# NOTEBOOK

# Funcții continue

## pe $\mathbb{R}$

Def: Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x \in D$. Spunem că f este continuă în x dacă:

1) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. pt. $\forall x \in D$, $|x-a| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

2) $\forall V \in \mathcal{V}_{f(x)}$, $\exists U \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(D \cap U) = V$ (adică $\forall x \in D \cap U$, $f(x) \in V$ ~în spații topologice)

3) $\forall (x_n)_{n \geq 1} \subseteq D$ cu $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ avem $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(a)$

OBS! $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$

ex : $f [0,1] \cup \{3\}$

$f(x) = x$, verific continuitatea în $x=3$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î $\forall x \in D$, cu $|x-3| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(3)| < \varepsilon$

fixez $\varepsilon > 0 \Rightarrow -\delta_3 < x - 3 < \delta_3 \Rightarrow 3 - \delta_\varepsilon < x < \delta_3 + 3$

fie $\delta_\varepsilon = 1 \Rightarrow$ o vecinătate care îl conține doar pe x

$2 < x < 4 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(3)| = f(3) - f(3) = 0 < \varepsilon \Rightarrow$ Adev.

$f: \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$, verific continuitatea în $x = 2$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î $\forall x \in \{1,2,3\}$ cu $|x-2| < \delta_\varepsilon$, $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$

$|x-2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow -\delta_\varepsilon < x - 2 < \delta_\varepsilon \Rightarrow 2 - \delta_\varepsilon < x < \delta_\varepsilon + 2 =$

iau $\delta_\varepsilon = 0{,}5 \Rightarrow 1{,}5 < x < 2{,}5 \Rightarrow x = 2$, o vecinătate care îl conține doar pe x $|f(x) - f(2)| < \varepsilon \Rightarrow f(2) - f(2) < \varepsilon \Rightarrow 0 < \varepsilon \Rightarrow A$

$V = [2 - \delta_\varepsilon, 2 + \delta_\varepsilon] \Rightarrow V \cap \{1, 2, 3\} = 2$ //

OBS! $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$, $a$ punct izolat pe $D$ ($a \in D \setminus D'$).
Atunci $f$ continuă în $a$.

Def: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, spunem că $f$ este continuă pe $D$ dacă $f$ este continuă în $a$, $\forall a \in D$.

## Operații cu funcții continue

1) Operații algebrice

Fie $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g$ continue în $a$, atunci $f+g$, $f \cdot g$, $\alpha f$, $|f|$ sunt continue în $a$. Dacă $f(x) \neq 0$, $\forall x \in D$, atunci $\frac{1}{f}$ este continuă în $a$

Prop: $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$, $f$ continuă în $a$. Atunci, $\exists V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f$ mărginită pe $V$.

2) Compunerea funcțiilor

Prop: Fie $D, G \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \longrightarrow G$, $g: G \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$, $b = f(a) \in G$, $f$ continuă în $a$, iar $g$ este continuă în $b = f(a)$. Atunci $g \circ f$ este continuă în $a$.

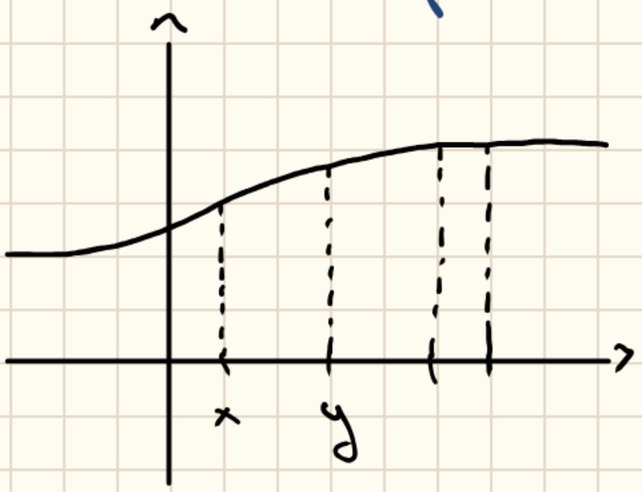
# Funcții uniform continue

**Def:** Fie $(X,d)$, $(Y,\rho)$ spații metrice și $f: D\subseteq X \to Y$. Spunem că $f$ este uniform continuă pe $D$ dacă pentru $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall x,y\in D$ cu $d(x,y)<\delta_\varepsilon$ avem $\rho(f(x),f(y))<\varepsilon$

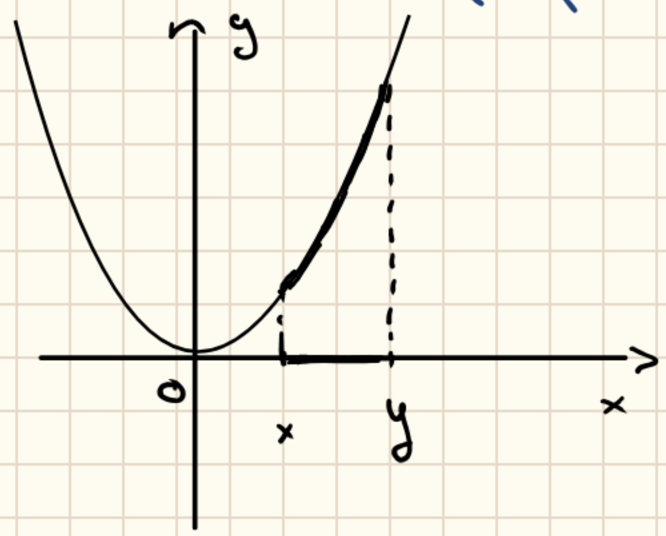
($f: D\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f$ uniform continuă dacă $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall x,y\in D$ cu $|x-y|<\delta_\varepsilon$ avem $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$)

OBS! O funcție uniform continuă pe D $\Rightarrow$ f continuă pe D

Intuitiv: două puncte apropiate în domeniu sunt apropiate în codom.



vs



ex $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=x^2$ continuă

$\delta>0$, $x,y$, $y=x+\delta$

$|x-y|=\delta$

$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x^2-(x+\delta)^2|$

$= |-2x\delta-\delta^2| = \delta|2x+\delta| \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

$\forall \delta>0, \exists x_\delta>0$ a.î. $|x_\delta-(x_\delta+\delta)|<\delta$

$\Downarrow$ $\qquad |f(x_\delta)-f(x_\delta+\delta)|>\delta$

nu este uniform continuă

ex: $f:(0,1)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$

$\left|\frac{1}{2n\pi}-\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\left|f\left(\frac{1}{2n\pi}\right)-f\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\right| = 1$

$\Downarrow$

nu este uniform cont

**Propoziție:** Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Atunci $f$ este uniform continuă pe $D$ dacă și numai dacă $\forall (x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subseteq D$ cu $(x_n - y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, avem $(f(x_n) - f(y_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\underset{?(-)}{}$

**Def:** Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. $f$ se numește lipschitziană (funcție Lipschitz) dacă $\exists \alpha > 0$ a.î. $|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|, \forall x, y \in D$.

Pt spații metrice: $\delta(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y), \forall x, y \in D$ $f: D \subset (X, d) \to (Y, \delta)$

$\alpha \in (0,1)$ se numește contracție

**Propoziție:** $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitziană $\Rightarrow f$ uniform cont. pe $D$

**Teorema (Cantor)**

Fie $K \subseteq \mathbb{R}$, $K$ compactă, $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă. Atunci $f$ este uniform continuă pe $K$

**Pentru exerciții:**

1) $\forall$ funcție continuă pe interval compact este uniform continuă pe acel interval

2) O funcție uniform continuă duce un șir Cauchy într-un șir Cauchy (Fie $f: H \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ și $(x_n)_n \subset H$ Cauchy ($\Leftrightarrow$ converg ~ sunt pe $\mathbb{R}$). Dacă $f(x_n)_n$ nu este șir Cauchy $\Rightarrow f$ nu este unif. cont pe $H$)

3) Fie $f: H \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $f$ uniform continuă pe $H$

b) $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \subset H$ a.î. $x_n - y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

!! Dacă găsim $x_n, y_n$ cu $x_n - y_n \longrightarrow 0$ dar cu $f(x_n) - f(y_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f$ nu este uniform continuă

4) Orice funcție Lipschitz este uniform continuă.

Corolar: Se aplică Lagrange. Orice funcție derivabilă cu derivată mărginită este lipschitz => uniform continuă

5) Fie $f: I \cup J \longrightarrow \mathbb{R}$, $J \cap J \neq \emptyset$ și $f$ uniform continuă pe $I$ și $J$ => $f$ uniform continuă pe $I \cup J$

6) Fie $f: (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Atunci $f$ uniform continuă pe $(a, b] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \bar{f}: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă a.î. $\bar{f}|_{(a,b]} = f$ ($f$ se poate prelungi prin continuitate)

Ex: 1) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \ln x$

fie $(x_n)_n \subset (0, \infty)$ $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ convergent => Cauchy
$f(x_n) = \ln(\frac{1}{n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ divergent
=> nu este uniform continuă

$f: (0, 1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ => nu există => nu există $\bar{f}: [0, 1] \to \mathbb{R}$ a.î.
$\bar{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in (0, 1]$ și $\bar{f}$ continuă => nu este uniform continuă

$f: (0, 1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x \cdot \frac{1}{x}$

$$\text{fie } \bar{f}: [0, 1] \to \mathbb{R},\ \bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{f} \text{ continuă} \Rightarrow$$

=> $f$ uniform continuă

ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x$

$f$ continuă pe $\mathbb{R}$, $f$ funcție derivabilă, $f'(x) = \cos x$

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow f'(x)$ funcție mărginită $\Rightarrow \sin x$ unif. cont

ex: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

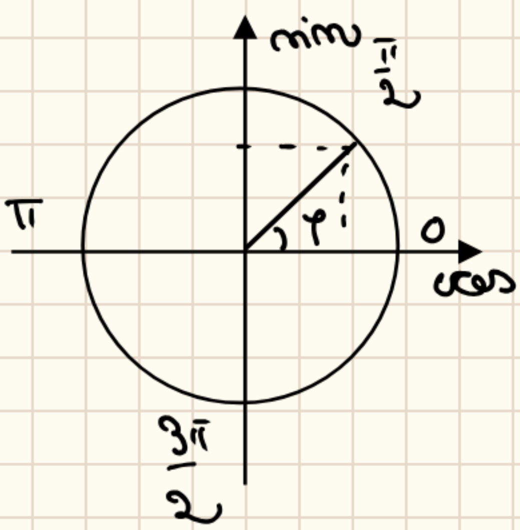
$g(x) = x$

$g$ cont pe $\mathbb{R}$, $g$ derivabilă $\Rightarrow g'(x) = 1$ mărg $\Rightarrow$ unif. converg.

ex: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$h(x) = x \sin x$

$h'(x) = \sin x + x \cos x \Rightarrow$ nu este mărginită.




$$\left.\begin{array}{l} x_n = 2n\pi + \frac{1}{n} \\ y_n = 2n\pi \end{array}\right| \Rightarrow x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$$

$$f(x_n) - f(y_n) = \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)\sin\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) - 2n\pi \sin(2n\pi) =$$

$$= 2n\pi \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \not\to 0$$

ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$ funcția este continuă

$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin \frac{1}{x} -}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \Rightarrow$ nu există derivată în 0.

$$f: \underbrace{(-\infty,-1]}_{\substack{\text{derivată} \\ \text{finită}}} \cup \underbrace{[-1,1]}_{\text{continuă pe compact}} \cup \underbrace{[1,\infty)}_{\text{derivată finită}} \to \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ uniform continuă pe $\mathbb{R}$

ex: $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^{\alpha}, \ \alpha > 0$ (pt $\alpha \le 1$, $\alpha > 1$)

pt $\alpha \le 1$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha \cdot \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ $\Rightarrow$ mărginită pe partea cu infinit

$\underbrace{[0,1]}_{\text{cont. pe compact}} \cup [1,\infty)$

pt $\alpha > 1$ $\rightsquigarrow$ nu ar trb. să fie unif. converg.

folosind Lagrange:

fie $[a,b] \subset [0,\infty) \Rightarrow |f(a)-f(b)| = f'(c)|b-a|$

$\Rightarrow f(a)-f(b) = \alpha c^{\alpha-1}(b-a)$.

fie $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$, pt $\forall \delta_\varepsilon > 0$, $x_1 = \frac{1}{\delta^{\frac{1}{\alpha-1}}}$, $x_2 = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{\delta^{\frac{1}{\alpha-1}}}$

$|x_2 - x_1| = \frac{1}{2}\delta$

neapărat? altfel pare fair.

$|f(x_2) - f(x_1)| = \alpha \cdot c^{\alpha-1} \frac{1}{2}\delta \geq \frac{\alpha}{2} = \varepsilon$

# Șiruri de funcții continue

## Teoremă (Weierstrass)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, astfel încât $f_n$ continue în $x_0$, $\forall n \geq 1$ și $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe $A$. Atunci $f$ continuă în $x_0$.

$$\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \\ f_n \text{ cont. în } x_0 \end{array}\right| \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0$$

**Corolar:** Dacă $f_n$ continue în $x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $f$ nu este continuă în $x_0$, atunci $f_n$ NU converg uniform la $f$.

OBS! Convergența uniformă păstrează continuitatea.

## Teorema (Dini)

Fie $K$ compact, $K \subset \mathbb{R}$, $f_n, f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, astfel încât $f_n$ și $f$ continue $\forall n \geq 1$, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ și $f_n \leq f_{n+1}$, $\forall n \geq 1$ (sau $f_n \geq f_{n+1}$, $\forall n \geq 1$). Atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

**Def:** Fie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se numește polinomul BERNSTEIN de ordin $n$ asociat funcției $f$ și se notează:

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

## Teorema (Bernstein)

Fie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f$ continuă. Atunci $B_n^f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe $[0,1]$ (adică există un șir de polinoame care converge uniform la $f$.)

**Corolar:** Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Atunci există un șir de funcții polinomiale $(f_n)_{n \geq 1}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ pe $[a,b]$.

OBS! $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, astfel încât $\exists f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n$ funcții polinomiale cu $f_n \xrightarrow{u} f$. Atunci $f$ este funcție polinomială.

## Teoremă

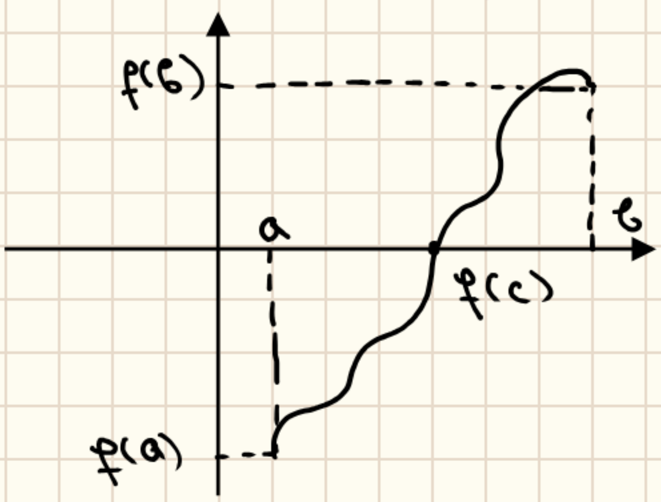
Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f$ continuă. Atunci, $f([a,b]) = [m, M]$, unde $m, M \in \mathbb{R}$, $m \le M$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă} \\ [a,b] \text{ compact} \end{array}\right| \Rightarrow f([a,b]) \text{ compact} \Leftrightarrow f \text{ mărginită și}$$

închisă (își atinge marginile) $\Leftrightarrow$ $f([a,b])$ interval

## Lemă:

Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă și $f(a)\cdot f(b) < 0$. Atunci, $\exists c \in [a,b]$ a.î. $f(c) = 0$.




## Funcții cu proprietatea lui Darboux

Def: Fie $I$ un interval nedegenerat, $I \subseteq \mathbb{R}$ și $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$. Spunem că $f$ are proprietatea lui Darboux, dacă $\forall x, y \in I$ $(x<y)$, $\forall \lambda \in [\min(f(x), f(y)), \max(f(x), f(y))]$ $\exists c_\lambda \in [x,y]$ a.î. $f(c_\lambda) = \lambda$

Proprietate: Fie $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă, $I$ interval nedegenerat. Atunci $f$ are proprietatea lui Darboux

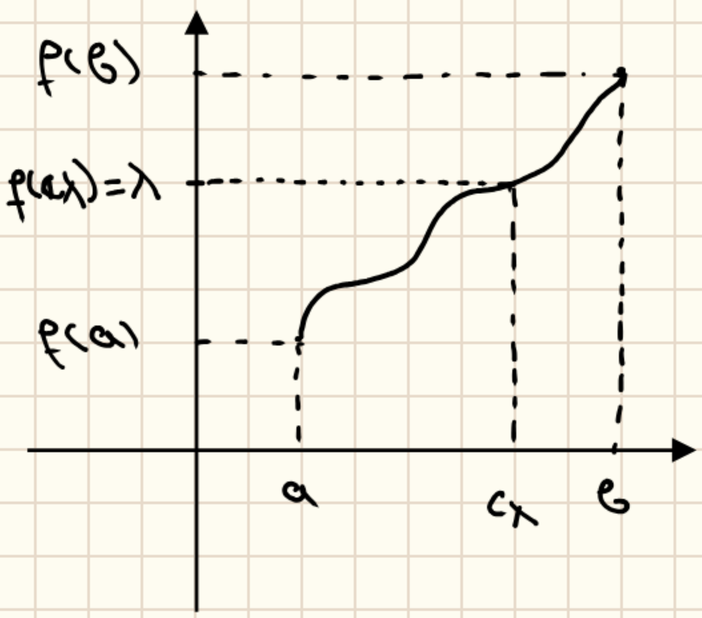
**Proprietate:** Fie $J$ interval nedegenerat și $f: J \longrightarrow \mathbb{R}$. Sunt echivalente următoarele afirmații:

- $f$ are proprietatea lui Darboux.
- $\forall\, \mathcal{J}$ interval, $\mathcal{J} \subseteq J$ avem $f(\mathcal{J})$ este interval

duce interval în interval

**Proprietate:** Fie $I$ interval, $J \subseteq \mathbb{R}$, $f: J \longrightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux și $f$ injectivă. Atunci $f$ strict monotonă.

OBS! $\left.\begin{array}{l} f \text{ injectivă} \\ f \text{ are Darboux} \end{array}\right| \Rightarrow f$ continuă



# Limite de funcții

**Def:** Fie $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ spații topologice, $A \subseteq X$, $f: A \longrightarrow Y$, $a \in A'$ ($A'$ = punctele de acumulare ale lui $A$). Spunem că $f$ are limită $\ell \in Y$ în punctul $a$, dacă $\forall V \in \mathcal{V}_\ell$, $\exists U \in \mathcal{V}_a$ a.î. $\forall x \in U \cap A$, $x \neq a$, $f(x) \in V$.

Notație: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

**Afirmații echivalente:**

- $f$ are limita $\ell$ în punctul $a$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$)
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in A$, $d(x, a) < \delta_\varepsilon$ ($x \neq a$) avem $\rho(f(x), \ell) < \varepsilon$
- $\forall (x_n)_{n \geq 1} \subseteq A$, $x_n \neq a$, $\forall n \geq 1$, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ avem $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$

**Propoziție:** Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A'$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ dacă:
- $\forall V \in \mathcal{V}_\ell$, $\exists U_V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $\forall x \neq a \in U \cap A$, $f(a) \in V$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \neq a \in A, |x - a| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - \ell| < \varepsilon$
- $\forall (x_n)_{n \geq 1} \subseteq A$, $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ avem $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$

**Propoziție:** $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$. Atunci $f$ continuă în $a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

OBS! Dacă $Y$ este Hausdorff, dacă există limita, ea este unică.

**Propoziție:** Fie $(X, \mathcal{T})$ spațiu topologic, $D \subseteq X$, $a \in D'$, $f, g: D \longrightarrow \mathbb{R}$. Presupunem că $f$ și $g$ au limite în punctul $a$. Atunci $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$ și $\alpha f$ au limită în punctul $a$ (finită):

- $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to a} f(x)|$
- $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} (\alpha f)(x) = \alpha \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Dacă, în plus, $f(x) \neq 0$, $\forall x \in D$ și $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) \neq 0$, atunci $\frac{1}{f}$ are limită în $a$ și $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

## Limite infinite și la infinit.

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$

* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in D \setminus \{a\}$ cu $|x-a| < \delta_\varepsilon$ avem $f(x) > \varepsilon \iff \forall (x_n)_{n \geq 1} \subseteq D \setminus \{a\}$ cu $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ avem $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in D \setminus \{a\}$ cu $|x-a| < \delta_\varepsilon$ avem $f(x) < -\varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $\forall x \in D \cap V, x \neq a, f(x) < -\varepsilon$

* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in D, x > \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in D, x < -\delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in D, x > \delta_\varepsilon$ avem $f(x) > \varepsilon$

## Limite laterale

Def: Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (D \cap (-\infty, a))'$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Spunem că $\ell$ este limita la stânga a funcției $f$ în punctul $a$ dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}_\ell$, $\exists U \in \mathcal{V}_a$ a.î. $\forall x \in U \cap (D \cap (-\infty, a))$ avem $f(x) \in V$.

$\left(\ell = \lim\limits_{x \to a} f\big|_{D \cap (-\infty, a)}(x)\right)$

Notăm: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$ → limita la stânga în punctul $a$.

**Teoremă**

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \in D'$. Atunci sunt echivalente afirmațiile:

- $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ și $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ (care au sens) și sunt egale.

Def: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$

a) Spunem că a este punct de discontinuitate de prima speță pentru f dacă există și sunt finite limitele laterale (cele care au sens) ale lui f în punctul a și cel puțin una diferă de $f(a)$.

b) Spunem că a este punct de discontinuitate de speța a doua pt f dacă a este punct de discontinuitate dacă a este punct de discontinuitate și nu este de prima speță.

**Teoremă (discontinuitățile unei funcții monotone)**

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, D interval nedegenerat, f monotonă.

Atunci:
- eventualele discontinuități ale lui f sunt de prima speță
- mulțimea discontinuităților este cel mult numărabilă.

**Teoremă (Froda)**

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, D interval nedegenerat. Atunci mulțimea discontinuităților de prima speță a lui f este cel mult numărabilă

**Propoziție:** Fie I interval nedegenerat, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f strict monotonă pe I și $f(I)$ interval. Atunci f este continuă pe I.

## Teoremă:

Fie $I$ interval nedegenerat, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow f(I)$, $f$ continuă și bijectivă. Atunci $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ este continuă.

## Teoremă (discontinuitățile unei funcții cu prop. lui Darboux)

Fie $I$ interval nedegenerat, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux. Atunci $f$ nu are discontinuități de speța I.

## Limite remarcabile

* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \ \forall a > 0, \ a \neq 1.$$

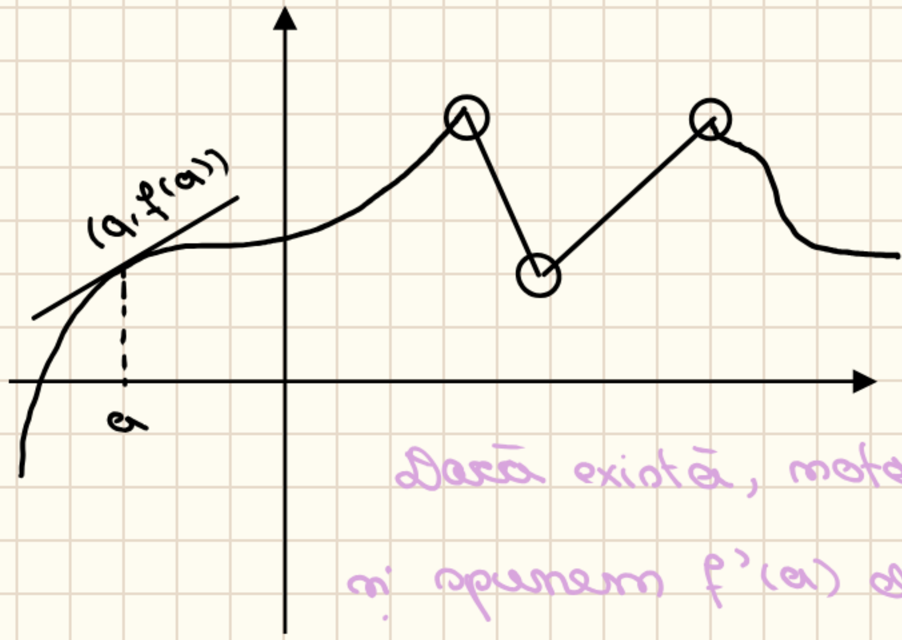
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

# Funcții derivabile



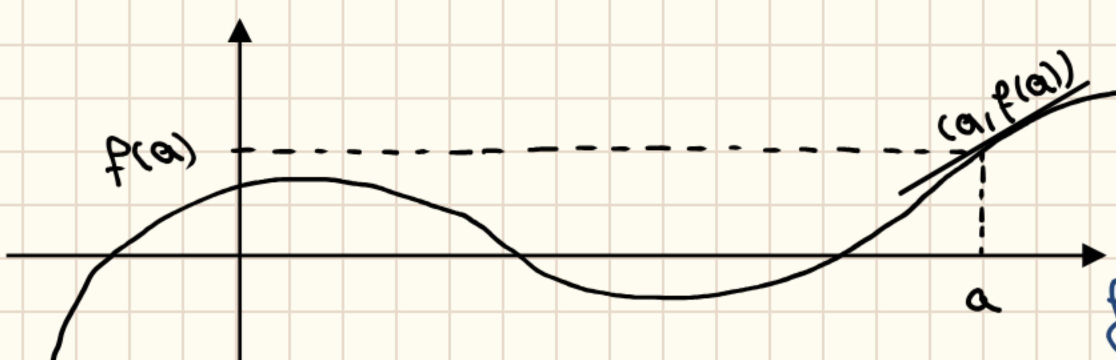

**Def:** Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$

1) Spunem că f este derivabilă în a dacă există $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$

Dacă există, notăm $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ și spunem $f'(a)$ derivata lui f în punctul a.

OBS! Punem problema de derivabilitate în punctele de acumulare din domeniu

2) Dacă există $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ și $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ spunem că f are derivată în a, dar nu este derivabilă în a.




f derivabilă în a $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ există tangentă la graficul funcției lui f în punctul $(a, f(a))$ și are panta $f'(a)$.

Ecuația tangentei în $(a, f(a))$ la graficul lui f este:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

**Def:** Spunem că f este derivabilă sau derivabilă pe D dacă f este derivabilă în orice punct din D.

OBS! I interval $\subseteq \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. Atunci f derivabilă în a

$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \geq 1} \subseteq I$, $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, șirul

$\left( \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a} \right)_{n \geq 1}$ este convergent

Def: I interval $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I^{\circ}$. Dacă există

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ (respectiv $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$) spunem că

f este derivabilă la dreapta (respectiv la stânga) în punctul a.

Notație: $f_s'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ → derivata la stânga

$f_d'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ → derivata la dreapta

OBS! f derivabilă ⟺ f derivabilă la stânga și la dreapta în a și $f_s'(a) = f_d'(a)$.

OBS! Dacă $a \in I$, $a = \inf I$, atunci a derivabilă în a ⟺ f derivabilă în dreapta în punctul a.

**Propoziție:** Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$, $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$. Atunci f derivabilă în a ⟹ f continuă în a

**Propoziție (operații algebrice cu funcții derivabile)**

Fie I interval nedegenerat, $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, f, g derivabile în punctul a. Atunci $f+g$, $fg$, $\alpha f$ sunt derivabile în a și

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$

În plus, dacă $g \neq 0$, $\forall x \in I$, atunci $\frac{f}{g}$ derivabilă în a și

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) g'(a)}{g^2(a)}$

**Propoziție (compunerea funcțiilor derivabile)**

Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale nedegenerate (capete diferite), $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(I) \subseteq J$, $a \in I$. Presupunem că $f$ derivabilă în $a$ și $g$ derivabilă în $f(a)$. Atunci $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în $a$ și $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

**Teoremă:**

Fie $I$ interval nedegenerat $\subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. Atunci $f$ este derivabilă în $a$ dacă și numai dacă $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ și există $\varepsilon_f : I \to \mathbb{R}$ continuă în $a$ astfel încât $\varepsilon_f(a) = 0$ și $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + \varepsilon_f(x)|x-a|$

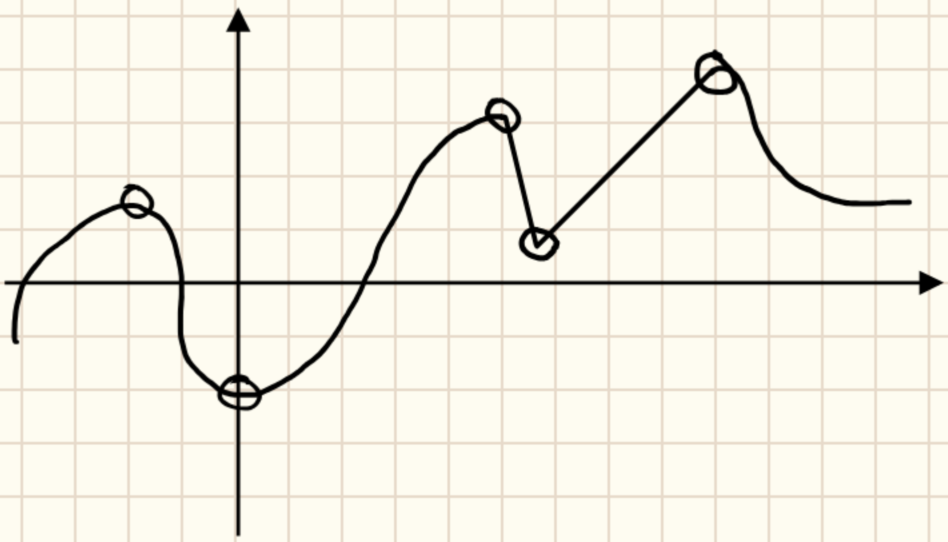
**Teoremă:**

Fie $I, J$ intervale nedegenerate $\subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow J = f(I)$, $a \in I$ astfel încât:
- $f$ strict monotonă
- $f$ derivabilă în $a$
- $f'(a) \neq 0$

Atunci $f^{-1} : J \longrightarrow I$ este derivabilă în $a$ și $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$

# Puncte de extrem local

**Def:** Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$, $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$. Punctul $a$ se numește punct de maxim (minim) local pentru funcția $f$ dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(x) \le f(a)$ (respectiv $f(x) \ge f(a)$) pentru $\forall x \in V \cap D$.



• $a$ se numește punct de extrem local al funcției $f$ dacă $a$ este maxim sau minim local

## Teorema lui Fermat

Fie $I$ interval nedegenerat, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathring{I}$ (interiorul lui $\mathring{I} = \{x \in I \mid \exists r > 0$ a.î. $(x-r, x+r) \subseteq I\}$) astfel încât $f$ derivabilă în $c$ și $c$ este punct de extrem local. Atunci $f'(c) = 0$.

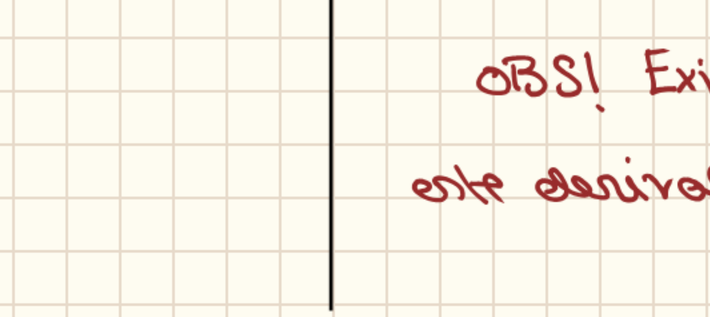
OBS! Condiția $c \in \mathring{I}$ este esențială

ex: $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x$, $x = 1 \Rightarrow$ punct de maxim global ($f(x) \le f(1)$, $\forall x \in [0,1]$)

$f'(x) = 1$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow f'(1) = 1 \neq 0$ ; $1 \notin \overset{\circ}{[0,1]}$

ex 2:

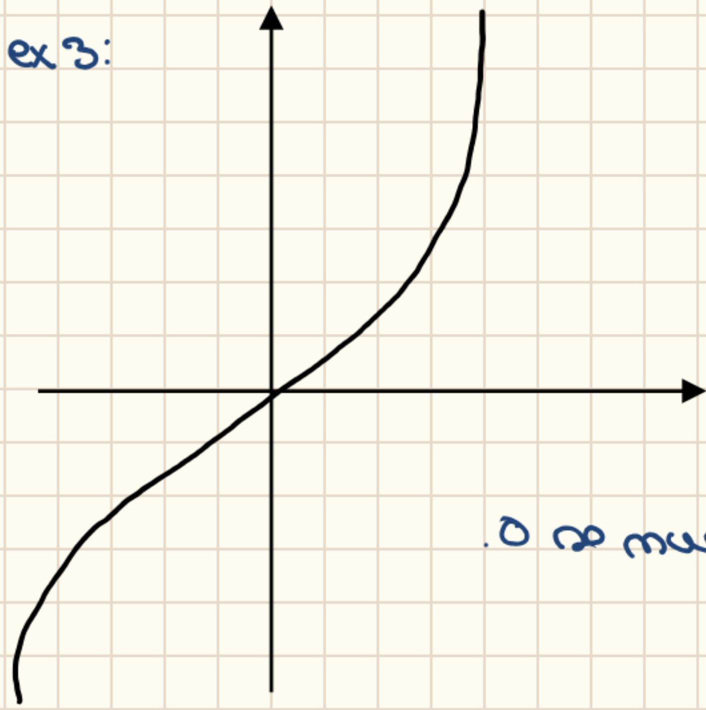


$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = |x|$, $x = 0$ punct de minim global

$f$ nu este derivabilă în $x = 0$

OBS! Există puncte de extrem în care funcția nu este derivabilă ex 3:



$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

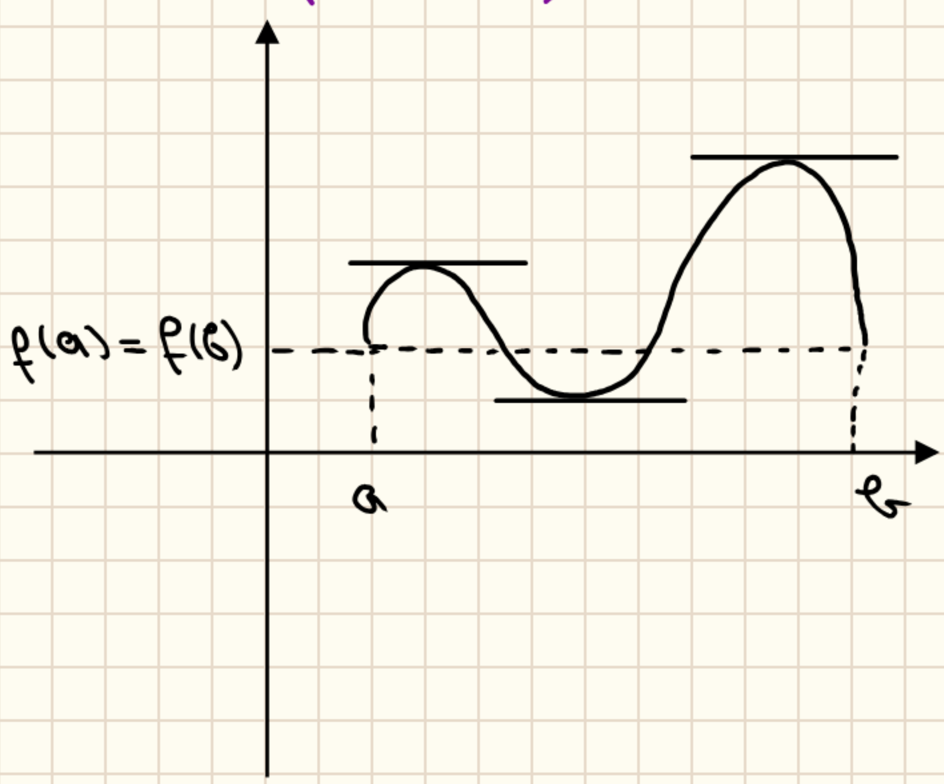
$f(x) = x^3$

$f(0) = 0$, dar 0 nu este punct de extrem local pt. $f$

0 se numește „punct șa"

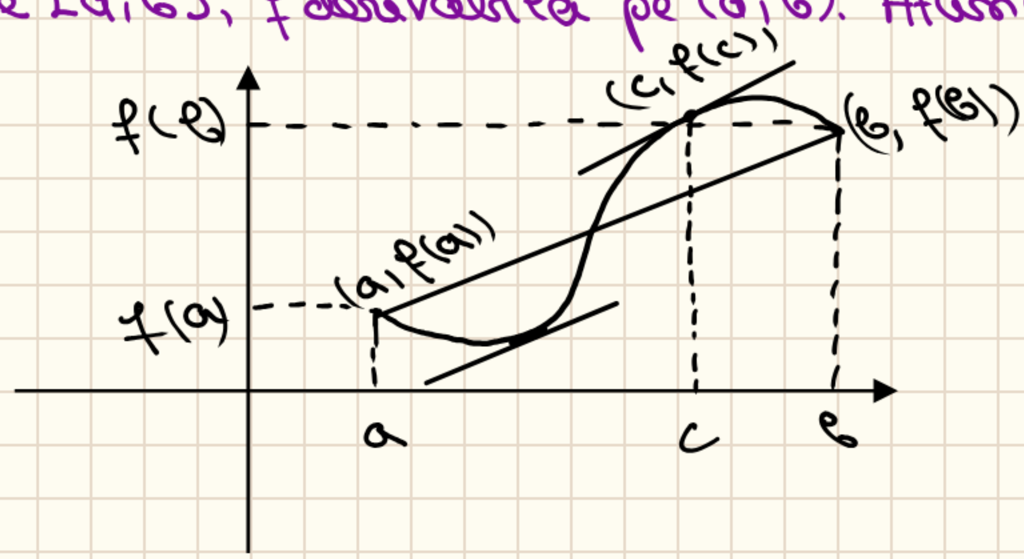
## Teorema lui Rolle

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f$ continuă pe $[a,b]$, $f$ este derivabilă pe $(a,b)$ și $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$




## Teorema lui Lagrange

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f$ continuă pe $[a,b]$, $f$ derivabilă pe $(a,b)$. Atunci există $c \in (a,b)$ a.î. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$



## Corolar 1:

Fie $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a,b \in \overline{\mathbb{R}}, a<b)$ derivabilă. Atunci:

1) $f$ crescătoare $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

$f$ descrescătoare $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$

2) $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ strict crescătoare

$f'(x) < 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strict descrescătoare

ex: $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 \Rightarrow f$ strict crescătoare

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$ deci $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

## Corolar 2

Fie $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a,b \in \overline{\mathbb{R}}, a<b)$ derivabilă. Atunci

$f$ strict crescătoare $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b) \\ \{x \in (a,b) / f'(x) > 0\} \text{ densă în } (a,b) \end{cases}$

## Corolar 3

Fie $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a,b \in \overline{\mathbb{R}}, a<b)$ derivabilă. Atunci $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ constantă

## Teorema lui Cauchy

Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f,g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f,g$ continue pe $[a,b]$ $f,g$ derivabile pe $(a,b)$ și $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$. Atunci $\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

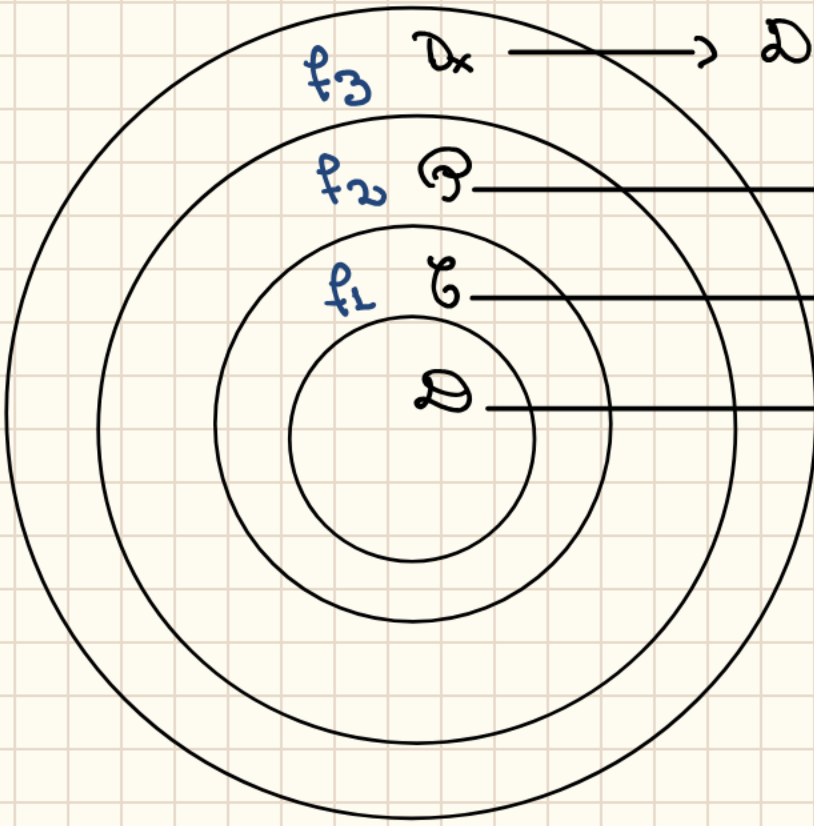
Def: Fie $I$ interval nedegenerat, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f:I \longrightarrow \mathbb{R}$. Spunem că $f$ admite primitive pe $I$, dacă există $F:I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă cu $F' = f$

## Teorema lui Darboux:

Fie $I$ interval nedegenerat, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă.

Atunci $f': I \longrightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

$\Leftrightarrow$ $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ g admite primitive. Atunci g are prop. lui Darboux




$\mathcal{D}_x = \{ f: I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ are prop. lui Darboux} \}$

$\mathcal{P} = \{ f: I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ admite primitive} \}$

$\mathcal{C} = \{ f: I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continuă} \}$

$\mathcal{D} = \{ f: I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă} \}$

ex: $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = |x|$ $\to$ continuă dar nederivabilă

$f_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_2(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\to$ admite primitive, nu este continuă

$f_3: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_3(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ $\to$ are proprietatea lui Darboux, nu admite primitive

(pt. $f_2$ admite și $f_3 = f_2 + \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ $\to$ nu are Darboux $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ nu are primitive

## Teorema lui l'Hospital

Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $I$ interval din $\mathbb{R}$ a.î. $(a,b) \subseteq I \subseteq [a,b]$, $x_0 \in I$.

Fie $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ $\quad \left( \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty \right)$

2) $f, g$ sunt derivabile $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

3) există $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci: i) $g(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

ii) există $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ $\quad (\exists V \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $g(x) \neq 0, \forall x \in V \cap I \setminus \{x_0\})$

## Corolar al th. Lagrange

$I$ interval nedegenerat, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ a.î.:

i) $f$ derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$

ii) $f$ continuă în $x_0$

iii) $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci $f$ are derivată în $x_0$ și $f'(x_0) = l$

# Derivabilitate de ordin superior

Fie I interval nedegenerat, $f: I \to \mathbb{R}$

$n = 1$ dacă f derivabilă pe I. Spunem că este derivata de ordin 1

$$f^{(1)} = f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow f'(x)$$

$n = 2$ f este de două ori derivabilă pe I dacă f este derivabilă pe I și $f'$ este derivabilă pe I

Spunem că f este de n ori derivabilă pe I dacă

$$\begin{cases} f \text{ este de } n-1 \text{ ori derivabilă pe } I \\ f^{(n-1)} \sim \text{derivata de ordin } n-1 \text{ este derivabilă pe } I. \end{cases}$$

$(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$ se numește derivata de ordin n a funcției f

Fie $a \in I$. Spunem că f este de n ori derivabilă în a dacă $\exists U \in \mathcal{V}_a$ a.î. f este de n ori derivabilă pe $U \cap I$ și $f^{(n-1)}$ este derivabilă în a

**Def:** Fie I interval nedegenerat $\subseteq \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, f de n ori derivabilă pe I, $a \in I$. Numim polinomul Taylor de rang n asociat funcției f și punctului a:

$$T_{f,a,n}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$T_{f,a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Numim restul Taylor de rang n asociat funcției f și punctului a în x:

$$R_{f,a,n} = f(x) - T_{f,a,n}(x), \ \forall n \in I$$

OBS! $\forall x \in I$, $f(x) = T_{f,a,n}(x) + R_{f,a,n}(x)$

## Teorema Taylor

Fie $I$ interval nedegenerat, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ de $n+1$ ori derivabilă pe $I$ ($n \in \mathbb{N}$), $a \in I$. Atunci pentru $\forall x \in I$, există $x^*$ între $a$ și $x$ astfel încât:

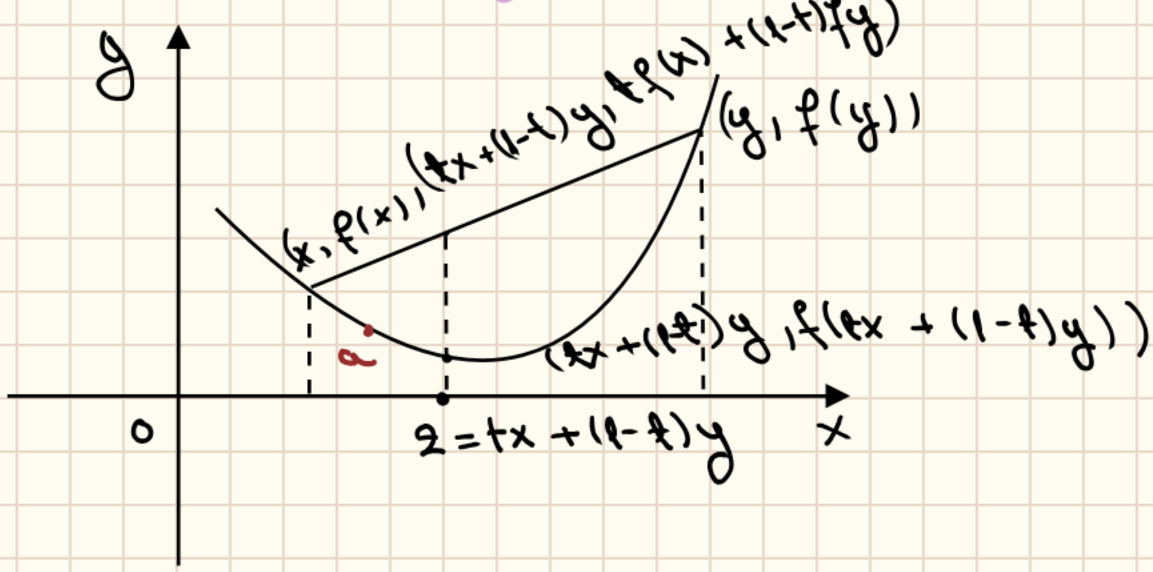
$$R_{f,a,n} = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \; x^* \in (a,x)$$

$f$ infinit derivabilă $\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x)$

# Funcții convexe și concave

**Def:** Fie $I$ interval nedegenerat, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ se numește convexă dacă $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$




**Propoziție:** Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $I$ interval. Atunci sunt echivalente afirmațiile:

1) $f$ convexă

2) $\forall x < y < z$, $x, y, z \in I$

$x < y < z$

$y = tx + (1-t)z$, $t \in [0,1]$

$$\begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \\[2ex] \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} \\[2ex] \dfrac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z} \end{cases}$$

OBS! $f$ convexă pe $I \Leftrightarrow$ funcție $s_a: I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$

sunt crescătoare, $\forall a \in I$ $\qquad x \longrightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = s_a(x)$

**Propoziție:** $f: I \to \mathbb{R}$ convexă $\Rightarrow f$ continuă pe $I$

$\Rightarrow f$ are derivate laterale finite

$\forall x \in I^{\circ}$ și $x < y \Rightarrow f'_s(x) \leq f'_d(x) \leq f'_s(y) \leq f'_d(y)$

## Șiruri de funcții derivabile

- $I$ interval

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$

este adevărat că $f$ este derivabilă?

NU! (vezi Th. Bernstein)

## Teoremă privind șirurile de funcții derivabile

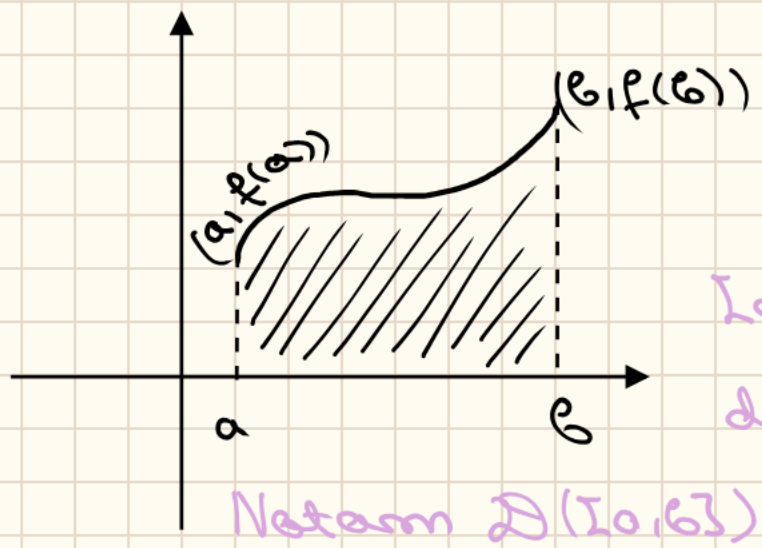
Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$ astfel încât:

- $f_n$ derivabilă pe $[a,b]$, $\forall n \geq 1$
- $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{u} g$, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
- $\exists\, x_0 \in [a,b]$ a.î. $(f_n(x_0))_{n\geq 1}$ convergent

Atunci: i) $\exists\, f : [a,b]$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$

ii) $f$ derivabilă și $f' = g$

# Funcții integrabile Riemann



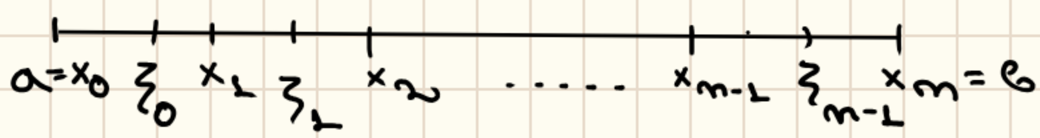

**Def**: Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

1) Se numește diviziune a intervalului $[a,b]$ un sistem ordonat de puncte $d = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ $\quad (d = (x_i)_{i=\overline{0,n}})$

Notăm $\mathcal{D}([a,b])$ = mulțimea tuturor diviziunilor pe $[a,b]$.

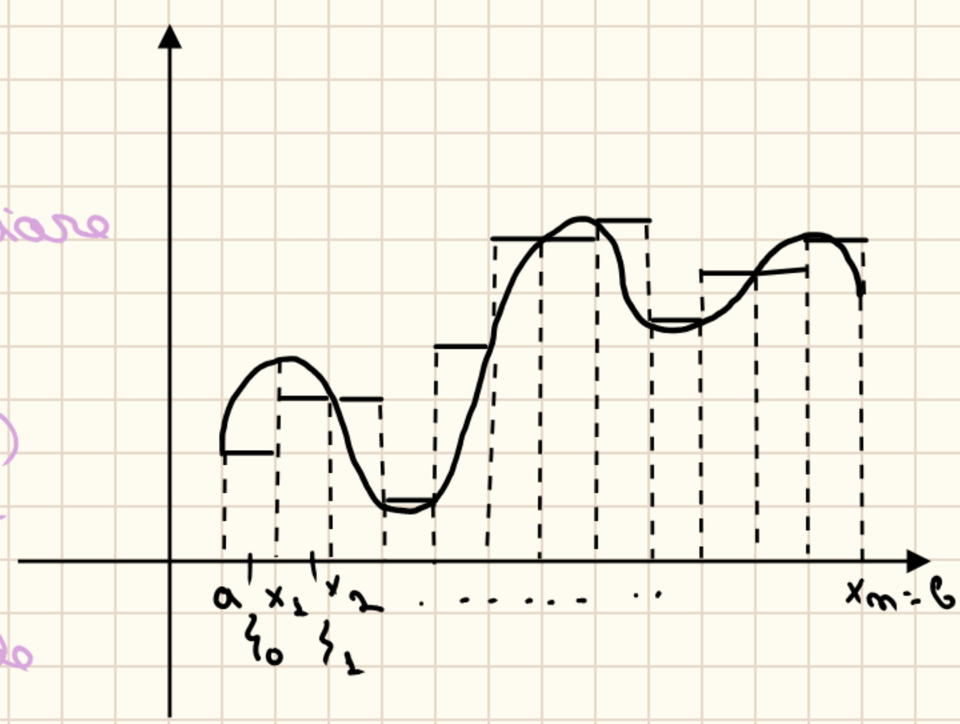
2) Numărul $\|d\| = \sup\{x_{i+1} - x_i \,/\, i \in \{0,1,2 \ldots n-1\}\} = \max\{x_{i+1} - x_i \,/\, i \in \{0,1 \ldots n-1\}\}$ se numește norma diviziunii

3) Fie $d \in \mathcal{D}([a,b])$, $d = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ Se numește sistem de puncte intermediare asociat diviziunii $d$, un sistem de puncte $(\xi_i)_{i=\overline{0,n-1}}$ unde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\forall i \in \{0,1 \ldots n-1\}$




4) $d = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b) \in \mathcal{D}([a,b])$, $(\xi_i)_{i=\overline{0,n-1}}$ sistem de puncte intermediare asociat lui $d$.

Numărul $\sigma_d(f,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ se numește suma Riemann asociată funcției $f$, diviziunii $d$ și sistemului de puncte intermediare $\xi$




5) Fie $d, \delta \in \mathcal{D}([a,b])$ spunem că $d$ este mai fină decât $\delta$ (notăm: $d < \delta$, $\delta \leq d$, $\delta \leq d$) dacă toate punctele de diviziune ale lui $\delta$ se află printre cele ale lui $d$ ($d$ este o rafinare a lui $\delta$)

OBS! $\delta \leq d \Rightarrow \|\delta\| \geq \|d\|$

OBS! Fie $d_1, d_2 \dots d_p \in \mathcal{D}([a,b])$, $\varepsilon > 0$. Atunci există $d \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|d\| < \varepsilon$ a.î. $d_i \leq d$, $\forall i \in \{1 \dots p\}$

Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mărginită. $d = (a = x_0 < x_1 \dots < x_m = b) \in \mathcal{D}([a,b])$.

Notez $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$, $\forall i = \{0, 1 \dots m-1\}$

6) Numărul $S_d(f) = U(f,d) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$ se numește suma Darboux superioară asociată funcției $f$ și diviziunii $d$.

Numărul $s_d(f) = L(f,d) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$ se numește suma Darboux inferioară asociată funcției $f$ și diviziunii $d$

OBS! $f, g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $d \in \mathcal{D}([a,b])$, $\xi$ mult. de pct. intermediare asociat lui $d$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1) $\sigma_d(\alpha f + \beta g, \xi) = \alpha \sigma_d(f, \xi) + \beta \sigma_d(g, \xi)$

2) $f \leq g \Rightarrow \sigma_d(f, \xi) \leq \sigma_d(f, \xi)$

3) $s_d(f) \leq \sigma_d(f, \xi) \leq S_d(f)$

4) $S_d(\alpha f) = \alpha S_d(f)$ ; $(s_d(\alpha f) = \alpha s_d(f)$, $\forall \alpha \geq 0)$

5) $S_d(f+g) \leq S_d(f) + S_d(g)$

$s_d(f+g) \geq s_d(f) + s_d(g)$

6) $S_d(-f) = -s_d(f)$ ; $s_d(-f) = -S_d(f)$

7) Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ spunem că $f$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă $\exists I \in \mathbb{R}$ a.î. pentru $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta_\varepsilon > 0$ cu prop. că $\forall d \in \mathcal{D}([a,b])$, $\|d\| < \eta_\varepsilon$ și $\forall \xi$ mult. de pct. intermediar asociat lui $d$, avem:

$|\sigma_d(f, \xi) - I| < \varepsilon$

Numărul I este unic determinat (dacă există), și se numește integrala Riemann a funcției f și se notează:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

**Proprietatea 1:** Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, atunci f este mărginită.

**Proprietate 2:** Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $d, \delta \in [a,b]$. Atunci

1) $\delta < d \Rightarrow \begin{cases} s_d(f) \geq s_\delta(f) \\ S_d(f) \leq S_\delta(f) \end{cases}$

2) $s_d(f) \leq S_\delta(f)$

Def: 1) Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mărginită. Numărul $\sup\limits_{d \in \mathcal{D}([a,b])} s_d(f)$ se numește integrala Darboux inferioară a lui f și se notează:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx = L(f)$$

Numărul $\inf\limits_{d \in \mathcal{D}([a,b])} S_d(f)$ se numește integrala Darboux superioară a lui f și se notează:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (U)\int_a^b f(x)\,dx = U(f)$$

2) Spunem că f este integrabilă Riemann dacă $L(f) = U(f)$

# Criterii de integrabilitate Riemann

**Proprietatea 3:** Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrabilă Riemann, $(d_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathcal{D}([a,b])$ astfel încât $\|d_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $\xi^{(n)}$ sistem de puncte intermediare asociat lui $d_n$, $\forall n\geq 1$. Atunci:

$$\sigma_{d_n}(f,\xi^{(n)})\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$S_{d_n}(f)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$s_{d_n}(f)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{d\in\mathcal{D}([a,b])} s_d(f)=\int_a^b f(x)\,dx=\inf_{d\in\mathcal{D}([a,b])} S_d(f)$$

**Proprietatea 4:** Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ mărginită. Atunci pt. orice $\varepsilon>0$, $\exists\,\eta_\varepsilon>0$ astfel încât $\forall d\in\mathcal{D}([a,b])$, $\|d\|<\eta_\varepsilon$ avem $S_d(f)-\overline{\int_a^b} f(x)<\varepsilon$ și $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-s_d(f)<\varepsilon$.

## Criteriul lui Cauchy

Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Atunci $f$ este integrabilă Riemann dacă și numai dacă $\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\eta_\varepsilon>0$ a.î. $|\sigma_d(f,\xi)-\sigma_{d'}(f,\xi')|<\varepsilon$ pentru orice $d,d'\in\mathcal{D}([a,b])$, $\|d\|<\eta_\varepsilon$, $\|d'\|<\eta_\varepsilon$ și orice $\xi,\xi'$ sisteme de puncte asociate lui $d$ respectiv $d'$

## Criteriul lui Darboux

Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ mărginită. Atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

1) $f$ integrabilă Riemann

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

3) pentru $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, d\in\mathcal{D}([a,b])$ a.î. $S_d(f)-s_d(f)<\varepsilon$

4) pentru $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\eta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall d\in\mathcal{D}([a,b])$, cu $\|d\|<\eta_\varepsilon$, $S_d(f)-s_d(f)<\varepsilon$

## Operații algebrice cu funcții integrabile

**Propoziția 5:** Fie $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, integrabile Riemann, $\alpha\in\mathbb{R}$.
Atunci $f+g$, $fg$, $\alpha f$, $|f|$ sunt integrabile Riemann și

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

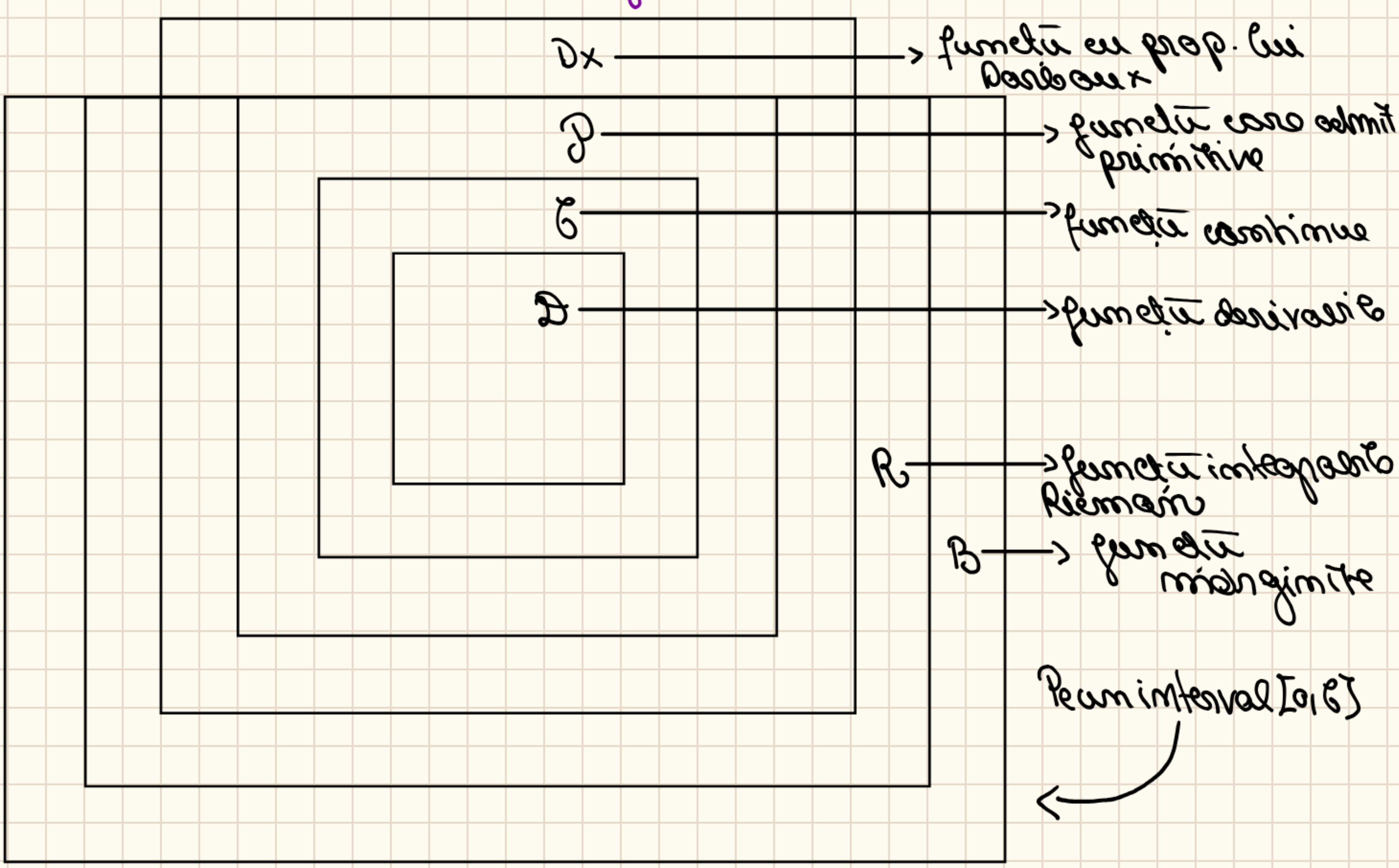
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx$$

În plus, dacă există $\alpha>0$ a.î. $|f(x)|\geq\alpha$, $\forall x\in[a,b]$ atunci $\frac{1}{f}$ este integrabilă Riemann.

**Propoziția 6:** Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Atunci

1) $f$ monotonă $\Rightarrow$ $f$ integrabilă Riemann

2) $f$ continuă $\Rightarrow$ $f$ integrabilă Riemann



## Teorema Leibnitz-Newton:

Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabilă Riemann, $f$ admite primitive. Atunci $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, pentru $F$ o primitivă a lui $f$

## Teorema de integrare prin părți:

Fie $f, g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f, g$ derivabile pe $[a,b]$ și $f', g'$ integrabile Riemann. Atunci $f'g$ și $fg'$ sunt integrabile Riemann și $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \overset{\text{not}}{=} fg\Big|_a^b$

## Teorema 3:

Fie $f_n:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile Riemann, $n \geq 1$, $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$. Atunci:

1) $f$ integrabilă Riemann
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

**Propoziție:** $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f$ integrabilă Riemann. Dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Dacă $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$. În plus $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

## Teoremă (teorema de convergență dominată)

$f, f_n:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$ a.î. $f_n$ integrabilă, $f$ integrabilă $f_n \xrightarrow{p} f$, $\exists M > 0$ a.î. $|f_n(x)| < M$, $\forall x \in [a,b]$, $\forall n \geq 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f$$

**Propoziție:** Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$. Atunci $f$ integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă și numai dacă $f$ este integrabilă Riemann pe $[a,c]$ și $[c,b]$. În plus $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

**Teoremă 4:**

Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrabilă Riemann. Definim $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Atunci:

1) $F$ continuă pe $[a,b]$

2) $x_0\in[a,b]$ și $f$ este continuă în $x_0$, atunci $F$ este derivabilă în $x_0$ și $F'(x_0)=f(x_0)$.

OBS! Fie $I$ interval, $f$ admite primitive. Atunci $F:I\longrightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ pt $a\in I$ este o primitivă a lui $f$.

**Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann**

Def: Fie $A\subseteq\mathbb{R}$ se numește neglijabilă Lebesgue dacă pentru $\forall\varepsilon>0$, $\exists(J_n)_{n\geq1}$ șir de intervale $J_n=(a_n,b_n)$, $\forall n\geq1$ cu

1) $A\subseteq\bigcup_{n\geq1}J_n$

2) $\sum_{n\geq1}\ell(J_n)=\sum_{n\geq1}(b_n-a_n)<\varepsilon$

OBS! Putem lua $J_n=[a_n,b_n]$

Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ mărginită. Atunci sunt echivalente afirmațiile:

1) $f$ integrabilă Riemann

2) $\begin{cases}\text{mulțimea discontinuităților lui } f \text{ este neglijabilă Lebesgue}\\ f \text{ mărginită}\end{cases}$

## Exemple de mulțimi neglijabile Lebesgue

### 1) A finită

$A = \{x_1, x_2 \dots x_p\}$

$x_1 \in [x_1 - \frac{\varepsilon}{2p}, x_1 + \frac{\varepsilon}{2p}] = I_1$

$\vdots$

$x_p \in [x_p - \frac{\varepsilon}{2p}, x_p + \frac{\varepsilon}{2p}] = I_p$

$I_n = \emptyset = (a, a) \quad (J_n = [a, a]) \quad \forall n \geq p$

### 2) A numărabilă

$A = \{x_n \mid n \geq 1\}, \ \varepsilon > 0$

$x_n \in [x_n - \frac{\varepsilon}{n^2}, x_n + \frac{\varepsilon}{n^2}] \rightsquigarrow \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\sum\limits_{n \geq 1} \ell(J_n) = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{2\varepsilon}{n^2} = 2\varepsilon \sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \Rightarrow 2\varepsilon \cdot \frac{\pi^2}{6} = \varepsilon \frac{\pi^2}{3}$

3) Mulțimea Cantor $\rightarrow$ nenumărabilă

$[0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \rightsquigarrow [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ și tot așa

OBS! 1) $A \subseteq B$, $B$ neglijabilă Lebesgue $\Rightarrow$ $A$ neglijabilă Lebesgue

2) $A, B$ neglijabile Lebesgue $\Rightarrow$ $A \cup B$ neglijabilă Lebesgue

3) $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A_n$ neglijabile Lebesgue $\forall n \geq 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{n \geq 1} A_n$ neglijabilă Lebesgue.

# Noțiuni de topologie

$x, y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ ⇝ $d$ distanță pe $\mathbb{R}$

$B(x,y)_r = \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < r\} = (x-r, x+r)$

Fie $a \in \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq V_a$, $V$ vecinătate pentru $a$, dacă

$\exists\ \varepsilon > 0$ a.î. $a \in \underset{B(a,\varepsilon)}{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)} \subseteq V$

$\exists\ G$ deschisă a.î. $a \in G \subseteq V$

$V_a = \{V \subseteq \mathbb{R} \mid V$ vecinătate a lui $A\}$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$a$ = pct. de acumulare $\Leftrightarrow \forall V \subseteq V_a$, $V \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$

$A' = \{a \in \mathbb{R} \mid a$ pct. de acumulare pe $A\}$

$a$ = pct. aderent / de aderență $\Leftrightarrow \forall V \subseteq V_a$, $V \cap A \neq \emptyset$

$\overline{A} = \{a \in \mathbb{R} \mid a$ pct. de aderență pe $A\}$

Propoziție: $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Atunci:

1) $a$ pct. de acumulare pe $A$

$\Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \geq 1} \subseteq A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

2) $a$ pct. de aderență pe $A$

$\Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \geq 1} \subseteq A$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

OBS! $\overline{A}$ este mulțime închisă, $A \subseteq \overline{A}$

$\overline{A}$ cea mai mică mulțime care îl conține pe $A$

$\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F$ $\Rightarrow$ $A$ închisă $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

$A \subseteq \mathbb{R}$, A deschisă $\Rightarrow \forall a \in A\ \exists \varepsilon > 0$ a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = B(a,\varepsilon) \subseteq A$

A deschisă $\Leftrightarrow A = A^{\circ}$ (interiorul ei)

**Teoremă de structură a mulțimilor din $\mathbb{R}$**

$G \subseteq \mathbb{R}$, Atunci G deschisă $\Leftrightarrow$ G este o reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise, disjuncte două câte două.

$(X, \mathcal{T})$ sp. topologic, $A \subseteq X$

A compactă dacă $\forall \{G_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$, $A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$, $\exists J$ finită $J \subseteq I$, astfel încât $A \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$

$A \subseteq \mathbb{R}$, A compactă $\Leftrightarrow$ A închisă și mărginită (t. Heine-Borel)

A compactă $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \geq 1} \subseteq A$, există un subșir $(x_{k_n})_{n \geq 1}$ convergent, cu $x_{k_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} x \in A$ (în spațiu metric)

$(X, \mathcal{T})$ sp. topologic. A conexă $\Leftrightarrow$ A nu e neconexă $\Leftrightarrow$

(A neconexă $\Leftrightarrow \exists A_1, A_2 \neq \emptyset$ a.î. $A_1 \cup A_2 = A$, $\underbrace{\overline{A_1} \cap A_2 = A_1 \cap \overline{A_2} = \emptyset}_{\text{nonseparate} > \text{disjuncte}}$

$A \subseteq \mathbb{R}^p$. A conexă $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$ există o linie poligonală de capete x și y

A deschisă

$A^{\circ} \neq \emptyset$

$A \subseteq \mathbb{R}$ A conexă $\Leftrightarrow$ A interval