Tutorial 10

Logica desenului

PARABOLA

Unde este vârful?

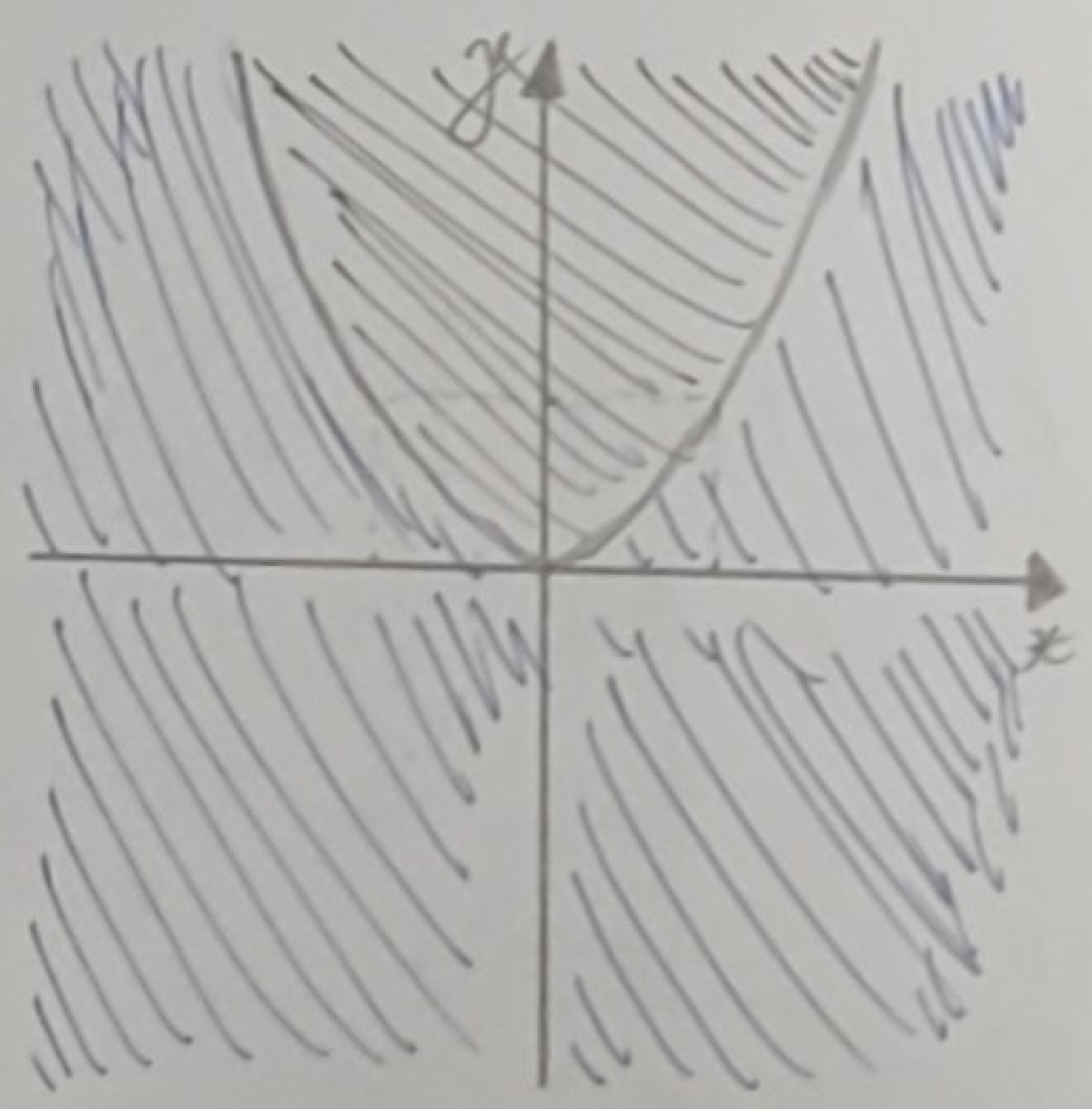
Ec. parabolă: $y = ax^2 + bx + c$

$x_V = -\frac{b}{2a}$ $\Big\}$ Pe baza lui se găsește y_V.

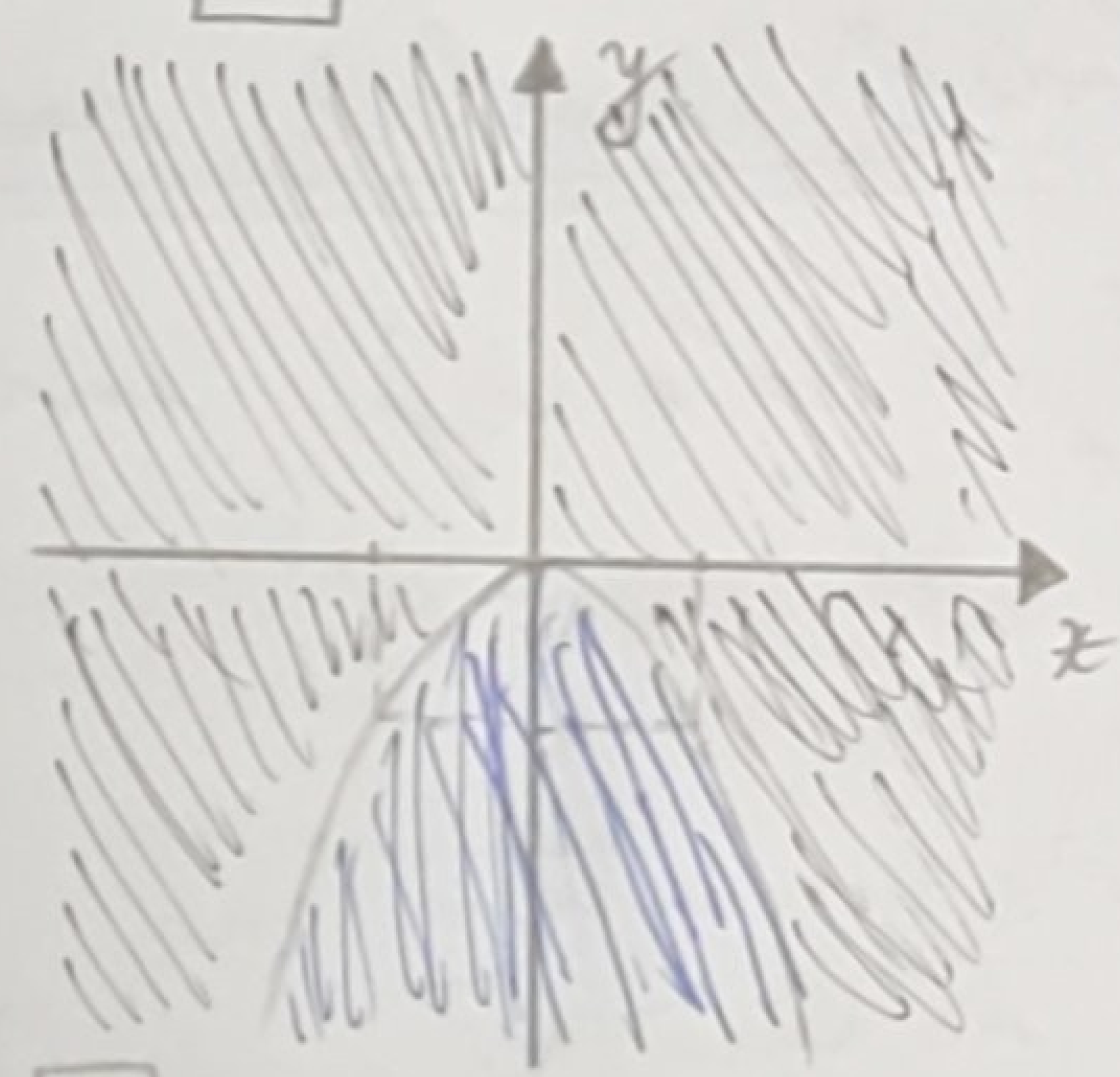
Tipuri de parabole

CONVEXĂ $(a>0)$ și CONCAVĂ $(a<0)$

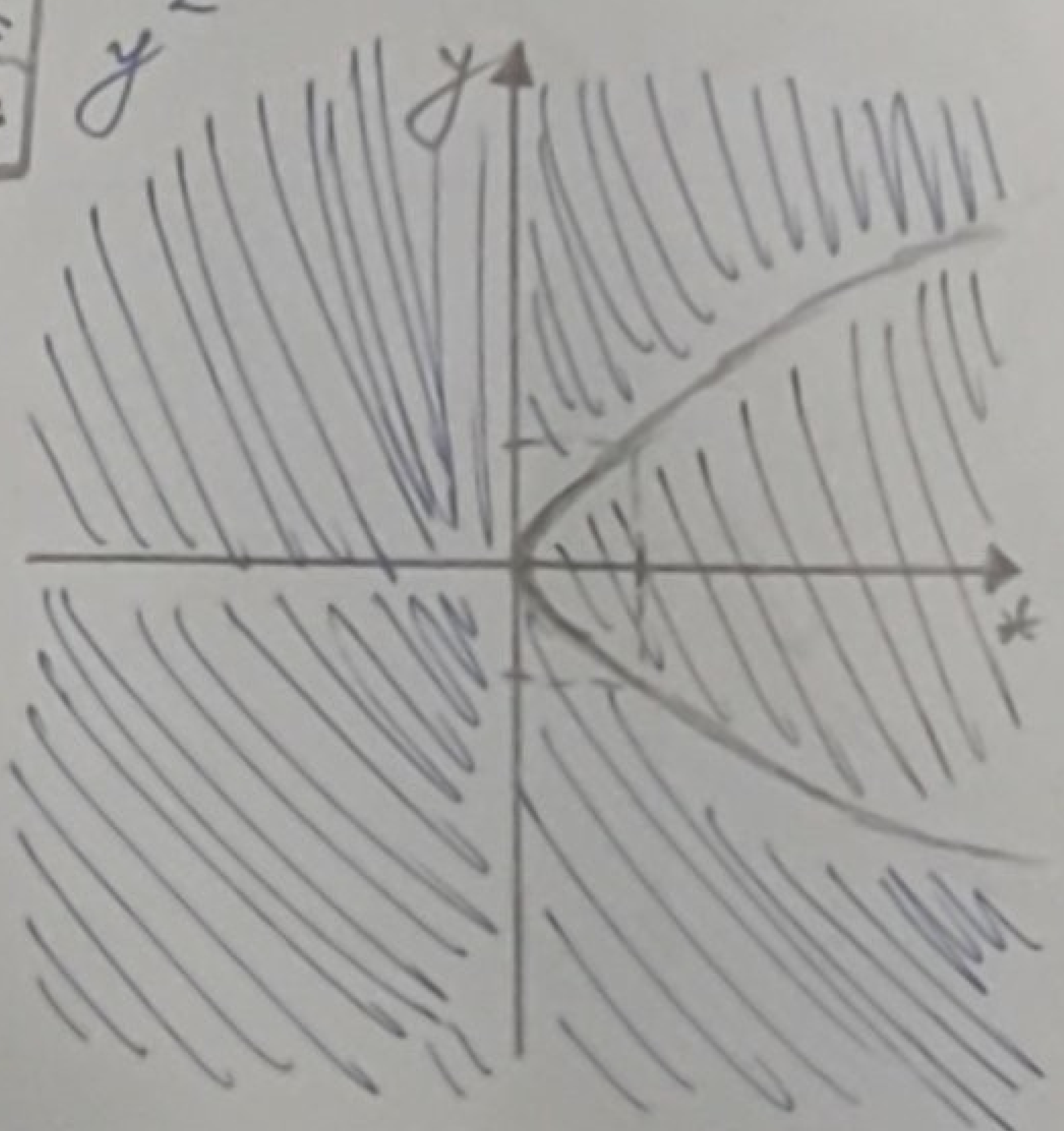
I $\quad y \begin{array}{|c|}\hline \leq \\ \hline \geq \\ \hline\end{array} x^2$



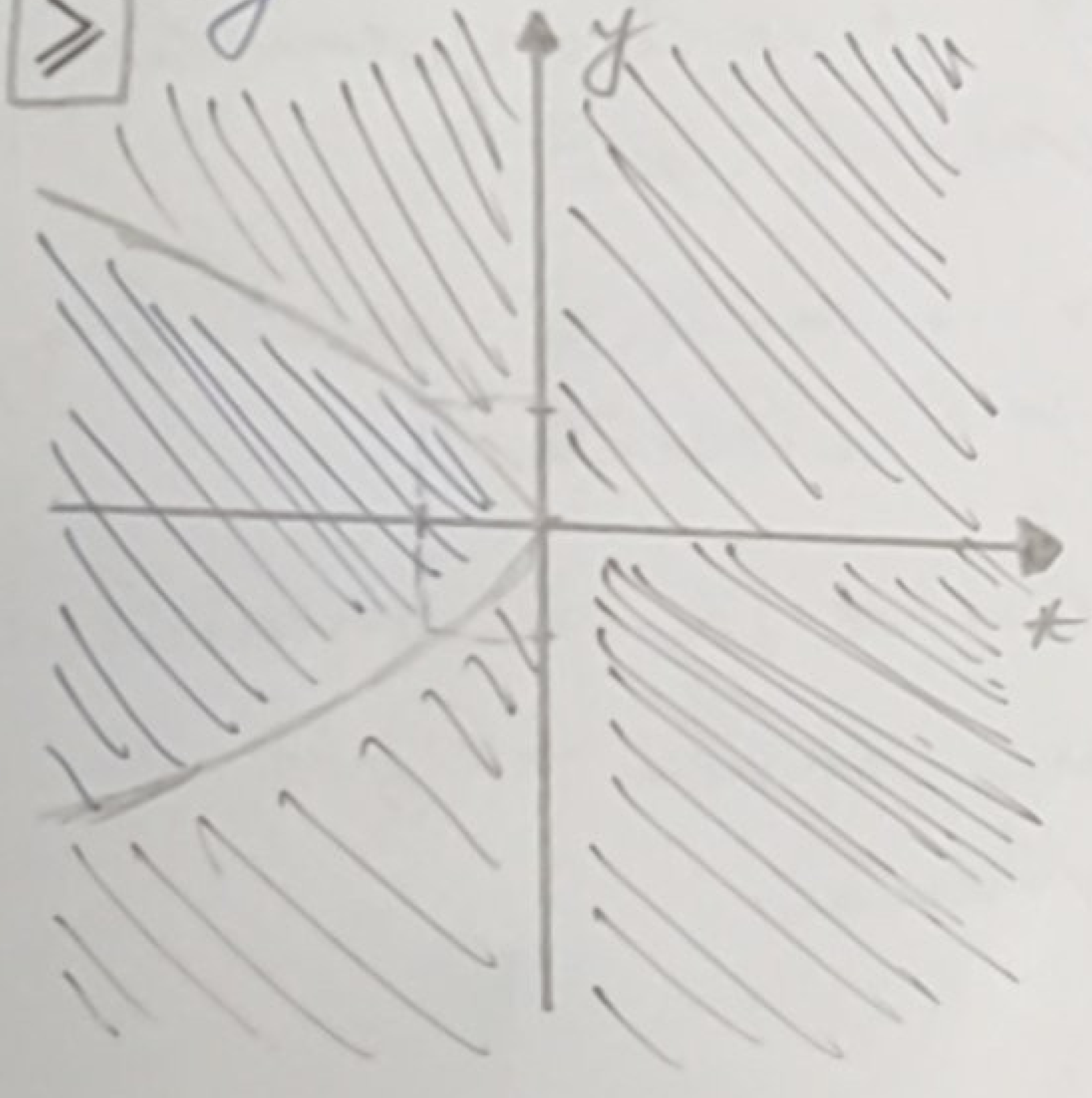
II $\quad y \begin{array}{|c|}\hline \leq \\ \hline \geq \\ \hline\end{array} -x^2$



III $\quad x \begin{array}{|c|}\hline \leq \\ \hline \geq \\ \hline\end{array} y^2$



IV $\quad x \begin{array}{|c|}\hline \leq \\ \hline \geq \\ \hline\end{array} -y^2$



CERC

Ecuația: $(x-c_x)^2+(y-c_y)^2=R^2$

Deci centrul cercului $C(c_x, c_y)$, cu raza R.

$x^2+y^2 \boxed{\begin{matrix}\le \\ \ge\end{matrix}} 1$ → poate fi orice constantă

Model rezolvare exercițiu

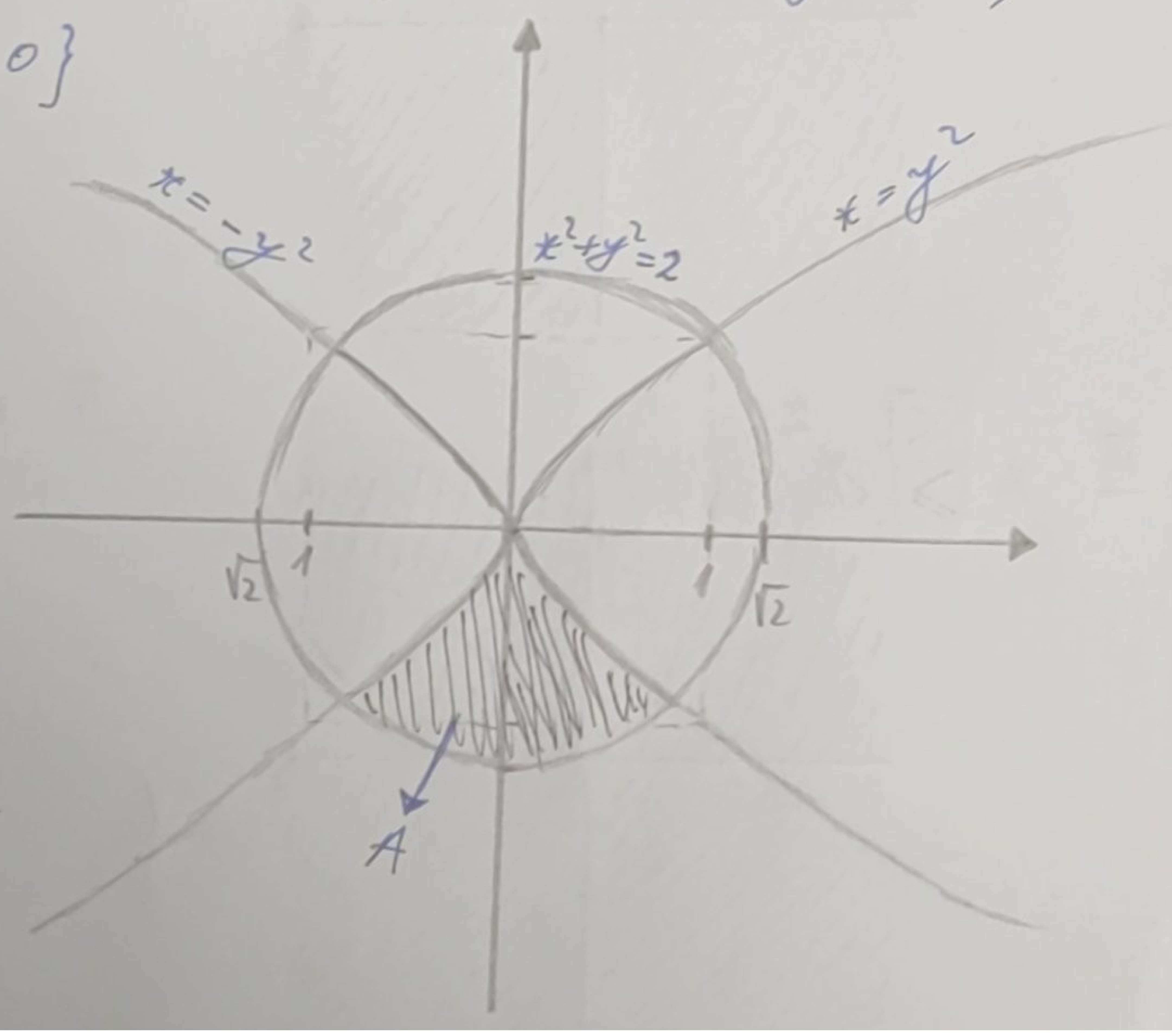
$\iint_A y \, dx \, dy$ unde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 2,$
$x \ge -y^2, \ x \le y^2, \ y \le 0\}$

$x^2+y^2 \le 2$ → interior cerc de rază $\sqrt{2}$

$x \ge -y^2$ → exterior parabolă spre stânga

$x \le y^2$ → exterior parabolă spre dreapta

$y \le 0$ → se ia în considerare doar partea de jos a graficului.



Determinăm punctele de intersecție dintre $x^2+y^2=2$ și $x=-y^2$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x=-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y^2=-x \end{cases} \Bigg| \Rightarrow x^2-x=2 \Rightarrow \cancel{x(x-1)=2}$$

$$x^2-x-2=0$$

$$\Delta = 1-4(-2) = 1+8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \ \} \text{ (F), se contrazice cu } x=-y^2 \text{ și } x^2+y^2=2 \\ x_2 = -1 \ \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2 = -x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Determinăm punctele de intersecție dintre $x^2+y^2=2$ și $x=y^2$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x=y^2 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Delta = 1-4(-2) = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \ \checkmark \\ x_2 = -2 \ \} \text{ contrazice ambele ec. analizate} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$x \in [-1, 1]$ deoarece am demonstrat că intersecțiile dintre parabole ~~raza cercului este 1 și are centrul în (0, 0)~~ se află în punctele -1, respectiv 1.

Mai trebuie încadrat și y într-un interval:

$$x^2+y^2 \le 2 \Rightarrow y^2 \le 2-x^2 \Rightarrow -\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2}$$

valabil doar pt partea stângă

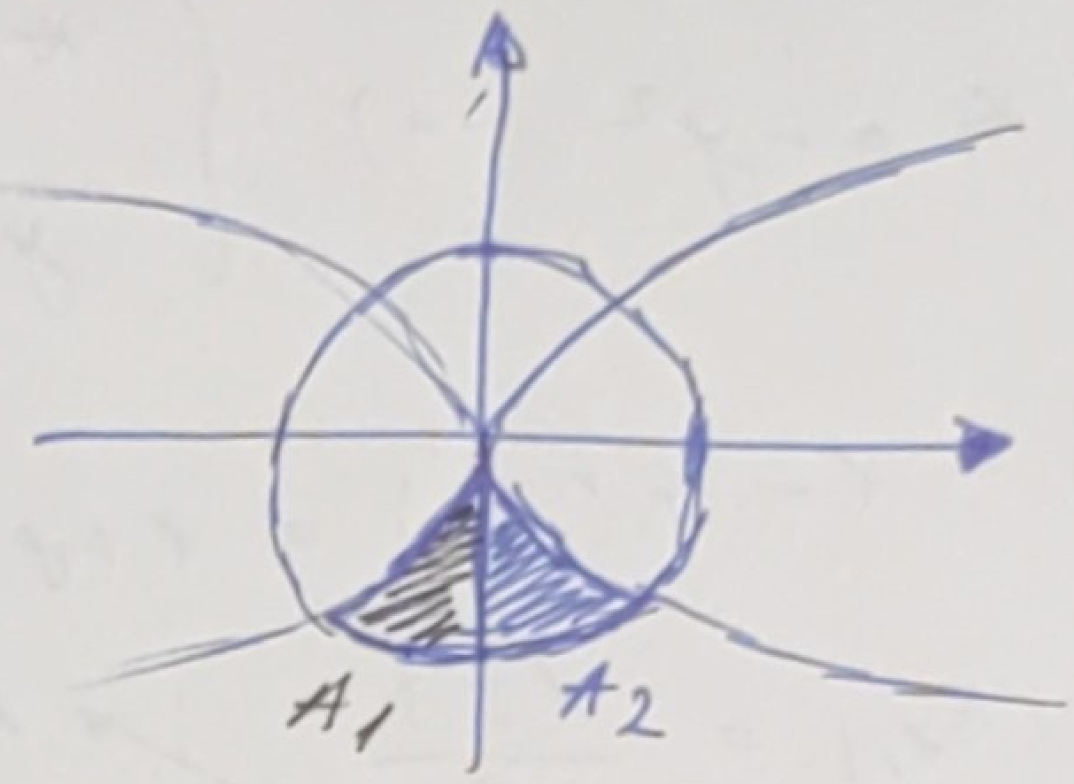
$$x \ge -y^2 \Rightarrow -x \le y^2 \Rightarrow y \in (-\infty, -\sqrt{-x}] \cup [\sqrt{-x}, \infty)$$

$$x \le y^2 \Rightarrow y \in (-\infty, -\sqrt{x}] \cup [\sqrt{x}, \infty)$$

<u>REGULĂ</u>

$$y^2 \ge a \ (\text{cu } a \ge 0) \rightarrow y \in (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \infty)$$

Împărțim în 2 mulțimi diferite mulțimea A în A_1 (în stânga, $x \le 0$) și A_2 (în dreapta, $x \ge 0$)



$$A = A_1 \cup A_2$$

$$A_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 0], \ -\sqrt{2-x^2} \le y \le -\sqrt{-x} \}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \le 2 \to -\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ x \ge -y^2 \to y \in (-\infty, -\sqrt{-x}] \cup [\sqrt{-x}, \infty) \end{cases}$$

$$A_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], \ \underbrace{-\sqrt{2-x^2} \le y \le -\sqrt{x}}_{\circledast} \}$$

$$\circledast \hookrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \le 2 \to -\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ x \le y^2 \to y \in (-\infty, -\sqrt{x}] \cup [\sqrt{x}, +\infty) \end{cases}$$

---

aici, la S14 se mai introduce niște teorie pentru a se demonstra că putem „rupe" integrala dublă în „partea negativă" + „partea pozitivă" a lui x. Lipsiți efectiv din seminar.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$, f cont.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

!! Ne interesează ca integrala cu capete limite, care conține constante, să rămână cea de dinafară.

$$\iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{\overset{\text{lim lui } x}{0}} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\overset{\text{lim lui } y}{-\sqrt{-x}}} y \, dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{y^2}{2} \Big|_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{y=-\sqrt{-x}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{-x-2+x^2}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} -x + x^2 - 2 \, dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{0} - 2x \Big|_{-1}^{0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-12+12}{6} = \frac{3-14}{12} = -\frac{7}{12}$$

$$\iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{1} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{x}} y \, dy \right) dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{y=-\sqrt{x}} dx = \int_{0}^{1} \frac{x-2+x^2}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-12+2}{6} = -\frac{7}{12}$$

$$\iint_{A} f(x,y)\,dx\,dy = -\frac{7}{12} - \frac{7}{12} = -\frac{14}{12} = -\frac{7}{6} \quad \square$$

Ex 2

$$\iint_A y \, dx \, dy \quad \text{unde } A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+5x+y^2 \le x+2y-1\}$$

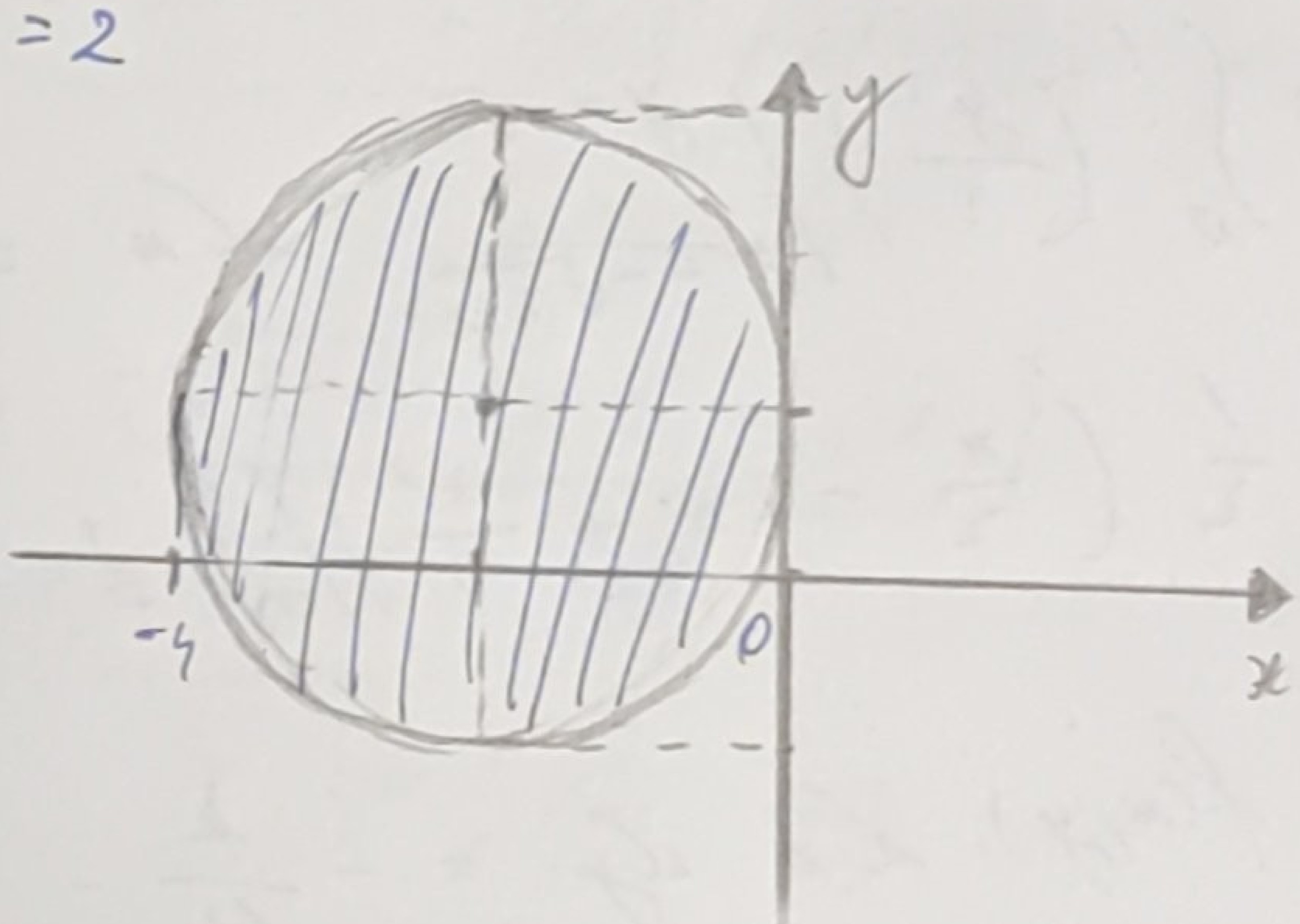
$$x^2+5x+y^2 \le x+2y-1$$

$$x^2+4x+\overbrace{y^2-2y+1}^{(y-1)^2} \le 0$$

$$(x^2+4x+4)-4+(y-1)^2 \le 0$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2 \le 4 \rightarrow (x-c_x)^2+(y-c_y)^2 \le R^2$$

$$\Rightarrow C(-2,1);\ R=2$$



$x \in [-4, 0]$

$\hookrightarrow [c_x-R,\ c_x+R]$

Căutăm limitele lui y.

$$(x+2)^2+(y-1)^2 \le 4$$

$$(y-1)^2 \le 4-(x+2)^2 \Rightarrow -\sqrt{4-(x+2)^2} \le y-1 \le \sqrt{4-(x+2)^2} \quad /+1$$

$$\cancel{y-1 \le \sqrt{4-(x+2)^2}} \Rightarrow 1-\sqrt{4-(x+2)^2} \le y \le 1+\sqrt{4-(x+2)^2}$$

$$\cancel{y \le 1+\sqrt{4-(x+2)^2}}$$

Deci avem $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-4,0],\ 1-\sqrt{4-(x+2)^2} \le y \le 1+\sqrt{4-(x+2)^2}\}$

Avem noroc! Deși A trece și în partea negativă a Oy, y rămâne în aceeași proporții, deci nu e necesar să desfacem integrala dublă.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$ cont

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy = \iint_A y \, dx\, dy$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(\int_{1-\sqrt{4-(x+2)^2}}^{1+\sqrt{4-(x+2)^2}} y \, dy \right) dx$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_{y=1-\sqrt{4-(x+2)^2}}^{y=1+\sqrt{4-(x+2)^2}} \right) dx$$

$$= \int_{-4}^{0} \frac{1}{2} \left(\left(1+\sqrt{4-(x+2)^2}\right)^2 - \left(1-\sqrt{4-(x+2)^2}\right)^2 \right) dx$$

$$= \int_{-4}^{0} \frac{1}{2} \left[\left(\cancel{1} + \cancel{4} - (\cancel{x+2})^2 + 2\sqrt{4-(x+2)^2}\right) - \left(\cancel{1} + \cancel{4} - (\cancel{x+2})^2 - 2\sqrt{4-(x+2)^2}\right) \right] dx$$

$$= \int_{-4}^{0} \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{4-(x+2)^2}\, dx = 2\int_{-4}^{0} \sqrt{4-(x+2)^2}\, dx$$

Prin schimbare de variabile; $x+2 = t$, $x = t+2$, $dx = dt$ $\left\{ \begin{array}{l} x=0 \to t=2 \\ x=-4 \to t=-2 \end{array} \right.$

$$= 2\int_{-2}^{2} \sqrt{4-t^2}\, dt$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \left\} \begin{array}{l} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \\ \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 2\int_{-2}^{2} \sqrt{2^2-t^2} = 2\left(\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + 2\arcsin\frac{t}{2} \right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= 2\left[\left(1\sqrt{4-4} + 2\arcsin 1\right) - \left(-\sqrt{4-4} + 2\arcsin -1\right) \right]$$

$$= 2\left[\left(0 + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(0 + 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \right] = 2\cdot(\pi+\pi) = 4\pi \quad \square$$