Seminarul 14

Wednesday, May 26, 2021 8:52 AM

Subiect examen 2020

1.(i) $F = \{ a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$. Arătați că F e subcorp al lui $\mathbb{R}$.

(ii) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ subinel în $M_2(\mathbb{Q})$, izomorf cu F.

Dem • Dem că $(F, +, \cdot)$ subinel al lui $\mathbb{R}$:

Fie $(a+b\sqrt{2}), (c+d\sqrt{2}) \in F$.

$\Rightarrow$ - $(a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) = \underset{\in\mathbb{Q}}{(a+c)} + \underset{\in\mathbb{Q}}{(b+d)}\sqrt{2} \in F$ (1)

- $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \in F$ (2)

- $1 \in F$ (0)

Evident $F \subset \mathbb{R}$ (3)

(0), (1), (2) & (3) $\Rightarrow$ $(F, +, \cdot)$ subinel al lui $\mathbb{R}$

• F corp: $\forall (a+b\sqrt{2}) \in F$ cu $a+b\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (a+b\sqrt{2})^{-1} \in F$.

Obs $a+b\sqrt{2} = 0$, $a, b \in \mathbb{Q}$ $\overset{\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}}{\Leftrightarrow}$ $a = b = 0$

Fie deci $a+b\sqrt{2}\in F$ cu $a^2+b^2>0$.

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \overset{\in\mathbb{Q}}{\frac{a}{a^2-2b^2}} + \overset{\in\mathbb{Q}}{\frac{-b}{a^2-2b^2}}\sqrt{2} \in F$$

Obs $a^2\neq 2b^2$ (altfel $|a|=\sqrt{2}\cdot|b|$ şi $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$)

Var 2 $\mathbb{R}\supset F=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}=\mathbb{Q}(\sqrt{2})\simeq \dfrac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2-2)}$

Obs: X^2-2 e ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ (• nu are rădăcini şi e de grad ≤ 3 SAU • Eisenstein)

teorie $\Longrightarrow$ $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)$ e corp!

(ii) $F \simeq A=\left\{\begin{pmatrix} a & 2b\\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$.

Fie $\varphi: F\to M_2(\mathbb{Q})$

$$\varphi(a+b\sqrt{2})=\begin{pmatrix} a & 2b\\ b & a\end{pmatrix}.$$

Arătăm că φ e morfism de inele ($\Longrightarrow$ A automat subinel al lui $M_2(\mathbb{Q})$) injectiv şi $\operatorname{Im}\varphi=A$

$\cdot\ \varphi$ aditiv: $\varphi((a+b\sqrt{2})) + \varphi((c+d\sqrt{2})) =$

$$= \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 2d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 2(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} =$$

$$= \varphi((a+c)+(b+d)\sqrt{2})$$

$$\cdot\ \varphi(1) = \varphi(1+0\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\cdot\ \varphi((a+b\sqrt{2}))\cdot\varphi(c+d\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & 2d \\ d & c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ac+2bd & 2(ad+bc) \\ ad+bc & ac+2bd \end{pmatrix} = \varphi\left((ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\right)$$

$$= \varphi\left((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\right), \quad \forall a,b,c,d \in \mathbb{Q}.$$

$\Rightarrow \varphi$ e morfism de inele.

Evident. $\operatorname{Im}\varphi = A \Rightarrow \square$

$\cdot\ \varphi$ injectivă: $\varphi(a+b\sqrt{2}) = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$| \; b \quad a \; |$

$\Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow a + b\sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

2. Fie $f = X^2 + 2X \in \mathbb{Z}[X]$. $I = (f)$ în $\mathbb{Z}[X]$

$J = (f)$ în $\mathbb{Q}[X]$.

(i) Arătați că $\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{(X+2)} \simeq \mathbb{Q}$ și $\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{J} \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Fie $\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}$, $\varphi(P) = P(-2)$.

• φ morfism de inele din proprietatea de universalitate a inelului de polinoame:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \arrow[r, "id"] \arrow[dr] & \mathbb{Q} \ni -2 \\
& \mathbb{Q}[X] \ni X \arrow[u, dashed] \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

• φ surjectiv: evident, $\forall\, a \in \mathbb{Q}$, dacă $P(X) = a$ și $\varphi(P) = a$.

• $P \in \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow P(-2) = 0 \overset{\text{Bezout}}{\Leftrightarrow} (X+2) \mid P \Leftrightarrow P \in (X+2)$

deci $\operatorname{Ker} \varphi = (X+2)$.

deci $\operatorname{Ker} \varphi = (X+2)$.

Teorema fundamentală de izomorfism:

$$\frac{\mathbb{Q}[X]}{\operatorname{Ker}\varphi} \simeq \operatorname{Im}\varphi \iff \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X+2)} \simeq \mathbb{Q}.$$

- $\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{J} \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$J = (X^2+2X) = (X(X+2)) = (X)\cdot(X+2)$$

(X) și $(X+2)$ sunt comaximale (i.e. $(X)+(X+2) = \mathbb{Q}[X]$),

pt că: $(-1)\cdot X + 1\cdot(X+2) = 2 \in U(\mathbb{Q}[X])$

$$\xRightarrow[\text{a resturilor}]{\text{Lema chineză}} \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X)\cdot(X+2)} \simeq \underset{\substack{\wr\!\wr \text{ analog} \\ \mathbb{Q}}}{\frac{\mathbb{Q}[X]}{(X)}} \times \underset{\substack{\wr\!\wr \\ \mathbb{Q}}}{\frac{\mathbb{Q}[X]}{(X+2)}} \simeq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$$

(ii) $J \in \operatorname{Max}(\mathbb{Q}[X])$?

NU, pentru că:

- $\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{J} \simeq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ nu e corp.

(Curs: R/I e corp $\Leftrightarrow$ I e maximal)

SAU:

- $(X^2+2X) \subsetneq (X)$ $\Rightarrow$ nu e maximal.

$\subsetneq (X+2)$

(iii) Idempotenții $\left(\mathbb{Z}[X]/I\right) = ?$

$$\left(\mathbb{Z}[X]/I\right) = \mathbb{Z}[X]/(X^2+2X)$$

$\mathbb{Z}[X]/(X^2+2X) = \{ \widehat{a+bX} \mid a,b \in \mathbb{Z} \}$ (Teorema de împărțire cu rest)

Mai mult, $\boxed{\widehat{a+bX} = \widehat{c+dX} \Leftrightarrow a=c \text{ și } b=d}$ $(*)$

(unicitatea din Teorema de împărțire cu rest)

Fie $\widehat{a+bX} \in \mathbb{Z}[X]/(X^2+2X)$ a.î. $\widehat{a+bX}^2 = \widehat{a+bX}$.

$\Leftrightarrow$ $\widehat{a^2+2abX+b^2X^2} = \widehat{a+bX}$.

Dar $\widehat{X^2} = \widehat{-2X}$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{a^2 + 2abX - 2b^2X} = \widehat{a+bX}$$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{a^2 + (2ab - 2b^2)X} = \widehat{a+bX}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \begin{cases} a^2 = a & \Longrightarrow \quad a=0 \text{ sau } a=1 \\ 2ab - 2b^2 = b \end{cases}$$

Dacă $\underline{a=0} \Rightarrow -2b^2 = b$ $\nearrow \underline{b=0}$, $\searrow -2b = 1$ abs $b \in \mathbb{Z}$

$\underline{a=1} \Rightarrow 2b - 2b^2 = b \Leftrightarrow 2b^2 = b$ $\nearrow \underline{b=0}$, $\searrow 2b = 1$ abs $b \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \text{Idempot}\left(\frac{\mathbb{Z}[X]}{I}\right) = \{\hat{0}, \hat{1}\}.$$

(iv) $\dfrac{\mathbb{Z}[X]}{I} \not\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$\left|\text{Idempot}\left(\frac{\mathbb{Z}[X]}{I}\right)\right| = 2.$$

Dar $\text{Idempot}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = \text{Idempot}(\mathbb{Z}) \times \text{Idempot}(\mathbb{Z})$

$$= \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

$\to 4$

$\Rightarrow$ concluzia!

(v) Arătați că $(2, X+2) \in \mathbb{Z}[X]$ nu e principal.

<u>Var 1</u> Pp abs că $(2, X+2) = (f)$ pt un $f \in \mathbb{Z}[X]$.

$\Rightarrow f \mid 2$ și $f \mid (X+2)$

$\Downarrow$ $\deg f = 0$ și $f \in \{\pm 1, \pm 2\}$

$\Downarrow$ $f \mid 1 = LC(X+2)$

$\Downarrow$ $f \in \{\pm 1\}$ i.e. $(2, X+2) = \mathbb{Z}[X]$.

Însă $3 \notin (2, X+2)$:

Pp că $\exists\, g, h \in \mathbb{Z}[X]$ a.î. $2g(X) + (X+2)h(X) = 3$.

Evaluăm în -2: $\underbrace{2g(-2)}_{\vdots 2} = \underbrace{3}_{\not\vdots 2}$ ↯

SAU: reduc în $\mathbb{Z}_2[X]$: $\underbrace{(X+\hat{2})\hat{h}(X)}_{\deg \geq 1} = \hat{1}$ ↯

Var 2 Știm că $(2, X+2) = (f) \Rightarrow f$ e monic

$$\Rightarrow \mathbb{Z}[X]/(2, X+2) = \mathbb{Z}[X]/(f) = \{ \overbrace{a_0 + a_1 X + \dots + X^n} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z} \}$$

Dacă $\overset{n}{\overset{\shortparallel}{\deg f}} \geq 1 \Rightarrow \mathbb{Z}[X]/(f)$ e infinit.

În același timp, $\mathbb{Z}[X]/(2, X+2) \simeq \mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow \deg f = 0 \Rightarrow f = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}[X]/(f) = \{0\}$ ↯

3. $A = \{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m, n \in \mathbb{Z}, 7 \nmid n \}$

$A \subset \mathbb{Q}$ subinel și inel local.

Dem • $A \subset \mathbb{Q}$ subinel:

Fie $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in A$ cu $7 \nmid n_1$, $7 \nmid n_2$.

$$\Rightarrow \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} \text{ și } 7 \nmid n_1 n_2$$

e prim

$\frac{m_1}{n_1} + \dots = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{\dots}$

nu știm

- $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$

- $1 = \frac{1}{1} \in A$

$\Rightarrow A \subset \mathbb{Q}$ subinel

- A inel local i.e. are un unic ideal maximal.

<u>Lemma</u> A inel local $\Leftrightarrow$ $A \setminus U(A)$ ideal, caz în care $A \setminus U(A)$ este idealul maximal.

$$A \setminus U(A) = \left\{ \frac{m}{n} \in A \;\middle|\; \frac{n}{m} \underbrace{\text{nu are sens}}_{\text{i.e. } m=0} \text{ sau } \frac{n}{m} \notin A \right\}$$

Când $\frac{m}{n} \in A$ $(m \neq 0,\ 7 \nmid n)$ dar $\frac{n}{m} \notin A$?

Fie $\frac{m}{n} \in A$ cu $m \neq 0$, $7 \nmid n$. $\frac{n}{m} \notin A \Leftrightarrow 7 \mid m$.

Deci $A \setminus U(A) = \left\{ \frac{m}{n} \in A \;\middle|\; 7 \nmid n,\ 7 \mid m \right\}$

$= 7A = (7)$, deci ideal!

$\Rightarrow A$ e inel local și $\mathrm{Max}(A) = \{(7)\}$.

4. $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1^2 - x_1x_2+2x_2^2)(2x_1^2 - x_1x_3+2x_3^2)(2x_2^2-x_2x_3+2x_3^2)$
$\in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]$.

a) Dem. că f este simetric.

<u>Obs</u> $f\in R[X_1,\dots X_n]$ e simetric $\Leftrightarrow$ $\sigma^*(f)=f, \forall \sigma\in S_n$

$\Leftrightarrow$ $\sigma^*(f)=f, \quad \forall \sigma\in S_n$ transpoziție

$\Leftrightarrow$ $\sigma^*(f)=f, \quad \sigma=(1\ i), \ \forall\ i=\overline{2,n}$

Aici, e deci suficient că $f(x_2,x_1,x_3)=f(x_1,x_2,x_3)$

$f(x_3,x_2,x_1)=f(x_1,x_2,x_3)$.

Într-adevăr, $f(x_2,x_1,x_3)$

$$\| $$

$$(2x_3^2-x_3x_2+2x_2^2)(2x_1^2-x_1x_3+2x_3^2)(2x_2^2-x_2x_1+2x_1^2)$$

$$\| $$

$$f(x_1,x_2,x_3)$$

La fel $f(x_3,x_2,x_1)=f(x_1,x_2,x_3)$.

---

b) f ca polinom de polinoame simetrice fundamentale

b) f ca polinom de polinoame simetrice fundamentale

Obs f este omogen de grad 6

$\Rightarrow$ putem aplica metoda coef. nedeterminați:

$LT_{<_{lex}}(f) = 8X_1^4X_2^2$

Scriem monoamele $X_1^aX_2^bX_3^c$ a.î.: $\begin{cases} \cdot\ X_1^aX_2^bX_3^c \leq_{lex} X_1^4X_2^2 \\ \cdot\ a+b+c=6 \\ \cdot\ a \geq b \geq c \end{cases}$

$$X_1^4X_2^2 \longleftarrow s_1^2s_2^2$$
$$X_1^4X_2X_3 \longleftarrow s_1^3s_3$$
$$X_1^3X_2^3 \longleftarrow s_2^3$$
$$X_1^3X_2^2X_3 \longleftarrow s_1s_2s_3$$
$$X_1^2X_2^2X_3^2 \longleftarrow s_3^2$$

$$\Rightarrow f(x_1,x_2,x_3) = 8\underset{12}{s_1^2s_2^2} + a\underset{12}{s_1^3s_3} + b s_2^3 + c\underset{12}{s_1s_2s_3} + d s_3^2$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2)(2x_1^2 - x_1x_3 + 2x_3^2)(2x_2^2 - x_2x_3 + 2x_3^2)$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$8s_1^2s_2^2 + a s_1^3s_3 + b s_2^3 + c s_1s_2s_3 + d s_3^2$	f
1	1	0	2	1	0	$32 + b$	12
1	ε	ε^2	0	0	1	d	-27

1	ε	ε^2	0	0	1	d	-27
2	-1	2	3	0	-4	$-108a + 16d$	1728
1	-1	1	1	-1	-1	$8 - a - b + c - d$	$---$

$\Rightarrow \underline{b = -20}$

$-108a = 1728 + 16 \cdot 27 = 2160$

$\Rightarrow \boxed{a = -20}$

$$f(1, \varepsilon, \varepsilon^2) = \left(2 - \varepsilon + 2\overset{-1-\varepsilon}{\overset{\|}{\varepsilon^2}}\right)\left(2 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon\right)\underbrace{\left(2\varepsilon^2 - 1 + 2\varepsilon\right)}_{\substack{\| \ \varepsilon^2+\varepsilon=-1 \\ -3}}$$

$$= \left(2 - \varepsilon + 2(-1-\varepsilon)\right)\left(2 - (-1-\varepsilon) + 2\varepsilon\right)(-3)$$

$$= (-3\varepsilon) \cdot (3 + 3\varepsilon)(-3) = 9\left(3\varepsilon + 3\varepsilon^2\right) = 27(-1)$$

$$= -27$$

$$x^3 - x^2 + x - 1$$

5. Fie x_1, x_2, x_3 răd complexe ale ec $x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0$.

Calculați $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

Formulele lui Newton: $s_1 = -1$, $s_2 = 3$, $s_3 = -1$

$p_1 - s_1 = 0$

$p_2 - s_1 p_1 + 2 s_2 = 0 \quad \leftarrow$ se află p_2

$\Downarrow$

$p_2 - s_1 p_1 + 2 s_2 = 0$ $\leftarrow$ se află p_2

$\Downarrow$

$p_3 - s_1 p_2 + s_2 p_1 - 3 s_3 = 0$ $\leftarrow$ se află p_3

$\Downarrow$

$p_4 - s_1 p_3 + s_2 p_2 - s_3 p_1 = 0$ $\leftarrow$ se află p_4

$\Downarrow$

$p_5 - s_1 p_4 + s_2 p_3 - s_3 p_2 = 0$ $\leftarrow$ se află p_5

6. $f = X^4 + 4X^2 - 3$ $\in \mathbb{Q}[X]$.

$g = X^3 + 4X^2 + 1$

a) Restul împărțirii lui f la g și b) $\gcd(f, g) = ?$

a)
$$\begin{array}{l|l} X^4 + 4X^2 - 3 & X^3 + 4X^2 + 1 \\ \hline -X^4 - 4X^3 - X & X - 4 \\ \hline \quad -4X^3 + 4X^2 - X - 3 & \\ \quad 4X^3 + 16X^2 + 4 & \\ \hline \quad \boxed{20X^2 - X + 1} & \end{array}$$

$\Rightarrow f = (X-4)(X^3 + 4X^2 + 1) + (20X^2 - X + 1)$ Restul

b) Var 1 Continui cu alg lui Euclid

Var 2 Observăm că $g = X^3 + 4X^2 + 1$ este ireductibil ($\deg g = 3$, are posibile rădăcini raționale ± 1, dar $g(1) = 6 \neq 0$, $g(-1) = 4 \neq 0$)

$g(1) = 6 \neq 0, \; g(-1) = 4 \neq 0)$

În plus, $g \nmid f \Rightarrow \gcd(f, g) = 1.$

---

7. (ii) $g = X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 2X + 2$ ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$

Eisenstein pt $p = 2$

(i) $f(X) = X^5 + X^3 + X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ ca produs de polinoame ireductibile:

- Obs $f(X)$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$

$\Rightarrow$ fie este ireductibil, fie $f(X) = g(X)\,h(X)$ cu g, h ireductibile, $\deg g = 3$, $\deg h = 2$.

monice

Poli ired de grad 2 în $\mathbb{Z}_3[X]$: $X^2 + X - \hat{1}$

$\overset{(1)}{\text{fără}}$ rădăcini $X^2 - X - \hat{1}$

$X^2 + \hat{1}$

Verificăm dacă f este divizibil cu unul din cele trei:

$$X^5 + X^3 + X^2 + X + \hat{1} = X^3(X^2 + \hat{1}) + \hat{1}(X^2 + \hat{1}) + X$$
$$= (X^3 + \hat{1})(X^2 + \hat{1}) + X$$ restul nenul!

$\Rightarrow x^2+\hat{1} \nmid x^5+x^3+x^2+x+\hat{1}.$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+x^3+x^2+x+\hat{1} & x^2-x-\hat{1} \\ \cline{2-2}
-x^5+x^4+x^3 & x^3+x^2-\hat{1} \\ \cline{1-1}
\quad / \; x^4-x^3+x^2+x+\hat{1} & \\
\quad -x^4+x^3+x^2 & \\ \cline{1-1}
\quad / \; / \; -x^2+x+\hat{1} & \\
\qquad\quad x^2+x+\hat{1} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad / / / &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow f = (x^3+x^2-\hat{1})(x^2-x-\hat{1})$$

Alte probleme

Ex 2.1. $x^{75}+\hat{4} \in \mathbb{Z}_5[x]$. Descompunere?

Obs char $\mathbb{Z}_5 = 5$

$$x^{75}+\hat{4} = x^{3\cdot 5^2} + \hat{4}^{5^2} = (x^3+\hat{4})^{5^2}$$

Th Fermat

$$= (x^3-\hat{1})^{25} = \boxed{(x-\hat{1})^{25}(x^2+x+\hat{1})^{25}}$$

în $\hat{0}$: $\hat{1}$

$\hat{1}$: $\hat{3}$

... nu are rădăcini)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{1} : \hat{3} \\ \hat{2} : \hat{7} \\ -\hat{2} : \hat{3} \\ -\hat{1} : \hat{1}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{c}\text{nu are rădăcini} \\ \deg = 2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{ireductibil}$$

Exc 2 $f(X) = X^{2021} + X^{1000} + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ se divide la

$X^2 + X + 1 = g(X)$

Var 1 $X^{2021} + X^{1000} + \cancel{1} - (X^2 + X + \cancel{1})$

$$= X\left(X^{2020} + X^{999} + X^2 \underbrace{- X - 1 - X^2}_{-g(X)}\right)$$

$$= X^3(X^{2018} + X^{997} + 1) - Xg(X)$$

$$g \mid f \Leftrightarrow g \mid X^{2018} + X^{997} + 1$$

Inducție $g \mid f \Leftrightarrow g \mid X^{2021-3k} + X^{1000-3k} + 1$, $\forall k$ pt care are sens

$$\Rightarrow g \mid f \overset{k=333}{\Leftrightarrow} g \mid X^{1022} + X + 1$$

$X^{1022} + \underbrace{X^2 + X + 1}_{g} - X^2$. Deci $g \mid X^{1022} + X + 1$
(1)

$X^{\cdot} + \underbrace{x + x + 1}_{g}$

(1)

$$g \mid x^{1020} - 1.$$

rad. de ordin 3 (diferite de 1) $\subset$ rad. de ordin 1020 ale unității

$$X^{1020} - 1 = (X^{510} - 1)(X^{510} + 1)$$

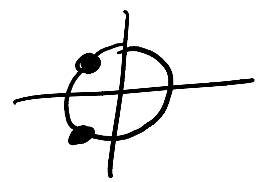
$$= \underbrace{(X^{255} - 1)}_{} (X^{255} + 1)(X^{510} + 1)$$

$$(X - 1)\,(\underbrace{X^{254} + X^{253} + \dots + 1}_{})$$

255 de termeni $\Rightarrow$ se grupează câte 3

$\Rightarrow \vdots\ X^2 + X + 1$!

Idee g are rădăcinile ε și ε^2



Dacă $f(\varepsilon) = 0$ și $f(\bar{\varepsilon}) = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} g \mid f$ în $\mathbb{C}[X]$

Obs Dacă $g, f \in \mathbb{Q}[X]$ și $g \mid f$ în $\mathbb{C}[X] \Rightarrow g \mid f$ în $\mathbb{Q}[X]$

Dem Fie $f(X) = g(X)\, h(X)$, $h(X) \in \mathbb{C}[X]$.

$\mathbb{Q}[X]$ $\mathbb{Q}[X]$

$\mathbb{Q}[X] \quad \mathbb{Q}(X)$

$$\left(\Rightarrow h(X) \in \mathbb{Q}(X) = Q(\mathbb{Q}[X]) \subset Q(\mathbb{C}[X]) \right.$$
$$\left. \text{Dar } h(X) \in \mathbb{C}[X] \; --- \right)$$

Pp că $h(X) \notin \mathbb{Q}[X]$. Fie $h(X) = \sum_{i=1}^{l} c_i X^i$

Aleg i_0 minim a.î. $c_{i_0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

$f = \sum a_j X^i \quad , \quad g = \sum b_i X^i$

$$\Rightarrow \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\cap}{a_{i_0}}} = \underset{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}}{\underset{\cap}{c_{i_0}}} \; \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\cap}{b_0}} + \underbrace{c_{i_0-1} b_1 + --- + c_0 b_{i_0}}_{\in \mathbb{Q}}$$

$\lightning$

<u>Var 2</u> Th de împărțire cu rest (în $\mathbb{Q}[X]$):

$f(X) = (X^2+X+1)\, q(X) + aX + b \quad , a, b \in \mathbb{Q}$

$(X^2+X+1) \mid f(X) \iff a = b = 0$

$\Updownarrow \; \varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$

$f(\varepsilon) = 0 \iff a\varepsilon + b = 0$

$2021 \equiv 2 \, (3)$
$1000 \equiv 1 \, (3)$

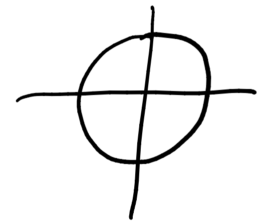
$2021 \equiv 2\ (3)$
$1000 \equiv 1\ (3)$

În final, $f(\varepsilon) = \varepsilon^{2021} + \varepsilon^{1000} + 1 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$

<u>Exerc 2.3.</u> Determinați $m, n, p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$f(X) = X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2} \in \mathbb{Q}[X]$$

se divide la $X^4 + X^2 + 1$.



<u>Dem</u> Dacă $f(X) = g(X) \cdot (X^4 + X^2 + 1)$

$\downarrow g(-1)$

$$\Rightarrow f(-1) \vdots 3 \Rightarrow m \equiv p\ (2)$$
$$n \not\equiv m\ (2)$$

Invers, pp că $m \equiv p\ (2)$ și $n \not\equiv m\ (2)$, atunci:

- dacă m, p pare și n impar $\Rightarrow$

$$X^4+X^2+1 \mid f(X) \Leftrightarrow (X^4+X^2+1) \mid (f(X) - X^4 + X^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow X^4+X^2+1 \mid \left((X^{3m} - 1) + X^4(X^{3(n-1)} - 1) + X^2(X^{3p} - 1)\right)$$

$\vdots 6$

X^4+X^2+1

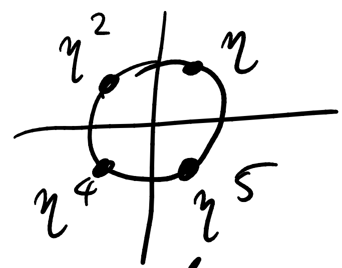
$$\Rightarrow X^6 - 1 \mid X^{3m} - 1$$
$$\mid X^{3(n-1)} - 1$$

$| \, x^{3r}-1$

• Celălalt caz similar!

<u>Var 2</u> $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$ are rădăcinile de forma $t \in \mathbb{C}$ a.î. $t^2 \in \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}\}$

(ecuație bipătrată)



conjugate

Practic: $f \,\vdots\, x^4+x^2+1 \iff f(\eta)=f(\eta^2)=f(\eta^4)=f(\eta^5)=0$

$\iff f(\eta)=0$ și $f(\eta^2=\varepsilon)=0$

$$f(\varepsilon)=\varepsilon^{3m}+\varepsilon^{3n+1}+\varepsilon^{3p+2}=1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$$

$$f(\eta)=\eta^{3m}+\eta^{3n+1}+\eta^{3p+2}=(-1)^m+(-1)^n\eta+(-1)^p\eta^2$$

$\overset{\dots}{\iff} m \equiv p\ (2)$ și $n \not\equiv m\ (2)$.

<u>Ex 2.4.</u> $\mathcal{C}=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$

Dem că $\mathcal{C}$ este infinit dimensional.

$\mathbb{R}$-spațiu vectorial

Dem Construim o mulțime liniar independentă infinită.

<u>Dem</u> Construim o mulțime liniar independentă infinită.

Fie $f_n(x)=\sqrt[2^n]{x}$. $L=\{f_n \mid n\geq 1\}$

Pp că L este liniar dependentă $\Rightarrow \exists\, n_1,\dots,n_l$ și $a_1,\dots,a_l$ ai

$$a_1\sqrt[2^{n_1}]{x}+a_2\sqrt[2^{n_2}]{x}+\dots+a_l\sqrt[2^{n_l}]{x}=0 \quad \forall x\in[0,1]$$

Altfel: Fie $f_n(x)=x^n$, $\forall n\geq 0$.

$L=\{f_n \mid n\geq 1\}$

$\Rightarrow$

$$a_1x^{n_1}+a_2x^{n_2}+\dots+a_lx^{n_l}=0,\ \forall x\in[0,1]$$

$\Longrightarrow$ polinomul $a_1X^{n_1}+a_2X^{n_2}+\dots+a_lX^{n_l}=0$

$$\Downarrow$$

$$a_j=0,\ \forall j=\overline{1,l}$$

De fapt, am construit în $\mathcal{C}$ un șir ascendent de spații vectoriale finit dimensionale (care nu este staționar!)

$$P_0\subset P_1\subset P_2\subset \dots \dots \subset \mathcal{C}$$

b) Cardinalul unei baze a lui $\mathbb{C}$ este numărabil?
$\left(\text{i.e } \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \aleph_0 ?\right)$

NU

(- - - - - - pt anul I)

<u>Th (Hamilton - Cayley)</u> ← dem la curs

Fie K corp comutativ și $A \in M_n(K)$. Atunci $P_A(A) = O_n$.

<u>Ex 2.6.</u> Altă demonstrație pt $K \subset \mathbb{C}$:

a) Dem Th pt $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonală.

Dacă $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P_A(A) = \begin{pmatrix} P_A(\lambda_1) & & & \\ & P_A(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_A(\lambda_n) \end{pmatrix}$

$= 0$

b) ———— diagonalizabilă.

Dacă $A = PDP^{-1}$

$\Rightarrow P_A(A) = \sum^{n} a_i A^i = \sum^{n} a_i (PDP^{-1})^i =$

$$\Rightarrow P_A(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i = \sum_{i=0}^{n} a_i (PDP^{-1})^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i P D^i P^{-1} = P \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} a_i D^i \right)}_{P_A(D) \overset{a)}{=} 0} P^{-1} = 0$$

c) Mulțimea matricelor diagonalizabile din $M_n(\mathbb{C})$ este densă în $M_n(\mathbb{C})$.

i.e. $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists (A_\ell)_{\ell \geq 1}$ diagonalizabile

a.î. $A_\ell \longrightarrow A$

punctual pe coordonate

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ $\xrightarrow[\text{Jordan}]{\text{A are formă}}$ $A = P J P^{-1}$,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & & O \\ & \lambda_2 & * & \\ & & \ddots & * \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Aleg $A_\ell \to A$, $A_\ell = \begin{pmatrix} \lambda_1^\ell & & & \\ & \lambda_2^\ell & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^\ell \end{pmatrix}$ a.î.

$$\Big| \qquad \lambda_n^\varepsilon \Big|$$

$$\underbrace{\{\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_n^\varepsilon\} \text{ diferite}}_{\Rightarrow A_\varepsilon \text{ este diagonalizabilă}} \quad \text{și} \quad \lambda_i^\varepsilon \to \lambda_i, \ \forall i=\overline{1,n}$$

d) $P_A(A) \xleftarrow{A_\varepsilon \to A} \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{P_{A_\varepsilon}(A_\varepsilon)}$

e) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ diagonalizabilă}\}$ densă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

De ex, aleg $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(X) = X^2+1$

$\Delta(A) < 0 \leftarrow$ fcție de A

$\Rightarrow \exists\, U \ni A$, U deschis în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a.î.

$\Delta(U) \subset (-\infty, 0)$

$\Rightarrow$ Orice matrice din U are v.p. $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ________________ este nediagonalizabilă.