TUTORIAT ȘAPTE

exercițiu 1

Fie $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z,t) = (2x-z-t, x+y-3t)$

a) Demonstrați că f este aplicație liniară și scrieți matricea lui f în bază canonică

b) Găsiți baze în $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$

c) Găsiți matricea lui f în raport cu bazele

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ și } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

exercițiu 2

Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Demonstrați că dacă $A^2 = I_n$, atunci $\lambda^2 = 1$ pentru orice λ valoare proprie a lui A.

exercițiu 3

Demonstrați că pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, λ este valoare proprie pentru $A \Leftrightarrow \lambda$ este valoare proprie pentru ${}^tA$. Mai mult, multiplicitățile algebrice și geometrice ale lui λ ca valoare proprie pentru A și ${}^{t}A$ coincid.

exercițiu 4

Pentru următoarele aplicații liniare, decideți dacă sunt diagonalizabile; dacă da, determinați o bază în care au forma diagonală și relația corespunzătoare între matricea lor în baza canonică și cea în raport cu acea bază:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x+3y,\ 4x+y)$

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-2x+y+4z,\ -5x+2y+5z,\ -x+y+3z)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x+2y-z,\ x+3y-z,\ -x-2y+2z)$

exercițiu 5

Calculați

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{2025}.$$