(a)

- Fie $A, B \in T_{n,p}$.

A, B sup. triunghiulare $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB$ sup. triunghiulară.

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \neq \hat{0}$

$\Rightarrow AB \in T_{n,p}$ 0,25 p

- Înmulțirea în $M_n(\mathbb{Z}_p)$ este asoc. 0,25 p

- Avem $I_n \in T_{n,p}$ element neutru

0,25 p

- Dacă $A \in M_n(\mathbb{Z}_p)$ sup. triunghiulară atunci A^* sup. triunghiulară.

Deci, dacă $A \in T_{n,p} \Rightarrow A^{-1} \in T_{n,p}$

0,25 p

Am arătat că $(T_{n,p}, \cdot)$ este grup.

(b) În $T_{3,2}$ avem:

$$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \quad \text{și}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

deci $T_{3,2}$ nu este abelian.

0,5 p

Verificăm ușor că

$$A := \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in Z(T_{3,2}).$$

0,1 p

Cum $T_{3,2}$ este un grup neabelian cu 8 elemente, știm că $\# Z(T_{3,2}) = 2$

$\Rightarrow Z(T_{3,2}) = \{I_3, A\}$

0,15 p

(c) $T_{2,2} \simeq \mathbb{Z}_2 \simeq S_2$

(0,15 p)

Arătăm că $(n,p)=(2,2)$ este unica pereche pt. care $T_{n,p}$ izo. cu un grup de permutări.

$$\# T_{n,p} = (p-1)^n \cdot p^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(0,2 p)

$\# S_n = n!$

Fie $n! = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ descompunerea în factori primi a lui $n!$.

Observăm că dacă

$$p_i^{\alpha_i} > p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$$

atunci $\underbrace{p_i = 2}_{\text{Caz I}}$ sau $\underbrace{n=3 \text{ și } p_i=3}_{\text{Caz II}}$.

(0,2 p)

Dacă presupunem că $T_{n,p} \simeq S_n$

$$\Rightarrow n! = (p-1)^n \cdot p^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Cum $p^{\frac{n(n-1)}{2}} > (p-1)^n$, rezultă că suntem într-unul dintre cazurile I și II. Cazul II nu este posibil $\Rightarrow$ $p=2$ $\Rightarrow$ $n!$ este o putere a lui 2 $\Rightarrow$ $n! = 2$ $\Leftrightarrow$ $(n,p)=(2,2)$ unica soluție

(0,2 p)