Curs 3

Teoremă: Fie $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$,

$\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}^q$

$g: A \to B$ $\quad g = (g_1, g_2, \ldots, g_q)$

$h: B \to \mathbb{R}$ $\quad h = (h_1, h_2, \ldots, h_r)$

$f = h \circ g : A \to \mathbb{R}^r$

$f = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$ și $a \in \mathring{A}$ a.î. $g(a) \in \mathring{B}$

Dacă g e dif în a și h e dif în $g(a)$

atunci:

1) $f = h\circ g$ e dif în a şi $df(a) = d(h\circ g)(a)$
$= dh(g(a)) \circ dg(a)$

2) $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial (h\circ g)_i}{\partial x_k}(a)$

$$= \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial h_i}{\partial y_l}(g(a)) \cdot \frac{\partial g_l}{\partial x_k}(a)$$

$\forall\ i = \overline{1,r}$
$\forall\ k = \overline{1,p}$

Explicaţii teoremă

1)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \arrow[r, "dg(a)"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{R}^q \arrow[r, "dh(g(a))"] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

$df(a) = dh(g(a)) \circ dg(a)$

2)
$$\begin{tikzcd} A \subset \mathbb{R}^p \arrow[r, "g=(g_1, g_2, \dots, g_q)"] \arrow[rr, bend right, "f = h\circ g"'] & B \subset \mathbb{R}^q \arrow[r, "h=(h_1, h_2, \dots, h_r)"] & \mathbb{R}^r \\ (x_1, \dots, x_p) \arrow[u] & (y_1, \dots, y_q) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Au sens: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\ \forall\ k = \overline{1,p}$

$\frac{\partial g}{\partial x_k}(a),\ \forall\ k = \overline{1,p}$

$\frac{\partial h}{\partial y_l}(g(f(a)))\ \forall\ l = \overline{1,q}$

Nu au sens: $\frac{\partial f}{\partial y_l}(a)\ \forall\ l = \overline{1,q}$

$\frac{\partial g}{\partial y_l}(a)\ \forall\ l=\overline{1,q}$, $\frac{\partial h}{\partial x_k}(g(a))\ \forall\ k=\overline{1,p}$

Ex: Fie $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ o fct diferent. și $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$f(x,y,z)=h(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)$$

Arăt că f este diferent. și det $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ~~dom de def al lui f~~ dom de def al lui h

Sol Fie $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z)=(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)$$

Fie $g_1,g_2,g_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $g_1(x,y,z)=xyz$

$g_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $g_3(x,y,z)=x+yz$

Avem $g=(g_1,g_2,g_3)$ și $f=h\circ g$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z)\right)$$

$$=(yz,\ 2x,\ 1)\quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=(xz,\ 2y,\ z)\quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=(xy,\ 2z,\ y)\quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \text{ cont pe } \mathbb{R}^3\\ \mathbb{R}^3 \text{ deschisă}\end{array}\right| \Rightarrow g \text{ dif de } \mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l}h \text{ dif pe } \mathbb{R}^3\\ g \text{ dif pe } \mathbb{R}^3\end{array}\right| \Rightarrow f=\cancel{g\circ h}\ h\circ g \text{ dif pe } \mathbb{R}^3$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g=(g_1,g_2,g_3)"] \arrow[rr, bend right, "f=h\circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "h"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(x,y,z) $\quad$ (u,v,w)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial(h\circ g)}{\partial x}(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) +$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) +$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial h}{\partial u}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\, yz +$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\, 2x +$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz) \cdot 1$$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial(h\circ g)}{\partial y}(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) +$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) +$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial h}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot xz + \frac{\partial h}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2y + \frac{\partial h}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial (h \circ g)}{\partial z}(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial z}(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial h}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot xy + \frac{\partial h}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2z + \frac{\partial h}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot y. \qquad \square$$

Obs. În ex. prec. putem nota $g = (u, v, w)$, i.e. $g_1 = u$, $g_2 = v$, $g_3 = w$, i.e. $u, v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u(x,y,z) = xyz$, $v(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $w(x,y,z) = x+yz$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "g=(u,v,w)"] \arrow[rr, bend right, "f = h \circ g(u,v,w)"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z))\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z))\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z))\,\frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z)$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ – analog (continuăm noi)

$$f(x,y,z) = h(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) = h(u,v,w)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} \quad \square$$

- Derivate parțiale de ordin superior și derivate parțiale de ordin superior (!)

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \to \mathbb{R}^q$ și $a \in \overset{\circ}{A}$.

Def: Fie $i, j \in \{1, \dots, p\}$. Pp că $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$, a.î. f admite derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pe V (i.e. $\exists\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)\ \forall c \in V$).

Dacă fct. $\frac{\partial f}{\partial x_j}: V \to \mathbb{R}^q$ admite derivată parțială în raport cu variabila x_i în pct a, această derivată parțială s.n. derivata parțială de ordinul 2 a fct. în raport cu variab. x_i și x_j în pct a și se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$

dacă $i\neq j$ și cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ dacă $i=j$

Similar se definesc derivatele parțiale de ordin $K \geq 3$

<u>Notații corecte</u>

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_K}(a) \text{ etc.}$$

<u>Notații greșite</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2}(a)$$

• **Lemă (Schwarz)**

Fie $i,j \in \{1,\dots,p\}$, $i\neq j$ și $V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$ a.î. f admite derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ pe V.

Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : V \to \mathbb{R}^q$ e cont în a,

atunci $\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ și $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}$

Def Pp că $\exists\ V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$ a.î. f admite toate derivatele parțiale de ordinul 2 pe V și acestea sunt cont în a.

Definim diferențiala de ordinul 2 a lui f în a prin $d^2 f(a) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

$$d^2 f(a)(\underbrace{u}_{(u_1,\dots,u_p)}, \underbrace{v}_{(v_1,\dots,v_p)}) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i v_j$$

Def Pp că $\exists\ V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$ a.î. f admite toate der. par. de ordinul 3 pe V și acestea sunt cont. in a. Definim diferențiala de ordinul 3 a lui f ~~plan~~ în a prin $d^3 f(a) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

$$d^3 f(a)(u, v, w) = \sum_{i,j,k}^{p} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a)\, u_i v_j w_k$$

$(u_1 \dots u_p)\ (v_1 \dots v_p)\ (w_1 \dots w_p)$

Similar se definește $d^k f(a)$, $k \geq 3$

Notații

$$d^2 f(a)(u,u) \overset{not}{=} d^2 f(a)(u)^2$$

$$d^3 f(a)(u,u,u) \overset{not}{=} d^3 f(a)(u)^3$$

Obs Dacă $p=2$, $q=1$ și $u=(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ atunci

- $$d^2 f(a)(u)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\, u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\, u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\, u_2^2$$

- $$d^3 f(a)(u^3) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)\, u_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a)\, u_1^2 u_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a)\, u_1 u_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)\, u_2^3$$

- $$d^k f(a)(u^k) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a)\, u_1^k + \dots + C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(a)\, u_1^{k-i} u_2^i + \dots + \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a)\, u_2^k$$

Teoremă (Formula lui Taylor cu rest Lagrange, cazul multidimensional)

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$ deschisă și convexă
(i.e $\forall x, y \in D$, $\forall t \in [0,1]$ avem $(1-t)x + ty \in D$)
$m \in \mathbb{N}$, $f : D \to \mathbb{R}^q$ o fct care admite toate derivatele parțiale de ordinul $\boxed{m+1}$ pe D și acestea sunt continue pe D și fie $a \in D$ [$\exists c \in (a, x) \overset{not}{=} \{(1-t)a + tx \mid t \in (0,1)\}$ a.î.
Atunci, $\forall x \in D$, $x \neq a$,

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(x-a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{m!} d^m f(a)(x-a)^m}_{T_m(x)} + \underbrace{\frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(c)(x-a)^{m+1}}_{R_m(x)}$$

Ex Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = xy^3 + 2xy - 2x^2 + 3x + y - 2$

a) Det. derivatele part de ord. 2 ale lui f

Sol

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 + 2y - 4x + 3$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 + 2x + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 6xy$$

lema lui Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 3y^2 + 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

fct cont

b) Det $df(1,2)$, $d^2 f(1,2)$

Sol $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ deschisă}\end{array}\right| \Rightarrow f$ dif pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$
f dif în $(1,2)$

$df(1,2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df(1,2)(\underset{(u_1,u_2)}{\underset{\shortparallel}{u}})$

$= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \; \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right]$

$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)}_{11} u_1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)}_{15} u_2$

$= 11 u_1 + 15 u_2$

Toate derivatele parțiale de ordinul 2 sunt continue

$d^2 f(1,2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d^2 f(1,2)(u, v)$, $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) \cdot u_1 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) u_1 v_2 +$

$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(1,2) u_2 v_1 + \frac{\partial f}{\partial y^2}(1,2) u_2 v_2$

$= -4 u_1 v_1 + 14 u_1 v_2 + 14 u_2 v_1 + 12 u_2 v_2$

c) Det pol. Taylor de ord 2 asociat lui f în $(1,2)$ (i.e $T_2(x,y)$)

Sol

$T_2(x,y) = f(1,2) + \frac{1}{1!} df(1,2)((x,y)-(1,2)) +$

$\frac{1}{2!} d^2 f(1,2)((x,y)-(1,2))$

$= f(1,2) + \frac{1}{1!}\left(11(x-1) + 15(y-2)\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 + \right.$

$\left. 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)(x-1)(y-2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2\right)$

$= 13 + 11(x-1) + 15(y-2) + \frac{1}{2}\left(-4(x-1)^2 + 28(x-1)(y-2)\right.$

$\left. + 12(y-2)^2\right) = 13 + 11(x-1) + 15(y-2) - 4(x-1)^2$

$+ 14(x-1)(y-2) + 6(y-2)^2$ $\square$

Pct de extrem local

Def: Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A$ și $f : A \to \mathbb{R}$.

Spunem că a este:

1) pct de min. local al lui f dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \leq f(x)\ \forall\, x \in V \cap A$

2) pct de max local al lui f dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \geq f(x)\ \forall\, x \in V \cap A$

3) pct de extrem local al lui f dacă este pct de min local al lui f sau pct de max. local al lui f

Def: Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}$ și $a \in \mathring{A}$. Spunem că a este pct critic al lui f dacă f e dif în a și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ $\forall\, i = \overline{1,p}$

Teoremă (Fermat)

$p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}$ și $a \in A$ a.î.:

1) $a \in \mathring{A}$

2) a pct de extrem local al lui f

3) f este dif în a

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall\, i = \overline{1,p}$.

<u>Def</u>: Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, D deschisă, $f: D \to \mathbb{R}^q$ și $k \in \mathbb{N}$. Spunem că f este de clasă C^k (pe D) dacă f admite toate derivatele parțiale de ordinul k (pe D) și acestea sunt continue (pe D)

<u>Teoremă</u> (Crit de stab. a pct de extrem local)

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, D deschisă
$f: D \to \mathbb{R}$ o fct de clasă C^2 (pe D) și
$a \in D$ un pct critic al lui f.

Notăm $H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \dots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix}$

mat. hessiană a lui f în a

$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}$

$\Delta_p := \det(H_f(a))$

1) Dacă $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_p > 0$
(i.e. $\Delta_i > 0\ \forall\, i = \overline{1,p}$) atunci a - pct de min local al lui f.

Scanned with CamScanner

2) Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^p \Delta_p > 0$ (i.e $(-1)^i \Delta_i > 0 \ \forall\, i=\overline{1,p}$) atunci a este pct de max local al lui f

3) Dacă $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0 \dots \Delta_p \geq 0$ (i.e $\Delta_i \geq 0 \ \forall\, i=\overline{1,p}$) sau $\Delta_1 \leq 0, \dots, (-1)^p \Delta_p \geq 0$ (i.e $(-1)^p \Delta_p \geq 0 \ \forall\, i=\overline{1,p}$) și $\exists$ $i_0 \in \{1,2,\dots,p\}$ a.î. $\Delta_{i_0} = 0$ atunci nu se poate trage nicio concluzie

4) În toate celelalte cazuri, a nu este pct de extrem local al lui f

ex Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
Det pct de extrem local ale lui f și prec. natura lor.

ex Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
Det. pct de extrem local ale lui f și precizați natura lor.

Sol $\mathbb{R}^2$ deschisă
Det. pct. critice ale lui f
f continuă

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont pe $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ deschisă $\Rightarrow$ f dif. pe $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \; | :3 \\ 6xy - 12 = 0 \; | :6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0 \; | \cdot x^2$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

Notăm $t = x^2$, $t > 0$

Avem $t^2 - 5t + 4 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad t_1 = 1, \; t_2 = 4$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x \in \{\pm 2\} \Rightarrow y \in \{\pm 1\}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x \in \{\pm 1\} \Rightarrow y \in \{\pm 2\}$$

Sol. sist de mai sus sunt:

$(2,1)$ $(-2,-1)$ $(1,2)$ $(-1,-2)$

Deoarece f este diferențiabil pe $\mathbb{R}^2$ avem că orice ~~sol~~ sol a sist este pct critic

Punctele critice ale lui f sunt $(2,1)$ $(-2,-1)$ $(1,2)$ $(-1,-2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

lema lui Schwarz

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Obs că f este de clasă C^2

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 12 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0$

$\Rightarrow (2,1)$ pct de min local al lui f

$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -12 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0$

$\Rightarrow (-2,-1)$ pct de max local al lui f

$$H_f(1,2) = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}$$

$\Delta_1 = 6 > 0$

$\Delta_2 = 36 - 144 = -108 < 0$

$\Rightarrow$ nu putem spune nimic (nu e pct de extrem local)

$$H_f(-1,-2) = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix}$$

$\Delta_1 = -6 < 0$

$\Delta_2 = 36 - 144 = -108 < 0$

$\Rightarrow$ $(-1,-2)$ nu e pct de extrem local