Convergența seriilor

Corolar: (Criteriul suficient de divergență)

Dacă $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$, atunci seria $\sum_n x_n$ este divergentă. Reciproca nu e valabilă!!!

Observație!

În aplicații, putem folosi fără justificare convergențele următoarelor serii de numere reale:

1) $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{conv., dacă } q \in (-1,1) \\ \text{div., dacă } q \in \mathbb{R} \setminus (-1,1) \end{cases}$$

(seria geometrică)

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{conv., dacă } \alpha > 1 \\ \text{div., dacă } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(seria armonică generalizată)

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi:

1. Criteriul raportului

Fie seria $\sum_{n} x_n$, $x_n > 0$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists)$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not.}{=} \lambda$.

a) Dacă $\lambda < 1$, atunci $\sum_{n} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\lambda > 1$, atunci $\sum_{n} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\lambda = 1$, atunci acest criteriu nu decide.

2. Criteriul radicalului

Fie seria $\sum_{n} x_n$, $x_n \geq 0$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists)$ $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not.}{=} \lambda$.

a) Dacă $\lambda < 1$, atunci $\sum_{n} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\lambda > 1$, atunci $\sum_{n} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\lambda = 1$, atunci acest criteriu nu decide.

3. Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $\sum_n' x_n$, $x_n > 0$ a.î. $(\exists) \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \overset{\text{not.}}{=} l$.

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n' x_n$ este divergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n' x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = 1$, atunci acest criteriu nu decide.

4. Criteriul condensării

Fie $(x_n)_n \subset [0, +\infty)$ un șir descrescător. Atunci seriile de numere reale $\sum_n' x_n$ și $\sum_n' 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeași convergență (i.e. sau sunt ambele convergente sau sunt ambele divergente: $\sum_n' x_n \sim \sum_n' 2^n \cdot x_{2^n}$).

5. Criteriul de comparație cu inegalități

Fie seriile $\sum_n' x_n$ și $\sum_n' y_n$ a.î. $x_n \geq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ și $(\exists)\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n$.

a) Dacă $\sum_n' y_n$ este convergentă, atunci $\sum_n' x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\sum_n' x_n$ este divergentă, atunci $\sum_n' y_n$ este divergentă.

6. Criteriul de comparație cu limită

Fie seriile $\sum_n' x_n$ și $\sum_n' y_n$ a.î. $x_n \geq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ și $(\exists) \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{not.}{=} l$.

a) Dacă $l \in (0, +\infty)$, atunci $\sum_n' x_n \sim \sum_n' y_n$ (i.e. $\sum_n' x_n$ și $\sum_n' y_n$ au aceeași convergență)

b) Dacă $l = 0$ și $\sum_n' y_n$ este convergentă, atunci $\sum_n' x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = +\infty$ și $\sum_n' y_n$ este divergentă, atunci $\sum_n' x_n$ este divergentă.