Observație! Atunci când am scris în cursul trecut „punct staționar condiționat" ne-am referit la „punct staționar condiționat de A". La fel ne vom referi în continuare.

Așa cum am menționat la finalul cursului precedent, vom găsi condiții suficiente pentru a stabili care dintre punctele staționare condiționate sunt puncte de extrem local condiționate.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^n$, $f: E \to \mathbb{R}$, $1 \leq k < n$, $g_1, \dots, g_k : E \to \mathbb{R}$ și $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$.

Presupunem că E este deschisă și că $f, g_1, \dots, g_k$ sunt funcții de clasă C^1 (pe E).

Fie $a \in E$ un punct staționar al lui f condiționat de A (sau cu legăturile $g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$).

Acest fapt înseamnă că $a \in A$, i.e. a este soluție a sistemului

$$(1) \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ \text{--------}, \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

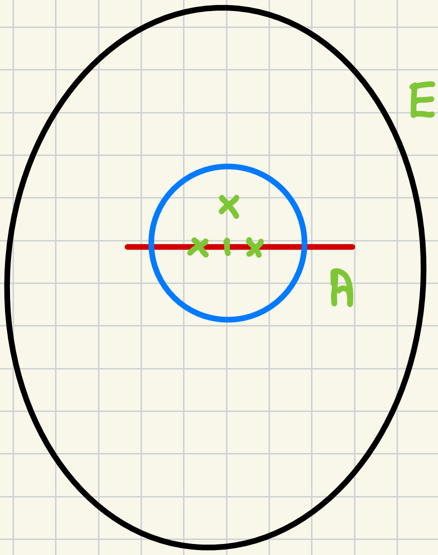
$$\text{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}} = k \text{ și}$$

$(\exists)\ \lambda_1 \in \mathbb{R}, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ a.î. a verifică sistemul

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \text{-----------}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}(x) = 0 \end{cases}$$

unde $L : E \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$.

Evident $a = (a_1, \dots, a_n) \in A \subset E \subset \mathbb{R}^n$.



Presupunem că $f, g_1, \dots, g_k$ sunt de clasă C^2 (pe E).

Deci L este de clasă C^2 (pe E).

Avem $d^2L(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$d^2L(a)(\underbrace{u}_{(u_1,\dots,u_n)}, \underbrace{v}_{(v_1,\dots,v_n)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i v_j.$$

Fie $F(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(a)(\underbrace{u}_{(u_1,\dots,u_n)}) = d^2L(a)(u)^2 =$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i u_j$$

Putem scrie $\quad F(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i x_j}(a)\, dx_i\, dx_j$

Diferențiem ecuațiile sistemului (1) în punctul a și obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)\, dx_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a)\, dx_n = 0 \\ \text{-------------------------} \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a)\, dx_1 + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a)\, dx_n = 0 \end{cases}$$

Deoarece rangul matricei acestui sistem este k (mai exact $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le n}} = k$), putem exprima k diferențiale în funcție de celelalte $n-k$.

Presupunem că $\frac{\partial(g_1,\dots,g_k)}{\partial(x_{n-k+1},\dots,x_n)}(a) \neq 0$,

i.e.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-k+1}}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \text{---------} & & \text{---------} \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_{n-k+1}}(a) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0$$

Deci putem exprima $dx_{n-k+1}, \dots, dx_n$ în funcție de $dx_1, \dots, dx_{n-k}$.

După ce am făcut această exprimare, definim

$$F(a)_{leg} : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}, \quad F(a)_{leg} = \sum_{i,j=1}^{n-k} A_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

i.e. $$\underbrace{F(a)_{leg}(u)}_{} = \sum_{i,j=1}^{n-k} A_{ij}\, u_i\, u_j$$

$$u = (u_1, \dots, u_{n-k})$$

(mai exact, în expresia lui $F(a)$, am înlocuit $dx_{n-k+1}, \dots, dx_n$ în funcție de $d_1, \dots, dx_{n-k}$).

1) Dacă $F(a)_{leg}(u) \geq 0$, $(\forall)\, u \in \mathbb{R}^{n-k}$ și

$$F(a)_{leg}(u) = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^{n-k}} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\substack{n-k \\ \text{componente}}},$$

atunci a este punct de minim local al lui f cu legăturile $g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$

2) Dacă $F(a)_{leg}(u) \leq 0$, $(\forall)\, u \in \mathbb{R}^{n-k}$ și

$$F(a)_{leg}(u) = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^{n-k}} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\substack{n-k \\ \text{componente}}},$$

atunci a este punct de maxim local al lui f cu legăturile $g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$.

Observație! În aplicațiile noastre avem $dx_i dx_j = dx_j dx_i$, $(\forall)\ i,j \in \{1,\dots,p\}$.

Exercițiu: Fie $f:(0,+\infty)^3 \to \mathbb{R}$,
$$(0,+\infty)^3 = (0,+\infty)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)$$
$f(x,y,z) = xy + xz + yz$. Determinați punctele de extrem local ale lui f cu legătura $xyz = 1$.

Sol.: Fie $E = (0,+\infty)^3$, E deschisă

Fie $g: E \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = xyz - 1$
$(g = g_1)$ și $A = \{(x,y,z) \in E \mid g(x,y,z) = 0\}$

Determinăm punctele staționare ale lui f condiționate de A.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y+z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x+z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x+y \qquad (\forall)\ (x,y,z) \in E$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = yz$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = xz$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = xy$$

Toate derivatele parțiale de mai sus sunt continue pe mulțimea deschisă E (operații cu funcții elementare), deci f și g sunt de clasă C^1.

Fie $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$
$= xy + xz + yz + \lambda(xyz - 1)$.

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Din a doua ecuație o scădem pe prima și obținem:

$$x - z + \lambda z(x - y) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(1+\lambda z) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ sau } z = -\frac{1}{2}$$

Cazul 1. $x = y$

Din a treia ecuație avem $2x + \lambda x^2 = 0$, deci $x(2+\lambda x) = 0$, deci, deoarece $x \in (0, +\infty)$, avem $\lambda x = -2$, deci $x = -\frac{2}{\lambda}$

$y = x \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{\lambda}$

$\uparrow$

$x = -\frac{2}{\lambda}$

Din prima ecuație avem:

$$-\frac{2}{\lambda} + z + \cancel{\lambda}\left(-\frac{2}{\cancel{\lambda}}\right) z = 0 \iff z = -\frac{2}{\lambda}$$

Din a patra ecuație avem:

$$-\frac{8}{\lambda^3} = 1 \iff \lambda^3 = -8 \iff \lambda = -2$$

Prin urmare, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Cazul 2. $z = -\frac{1}{\lambda}$

Din prima ecuație avem

$$y - \frac{1}{\lambda} + \cancel{\lambda} y \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}}\right) = 0 \iff -\frac{1}{\lambda} = 0, \text{ Af}$$

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) =$$

$$= \operatorname{rang}\left(yz \quad xz \quad xy\right) = 1, \ (\forall)\ (x,y,z) \in E \supset A \ni (1,1,1)$$

Singurul punct staționar al lui f condiționat de A este $(1,1,1)$.

Avem $L : E \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = xy + xz + yz - 2(xyz - 1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 0 \quad (\forall)\ (x,y,z) \in E$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z) = 0 \,;\; \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,z) = 0 \,;\; \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x,y,z) =$$

$= 0$, $(\forall)\ (x,y,z) \in E$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y,z) = z = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(x,y,z) = y = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(x,y,z) = x = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}(x,y,z), \ (\forall)\ (x,y,z) \in E$$

Observăm că f și g sunt de clasă C^2 (pe E).

Avem $d^2L(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$d^2L(x,y,z)(u,v,w)^2 = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,z)\, u^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,z)\, v^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x,y,z) \cdot w^2 +$$

$$2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y,z)uv+\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}(x,y,z)uw+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(x,y,z)vw\right)=0+0+0+$$

$$+2\left((1-2z)uv+(1-2y)uw+(1-2x)vw\right)=$$

$$=2[(1-2z)uv+(1-2y)uw+(1-2x)vw],\ (\forall)$$

$(\forall)\ (x,y,z)\in E,\ (\forall)\ (u,v,w)\in\mathbb{R}^3$

Deci $d^2L(1,1,1)(u,v,w)^2=$

$$=-2(uv+uw+vw)$$

Fie $F(1,1,1):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad F(1,1,1)(u,v,w)=$
$= d^2L(1,1,1)(u,v,w)^2$

Putem scrie $F(1,1,1)=-2(dx\,dy+dx\,dz+dy\,dz)$

Diferențiem legătura $\underset{\substack{\Uparrow\\ xyz-1=0}}{g(x,y,z)=0}$ în (x,y,z) și

Obținem:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\,dx+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\,dy+\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\,dz$$

$=0 \Leftrightarrow yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz=0$

În punctul $(1,1,1)$, relația precedentă devine:

$$dx+dy+dz=0 \Leftrightarrow dz=-dx-dy$$

Fie $F(1,1,1)_{leg} : \mathbb{R}^{3-1} \to \mathbb{R}$,
$$\mathbb{R}^{3-1} = \mathbb{R}^2$$

$$F(1,1,1)_{leg} = -2(\cancel{dx\,dy} + dx(-dx-dy) + dy(-dx-dy)) = -2(dx\,dy - (dx)^2 - \cancel{dx\,dy} - dy\,dx - (dy)^2) =$$
$$= -2(-(dx)^2 - (dy)^2 - dx\,dy) =$$
$$= 2((dx)^2 + (dy)^2 + dx\,dy)$$
$$= (dx+dy)^2 + (dx)^2 + (dy)^2$$

Deci $F(1,1,1)_{leg}(u,v) = (u+v)^2 + u^2 + v^2$

Observăm că $F(1,1,1)_{leg}(u,v) \geq 0 \ (\forall)(u,v) \in \mathbb{R}^2$ și

$$F(1,1,1)_{leg}(u,v) = 0 \iff \begin{cases} (u+v)^2 = 0 \\ u^2 = 0 \\ v^2 = 0 \end{cases} \iff (u,v) = (0,0)$$

Deci $(1,1,1)$ este punct de minim local al lui f cu legătura $g(x,y,z) = 0$ $\square$

Integrala Riemann

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Def.:

1) S.n. diviziune a intervalului $[a,b]$ o mulțime de puncte:

$\Delta : a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_m = b$, unde $m \in \mathbb{N}^*$

Notăm $\mathcal{D}([a,b]) = \{\Delta \mid \Delta$ diviziune a intervalului $[a,b]\}$

2) Numărul $\|\Delta\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i=\overline{1,n}\}$ s.n. norma diviziunii Δ.

3) Un sistem de puncte $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}} \subset \mathbb{R}$ s.n. sistem de puncte intermediare (SPI) asociat lui Δ dacă $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $(\forall)\ i=\overline{1,n}$

4) Suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ s.n. suma Riemann asociată lui f, lui Δ și lui ξ și se notează $\sigma_\Delta(f, \xi)$.

<u>Def</u>: Spunem că f este integrabilă R (pe $[a,b]$) dacă $(\exists)\ I \in \mathbb{R}$ a.î. $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $(\forall)\ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și $(\forall)\ \xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ S.P.I. asoc. lui Δ, avem $|I - \sigma_\Delta(f, \xi)| < \varepsilon$.

Observație! I din definiția precedentă, dacă există, este unic și se notează

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Teoremă: Dacă f este continuă, atunci f este integrabilă R.

Teoremă: Dacă f este monotonă, atunci f este integrabilă R.

Teoremă: Dacă f este integrabilă R, atunci f este mărginită.

Teorema de permutare a limitei cu integrala

Fie șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ și $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f_n integrabilă R, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

2) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$

Atunci f este integrabilă R și

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exercițiu: Determinați $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}\,dx$

Sol.:

Fie $f_n : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(1+x)^n}{e^{2nx}}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

f_n continuă pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n$ integrabilă R pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Știm din Seminarul 8 că $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$, unde

$f : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

Conform Teoremei de permutare a limitei cu integrala, avem că f este integrabilă R și

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}f_n(x)\,dx=$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,dx=0\ \square$$

Def.: O mulțime $A\subset\mathbb{R}$ s.n. neglijabilă Lebesgue dacă $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ (I_n)_n$ șir de intervale deschise și mărginite a.î.:

1) $A\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}I_n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(I_n)<\varepsilon$, unde $\lambda(I_n)$ este lungimea intervalului I_n, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$ (i.e. $\lambda((c,d))=d-c$, $(\forall)\ c,d\in\mathbb{R}$, $c\le d$).

Observație:

1) Orice submulțime a unei mulțimi neglijabile Lebesgue este, la rândul ei, neglijabilă Lebesgue.

2) Orice mulțime cel mult numărabilă (i.e. finită sau numărabilă) este neglijabilă Lebesgue.

3) Orice reuniune cel mult numărabilă de

mulțimi neglijabile Lebesgue este, la rândul ei, neglijabilă Lebesgue.

Notăm $\Delta_f = \{ x \in [a,b] \mid f$ nu este continuă în $x \}$ (mulțimea discontinuităților lui f)

Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann

Sunt echivalente:

1) f integrabilă R
2) f mărginită și Δ_f neglijabilă Lebesgue

Exercițiu: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 7, & x = 0 \end{cases}$

Arătați că f este integrabilă R.

Sol.:

$|f(x)| \leq 7, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ mărginită

$\Delta_f \subset \{0\}$ finită $\Rightarrow$ neglijabilă Lebesgue $\Big| \Rightarrow \Delta_f$ neglijabilă Lebesgue

Conform Criteriului Lebesgue de integrabilitate Riemann, avem că f este integrabilă R $\square$

Presupunem că f este mărginită (deci $(\exists)$ $M > 0$ a.î. $|f(x)| \leq M$, $(\forall) x \in [a,b]$). Fie Δ: $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$.

Fie $M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$, $(\forall) i = \overline{1,n}$ și $m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$, $(\forall) i = \overline{1,n}$.

Def.:

1) $S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$

(suma Darboux superioară asoc. lui f și Δ)

2) $s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

(suma Darboux inferioară asoc. lui f și Δ)

Def.:

1) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf \{ S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b]) \}$

(integrala Darboux superioară a lui f)

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup \{ s_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b]) \}$

(integrala Darboux inferioară a lui f)

Observație!

1) $s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f)$, $(\forall)\ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann

Sunt echivalente:

1) f integrabilă R

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, caz în care

avem $\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a}^b f(x)\,dx$

3) $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}([a,b])$ a.î. $S_{\Delta_\varepsilon}(f) - s_{\Delta_\varepsilon}(f) < \varepsilon$

4) $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)\ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

Exercițiu: Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 ; & \underbrace{x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}}_{= [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} \end{cases}$$

Determinați $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx$, $\underline{\int_0}^1 f(x)\,dx$ și precizați dacă f este integrabilă R.

Sol.: $|f(x)| \leq 1$, $(\forall)\ x \in [0,1] \Rightarrow f$ mărginită

Fie $\Delta : 0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = 1$ o diviziune a intervalului $[0,1]$

Ținând cont de definițiile lui $S_\Delta(f)$ și $s_\Delta(f)$, ne interesează doar valorile lui M_i și m_i $(\forall)\ i = \overline{1,n}$ pentru acei indici i cu proprietatea că $x_{i-1} < x_i$ (dacă am avea $x_{i-1} = x_i$, atunci termenul corespunzător din sumele respective este egal cu 0)

Fie $i \in \{1, \dots, n\}$ a.î. $x_{i-1} < x_i$.

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1,$$

deoarece între orice două numere reale $(\exists)$ o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = -1,$$

deoarece între orice două numere reale $(\exists)$ o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1})$$

$$= (\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \dots + (x_n - \cancel{x_{n-1}})$$

$$= x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$$

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)(x_i - x_{i-1})$$

$$= (-1)(\cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \dots + x_n - \cancel{x_{n-1}}) = (-1)(x_n - x_0) =$$

$$= (-1)(1-0) = -1$$

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf\{S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\} =$$

$$= \inf\{1 \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\} = 1$$

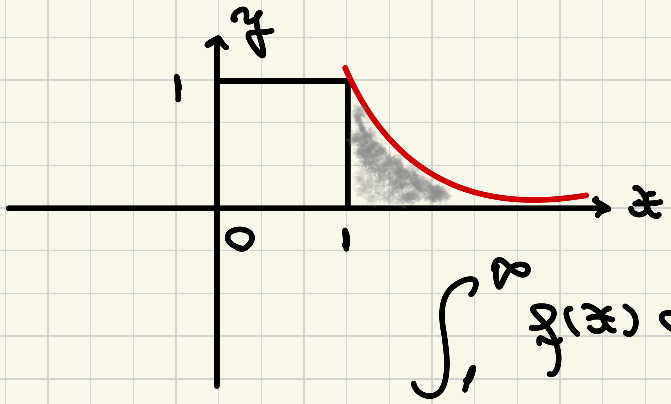
$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup\{s_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\} =$$

$$= \sup\{-1 \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\} = -1$$

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)\,dx \Rightarrow f \text{ nu este integrabilă } R \qquad \square$$

Integrala improprie

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$



$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = ?$$

I. Fie $-\infty < a < b \leq \infty$ și $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă R pe orice interval $[a, d]$, $a<d<b$

Def.: Dacă $(\exists)$ $\lim\limits_{\substack{d \to b \\ d<b}} \int_a^d f(x)\,dx \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, valoarea ei s.n. integrala improprie a lui f pe $[a, b)$ și se notează cu $\int_a^b f(x)\,dx$

Def.:

1) Spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ (de mai sus) este convergentă dacă $\lim\limits_{\substack{d \to b \\ d<b}} \int_a^d f(x)\,dx$ este finită.

2) Spunem că integrala improprie

$\int_a^b f(x)\,dx$ (de mai sus) este divergentă dacă nu este convergentă.

II. Fie $-\infty \le a < b < \infty$ şi $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă R pe orice interval $[c,b]$, $a<c<b$.

<u>Def.</u>: Dacă $(\exists)\ \lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a}} \int_c^b f(x)\,dx \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, valoarea ei s.n. integrala improprie a lui f pe $(a,b]$ şi se notează cu $\int_a^b f(x)\,dx$

<u>Def.</u>:

1) Spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ (de mai sus) este convergentă dacă $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a}} \int_c^b f(x)\,dx$ este finită.

2) Spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ (de mai sus) este divergentă dacă nu este convergentă.

III. Fie $-\infty \leq a < b \leq \infty$ și $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă R pe orice interval $[c,d]$, $a<c<d<b$

Def.: Dacă $(\exists) \lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)\,dx \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, valoarea ei s.n. integrala improprie a lui f pe (a,b) și se notează cu $\int_a^b f(x)\,dx$

Def.:

1) Spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ (de mai sus) este convergentă dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)\,dx$ este finită.

2) Spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ (de mai sus) este divergentă dacă nu este convergentă.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \neq \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \right)$$

Propoziție: Fie $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ și $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă R pe orice interval $[c,d]$, $a<c<d<b$.

Dacă $(\exists)\ \alpha \in (a,b)$ a.î. integralele improprii $\int_a^\alpha f(x)\,dx$ și $\int_\alpha^b f(x)\,dx$

sunt conv., atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă și $\int_a^b f(x)\,dx =$

$$= \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

Criterii de convergență pentru integralele improprii

Vom enunța criteriile de mai jos doar pentru funcții definite pe $[a,+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Criteriul de comparație cu inegalități

Fie $f, g : [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ două funcții integrabile R pe orice interval $[a,d]$, cu $a<d<\infty$ a.î. $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $(\forall)\, x \in [a,+\infty)$.

1) Dacă $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

2) Dacă $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă, atunci $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este divergentă.

2. Criteriul de comparație cu limită

Fie $f, g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ două funcții integrabile R pe orice interval $[a, d)$, cu $a < d < \infty$ a.î.: $g(x) > 0$, $(\forall)\ x \in [a, +\infty)$ și $(\exists) \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{not.}}{=\!=} \lambda \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

1) Dacă $\lambda \in (0, +\infty)$, atunci $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \sim$
$\sim \int_a^{\infty} g(x)\,dx$ (i.e. sau $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ și $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ sunt conv. sau $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ și $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ sunt divergente).

2) Dacă $\lambda = 0$ și $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ este convergentă, atunci $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă.

3) Dacă $\lambda = \infty$ și $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ este divergentă, atunci $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este divergentă.

3. Criteriul integral al lui Cauchy

Fie $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ o funcție descrescătoare (deci f integrabilă R pe orice interval $[a, d]$, cu $a < d < +\infty$, fiind monotonă). Sunt echivalente:

1) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă

2) $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ este convergentă, $(\forall)\ p \in \mathbb{N} \cap [a,+\infty)$.

Funcțiile Gamma (Γ) și Beta (B)

Def.:

1) $\Gamma : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$

(funcția Gamma)

2) $B : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to (0,+\infty)$,

$$B(x,y) = \int_0^{1} t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt$$

(funcția Beta)

Denumire alternativă

Funcțiile Gamma și Beta se mai numesc și integrale euleriene.

Proprietăți:

1) $\Gamma(1) = 1$

2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

3) $\Gamma(1+x) = x\,\Gamma(x)$, $(\forall)\ x \in (0,+\infty)$

În particular, $\Gamma(1+n) = n!$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$

4) $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$, $(\forall)\ x \in (0,1)$

5) $B(x,y) = B(y,x)$, $(\forall)\ x,y \in (0,+\infty)$

6) $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $(\forall)\ x,y \in (0,+\infty)$

7) $B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2x-1} (\cos t)^{2y-1}\,dt$, $(\forall)\ x,y \in (0,+\infty)$

Exercițiu: Determinați $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

Sol.:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{d\to+\infty} \int_1^{d} x^{-2}\,dx =$$

$$= \lim_{d\to+\infty} \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^d \right) = \lim_{d\to+\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^d \right) =$$

$$= \lim_{d\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{d}\right) = 1 - 0 = 1 \quad \square$$

Exercițiu: Studiați convergența integralei improprii

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

Sol.:

Fie $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Avem $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in [1,+\infty)$.

Fie $g : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Avem $g(x) > 0$, $(\forall)\ x \in [1,+\infty)$

f, g continue pe $[1,d]$, $(\forall)\ 1 < d < +\infty \Rightarrow f, g$ integrabile R pe $[1,d]$, $(\forall)\ 1 < d < +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \in$$

$\in (0, +\infty)$

Conform Criteriului de comparație cu limită avem că

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \sim \int_1^\infty g(x)\,dx$$

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{d\to+\infty} \int_1^d x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \lim_{d\to+\infty} \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Big|_1^d \right) = \lim_{d\to+\infty} (2\sqrt{d} - 2\sqrt{1}) = +\infty$$

Deci $\int_1^\infty g(x)\,dx$ este divergentă

Așadar, $\int_1^\infty f(x)\,dx$ este divergentă $\square$

Exercițiu: Folosind eventual funcția Γ, determinați

$$\int_0^\infty y^6 e^{-2y}\,dy$$

Sol.:

$$\int_0^\infty y^6 e^{-2y}\,dy = \int_0^\infty \frac{t^6}{2^6} e^{-t} \cdot \frac{1}{2}\,dt =$$

S.V. $2y = t \Rightarrow y = \frac{t}{2}$

$dy = \frac{1}{2}\,dt$

$y=0 \Rightarrow t=0$

$y \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$

$$= \frac{1}{2^7}\int_0^\infty t^6 e^{-t}\,dt = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty t^{7-1} e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2^7}\Gamma(7) = \frac{1}{2^7}\cdot 6! = \frac{6!}{2^7} = \frac{120}{2^7} \quad \square$$