d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \int_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \int_{\ln c}^{\ln\frac{1}{2}} t^{-2}\,dt$

Not $t = \ln x$

$\frac{1}{x}\,dx = dt$

$x = c \Leftrightarrow t = \ln c$

$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \ln\frac{1}{2}$.

$= \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \left(-\frac{1}{t} \Big|_{\ln c}^{\ln\frac{1}{2}} \right) = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \left(-\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} + \frac{1}{\ln c} \right) = -\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln 2}$ $\square$

e) $\int_0^1 \frac{1}{x^5}\,dx = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \int_c^1 x^{-5}\,dx = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \left(-\frac{1}{4x^4} \Big|_c^1 \right) =$

$= \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4c^4} \right) = +\infty.$ $\square$

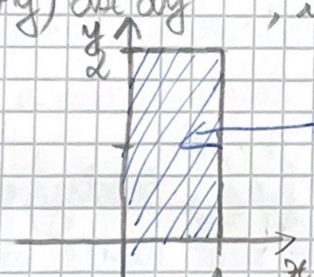
9.01.2023

Curs 13.

1) Exc: Det:

a) $\iint_A (2x+y)\,dx\,dy$, unde $A = [0,1]\times[0,2]$.

<ins>Sol</ins>:



$A = [0,1]\times[0,2] \Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și A compactă.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x+y$.

f cont.

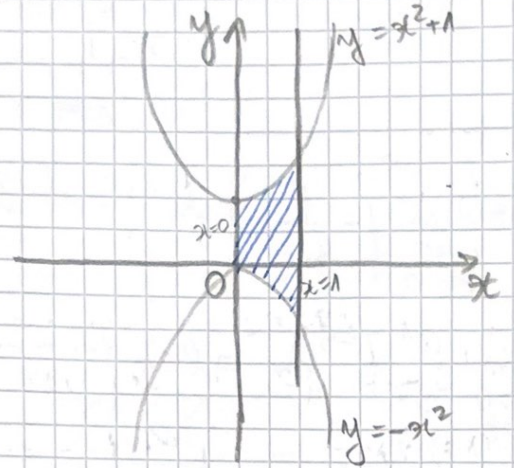
$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (2x+y)\,dy \right) dx =$

$= \int_0^1 \left[\left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=2} \right] dx = \int_0^1 (4x+2)\,dx =$

$= 4\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = 2+2 = 4$ $\square$

b) $\iint_A x\,dx\,dy$, unde A e mulț. plană mărginită de $y=x^2+1$, $y=-x^2$, $x=0$ și $x=1$.

<u>Sol</u>:



$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1],\ -x^2\le y\le x^2+1\}$

Fie $\alpha,\beta:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=-x^2$, $\beta(x)=x^2+1$

α,β cont

$A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și A compactă

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x$

f cont.

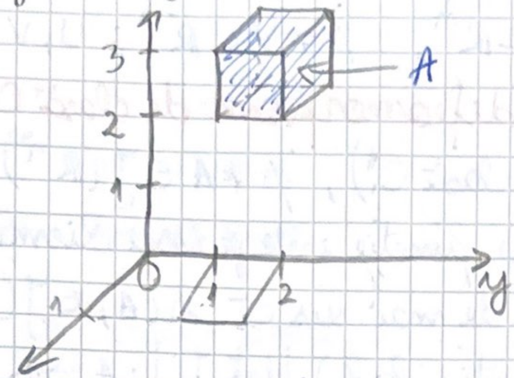
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{-x^2}^{x^2+1}x\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1 xy\Big|_{y=-x^2}^{y=x^2+1}dx=\int_0^1 x(x^2+1+x^2)\,dx=$$

$$=2\frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=1}+\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \qquad \square$$

c) $\iiint_A y \, dx\, dy\, dz$ unde $A = [0,1]\times[1,2]\times[2,3]$.

Sol:



$$\iiint_A y \, dx\, dy\, dz = \int_0^1\left(\int_1^2\left(\int_2^3 y \, dz\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\int_1^2 yz\Big|_{z=2}^{z=3} dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_1^2 y(3-2)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{y=2}\right)dx = \int_0^1 \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2} \quad \square$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Lucrăm în sp. metric $(\mathbb{R}^n, \underset{d}{d_2})$ [not]

Prop: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ o mulț. convexă și mărginită. Atunci A e măsurabilă Jordan. (i.e. $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$)

Def: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathring{A}$ și $h: A \to \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ o funcție care admite toate derivatele parțiale în punctul a.

Matricea
$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

s.n. matricea jacobiană (sau matricea Jacobi) a lui h în a și se notează $J_h(a)$.

Determinantul acestei matrici s.n. jacobianul lui h în a și se notează $\det J_h(a)$.

Teorema de schimbare de variabilă – Varianta 1

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V mulțimi deschise, $h: U \to V$ un difeomorfism de clasă C^1 (i.e. h e bijectivă și h, h^{-1} sunt de clasă C^1), $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\overline{A} \subset U$ și $f: h(A) \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann și mărginită. (avem din cele de mai sus că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$).

Atunci funcția $(f \circ h) \cdot |\det J_h| : A \to \mathbb{R}$ e integr. Riemann și mărginită și $\int_{h(A)} f(y)\, dy = \int_A \left((f \circ h)(x) \cdot |\det J_h(x)| \right) dx$.

<u>Def</u>: O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ s.n. neglijabilă Lebesgue dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (\Delta_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathring{\Delta}_k$ și $\sum_{k=0}^{\infty} vol(\Delta_k) < \varepsilon$.

<u>Obs</u>: 1) Orice submulțime a unei mulț. neglijabile Lebesgue este negl. Lebesgue.

2) Orice mulț. cel mult numărabilă este neglijabilă Lebesgue.

3) Orice reuniune cel mult numărabilă de mulț. neglijabile Lebesgue este neglij. Lebesgue.

4) Fie A măsurabilă Jordan a.î. $\mu(A) = 0$. $\Rightarrow A$ negl. Lebesgue

Teorema de schimbare de variabilă – Varianta 2

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V deschise, $h: U \to V$ un difeomorfism de clasă C^1 a.î. $Fr\, V = \partial V$ e negl. Lebesgue, $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A \subset U$, h și $\det J_h$ sunt mărginite pe A. și ~~h~~ $f: h(A) \to \mathbb{R}$ integr. Riemann și mărg
(din cele de mai sus avem că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$)

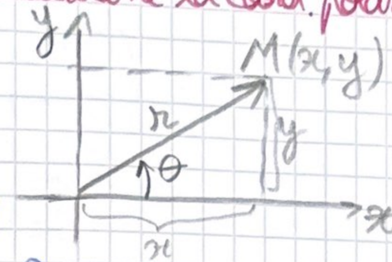
Atunci funcția $(f \circ h) \cdot |\det J_h| : A \to \mathbb{R}$ e integr. R. și mărg și $\int_{h(A)} f(y)\, dy = \int_A \left((f \circ h)(x) \cdot |\det J_h(x)| \right) dx$.

Schimbări standard de variabilă pt integrala dublă

1) Teorema de la coordonate carteziene la coord. polare

$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$



Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = 0$)

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R. și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta \\ y = \beta + r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r f(\alpha + r\cos\theta, \beta + r\sin\theta)\,dr\,d\theta$

unde B se găsește din condiția

$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2}$

2) Teorema de la coordonate carteziene la coord polare generalizate

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = 0$) și $a, b \in (0, \infty)$.

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R. și mărg.

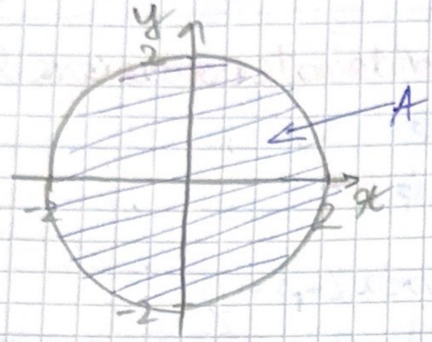
S.V. $\begin{cases} x = \alpha + ar\cos\theta \\ y = \beta + br\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B abr\, f(\alpha + ar\cos\theta + \beta + br\sin\theta)\,dr\,d\theta$

unde $B \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ se găsește din condiția $(x,y) \in A$.

Ex: Det $\iint_A y\,dx\,dy$ unde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$

Sol:



A mărg și convexă $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$
A închisă și mărg. $\Rightarrow$ A compactă
Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$.
f cont.

S.V. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

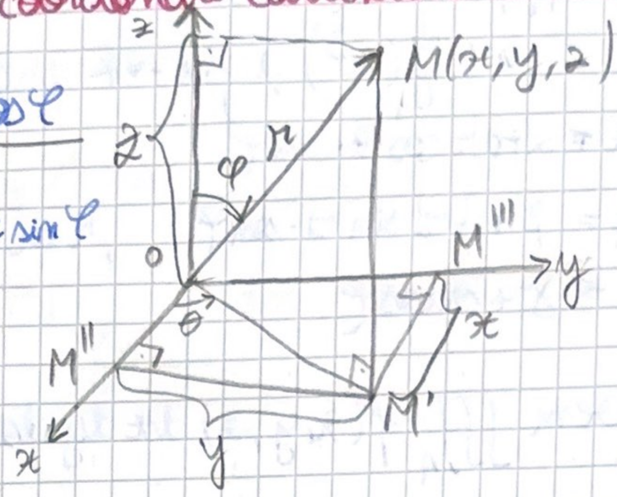
$(x,y) \in A \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4 \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \leq 4$
$\Leftrightarrow r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}) \leq 4 \Leftrightarrow r^2 \leq 4 \overset{r \in [0,\infty)}{\Leftrightarrow} r \in [0,2]$

Fie $B = [0,2] \times [0, 2\pi]$.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$$
$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r(r\sin\theta)\,d\theta \right) dr = \int_0^2 r^2 \left(-\cos\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) dr =$$
$$= \int_0^2 r^2 (-1)\cdot(1-1)\,dr = 0. \quad \square$$

Schimbări standard de variabilă în integrala triplă

1) Trecerea de la coordonate carteziene la coord sferice



$\cos \varphi = \frac{z}{r} \Rightarrow \underline{z = r \cos \varphi}$

$\sin \varphi = \frac{OM'}{r} \Rightarrow OM' = r \sin \varphi$

$\cos \theta = \frac{x}{OM'} \Rightarrow x =$

$\cos \theta = \frac{x}{OM'} \Rightarrow \underline{x} = OM' \cdot \cos \theta = \underline{r \cos \theta \cdot \sin \varphi}$

$\sin \theta = \frac{y}{OM'} \Rightarrow \underline{y} = OM' \cdot \sin \theta = \underline{r \sin \theta \cdot \sin \varphi}$

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = \gamma = 0$)

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R. și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + r \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ y = \beta + r \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \gamma + r \cos \varphi \end{cases}$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$

Avem $\iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$

$= \iiint_B r^2 \sin \varphi\, f(\alpha + r \cos \theta \sin \varphi, \beta + r \sin \theta \cdot \sin \varphi, \gamma + r \cos \varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi$

unde B se găsește din condiția $(x, y, z) \in A$.

2)

2) Trecerea de la coord carteziene la coord sferice generalizate

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = 0$) și $a, b, c \in (0, \infty)$.

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R. și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + ar\cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = \beta + br\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \gamma + cr\cos\varphi \end{cases}$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$

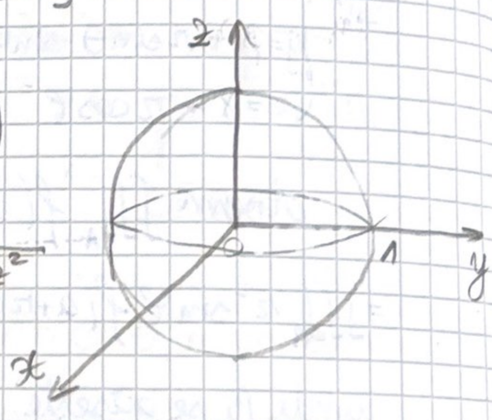
Avem $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

$= \iiint_A abc\,r^2 \sin\varphi \cdot f(\alpha + ar\cos\theta \cdot \sin\varphi, \beta + br\sin\theta \cdot \sin\varphi, \gamma + cr\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi$,

unde B se găsește din condiția $(x,y,z) \in A$.

__Ex__: Det $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, unde

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$



__Sol__:

A convexă și mărg $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$

A compactă

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

f cont

SV $\begin{cases} x = r\cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$

$(x,y,z) \in A \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi \leq 1$

$\Leftrightarrow r^2\sin^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + r^2\cos^2\varphi \leq 1$

$\Leftrightarrow r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \leq 1 \Leftrightarrow r \in [0, 1]$

$\uparrow$
$r \in [0, \infty)$

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_B r^2 \sin\varphi\, f(r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r^2 \sin\varphi \sqrt{r^2}\, d\varphi \right) d\theta \right) dr =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^3 (-\cos\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\theta \right) dr = \int_0^1 2r^3 \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi \qquad \square$$

Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită.

Sunt echiv:

1) f integr. Riemann

2) Δ_f e neglijabilă Lebesgue, unde $\Delta_f = \{x \in A \mid f$ nu e cont în $x\}$

Exc: Fie $f: [0,1] \times [2,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x+3y, & (x,y) \in ([0,1]\times[2,3]) \setminus \{(0,2)\} \\ 1, & (x,y) = (0,2). \end{cases}$$

Studiați integr. R a lui f.

Sol:

$$|f(x,y)| = |2x+3y| = 2|x| + 3|y| = 2\cdot 1 + 3\cdot 3 = 11.$$
$$\forall (x,y) \in ([0,1]\times[2,3]) \setminus \{(0,2)\}$$

$$|f(0,2)| = 1 \leq 11.$$

Deci $|f(x,y)| \leq 11$, $\forall (x,y) \in [0,1]\times[2,3]$ ie f mărg

$\Delta_f \subset \{(0,2)\}$

$\{(0,2)\}$ finită $\Rightarrow \{(0,2)\}$ neglij Lebesgue

$\Rightarrow \Delta_f$ neglij. Lebesgue

Cf Crit lui Lebesgue de integr. R avem că f integr. R.

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție mărg și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o descompunere Jordan a lui A.

Notăm $M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in A_i \}$ $\forall i = \overline{1,p}$ și
$m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in A_i \}$ $\forall i = \overline{1,p}$

Def: 1) $s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{p} m_i \cdot \mu(A_i)$

suma Darboux inferioară asoc lui f și lui $\mathcal{A}$

2) $S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{p} M_i \cdot \mu(\mathring{A}_i)$

suma Darboux superioară asoc lui f și lui $\mathcal{A}$

3) $\underline{\int_A} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \sup \{ s_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui $A \}$

integrala Darboux inferioară

4) $\overline{\int_A} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_m = \inf \{ S_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descomp. Jordan a lui $A \}$

integrala Darboux superioară

$\boxed{\text{Crit. de integrabilitate Riemann lui Darboux}}$

Sunt echiv:

1) f integr. R

2) $\underline{\int_A} f(x_1, \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \overline{\int_A} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$

caz în care avem $\int_A f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \underline{\int_A} = \overline{\int^A}$

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathcal{A}_\varepsilon$ desc Jordan a lui A aî $S_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) - s_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ aî $\forall \mathcal{A}$ desc Jordan a lui A cu prop că $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon$, avem $S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$.

Prop: 1) $s_{\mathcal{A}}(f) \leq S_{\mathcal{A}}(f)$

2) $\underline{\int_A} f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n \leq \overline{\int_A} f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$

Exc: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ a.î. $\mu(A) > 0$ și $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x, y \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$$

Det $\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy$, $\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy$ și precizați dacă f e integr. R

$|f(x,y)| \leq 1 \quad \forall (x,y) \in A \Rightarrow f$ marg.

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc. Jordan a lui A și

$M_i = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in A_i\} \quad \forall i = \overline{1,p}$ și

$m_i = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in A_i\} \quad \forall i = \overline{1,p}$

$$S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{p} M_i \mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i) > 0}}^{p} M_i \cdot \mu(A_i)$$

$$s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{p} m_i \mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i) > 0}}^{p} m_i \cdot \mu(A_i)$$

$\mu(A_i) > 0 \Rightarrow \mu_*(A_i) > 0 \Rightarrow \exists \Delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \Delta \subset A_i$ și $vol(\Delta) > 0$

Fie $B_i = \{(x,y) \in A_i \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ și

$C_i = \{(x,y) \in A_i \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ sau } y \notin \mathbb{Q}\}$

Ot $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ a.î. $\mu(A) > 0$, avem $\Delta \cap B_i \neq \emptyset$ și $\Delta \cap C_i \neq \emptyset$

Deci $\forall i = \overline{1,p}$ a.î. $\mu(A_i) > 0$, avem $M_i = 1$ și $m_i = 0$.

Așadar $S_A(f) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i) > 0}}^{p} 1 \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) = \mu(A)$

$$s_A(f) = \sum_{i=1}^{p} 0 \cdot \mu(A_i) = 0$$

$\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy = \inf\{ S_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A} \text{ desc Jordan a lui } A\}$
$= \inf\{\mu(A) \mid \mathcal{A} \text{ desc Jordan a lui } A\} = \mu(A).$

$\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy = \sup\{ s_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A} \text{ desc Jordan a lui } A\}$
$= \sup\{0 \mid \mathcal{A} \text{ desc Jordan a lui } A\} = 0$

$\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy \neq \overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy$

$\Rightarrow f$ nu e integr. R. $\square$.