Teorie seria 15
PART 1

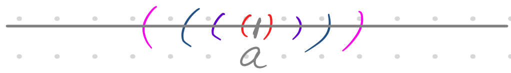
① **Def:**

1) O mulțime $V \subset \mathbb{R}\ (\overline{\mathbb{R}})$ s.n. vecinătate pentru punctul $a \in \mathbb{R}$ dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0$, a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$.

2) $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ s.n. vecinătate pentru $+\infty$ în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă $(\exists)\ M \in \mathbb{R}$ a.î. $(M, +\infty) \in V$.

3) $\mathcal{V}_a = \{V \subset \overline{\mathbb{R}} \mid V \text{ vecinătate a lui } a\}$

→ mulțimea vecinătăților $\Rightarrow$



4) $x_n \to a \iff (\forall)\ V \in \mathcal{V}_a,\ (\exists)\ n_V$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$.

Def:

1) Un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ converge la $a \in \mathbb{R} \Rightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

2) $x_n \to +\infty \iff (\forall)\ M \in \mathbb{R}, (\exists)\ n_M \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_M \Rightarrow x_n > M$

3) $x_n \to -\infty \iff (\forall)\ m \in \mathbb{R}, (\exists)\ n_m \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \leq n_m \Rightarrow x_n < m$

② **Proprietățile șirurilor convergente**

(P) Orice șir convergent este mărginit.

(P) Fie $x_n \to a,\ y_n \to b,\ a, b \in \mathbb{R}$, atunci:

1) $(x_n + y_n) \to a+b$

2) $(x_n \cdot y_n) \to a \cdot b$

3) $|x_n| \to |a|$

4) $x_n < y_n,\ (\forall)\ n \geq 1 \Rightarrow a \leq b$

5) $x_n \neq 0, (\forall)\ n \geq 1, a \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x_n}\right) \to \frac{1}{a}$

(T:) Weierstrass: Orice șir monoton și mărginit este convergent.

(T:) Orice șir mărginit are un subșir convergent.

(T:) Dacă $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow (\forall)$ subșir $x_{k(n)}$ are limita l.

③ SPAȚII METRICE

Def: 1) O funcție $d: X \times X \to [0, +\infty)$ s.n. distanță dacă:

a) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

b) $d(x,y) = d(y,x)$, $(\forall) x, y \in X$

c) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, $\forall x, y, z \in X$ (ineg. triunghiului)

2) Perechea (X,d) s.n. spațiu metric.

3) $B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\} \stackrel{s.n.}{=}$ bilă de centru a și rază r

4) $V \subset X$ s.n. vecinătate a lui „a", dacă $(\exists)\ \varepsilon > 0$ a.î. $B(a, \varepsilon) \subset V$.

5) $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

MINI-DEMO

$x_n \xrightarrow{d} a \iff d(x_n, a) \to 0 \iff (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ $d(x_n, a) < \varepsilon \iff x_n \in B(a, \varepsilon)$ $\square$

Șiruri Cauchy

Def: Un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ s.n. Cauchy $\iff (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall) n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Def: Un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ s.n. Cauchy $\iff (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Normă. Spațiu normat

Def: O funcție $\|\ \| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ a.î.:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$

3) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$, $(\forall) a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ s.n. normă.

Def: $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ s.n. spațiu normat.

④ Def: Un spațiu metric în care orice șir Cauchy este convergent s.n. complet.

PROPRIETĂȚI: Fie (X, d) spațiu metric, atunci:

1) Orice șir Cauchy este mărginit.

2) Orice șir convergent este șir Cauchy.

1)+2) ⇒ 3) Orice șir convergent este mărginit.

4) Un șir Cauchy care are un subșir convergent este convergent.

T: Spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$ este complet.

⑤ Limite superioare și limite inferioare

Def: 1) Un element $a \in \mathbb{R}$ s.n. punct limită al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă $(\exists)$ (x_{n_k}) subșir a.î. $x_{n_k} \to a$.

$\mathcal{L} = \{a, a \text{ punct limită pentru } x_n\}$

2) $\sup \mathcal{L} \overset{s.n}{=}$ limită superioară a șirului $x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = \overline{\lim}\, x_n$

$\inf \mathcal{L} \overset{s.n}{=}$ limită inferioară a șirului $x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = \underline{\lim}\, x_n$

⑥

T: Riemann: Dacă seria $s = \sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă ⇒ ⇒ $(\forall)$ $\sigma : \mathbb{N}^* \xrightarrow{m} \mathbb{N}^*$ bijectivă, seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ este absolut convergentă și $\sum\limits_{n\geq 1} x_n = \sum\limits_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$.

Dacă seria $s = \sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este semiconvergentă ⇒ $(\forall)$ $\alpha \leq \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $(\exists)$ o permutare $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ a.î. mulțimea punctelor limită a seriei $\sum\limits_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ să fie $[\alpha, \beta]$.

$\sigma \to$ sigma

Def: O serie de forma $s(x)=\sum_{n\ge 0} a_n (x-a)^n$ s.n. serie de puteri.

$D=\{x \mid s(x)$ este convergentă$\}$ → domeniu de convergență

$\rho = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$ → raza de convergență

(T): Cauchy-Hadamard: Fie seria $s(x)=\sum_{n\ge 1} a_n x^n$, atunci:

1) Dacă $\rho = 0 \Rightarrow D=\{0\}$

$\rho=+\infty \Rightarrow D=\mathbb{R}$

$\rho = (0,+\infty) \Rightarrow (-\rho,+\rho) \subset D \subset [-\rho,+\rho]$

2) Seria $s'(x)=\sum_{n\ge 1} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ are $\rho_1=\rho$

(7)

Def: O mulțime $D\subset X$ s.n. deschisă pe spațiul metric (X,d) dacă este vecinătate pentru orice punct al mulțimii.

$\forall\ x\in D \Rightarrow (\exists)\ \varepsilon_x>0$ a.î. $B(x,\varepsilon_x)\subset D$

$\tau = \{D\subset X \mid D$ deschisă$\}$

Def: $F\subset X$ s.n. închisă $\Leftrightarrow X\setminus F \in \tau$

Def: τ s.n. topologia spațiului metric (X,d)

Def: $A\subset X$

1) $A' = \{a\in X \mid (\forall)\ V\in \mathcal{V}_a \Rightarrow V\cap A\setminus\{a\}\neq\emptyset\} =$

$= \{a\in X \mid (\exists)\ (x_n)_n \in A$ a.î. $x_n\to a$ și $x_n\neq a\} =$

$=$ mulțimea punctelor de acumulare A

2) $\bar{A} = A'\cup A = \{a\in X \mid (\forall)\ V\in\mathcal{V}_a \Rightarrow V\cap A\neq\emptyset\} =$

$= \{a\in X \mid (\exists)\ (x_n)_n \in A$ a.î. $x_n\to a\} =$ închiderea mulțimii A

3) $\mathring{A} = Int(A) = \bigcup_{D\in\tau,\, D\subset A} D = \{x\in X \mid A\in\mathcal{V}_x\} =$ interiorul mulțimii A

4) $Fr(A) = \bar{A}\setminus\mathring{A} = \{a\in X \mid V\in\mathcal{V}_x \Rightarrow V\cap A\neq\emptyset$ și $V\setminus A\neq\emptyset\} =$ frontiera lui A

5) $iz(A) = A\setminus A' =$ mulțimea punctelor izolate

Topologie

Def: O familie de mulțimi $\mathcal{T} \in P(X)$ s.n. topologie dacă:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2) $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \in \mathcal{T}$
3) $(\mathcal{T}_i)_{i \in I} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_i \in \mathcal{T}$

$D \in \mathcal{T}$ s.n. deschisă

$\mathcal{V}_a = \{ V \subset X \mid (\exists)\, D \in \mathcal{T} \text{ a.î. } a \in D \subset V \}$

$\mathcal{F} = \{ F \subset X \mid X \setminus F \in \mathcal{T} \}$ = familia mulțimii

$x_n \to a$, $(\forall)\, V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow (\exists)\, n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_V$, $x_n \in V$

⑧ Continuitatea

T: Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) două spații metrice, $a \in X_1$, $f: X_1 \to X_2$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente (U.A.S.E.):

1) $(\forall)\, V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}$
2) $(\forall)\, \varepsilon > 0, (\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$
3) $(\forall)\, x_n \subset X$ a.î. $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$
4) f continuă în punctul a.

Def: Fie funcția $f: X_1 \to X_2$, unde $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ sunt două spații metrice. Fie $x_0 \in X_1$. f continuă în $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

⑨ Șiruri de funcții. Convergența simplă și uniformă.

Def: Fie $f_n, f: A \to \mathbb{R}$.

1) Spunem că șirul $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplu la f și se notează $f_n \xrightarrow{s} f$, dacă: $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), (\forall)\, x \in A \Leftrightarrow}$ ← asta se folosește în ex.

$\Leftrightarrow (\forall)\, x \in A$ și $\varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_{\varepsilon, x}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_{\varepsilon, x}$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

2) Spunem că șirul $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform la f și se notează: $f_n \xrightarrow{u} f$, dacă $(\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)\ n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n\geq n_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, (\forall)\ x\in A$ sau:

$$\boxed{\text{Fie } a_n = \sup_{x\in A} |f_n(x)-f(x)|,\ f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow a_n \to 0}$$

(10) T: Fie (X,d) un spațiu metric.

$f_n, f: X\to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și funcțiile f_n să fie continue în $a\in X$.

Atunci f este continuă în a.

(11) T: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă, atunci:

$(\exists)\ c\in[a,b]$ a.î. $f(c)=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

Funcția f este mărginită și își atinge marginile.

(12) <u>Derivabilitatea</u>

Def: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$.

Spunem că funcția f este derivabilă în c dacă $(\exists)\ \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\in\mathbb{R}$.
și notăm: $f'c = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$.

P: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, și $c\in(a,b)$.

Spunem că f este derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow (\exists)\ \alpha\in\mathbb{R}$ și $w:(a,b)\to\mathbb{R}$
a.î. $f(x)=f(c)+\alpha(x-c)+w(x)\cdot(x-c)$, unde: $\alpha=f'(c)$ și
$w(x)=\frac{f(x)-f(c)-\alpha(x-c)}{x-c}$.

(13) <u>Funcții uniform continue</u>

Def (Continuitatea)

Fie (X_1,d_1) și (X_2,d_2) două spații metrice. O funcție $f: X_1\to X_2$ este continuă în $a\in X_1 \Rightarrow (\forall)\ a\in X_1$ și $(\forall)\ \varepsilon>0 \Rightarrow (\exists)\ \delta_{\varepsilon,a}$ a.î. $(\forall)\ x\in X_1$ cu $d_1(x,a)<\delta_{\varepsilon,a} \Rightarrow d_2(f(x),f(a))<\varepsilon$.

Def (Uniform continuitate)

Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) două spații metrice. Funcția $f: X_1 \to X_2$ este uniform continuă dacă: $(\forall)\varepsilon>0, (\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $d_1(x, x')<\delta_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow d_2(f(x), f(x'))<\varepsilon, (\forall)\, x, x' \in X_1$.

T: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă cu derivata mărginită, atunci f este uniform continuă.

T: Fie $A\subset\mathbb{R}^m$ închisă și mărginită și $f: A\to\mathbb{R}^n$ continuă. Atunci f este uniform continuă.

(14.) T: Fermat:

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$ a.î. $(\exists)\, f'(c)$ și c este punct de extrem local. Atunci $f'(c)=0$.

T: Rolle

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b) și continuă pe $[a,b]$ și $f(a)=f(b)$. Atunci $(\exists)\, c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$.

T: Lagrange

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b). Atunci $(\exists)\, c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=\frac{f(b)-f(c)}{b-a}$.

T: Cauchy.

Fie $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$, a.î. f și g să fie continue pe $[a,b]$ și derivabile pe (a,b) și $g'(x)\neq 0, (\forall)\, x\in(a,b)$, $g(b)=g(a)$, atunci:

$(\exists)\, c\in(a,b)$ a.î. $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

T: L'Hôspital

Fie $f, g:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile pe (a,b) și $g'(x)\neq 0$ a.î. $(\exists)\lim\limits_{x\to b} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to b} g(x)\in\{0, \pm\infty\}$ și $(\exists)\lim\limits_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, atunci:

$(\exists)\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

(P) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe (a,b), atunci: derivata f' a funcției f are proprietatea lui Darboux.

Derivabilitatea unui șir de funcții

(T:) Fie $f_n:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î. $(\exists)\ f_n'$ pe (a,b) și $(\exists)\ g:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î.:

1) $f_n' \xrightarrow{u} g$
2) $(\exists)\ c\in(a,b)$ a.î. $(f_n(c))_n$ să fie convergentă. Atunci:

$(\exists)\ f:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și $f'=g$.

PART 2 (TBC)