$M_B(T) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(T_{|U}) & H \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ pt. niște matrice H, Q. Atunci

$$P_T(X) = \det\begin{pmatrix} \boxed{XI_m - M_{B_0}(T_{|U})} & -H \\ 0 & XI_{n-m} - Q \end{pmatrix} = \underbrace{\det(XI_m - M_{B_0}(T_{|U}))}_{P_{T_{|U}}(X)} \det(XI_{n-m} - Q),$$

unde $n = \dim V$, $m = \dim U$. [Observație: formula lui Laplace și consecințele ei din Exercițiile 1-4) rămân valabile și când lucrăm cu matrice peste un inel comutativ].

Obținem că $P_{T_{|U}} \mid P_T$.

Dacă λ e val. proprie a lui T, notăm

$V_\lambda(T) = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$, care e clar subsp. T-invariant în V.

Notăm: $a_T(\lambda)$ = ordinul de multiplicitate al lui λ în P_T (s.n. multiplicitatea algebrică a lui λ)

$g_T(\lambda) = \dim V_\lambda(T)$ (s.n. multiplicitatea geometrică a lui λ).

Corolar. $g_T(\lambda) \le a_T(\lambda)$.

Dem. Aplic Prop. precedentă pt. $U = V_\lambda(T)$. Cum U are o bază (de cardinal $g_T(\lambda)$) formată din vectori proprii pt. $T_{|U}$ (în $V_\lambda(T)$ toți vectorii sunt proprii, coresp. val. proprii λ), avem $P_{T_{|V_\lambda(T)}}(X) = (X-\lambda)^{g_T(\lambda)}$. Cum $P_{T_{|V_\lambda(T)}} \mid P_T \Rightarrow g_T(\lambda) \le a_T(\lambda)$.

Exercițiu. Fie $\dim V = 2$ și T cu $M_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ într-o bază B. Atunci $\lambda = 1$ e val. proprie a lui T, $a_T(1) = 2$ și $g_T(1) = 1$. Așadar $g_T(\lambda) < a_T(\lambda)$.

Teoremă. T este diagonalizabilă dacă și numai dacă sunt satisfăcute următoarele două condiții:

(1) P_T se scrie ca produs de factori liniari în $K[X]$;

(2) $a_T(\lambda) = g_T(\lambda)$ pt. orice val. proprie λ a lui T.

Dem. ~~Arătăm că T diagonalizabil $\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1}(T)+\dots+V_{\lambda_r}(T)$, unde $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sunt valorile proprii distincte ale lui T (din K).~~

~~"$\Rightarrow$" Dacă T e diagonalizabil, atunci V are o bază $v_1,\dots,v_n$ din vectori proprii. Cum fiecare v_i se găsește într-un $V_{\lambda_k}(T)$, avem $V = \langle v_1,\dots,v_n\rangle \subset V_{\lambda_1}(T)+\dots+V_{\lambda_r}(T)$, deci avem egalitate.~~

~~"$\Leftarrow$" Presupunem că $V = V_{\lambda_1}(T)+\dots+V_{\lambda_r}(T)$. Cum vectorii proprii coresp. unor valori proprii distincte sunt lin. indep., rezultă că $V_{\lambda_1}(T)+\dots+V_{\lambda_r}(T)$ e sumă directă internă, deci $V = V_{\lambda_1}(T)\oplus\dots\oplus V_{\lambda_r}(T)$. Dacă $B_1,\dots,B_r$ sunt baze în $V_{\lambda_1}(T),\dots,V_{\lambda_r}(T)$, rezultă că $B_1\cup\dots\cup B_r$ e o bază pt. V, deci V are o bază din vectori proprii, adică T e diag.~~

~~Acum ținând cont de cele spuse la "$\Leftarrow$", avem și~~

~~T diagonaliz.~~ Fie ~~acum $B_1,\dots,B_r$ baze în $V_{\lambda_1}(T),\dots,V_{\lambda_r}(T)$.~~

~~Atunci $B_1\cup\dots\cup B_r$ e bază pt. $V_{\lambda_1}(T)+\dots+V_{\lambda_r}(T)$~~

Fie $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in K$ valorile proprii distincte ale lui T. Atunci

$$(*)\qquad \sum_{i=\overline{1,r}} g_T(\lambda_i) \le \sum_{i=\overline{1,r}} a_T(\lambda_i) \le n \qquad (\text{unde } n = \dim V = \text{grad } P_T).$$

Observăm că în (*) prima inegalitate este egalitate dacă și numai dacă (2) e satisfăcută, iar a doua inegalitate este egalitate dacă și numai dacă (1) e satisfăcută.

Dacă (1) și (2) au loc, atunci în (*) avem egalități, deci $\sum_{i=\overline{1,r}} \dim V_{\lambda_i}(T) = \sum_{i=\overline{1,r}} g_T(\lambda_i) = n = \dim V$. Pt. fiecare $1\le i\le r$ alegem o bază B_i în $V_{\lambda_i}(T)$. Atunci $\bigcup_{i=\overline{1,r}} B_i$ e liniar independentă: într-adevăr, dacă o combinație liniară (C) de elemente din $\bigcup_{i=\overline{1,r}} B_i$ e nulă, cum orice combinație liniară de elemente din B_i este vector propriu corespunzător lui λ_i, folosind Propoziție de la pag. 6 $\Rightarrow$ pt. fiecare i, combinația liniară de elemente din B_i care apare în (Σ) e nulă, și atunci toți coeficienții sunt 0.

Cum $\left|\bigcup_{1\le i\le r} B_i\right| = \sum_{i=\overline{1,r}} \dim V_{\lambda_i}(T) = n \Rightarrow \bigcup_i B_i$ bază în V, deci V are o bază de vectori proprii pt. T, adică T e diagonalizabilă.

Reciproc, presupunem că T e diagonalizabilă. Atunci V are o bază formată din vect. proprii pt. T, de unde $V = \sum_{i=\overline{1,r}} V_{\lambda_i}(T)$.

Din Prop. de la pag 6 $\Rightarrow V = \bigoplus_{i=\overline{1,r}} V_{\lambda_i}(T)$. Egalând dimensiunile $\Rightarrow n = \sum_{i=\overline{1,r}} g_T(\lambda_i)$ și atunci în (*) ambele inegalități trebuie să fie egalități, adică (1) și (2) sunt satisfăcute.

Din demonstrație teoremei rezultă și:

<u>Corolar</u>. Dacă T e diagonalizabilă, atunci $V = V_{\lambda_1}(T) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}(T)$, unde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sunt val. proprii distincte ale lui T.

<u>Descompunerea spațiului</u>

Fie $T: V \to V$ apl. liniară, unde $\dim V = n$.

<u>Obiectiv</u>: Să găsim o descompunere a lui V ca sumă directă de niște subsp. T-invariante care să fie adevărată și în cazul în care T nu e neapărat diagonalizabil.

Dacă $\lambda \in K$, notăm

$$V^{\lambda}(T) = \{ v \in V \mid \text{există } m \in \mathbb{N}^* \text{ cu } (\lambda I - T)^m (v) = 0 \}$$

Atunci:

(1) $V^\lambda(T)$ este subspațiu T-invariant al lui V.

Dem. Fie $v_1, v_2 \in V^\lambda(T)$ și $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ cu $(\lambda I - T)^{m_i}(v_i) = 0$. Dacă $m = \max\{m_1, m_2\}$, atunci $(\lambda I - T)^m(v_i) = 0$ pt $i = 1, 2$, deci $(\lambda I - T)^m(v_1 + v_2) = 0$, adică $v_1 + v_2 \in V^\lambda(T)$.

Dacă $v \in V^\lambda(T)$ cu $(\lambda I - T)^m(v) = 0$, iar $\alpha \in K$, atunci $(\lambda I - T)^m(\alpha v) = 0$, deci și $\alpha v \in V^\lambda(T)$.

Așadar $V^\lambda(T)$ e subsp. El este T-invariant, pt că dacă $v \in V^\lambda(T)$, fie de exemplu $(\lambda I - T)^m(v) = 0$, atunci

$(\lambda I - T)^{m+1}(v) = 0 \Rightarrow (\lambda I - T)^m(\lambda v - T(v)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \underbrace{(\lambda I - T)^m(v)}_{=0} - (\lambda I - T)^m(T(v)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda I - T)^m(T(v)) = 0$, deci $T(v) \in V^\lambda(T)$.

(2) $V^\lambda(T) \neq 0 \iff \lambda$ e valoare proprie pt. T.

În plus, în acest caz avem $V_\lambda(T) \subset V^\lambda(T)$.

Dem. "$\Rightarrow$" Fie $v \in V^\lambda(T) \setminus \{0\}$ și fie $m \in \mathbb{N}^*$ minim cu $(\lambda I - T)^m(v) = 0$. Dacă $m = 1$, atunci $T(v) = \lambda v$, deci λ e val. pr. Dacă $m > 1$, atunci $(\lambda I - T)^{m-1}(v) \neq 0$ și $(\lambda I - T)((\lambda I - T)^{m-1}(v)) = 0$, deci $(\lambda I - T)^{m-1}(v)$ e vector propriu corespunzător lui λ, adică λ e val. proprie.

"$\Leftarrow$" Pres. λ val. proprie. Fie $v \in V_\lambda(T)$. Atunci $(\lambda I - T)(v) = 0$, deci $v \in V^\lambda(T)$. Așadar $0 \neq V_\lambda(T) \subset V^\lambda(T)$, deci $V^\lambda(T) \neq 0$; asta demonstrează și ultima afirmație.

(3) $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \subset \operatorname{Ker}(\lambda I - T)^2 \subset \dots$ și

$V^\lambda(T) = \bigcup_{m \geq 1} \operatorname{Ker}(\lambda I - T)^m$, reuniunea șirului crescător de subspații de mai sus.

Dem. $v \in \ker(\lambda I-T)^m \Rightarrow (\lambda I-T)^m(v)=0 \Rightarrow (\lambda I-T)^{m+1}(v)=0 \Rightarrow v\in\ker(\lambda I-T)^{m+1}$, deci $\ker(\lambda I-T)^m \subset \ker(\lambda I-T)^{m+1}$. A doua parte rezultă direct din definiţia lui $V^\lambda(T)$.

(4) Dacă $\ker(\lambda I-T)^p = \ker(\lambda I-T)^{p+1}$ pt. un $p\in\mathbb{N}^*$, atunci

$\ker(\lambda I-T)^p = \ker(\lambda I-T)^{p+1} = \dots$ ($=\ker(\lambda I-T)^h$ pt. orice $h\geq p$).

Dem. Inducţie după $h\geq p+1$ că $\ker(\lambda I-T)^h = \ker(\lambda I-T)^p$.

Pt. $h=p+1$ din ipoteză.

$h \to h+1$ (unde $h\geq p+1$) Fie $v\in\ker(\lambda I-T)^{h+1}$, atunci

$$0=(\lambda I-T)^{h+1}(v)=(\lambda I-T)^h(\lambda v-T(v)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda v - T(v)\in\ker(\lambda I-T)^h = \ker(\lambda I-T)^p.$$

Atunci $0=(\lambda I-T)^p(\lambda v-T(v))=(\lambda I-T)^{p+1}(v) \Rightarrow$

$$\Rightarrow v\in\ker(\lambda I-T)^{p+1} = \ker(\lambda I-T)^p.$$

Consecinţă. Cum V e f.d., rezultă că există $m\in\mathbb{N}^*$ cu

$$\ker(\lambda I-T) \subsetneq \ker(\lambda I-T)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(\lambda I-T)^m = \ker(\lambda I-T)^{m+1} = \dots,$$

deci avem $V^\lambda(T)=\ker(\lambda I-T)^m$.

[dacă $m=1$ avem egalităţi chiar de la prima incluziune, şi atunci $V^\lambda(T)=\ker(\lambda I-T)=V_\lambda(T)$].

(5) Fie m ca în Consecinţa de mai sus. Alegem o bază a lui $\ker(\lambda I-T)$, o completăm până la o bază a lui $\ker(\lambda I-T)^2$, pe aceasta din urmă până la o bază a lui $\ker(\lambda I-T)^3$, ş.a.m.d. În final obţinem o bază B_0 a lui $V^\lambda(T)=\ker(\lambda I-T)^m$.

Atunci avem

$$M_{B_0}(T_{|V^\lambda(T)}) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{matrix}} & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{\begin{matrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{matrix}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{\begin{matrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

(blocurile de deasupra blocurilor diagonale sunt niște matrice, cele de sub sunt toate nule).

Într-adevăr, fie $v \in Ker(\lambda I - T)^{i+1} \setminus Ker(\lambda I - T)^{i}$ și fie $y = \lambda v - T(v)$. Atunci

$(\lambda I - T)^{i}(y) = (\lambda I - T)^{i+1}(v) = 0$, deci $y \in Ker(\lambda I - T)^{i}$ și

atunci $T(v) = \lambda v - y \in \lambda v + Ker(\lambda I - T)^{i}$.

În particular obținem că $P_{T_{|V^\lambda(T)}}(X) = (X-\lambda)^{\dim V^\lambda(T)}$.

În plus, dacă $\mu \in K$, $\mu \neq \lambda$, atunci matricea lui $(\mu I - T)_{|V^\lambda(T)}$ în B_0 este

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\mu-\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu-\lambda\end{matrix}} & \begin{matrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & * \end{matrix} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix}\mu-\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu-\lambda\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

, care e inversabilă $\left(\det = (\mu-\lambda)^{\dim V^\lambda(T)}\right)$,

deci și $(\mu I - T)_{|V^\lambda(T)}$ e izomorfism.

<u>Prop.</u> Fie λ o valoare proprie a lui T. Atunci

$$\dim V^\lambda(T) = a_T(\lambda).$$

<u>Dem.</u> Fie $\dim V^\lambda(T) = k$. Fie $B_0 = \{e_1, \ldots, e_k\}$ bază a lui $V^\lambda(T)$, pe care o completăm până la o bază $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V.

Atunci $M_B(T) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(T_{|V^\lambda(T)}) & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ pt. niște $A \in M_{k,n-k}(K)$, $B \in M_{n-k}(K)$.