SEMINAR IV - 26.10.2023

Spații vectoriale. SLi. SLD. SG. Bază

6. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $S = \{(1, m, 1), (m, 1, 1), (1, 0, m)\} \subset \mathbb{R}^3$, $m \in \mathbb{R}$

1) $m = ?$; S este SLi

2) $m = ?$; S este SLD

3) $m = 2 \Rightarrow S$ este bază

1) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $a(1, m, 1) + b(m, 1, 1) + c(1, 0, m) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$(a + bm + c, \ am + b, \ a + b + cm) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$(*)\ \begin{cases} a + bm + c = 0 \\ am + b = 0 \\ a + b + cm = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

SLO $(*)$ este soluție unică, $(a, b, c) = (0, 0, 0)$

$\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m + m + 0 - 1 - 0 - m^3 = -m^3 + 2m - 1$$

$-m^3 + 2m - 1 = 0$

$-m^3 + m + m - 1 = 0$

$-m(m^2 - 1) + (m - 1) = 0$

$-m(m+1)(m-1) + (m-1) = 0$

$(m-1)(-m^2 - m + 1) = 0$

Scanned with CamScanner

$-m^2 - m + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = 5$ ·

$m_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2}$

$m_3 = 1$

$m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2} \right\}$

2) S este SLD $\Leftrightarrow m \in \left\{ 1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2} \right\}$

3) S este bază $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{S este SLi} \\ \text{S este SG} \end{cases}$

S este SG $\Leftrightarrow \mathbb{R}^3 = \langle S \rangle$ - sistem de generator pentru $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}^3\ \exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $x = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w$

$$** \begin{cases} a + bm + c = x_1 \\ am + b = x_2 \\ a + b + cm = x_3 \end{cases} \qquad m = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \det A \neq 0 \quad ** \text{ este SCD} \Rightarrow \text{S este SG} \\ \text{Conform 1) pt } m = 2 \Rightarrow \text{S este SLi} \end{array}\right\} \Rightarrow$ S este bază

PROPOZIȚIE: $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ este sp. vectorial finit general;

$\dim_{\mathbb{R}} V = m$

V.A.E $\begin{cases} \text{1) S este bază} \\ \text{2) S este SLi} \\ \text{3) S este SG} \end{cases}$

OBSERVAȚIE: Metoda 2 pentru 3)

$B_0 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

↳ bază canonică în $\mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$m = 2$

$\text{card}(S) = |S| = 3$

Conform propoziției, S este bază

b) $S' = \{(1, \overset{u'}{\overset{\shortparallel}{a_1}}, a_1^2), (1, \overset{v'}{\overset{\shortparallel}{a_2}}, a_2^2), (1, \overset{w'}{\overset{\shortparallel}{a_3}}, a_3^2)\}$

Ce relație verifică a_1, a_2 și a_3 a.î. S' este bază?

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$

$|S'| = 3$

S' este bază $\overset{\text{PROPOZIȚIE}}{\Longrightarrow}$ S' este SLI $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a_1 a + a_2 b + a_3 c = 0 \\ a_1^2 a + a_2^2 b + a_3^2 c = 0 \end{cases}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $au' + bv' + cw' = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow a = b = c = 0$

are soluție unică nulă $\Rightarrow \det A \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}$$

$\det A = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1) \neq 0$

$\Rightarrow a_1, a_2, a_3$ distincte 2 câte 2

7. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

a) $S_1 = \{(1, \overset{u}{\overset{\shortparallel}{1}}, 0), (1, \overset{v}{\overset{\shortparallel}{-1}}, 1), (2, \overset{w}{\overset{\shortparallel}{0}}, -1)\}$ $w = u + v$

Să se extragă din S_1 un SLI maximal S_1' și să se extindă la o bază

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & -1 \end{matrix} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 0 - 0 - 0 + 1 = 0$$

rg A 2

$S_1' = \{u, v\}$ SLI maximal în S_1

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{? DA}$$

$\left.\begin{matrix} B = S_1' \cup \{(1,0,0)\} \text{ SLI} \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \text{card } B = 3 \end{matrix}\right\} \overset{\text{PROPOZIȚIE}}{\Longrightarrow}$ B este bază

b) $S_2 = \{(1,2,3)\}$

1. S_2 este SLi și nu este SG

2. Să se extindă

1. $(1,2,3) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow S_2$ SLi

$\left.\begin{array}{l} S_2 \subset \mathbb{R}^3 \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 = \text{nr. minim de vectori care formează SG !} \\ \text{card } S_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_2$ nu este SG

2. $\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \det A \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3 \Rightarrow B' = S_2 \cup \{(0,1,0),(0,0,1)\} \\ \text{card } B' = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow B'$ este bază

8. $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } P \leq 2\}, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

a) $f = 2X^2 - 3X + 1 \rightarrow B_1 = \{f, f', f''\}$ bază. Generalizare

b) $B_2 = \{1, X-1, (X-1)^2\}$ bază. Generalizare

OBSERVAȚIE: $f = \tilde{f}$ (funcția polinomială asociată)

$f' = 4X - 3 \equiv (-3, 4, 0)$

$f'' = 4 \equiv (4, 0, 0)$

$B_1' = \{(1,-3,2), (-3,4,0), (4,0,0)\}$ bază în $\mathbb{R}^3$

$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \rightarrow (a_0, a_1, a_2)$

$\quad\quad\quad\quad \underset{\mathbb{R}^2}{\cap} \quad\quad\quad\quad\quad\quad \underset{\mathbb{R}^3}{\cap}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0+0+0-32-0-0 = -32 \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} B_1' \text{ SLI în } \mathbb{R}^3 \\ |B_1'| = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{PROPOZIȚIE}} B_1' \text{ bază în } \mathbb{R}^3 \Rightarrow B_1' \text{ bază în } \mathbb{R}_2[X]$$

Generalizare

$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \qquad a_2 \neq 0$

$f' = a_1 + 2a_2 X$

$f'' = 2a_2$

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 2a_2 \\ a_1 & 2a_2 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = -4a_2^3$$

Dezvoltare în serie Taylor în jurul lui x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\left(\frac{x-x_0}{1!}\right) + f''(x_0)\left(\frac{x-x_0}{2!}\right)^2 + \dots$$

b) $$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det B = 1 \neq 0$

$B_2' = \{(1,0,0),(-1,1,0),(1,-2,1)\}$ SLI în $\mathbb{R}^3$

card $B_2' = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\Rightarrow B_2'$ bază în $\mathbb{R}^3 \Rightarrow B_2$ bază $\mathbb{R}_2[X]$

Metoda 2:

$\forall f \in \mathbb{R}_2[X]$

$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

$$f(x) = f(1) + f'(1)\left(\frac{x-1}{1!}\right) + f''(1)\left(\frac{x-1}{2!}\right)^2$$

$$= \underbrace{f(1)}_{a} \cdot 1 + \underbrace{f'(1)}_{b}(x-1) + \underbrace{\frac{f''(1)}{2!}}_{c}(x-1)^2 \in \langle B_2 \rangle$$

Scanned with CamScanner

$$\left.\begin{array}{l} B_2 \text{ SG pt } \mathbb{R}_2[x] \\ |B_2| = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow B_2 \text{ bază în } \mathbb{R}_2[x]$$

10. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

a) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\alpha = ?$ B - bază în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\underset{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}} \to \underset{\mathbb{R}^4}{\underset{\cap}{(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})}}$$

$$B' = \{(1, 1, 1, -1), (0, 5, -1, -1), (-1, 0, 3, -1), (\alpha, 1, 1, -1)\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

B' - bază în $\mathbb{R}^4 \Leftrightarrow B'$ SLI $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \max = 4 \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 + L_4 \\ L_2 + L_4 \\ L_1 + L_4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & \alpha - 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (\alpha - 1)(-8 - 2)$$

$= -10(\alpha - 1) \neq 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$