Tutoriat 5

Algebră 1

14 Noiembrie 2025

Legi de compoziție. Monoizi

1. Legi de compoziție

Observație. Toate mulțimile sunt nevide în definițiile ce urmează!

Definiție 1.1. *Fie A o mulțime. O funcție $\varphi : A \times A \to A$ se numește* lege de compoziție *pe A. Legea de compoziție $\varphi : A \times A \to A$ se numește* asociativă *dacă:*

$$\text{(A)} \qquad \varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c), \quad \forall\, a, b, c \in A.$$

Un element $e \in A$ se numește element neutru *pentru $\varphi : A \times A \to A$ dacă:*

$$\text{(N)} \qquad \varphi(e, a) = \varphi(a, e) = a, \quad \forall\, a \in A.$$

Observație. O lege de compoziție $\varphi : A^2 \to A$ va fi notată multiplicativ prin

$$\varphi((a, b)) = ab,$$

sau aditiv prin

$$\varphi((a, b)) = a + b,$$

etc.

În notație multiplicativă, asociativitatea (A) se scrie:

$$a(bc) = (ab)c, \qquad \forall\, a, b, c \in A.$$

Iar un element neutru se notează cu 1_A sau 1, iar condiția (N) se scrie:

$$1_A a = a 1_A = a, \qquad \forall\, a \in A.$$

În notație aditivă, asociativitatea (A) se scrie:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

iar elementul neutru, dacă există, se notează cu 0_A sau 0.

2. Monoizi

Definiție 2.1. *Se numește* semigrup *o pereche (S, φ), unde S este mulțime și $\varphi : S \times S \to S$ este o lege de compoziție asociativă.*

Se numește monoid *o pereche (M, φ), unde M este mulțime și $\varphi : M \times M \to M$ este o lege de compoziție asociativă și care are element neutru.*

Definiție 2.2. *1) Fie $(S_1, \cdot)$ și $(S_2, *)$ două semigrupuri. O funcție $f : S_1 \to S_2$ se numește* morfism de semigrupuri *dacă:*

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y), \qquad \forall\, x, y \in S_1.$$

2) Fie M_1 și M_2 doi monoizi. O funcție $f : M_1 \to M_2$ se numește morfism de monoizi *dacă:*

$$f(1_{M_1}) = 1_{M_2}, \qquad \text{și} \qquad f(xy) = f(x)\, f(y), \qquad \forall\, x, y \in M_1.$$

Propoziție 2.1. *Fie $f : M_1 \to M_2$ morfism bijectiv de monoizi. Atunci $f^{-1} : M_2 \to M_1$ este morfism de monoizi.*

Proof. Fie $x, y \in M_2$. Atunci

$$\begin{aligned} f^{-1}(xy) &= f^{-1}\big(f(f^{-1}(x))\, f(f^{-1}(y))\big) \\ &= f^{-1}\big(f(f^{-1}(x) f^{-1}(y))\big) \\ &= (f^{-1} \circ f)\big(f^{-1}(x) f^{-1}(y)\big) \\ &= \mathrm{id}_{M_1}\big(f^{-1}(x) f^{-1}(y)\big) \\ &= f^{-1}(x) f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} f^{-1}(1_{M_2}) &= f^{-1}\big(f(1_{M_1})\big) \\ &= (f^{-1} \circ f)(1_{M_1}) \\ &= \mathrm{id}_{M_1}(1_{M_1}) = 1_{M_1}. \end{aligned}$$

Prin urmare f^{-1} este morfism de monoizi. □

Definiție 2.3. *Un morfism de monoizi $f : M_1 \to M_2$ se numește* izomorfism de monoizi *dacă există $g : M_2 \to M_1$ morfism de monoizi astfel încât*

$$f \circ g = \mathrm{id}_{M_2} \qquad \text{și} \qquad g \circ f = \mathrm{id}_{M_1}.$$

Observație. $f : M_1 \to M_2$ este izomorfism de monoizi $\Leftrightarrow$ f este morfism bijectiv de monoizi.

Observație. Doi monoizi M_1 și M_2 se numesc *izomorfi* dacă există $f : M_1 \to M_2$ izomorfism de monoizi; în acest caz notăm

$$M_1 \simeq M_2.$$

Propoziție 2.2. *Fie M un monoid notat multiplicativ cu element neutru 1. Pentru $x \in M$ și $n \in \mathbb{N}$ notăm:*

$$x^0 := 1, \qquad x^n := \underbrace{xx\cdots x}_{de\ n\ ori}.$$

În notație aditivă:

$$0 \cdot x := 0, \qquad nx := \underbrace{x + \cdots + x}_{de\ n\ ori}.$$

Atunci, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$:

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$,
2. $(x^m)^n = x^{mn}$,
3. *Dacă $xy = yx$, atunci $(xy)^n = x^n y^n$.*

Definiție 2.4. *Fie $(M, \cdot)$ un monoid cu elementul neutru 1. Un element $a \in M$ se numește* inversabil *dacă există $a' \in M$ astfel încât*

$$aa' = a'a = 1.$$

Notăm:

$$U(M) := \{\, a \in M \mid a \text{ este element inversabil} \}.$$

Observație. Inversul unui element $a \in M$, dacă există, este unic și se notează a^{-1}.

Propoziție 2.3. *Fie M un monoid și $x_1, \ldots, x_n \in U(M)$ elemente inversabile. Atunci $x_1 x_2 \cdots x_n \in U(M)$, iar*

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{-1} = x_n^{-1} x_2^{-1} \cdots x_2^{-1} x_1^{-1}.$$

Observație. Dacă M este un monoid, putem forma *monoidul opus*

$$(M^{\mathrm{op}}, *), \qquad \text{unde } M^{\mathrm{op}} := M$$

(ca mulțime), iar legea de compoziție este

$$x * y := yx, \qquad \forall x, y \in M^{\mathrm{op}} = M.$$

Propoziția precedentă arată că funcția de luare a inversului

$$S : U(M) \longrightarrow U(M)^{\mathrm{op}}, \qquad S(x) := x^{-1},$$

este un izomorfism de monoizi, cu proprietatea că

$$S^2 = \mathrm{id}_{U(M)}.$$