24.10.2024.

## Seminar 4 → Subspații vectoriale
## Repere. Coordonate.

(4) Fie $(\mathbb{R}_3[X],+,\cdot)_{\mathbb{R}}$ sp. vect. al polinoamelor de gr. cel mult 3.

Cons. 3 submulțimi:

$$V_1=\{P\in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0)=0\} \quad (P=\tilde{P} \text{ funcția polinomială})$$
$$V_2=\{P\in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}$$
$$V_3=\{P\in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0)=P(1)=0\}$$

a) $V_i \subset \mathbb{R}_3[X]$, $i=\overline{1,3}$ sunt subspații vect.

Obs: $V' \subset V$ subspațiu vect $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(\forall)\, x,y\in V' \Rightarrow x+y\in V', \\ (\forall)\, a\in K, (\forall)\, x\in V' \Rightarrow a\cdot x\in V'\end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(\forall)\, x,y\in V' \\ (\forall)\, a,b\in K\end{array}\right| \Rightarrow ax+by=0 \Rightarrow x=y=0$$

$$\left.\begin{array}{l}P,Q\in V_1 \\ (\forall)\, a,b\in \mathbb{R}\end{array}\right| \Rightarrow aP+bQ\in V_1$$

$$(aP+bQ)(0)=aP(0)+bQ(0)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow aP+bQ\in V_1$$

Analog pt $V_2$ și $V_3$

b) Precizați câte un reper $R_i$ din $V_i$, $i=\overline{1,3}$,

Obs: $S$ este SLI $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(\forall)\, x_1,\dots,x_n\in S \\ (\forall)\, a_1,\dots,a_n\in K\end{array}\right.$ a.î. $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0 \Rightarrow$
$$\left.\Rightarrow a_1=\dots=a_n=0_K\right]$$

$S$ este SLD $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(\exists)\, x_1,\dots,x_n\in S \\ (\exists)\, a_1,\dots,a_n\in K \text{ nu toți nuli}\end{array}\right.$ a.î.
$$\left. a_1x_1+\dots+a_nx_n=0_V\right]$$

↱ spațiu vect. generat de S.

SG $\langle S \rangle = V \Leftrightarrow (\forall)\, x \in V\ (\exists)\, x_1, \dots, x_n \in S$ a.î. $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$
$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

bază S bază $\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \text{ S SLI} \\ 2) \text{ S SG} \end{cases}$

V spațiu vect finit generat
S bază $\Rightarrow |S| = \dim_{\mathbb{K}} V$

Obs: $\dim V = n$
$S = \{x_1, \dots, x_n\}$
UAE 1) S SLI
2) S SG
3) S bază

Def: Reper = bază ordonată
$R = \{e_1, \dots, e_n\}$
$(\forall)\, x \in V\ (\exists!)\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ a.î. $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = x$
$(a_1, \dots, a_n)$ coordonatele lui $x$. (contează poz. fiecăruia)

$R_0 = \{1, x, x^2, x^3\}$ reperul canonic din $\mathbb{R}_3[x]$

$\boxed{(\forall)\, P \in \mathbb{R}_3[x]\ P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}$
$(a_0, a_1, a_2, a_3)$ coordonatele lui P în rap cu $R_0$

b) Det un reper în $V_1$
$P \in V_1 \Rightarrow P(0) = 0$ (termenul liber e 0)
$\Rightarrow P = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
$R_1 = \{x, x^2, x^3\}$ sist degenerator pt $V_1$ ($\langle R_1 \rangle = V$)
SG.

Dem că $\mathcal{R}_1$ e SLI

$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0, (\forall) x.$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow \mathcal{R}_1 = \{x, x^2, x^3\} \text{ reper în } V_1 \\ \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_1 = 3 \end{array}}$$

Det un reper în $V_2$

$P \in V_2 \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$

$P = -a_1 - a_2 - a_3 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$P = a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3)$

$\mathcal{R}_2 = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$ SG pt $V_2$.

Dem că $\mathcal{R}_2$ e SLI

$a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) = 0$

$$\hookrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a_1 - a_2 - a_3 = a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{SLI}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{R}_2 = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\} \text{ reper în } V_2 \to \dim_{\mathbb{R}} V_2 = 3}$$

$V_3 = V_1 \cap V_2$

$P \in V_3$

$a_0 = 0$

$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 - a_3$

$P = (-a_2 - a_3)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_2(-x + x^2) + a_3(-x + x^3)$

$R_3 = \{-x + x^2, -x + x^3\}$ SG în $V_3$

Dem că $R_3$ SLI

$$a_2(-x + x^2) + a_3(-x + x^3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -a_2 - a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$R_3 = \{-x + x^2, -x + x^3\}$ reper în $V_3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_3 = 2$.

c) Aflați coordonatele lui $P_1 = X + 2X^2 + 3X^3$ în rap cu $R_1$

$R_1 = \{x, x^2, x^3\}$

$(1, 2, 3)$ sunt coord. lui $P_1$ în rap cu $R_1$

- $P_2 = 1 + 2X^3 - 3X^3$ în rap cu $R_2$

$R_2 = \{-1 + x, -1 + x^2, -1 + x^3\}$

$1 + 2x^2 - 3x^3 = a(-1 + x) + b(-1 + x^2) + c(-1 + x^3)$

$1 + 2x^2 - 3x^3 = -a - b - c + a \cdot x + b x^2 + c \cdot x^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ b = 2 \\ a = 0 \end{cases} \quad a + b + c = -1.$$

- $P_3 = X + 3X^2 - 4X^3$ în rap cu $R_3$

$X + 3X^2 - 4X^3 = a(-x + x^2) + b(-x + x^3) =$

$= (-a - b)x + a x^2 + b x^3$

$(3, -4)$ sunt coord lui $P_3$ în rap cu $R_3$.

d) Det că un subspațiu complementar $V_i'$ lui $V_i$, $i=\overline{1,3}$, adică $R_3[x] = V_i \oplus V_i'$, $i=\overline{1,3}$

Rez:

$V = V_1 \oplus V_2 \iff \begin{cases} 1)\ V = V_1 + V_2 \\ 2)\ V_1 \cap V_2 = \{0_V\} \end{cases}$

$R_3[x] = V_1 \oplus V_1'$ ; $R_1 = \{x, x^2, x^3\}$

$V_1' = \langle\{1\}\rangle$ (spațiul gen. de $\{1\}$)

$R_3[x] = V_2 \oplus V_2'$ ; $R_2 = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$

$-1+x = (-1,1,0,0)$, $-1+x^2 = (-1,0,1,0)$, $-1+x^3 = (-1,0,0,1)$ coeficienții

$\det \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rg = 4 = max$$

(adăugăm ceva simplu)

$\Rightarrow V_2' = \langle\{1\}\rangle$

$R_3[x] = V_3 \oplus V_3'$

$R_3 = \{-x+x^2, -x+x^3\}$

$-x+x^2 = (0,-1,1,0)$, $-x+x^3 = (0,-1,0,1)$

$0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$

$$rg\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 4 = max.$$

$V_3 = \langle \{x, 1\} \rangle$

e) Să se scrie $\mathbb{R}_3[x]$ ca sumă directă de 3 subspații vectoriale, respectiv 4 subspații vect.

$\mathbb{R}_3[x] = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$

$W_1 = \langle \{1\} \rangle$

$W_2 = \langle \{x\} \rangle$

$W_3 = \langle \{x^2, x^3\} \rangle$

$\mathbb{R}_3[x] = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$

$U_1 = \langle \{1\} \rangle$

$U_2 = \langle \{x\} \rangle$

$U_3 = \langle \{x^2\} \rangle$

$U_4 = \langle \{x^3\} \rangle$

6) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ ; $V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \right\} = S(A)$

$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$

a) → Precizați o bază din $V'$

b) Precizați $V''$ subspațiu complementar al lui $V'$

$\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

c) Să se descompună $x = (1, 1, 2)$ din rap cu $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

a) $\dim_{\mathbb{R}} V' = 3 - \operatorname{rang} A$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

$\dim_{\mathbb{R}} V' = 1$

nec principale: $x_1, x_2$

nec sec: $x_3 = \alpha$

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = +8\alpha \\ x_1 = -4\alpha \end{cases}$

$S(A) = V' = \{(-4\alpha, 8\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\quad = \alpha(-4, 8, 1)$ ("il dăm pe $\alpha$ fact comun")

$\mathcal{R}' = \{(-4, 8, 1)\}$ SG. pt $V'$

Dar $\dim V' = 1 = \operatorname{card} \mathcal{R}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{R}'$ reper în $V'$

b) $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

$\mathcal{R}' = \{(-4, 8, 1)\}$ reper în $V'$

extindem $V'$ la un reper din $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = \max$$

$\Rightarrow V'' := \langle \{(1,0,0); (0,0,1)\} \rangle$

$\mathcal{R} = \{\underbrace{(-4, 8, 1)}_{V'}, \underbrace{(1,0,0), (0,0,1)}_{V''}\} = \text{reper } \mathbb{R}^3$

$x = \underbrace{a(-4,8,1)}_{u \in V'} + \underbrace{b(1,0,0) + c(0,0,1)}_{v \in V''}$

$x = u + v$

$(1, 1, 2) = (-4a + b, 8a, a + c)$

$$\begin{cases} -4a + b = 1 \Rightarrow b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{8} \\ a + c = 2 \Rightarrow c = 2 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{8}(-4, 8, 1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}\right)$$

$$v = \frac{3}{2}(1,0,0) + \frac{15}{8}(0,0,1) = \left(\frac{3}{2},0,0\right) + \left(0,0,\frac{15}{8}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{15}{8}\right)$$

24.10.2024.

## Curs 4 – AG

## Repere. Coordonate în raport cu un reper. Operații cu subspații vectoriale.

Def: $(V,+,\cdot)_{\mathbb{K}}$ sp. vect, $S \subset V$ submulțime nevidă

1) $S$ e SLI $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}(\forall)\, x_1, \dots, x_m \in S \\ (\forall)\, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{K}\end{array}\right.$ a.î. $a_1x_1 + \dots + a_mx_m = 0_V \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0_{\mathbb{K}}$

2) $S$ e SLD $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}(\exists)\, x_1, \dots, x_m \in S \\ (\exists)\, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{K}, \text{ nu toți nuli}\end{array}\right.$ a.î. $a_1x_1 + \dots + a_mx_m = 0_V$

3) $S$ e SG $\Leftrightarrow V = \langle S \rangle \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}(\forall)\, x \in V, (\exists)\, x_1, \dots, x_m \in S \\ (\exists)\, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}\end{array}\right.$ a.î. $x = a_1x_1 + \dots + a_mx_m$

Dacă $S$ mult. finită, at $V$ s.n. sp. vect finit generat

4) $B$ este bază $\Leftrightarrow \begin{cases} B = SLI \\ B = SG \end{cases}$

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \operatorname{card}(B)$$