Rezolvare suplimentare
Tutoriat 5

1) a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$

Sol:

Notez $a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)\cdot 2^n}{(-1)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right| = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Fie M mulțimea de convergență a seriei de puteri din enunț.

Avem $(-2, 2) \subset M \subset [-2, 2]$

Studiem dacă $-2 \in M$ și $2 \in M$

Dacă $x = 2$, seria devine $\sum_n \frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)\cdot 2^n} = \sum_n \frac{(-1)^n}{(n+1)}$

$\frac{1}{n+1}$ descr. și $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \overset{C.\ Leibniz}{\Longrightarrow}$ seria converge

Deci $2 \in M$

Dacă $x = -2$, seria devine $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot (-2)^n}{(n+1)\cdot 2^n} = \sum_n \frac{1}{n+1}$

Serie cu termeni pozitivi. Folosim Crit. de comp. cu lim.

Fie $y_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in (0, \infty) \Rightarrow \sum_n a_n \sim \sum_n y_n$

$\sum_n \frac{1}{n}$ divergentă, serie armonică gen. cu $\alpha \leq 1$

Deci $-2 \notin M$. Așadar $M \in (-2, 2]$ $\square$

RS5

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\ \sqrt[4]{n+2}} \cdot (x-2)^n$

Sol: Notez $x-2=y$.

Notez $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}\ \sqrt[4]{n+2}}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[4]{n+3}} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot \sqrt[4]{n+2} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{n+2}{n+3}} \right| = \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[4]{1} = 1 \cdot 1 = 1$

$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{1} = 1$

Fie N mulțimea de convergență a seriei de puteri din enunț.

Avem $(-R, R) \subset N \subset [-R, R]$ i.e. $(-1, 1) \subset N \subset [-1, 1]$

Studiem dacă -1 și $1 \in N$

Dacă $y = -1$ seria devine $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\ \sqrt[4]{n+2}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{n}\ \sqrt[4]{n+2}}$ descr și $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\ \sqrt[4]{n+2}} = 0 \overset{C.L.}{\Longrightarrow}$ seria converge

Deci $-1 \in N$

Dacă $y = 1$ seria devine $\sum_n \frac{1^n}{\sqrt[3]{n}\ \sqrt[4]{n+2}} = \underbrace{\sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{n}\ \sqrt[4]{n+2}}}_{\text{serie cu termeni strict poz}}$

Folosesc Crit de comp cu limită

Fie $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}\ \sqrt[4]{n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n}} \cdot \sqrt[4]{\frac{n}{n+2}} = 1 \cdot 1 = 1 \in (0, \infty)$

$\Rightarrow \sum_n a_n \sim \sum_n b_n$

$b_n = \sum_n \frac{1}{n^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{4}}} = \sum_n \frac{1}{n^{\frac{7}{12}}} \to$ div $\Big\}$ serie armonică gen. cu $\alpha \le 1$

Deci $1 \notin N$. Așadar $N = [-1, 1)$

Fie M mulțimea de convergență a seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\,\sqrt[4]{n+2}} \cdot (x-2)^n$$

$y \in N = [-1, 1) \Rightarrow -1 \le y < 1 \Leftrightarrow -1 \le x-2 < 1 \;/+2$

$\Leftrightarrow 1 \le x < 3$

Așadar $M = [1, 3)$ □

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot 15 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot (7n+1)}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (3n+2)} \cdot (x+2)^n$$

<u>Sol</u>:

Vezi Tutoriat 5, Ex 1, d) □