Seminarul 5

Wednesday, March 17, 2021 8:53 AM

Data trecută:

$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ div al lui zero (în $R[X]$) $\Leftrightarrow \exists a \in R, a \neq 0$ a.î. $af = 0$

„$\Rightarrow$" $(\exists a \in R, a \neq 0$ a.î. $af = 0) \not\Leftrightarrow$ toți a_i sunt div ai lui zero

Contraex: $\hat{2}$ și $\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_6$

$$\boxed{\begin{matrix} \hat{3} \cdot \hat{2} = \hat{0} \\ \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0} \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{\hat{3} \cdot \hat{2}}_{\hat{0}!} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} = 0}$$

„$\Rightarrow$" (corect) Fie $fg = 0$ cu g de deg minim.

$g = b_0 + b_1 X + \dots + b_m X^m$.

$fg = 0 \underset{\deg n+m}{\Rightarrow} \boxed{a_n b_m = 0} \Rightarrow f(\underbrace{a_n g}_{\deg \leq m-1}) = 0 \Big\} a_n g = 0$

$\Leftrightarrow a_n b_k = 0, \ \forall k = \overline{0, m}$.

$fg = 0 \underset{\deg n+m-1}{\Rightarrow} \underbrace{a_n b_{m-1}}_{0} + a_{n-1} b_m = 0 \Rightarrow \boxed{a_{n-1} b_m = 0}$

$\deg n+m-2: \underbrace{a_n b_{m-2}}_{0} + \underbrace{a_{n-1} b_{m-1}}_{0} + a_{n-2} b_m = 0$

$fg = 0 \Rightarrow f \cdot (\underbrace{a_{n-1} g}_{\deg \leq m-1}) = 0$ $(a_{n-1} b_m = 0)$ minimalitate $\Rightarrow a_{n-1} g = 0$

$\Rightarrow a_{m-1} b_l = 0, \quad \forall l \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{a_{m-2} b_m = 0}$ Inducție: $a_l b_m = 0, \forall l = \overline{0,n}$

$\left(g = b_m \text{ i.e. } m = 0 \text{ și } g = b_0 = b_m \right).$

Partea celei formale

2.1. R inel comutativ, $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in R[X]$.

a) f inversabil $\Leftrightarrow a_0$ inversabil

„$\Rightarrow$" f inv $\Rightarrow \exists g = \sum_{i \geq 0} b_i X^i$ a.î. $fg = 1$

$\overset{\text{în gradul } 0}{\Longrightarrow} a_0 b_0 = 1$

„$\Leftarrow$" a_0 inv în $R \Rightarrow \exists b_0$ a.î. $a_0 b_0 = 1$.

$\forall i \geq 1, \quad \boxed{b_i = -a_0^{-1} \left(a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \dots + a_i b_0 \right)}$

$g = \sum_{i \geq 0} b_i X^i$.

$fg = \sum_{i \geq 0} c_i X^i$ unde $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$

$c_0 = a_0 b_0 = 1$

$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0$

$= (a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0) + a_i b_{i-1} + \dots + a_i b_0 = 0.$ ✓

$\Rightarrow fg = 1.$

<u>Var 2</u> $f = a_0 - Xg$ Prin înmulțire cu a_0^{-1}, pot pp că $a_0 = 1$

$f = 1 - Xg$

$h = 1 + Xg + (Xg)^2 + (Xg)^3 + \dots$ <u>are sens</u>, pt că doar un număr finit de termeni afectează fiecare grad. De ex, al k-lea coeficient este 0 pt $(Xg)^m$, $m > k$.

b) f nilpotent $\Rightarrow$ a_i nilpotent, $\forall i \geq 0$.

$\exists\, n$ a.î. $f^n = 0$ $\Rightarrow \left(\sum_{i \geq 0} a_i X^i\right)^n = 0 \Rightarrow \boxed{a_0^n = 0}$

Inducție după i: $P_i \to P_{i+1}$. Pp $a_0, \dots a_i$ nilpotente

$$g = \frac{f - a_0 - a_1 X - \dots - a_i X^i}{X^{i+1}} \leftarrow a_{i+1} X^{i+1} + a_{i+2} X^{i+2} + \dots$$

$g = a_{i+1} + a_{i+2} X + \dots$. g nilpotent $\overset{la fel}{\Rightarrow} \boxed{a_{i+1}^m = 0}$, pt un m.
(cu o putere m)

<u>Reciproca e falsă</u>: $R = \mathbb{Z}_2 [T, T^{1/2}, T^{1/3}, \dots] / (T)$

$\text{ii: } f = \sum a_n X^n \quad a_n = \widehat{T^{\frac{1}{n}}}$

și $f = \sum_{i \geq 0} a_n X^n$, $a_n = \widehat{T^{\frac{1}{n}}}$

• a_n nilpotent în R! $a_n^n = \widehat{T^{\frac{1}{n}}}^n = \widehat{T} = \widehat{0}$.

$\forall \ell \geq 0$, $f^{2^\ell} \boxed{\overset{?}{=}} \sum_{n \geq 1} \underbrace{\widehat{T^{2^\ell/n}}}_{\neq 0 \text{ pt } n > 2^\ell} X^{2^\ell n}$ $\Rightarrow$ f nu e nilpotent

$\left(f^{2^\ell} \overset{?}{=} \sum_{n \geq 1} a_n^{2^\ell} \cdot (X^n)^{2^\ell} \right)$

Reluăm „$\Rightarrow$" $f^n = 0$ pt un n

$\Rightarrow \boxed{a_0^n = 0}$

$\Rightarrow \underbrace{(f - a_0)}_{a_1 X + \dots}{}^{2n} = 0 \Rightarrow \boxed{a_1^{2n} = 0} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{a_i^{2^i n} = 0}$

Când căutăm un contraexemplu pt „$\Leftarrow$", trebuie să alegem un inel R și $a_0, a_1, \dots a_i, \dots \in R$ $\overset{\text{nilpotente}}{\text{a.î.}}$

$\boxed{\cancel{\exists} n \text{ a.î. } a_i^{2^i n} = 0}$.

$$R = K[T, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{3}}, \dots] \big/ (T)$$

$a_i = \widehat{T^{\frac{1}{i}}}$. $\exists n$ a.î. $\widehat{T^{\frac{1}{i}}}^{n \cdot 2^i} = 0$?

$\boxed{\text{Merge pt } n=1!}$

$$R = K[X_0, X_1, X_2, \ldots] \big/ (X_i^i \mid i \geq 0) \qquad ??$$

$$f = \hat{X}_0 + \hat{X}_1 T + \hat{X}_2 T^2 + \ldots \quad \in R[[T]]$$

Obs $\hat{X}_i$ nilpotent

Coef lui $T^{n(n+1)}$ în f^n îl conține pe $\hat{X}_{n+1}^n$, care nu se anulează cu altele. (!)

c) Temă!

2.2. K corp. Dem că idealele proprii ale lui $K[[X]]$ sunt doar (X^k), $k \geq 1$.

În particular, $K[[X]]$ e inel local.

Dem

Fie $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$, $f \neq 0$

Fie j minim a.î. $a_j \neq 0 \Rightarrow a_j$ inversabil, $a_0, a_1, \ldots a_{j-1} = 0$

$$\Rightarrow f = a_j X^j + a_{j+1} X^{j+1} + \ldots = X^j \underbrace{(a_j + a_{j+1} X + \ldots)}_{\text{inversabil cf. 2.1.a)}}$$

$\Rightarrow \forall f \in K[X], f \neq 0 \Rightarrow \exists j \geq 0$ și $u \in U(K[[X]])$

$\Rightarrow \forall f \in K[X], f \neq 0 \Rightarrow \exists j \geq 0$ și $u \in U(K[[X]])$

a.î. $f = u X^j$.

Fie $I \trianglelefteq K[[X]]$ ideal propriu.

$I = (X^j)$ unde $j = \min \{ k \geq 0 \mid X^k \in I \}$

1. $\{ k \geq 0 \mid X^k \in I \}$ e nevidă $\qquad (X-1) \text{ în } \mathbb{Z}[X]$

$f \in I, f \neq 0 \Rightarrow \underset{\substack{\cap \\ I}}{f} = u X^j$ pt un $j \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ X^j}}{u^{-1} f} \in I$

$\Rightarrow (X^j) \subset I$

2. Aleg j_0 minim a.î. $(X^{j_0}) \subset I$. Vrem $(X^{j_0}) = I$

$\Updownarrow$

$X^{j_0} \in I$ și $X^{j_0 - 1} \notin I$

Fie $f \in I \Rightarrow f \in (X^{j_0})$

$f = u X^k$ pt un $k \geq 0$.

Dacă $k < j_0 \Rightarrow X^k = u^{-1} f \in I$ contradicție cu minimalitatea lui j_0

$\Rightarrow k \geq j_0$ și $f = u X^k = u X^{k - j_0} \cdot X^{j_0} \in (X^{j_0})$. $\square$

Deci idealele proprii lui $K[[X]]$ sunt

$$(X) \supset (X^2) \supset (X^3) \supset \ldots \supset (X^\ell) \supset \ldots \; .$$

$(X)^\ell + I$

$$R[[X]] \to R, \quad X \mapsto 0$$

3.1. Folosiți Teorema fundamentală de izomorfism pentru a arăta că:

a) $\boxed{R[X]/(X-a) \simeq R}$, pt R inel (comutativ)

$\boxed{\begin{array}{l} \varphi: R \to S \\ R/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f \end{array}}$

<u>Dem</u> Fie $\varphi: R[X] \to R$, $\varphi(P) = P(a)$.
(evaluarea în a)

φ este morfism de inele, fie prin verificări, fie din Proprietatea de universalitate a inelului de polinoame:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, bend right, "i"'] & S \ni b \text{ morfism de inele} \\ & R[X] \arrow[u, dashed, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd} \qquad X \mapsto b$$

$\exists!\ \overline{\varphi}: R[X] \to S$ a.î. $\overline{\varphi} \circ i = \varphi \iff \overline{\varphi}(a) = a, \forall a \in R$
și $\overline{\varphi}(X) = b$.

Aici:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "id"] \arrow[dr, hook] & R \ni a \\ & R[X] \arrow[u, dashed] \quad X \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \overline{\varphi}$ evaluarea în a.

Reamintim, $\varphi: R[X] \to R$, $\varphi(P) = P(a)$.

$$R[X]/(X-a) \simeq R$$

TFI: $R[X]/\operatorname{Ker}\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi$.

- $R = \operatorname{Im}\varphi \Leftrightarrow$ φ surjectivă: $\forall r \in R$, $\varphi(\ r\ ) = r$.

  $\uparrow$ pol de grad ≤ 0

  sau $\varphi(X - a + r) = r$.

- $\operatorname{Ker}\varphi = (X-a)$ (Bezout)

sau cu Th de împărțire cu rest:

Fie $P \in R[X]$. $P = (X-a)Q + R$, $\deg R \leq 0$

$\Leftrightarrow P = (X-a)Q + r$, $r \in R$

Evaluând în $a \Rightarrow r = P(a)$

$\Rightarrow P = (X-a)Q + P(a)$

$\Rightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow (X-a) \mid P \Leftrightarrow P \in (X-a)$.

c) $\mathbb{Z}[X]/_{(X^2-2)} \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

Fie $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\varphi(P) = P(\sqrt{2})$

morfism de inele din Prop. de univ. a inelului de polinoame.

- surjectiv: $a+b\sqrt{2} = \varphi(a+bX)$, $\forall a,b \in \mathbb{Z}$
- $\underline{\operatorname{Ker}\varphi \overset{?}{=} (X^2-2)}$

„$\supset$" Fie $P \in (X^2-2) \Rightarrow P = (X^2-2)Q \Rightarrow \underbrace{P(\sqrt{2})}^{\varphi(P)} = (\underbrace{\sqrt{2}^2-2}_{0})Q(\sqrt{2})$

$= 0$

„$\subset$" Fie $P \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow P(\sqrt{2}) = 0$.

TR de împărțire cu rest: $P = (X^2-2)Q + R$, $\deg R \leq 1$
(X^2-2 e monic)

$\Leftrightarrow P = Q(X^2-2) + aX + b$, $a,b \in \mathbb{Z}$, $Q \in \mathbb{Z}[X]$.

$\Rightarrow 0 = P(\sqrt{2}) = a\sqrt{2}+b \xRightarrow{\sqrt{2}\text{ irațional}} a,b = 0 \Rightarrow (X^2-2) \mid P$ $\square$.

Ex!

b) $\mathbb{Z}[X]/_{(n)} \simeq \mathbb{Z}_n[X]$.

Fie $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_n[X]$, $\boxed{\varphi(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X + \dots + \hat{a}_nX^n}$,

unde $\hat{\ }$ sunt în $\mathbb{Z}_n$.

$$a \longmapsto \hat{a}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{Z}_n[X] & X \\ \mathbb{Z}[X] \arrow[ur, dashed] & & X \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

- φ morfism de inele

- φ surjectivă:

$\mathbb{Z}_5[X] \ni \hat{3} - \hat{2}X + \hat{4}X^2 - \hat{2}X^3 = \varphi(3 - 2X + 4X^2 - 2X^3)$

$= \varphi(8 - 7X + 4X^2 + 3X^3)$

$\hat{a}_0 + \hat{a}_1 X + \dots + \hat{a}_m X^m = \varphi(a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m)$, pt $\forall\, \hat{a}_i \in \mathbb{Z}_n$

- $P = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \hat{a}_0 + \hat{a}_1X + \dots + \hat{a}_mX^m = 0$

$\iff \hat{a}_0 = \hat{a}_1 = \dots = \hat{a}_m = \hat{0}$ $(\text{mod } n) \iff n \mid a_0, n \mid a_1, \dots n \mid a_m$

$\iff n \mid P \iff P \in (n)$.
în $\mathbb{Z}[X]$

$\varphi(5X^3 - 5X^2 + 25X + 40) = 0$
pt $n = 5$.

d) $\mathbb{Z}[X]/\ \simeq \mathbb{Z}[i]$ } Exe!

d) $\mathbb{Z}[X]/_{(X^2+1)} \simeq \mathbb{Z}[i]$

e) $\mathbb{R}[X]/_{(X^2+1)} \simeq \mathbb{C}$ } Exc!

f) $\mathbb{R}[X]/_{(X^2-1)} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

<u>Var 1</u> $\mathbb{R}[X]/_{(X^2-1)} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\varphi(P) = (P(1), P(-1))$

$+$ TFI (Exc)

<u>Var 2</u> $\mathbb{R}[X]/_{(X-1)(X+1)} \underset{\sim}{\overset{L.C.R.}{=}} \mathbb{R}[X]/_{(X-1)} \times \mathbb{R}[X]/_{(X+1)} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Pot aplica Lema chineză a resturilor doar dacă $(X-1)$ și $(X+1)$ sunt comaximale:

$$\frac{-1}{2}(X-1)+\frac{1}{2}(X+1) = 2 \in U(\mathbb{R}[X])$$

g) $\mathbb{C}[X]/_{(X^2+1)} \simeq \mathbb{C}\times\mathbb{C}.$

$$\mathbb{C}[X]/_{(X+i)(X-i)} \underset{\sim}{\overset{LCR}{\simeq}} \mathbb{C}[X]/_{(X+i)} \times \mathbb{C}[X]/_{(X-i)} \simeq \mathbb{C}\times\mathbb{C}$$

comaximale: $(X+i)-(X-i) = 2i \in U(\mathbb{C}[X])$

<u>Temă</u> Calculați $\mathbb{Z}[X]/_{(2X-1)} \simeq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{ \frac{a}{2^n} \;\middle|\; \begin{matrix} n\in\mathbb{N}, \\ a\in\mathbb{Z} \end{matrix} \right\}$

(Hint: Alegeți $\varphi: \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, $\varphi(P) = P\left(\frac{1}{2}\right)$)

$$\mathbb{Z}[X]/_{(X^2)} = \{ \widehat{a+bX} \mid a,b\in\mathbb{Z} \}$$

$$R[X]/_{(f)} = \{ \hat{g} \mid \deg g < \deg f \}$$

$\mathbb{Z}[i]/_{(p)}$ e corp $\Leftrightarrow p \equiv 3 \ (4)$

$$\boxed{\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1, & p\equiv 1\ (4) \\ -1, & p\equiv 3\ (4) \end{cases}}$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

Exc 3.4. a) $\mathbb{Q}[X]/(X^2-1) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}[X]/(X^2-1) = \mathbb{Q}[X]/(X-1)(X+1) \overset{L.C.R.}{\simeq} \mathbb{Q}[X]/(X-1) \times \mathbb{Q}[X]/(X+1)$$

$(X-1)-(X+1) = -2 \in U(\mathbb{Q}[X])$

3.1.a) $\simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

b), c), d) : $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Idee: $\mathbb{Z}[X]/(X-1)(X+1) \overset{?}{\simeq} \mathbb{Z}[X]/(X-1) \times \mathbb{Z}[X]/(X+1)$

Da, dacă $(X-1)$ și $(X+1)$ comaximale:

$\exists f, g \in \mathbb{Z}[X]$ a.î. $f(X-1) + g(X+1) = 1$?

$1 \cdot (X+1) + (-1)(X-1) = 2 \notin U(\mathbb{Z}[X])$

Idee: evaluăm în 1 : $\boxed{2g = 1 \quad \text{ab}}$

Deci poate obținem $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, chiar

Deci putem obține $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, chiar dacă nu se poate aplica LCR?

b) $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1)$ - idempotenți ?

$$\mathbb{Z}[X]/(X^2-1) = \{ \widehat{aX+b} \mid a,b\in\mathbb{Z} \} \left(\begin{matrix}\text{Teorema împărțirii}\\ \text{cu rest}\end{matrix}\right)$$

$$\left(= \{ \hat{g} \mid g\in\mathbb{Z}[X] \} \right)$$

Fie $g\in\mathbb{Z}[X]$. $g = \cancel{Q(X^2-1)} + R$, $\deg R \le 1$

$$\Rightarrow \hat{g} = \hat{R}.$$

Mai mult, $\widehat{aX+b} = \widehat{cX+d} \Leftrightarrow a=c$ și $b=d$ (*)

unicitatea din Th de împărțire cu rest

Înapoi la b): Fie $\widehat{aX+b} \in \mathbb{Z}[X]/(X^2-1)$ idempotent.

$\iff \widehat{aX+b}^{\,2} = \widehat{aX+b}$

$\|$

$\widehat{(a^2X^2+2abX+b^2)} = \widehat{aX+b}$

$\hat{1} \quad \|$

$\widehat{2abX+a^2+b^2} = \widehat{aX+b}$

$\boxed{(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2}$

$\widehat{X^2-1} = \hat{0}$

$\hat{X}^2 = \hat{1}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2ab = a \iff a(2b-1)=0 \overset{b\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} a=0 \\ a^2+b^2 = b \end{cases}$

$\Downarrow$

$b=0$ sau $b=1$

$\Rightarrow \text{Idempot}\left(\mathbb{Z}[X]/(X^2-1)\right) = \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

d) Arătați că $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1) \not\simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. $4\neq 2$

Idempotenții lui $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

3.3. R inel comutativ $\Rightarrow R[X]$ nu e inel local.

are un singur ideal maximal

(X) și $(X+1)$ sunt comaximale, distincte.

(X) și $(X+1)$, din Lema lui Krull, sunt fiecare incluse în câte un ideal maximal.

Pp că $(X), (X+1) \subset \underline{m}$ pt același $\underline{m}$ maximal

$(X+1) - X = 1 \in \underline{m}$ abs

<u>Ex 3.5.</u> (Teorema I de izomorfism)

R inel comutativ, $I, J \trianglelefteq R$, $I \subset J$.

Atunci: $p : R \to R/I$ proiecția

Recap: $\{\text{idealele lui } R/I\} = \{p(I') \mid I' \supset I\}$

$$= \{ I'/I \mid I' \supset I \}$$

Deci $J/I \trianglelefteq R/I$ are sens, $J/I = \{ \underset{p(x)}{\underset{\shortparallel}{\hat{x}}} \mid x \in J \}$

$$\boxed{\frac{R/I}{J/I} \simeq R/J}$$

$\hat{x} - x \pmod I$

$\bar{x} - x \pmod J$

$0/I$ $\qquad$ y

$\bar{x} - x\ (\mathrm{mod}\ I)$

$\bar{x} - x\ (\mathrm{mod}\ y)$

<u>Dem</u> (idee) Fie $\varphi: R/I \to R/y$, $\varphi(\hat{x}) = \bar{x}$.

- φ e corect definit: $\hat{x} = \hat{y}\ (\mathrm{mod}\ I) \Longrightarrow \bar{x} = \bar{y}\ (\mathrm{mod}\ y)$

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

$x - y \in I \xRightarrow{I \subset y} x - y \in y$

- φ e surjectiv
- $\ker \varphi = y/I$

aproape evidente

<u>Exc 3.7.</u> a) $\mathbb{Z}[X]/(2,X) = ?$

$$\mathbb{Z}[X]/(2,X) \underset{\text{T3 Iso}}{\simeq} \frac{\mathbb{Z}[X]/(X)}{(2,X)/(X)} \xrightarrow[3.1\text{-}a)]{\varphi \ \simeq} \frac{\mathbb{Z}}{\varphi\left((2,X)/(X)\right)} \simeq (X)$$

$\uparrow$

$(2,X) \supset (X)$

$\ \ \ \|\qquad\ \ \|$

$\ \ \ y \qquad\ \ I$

$\varphi: \mathbb{Z}[X]/(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$, $\varphi(\hat{P}) = P(0)$.

$\varphi\left((2,X)/(X)\right) = \varphi\left(\{\widehat{2f + Xg} \mid f, g \in \mathbb{Z}[X]\}\right)$

$f: R \to S$

$R/\ker f \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Im}\, f$

$$\varphi\left(\frac{(2,x)}{(x)}\right) = \varphi\left(\{2f + xg \mid f,g \in \mathbb{Z}[x]\}\right)$$

$R/_{\mathrm{Ker} f} \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Im} f$

$\bar{f}(\hat{x}) = f(a)$

$$= \{2f(0) + 0 \cdot g(0) \mid f,g \in \mathbb{Z}[x]\}$$

$$= (\varphi(2), \varphi(x)) = (\varphi(2)) = (2)$$

$$(*) \simeq \mathbb{Z}/_{(2)} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

$\mathbb{Z}[x]/_{(m)} \simeq \mathbb{Z}_m[x]$

<u>Var 2</u>: $$\frac{\mathbb{Z}[x]}{(2,x)} \underset{\sim}{\overset{\text{Th I Izo}}{=}} \frac{\mathbb{Z}[x]/_{(2)}}{(2,x)/_{(2)}} \underset{3.1.b)}{\overset{\psi}{\xrightarrow{\sim}}} \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\boxed{(\psi(2), \psi(x))}}$$

clasa în $\mathbb{Z}[x]/_{(2)}$

$$\psi : \mathbb{Z}[x]/_{(2)} \to \mathbb{Z}_2[x], \ \psi\left(\overline{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}\right)$$

$$= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \dots + \hat{a}_n x^n,$$

unde $\hat{a} = a \pmod 2$

$$\Rightarrow \psi(2) = \hat{2} = \hat{0}$$

$$\psi(x) = \hat{1} \cdot x = x$$

$$\simeq \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x)} \overset{3.1.a)}{\simeq} \mathbb{Z}_2$$

$$\simeq \frac{\quad}{(x)} \simeq \mathbb{Z}_2$$

Temă: $\mathbb{Z}[x]/(7, x-2)$, $\mathbb{Z}[x]/(x+5, x-2)$.