Tutoriat 9

Friday, 12 December 2025 22:26

Teoremă:

$f: V \to V$ endomorfism diagonalizabil

$\Longleftrightarrow$ 1) Toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt în K (i.e. valorile proprii)

2) Dimensiunea fiecărui subspațiu propriu V_λ (adică multiplicitatea geometrică) coincide cu multiplicitatea algebrică

(i.e. $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, $(\forall)\ \lambda \in Spec(f)$

Fie $\lambda_1 \dots \lambda_p \to$ valorile proprii corespunzătoare endm. f

$m_a(\lambda_i)$ = multiplicitatea algebrică a val proprii.

Reformulare:

$f: V \to V$ endomorfism diagonalizabil $\Longleftrightarrow$

1) $m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_p) = n = \dim_K V$

2) $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ $(\forall)\ i = \overline{1,p}$

Obs: $f: V \to V$. endm. diag.

$B, B' \subset V$ baze $\qquad B \xrightarrow{S} B'$

(matricea de trecere de la baza inițială la baza în care se realizează f diagonală) (adică matricea ce are pe coloane vect proprii)

$$\boxed{D = S^{-1} A_f S}$$

Trebuie ținută minte deoarece se mai cere în probleme $A_f^m = ?$

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_1}^{m_a(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overbrace{\lambda_p \ \ddots \ \lambda_p}^{m_a(\lambda_p)} \end{pmatrix} \to \text{forma diagonală}$$

Dacă $D = S^{-1} A_f S \ \Big|\ \cdot S$ la stg, $\cdot S^{-1}$ la dr

$S D S^{-1} = A_f$

$A_f^m = \underbrace{A_f \cdot A_f \cdots A_f}_{\text{de } m \text{ ori}} = S D S^{-1} \cdot S D S^{-1} \cdots S D S^{-1} = S D^m S^{-1}$

$$\boxed{A_f^m = S D^m S^{-1}}$$

Exerciții

Fie $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ def prin

$T(x,y,z,t) = (x+y+z+t,\ x+y-z-t,\ x-y+z-t,\ x-y-z+t)$

a) Scrieți matricea asociată lui T în raport cu baza canonică

$$\text{Fie } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$\qquad\ \ \downarrow T(e_1) \quad \downarrow T(e_2) \quad \downarrow T(e_3) \quad \downarrow T(e_4)$

b) Det. valorile proprii + subsp proprii coresp.

Pt. a det val proprii:

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0.$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2 \to C_1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1 - L_2 \to L_2}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{dezv } C_1}{=} (2-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (2-\lambda)\left[\lambda(1-\lambda)^2 + 2 + 2 + 2(1-\lambda) - \lambda + 2(1-\lambda)\right] =$

$= (2-\lambda)\left[\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 4 + 2 - 2\lambda - \lambda + 2 - 2\lambda\right] =$

$= (2-\lambda)(\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 8 - 5\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8)$

$= (2-\lambda)\left[\lambda^2(\lambda-2) - 4(\lambda-2)\right]$

$= -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda^2-4)$

$= -(\lambda-2)^3(\lambda+2)$

$P(\lambda) = -(\lambda-2)^3(\lambda+2) = 0$

$\lambda_1 = 2 \qquad m_a(\lambda_1) = 3$

$\lambda_2 = -2 \qquad m_a(\lambda_2) = 1$

$Spec\ T = \{-2, 2\}$

Pt a determina subspațiile proprii avem:

$V_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid (A - \lambda_1 I_4) v = 0 \}.$

Fie $v = (a,b,c,d)^T \in \mathbb{R}^4$

$$(A - 2I_4)v = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -a+b+c+d=0 \\ a-b-c-d=0 \\ a-b-c-d=0 \\ a-b-c-d=0 \end{cases}$$

Obs că toate ec coincid, deci practic rangul matricei acestui sistem este 1, deci avem o nec pp și 3 secundare

luăm $a = b+c+d$, $\forall\ b,c,d \in \mathbb{R}$

facem ca la subspații

Deci $V_{\lambda_1} = \{ (b+c+d, b, c, d) \mid b,c,d \in \mathbb{R} \} \overset{?}{=} \{ (b,b,0,0) + (c,0,c,0) + (d,0,0,d) \mid b,c,d \in \mathbb{R} \}$

$= \{ b(1,1,0,0) + c(1,0,1,0) + d(1,0,0,1) \mid b,c,d \in \mathbb{R} \}$

$= \langle \underbrace{(1,1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(1,0,0,1)}_{v_3} \rangle.$

pt. $V_{\lambda_2} = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid (A - \lambda_2 I_4) v = 0_{\mathbb{R}^4} \}$

Fie $v = (a,b,c,d)^T \in \mathbb{R}^4$

$$(A + 2I_4)v = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a+b+c+d=0 & (1) \\ a+3b-c-d=0 & (2) \\ a-b+3c-d=0 & (3) \\ a-b-c+3d=0 & (4) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Longrightarrow}, \overset{(3)-(4)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 4a+4b=0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b \\ 3c-d+c-3d=0 \\ 4c-4d=0 \Rightarrow c=d \end{cases}$$

Acum înlocuiesc în ec (3)

$-2b+3d-d=0$

$-2b+2d=0 \Rightarrow 2b=2d \Rightarrow b=d$

$V_{\lambda_2} = \{ (-b,b,b,b) \mid b \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(-1,1,1,1)}_{v_4} \rangle.$

Este OK și dacă vă dă $(1,-1,-1,-1)$

c) Verificați dacă T este diagonalizabilă

$$\begin{cases} m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) = 4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 \\ m_a(\lambda_1) = 3 \quad m_g(\lambda_1) = \dim V_{\lambda_1} = 3 \Rightarrow m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1) \\ m_a(\lambda_2) = 1 \quad m_g(\lambda_2) = \dim V_{\lambda_2} = 1 \Rightarrow m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow T \text{ este diagonalizabilă}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \text{forma diagonală}$$

$B = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \} \to$ baza formată din vect proprii