Nume[1]:..

Grupa:............

Păstrez nota de la parţial (DA/NU):.........[2]

Subiecte[3]

I. *Încercuiţi literele corespunzătoare răspunsurilor corecte.*[4]

1. Fie $X = \mathbb{R}^3$ cu topologia uzuală. Care dintre următoarele submulţimi sunt deschise:
a) $(0,1) \times \{0\} \times \{1\}$;
b) $(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$;
c) $(0,1) \times [0,1] \times [0,1]$;
d) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{1\}$. **(0.5p)**

2. Considerăm pe $\mathbb{R}$ topologia uzuală iar pe intervalul $[0,1]$ topologia indusă. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ funcţii continue astfel încât $g \circ f : [0,1] \to [0,1]$ este homeomorfism. Putem afirma că:
a) f este injectivă;
b) f nu este surjectivă;
c) g este surjectivă;
d) g nu este injectivă. **(0.5p)**

3. În $\mathbb{R}^2$ cu topologia uzuală considerăm elipsa $X = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$ cu topologia indusă. Atunci:
a) X este conex;
b) X este compact;
c) X este submulţime închisă;
d) X este submulţime deschisă. **(0.5p)**

4. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică considerăm tetraedrul $ABCD$ cu $A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1)$ şi $D = (1,1,1)$. Putem afirma că:
a) Toate feţele lui $ABCD$ sunt triunghiuri dreptunghice;
b) Toate feţele lui $ABCD$ sunt triunghiuri isoscele;
c) Măsura unghiului dintre dreptele AB şi DC este de $\frac{\pi}{3}$;
d) Măsura unghiului dintre planele (ABC) şi (BCD) este de $\frac{\pi}{3}$. **(0.5p)**

5. În spaţiul $\mathbb{R}^2$ cu structura euclidiană canonică considerăm punctele $A = (0,0), B = (2,0)$ şi $C = (t,1)$ unde $t \in \mathbb{R}$ este un parametru. Atunci:
a) Pentru $t = 1$ triunghiul ABC este dreptunghic;
b) Există $t \in \mathbb{R}$ pentru care aria triunghiului ABC să fie egală cu 3;
c) Există $t \in \mathbb{R}$ pentru care centrul de greutate al triunghiului ABC să fie $G = (1, \frac{1}{3})$;
d) Pentru $t = 2$ triunghiul ABC este isoscel. **(0.5p)**

6. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică considerăm dreapta d care trece prin punctul $A = (1,2,3)$ şi are direcţia $< (2,-1,1) >$ şi planul π de ecuaţie $(\pi) :\ x - y + z = 5$. Atunci:
a) $d \parallel \pi$;
b) $d \perp \pi$;
c) $d \subset \pi$;
d) $A \in \pi$. **(0.5p)**

---

[1] Punctajul de seminar se ia în considerare doar dacă punctajul pe lucrare este mai mare sau egal cu 4.5
[2] Parţialul este luat în considerare doar dacă aţi avut minim nota 7.
[3] Timp de lucru: două ore.
[4] Studenţii care îşi păstrează nota de la parţial nu trebuie să trateze grilele 1,2 3.

II. *Pe foaia de rezolvare treceţi soluţiile complete*[5]

1. Considerăm pe $\mathbb{R}^2$ cu topologia uzuală. Fie mulţimile $A = [0,1] \times [0,1]$ şi $B_t = [0,2] \times [0,1) \setminus \{(1,t)\}$ (unde $t \in (0,1)$ este un parametru) cu topologiile induse.

a) Arătaţi că A şi B_t nu sunt heomeomorfe pentru nici o valoare a lui t. **(1p)**

b) Pentru ce valori ale lui t mulţimea B_t este conexă? **(1p)**

c) Arătaţi că pentru orice valoare a lui $t \in \mathbb{R}$ există o submulţime $D \subset B_t$ astfel încât A este homeomorfă cu D. **(0.5p)**

2. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică considerăm tetraedrul $ABCD$ cu $A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1)$ şi $D = (1,1,1)$.

a) Fie G =centrul de greutate al triunghiului ΔABC. Scrieţi ecuaţia dreptei DG şi decideţi dacă DG este perpendiculară pe planul (ABC). **(1p)**

b) Determinaţi volumul tetraedrului $ABCD$. **(1p)**

c) Fie M (respectiv N) mijlocul laturii AD (respectiv BD). Determinaţi un punct P pe latura CD pentru care aria triunghiului $\Delta(MNP)$ este minimă. **(0.5p)**

3. Considerăm mulţimea $\mathcal{M} = \{A \in \text{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | \text{Tr}(A \cdot A^t) = 1\}$ (unde A^t este transpusa lui A iar Tr este urma matriceală). Fie $P(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ un polinom arbitrar: arătaţi că există $M_P \in \mathbb{R}$ astfel încât $P(Tr(A), \det(A)) \leq M_P$ pentru orice $A \in \mathcal{M}$. **(1p)**

[5] Studenţii care îşi păstrează nota de la parţial nu trebuie să trateze subiectul **1**.

Nume[1]:..

Grupa:............

Păstrez nota de la parţial (DA/NU):.........[2]

Subiecte[3]

I. *Încercuiţi literele corespunzătoare răspunsurilor corecte.*[4]

1. Fie $X = \mathbb{R}^3$ cu topologia uzuală. Care dintre următoarele submulţimi sunt închise:
a) $[0,1] \times \{0\} \times \{1\}$;
b) $(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$;
c) $(0,1) \times [0,1] \times [0,1]$;
d) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{1\}$. **(0.5p)**

2. Considerăm pe $\mathbb{R}$ topologia uzuală iar pe intervalul $[0,1]$ topologia indusă. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ funcţii continue astfel încât $g \circ f : [0,1] \to [0,1]$ este homeomorfism. Putem afirma că:
a) f este injectivă;
b) f nu este surjectivă;
c) g este surjectivă;
d) g nu este injectivă. **(0.5p)**

3. În $\mathbb{R}^2$ cu topologia uzuală considerăm hiperbola $X = \{(x,y) | x^2 - y^2 = 1\}$ cu topologia indusă. Atunci:
a) X este conex;
b) X este compact;
c) X este submulţime închisă;
d) X este submulţime deschisă. **(0.5p)**

4. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică considerăm tetraedrul $ABCD$ cu $A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1)$ şi $D = (1,1,1)$. Putem afirma că:
a) Toate feţele lui $ABCD$ sunt triunghiuri dreptunghice;
b) Toate feţele lui $ABCD$ sunt triunghiuri isoscele;
c) Măsura unghiului dintre dreptele AB şi DC este de $\frac{\pi}{2}$;
d) Măsura unghiului dintre planele (ABC) şi (BCD) este de $\frac{\pi}{3}$. **(0.5p)**

5. În spaţiul $\mathbb{R}^2$ cu structura euclidiană canonică considerăm punctele $A = (0,0), B = (2,0)$ şi $C = (t,1)$ unde $t \in \mathbb{R}$ este un parametru. Atunci:
a) Pentru $t = 1$ triunghiul ABC este dreptunghic;
b) Există $t \in \mathbb{R}$ pentru care aria triunghiului ABC să fie egală cu 3;
c) Există $t \in \mathbb{R}$ pentru care centrul de greutate al triunghiului ABC să fie $G = (1, \frac{1}{3})$;
d) Pentru $t = 2$ triunghiul ABC este isoscel. **(0.5p)**

6. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică considerăm dreapta d care trece prin punctul $A = (1,2,3)$ şi are direcţia $< (-2,-1,1) >$ şi planul π de ecuaţie $(\pi) : x - y + z = 2$. Atunci:
a) $d \parallel \pi$;
b) $d \perp \pi$;
c) $d \subset \pi$;
d) $A \in \pi$. **(0.5p)**

---

[1] Punctajul de seminar se ia în considerare doar dacă punctajul pe lucrare este mai mare sau egal cu 4.5
[2] Parţialul este luat în considerare doar dacă aţi avut minim nota 7.
[3] Timp de lucru: două ore.
[4] Studenţii care îşi păstrează nota de la parţial nu trebuie să trateze grilele 1,2 3.

II. *Pe foaia de rezolvare treceţi soluţiile complete*[5]

1. Considerăm pe $\mathbb{R}^2$ cu topologia uzuală. Fie mulţimile $A = [0,1] \times [0,1]$ şi $B_t = [0,2] \times [0,1) \setminus \{(t,t)\}$ (unde $t \in (0,1)$ este un parametru) cu topologiile induse.
a) Arătaţi că A şi B_t nu sunt heomeomorfe pentru nici o valoare a lui t. **(1p)**
b) Pentru ce valori ale lui t mulţimea B_t este conexă? **(1p)**
c) Arătaţi că pentru orice valoare a lui $t \in \mathbb{R}$ există o submulţime $D \subset B_t$ astfel încât A este homeomorfă cu D. **(0.5p)**

2. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică considerăm tetraedrul $ABCD$ cu $A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1)$ şi $D = (1,1,1)$.
a) Fie G =centrul de greutate al triunghiului ΔABC. Scrieţi ecuaţia dreptei DG şi decideţi dacă DG este perpendiculară pe planul (ABC). **(1p)**
b) Determinaţi volumul tetraedrului $ABCD$. **(1p)**
c) Fie M (respectiv N) mijlocul laturii AD (respectiv BD). Determinaţi un punct P pe latura CD pentru care aria triunghiului $\Delta(MNP)$ este minimă. **(0.5p)**

3. Considerăm mulţimea $\mathcal{M} = \left\{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | Tr(A \cdot A^t) = 1\right\}$ (unde A^t este transpusa lui A iar Tr este urma matriceală). Fie $P(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ un polinom arbitrar: arătaţi că există $M_P \in \mathbb{R}$ astfel încât $P\left(Tr(A), \det(A)\right) \leq M_P$ pentru orice $A \in \mathcal{M}$. **(1p)**

[5]Studenţii care îşi păstrează nota de la parţial nu trebuie să trateze subiectul **1**.