CURS#3

4. Metoda de eliminare Gauss (MEG):
   (iii) MEG cu pivotare parţială scalată: descrierea metodei; algoritm;
   (iv) MEG cu pivotare totală: descrierea metodei; algoritm.
5. Metoda Gauss-Jordan: descriere; algoritm.
6. Factorizarea LU fără pivotare: motivaţie; complementul Schur asociat minorului principal (matricei de colţ) de ordin k).

PROBLEME

1) Fie $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă cu $a_{11} \neq 0$ şi considerăm partiţionarea sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \tag{1a}$$

unde

$$\mathbf{A}_{12} \coloneqq \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}), \tag{1b}$$

$$\mathbf{A}_{21} \coloneqq \begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n-1}. \tag{1c}$$

$$\mathbf{A}_{12} \coloneqq \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}). \tag{1d}$$

Atunci complementul Schur asociat lui a_{11}, definit prin

$$\mathbf{S} \coloneqq \mathbf{A}_{22} - \frac{1}{a_{11}} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{12} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \tag{2}$$

este o matrice inversabilă.

OBS (limitarea MEGPP):

$$\begin{cases} 2x_1 + 2C x_2 = 2C, & C = O(10^{200}), \\ x_1 + \quad x_2 = 2 & \text{ie } C \pm 1 \simeq C \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2C & 2C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{(E_2 - \tfrac{1}{2}E_1) \to (E_2)} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2C & 2C \\ 0 & 1-C & 2-C \end{array}\right]$$

- $\underline{k=1}$
- $l : |a_{l1}^{(1)}| = \max\limits_{j=1,2} |a_{j1}^{(1)}| =$

$$= \max\{|2|, |1|\} = 2 = a_{11}^{(1)}$$

$\Rightarrow l = 1$ pivotul e <u>bun</u>

- $(E_2 - \frac{1}{2} E_1) \longrightarrow (E_1)$

- Sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2C x_2 = 2C \\ (1-C)\, x_2 = 2-C \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$$(1-C)\, x_2 = 2 - C \Rightarrow x_2 = \frac{2-C}{1-C} \approx \frac{-C}{-C} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$$2x_1 + 2C\, x_2 = 2C \Rightarrow 2x_1 + 2C = 2C$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$$

<u>Verificare</u>:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2C x_2 = 2C \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 0 + 2C = 2C \checkmark \\ 0 + 1 = 2 \,? \end{cases}$$

<u>Cauza</u>: Nu se ține seama de valoarea pivotului în comparație cu elementele de pe linia sa (în valoare absolută)!

2.3. MEG CU PIVOTARE PARȚIALĂ SCALATĂ (MEGPPS)

IDEEA (MEGPPS):

La fiecare pas $k=\overline{1,n-1}$ al algoritmului lui MEGPP:

(i) determină <u>factorul de scalare</u> al fiecărei linii $i=\overline{k,n}$, ie cel mai mare element în valoare absolută al fiecărei linii $i=\overline{k,n}$;

(ii) <u>scalează</u> elementele de pe coloana pivotului, $a_{ik}^{(k)}$, $i=\overline{k,n}$, cu factorul de scalare corespunzător liniei $i=\overline{k,n}$;

(iii) determină noul pivot cf MEGPP, ie cel mai mare elem de pe coloana pivotului scalată cf (ii).

(i) Determină <u>factorul de scalare</u> pt fiecare linie $i=\overline{k,n}$:

$$i=\overline{k,n}: \quad s_i := \max_{j=\overline{k,n}} |a_{ij}^{(k)}|$$

(ii) <u>Scalează</u> elementele de pe coloana pivotului, coloana k:

$$i=\overline{k,n}: \quad \tilde{a}_{ik} := a_{ik}^{(k)} / s_i$$

(iii) Determină poziția noului pivot cf MEGPP pt $\tilde{a}_{ik}$, $i=\overline{k,n}$:

$$l \in \overline{k,n}: \quad \tilde{a}_{lk} := \max_{i=\overline{k,n}} |\tilde{a}_{ik}|$$

(iv) Aplică MEGPP:

- $l=k \Rightarrow$ MEGPP
- $l>k \Rightarrow (E_k) \leftrightarrow (E_l)$ & MEGPP

OBS (remedierea limitării MEGPP):

$$\begin{cases} 2x_1 + 2Cx_2 = 2C \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}, \quad C = O(10^{200}), \text{ ie } C \pm 1 \simeq C$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2C & 2C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{(E_1) \longleftrightarrow (E_2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2C & 2C \end{array}\right]$$

$$\overset{(E_2 - 2E_1) \longrightarrow (E_2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2C-2 & 2C-4 \end{array}\right]$$

• $k=1$:

(i) <u>factorul de scalare</u> pt liniile 1,2:

$$s_1 := \max_{j=1,2} |a_{1j}^{(1)}| = \max\{|2|, |2C|\} = |2C| = 2C$$

$$s_2 := \max_{j=1,2} |a_{2j}^{(1)}| = \max\{|1|, |1|\} = |1| = 1$$

(ii) <u>Scalarea</u> coloanei pivotului, $k=1$:

$$\tilde{a}_{11} := a_{11}^{(1)} / s_1 = 2/2C = 1/C$$

$$\tilde{a}_{21} := a_{21}^{(1)} / s_2 = 1/1 = 1$$

(iii) Determină poziția noului pivot cf MEGPP pt $\tilde{a}_{ik}$, $i=\overline{k,n}$:

$$l: \max_{i=1,2} |\tilde{a}_{ik}| = \max\left\{\frac{1}{c}, 1\right\}$$

$$= 1 = |\tilde{a}_{i2}| \Rightarrow \boxed{l=2}$$

(iv) Aplică MEGPP:

- $l = 2 > 1 = k \Rightarrow (E_l) \longleftrightarrow (E_k)$

$$(E_1) \longleftrightarrow (E_2)$$

Aplicăm MEGPP ⟹ sistemul devine:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ (2c-2)x_2 = 2c-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{2(c-2)}{2(c-1)} = \frac{c-2}{c-1} \approx \frac{c}{c} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{x_2 = 1} \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

<u>Verificare</u>: $\begin{cases} 2x_1 + 2c x_2 = 2c & \checkmark \\ x_1 + x_2 = 2 & \checkmark \end{cases}$

ALGORİTM (MEGPPS):

Date: $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $b=(b_i)_{i=\overline{1,n}}$

$k=\overline{1,n-1}$:

  $i=\overline{k,n}$:

    $s_i := \max\limits_{j=\overline{k,n}} |a_{ij}|$

    $\tilde{a}_i := a_{ik}/s_i$

  end

  l: $|\tilde{a}_l| := \max\limits_{i=\overline{k,n}} |\tilde{a}_i|$ $(k\le l)$

  $A := P_{kl}A$ (ie $(E_k) \longleftrightarrow (E_l)$)

  $i=\overline{k+1,n}$:

    $m := a_{ik}/a_{kk}$

    $b_i := b_i - m\, b_k$

    $j=\overline{k+1,n}$:

      $a_{ij} := a_{ij} - m\, a_{kj}$

    end

    $a_{ik}=0$

  end

end

2.4. MEG cu PIVOTARE TOTALĂ (MEGPT)

<u>IDEEA (MEGPT):</u>

La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al algoritmului MEGPT

(i) determină cel mai mare element în valoare absolută dintre elementele situate la dreapta și sub minorul de la pasul k, i.e. $a_{kk}^{(k)}$;

(ii) prin transformări elementare, mută noul pivot pe poziția actualului pivot, i.e. linia k și coloana k.

(i) $\ell, m \in \overline{k, n}$:

$$|a_{\ell m}^{(k)}| := \max_{\substack{i = \overline{k,n} \\ j = \overline{k,n}}} |a_{ij}^{(k)}|$$

(ii) $l \geq k$ și $m \geq k$

- Dacă $l > k \Rightarrow (E_l) \leftrightarrow (E_k)$, se interschimbă liniile l și k.
- Dacă $m > k \Rightarrow (C_l) \leftrightarrow (C_k)$, se interschimbă coloanele m și k.

<u>Obs</u>:

$(E_l) \leftrightarrow (E_k)$: $\overline{A}^{(k)} := P_{kl}\,\overline{A}^{(k)}$

$(C_m) \leftrightarrow (C_k)$: $\overline{A}^{(k)} := \overline{A}^{(k)}\,P_{km}$

(iii) Aplică MEGFP pt noua matrice extinsă.

ALGORITM (MEGPT):

Date: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $\underline{b} = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$

$k = \overline{1, n-1}$:

$l \in \overline{k,n}$ & $m \in \overline{k,n}$ ai

$$|a_{lm}| := \max_{i,j=\overline{k,n}} |a_{ij}|$$

$$A := P_{kl} \, A \, P_{km}$$

(interschimbă liniile k și l, respectiv coloanele k și m)

$i = \overline{k+1, n}$:

$m := a_{ik} / a_{kk}$

$b_i := b_i - m b_k$

$j = \overline{k+1, n}$:

$a_{ij} := a_{ij} - m a_{kj}$

end

$a_{ik} = 0$

end

end

OBS (remedierea limitării MEGPP):

$$\begin{cases} 2x_1 + 2C x_2 = 2C \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}, \quad C = O(10^{200}), \text{ ie } C \pm 1 \simeq C$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2C & 2C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(C_1) \longleftrightarrow (C_2)} \left[\begin{array}{cc|c} 2C & 2 & 2C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

• $k=1$:

• Determină $l, m \in \{1, 2\}$ a.î.

$$|a^{(1)}_{lm}| = \max_{i,j=1,2} |a^{(1)}_{ij}|$$

$$= \max\{|2|, |2C|, |1|, |1|\}$$

$$= 2C =: |a^{(1)}_{12}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = 1, \ m = 2$$

• $l = 1 = 1 = k \Rightarrow$ nu interschimbăm linii

• $m = 2 > 1 = k \Rightarrow$ interschimbă coloanele $(C_1) \longleftrightarrow (C_2)$

• Aplică MEGFP, i.e
$(E_2 - \frac{1}{2C} E_1) \longrightarrow (E_2)$:

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2C & 2 & 2C \\ 0 & 1-\frac{1}{C} & 1 \end{array}\right]$$

• Sistemul de ecuații liniare devine :

$$\begin{cases} 2C x_2 + 2x_1 = 2C \\ \left(1-\frac{1}{C}\right) x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{C}{C-1} \simeq \frac{C}{C} = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

$$2Cx_2 + 2 = 2C \Rightarrow 2C x_2 = 2C - 2$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2C-2}{2C} = \frac{C-1}{C} \simeq \frac{C}{C} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

<u>Verificare</u> : $\begin{cases} 2x_1 + 2Cx_2 = 2C \checkmark \\ x_1 + x_2 = 2 \checkmark \end{cases}$

OBS (operații cu matrice):

1) Interschimbarea liniilor (E_i) și (E_j) în matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este echivalentă cu înmulțirea lui A la st. cu permutarea simplă P_{ij}, ie

$$P_{ij} A = \tilde{A}$$

$$\tilde{a}_{ik} = a_{jk}, \quad k = \overline{1,n}$$

$$\tilde{a}_{jk} = a_{ik}, \quad k = \overline{1,n}$$

2) Scalarea liniei (E_i) cu $s_i \in \mathbb{R}^*$ este echivalentă cu înmulțirea lui A la stânga cu matricea diagonală $D_i = \operatorname{diag}(d_j)_{j=\overline{1,n}}$, unde $d_j = \begin{cases} 1, & j \neq i \\ s_i, & j = i \end{cases}$, ie

$$D_i A = \tilde{A},$$

$$\tilde{a}_{jk} = \begin{cases} a_{jk}/s_i, \ k = \overline{1,n}; & j = i \\ a_{jk}, \ k = \overline{1,n}; & j \neq i \end{cases}$$

2.5. APLICAȚIE: METODA GAUSS-JORDAN

Considerăm $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă.

Vrem să determinăm un algoritm potrivit pt obținerea lui A^{-1}.

Fie $X = (x_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $X = A^{-1} \Rightarrow$

$$AX = XA = I_n$$

$$X = \text{col}\,[\underline{x}^{(1)}\ \underline{x}^{(2)} \ldots \underline{x}^{(n)}]$$

$$\underline{x}^{(j)} := [x_{1j}\ x_{2j} \ldots x_{nj}]^T \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1,n}$$

$$I_n := \text{col}\,[\underline{e}^{(1)}\ \underline{e}^{(2)} \ldots \underline{e}^{(n)}]$$

$$\underline{e}^{(j)} := (\delta_{ij})_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1,n}$$

<u>ALGORITM</u> (Metoda Gauss-Jordan):

Rezolvă prin MEG, de n ori, simultan, sistemele $A\underline{x}^{(k)} = \underline{e}^{(k)}, \quad k = \overline{1,n}$

ALGORITM (MEGFP):

Date: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $\underline{b} = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$

$k = \overline{1, n-1}$:

  $i = \overline{k+1, n}$:

    $m := a_{ik} / a_{kk}$

    $b_i := b_i - m b_k$

    $j = \overline{k+1, n}$:

      $a_{ij} := a_{ij} - m a_{kj}$

    end

    $a_{ik} = 0$

  end

end

3. METODE DE FACTORIZARE

Considerăm, din nou, sistemul de ecuații liniare:

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (1)$$

Date: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ inversabilă;

$\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Necunoscutele:

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

MOTIVAȚIA: Vrem să descompunem/ /factorizăm A sub forma:

$$A = LU \qquad (2)$$

$L := (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ inferior triunghiulară ($l_{ij} = 0,\ 1 \le i < j \le n$)

$U := (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ superior triunghiulară ($u_{ij} = 0,\ 1 \le j < i \le n$)

OBSERVAȚII:

1) Dacă are loc descompunerea / factorizarea (2) a matricei A, atunci sistemul (1) se rezolvă astfel:

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff (LU)\underline{x} = \underline{b} \iff$$
$$L\underbrace{(U\underline{x})}_{=:\underline{y}} = \underline{b} \iff$$

$$\begin{cases} L\underline{y} = \underline{b}, \text{ ie det. } \underline{y} := L^{-1}\underline{b} \in \mathbb{R}^n \\ \qquad \text{(met. subst. ascendente)} \\ U\underline{x} = \underline{y}, \text{ ie det. } \underline{x} := U^{-1}\underline{y} \in \mathbb{R}^n \\ \qquad \text{(met subst. descendente)} \end{cases}$$

2) Dacă sistemul (1) se rezolvă prin MEGFP, atunci au loc $\underline{\underline{O(n^3)}}$ operații algebrice elementare.

3) Dacă sistemul (1) se rezolvă folosind (2), atunci au loc $\underline{\underline{O(n^2)}}$ operații alg. elementare.

3.1. FACTORIZAREA LU FĂRĂ PIVOTARE

Fie matricea $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Considerăm următoarea partiționare a lui A:

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] \overset{not}{=:} \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \underline{A}_{12}^T \\ \hline \underline{A}_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

unde

- $a_{11} \in \mathbb{R}$
- $\underline{A}_{12}^T := (a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n}) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$
- $\underline{A}_{21} := (a_{21}\ a_{31} \ldots a_{n1})^T \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n-1}$
- $A_{22} = (a_{ij})_{i,j=\overline{2,n}} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

DEFINIȚIE:

S.n. <u>complementul Schur</u> asociat pivotului $a_{11} \neq 0$ matricea

$$\boxed{S := A_{22} - \underline{A}_{21} \frac{1}{a_{11}} \underline{A}^T_{12} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})} \qquad (3)$$

OBSERVAȚIE:

Matrice S, ie complementul Schur asociat pivotului nenul a_{11}, este bine definită, în sensul că:

- $A_{22} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$
- $\underbrace{\underline{A}_{21}}_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})} \underbrace{\frac{1}{a_{11}}}_{\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})} \underbrace{\underline{A}^T_{12}}_{\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

OBSERVAȚIE:

Definiția <u>complementului Schur</u> poate fi extinsă pentru o partiționare mai generală a lui A, ie

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$$

$$=:\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

- $A_{11}=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}\in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ inversabilă
- $A_{12}=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,k}\\ j=\overline{k+1,n}}}\in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R})$
- $A_{21}=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{k+1,n}\\ j=\overline{1,k}}}\in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$
- $A_{22}=(a_{ij})_{i,j=\overline{k+1,n}}\in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$