Obținem $P_T(X) = P_{T|V^\lambda(T)}(X)\cdot \det(XI_{n-k}-B) = (X-\lambda)^k \det(XI_{n-k}-B)$.

Fie $W = \langle e_{k+1},\dots,e_n\rangle$ și $S: W\to W$ apl. liniară a cărei matrice în baza $\{e_{k+1},\dots,e_n\}$ este B; avem deci $P_S(X)=\det(XI_{n-k}-B)$.

E clar că pt. orice $w\in W$ avem $T(w)-S(w)\in V^\lambda(T)$.
Arătăm că $P_S(\lambda)\neq 0$, adică λ nu e val. proprie pt. S; va rezulta că $X-\lambda \nmid \det(XI_{n-k}-B)$, deci $a_T(\lambda)=k$.
Într-adevăr, dacă prin absurd ar exista $x\in W\setminus\{0\}$ cu $S(x)=\lambda x$, atunci $T(x)=S(x)+u=\lambda x+u$ pt. un $u\in V^\lambda(T)$.
Atunci $(\lambda I-T)(x)=\lambda x-T(x)=-u\in V^\lambda(T)$, deci există $m\in\mathbb{N}^*$ cu $(\lambda I-T)^m((\lambda I-T)(x))=0$, de unde $(\lambda I-T)^{m+1}(x)=0$, adică $x\in V^\lambda(T)$. Atunci $x\in V^\lambda(T)\cap W=0$, contradicție.

__Teoremă__. Presupunem că P_T este produs de factori liniari în $K[X]$. Fie $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ rădăcinile distincte ale lui P_T (= val. proprii dist. ale lui T).
Atunci $V=V^{\lambda_1}(T)\oplus\dots\oplus V^{\lambda_r}(T)$.

__Dem__. Arătăm că $e_1\in V^{\lambda_1}(T),\dots,e_r\in V^{\lambda_r}(T)$, $e_1+\dots+e_r=0 \Rightarrow e_1=\dots=e_r=0$.
Altfel, fie r minim pt. care există $i_1,\dots,i_r$ distincți și $e_{i_1}\in V^{\lambda_{i_1}}(T),\dots,e_{i_r}\in V^{\lambda_{i_r}}(T)$, nu toți nuli, cu $e_{i_1}+\dots+e_{i_r}=0$. Clar $r\geq 2$.
Fie $m\in\mathbb{N}^*$ cu $(\lambda_{i_r}I-T)^m(e_{i_r})=0$. Atunci

$$\underbrace{(\lambda_{i_r}I-T)^m(e_{i_1})}_{\in V^{\lambda_{i_1}}(T)}+\dots+\underbrace{(\lambda_{i_r}I-T)^m(e_{i_{r-1}})}_{\in V^{\lambda_{i_{r-1}}}(T)}+\underbrace{(\lambda_{i_r}I-T)^m(e_{i_r})}_{=0}=0.$$

și din minimalitatea lui m rezultă că și primii $r-1$ termeni sunt nuli.

Dar $(\lambda_{i_2}I-T)_{|V^{\lambda_{i_1}}(T)}, \dots, (\lambda_{i_2}I-T)_{|V^{\lambda_{i_{2-1}}}(T)}$ sunt izomorfisme (punctul ⑤, pag. 12), de unde $e_{i_1}=\dots=e_{i_{2-1}}=0$, iar apoi și $e_{i_2}=0$, contradicție.

Fie acum $B_1,\dots,B_r$ baze în $V^{\lambda_1}(T),\dots,V^{\lambda_r}(T)$. Atunci $B_1\cup\dots\cup B_r$ este lin. independentă și
$|B_1\cup\dots\cup B_r| = \sum_{i=\overline{1,r}} \dim V^{\lambda_i}(T) = \sum_{i=\overline{1,r}} a_T(\lambda_i) = \dim V$,
deci $B_1\cup\dots\cup B_r$ e bază a lui V. Atunci $V=V^{\lambda_1}(T)+\dots+V^{\lambda_r}(T)$ și de mai sus rezultă că $V=V^{\lambda_1}(T)\oplus\dots\oplus V^{\lambda_r}(T)$.

Aplicații liniare nilpotente

Dacă $T:V\to V$ e apl. liniară și λ e val. proprie a lui T, am văzut că $V^{\lambda}(T)=\ker(\lambda I-T)^m$ pt. un $m\in\mathbb{N}^*$. Rezultă că apl. liniară $(\lambda I-T)_{|V^{\lambda}(T)}: V^{\lambda}(T)\to V^{\lambda}(T)$ verifică $\left((\lambda I-T)_{|V^{\lambda}(T)}\right)^m=0$.

Aceasta motivează următoarea definiție.

Def. O aplicație liniară $N:V\to V$ se numește nilpotentă dacă există $m\in\mathbb{N}^*$ cu $N^m=0$. Cel mai mic astfel de m se numește indicele de nilpotență al lui N.

Fixăm o apl. liniară nilpotentă $N:V\to V$ și presupunem $V\neq 0$. Dacă $v\in V\setminus\{0\}$, atunci $\min\{h\in\mathbb{N}^* / N^h(v)=0\} \overset{\text{not.}}{=} ht(v)$ se numește înălțimea lui v (relativ la N). Dacă $v=0$, definim $ht(v)=0$.

E clar că există $v\in V$ cu
$ht(v)=$ indicele de nilpotență al lui N.

[într-adevăr, indic. de nilp. al lui N este $\max\{ht(v) / v\in B\}$, unde B e o bază în V.

<u>Lema</u>. Fie $e \in V \setminus \{0\}$ cu $ht(e) = m$. Atunci $e, N(e), \dots, N^{m-1}(e)$ sunt lin. indep.

<u>Dem</u>. Fie $\lambda_0 e + \lambda_1 N(e) + \dots + \lambda_{m-1} N^{m-1}(e) = 0$, cu $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in K$. Dacă nu toți λ_i sunt nuli, fie i minim cu $\lambda_i \neq 0$. Aplic N^{m-1-i} și obținem $\lambda_i \underbrace{N^{m-1}(e)}_{\neq 0} = 0$, de unde $\lambda_i = 0$, contrad.

<u>Def</u>. Dacă $e \in V \setminus \{0\}$ cu $ht(e) = m$, atunci $\langle e, N(e), \dots, N^{m-1}(e) \rangle$ se numește subspațiul ciclic generat de e relativ la N.
(din Lema $\Rightarrow$ e un subsp. de dimensiune $m = ht(e)$).

<u>Observație</u>: Dacă $ht(e) = m$ și $W = \langle e, N(e), \dots, N^{m-1}(e) \rangle$, atunci W e subsp. N-invariant, $N_{|W} : W \to W$ e apl. liniară nilpotentă cu indicele de nilpotență m, iar matricea lui $N_{|W}$ în baza $\{N^{m-1}(e), \dots, N(e), e\}$ este

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ dacă $m \geq 2$, sau $(\,0\,)$ dacă $m = 1$.

În plus, avem $N(W) = \langle N(e), \dots, N^{m-1}(e) \rangle = \{ w \in W \mid ht(w) \leq m-1 \}$.
Dacă $v \in W \setminus N(W)$, atunci $ht(v) = m$, deci subspațiul ciclic generat de v, având dimensiune m, este egal cu W.
Este imediat că:

$Ker(N_{|W}) = \langle N^{m-1}(e) \rangle$

$Ker(N^2_{|W}) = \langle N^{m-2}(e), N^{m-1}(e) \rangle$

- - - - - - - - - - - - - -

$Ker(N^{m-1}_{|W}) = \langle N(e), \dots, N^{m-1}(e) \rangle$,

așadar $\dim(Ker(N_{|W})) = 1$, $\dim(Ker(N^2_{|W})) = 2, \dots,$
$\dim(Ker(N^{m-1}_{|W})) = m-1$, iar $\dim(Ker(N^j_{|W})) = m$ pt. $j \geq m$.

Teoremă. Fie $V \neq 0$ și $N: V \to V$ apl. lin. nilpotentă, cu indice de nilpotență m. Atunci V este sumă directă internă de subspații ciclice (relative la N). În plus, pt. orice astfel de reprezentare $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, cu U_i subsp. ciclic de dimensiune m_i, notând pt. orice $j \geq 1$ $\gamma_j = |\{i \mid m_i = j\}|$ (numărul tuturor U_i de dimensiune j), avem:

$\max\{m_1, \dots, m_r\} = m$

$r = \dim(\operatorname{Ker} N)$

$2r - \gamma_1 = \dim(\operatorname{Ker} N^2)$

$jr - (j-1)\gamma_1 - (j-2)\gamma_2 - \dots - \gamma_{j-1} = \dim(\operatorname{Ker} N^j)$ pt $2 \leq j \leq m$

$mr - (m-1)\gamma_1 - (m-2)\gamma_2 - \dots - \gamma_{m-1} = \dim(\operatorname{Ker} N^m) = \dim V$.

În consecință, $r, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ și $\gamma_m = r - \gamma_1 - \dots - \gamma_{m-1}$ depind doar de V și N, nu și de reprezentarea aleasă.

Dem. Arăt că V e sumă directă de subsp. ciclice prin inducție după $\dim V$.

Dacă $\dim V = 1$, atunci $N = 0$ (altfel $N: V \to V$ e injectivă și $N^m \neq 0$ pt orice m). Fie $e \in V \setminus \{0\}$, atunci $V = \langle e \rangle$ = subsp. ciclic generat de e relativ la N.

$n-1 \to n$. Cum N e nilpotentă, rezultă că N nu e surjectivă (altfel ar fi și injectivă și atunci $N^m \neq 0$ pt orice m). Avem deci $N(V) \subsetneq V$ și există un subspațiu U de dim $n-1$ al lui V cu $N(V) \subset U$. Clar $N(U) \subset N(V) \subset U$, deci U este N-invariant. Din ipoteza de inducție $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, cu U_i subspații ciclice.

Fie $e \in V \setminus U$ și scriem $N(e) = u_1 + \dots + u_r$, cu $u_i \in U_i$.

Dacă pt. un i avem $u_i \in N(U_i)$, fie de exemplu

$u_i = N(v_i)$ cu $v_i \in U_i$, atunci $e - v_i \in V \setminus U$ și $N(e-v_i) = u_1 + \dots + u_{i-1} + 0 + u_{i+1} + \dots + u_r$. Aceasta arată că putem presupune (înlocuind e cu $e-v_i$ în pași pt. câțiva i) că pt. orice i avem sau $u_i = 0$ sau $u_i \notin N(U_i)$.

Dacă toți u_i sunt 0, deci $N(e)=0$, atunci subspațiul ciclic generat de e este $<e>$ și $V = <e> \oplus U = <e> \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, gata!

Presupunem acum că nu toți u_i sunt 0, deci $N(e) \neq 0$.

Atunci $ht(N(e)) = \max\{ht(u_1), \dots, ht(u_r)\}$. Eventual renotând, fie $ht(N(e)) = ht(u_1) = h$. Atunci $ht(e) = h+1$.

Vom ~~Arăta~~ arăta că $V = \underbrace{<e, N(e), \dots, N^h(e)>}_{\text{subsp. ciclic generat de } e} \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$.

Arătăm mai întâi că $<e, N(e), \dots, N^h(e)> \cap (U_2 + \dots + U_r) = 0$; într-adevăr, dacă $\lambda_0 e + \underbrace{\lambda_1 N(e) + \dots + \lambda_h N^h(e)}_{\in U} \in \underbrace{U_2 + \dots + U_r}_{\subset U}$, atunci $\lambda_0 e \in U$. Cum $e \notin U \Rightarrow \lambda_0 = 0$.

Fie $\pi : U \to U_1$ proiecția canonică, adică $\pi(\underset{\cap\, U_1}{x_1} + \dots + \underset{\cap\, U_r}{x_r}) = x_1$.

Avem $\pi(N(e)) = u_1$, apoi din $N^2(e) = \underset{\cap\, U_1}{N(u_1)} + \dots + \underset{\cap\, U_r}{N(u_r)} \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi(N^2(e)) = N(u_1)$, ș.a.m.d., până la $\pi(N^h(e)) = N^{h-1}(u_1)$.

Aplicăm π relației $\lambda_1 N(e) + \dots + \lambda_h N^h(e) \in U_2 + \dots + U_r$ și rezultă că $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 N(u_1) + \dots + \lambda_h N^{h-1}(u_1) = 0$. Cum $ht(u_1) = h$ obținem că $\lambda_1 = \dots = \lambda_h = 0$.

Știm că $\dim <e, N(e), \dots, N^h(e)> = h+1$, iar $\dim(U_2 + \dots + U_r) = \dim U - \dim U_1 = n-1-h$ (deoarece $u_1 \in U_1 \setminus N(U_1)$, deci $U_1 = <u_1, N(u_1), \dots, N^{h-1}(u_1)>$).

Atunci

$\dim(\langle e, N(e), \ldots, N^h(e)\rangle + (U_2 + \ldots + U_r)) \xlongequal{\text{Th. Grassmann}}$

$\dim(\langle e, N(e), \ldots, N^h(e)\rangle) + \dim(U_2 + \ldots + U_r)$

$- \dim(\underbrace{\langle e, N(e), \ldots, N^h(e)\rangle \cap (U_2 + \ldots + U_r)}_{\overset{\shortparallel}{0}})$

$= h+1 + n-1-h = n$, de unde

$\langle e, N(e), \ldots, N^h(e)\rangle + (U_2 + \ldots + U_r) = V$. Rezultă că

$V = \langle e, N(e), \ldots, N^h(e)\rangle \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_r$, sumă directă de subsp. ciclice.

Fie acum $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ o reprezentare cu U_i ciclic de dim m_i, în particular $N_{|U_i}$ are indice de nilpotență m_i. De aici este clar că indicele de nilpotență al lui N (adică m) este $\max\{m_1, \ldots, m_r\}$. Apoi pt. orice j avem

$\operatorname{Ker} N^j = \operatorname{Ker}(N^j_{|U_1}) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}(N^j_{|U_r})$.

Pt. $j=1$, cum $\dim(\operatorname{Ker}(N_{|U_i})) = 1$ pt. orice i (Observație pag. 15) obținem $\dim(\operatorname{Ker} N) = r$.

Pt. $j=2$ obținem

$\dim(\operatorname{Ker} N^2) = \sum_{i=\overline{1,r}} \dim(\operatorname{Ker}(N^2_{|U_i})) = \gamma_1 + 2(r-\gamma_1) = 2r - \gamma_1$

(deoarece pt. acei i pt. care $m_i = 1$, în număr de γ_1, avem $\dim(\operatorname{Ker}(N^2_{|U_i})) = 1$, din observație, iar pt. ceilalți, în număr de $r-\gamma_1$, avem $\dim(\operatorname{Ker}(N^2_{|U_i})) = 2$).

Continuăm similar și pt. un $2 \le j \le m$ avem

$\dim(\operatorname{Ker} N^j) = \sum_{i=\overline{1,r}} \dim(\operatorname{Ker}(N^j_{|U_i})) \xlongequal{\text{din observație}}$

$= \gamma_1 + 2\gamma_2 + \ldots + (j-1)\gamma_{j-1} + j(r - \gamma_1 - \gamma_2 - \ldots - \gamma_{j-1})$

$= jr - (j-1)\gamma_1 - (j-2)\gamma_2 - \ldots - \gamma_{j-1}$

[pt. că $\dim(\operatorname{Ker}(N^j_{|U_i}))$ este 1 dacă $m_i = 1$, 2 dacă $m_i = 2$, …, $j-1$ dacă $m_i = j-1$, și j dacă $m_i \ge j$], ceea ce încheie demonstrația.