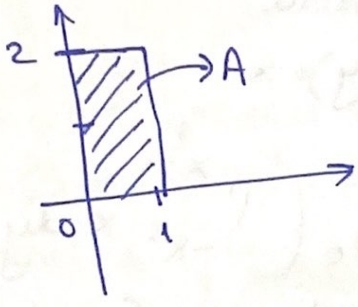
Curs 13
Exerciții

1. Det.:

a) $\iint_A (2x+y)\,dx\,dy$, unde $A=[0,1]\times[0,2]$

Sol



$A=[0,1]\times[0,2] \Rightarrow A\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și A compactă

Fie $f: A\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=2x+y$

f cont

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^2 (2x+y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1\left[\left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}\right]dx$$

$$= \int_0^1 (4x+2)\,dx = 4\frac{x^2}{2}+2x\Big|_{x=0}^{x=1}$$

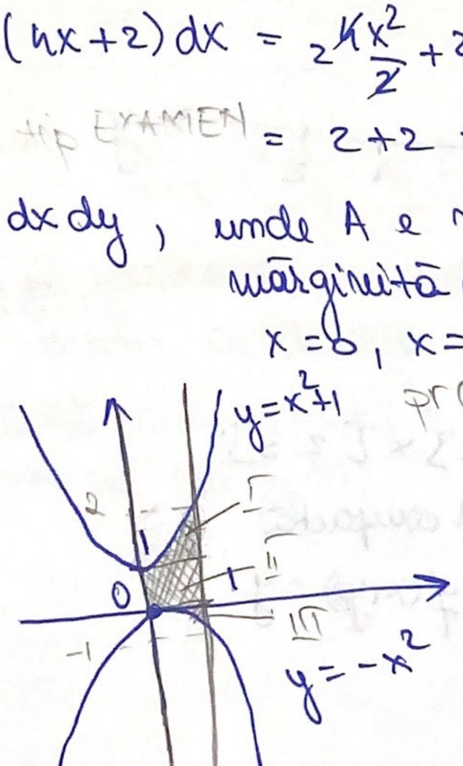
→ tip EXAMEN $= 2+2=4$

b) $\iint_A x\,dx\,dy$, unde A e mulțimea plană mărginită de $y=x^2+1$, $y=-x^2$, $x=0$, $x=1$

Sol

pr OY: $y <$ sus 2, jos -1

$x <$ stg., și buc dr



pr OX: $x <$ la stg: 0, la dr: 1

y - în sus: $y=x^2+1$

în jos: $y=-x^2$

Proiectăm A pe Ox

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1],\ -x^2\le y\le x^2+1\}$

Fie $\alpha,\beta:[0;1]\to\mathbb{R}$ $\alpha(x)=-x^2$, $\beta(x)=x^2+1$

α,β - cont.

$A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ şi A compactă

Fie $f:A\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=x$

f cont

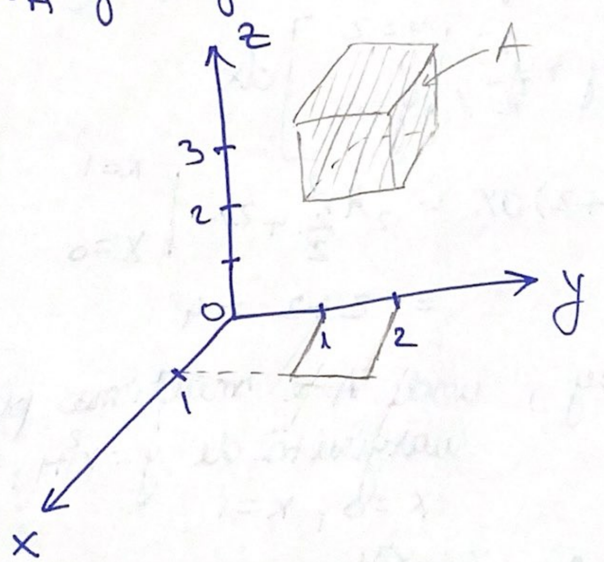
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{-x^2}^{x^2+1} x\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(xy\Big|_{y=-x^2}^{y=x^2+1}\right)dx=\int_0^1 x(x^2+1+x^2)\,dx$$

$$=2\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \quad \square$$

c) $\iiint_A y\,dx\,dy\,dz$, unde $A=[0,1]\times[1,2]\times[2,3]$

Sol



$A=[0,1]\times[1,2]\times[2,3]$

$A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ şi A compactă

Fie $f:A\to\mathbb{R}$ $f(x,y,z)=y$

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_2^3 y\,dz \right) dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(yz \Big|_{z=2}^{z=3} \right) dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 y(3-2)\,dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=2} \right) dx = \int_0^1 \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2} \quad \square$$

Obs: Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Lucrăm în sp. metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$

Prop: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime convexă și mărginită. not d

Atunci A e măsurabilă Jordan

orice 2 pct ai, segm care le unește rămâne în mulțime

Def: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathring{A}$ și $h: A \to \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ o funcție care admite toate derivatele parțiale în pct. a

Matricea $\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \le i \le j \le n}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \text{ s.n}$$

matricea ~~și jac~~ jacobiană (sau matr. Jacobi) a lui h în a și se notează cu $J_h(a)$

Determinantul acestei matrici s.n jacobianul lui h în a și se notează cu $\det J_h(a)$

Teoremă (Teorema de schimb de variabilă) – Varianta 1

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V mulțimi deschise, $h: U \to V$ un difeomorfism de clasă C^1 (i.e h e bijectivă și h, h^{-1} sunt de clasă C^1), $\emptyset \neq A \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\bar{A} \subset U$ și $f: h(A) \to \mathbb{R}$ o fct integrab R. și mărginită (Avem din cele de mai sus că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$)

Atunci funcția $(f \circ h) \cdot |\det J_h| : A \to \mathbb{R}$ e integr. R. și mărginită și

$$\int_{h(A)} f(y)\,dy = \int_A \left((f \circ h)(x) \cdot |\det J_h(x)| \right) dx$$

Def: O mult. $A \subset \mathbb{R}^n$ s.n neglijabilă Lebesgue dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (D_K)_{K \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a.î.:

$A \subset \bigcup_{K=0}^{\infty} \mathring{D}_K$ și și $\sum_{K=0}^{\infty} vol(D_K) < \varepsilon$

Obs

1) Orice submult. a unei mult neglij Lebesgue este, la rândul ei, neglijabilă Lebesgue

2) Orice mulț. cel mult numărabilă este neglijabilă Lebesgue

mulțimea lui Kantor (inf) nenum și e neglij. Lebesgue

3) Orice reuniune cel mult numărabilă de mult. neglijabile Lebesgue este neglijabilă Lebesgue

4) Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\mu(A) = 0$. Atunci A este neglijabilă Lebesgue

Teoremă (Teorema de schimb de variabilă - Var 2)

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V deschise
$h: U \to V$ un difeomorfism de clasă C^1 a.î. $Fr\, V = \partial V$
e neglijabilă Lebesgue, $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A \subset U$,
h, $\det J_h$ sunt mărginite pe A și mai considerăm
$f: h(A) \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg (din cele de mai
sus avem că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$). $\det(J_h(A))$ $h(A)$ mărg și

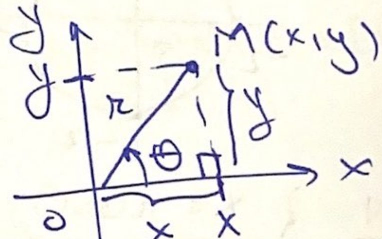
Atunci funcția $f \circ h \cdot |\det J_h| : A \to \mathbb{R}$ e integr. R și
mărg și
$\exists M > 0$ a.î. $\|h(x)\| \leq M$, $\forall x \in A$
$\exists M_1 > 0$ a.î. $\|\det J_h(x)\| \leq M_1$ $\forall x \in A$

$$\int_{h(A)} f(y)\,dy = \int_A \left((f \circ h)(x) \cdot |\det J_h(x)| \right) dx$$

- Schimb standard de variab pt integrala duble

1. Trecerea de la coord carteziene la coord polare

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta \end{cases}$$



Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (putem avea $\alpha = \beta = 0$)
Fie $\emptyset \neq A \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr R și mărg.

S.V $\begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta & r \in [0, \infty),\ \theta \in [0, 2\pi] \\ y = \beta + r\sin\theta \end{cases}$

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r f(\alpha + r\cos\theta, \beta + r\sin\theta)\,dr\,d\theta$

unde B se găsește din coord $(x,y) \in A$
r $[0,\infty) \times [0, 2\pi]$

2. Trecerea de la coord carteziene la coord polare generalizate

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (putem avea $\alpha = \beta = 0$) şi $a, b \in (0; \infty)$

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ şi $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R şi mărg.

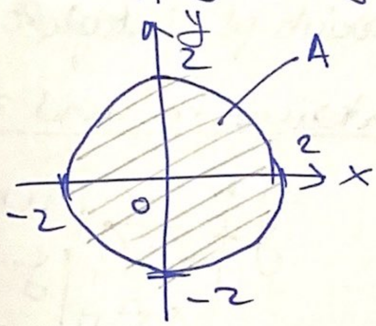
S.V $\begin{cases} x = \alpha + a \cdot r \cdot \cos\theta & r \in [0; \infty),\ \theta \in [0, 2\pi] \\ y = \beta + b\, r \cos\theta \end{cases}$

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B ab\, r\, f(\alpha + a r \cos\theta, \beta + b r \cos\theta)\,dr\,d\theta$, unde B se găseşte din condiţia $(x,y) \in A$.

$B \subset [0;\infty) \times [0; 2\pi]$

exc: Det $\iint_A y\,dx\,dy$ unde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

Sol



A mărg şi convexă $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

A închisă şi mărg $\Rightarrow$ A compactă

Fie $f: A \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = y$

f cont.

S.V $\begin{cases} x = r\cos\theta & r \in [0;\infty),\ \theta \in [0; 2\pi] \\ y = r \sin\theta \end{cases}$

$(x,y) \in A \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta \leq 4$

$\Rightarrow r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) \leq 4 \Rightarrow r^2 \leq 4 \Rightarrow r \in [0, 2]$

$\downarrow$

$r \in [0,\infty)$

Fie $B = [0;2] \times [0; 2\pi]$

$\iint_A f(x,y) = \iint_B r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta$

$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r(r\sin\theta)\,d\theta \right) dr$

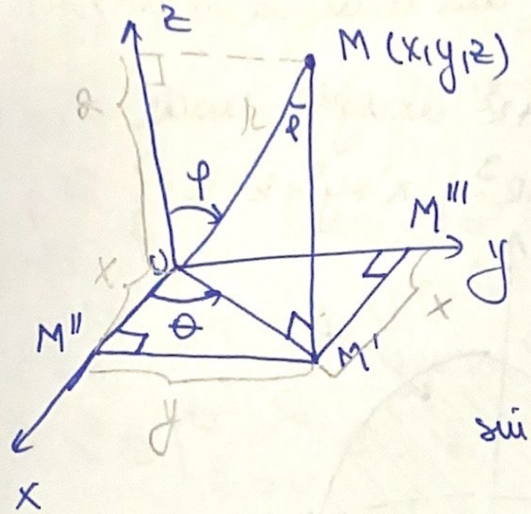
$= \int_0^2 r^2 \left(-\cos\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta = 2\pi} \right) dr$

$= \int_0^2 r^2 (-1)(1-1)\,dr = 0$

$\square$

• Schimbări standard de variabilă în integrala triplă

1. Trecerea de la coord carteziene la coord sferice



$\cos\varphi = \dfrac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\varphi$

$\sin\varphi = \dfrac{OM'}{r} \Rightarrow OM' = r\sin\varphi$

$\cos\theta = \dfrac{x}{OM'}$

$\Rightarrow x = r\cos\theta\sin\varphi$

$\sin\theta = \dfrac{y}{OM'} \Rightarrow y = r\,\cancel{\cos}\sin\theta\sin\varphi$

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = \gamma = 0$)

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ integr R și mărg.

$$\underline{\underline{S.V}} \quad \begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta\sin\varphi & r \in [0,\infty),\ \theta \in [0, 2\pi] \\ y = \beta + r\sin\theta\sin\varphi & \varphi \in [0,\pi] \\ z = \gamma + r\cos\varphi \end{cases}$$

Avem $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B r^2\sin\varphi$

$f(\alpha + r\cos\theta\sin\varphi,\ \beta + r\sin\theta\sin\varphi,\ \gamma + r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi$,

unde B se găsește din cond $(x,y,z) \in A$.

2. Trecerea de la coord carteziene la coord sferice generaliz

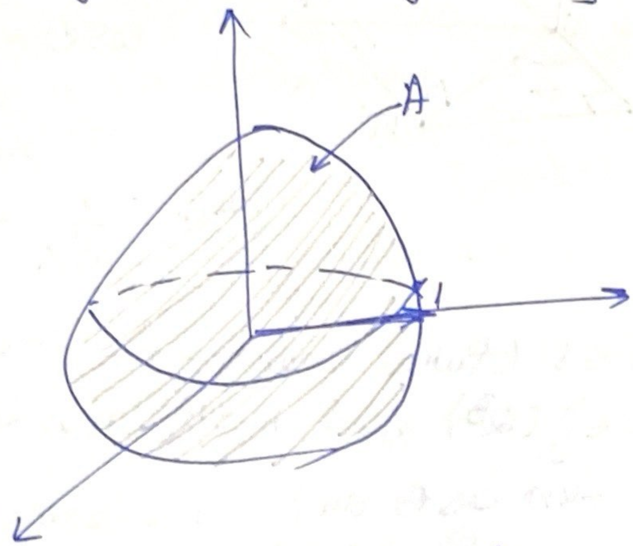
Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = \gamma = 0$) și $a, b, c \in (0,\infty)$. Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ integr R și mărginită

$$\underline{SV}: \begin{cases} x = \alpha + a r\cos\theta\sin\varphi & r \in [0,\infty) \\ y = \beta + b r\sin\theta\sin\varphi & \theta \in [0, 2\pi] \\ z = \gamma + c r\cos\varphi & \varphi \in [0,\pi] \end{cases}$$

Avem $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B abc\,r^2 \sin\varphi\, f(\alpha + ar\cos\theta\sin\varphi,$
$\beta + br\sin\theta\sin\varphi,\ \gamma + cr\cos\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi,$
unde B se găsește din condiția $(x,y,z) \in A$

Ex Det $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, unde
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

Sol



A convexă și mărg $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$
A compactă
Fie $f: A \to \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
f cont

S.V $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ $r \in [0;\infty)$, $\theta \in [0;2\pi]$, $\varphi \in [0;\pi]$

$(x,y,z) \in A \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \le 1$
$\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi \le 1$
$\Leftrightarrow r^2\sin^2\varphi\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + r^2\cos^2\varphi \le 1$
$\Leftrightarrow r^2\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1} \le 1 \Leftrightarrow r^2 \le 1 \Rightarrow$

$r \in [0;\infty)$

$\Rightarrow r \in [0;1]$

Fie $B = [0;1] \times [0;2\pi] \times [0;\pi]$

$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B r^2 \sin\varphi\, f(r\cos\theta \sin\varphi,$

$r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r^2 \sin\varphi \sqrt{r^2}\, d\varphi \right) d\theta \right) dr$

$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^3 (-\cos\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\theta \right) dr$

$= \int_0^1 2r^2\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi \quad \square$

- <u>Teoremă</u> (Crit. lui Lebesgue de integrab. Riemann)

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită.

UASE:

1) f integr. R

2) D_f e neglij. Lebesgue, unde $D_f = \{x \in A \mid f$ nu e cont în $x\}$

Ex: Fie $f: [0,1] \times [2,3] \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = \begin{cases} 2x+3y, & (x,y) \in ([0,1]\times[2,3]) \setminus \{(0,2)\} \\ 1, & (x,y) = (0;2) \end{cases}$

Stud. integrab. R. a lui f

<u>Sol</u>: $|f(x,y)| = |2x+3y| \leq 2|x| + 3|y|$

$\leq 2\cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11 \ \forall (x,y) \in ([0,1]\times[2,3]) \setminus \{(0,2)\}$

$|f(0,2)| = 1 \leq 11$

Deci $|f(x,y)| \leq 11 \ \forall (x,y) \in ([0;1]\times[2,3])$, i.e f mărg

$D_f \subset \{(0,2)\}$

$\{(0,2)\}$ finită $\Rightarrow \{(0,2)\}$ neglij. Lebesgue

$\Rightarrow D_f$ neglij Lebesgue

Cf crit lui Lebesgue de integr. R avem că f e integr. R. $\square$

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ o fct mărg și

$\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o descomp Jordan a lui A

Notăm $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\forall\, i = \overline{1,p}$ și

$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\forall\, i = \overline{1,p}$

Def 1) $s_{\mathcal{A}}(f) = \sum\limits_{i=1}^{p} m_i \, \mu(A_i)$

(suma Darboux inferioară asoc. lui f și lui $\mathcal{A}$)

2) $S_{\mathcal{A}}(f) = \sum\limits_{i=1}^{p} M_i \, \mu(A_i)$

(suma Darboux super. asoc lui f și lui $\mathcal{A}$)

3) $\underline{\int_A} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$

$\sup\{s_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descomp. Jordan a lui $A\}$

(integr Darboux inferioară asoc fct f)

4) $\overline{\int_A} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$

$\inf\{S_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descomp Jordan a lui $A\}$

(integr. Darboux superioară asoc fct f)

Teoremă (Crit lui Darboux de integrab Riemann)

Sunt echiv:

1) f integr R

2) $\underline{\int}_A f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = \overline{\int}_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$,

caz în care avem $\int_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n =$

$\underline{\int}_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \overline{\int}_A f(x_1\dots x_n)\,dx_1\dots dx_n$

3) $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \mathcal{A}_\varepsilon$ descomp Jordan a lui A aî

$$S_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) - s_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) < \varepsilon$$

4) $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ aî $\forall\ \mathcal{A}$ descomp Jordan a lui A cu prop că $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon$, avem

$$S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$$

Obs 1) $s_{\mathcal{A}}(f) \le S_{\mathcal{A}}(f)$

2) $\underline{\int}_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n \le$

$\overline{\int}_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$

ex Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ aî $\mu(A)>0$ și

$f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 0; & x,y\in\mathbb{Q} \\ 1 & \text{altfel} \end{cases}$

Det $\overline{\iint}_A f(x,y)\,dxdy$, $\underline{\iint}_A f(x,y)\,dxdy$ și prec. dacă f e integr R.

$|f(x,y)| \leq 1 \ \forall \ (x,y) \in A \Rightarrow f$ mărg

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in \overline{1,p}}$ o desc. Jordan a lui A și

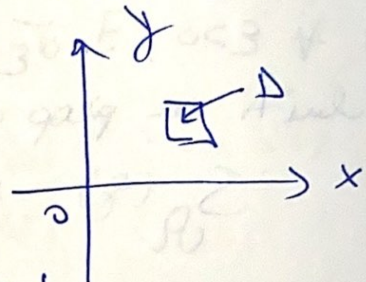
$$M_i = \sup\{ f(x,y) \mid (x,y) \in A_i \} \ \forall \ i = \overline{1,p}$$

$$m_i = \inf\{ f(x,y) \mid (x,y) \in A_i \} \ \forall \ i = \overline{1,p}$$

$$S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{p} M_i \mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i) > 0}}^{p} M_i \mu(A_i)$$

$$s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{p} m_i \mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i) > 0}}^{p} m_i \mu(A_i)$$

$\mu(A_i) > 0 \Rightarrow \mu_*(A_i) > 0 \Rightarrow \exists \ D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,
$D \subset A_i$ și $vol(D) > 0$



Fie $B_i = \{ (x,y) \in A_i \mid x, y \in \mathbb{Q} \}$

și $C_i = \{ (x,y) \in A_i \mid x \notin \mathbb{Q}$ sau $y \notin \mathbb{Q} \}$

Pt orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ a.î. $\mu(A_i) > 0$ avem
$D \cap B_i \neq \emptyset$ și $D \cap C_i \neq \emptyset$

Deci, $\forall \ i \in \{1, \dots, p\}$ a.î. $\mu(A_i) > 0$ avem $M_i = 1$ și
$m_i = 0$.

Așadar, $$S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i) > 0}}^{p} 1 \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) = \mu(A)$$

și $$s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i) > 0}}^{p} 0 \cdot \mu(A_i) = 0$$