Teoremă (Criteriul de stabilire a punctelor de extrem local):

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, D deschisă, $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 și $a \in D$ un punct critic al lui f.

Notăm
$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

matricea hessiană a lui f în a

Fie: $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{vmatrix} = \det H_f(a)$$

1) Dacă $\Delta_1>0, \Delta_2>0, \dots, \Delta_p>0$ (i.e. $\Delta_i>0, (\forall) i=\overline{1,p}$), atunci a este punct de minim local al lui f.

2) Dacă $\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0, \dots, (-1)^p\Delta_p>0$ (i.e. $(-1)^i\Delta_i>0, (\forall)\ i=\overline{1,p}$), atunci a este punct de maxim local al lui f.

3) Dacă $\Delta_1\geq 0, \Delta_2\geq 0, \Delta_3\geq 0$ (i.e. $\Delta_i\geq 0$, $(\forall)\ i=\overline{1,p}$) sau $\Delta_1\leq 0, \Delta_2\geq 0, \Delta_3\leq 0, \dots, (-1)^p\Delta_p \geq 0$ (i.e. $(-1)^i\Delta_i\geq 0, (\forall)\ i=\overline{1,p}$) și $(\exists)\ i_0\in\{1,\dots,p\}$ a.î. $\Delta_{i_0}=0$, atunci acest criteriu nu decide.

4) În toate celelalte cazuri, a nu este punct de extrem local al lui f.

Exercițiu: Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$. Determinați punctele de extrem local ale lui f și precizați natura lor.

Sol.:

$\mathbb{R}^2$ deschisă

Determinăm punctele critice ale lui f.

f continuă (operații cu funcții elementare)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2+3y^2-15$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6xy-12$$

$(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue (operații cu funcții elementare)

$\mathbb{R}^2$ deschisă

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2-15=0 \;/:3 \\ 6xy-12=0 \;/:6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{4}{x^2}-5=0 \\ y=\frac{2}{x} \end{cases}$$

$$x^2+\frac{4}{x^2}-5=0 \Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0$$

Notăm $x^2=t$.

Avem $t^2-5t+4=0$

$\Delta=25-16=9$

$\sqrt{\Delta}=3$

$t_1=\frac{5+3}{2}=4$

$t_2=\frac{5-3}{2}=1$

$x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow y=\pm 1$

$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\pm 2$

Punctele critice ale lui f sunt:

$(2,1)$, $(-2,-1)$, $(1,2)$, $(-1,-2)$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x \qquad (\forall)\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Lema lui Schwartz

Observăm că f este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}, \ (\forall)\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 12 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 136 = 108 > 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow (2,1)$ punct de minim local al lui f

$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -12 < 0$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = -12<0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-2,-1)$ punct de maxim local al lui f

$$Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = 6 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108 < 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1,2)$ nu este punct de extrem local al lui f

$$Hf(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = -6 < 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108 < 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-1,-2)$ nu este punct de extrem local al lui f $\square$

Teorema funcțiilor implicite (T.F.i.)

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{p+1}$, D deschisă, $(x^0, y^0) \in D$, unde $x^0 = (x_1^0, \dots, x_p^0)$ și $F : D \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1) $F(x^0, y^0) = 0$

2) F este de clasă C^1 (pe Δ)

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$

Atunci $(\exists)\ U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}_{x^0}$, $(\exists)\ V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}_{y^0}$, $(\exists!)$ $f : U \to V$ a.î.:

a) $f(x^0) = y^0$

b) $F(x, f(x)) = 0$, $(\forall)\ x \in U$

$x = (x_1, \dots, x_p)$

c) f este de clasă C^1 (pe U) și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =$

$$= - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, (\forall)\ x \in U, (\forall)\ i = \overline{1, p}$$

Notație: Funcția f din T.F.i. se notează cu y.

Def.: Funcția $f \left(\overset{not}{=} y\right)$ din T.F.i. s.n. funcția implicită asociată ecuației $F(x, y) = 0$.

Exercițiu: Arătați că ecuația $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 2$ definește într-o vecinătate a punctului $(1,1)$ funcția implicită $y = y(x)$ și determinați $y'(1) \left(= \frac{dy}{dx}(1) \right)$.

Sol.: Fie $\Delta = \mathbb{R}^2$ și $F : \Delta \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2$

Δ deschisă

1) $F(1,1) = 1-2+1+1+1-2=0$

2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x-2y+1$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -2x+2y+1$ $\quad (\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ continue pe $\mathbb{R}^2$ (operații cu funcții elementare) $\Rightarrow$

$\Rightarrow F$ este de clasă C^1 (pe Δ)

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -2+2+1=1\neq 0$

Cf. T.F.i., $(\exists)\ U=\overset{\circ}{U}\in\mathcal{V}_1, (\exists)\ V=\overset{\circ}{V}\in\mathcal{V}_1, (\exists!)$ $y: U\to V$ a.î.:

a) $y(1)=1$

b) $F(x,y(x))=0, (\forall)\ x\in U$

c) y este de clasă C^1 și $y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) =$

$$= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}, (\forall)\ x\in U$$

Pentru a determina $y'(1)$ avem două variante:

V1 (Folosim a) și c)):

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))} =$$

$$= \frac{-(2x-2y(x)+1)}{-2x+2y(x)+1} = \frac{-2x+2y(x)-1}{-2x+2y(x)+1}, (\forall)\, x\in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{-2\cdot 1+2y(1)-1}{-2\cdot 1+2y(1)+1} \underset{y(1)=1}{=} \frac{-\cancel{2}+\cancel{2}-1}{-\cancel{2}+\cancel{2}+1} = -1$$

V2 (Folosim a) și b))

Din b) avem că $F(x, y(x)) = 0$, $(\forall)\, x \in U$, deci

$$x^2 - 2x\,y(x) + y^2(x) + x + y(x) - 2 = 0$$

Derivăm în raport cu x egalitatea precedentă și obținem:

$$2x - 2y(x) \underline{- 2x\,y'(x)} \underline{+ 2y(x)\,y'(x)} + 1 \underline{+ y'(x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x)(-2x+2y(x)+1) = -2x+2y(x)-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-2x+2y(x)-1}{-2x+2y(x)+1}, (\forall)\, x \in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{-2\cdot 1+2\cdot y(1)-1}{-2\cdot 1+2y(1)+1} \underset{y(1)=1}{=} \frac{-\cancel{2}+\cancel{2}-1}{-\cancel{2}+\cancel{2}+1} = -1 \; \square$$

Teorema funcțiilor implicite – cazul general

(nu intră în examen)

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{p+q}$, $(x^0, y^0) \in D$ = deschisă,
$x^0 = (x_1^0, \dots, x_p^0)$, $y^0 = (y_1^0, \dots, y_q^0)$ și $F : D \to \mathbb{R}^q$,

$F(F_1, \dots, F_q)$ cu proprietățile:

1) $F(x^0, y^0) = 0_{\mathbb{R}^q} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{q \text{ componente}}$

2) F este de clasă C^1 (pe Δ)

3) $\dfrac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)}(x^0, y^0) \underset{=}{\overset{\text{not.}}{=}}$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_q}(x^0, y^0) \\ ------ & ------ & ------ \\ \dfrac{\partial F_q}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \dots & \dfrac{\partial F_q}{\partial y_q}(x^0, y^0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Atunci $(\exists)\, U = \mathring{U} \in \mathcal{V}_{x^0}$, $(\exists)\, V = \mathring{V} \in \mathcal{V}_{y^0}$, $(\exists!)$ $f : U \to V$, $f = (f_1, \dots, f_q)$ a.î.:

a) $f(x^0) = y^0$

b) $F(x, f(x)) = 0_{\mathbb{R}^q}$, $(\forall)\, x \in U$

c) f este de clasă C^1 (pe U) (deci și $f_1, \dots, f_q$ sunt de clasă C^1 (pe U)) și $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) =$

$$= - \frac{\dfrac{\partial(F_1, - - - - - F_q)}{\partial(x_i, y_2, \dots, y_q)}(x, f(x))}{\dfrac{\partial(F_1, - - - - - -, F_q)}{\partial(y_1, - - - - - -, y_q)}(x, f(x))}, \ (\forall)\, x \in U, \ (\forall)\, i = \overline{1, p}$$

$$\frac{\partial f_q}{\partial x_i}(x) = - \frac{\dfrac{\partial (F_1, \ldots\ldots\ldots, F_q)}{\partial (y_1, \ldots y_{q-1}, x_i)}(x, f(x))}{\dfrac{\partial (F_1, \ldots\ldots\ldots, F_q)}{\partial (y_1, \ldots\ldots\ldots, y_q)}(x, f(x))}, (\forall)\, x \in U, \; (\forall)\, i = \overline{1,p}$$

Observație! Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Atât în cazul particular, cât și în cazul general de la Teorema funcțiilor implicite, dacă F este de clasă C^k, atunci f este de clasă C^k.

Extreme cu legături

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^p$, $\emptyset \neq A \subset E$, $a \in A$ și $f : E \to \mathbb{R}$.

Def.: Spunem că a este punct de:

1) minim local al lui f relativ la A dacă $(\exists)\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \leq f(x), (\forall)\, x \in V \cap A$

2) maxim local al lui f relativ la A dacă $(\exists)\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \geq f(x), (\forall)\, x \in V \cap A$

3) extrem local al lui f relativ la A dacă a este punct de minim local al lui f relativ la A sau a este punct de maxim local al lui f relativ la A.

Observație! Dacă $A=E$, omitem sintagma „relativ la A".

<u>Denumire alternativă</u>: Punctele de extrem local ale lui f, relative la A se mai numesc și puncte de extrem local ale lui f condiționate de A.

Fie $1 \le k < p$ ($k \in \mathbb{N}^*$) și $g_1, \dots, g_k : E \to \mathbb{R}$.
Presupunem că $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$

<u>Def.</u>: Punctele de extrem local ale lui f condiționate de A (vezi definiția lui A mai sus) se numesc și puncte de extrem local ale lui f cu legăturile $g_1(x)=0, \dots, g_k(x)=0$.

Considerăm sistemul:

$$(1) \begin{cases} g_1(x)=0 \\ g_2(x)=0 \\ \text{-------} \\ g_k(x)=0 \end{cases}$$

În continuare, presupunem că E este deschisă.

Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $a \in A$. Presupunem că $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset E$ a.î. funcțiile $f, g_1, \dots, g_k$ admit toate derivatele parțiale pe V și acestea sunt continue în a. În plus, presupunem că $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le p}} = k$. Dacă a este punct de extrem local al lui f relativ la A, atunci $(\exists)\ \lambda_1\in\mathbb{R}$, $(\exists)\ \lambda_2\in\mathbb{R}$, ..., $(\exists)\ \lambda_k\in\mathbb{R}$ a.î.

$$(2)\ \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(a)=0 \\ \text{-----------} \\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(a)=0 \end{cases}, \text{ unde } L: E\to\mathbb{R},$$

$$L(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot g_i(x).$$

<u>Def</u>: 1) Orice punct $a\in A$ cu proprietatea că $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le p}} = k$ și care verifică sistemul (2) pentru anumite valori $\lambda_1\in\mathbb{R},\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ s.n. punct staționar al lui f condiționat de A (sau punct critic al lui f condiționat de A).

2) Valorile $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ din teorema precedentă s.n. multiplicatori Lagrange.

3) Funcția L din teorema precedentă s.n. lagrangeianul problemei de extrem.

Observație! Valorile $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ se schimbă odată cu punctul staționar condiționat A.

Observație! Teorema precedentă se poate enunța pe scurt astfel: „Orice punct de extrem local condiționat este punct staționar condiționat".

Observație! Reciproca teoremei precedente este falsă.

Algoritm pentru determinarea punctelor staționare condiționate

Presupunem că $f, g_1, \dots, g_k$ sunt de clasă C^1 (pe E):

1) Se definește funcția $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$ (cu $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nedeterminați).

2) Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \text{---------} \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(x) = 0 \\ g_1(x) = 0 \\ \text{---------} \\ g_k(x) = 0 \end{cases} \quad (n+k \text{ necunoscute}, \ n+k \text{ ecuații})$$

3) Dacă $(a_1, \dots, a_p, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ este soluție a sistemului de la 2) și

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_p)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}} = k, \text{ atunci}$$

$(a_1, \dots, a_p)$ este punct staționar al lui f condiționat de A.

Observație! Printre aceste puncte staționare condiționate se pot afla și punctele de extrem local condiționate (de A). În cursul următor vom găsi condiții suficiente care să ne permită să identificăm dintre punctele staționare condiționate pe acelea care sunt puncte de extrem local condiționat.