Rezolvare exerciții suplimentare tut 2

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n+2}}$, $x>0$

Sol:

Folosim Criteriul raportului:

Fie $a_n = \frac{x^n}{\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n+2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n+2}}{\sqrt[3]{n+2}\ \sqrt[5]{n+3}} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n+1}{n+2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{n+2}{n+3}} \cdot x = 1 \cdot 1 \cdot x = x$$

Conform Crit. raportului avem:

1) Dacă $x<1$ (i.e. $x \in (0,1)$), at. seria e conv.

2) Dacă $x>1$ (i.e. $x \in (1,\infty)$), at. seria e div.

3) Dacă $x=1$ at. crit. nu decide

Fie $x=1 \Rightarrow a_n = \frac{1^n}{\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n+2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n+2}}$

Folosim Crit de comp cu inegalități:

Fie $y_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n} \cdot \sqrt[5]{n}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{n} < \sqrt[3]{n+1} \\ \sqrt[5]{n} < \sqrt[5]{n+2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[3]{n} \cdot \sqrt[5]{n} < \sqrt[3]{n+1} \cdot \sqrt[5]{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n} \cdot \sqrt[5]{n}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n+2}} \Rightarrow x_n \le y_n$$

$$\Rightarrow y_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n} \cdot \sqrt[5]{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}} = \frac{1}{n^{\frac{8}{15}}}$$ } serie armonică generalizată, ~~div~~ pt $\alpha \le 1$ ↳ div.

Conform Crit de comp cu ineg, $\sum_n x_n$ pt $x=1$ este div.

Am obținut:

$$\sum_n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n+2}} \begin{cases} \text{convergent pt } x \in (0,1) \\ \text{divergent pt } x \in [1,\infty) \end{cases}$$

R T2

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

Sol:

Fie $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$. Calculăm limita din x_n:

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$. Caz nasol :C ← asta nu scrieți pe foaia de examen

Notez limita din numitor cu un L (am voie, $\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}} \neq 0$).

Deci $L = \lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}$. Vom folosi $A^B = e^{B \ln A}$.

Aplic ln

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} \ln\left((\ln n)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\ln n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n}$$

$$\overset{\text{L'Hopital}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{[\ln(\ln n)]'}{n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Așadar avem că $\ln L = 0 \iff L = 1$

Revenim la limita inițială

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ din crit nec de divergență

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ divergentă.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Sol:

Folosim crit de comp cu lim.

Notez $x_n = \sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Putem fi de acord că pentru un $z \to 0$, $\ln(1+z) \sim z$

Noi avem $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ cu $n \to \infty$, deci $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

Ne gândim să alegem $y_n = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} = n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{-1} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Deci $\sum_n y_n = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$

Deci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Folosim schimbare de variabilă $\begin{cases} a = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{a} \\ n \to \infty \Rightarrow a \to 0 \end{cases}$

Deci avem $\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\ln(1+a) = \underbrace{\lim_{a\to 0} \frac{\ln(1+a)}{a}}_{\text{limită fundamentală}} = 1 \in (0,\infty)$

limită fundamentală vezi cheat sheet 1

$\Rightarrow \sum_n x_n \sim \sum_n y_n$

$\sum_n y_n = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ } serie armonică generalizată, $\alpha \le 1$

$\hookrightarrow$ div

$\Rightarrow \sum_n \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ divergentă

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2025^n}{x^n \sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n^2+31}}$, $x>0$

Sol: Folosesc criteriul raportului:

Notez $a_n = \frac{2025^n}{x^n \sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n^2+31}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2025^{n+1}}{2025^n} \cdot \frac{x^n}{x^{n+1}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n+1}{n+2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{n^2+31}{(n+1)^2+31}}$$

$$= 2025 \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2025}{x}$$

Conform Criteriului raportului avem:

1) Dacă $\frac{2025}{x} < 1$ (i.e. $x \in (2025, \infty)$), at seria e conv

2) Dacă $\frac{2025}{x} > 1$ (i.e. $x \in (0, 2025)$), at seria e div

3) Dacă $\frac{2025}{x} = 1$ (i.e. $x = 2025$), at crit. nu decide

Fie $x = 2025 \Rightarrow a_n = \frac{\cancel{2025^n}}{\cancel{2025^n} \sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n^2+31}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n^2+31}}$

Folosesc Crit de comp cu limită. Voi alege y_n format din $1 / \sqrt{\text{termeni dominanți}}$, adică $y_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}\ \sqrt[5]{n^2}}$

$y_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{2}{5}}} = \underbrace{\frac{1}{n^{\frac{11}{15}}}}_{\to \text{div}}$ } serie armonică generalizată, $\alpha \le 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n^2+31}} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot \sqrt[5]{n^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[5]{\frac{n^2}{n^2+31}}}_{\to 1} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \sum_n x_n \sim \sum_n y_n$$

$\Rightarrow \sum_n \frac{2025^n}{x^n \sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[5]{n^2+31}}$ → conv pt $x \in (2025, \infty)$

→ div pt $x \in (0, 2025]$