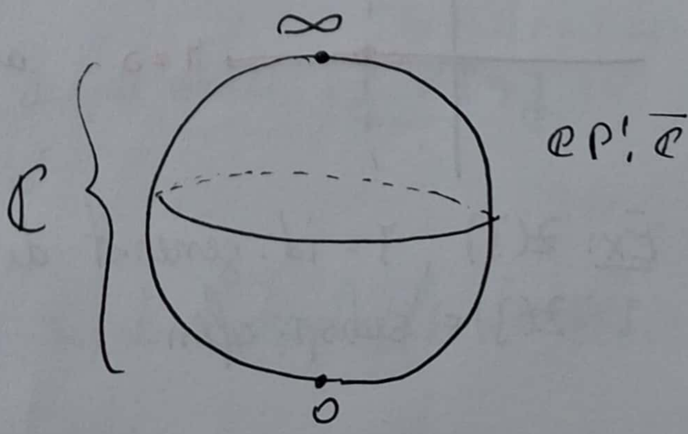
pct. de la ∞

Pe de altă parte



Ex: Formule pt φ.

Deci $S^2 \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$



Subvarietăți algebrice în k^n (afine) și în $\mathbb{P}^n(k)$ (proj)
Topologia Zariski

I) Pt. cazul afin:

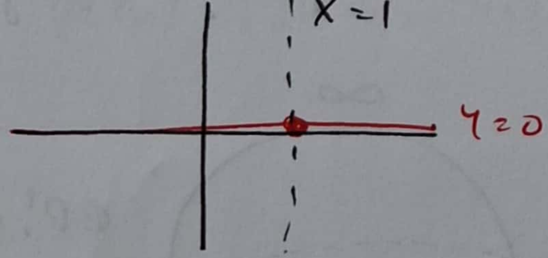
k^n		$k[X_1, \dots X_n]$
$A \subset k^n$	$\longrightarrow$	$I(A)$
$Z(I)$	$\longleftarrow$	I
	$\longleftarrow$	Ideale maximale
	$\longleftarrow$	Ideale prime.

Def: $A \subset k^n \to I(A) = \{ f \in k[X_1, \dots X_n] \mid f(x) = 0, x \in A \}$
s.n. idealul asociat lui A.

Ex: $I(A)$ = ideal în $k[X_1, \dots, X_n]$

Def: $I \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n] \Rightarrow Z(I) = \{ x \in k^n \mid f(x) = 0 \ \forall f \in I \}$
s.n. mt. zerourilor lui I.

ex: $\boxed{\mathbb{R}^3}$ $Z(\langle X-1, Y \rangle) = \{(1, 0)\}$

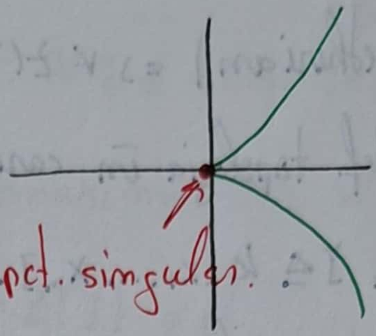


Def.: $Z(I)$ s.n. subvarietate algebrică asociată lui I.

Ex: $Z(I)$, I = id. generat de pol. de deg 1
$Z(I)$ = subsp. afin.

$Z(f)$, $\deg f = 2 \Rightarrow Z(f)$ hipercuadrică

$Z(x^3 - y^2)$ în $\mathbb{R}^2$



Prop:

1) $I \subset J \Rightarrow Z(I) \supset Z(J)$

2) $Z(I) \cup Z(J) = Z(I \cap J) = Z(I \cdot J)$

3) $Z(I) \cap Z(J) = Z(I + J)$ şi în general $\bigcap Z(I_i) = Z(+ I_i)$

intersecție arbitrară

4) $I = (f_1, f_2, \dots, f_k) \Rightarrow Z(I) = Z(f_1, \dots f_k) = Z(f_1) \cap \dots \cap Z(f_k)$

Dem 2) $I \cdot J \subset I \cap J \begin{smallmatrix} \subset I \\ \subset J \end{smallmatrix} \subset I + J \Rightarrow Z(I) \cup Z(J) \subset Z(I \cap J) \subset Z(I \cdot J)$

Vreau $Z(I \cdot J) \subset Z(I) \cup Z(J)$

Fie $x \in Z(I \cdot J)$. Ştiu $f(x) \cdot g(x) = 0$ $\forall f \in I$, $\forall g \in J$. Pp. $x \notin Z(J)$

$\Rightarrow \exists\, g_0 \in J$ a.î. $g_0(x) \neq 0$

$f(x) g_0(x) = 0$ $\forall f \in I \Rightarrow x \in Z(I)$.

Obs 1) $Z(I \cdot J) = Z(I \cap J)$, dar de obicei $I \cdot J \neq I \cap J$

2) $Z(k[x_1, \dots, x_n]) = \emptyset$

$Z((0)) = k^n$

Am I: Idealele lui $k[X]$ sunt de tipul (f), $f \in k[X]$

Fapt: Idealele lui $k[X_1, \dots X_n]$ sunt finit generate.
(inelul este noetherian) $\Rightarrow \forall\ Z(J) = Z(f_1, \dots f_k)$

Def: Pe k^n, def. topologia în care mt. $\boxed{\text{închise}}$ sunt cele de tipul $Z(J)$, $J \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n]$. Aceasta s.n. topologia Zariski pe k^n. (Z închis $\Leftrightarrow$ F subvar. alg)

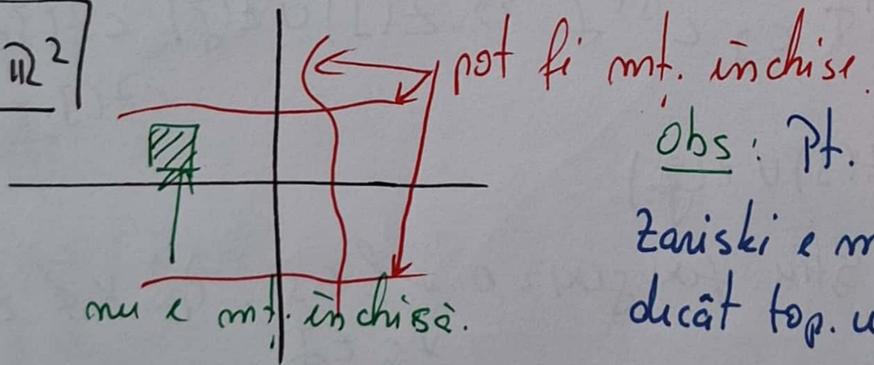
Prop. precedentă + obs $\Rightarrow$ este o topologie.

! $\forall k$ corp, are sens topologia pe k^n.

Ex: Pe k ($n=1$), top Zariski:

F închisă $\Leftrightarrow$ F e finită sau $F = k$ $\Rightarrow$ D deschisă $\Leftrightarrow$ $k \setminus D$ finită sau $D = \emptyset$ $\Rightarrow$ topologie cofinită.

Pe $\mathbb{R}^2$



Obs: Pt. $k = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, top. Zariski e mai puțin fină decât top. uzuală.

Am I: În $k[X_1, \dots X_n]$ idealul $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) = \underline{m}_{(a_1, \dots a_n)}$ este maximal.

Obs: $Z(\underline{m}_{(a_1, \dots a_n)}) = \{(a_1, \dots a_n)\}$

Teoremă (Weak Nullstellensatz; Hilbert): Fie k = algebric închis, $\forall\ \underline{m} \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n]$ maximal este de tip $\underline{m}_{(a_1, \dots a_n)}$.

Obs: $Z(\underline{m}_{(a_1,\dots,a_n)}) = \{(a_1,\dots,a_n)\}$

Am Î: Lema lui Krull: $\forall J \trianglelefteq k[X_1,\dots,X_n]$, $J \neq k[X_1,\dots,X_n]$ e inclus într-un ideal maximal $\Rightarrow$ W. Nullstellensatz se reformulează: $J \neq R \Rightarrow Z(J) \neq \emptyset$.

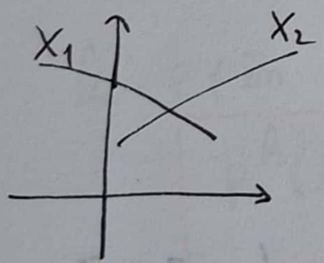
Reamintire:

1) $P \trianglelefteq R$ ideal prim $\Leftrightarrow$ [$\forall\, a,b$ cu $ab \in P \Rightarrow a \in P$ sau $b \in P$]

$\Leftrightarrow$ [$\forall\, I, J \trianglelefteq R$, $IJ \subset P \Rightarrow I \subset P$ sau $J \subset P$]

2) $\underline{m}$ max $\Rightarrow$ $\underline{m}$ prim.

Def: $X \subset k^n$ var. alg. s.n. ireductibilă dc. nu poate fi scrisă ca $X = X_1 \cup X_2$ cu X_1, X_2 var. alg. dif. de $\emptyset$ și de X.



Ex: X ired. $\Leftrightarrow$ $I(X)$ e prim.

(folosiți caract. cu $IJ \subset R \Rightarrow I \subset R$ sau $J \subset R$)

Def: $J \trianglelefteq R$ ideal $\Rightarrow$ $\sqrt{J} = \{x \in R \mid \exists\, n \geq 1$ a.î. $x^n \in J\}$

Ex: 1) $\sqrt{J}$ e ideal și $J \subset \sqrt{J}$

2) $\sqrt{(0)} = \mathcal{N}(R)$ $\leftarrow$ nilradical

3*) $\mathcal{N}(R) = \bigcap\limits_{\underline{P} \subset R \text{ prim}} \underline{P}$

4) $\underline{P}$ prim $\Rightarrow$ $\sqrt{\underline{P}} = P$.

5) $Z(J) = Z(\sqrt{J})$ și $I(Z(J)) \supset \sqrt{J}$.

Th. (Strong Nullstellensatz): k alg. închis $\Rightarrow$

$\boxed{I(Z(J)) = \sqrt{J}}$.

Obs: Strong $\Rightarrow$ Weak Nullstellensatz.

Ex: Peste $\mathbb{R}$, $J = (x_1^2+1, \dots)$ în $k[x_1, \dots x_n]$ are $Z(J) = \emptyset$.

$\Leftrightarrow J \subset \underline{m}$ ideal max. care nu e de tipul $\underline{m}(a_1, \dots, a_n)$.

$\boxed{n=1}$ $J = (x^2+1)$ maximal.

Ex*: $\mathrm{Max}(\mathbb{R}[x,y]) = ?$

II) În cazul proiectiv

$\mathbb{P}^n k$	$k[x_1, \dots, x_n]$
A $\longrightarrow$	$I(A)$
$Z(J)$ $\longleftarrow$	J OMOGEN

Def: $J \trianglelefteq k[x_1, \dots, x_n]$ s.n. ideal omogen dc. $J \ni f$

$\Rightarrow f_i \in J$ unde $f = f_1 + \dots + f_k$.

comp. omogene de deg $f_j = j$.

Ex: J = omogen $\Leftrightarrow$ e generat de ~~ideale~~ polinoame omogene.

• $\forall A \in \mathbb{P}^n k \longrightarrow Z(A) = \{ f \in k[x_1 \dots x_n] \mid f([x]) = 0 \ \forall [x] \in A \}$ e ideal omogen.

• $\forall J$ id. omogen $\Rightarrow$ are sens $Z(J) \subset \mathbb{P}^n k$.

Def: O mt. $Z(J)$ s.n. subvarietate alg. proj.

Ex: $Z(J)$, J ideal omogen. de deg 1 $\Rightarrow$ $Z(J)$ var. liniară.

Def: $Z(f)$, f omogen de deg 2 s.n. hipercuadrică proj.

$Z(X_0^2 - X_1X_2) \subset \mathbb{P}^2 k$.

! Restul teoriei = la fel + cuv. $\boxed{\text{omogen.}}$

Omogenizare și dezomogenizare

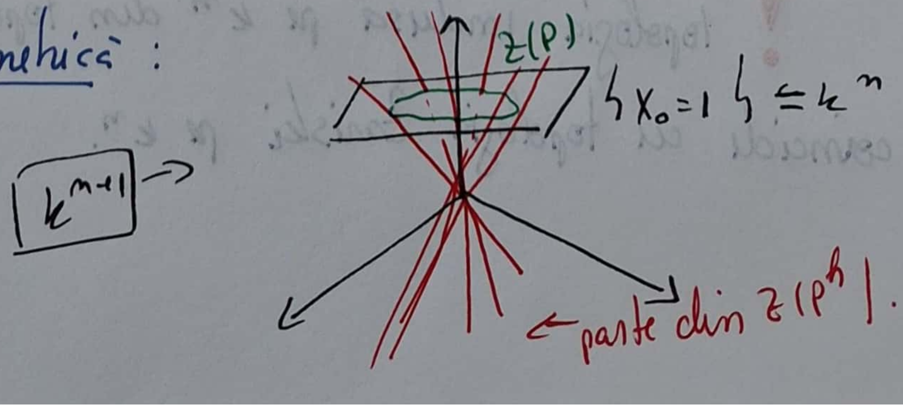
Def: $P \in k[X_1, \dots, X_n]$, $\deg P = k$. Numim omogenizatul lui P (în raport cu variab. X_0): pol. omogen:

$$\boxed{P^h(X_0, \dots, X_n) = X_0^k P\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right)}$$

Ex: $P(X_1, X_2, X_3) = X_1X_3 - 3X_2^2X_3 + X_3 - X_1X_2X_3 + 6$.

$P^h(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0X_1X_2 - 3X_2^2X_3 + X_0^2X_3 - X_1X_2X_3 + 6X_0^3$.

Interpretare geometrică:



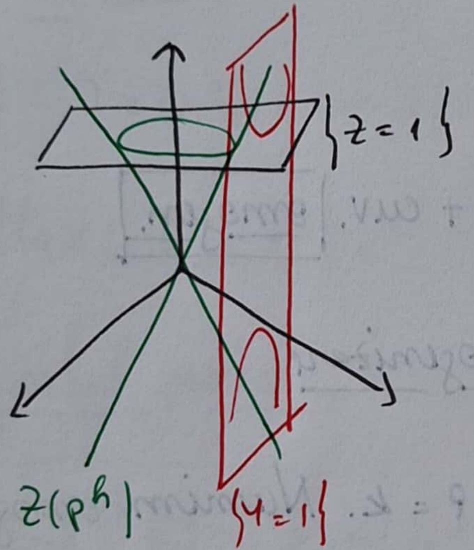
Def: Numim dezomogenizarea lui $f \in k[X_0 .. X_n]$ (omogen) în rap. cu variab X_0, pol $f_{X_0}(X_1, .., X_n) = f(1, X_1, ..., X_n)$.

Def: $X = Z(P) \longrightarrow Z(P^h)$ s.n. închiderea proj. a lui X.

Obs: $Z(P^h) \cap U_0 = Z(P)$.

Procedeul: $P \longmapsto P^h \longmapsto (P^h)_{X_0} = P$ și la niv. de zerouri.

Ex:



Data trecută: geometric.

$\varphi_{X_2}(\mathcal{C}) = \mathcal{H}$.

$\mathcal{C}: \underbrace{x^2+y^2-1}_{P(x,y)} = 0 \rightsquigarrow P^h(x,y,z) = x^2+y^2-z^2=0$

$\longrightarrow (P^h)_y(x,z) = x^2 - z^2 + 1$

hiperbolă.

Obs: Procedeul $P \longrightarrow P^h \xrightarrow{\text{(în rap. cu } X_i)} (P^h)_{X_j}$ corespunde cu $Z(P) \longmapsto \varphi_{ij}(Z(P))$.

Ex: $k^n \subset \mathbb{P}^n k$ $(\overline{k^n} = \mathbb{P}^n k)$.

! Topologia indusă pe k^n din topologia Zariski coincide cu topologia Zariski pe k^n.

Hipercuadrice proiective : $\mathbb{P}^n k$

Def.: f pol. omogen, $\deg f = 2$ s.n. hipercuadrică algebrică

Def.: $\Gamma : Z(f)$ s.n. hipercuadrică geom. $\Rightarrow$ $\boxed{\Gamma = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} X_i X_j}$

cu $\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{{}^t X A X = 0}$, $A = (a_{ij})$ sim

$X = \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

Def.: $\Delta = \det A$. Γ s.n. nedegenerată dc. $\Delta \neq 0$.

Def.: $P \in \Gamma$, $P = [Y]$: $\boxed{T_P \Gamma : \sum_{0}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(Y) \cdot X_i = 0}$ sp. tangent la Γ în P.

Def. Γ s.n. netedă $\Leftrightarrow$ $T_P \Gamma$ e hiperplan, $\forall P \in \Gamma$.

Prop.: Γ netedă $\Leftrightarrow$ Γ e nedegenerată.

Curs 12 - Geometrie - 29.05.2024

Data trecută: $J(A) = \langle f \mid f$ omogen, $f(x)=0 \ \forall x \in A \rangle$.

Teoremă: Γ nedegenerată $\Leftrightarrow$ Γ netedă
$(\Delta \neq 0)$ $\quad$ $(T_Y\Gamma$ e hip $\forall Y \in \Gamma)$.

Dem: $f(x) = {}^t x A x$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) = {}^t e_i A Y + {}^t Y A e_i = 2\, {}^t e_i A Y = 2 L_i (AY).$$

Γ singulară $\Leftrightarrow \exists Y \in \Gamma$ a.î. $AY = 0$, $Y \neq 0 \Rightarrow \det A = 0$.

$\det A = 0 \Rightarrow \exists Y$ cu $AY = 0 \Rightarrow {}^t Y A Y = 0 \Rightarrow Y \in \Gamma$...

Prop: $\Gamma \in k^n$ hipercuadrică, $\Gamma = Z(f)$, $f \in k[x_1, \dots, x_n]$

$\Gamma : {}^t x A x + 2\, {}^t b x + c = 0$

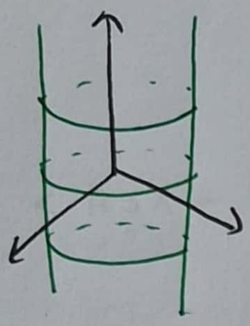
$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right), \ \Delta = \det \tilde{A}. \Rightarrow \boxed{\Delta \neq 0 \Leftrightarrow Z(f^h) = \overline{\Gamma} \text{ netedă}}$$

Dem: $f(x) = {}^t x A x + 2\, {}^t b x + c$.

$$f^h\underbrace{(x_0, x_1, \dots, x_n)}_{\tilde{x}} = {}^t x A x + 2 x_0\, {}^t b x + c \cdot x_0^2$$

$$\Delta_{Z(f^h)} = \left|\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right| = \Delta_{Z(f)}, \ \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Ex: Cilindru $\mathcal{C}: x^2+y^2-1=0$ în $\mathbb{R}^3$



$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ \hline & & & -1 \end{array}\right), \ \Delta=0 \Rightarrow \mathcal{C} \text{ are pct. sg. la } \infty.$$

(un pct. la ∞ $[0:0:0:1]$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ T \ \ x \ \ y \ \ z$

$$\overline{\mathcal{C}}: x^2+y^2-T^2=0$$

$$\overline{\mathcal{C}} \cap H_\infty = \begin{cases} x^2+y^2-T^2=0 \\ T=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow [0:0:0:1].$$

Cilindru proj. = con.

Construcția corpului de coord.

Fie $(\mathcal{P},\Delta)$ sp. proj.

Axioma Desargues: Pt. $\forall$ pct. O, A, B, C, A', B', C' a.î. $\begin{cases} A' \in OA \\ B' \in OB \\ C' \in OC. \end{cases}$

și notând $\begin{cases} M = AB \cap A'B' \\ N = BC \cap B'C' \\ P = AC \cap A'C' \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{pct. } M-N-P \text{ col.}}$

ax. Veblen

Teoremă: Dc. $\dim \mathcal{P} \geq 3 \Rightarrow$ axioma lui Desargues e satisfăcută.

Dem: Dc. figura nu e plană $(A,B,C) \neq (A',B',C')$ plane proj $\Rightarrow M,N,P \in (A,B,C) \cap (A',B',C') =$ dr. proj.

Dc. A,B,C,A',B',C',O coplanare în π.

Fie $D \notin \pi$ ($\dim \mathcal{P} \geq 3$) și $D' \in OD$, $D' \neq O, D$.

Aplic th. Desargues (pas 1) pt. O, A, A' $\quad A'' = AD \cap A'D'$
B, B' $\Rightarrow B'' = BD \cap B'D'$
D, D' $\quad M = AB' \cap A'B'$ col.

La fel și $N - B'', C''$ col. $\left| \begin{array}{l} A'' \in DA \\ B'' \in DB \\ C'' \in DC \end{array} \right.$ $\overset{\text{Desargues}}{\Rightarrow}$ M, N, P col.
$P - A'', C''$

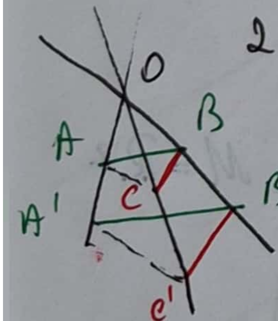
<u>Def</u>: Un sp. $\mathcal{P}$ s.n. desarguesian dc. satisface ax. lui Desargues.

<u>Obs</u>: 1) din th $\Rightarrow$ dc. dim $\mathcal{P} \geq 3 \Rightarrow \mathcal{P}$ e desarguesian.

2) $\forall$ sp. af. $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \overline{\shortparallel})$ e de tip $\mathcal{P} \setminus \mathcal{H}$.
hiperplan.

3) Dc. $\mathcal{P}$ e desarguesian, atunci satisface mai multe var. ale lui Desargues, în funcție de poz. lui $\mathcal{H}$ față de config:

<u>De ex</u>: 1) $\mathcal{H} \ni O \Rightarrow AA' \parallel BB' \parallel CC' \Rightarrow M, N, P$ col.



2) $\mathcal{H} \ni M, N$: AA', BB', CC' concurente în O.

$\left. \begin{array}{l} AB \parallel A'B' \\ BC \parallel B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow AC \parallel A'C'$.

<u>Def</u>: $\mathcal{A}$ = sp. af. s.n. desarguesian dc. satisface toate var. axiomei lui Desargues.

<u>Obs</u>: Sunt evidente

1) $\mathcal{A}$ sp. af. des $\Leftrightarrow \mathcal{P} = \overline{\mathcal{A}}$ sp. proj. des.

2) $\dim \mathcal{A} \geq 3 \Rightarrow \mathcal{A}$ e des.

<u>Obs</u>: Chiar dc. $\boxed{k = \text{necom}}$ au sens:

1) sp. vect. (la stg) peste k

2) $(\mathcal{A}, V/_k, \varphi)$

3) $\mathbb{P}^n k$

4) Chiar dc. V e sp. vect. ∞ dim au sens:

- $(\mathcal{A}, V/_k, \varphi)$
- $\mathbb{P}(V) = \dfrac{V \setminus \{0\}}{\sim}$ proiectivizarea lui V

$v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w,\ \lambda \neq 0.$

5) ${}_k V$ ← modul la stg.

Ex: V ca sp. afin $\Rightarrow \boxed{\overline{V} \simeq \mathbb{P}(V \times k)}$.

$(\tilde{k} \simeq \mathbb{P}^n{}_k \simeq \mathbb{P}(k^{n+1}))$

<u>Obs</u>: Dc. $\mathcal{A}$ e sp. af. des, $\mathcal{A}' < \mathcal{A}$ sub sp af $\Rightarrow \mathcal{A}'$ e des.

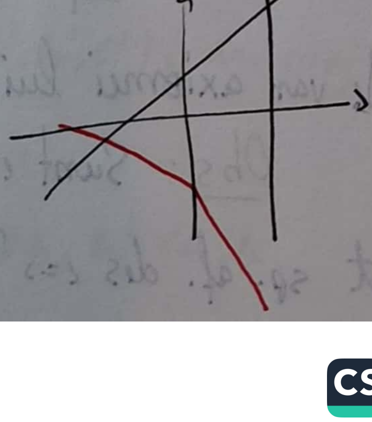
Dc. P sp. proj. des, $L < P$ var. lin $\Rightarrow L$ sp. proj. des. $\Rightarrow$

k^2, $\mathbb{P}^2 k$ sunt plane af / proj des.

<u>Planul Moulton</u>: $(M, \mathcal{D})$ plan af. nedes. $M = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{D} = \{ \{ y = mx + n \mid m \geq 0 \} \cup \{ x = n \mid n \in \mathbb{R} \} \cup$

$\cup \left\{ \begin{cases} y = mx + n, & x < 0 \\ y = 2mx + n, & x \geq 0 \end{cases} \middle| m < 0 \right\}.$



<u>Ex</u>: $(M, \mathcal{D})$ pl. af.

Temă: găsiți altele.

Teoremă:

1) Un sp. proj. des e de tip $\mathbb{P}(V)$ unde V sp. vect. peste un corp k (nu neap. com., V nu neap. fin. dim).

2) Un sp. afin des. este de tip $(\mathcal{A}, V/_k, \varphi)$ . . . .

Din obs ant $\Rightarrow$ th 1 $\Leftrightarrow$ th 2.

Vom demonstra th2

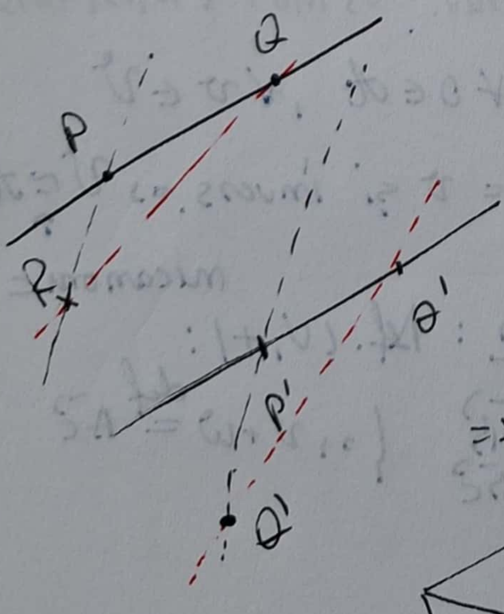
Dem: Fie $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \pi)$ un sp. af. des.

Def.: $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bij. care păstrează col s.n. dilatare dc.

$PQ \parallel \varphi(P)\varphi(Q)$ $\forall P, Q$.

$\varphi(P) \overset{not}{=} P' \Rightarrow PQ \parallel P'Q'$. (Dc. $\mathcal{A} \ni V/_k$, dilatări < transl. / omotetii)

Obs: $\forall$ dilatare e det. de imag. a 2 pct.



Dc. $R \notin PQ$ $\Rightarrow$ vedeți desen

Dc. $R \in PQ$ iau $S \notin PQ$.

Aflu unde merge S $\Rightarrow$ în fct. de el aflu unde merge R.

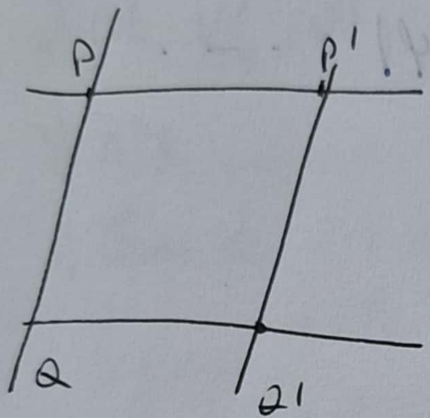
$\Rightarrow \varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dilatare

- $\varphi = id$.
- φ nu are pct. fixe } def. translații
- φ are un pct. fixe $\to$ def. omotetie

I) Translațiile lui $\mathcal{A}$

(Dc $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V/_k)$), $(T(A), \circ) \simeq (V, +)$.

Obs: $\forall$ translație e det. de imag. unui sg. pct. $P \mapsto P'$



Construcția: desenez pll $PQ \parallel P'Q'$

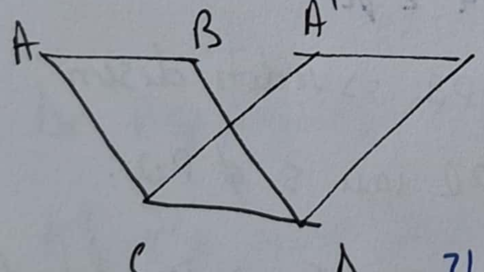
Dc. $Q \notin$ pll prin Q la $PQ \Rightarrow$

$\Rightarrow PP' \cap QQ' = O \Rightarrow O$ e pct. fix ~~ab~~.

Deci pt. translații: $\begin{cases} PQ \parallel P'Q' \\ PP' \parallel QQ' \end{cases}$

Definim: $\mathcal{V} = \mathcal{A} \times \mathcal{A} /_{\sim}$, $(A,B) \sim (A',B') \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel A'B' \\ AA' \parallel BB' \end{cases}$ dc. sunt necol / $(A,B) \sim (C,D)$ cf. $(C,D) \sim (A',B')$ def 1.

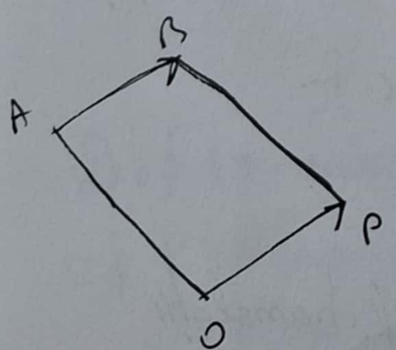


$\sim$ rel de echiv. $\Rightarrow$ not $(A,B) = \overline{AB}$

Prop. (crucială): $\forall O \in \mathcal{A}$, $\forall v \in \mathcal{V}$

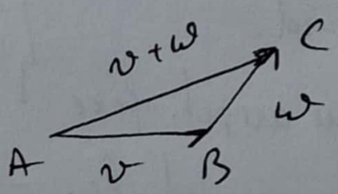
$\exists!\, P \in \mathcal{A}$ a.î. $\overrightarrow{OP} = v$ și invers $\Rightarrow \mathcal{V} \simeq \mathcal{A}$

necanonic

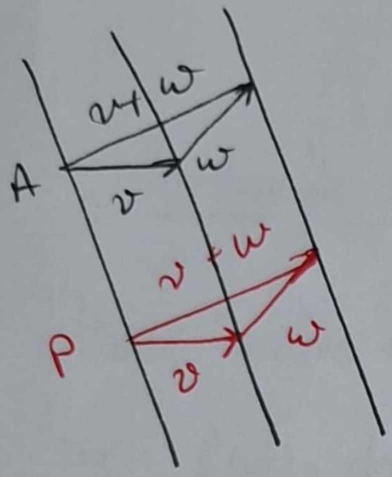


Adunarea vectorilor: Def. $(V, +)$:

Aleg $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \begin{matrix} v = \overrightarrow{AB} \\ w = \overrightarrow{BC} \end{matrix} \Big\} \Rightarrow v + w \overset{def}{=} \overrightarrow{AC}$



Dem. că nu dep. de alegerea lui A (= corect def).



$\Leftarrow$ una dintre var. ax. lui Desargues afină.

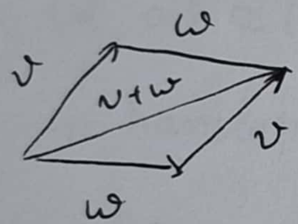
$(V, +)$ gr. com:

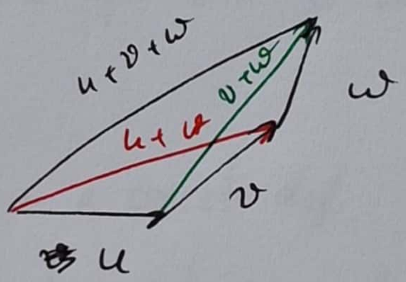
1) $\vec{AA} = \vec{0}$ elem. neutru

2) $v + w = w + v$ com.

3) $(u+v)+w = u+(v+w) = u+v+w$

asoc.





Curs 13 - Geometrie - 5.06.2025

Construcția corpului de coord.

Până acum ~~am~~ în dem. am def. dilatări în $\mathcal{A}$, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bij, $f(d) = d_1$, $f(d) \parallel d$, φ are pct. fixe / niciunul → tr.
                                                                 / toate
                                                                 / unul - om.

$(\mathcal{T}, \circ) \simeq (\mathcal{V}, +)$ = gr. com. al vect. liberi
↑
gr. translațiilor.

Desargues ⇒ + e corect def.

$\mathcal{T}$ "acționează tranzitiv" pe $\mathcal{A}$ ($\forall P, Q \Rightarrow \exists!$ translație $P \mapsto Q$)

II) Omotetii

$\forall O \in \mathcal{A}$, def $\mathcal{H}_O = \{\varphi$ omotetie $\mid \varphi(O) = O\} \cup \{id\}$

(de. $\mathcal{A} = (A, V/_k)$, $\mathcal{H}_O = k^*$, $H_{O,\lambda} \circ H_{O,\mu} = H_{O,\lambda\mu}$)

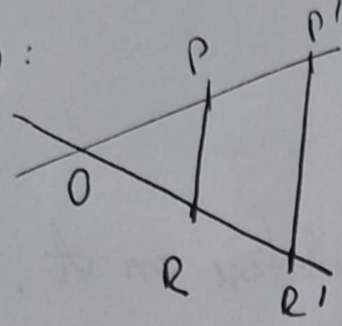
Scopul e să punem o str. de corp pe $\mathcal{H}_O \cup \{0\}$
↑ fct. identică $0(P) = O$.

înmulțirea = comp. funcțiilor.

adunarea = ?

Prop: $\forall$ O - P - Q col. $\exists\, \varphi \in \mathcal{H}_0$ a.î. $\varphi(P) = Q$.
$\neq P$, $\neq O$

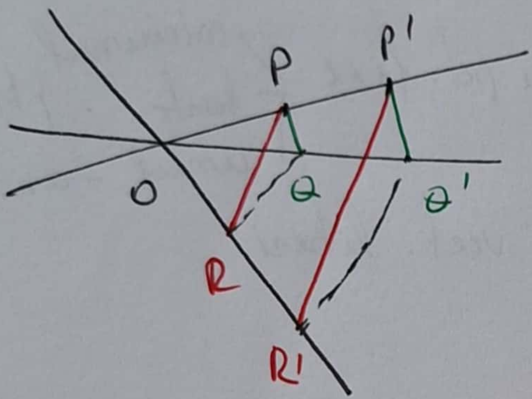
Dem:



$\forall R \notin OP$ def. $R' \in d \parallel PR$, $R' \in OR$.

$\forall Q \in OP$ folosesc R ant pe post de P.

Trb. să dem. că φ e dilatare.



$\forall Q, R$, $\varphi(QR) = Q'R' \parallel QR$.

Desargues: $\begin{cases} PQ \parallel P'Q' \\ PR \parallel P'R' \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel P'Q'$

$\alpha, \beta \in \mathcal{H}_0$. Vreau $\alpha + \beta = ?$

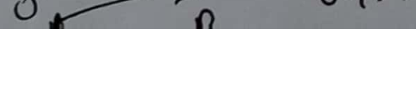
$\overrightarrow{OP^\alpha} + \overrightarrow{OP^\beta} = \overrightarrow{OQ}$, $Q \in OP$ și aleg $(\alpha+\beta)(P) = Q$
$\Downarrow$
$\alpha + \beta$.

Rămâne de verificat: $\begin{cases} (\mathcal{H}_0, \cdot) \text{ monoid} \\ (\mathcal{H}_0 \cup \{0\}, +, \cdot) \text{ corp} \\ \mathcal{H}_0 \cup \{0\} \underset{\uparrow}{\simeq} \mathcal{H}_0 \cup \{0'\} \end{cases}$

izo de corpuri canonic (def. prin conj. cu transl. $\overrightarrow{OO'}$).

$K \overset{\text{mot}}{=} (\mathcal{H}_0 \cup \{0\}, +, \cdot)$ corp.

$\alpha \in K$, $v \in \mathcal{V}$ $\quad \dfrac{v = \overrightarrow{OP}}{\alpha \in \mathcal{H}_0 \cup \{0\}}$ $\quad \overrightarrow{O\alpha(P)}$ (nu dep. de reprezentanți).



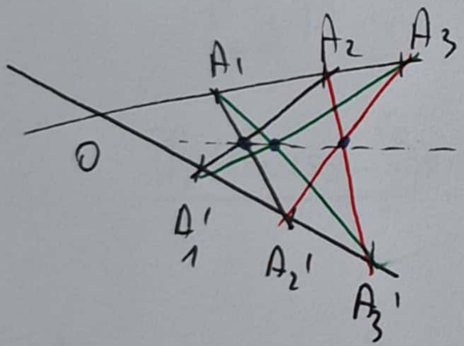
$\Rightarrow \mathcal{A}$ = sp. af. cu sp. director $V/_k$

Ex: P sp. proj des., $\mathcal{H}$ hip. proj în $P \stackrel{k}{\Rightarrow} P \setminus \mathcal{H}$ sp. af. des $\Rightarrow$ k corp de coord. $\Rightarrow \mathcal{A} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{izo afin}}}{\simeq} V/_k \Rightarrow P \simeq \overline{\mathcal{A}} \simeq \mathbb{P}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{k sp. vect.}}}{V} \times k)$

Ex: Cls. de izo a lui k nu dep. de alegerea lui $\mathcal{H}$.

Axioma lui Pappus și com. corpului

Axioma Pappus:



$O - A_1 - A_2 - A_3$ col. } în proj.
$O - A_1' - A_2' - A_3'$ col

$$\left\{\begin{array}{l}\{P_{12}\} = A_1A_2' \cap A_1'A_2 \\ \{P_{13}\} = A_1A_3' \cap A_1'A_3 \\ \{P_{23}\} = A_2A_3' \cap A_2'A_3\end{array}\right.$$

Atunci $P_{12} - P_{13} - P_{23}$ col.

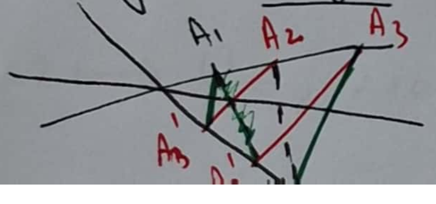
Def: P s.n. pappian dc. satisface ax. lui Pappus.

Th (Hessenberg): P plan proj Pappian $\Rightarrow$ e des.

Th: P e Pappian $\Leftrightarrow$ corpul său de coord. e com.

Dem: Aleg $\mathcal{A} = P \setminus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hip.}}}{\mathcal{H}}$, $P_{12}, P_{13} \in \mathcal{H}$, $O \notin \mathcal{H}$ (altfel, dc $\forall$ hip. care cont. 2 p-uri $\Rightarrow$ cont. și O $\Rightarrow O - P_{12} - P_{13} - P_{23}$ col).

Config din $P \setminus \mathcal{H}$



$A_1A_2' \parallel A_2A_1'$

$A_1A_3' \parallel A_1A_3$

Vreau $A_2A_3' \parallel A_2'A_3$

$(1) \iff \exists!\ \sigma \in \mathcal{H}_0$ a.î $\sigma(A_1) = A_3$

$\sigma(A_3') = A_1'$

$(2) \iff \exists!\ \mu \in \mathcal{H}_0$ a.î $\mu(A_1) = A_2$.

$\mu(A_2') = A_1$.

$A_2A_3' \parallel A_3A_2' \iff (\sigma \circ \mu)(A_3) = A_2$

$(\mu \circ \sigma)(A_2') = A_3'$ să comute σ și μ.

Th: P plan moj. des finit $\Rightarrow$ P e pappian. ($\iff$ K corp finit e com).

Axiomele geometriei plane

A1)

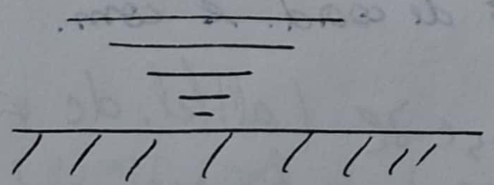
A2)

A3)

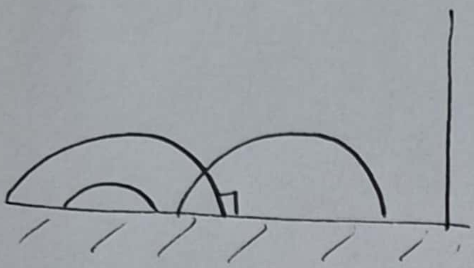
~~A5~~

- $\forall$ 2 dr. se $\cap$
- postulatul $\parallel$.
- prin $\forall$ pct. ext. unei dr. trec mai multe $\parallel$.

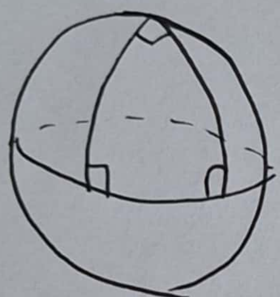
$\mathbb{H}^2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$

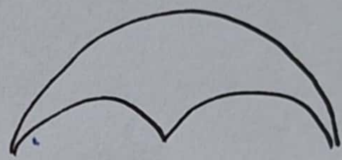


Planul hiperbolic:



$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \arccos(\cosh y_1 \cosh(x_2-x_1) \cdot \cosh y_2 - \sinh y_1 \sinh y_2).$$





$\sum_{\Delta} \measuredangle > 180^\circ = \pi$ maj

$\sum_{\Delta} \measuredangle = 180^\circ = \pi$ în plan ~~eucl~~.

$\sum_{\Delta} \measuredangle < 180^\circ$ în pl. hiperbolic.

Th (Gauss-Bonnet): $\boxed{\iint_{\Delta} \underset{\text{curbură}}{k} + \sum \measuredangle = \pi}$

Dc. $k = 0 \Rightarrow \sum \measuredangle = \pi$ (euclidian)

$k = \text{const} \Rightarrow k \cdot \text{Aria } \Delta = f(\sum \measuredangle)$.

În geometria neeuclidiană Arie $(\Delta) \leftrightarrow \sum \measuredangle$.

Fapt: $PSL_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\varphi_A : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$, $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

Ex: Izometriile lui $\mathbb{H}^2 \simeq PSL_2(\mathbb{R})$

$z \longmapsto z+b$ (translație) $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$z \longmapsto \alpha^2 z$, $\alpha > 0$ (omotetie) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$.

$z \longmapsto \frac{-1}{z}$ ("rotația în jurul lui i").