Tutoriat 4 CDI

f derivată: $\boxed{\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \overline{\mathbb{R}}}$

→ Teorema lui Fermat

$f: I \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in \mathring{I}$ un punct de extrem local al funcției f. Dacă f derivabilă în x_0, atunci $f'(x)=0$.

→ Teorema lui Rolle

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$
f derivabilă pe (a,b)
$f(a) = f(b)$

Atunci $\exists\ c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$.

→ Teorema lui Cauchy

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g continue pe $[a,b]$
f, g derivabile pe (a,b)
$g'(x) \neq 0$, $\forall\ x \in (a,b)$

Atunci $\exists\ c \in (a,b)$ a.î. $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

→ Teorema lui Lagrange

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$
f derivabilă pe (a,b)

Atunci $\exists\ c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema lui L'Hôspital

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$

f, g sunt derivabile pe (a,b) ; $g'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in (a,b)$

$\exists \ L = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

a) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \infty$

sau

b) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = 0$

Atunci $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Formula lui Taylor

$f : I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ n-ori derivabilă

Def: S.n. polinomul Taylor de grad n asociat lui f în $x_0 \in I$.

$$\boxed{T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{1!} + f''(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}}$$

Formula lui Taylor cu rest Lagrange

f funcție $(n+1)$-ori derivabilă

Atunci $\forall \ x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$ $\exists \ \xi \in (x, x_0)$ a.î.

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$R(n+1)$ = restul lui Lagrange

! dacă $x_0 = 0 \Rightarrow$ **Formula lui Maclaurin**

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$