Fluxul câmpului electric

Notație: Φ , $[\Phi]_{S.I.} = 1 V \cdot m = 1 \frac{N \cdot m^2}{C}$

• Am putut observa până acum că o sarcină electrică produce în jurul său un câmp electric. Să presupunem că poziționăm o sarcină lângă o suprafață plană și ne întrebăm „cât" din câmpul produs de aceasta trece prin ~~acea~~ suprafața respectivă.

• Răspunsul este dat de fluxul câmpului electric, a cărui formulă este:

$$\boxed{\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot S}$$

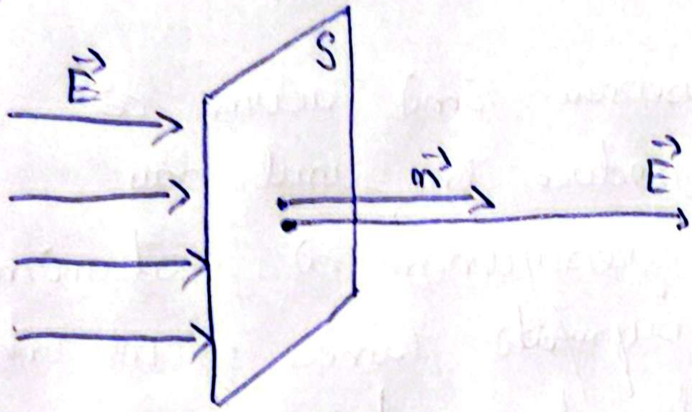
- Φ – fluxul câmpului electric
- $\vec{E}$ – vectorul intensității câmpului electric
- $\vec{n}$ – normala la suprafață (vector $\perp$ pe supraf.) ($|\vec{n}| = 1$ mereu)
- S – aria suprafeței

! Formula aceasta este valabilă doar atunci când avem suprafețe plane.

Cazuri triviale

- Presupunem că avem un câmp electric uniform ale cărui linii de câmp sunt orizontale.

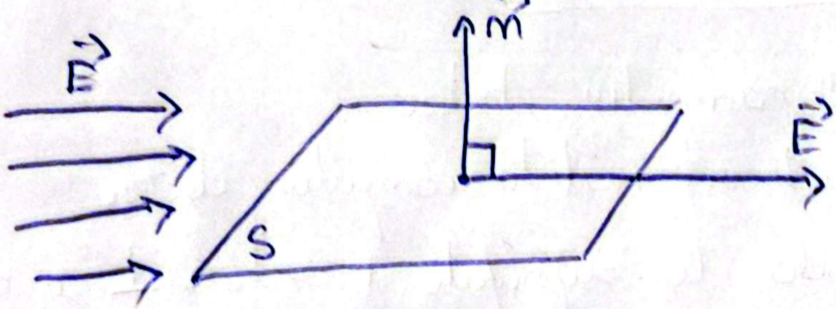
1) $\vec{E} \parallel \vec{n}$



$$\phi = \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot S = |\vec{E}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\widehat{\vec{E},\vec{n}})\cdot S = |\vec{E}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(0)\cdot S = |\vec{E}|\cdot|\vec{n}|\cdot S = E\cdot S$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = E\cdot S}$$

2) $\vec{E} \perp \vec{n}$

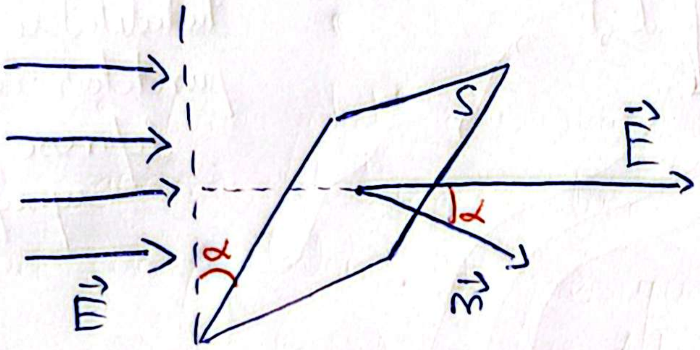


$$\phi = \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot S = |\vec{E}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(90^\circ)\cdot S = E\cdot 0\cdot S = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = 0}$$

3) Cazul general

• În această situație considerăm suprafața plană înclinată la un unghi α față de axa Oy.



$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot S = |\vec{E}| \cdot |\vec{n}| \cdot S \cdot \cos\alpha = E \cdot S \cdot \cos\alpha$$

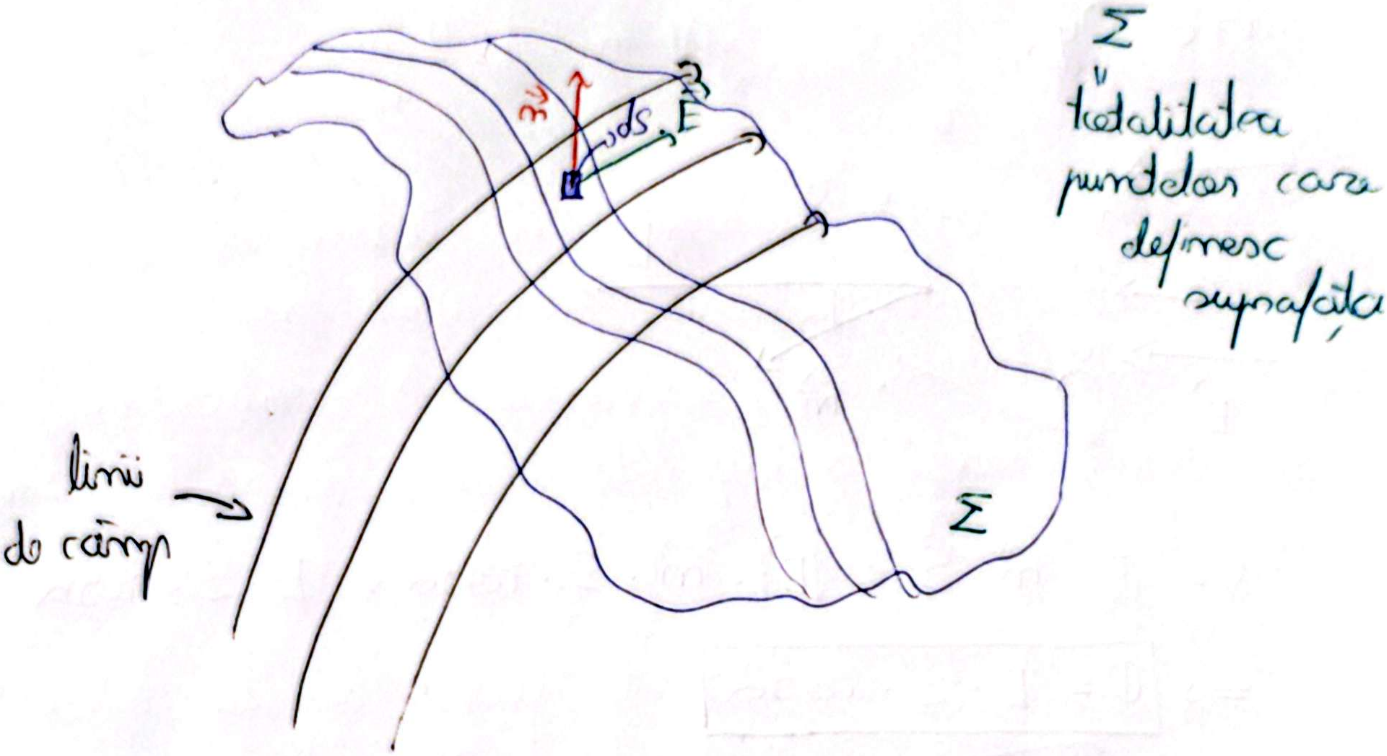
$$\Rightarrow \boxed{\phi = E \cdot S \cdot \cos\alpha}$$

• Cazul ~~gen~~ unei suprafețe oarecare

• Considerăm o suprafață oarecare (ca de exemplu o pungă). Problema cu care ne confruntăm într-o astfel de situație este că vectorul normală la suprafață nu va mai avea aceeași direcție în fiecare punct al suprafeței, deci în formula $\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot S$ vom avea $\vec{n}$-uri diferite pentru fiecare punct.

• Soluția este să considerăm bucățele

infinitezimale pentru care calculăm valoarea lui Φ, iar apoi să însumăm toate aceste valori obținute $\rightarrow$ integrala de suprafață



$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$\Phi = \int_{\Sigma} d\Phi = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$\boxed{\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS}$$ formula generală

• Dacă avem suprafețe închise (ex. sfera), denumite și gaussiene, atunci formula este:

$$\boxed{\Phi_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS}$$

Teorema lui Gauss pentru câmpul electric

Enunț

Fluxul câmpului electrostatic printr-o gaussiană (suprafață închisă) este egal cu raportul dintre sarcina din interiorul gaussienei și permitivitatea vidului ε_0.

$$\boxed{\phi_\Sigma = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Demonstrație

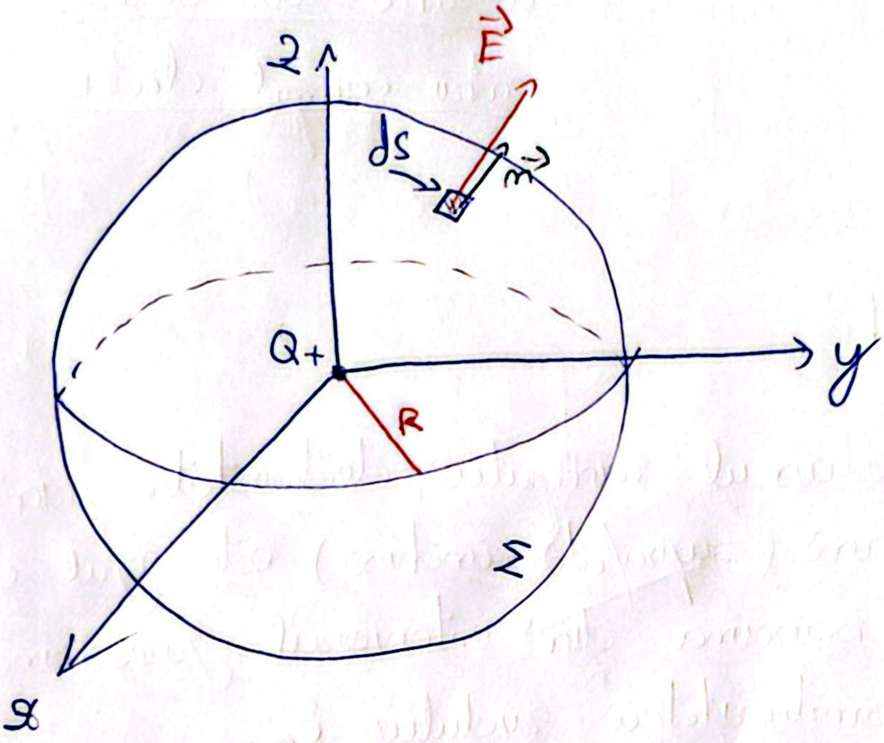
• Presupunem că avem o sferă de rază R care este ~~gol~~ goală în interior.

• Plasăm în centrul ei o sarcină Q_+

Întrebare: ce expresie va avea fluxul câmpului electric produs de sarcină prin suprafața sferei?

Soluție

• Sarcina electrică Q_+ formează în jurul ei un câmp electric ce are o formă sferică.



Considerăm bucăţele infinitezimale pe suprafaţa sferei pentru a putea calcula fluxul. Se poate observa că în această situaţie vectorul $\vec{E}$ are aceeaşi orientare cu vectorul $\vec{n}$.

$$d\phi_\Sigma = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$\phi_\Sigma = \oint_\Sigma d\phi_\Sigma = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi_\Sigma = \oint_\Sigma |\vec{E}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 0^\circ \cdot dS \\ |\vec{E}| \text{ este constant} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi_\Sigma = |\vec{E}| \cdot \oint_\Sigma dS$$

→ aici, integrala de supraf. este chiar aria supraf. sferei.

$$\Rightarrow \Phi_\Sigma = |\vec{E}| \cdot 4\pi R^2$$

$$\Phi_\Sigma = \frac{k \cdot |Q|}{R^2} \cdot 4\pi R^2$$

$$\Phi_\Sigma = \frac{|Q|}{\cancel{4\pi} \varepsilon_0 \cdot \cancel{R^2}} \cdot \cancel{4\pi R^2}$$

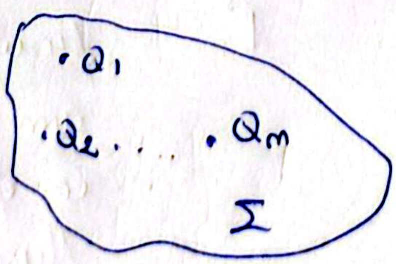
$$\boxed{\Phi_\Sigma = \frac{Q}{\varepsilon_0}}, \quad Q > 0 \text{ din ipoteză}$$

! Se observă faptul că formula finală nu depinde de forma suprafeței.

! Este folosită mai mult în cazul suprafețelor cu grad înalt de simetrie (sferă etc.)

- Dacă avem mai multe sarcini în interiorul suprafeței închise, atunci formula devine:

$$\boxed{\Phi_\Sigma = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

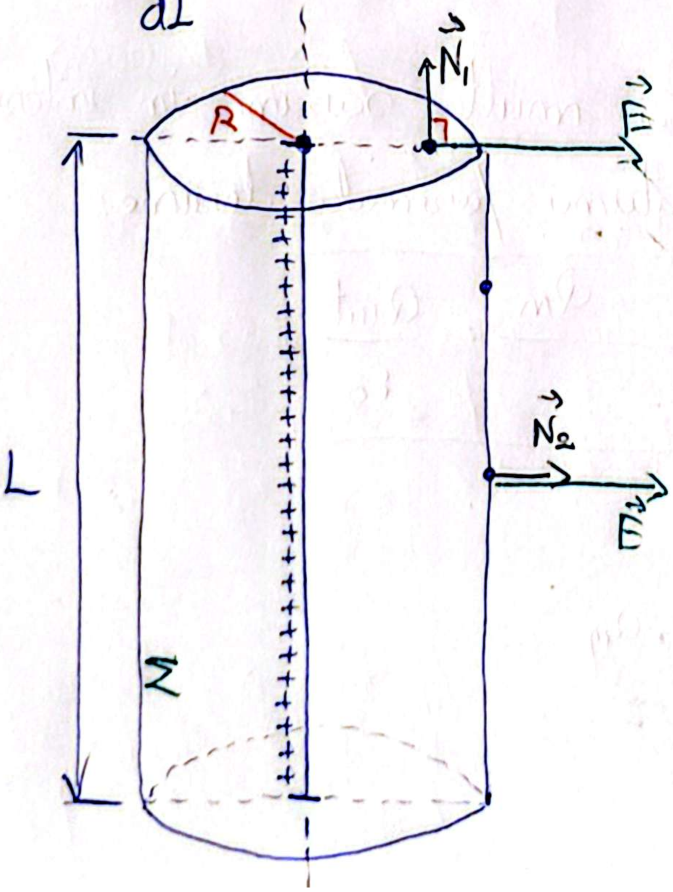


Câmpul creat de o distribuție liniară infinită uniformă de sarcină electrică

• Considerăm un fir metalic de lungime infinită pe care găsim o distribuție liniară uniformă (i.e. că orice bucată infinitezimală de pe fir are aceeași valoare ~~a lui~~ Q).

• Vom lua în considerare doar o bucată de lungime L din fir.

$$\lambda = \frac{dQ}{dL} = \text{const.} \quad \text{(densitatea liniară)}$$



• Fiecare sarcină infinitezimală formează în jurul ei un câmp electric.

• Dacă am introduce firul într-un cilindru, am putea vedea ce efect are asupra fluxului.

• Folosim teorema lui Gauss pentru câmpul electric:

$$\Phi_\Sigma = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\lambda = \frac{Q_{int}}{L} \Rightarrow Q_{int} = L \cdot \lambda$$

$$\Phi_\Sigma = \underbrace{\Phi_{\text{baza de sus}}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{\text{baza de jos}}}_{=0} + \Phi_{\text{suprafata laterală}}$$

$$\Rightarrow \Phi_\Sigma = \Phi_{\text{suprafata laterală}} = |\vec{E}| \cdot 2\pi R L$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{L} \cdot \lambda}{\varepsilon_0} = |\vec{E}| \cdot 2\pi R \cancel{L} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \cdot R} \Rightarrow$$

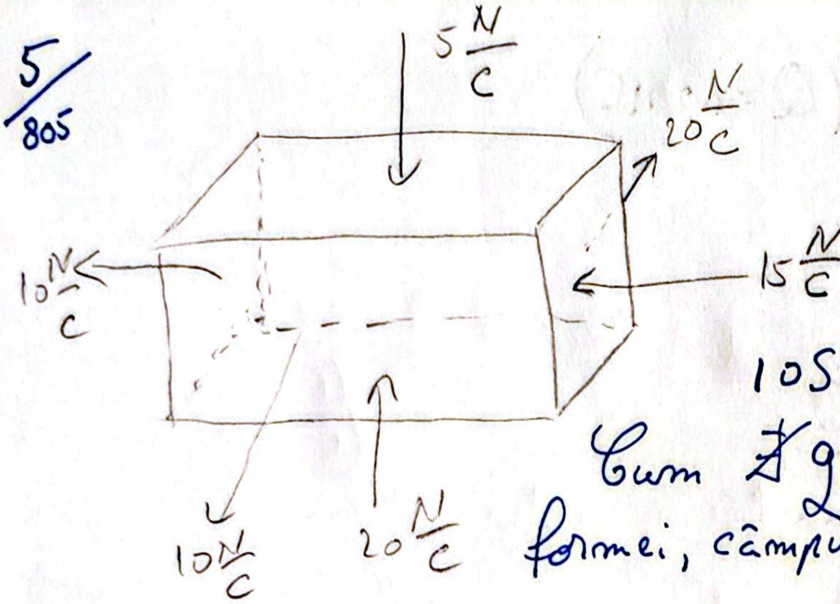
$$\Rightarrow |\vec{E}| = 2 \cdot \frac{\lambda}{4\pi \varepsilon_0 R} \Rightarrow \boxed{|\vec{E}| = \frac{2k\lambda}{R}, \ \lambda > 0}$$

• Câmpul creat de o distribuție ~~lo~~ superficială infinită uniformă de sarcină electrică

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} = \text{const.} \ (\text{densitatea superficială})$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

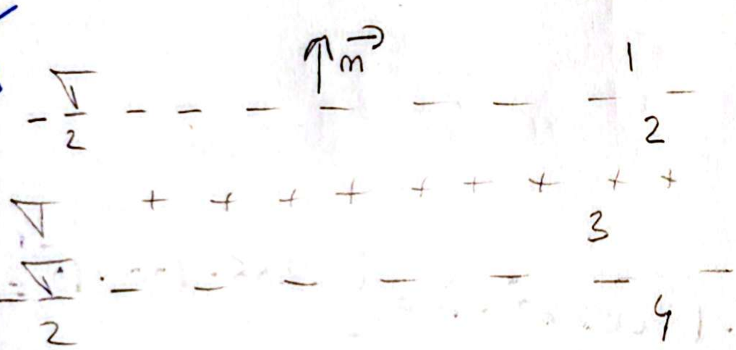
5/805

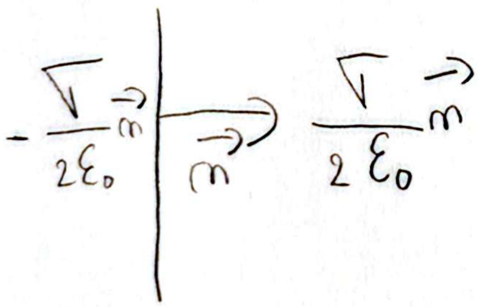


$10S - 15S + 10S + \underline{20S} - 5S - \underline{20S} = 0$

Cum $\nexists\, q$ (sarcină electrică) în interiorul formei, câmpul trebuie să fie nul

47/808





$$\vec{E_1} = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{n} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} - \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{n} =$$

$$= \vec{n}\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\vec{E_2} = -\left(\cancel{-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{n}}\right) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} - \cancel{\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{n}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

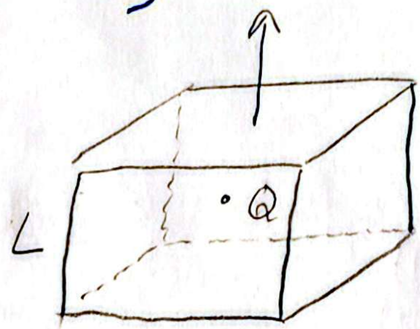
$$\vec{E_3} = -\left(\cancel{-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{n}}\right) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} - \cancel{\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{n}} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

$$E_4 = -\left(-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{n}\right) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} - \left(-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{n}\right) = 0$$

33/807 $Q = 10 \cdot 10^{-9}\,C$ $(Q = 10nC)$

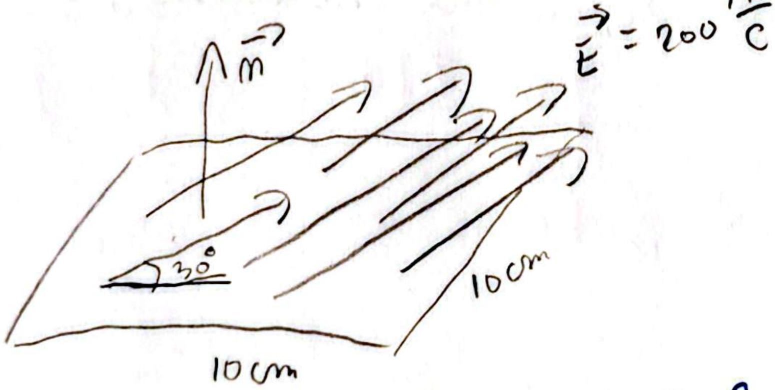
$L = 2\,m$ (cub)

$\varnothing_{sus} = ?$



$$\varnothing_{sus} = \frac{\varnothing_{total}}{6} = \frac{Q}{6\varepsilon_0}$$

9/806



$$\varnothing = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot S = E \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \cdot S = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot 10^{-4} = 1\,\frac{Nm^2}{C}$$