Curs 1 Algebră

27.02.2024

1) Sisteme liniare: Metoda eliminării
2) Spații vectoriale
- SLi
- SG
- apl liniare

3) Vectori și valori proprii

$\boxed{\text{CĂRȚI}}$

1. L. Ornea, A. Turtoi: O introducere în geometrie, Ed Theta 2000
2. Boreu, Dan, ...: Algebră liniară (pdf)
3. T Dumitrescu - Algebra
4) Olver: Applied Linear Algebra, Springer, 2018
Shakiban

Rezolvarea sistemelor liniare cu metoda eliminării Gauss-Jordan.

Un sistem de m ec lin. cu n necunoscute:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\forall i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ → coef sist.

și

$b_1,\dots,b_m \in \mathbb{R}$ termeni liberi

și

$x_1,\dots,x_n$ nec. sistemului

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, K$ corp comutativ

Spunem că $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ din $\mathbb{R}^n$ este soluție a sistemului (*) dacă doar $x_1, \dots, x_n$ satisfac toate ec. simultan sistemului.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \text{ matricea sistemului}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ matricea term. liberi } \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ col nec.}$$

- Forma mat a sist (*)

$$\boxed{AX = b}$$

Formăm mat extinsă a sistemului

$$\bar{A} = (A|\underline{b}) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$$

Def

Sist s.n. incompatibil dacă nu are soluții. $S = \emptyset$

Sist s.n. compatibil dacă $S \neq \emptyset$

- → determinat dacă soluția e unică
- sau
- → nedeterminat dacă soluția nu e unică

Ex

Rezolvați în $\mathbb{Z}$

$2x+3y=1$ $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sol în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

afl. $\int$ ... în $\mathbb{Z}$

$2x+4y=1$ nu are sol în $\mathbb{Z}$,

dar are o ∞ de sol în $\mathbb{Q}$

Scop Rezolvarea „rapidă" a sistemelor liniare cu coef. într-un corp comutativ.

Ex Rez. în $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=0 \\ x_3-2x_4+x_5=1 \\ x_4-3x_5=2 \end{cases}$$

3 ec 5 nec.

Aleg $\begin{matrix} x_2=s \\ x_5=t \end{matrix} \in \mathbb{R} \Rightarrow x_4, x_3, x_1$ unic det. natural

$x_4=2+3x_5=2+3t$

$x_3=1+2x_4-x_5=1+4+6t-t=5+5t$

$x_1=-2x_2+x_3-x_4+x_5=-2s+5+5t-2-3t+t=3+3t-2s$

$$S\left\{\begin{pmatrix} 3-2s+3t \\ s \\ 5+5t \\ 2+3t \\ t \end{pmatrix} : s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

o sol particulară a sistemului

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

rezolvarea este rapidă

deoarece mat extinsă este în „scară"

(forma eșalon)

Ideea de bază: Dat un sistem $Ax = b$

Aducem mat extinsă $\bar{A}$ la o formă „în scară" a.î. noul sistem are exact aceleași sol ca primul

Def

O mat $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ este în formă ~~scară~~ eșalon dacă:

→ liniile nule se află sub liniile nenule

→ numim pivot cel mai din stg. intrare nenulă (pe o linie nenulă)

→ pivotul de pe linia (nenulă) i se află la dreapta pivotului de pe linia $i-1$.

Dacă în plus avem și că:

→ toți pivoții sunt 1.

→ pe orice coloană cu pivot, acesta este singurul el. nenul

spunem că este în formă eșalon la dreapta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

FE, nu redusă $\qquad$ nu e FE $\qquad$ F.E. redusă

Transformări elementare pe linii într-o matrice / pe ec. unui sistem liniar

① $L_i \leftrightarrow L_j$ schimbăm între ele linia i cu linia j (resp. ec. i cu ec. j din sistem)

② $L_i \leftarrow aL_i$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: înmulțesc linia i cu cu $a \in \mathbb{R}^*$

③ $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ înmulțesc cu a linia j și adun rez la linia i

Obs Aceste transf. efectuate asupra liniilor mat. extinse a unui sistem conduc la un sist. echivalent (cu aceleași soluții)

Teoremă:

Orice mat $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ poate fi adusă prin transf. elementare la forma eşalon. (redusă)

Ex Aduceți la FE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ forma eşalon } \xrightarrow[L_3 = -\frac{1}{3}L_3]{L_2 = -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Pt F.E. Redusă

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FE redusă

$\rightarrow$

Dem (Algoritm)

- Dacă $A = O_{mn} \Rightarrow$ gata ✓

- dacă $A \neq O_{mn}$

$\Rightarrow$ pornim cu col $i=1$ și iterăm

• căutăm o intr. nenulă pe col i

sub linia pivotului anterior

• aducem sub linia cu pivotul anterior noua linie

Acest element nenul devine noul pivot

• facem zerouri pe coloana i folosind linia cu noul pivot

$\Rightarrow$ până când am ajuns la ultima coloană sau la ultima linie nenulă din matrice

Pt F.E.R.

$\Rightarrow$ prin transf de tip ② facem pivoții să devină 1,

$\rightarrow$ —— \|\| —— ③ facem zerouri și deasupra pivoților

Rezolvarea sistemelor liniare prin metoda eliminării

Dat sist $Ax = b$, construim matricea extinsă $\bar{A} = (A|b)$, pe care o aducem prin transf. la o formă eșalon $\bar{E}$

Rezolvăm sistemul cu mat extinsă $\bar{E}$, care are aceleași sol ca sist inițial

Ex

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1-3x_3+2x_4=-3 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overline{E}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=1 \\ -x_2-5x_3+3x_4=-1 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=-3 \end{cases}$$

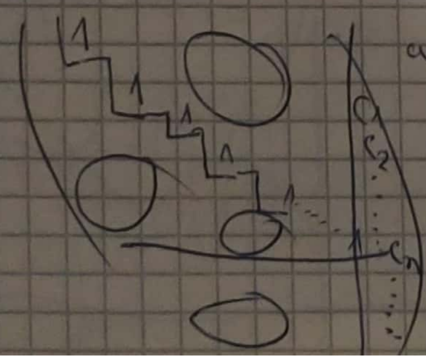
$$\boxed{0=-3}$$

Obs: Sistemul $Ax=b$ este incompatibil $\Leftrightarrow$ în FE pt $\overline{A}$ găsim pivot pe ultima coloană.

Dacă $\nexists$ pivot pe ultima coloană din $\overline{E}$, necunoscutele de pe coloanele fără pivot sunt nec. ~~secundare~~ sec. - pot fi alese ca param.

În funcție de acești param, det unic restul, adică nec. principale

Caz particular



adică avem n pivoți $\Rightarrow$ n necunoscute

$\Rightarrow$ sistemul are sol unică

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Apl Calculul ~~unor~~ inv unei mat patratice

input: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Constr mat inversa $(A|I_n) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$ pt care construim forma eşalon redusă $(B|C) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$

At. matricea A este inversabila $\Leftrightarrow B = I_n$

În acest caz $C = A^{-1}$

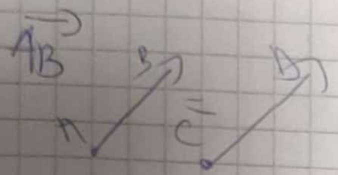
$$\boxed{(A|I_n) \longrightarrow (I_n|A^{-1})}$$

CURS - GAL - Stamate 05.03.2024

Spații vectoriale

Def

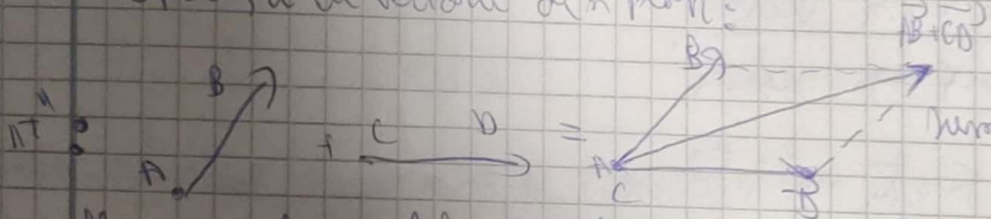
Vectorii din plan: segmente orientate



dacă $AB \parallel CD$ (au aceeași direcție)
$AB = CD$ (aceeași lungime)
A, B, D, C în această ordine sunt vârfurile unui paralelogram (au același sens)

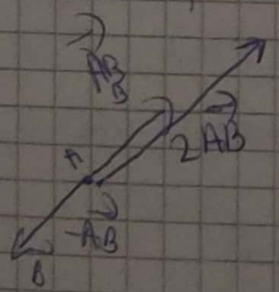
Operații cu vectorii din plan:

"+"



Suma celor 2 vectori se află cu regula paralelogramului după ce aplic cei 2 vectori într-un singur punct.

"·" înmulțire cu scalari



$(V,+)$ grup abelian

Definiție:

Fie K un corp comutativ ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$)

Un K-spațiu vectorial este o mulțime $V \neq \emptyset$ (nevidă) împreună cu 2 operații

$+: V \times V \to V$ adunare, a.î. $(V,+)$ grup abelian

$\cdot: K \times V \to V$ înmulțire cu scalari a.î.

1) $a(x+y) = ax + ay$, $\forall a \in K$, $\forall x, y \in V$

2) $(a+b)x = ax + bx$; $\forall a, b \in K$, $\forall x \in V$

3) $(a \cdot b)x = a \cdot (b \cdot x)$; —"—

4) $1 \cdot x = 1$

Elementele din V s.n. vectori

—"— din K —"— scalari

Obs Dacă K este subînțeles $\Rightarrow$ spunem că "V este spațiu vectorial"

Ex ① $(V, +, \cdot)$ vectorii din plan au o structură de $\mathbb{R}$-sp. vectorial

② $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ este un $\mathbb{R}$-sp. vectorial cu operațiile pe componente

- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$

③ $M_{m,n}(K)$ $A+B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$ este un K-sp. vectorial

$aA = (a \cdot a_{ij})_{i,j}$

④ $K[X]$ - un K-sp. vectorial

⑤ $a<b$ $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ cont}\}$ este un $\mathbb{R}$-sp. vectorial

Reguli de calcul într-un spațiu vectorial

Fie V un K-sp. vectorial

Atunci

(1) $a(x-y) = ax - ay$; $\forall a \in K$, $\forall x, y \in V$

(2) $(a-b)x = ax - bx$, $\forall a, b \in K$, $\forall x \in V$

(3) $0_K \cdot x = 0_V$; $\forall x \in V$

(4) $a \cdot 0_V = 0_V$, $\forall a \in K$

(5) $a \cdot (-v) = (-a) \cdot v = -a \cdot v$, $\forall a \in K$, $\forall v \in V$

Regula semnelor

(6) Fie $a \in K$ și $x \in V$ a.î. $a \cdot x = 0_V \Rightarrow a = 0_K$ sau $x = 0_V$

Dem (3) Fie $x \in V$

$0_K = 0_K + 0_K \mid \cdot x$

(1) $0_K \cdot x = (0_K + 0_K) \cdot x \Rightarrow \cancel{0_K} \cdot x = \cancel{0_K} x + 0_K x \Rightarrow 0_K x = 0_V$

$a \cdot \mid 0_V = 0_V + 0_V$

$a \cdot 0_V = a \cdot (0_V + 0_V)$

$a \cdot \cancel{0_V} = a \cdot 0_V + a \cdot \cancel{0_V}$

$a \cdot 0_V = 0_V$

(5) $a \mid v + (-v) = 0_V$

$a \cdot v + a \cdot (-v) = a \cdot 0_V$

$a \cdot v + a \cdot (-v) = 0_V \Rightarrow a \cdot (-v) = -a \cdot v$

③ Fie $a \in K$ şi $x \in V$ cu $a \cdot x = 0_V$ (propr 3)

Dacă $a = 0_K \Rightarrow 0_K \cdot x = 0_V$ ✓

Să presupunem că $a \neq 0_K \Rightarrow \exists \frac{1}{a} \in K$

$$\frac{1}{a} \cdot (a \cdot x) = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot 0_V}_{= 0_V}$$

$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot x = 0_V$$

$$x = 0_V$$ ↯

Def Fie V un K-sp. vectorial. O submulţime nevidă $W \subseteq V$ se numeşte subspaţiu vectorial în V dacă restricţiile la W ale operaţiilor de pe V dau o structură de K-sp. vectorial.

Propr Fie $W \neq \emptyset \subseteq V$

UASE: (a) W este subsp vect în V

(b) $\forall a \in K, \forall x \in W : ax \in W$

(c) $\forall x, y \in W, \forall a, b \in K, ax + by \in W$

(W este ~~închis~~ închisă la combinaţii (K)-liniare)

Ex ① $\{0_V\} \subseteq V$ subsp. vectorial

$V \subseteq V$

② $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{subsp}}{\subseteq}$ în $M_2(\mathbb{R})$

③ Fie $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{R}[x]_{\leq n} = \{ P(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grad } P \leq n \} \cup \{0\}$ subsp vect.

④ $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 5x-3y=0\right\}$ subsp. vectorial în $\mathbb{R}^2$

⑤ Fie $A \in M_{m,n}(K)$. Notăm $\underbrace{\ker A}_{\text{nucleul lui } A} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n : A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Atunci $\ker A$ este un subsp. vect. în K^n

Fie $a, b \in K$, $x, y \in \ker A$ (deci $Ax = 0_S$ și $Ay = 0$)

$A(ax+by) = A \cdot a \cdot x + A \cdot b \cdot y = a \cdot (Ax) + b \cdot (Ay) = 0_S$

$ax+by \in \ker A \Rightarrow \ker A$ este subsp. vect în K^n

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

al unui sistem liniar omogen a cărei matrice este A

Def Fie V un K-sp. vectorial, iar V_1 și V_2 subsp. vectoriale în V

Notăm $V_1+V_2 = \{x+y : x \in V_1, y \in V_2\}$

Prop V_1+V_2 este un subsp. vectorial în V numit suma subspațiilor V_1+V_2.

Dem: Fie $a, b \in K$

Fie $v, w \in V_1+V_2 \Rightarrow$ $v = x_1+y_1$, $w = x_2+y_2$ cu $x_1, y_1 \in V_1$, $x_2, y_2 \in V_2$

$av+bw = a(x_1+y_1)+b(x_2+y_2) = \underbrace{(ax_1+bx_2)}_{V_1} + \underbrace{(ay_1+by_2)}_{V_2} \in V_1+V_2$

Deci V_1+V_2 subsp. vect în V

④ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 5x - 3y = 0 \right\}$ subsp. vectorial în $\mathbb{R}^2$

⑤ Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Notăm $\underset{\text{nucleul lui } A}{\operatorname{Ker} A} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n : A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Atunci $\operatorname{Ker} A$ este un subsp. vect. în K^n

Fie $a, b \in K$, $x, y \in \operatorname{Ker} A$ (deci $Ax = 0_5$ și $Ay = 0$)

$A(ax + by) = A \cdot a \cdot x + A \cdot b \cdot y = a \cdot (Ax) + b \cdot (Ay) = 0_5$

$ax + by \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow \operatorname{Ker} A$ este subsp. vect. în K^n

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

sol. unui sistem liniar omogen a cărei matrice este A

Def Fie V un K-sp. vectorial, iar V_1 și V_2 subsp. vectoriale în V

Notăm $V_1 + V_2 = \{ x + y : x \in V_1, y \in V_2 \}$

Prop $V_1 + V_2$ este un subsp. vectorial în V numit suma subspațiilor $V_1 + V_2$.

Dem: Fie $a, b \in K$

Fie $v, w \in V_1 + V_2 \Rightarrow \begin{matrix} v = x_1 + y_1 \\ w = x_2 + y_2 \end{matrix}$ cu $\begin{matrix} x_1, y_1 \in V_1 \\ x_2, y_2 \in V_2 \end{matrix}$

$av + bw = a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2) = \underset{V_1}{(ax_1 + bx_2)} + \underset{V_2}{(ay_1 + by_2)} \in V_1 + V_2$

Deci $V_1 + V_2$ subsp. vect. în V

Prop. $V_1 \cap V_2$ este subsp. vect. în V

Dem (Temă)

Obs $V_1 \cup V_2$ subsp. in $V \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ sau $V_1 \supseteq V_2$

Obs Dacă $V_1 + V_2 = V \Rightarrow \forall v \in V \ \exists x \in V_1$ şi $y \in V_2$ cu

cu $v = x + y$ x, y nu sunt unici

Obs Dacă $V_1 \ldots V_n \subseteq V$, suma lor este $V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n ; x_i \in V_i\ \forall i \in \overline{1,n}\} \subseteq V$

Prop Fie $V_1, V_2, \ldots, V_n$ subsp. vectoriale în V a.î.

$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$

Atunci $\forall x \in V \ \exists$ şi unici $x_1 \in V_1, \ldots, x_n \in V_n$ cu $x = x_1 + \ldots + x_n$ $\Leftrightarrow V_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} V_j\right) = \{0\}$

Dem „$\Rightarrow$" Fie $i \in \overline{1,n}$ şi $x \in V_i \cap \left(\sum_{j \neq i} V_j\right)$

$x \in V_i$ şi $x = \sum x_j$

$0 = x - x = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} x_j\right) - x = \underset{V_1}{0} + \underset{V_2}{0} + \ldots + \underset{V_n}{0}$

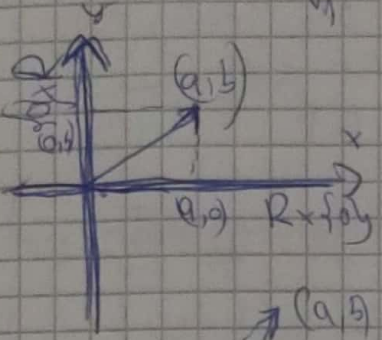
unicitatea $\Rightarrow$ deci $x = 0 \Rightarrow V_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} V_j\right) = \{0\}$

Def În situaţia din prop. anterioară spunem că „V este suma directă a subspaţiilor $V_1, \ldots, V_n$" notăm $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$

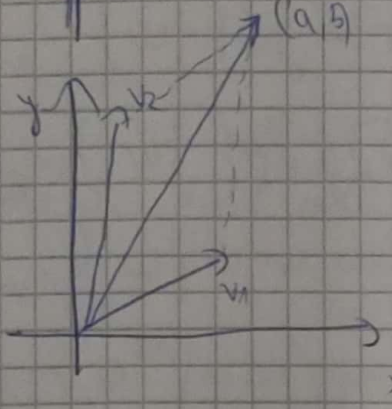
Caz $n = 2$: $V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \forall x \in V \ \exists$ şi unic $x_1 \in V_1$ şi $x_2 \in V_2$ a.î. $x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow V = V_1 + V_2$ şi $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Spunem că V_1 și V_2 sunt subsp. complementare

Ex $\mathbb{R}^2 = \underbrace{(\mathbb{R}\times\{0\})}_{V_1} \oplus \underbrace{\{0\}\times\mathbb{R}}_{V_2}$



$(a,0)+(0,b)$



Dați v_1, v_2 necoliniari din $\mathbb{R}^2$
aceștia induc o descompunere a lui $\mathbb{R}^2$ ca
sumă directă

Combinații liniare. Sisteme de generatori

Fie V un K-sp. vectorial

Def Pt $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$, o combinație liniară a lor este un vector de forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, unde $a_1, \dots, a_n \in K$ scalari

Notăm $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n : a_i \in K, \forall i = \overline{1,n}\}$

Pt $\emptyset \neq S \subseteq V$ notăm $\langle S \rangle = span_K(S)$ = mulțimea combinațiilor liniare de elemente din S

$S = \emptyset$ notăm $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

Prop $\forall S \subseteq V$

avem $\langle S \rangle$ este un subspațiu vectorial în V. Mai mult, $\forall W \subseteq V$ are loc $\langle S \rangle \subseteq W$ subsp. vectorial cu $S \subseteq W$ are loc
$\langle S \rangle \subseteq W$

Def Numim $<S>$ subsp. vectorial generat de mulțimea S

O submulțime $S \subseteq V$ s.n. sistem de generatori (SG) pt V dacă $<S> = V$ adică $\forall x \in V \ \exists n \in \mathbb{N}^* \ \exists x_1, \dots, x_n \in S$ a.î.

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \text{ cu } a_i \in K, \ \forall i \in \overline{1,n}$$

V are un SG finit, spunem că V este finit generat

Ex $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + a_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + \dots + a_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n}$$

Deci $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este SG pt $\mathbb{R}^n$

(2) $M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{11}} + b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{12}} + c \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{21}} + d \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_{22}}$$

Deci $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ este SG pt $M_2(\mathbb{R})$

Obs $V_1, V_2 \subseteq V \Rightarrow <V_1 \cup V_2> = V_1 + V_2$

CURS 3 - Stamate - GAL 12.03.2024

Sisteme liniar independente. Bază. Dimensiune

Fie ${}_K V$ un K-spațiu vectorial (K corp com: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ...)

Def Spunem că vectorii $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ formează un sistem liniar independent (notat SLI) dacă

$$\forall a_1, ... a_n \in K \text{ cu } a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = ... = a_n = 0$$

În general, o submulțime $S \subset V$ s.n. SLI, dacă orice $S_1 \subset S$, S_1 finită este SLI.

Obs Dacă $S \subset V$ nu este SLI spunem că este un sistem liniar dependent

Ex: $v_1, ..., v_n$ sunt liniar dependenți dacă $\exists a_1, ..., a_n \in K$, nu toți 0 a.î. $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$ $\Big\} \Rightarrow$ unul din ei este combinație liniară a celorlalți.

Să pp că $a_1 \neq 0 \Rightarrow a_1v_1 = -a_2v_2 ... -a_nv_n$

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2 - \frac{a_3}{a_1}v_3 ... - \frac{a_n}{a_1}v_n$$

$$v_1 \in \langle v_2, v_3, ..., v_n \rangle$$

Obs Fie S un SLI în V și $x \in V$

Atunci $S \cup \{x\}$ este SLI $\Leftrightarrow x \notin \langle S \rangle$

Ex 1) $\{0_V\}$ este SL dependent $1 \cdot 0_V = 0_V$ cu $1_K \neq 0_K$

2) $S = \{v\}$ este SLI $\Leftrightarrow v \neq 0$

3) Fie $v_1 \neq v_2 \in V$ nenule,

$S = \{v_1, v_2\}$ este SLI $\Leftrightarrow$ v_1 și v_2 nu sunt proporționali

CamScanner

4) $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \underbrace{x_i \in K}_{i=\overline{1,n}} \right\}$ Notăm $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← linia i $\forall i \in \overline{1,n}$

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este SLI? Fie $a_1, \dots, a_n \in K$ cu

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i \in \overline{1,n}$$

5) $\mathbb{R}[X]$

$\{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ este SLI

Fie $a_1 X^{i_1} + a_2 X^{i_2} + \dots + a_n X^{i_n} = 0$ cu $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ distincte și $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $\overset{\text{identificăm}}{\underset{\text{coef}}{\Longrightarrow}}$ $a_i = 0 \; \forall i$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Prop}} \text{ Fie } v_1, \dots, v_n \in K^m \\ \underline{\text{Atunci}} \; \{v_1, \dots, v_n\} \text{ este SLI} \Leftrightarrow \text{matricea } A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{m \times n} \text{ în} \\ \text{forma eșalon are pivot pe fiecare coloană} \end{array}}$$

<u>Dem</u> $\{v_1, \dots, v_n\}$ este SLI $\Leftrightarrow$ sistemul $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$ are doar soluția nulă $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & 0 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & \vdots \\ | & | & & | & 0 \end{array} \right)$ avem pivot pe fiecare din primele n coloane

<u>Prop</u>

1) Dacă $0 \in S \Rightarrow S$ nu e SLI

2) Dacă $S \subseteq_K V$ este SLI și $S_1 \subseteq S \Rightarrow S_1$ este SLI

3) Dacă $S \subseteq V$ este SG pt V și $S_2 \supseteq S \Rightarrow S_2$ este SG pt V

Def O submulțime a lui V care este SLI + SG pt V s.n. **bază pt V**

Nr de elem dintr-o bază (oarecare) a lui V s.n. **dimensiunea lui V**

Notație $\dim_K V$, $\dim V$

!! Orice spațiu vectorial admite o bază și orice 2 baze au aceleași nr de elemente

Teoremă Fie V un K-spațiu vectorial și $S \subseteq V$ submulțime

1) S este bază în V

2) S este un SLI maximal în V (i.e. $\forall x \in V \setminus S$: $S \cup \{x\}$ nu e SLI)

$\forall x \in V \setminus S$: $x \in \langle S \rangle$

3) S este un SG minimal pentru V ($\forall x \in S$: $\langle S \cup \{x\} \rangle \neq V$)

Dem (1) ⇒ (2) : știm S este SLI + SG pt V

Fie $x \in V \setminus S$. Știm $\langle S \rangle = V$

avem $x \in \langle S \rangle$ ⇒ ~~S este~~ | ⇒ S este SLI maximal

Teorema (Steinitz)

Fie V un K-spațiu vectorial, $S = \{u_1, \dots, u_s\}$ un SLI în V și $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ un SG pt V

Atunci (1) $s \leq m$

(2) După o eventuală renumerotare a vectorilor din S' $\{u_1, u_2, \dots, u_s, v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_m\}$ este tot un SG pt V

Corolar: Orice 2 baze dintr-un sp. vect au acelaşi nr de elemente (~~prod~~ particular, dim V este corect definită)

Dem: (schiţă) Fie B_1, B_2 baze în V. Dacă $|B_1| = |B_2| = \infty$ ✓

Dacă $|B_1| < \infty$ deoarece B_1 este SG $\underset{\text{T. schimbului}}{\Rightarrow}$ orice SLI din V este finit și

$\Rightarrow |B_2| \le |B_1| < \infty$

Aplicăm Th. pt B_2 drept SG pt V şi B_1 drept SLI $\Rightarrow |B_1| \le |B_2|$

$$\left.\begin{array}{l} |B_2| \le |B_1| \\ |B_1| \le |B_2| \end{array}\right| \Rightarrow |B_1| = |B_2|$$

Teoremă: Orice sp. vectorial admite o bază

Dem (schiţă) Să pp că V are un SG finit

$<u_1, u_2, \ldots, u_t> = V$

Caut un SLI maximal

ϕ este SLI în V

Dacă $\exists\, v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$ $\Rightarrow \{v_1\}$ este SLI, Dacă $<v_1> = V \Rightarrow \{v_1\}$ e bază

Dacă $\exists\, v_2 \in V \setminus <v_1> \Rightarrow$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ este SLI

Dacă $<v_1, v_2> = V \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ bază în V gata

Altfel $\exists\, v_3 \in V \setminus \{v_1, v_2\} \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ SLI

După cel mult t paşi am găsit o bază în V

SAU pornim cu S.G $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, renunțăm la vectorii care sunt combinații liniare de ceilalți, la final rămânem cu un SG minimal pt V, deci cu o bază pt V.

Exemple: 1) Pt K^n $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza canonică pt K^n $\dim_K(K^n) = n$

2) $M_{2,2}(\mathbb{R})$: $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ baza canonică pt $M_2(\mathbb{R})$ $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

3) pt $\{0_V\}$ $\emptyset$ este SLI $\Rightarrow$ $\emptyset$ este bază pt $\{0_V\}$

4) $\dim M_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$

Prop (Lema de completare) Fie V un K sp. vectorial

1) Orice SLI se poate extinde la o bază în V

2) Din orice SG pt V se poate extrage o bază

Prop

Fie $V_1 \subseteq V_2 \subseteq V$ sp. vectoriale

1) $\dim V_1 \leq \dim V_2$

2) Dacă $\dim V_1 = \dim V_2 < \infty \Rightarrow V_1 = V_2$

Corolar Fie V un K - sp. vectorial cu $\dim V = n$ și $B \subseteq V$

Atunci 1) Dacă B este SLI cu $|B| = n \Rightarrow B$ este bază pt V

2) Dacă B este SG pt V cu $|B| = n \Rightarrow B$ bază pt V

Cum găsim o bază pornind de la un SG (vectori în $\mathbb{R}^n$)

Căutăm o bază pt subsp vect $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$

Notăm $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{n \times m}$ pt care calculăm o formă Gauss E.

Atunci coloanele lui A pe care se află pivoți în E sunt o bază pt V

În particular, $\dim_{\mathbb{R}} V = \#$ de pivoți din E

<u>Dem</u> Pe coloana i din E nu găsim pivot $\Leftrightarrow v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$

$\not\leftrightarrow$ găsim pivot $\Leftrightarrow v_i \notin \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$

$v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$

$\Downarrow$

$\left(\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & \\ v_1 & v_2 & \dots & v_{i-1} & v_i \\ | & | & & | & \end{array} \right) \Leftrightarrow$ în FE nu găsim pivot pe ultima col

Coordonatele unui vector într-o bază!

Fie $B = \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ este bază pt $_K V$ cu $\dim V = n$

Fie $x \in V \Rightarrow B$ SG $\Rightarrow \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ cu $x = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

Afirm că acești $(a_1, \dots, a_n)$ sunt unici

CURS - GAL

V este un K - sp. vect

O bază în V = o mulțime SLI + SG pt V

Fie pp că $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază pt V

Atunci $\forall x \in V$ se scrie în mod unic ca o comb liniară din B.

$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ cu $a_1, \dots, a_n \in K$ unici

$[x]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n \rightarrow$ vect coordonatelor lui x în baza B.

Matricea de trecere de la o bază la alta

Fie $_KV$ cu $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ și $B' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ baze în V

$(\dim_K V = n)$

Pt fiecare $j = \overline{1,n}$ scriem $v_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i$, $a_{ij} \in K$ $\forall i,j = \overline{1,n}$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$$ n.n. matrice de trecere de la baza B la baza B'

(coloanele: $[v_1']_B$, $[v_2']_B$, ..., $[v_n']_B$)

Notăm $B \xrightarrow{S} B'$

Obs. Matricea S de trecere este o matrice inversabilă

Pt $x \in V \rightsquigarrow x = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j v'_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right)$

$x = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \alpha'_j) \right) v_i \Leftrightarrow \boxed{[x]_B = S \cdot [x]_{B'}, \forall x \in V}$

$[x]_{B'} = S^{-1} \cdot [x]_B$

Obs Dacă S e matricea de trecere de la $B \xrightarrow{S} B'$

S^{-1} ———— // ———— $B' \xrightarrow{S^{-1}} B$

Ex Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ a.î. $A_1 X = A_2 X \ \forall x \in K^n$

Atunci $A_1 = A_2$

Sol $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$A_1 \cdot e_i = A_2 \cdot e_i \rightarrow col_i(A_2)$

$\left(\ \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = col_i(A_1)$ $\Big| \Rightarrow col_i(A_1) = col_i(A_2) \Rightarrow A_1 = A_2$

Apl liniare !

Def Fie V, W două K-sp. vect. O fct $f: V \to W$ s.n. apl. liniară (sau morfism de sp. vect) dacă

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in V \\ f(a \cdot x) = a \cdot f(x) \end{cases}$$

Dacă în plus f e bij $\Rightarrow$ f este izomorfism de sp. vect. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (V și W sunt sp. vect izomorfe)

CamScanner

Obs $f: V \to W$ este apl. liniară $\Leftrightarrow f(ax+by) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y), \forall a,b \in K$
$\forall x, y \in V$

„f duce comb. lin. în comb. lin."

Exemple

1) Fct $f: V \to W$ este o apl. liniară = morfismul nul
$x \to 0_W$

2) Fct $f: V \to V$ este izomorfism liniar
$x \to x$

3) Fie $A \in M_{mn}(K)$. Definim fct $f: K^n \to K^m$
$v \to Av$ - col cu m linii
v - coloană

Atunci f este apl liniară

Deci Fie $x, y \in K^n, a, b \in K$

$f(ax+by) = A(ax+by) = A(ax) + A(by) = a(Ax) + b(Ay) =$
$= a \cdot f(x) + b \cdot f(y) \Rightarrow$ f apl lin

Obs Orice apl. liniară între 2 sp. vect finit dimensionale, este dată în coordonate de înmulțirea cu o matrice

4) Dacă f apl liniară bijectivă $\Rightarrow f^{-1}$ apl liniară bijectivă

Matricea unei apl. liniare într-o pereche de baze.

Fie $f: V \to W$ o apl. liniară, unde $\dim V = n$
$\dim W = m$

B

$B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bază în V

$B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ bază în W

Pt fiecare vector din B_V calculez imaginea și o exprim în baza B_W punând coordonatele obț. drept coloane într-o matrice

Pt $j = \overline{1,n}$ $\quad f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ cu $a_{ij} \in K$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \underbrace{a_{m1}}_{[f(v_1)]_{B_W}} & \underbrace{a_{m2}}_{[f(v_2)]_{B_W}} & \dots & \underbrace{a_{mn}}_{[f(v_n)]_{B_W}} \end{pmatrix} \overset{not}{\equiv} \underbrace{[f]_{B_V, B_W}}_{\text{matricea lui } f \text{ în perechea de baze } B_V, B_W} \in M_{mn}(K)$$

Fie $x \in V$, $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, $\alpha_j \in K$

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j\right) w_i \Rightarrow [f(x)]_{B_W} = (a_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$[f(x)]_{B_W} = [f]_{B_V, B_W} \cdot [x]_{B_V}, \ \forall x \in V$$

La schimbarea bazelor ~~se modifică~~, în domeniu și codomeniu se modifică și $[f]_{-,-}$

Avem $f : V \to W$ apl liniară $\quad B_V \xrightarrow{S} B_V'$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad B_W \xrightarrow{T} B_W'$

(S, T mat inversabile)

$$[f(x)]_{B_W} = [f]_{B_V, B_W} \cdot [x]_{B_V}$$

$\Rightarrow T\cdot [f(x)]_{B'_W} = [f]_{B_V,B_W} \cdot S \cdot [x]_{B'_V}$

$[f(x)]_{B'_W} = T^{-1}\cdot [f]_{B_V,B_W} \cdot S \cdot [x]_{B'_V}$

Dar $[f(x)]_{B'_V} = [f]_{B'_V,B'_W} \cdot [x]_{B'_V}$

$\Rightarrow \boxed{[f]_{B'_V,B'_W} = T^{-1}[f]_{B_V,B_W} \cdot S}$

Operații cu aplicații liniare

Fie $f, g : V \to W$ apl. liniară

Definim (suma) $f+g : V \to W$
$x \to f(x)$

Ex: $f+g$ este o apl. liniară.

Dacă B_V, B_W baze finite în V, resp. W

$[f+g]_{B_V,B_W} = [f]_{B_V,B_W} + [g]_{B_V,B_W}$

Înmulțirea cu scalari:
pt $a \in K$ și $f : V \to W$ apl. lin.

Definim $a\cdot f : V \to W$

Exe: af este apl. liniară, iar $[a\cdot f]_{B_V,B_W} = a\cdot [f]_{B_V,B_W}$

Compunerea apl. liniare

Fie $f : V \to W$ și $g : W \to L$ apl. lin.
Atunci $g \circ f : V \to L$ este apl. liniară

Dem Fie $x, y \in V$ $a, b \in K$. Atunci

$$(g \circ f)(ax+by) = g(f(ax+by)) \overset{f \text{ apl lin}}{=} g(af(x)+bf(y)) =$$

$$\underset{g \text{ apl lin}}{=} a \cdot g(f(x)) + b \cdot g(f(y)) = a \cdot (g \circ f)(x) + b \cdot (g \circ f)(y) \Rightarrow g \circ f \text{ este apl liniară}$$

Să pp că V, W, L sunt ~~și~~ finit dimensionale, cu bazele B_V, B_W, B_L respectiv

Pt $x \in V$ $\quad x \xrightarrow{A} f(x) \xrightarrow{B} g(f(x))$

$$[x]_{B_V} \xrightarrow{A} [f(x)]_{B_W} \xrightarrow{B} [g(f(x))]_{B_L} = [(g \circ f)(x)]_{B_L}$$

$$[g(f(x))]_{B_L} = B \cdot A \cdot [x]_{B_V}$$

$$[g \circ f]_{B_V, B_L} = [g]_{B_W, B_L} \cdot [f]_{B_V, B_W}$$

Subsp asociate unei aplicații liniare

Fie $f: V \to W$ o apl lin.

Def Numim nucleul lui f (Kernel - Ker f) $\operatorname{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$

$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in V\}$

Prop 1) $\operatorname{Ker} f$ este subsp vect în V

2) $\operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow f$ este inj

3) $\operatorname{Im} f$ este subsp vect în W

4) $\operatorname{Im} f = W \Leftrightarrow f$ e surj

Teorema rang-defect

Dacă $f: V \to W$ este apl liniară și $\dim_K V < \infty$ (finită), atunci

$\Downarrow$

$\underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\text{rangul lui } f} + \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\text{defectul lui } f} = \dim V$

Prop Fie $f: V \to V$ o apl lin. cu $\dim_K V < \infty$ (finită)

Atunci UASE:

(1) f inj

(2) f surj

(3) f bij.

Obs Fie $A \in M_{mn}(K)$ și $f: K^n \to K^n$ apl lin.

$v \to A \cdot v$

Avem $\operatorname{Ker} f \overset{def}{=} \{ v \in K^n \mid A \cdot v = 0 \}$ soluțiile sist liniar omogen cu mat $\Rightarrow \operatorname{Ker} A$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teoremă: Dacă V este un K-sp. vect cu $\dim_K V = n$, at V este izomorf cu K^n

Produsul de spații vectoriale

Dacă V_1, V_2 sunt 2 K-sp vectoriale pe produsul cartezian $V_1 \times V_2 = \{(x, y) : x \in V_1$ și $y \in V_2\}$ avem o structură naturală de K. sp. Vect.

CURS 5 - GAL

Spațiul vectorial factor

Fie $W \subseteq V$ subsp. vect. în V. Induce o relație de echivalență „modulo W"

$\forall x, y \in V: \quad x \sim y \bmod W \Leftrightarrow x - y \in W$

Clasele de echivalență a unui element $\hat{x} = \{y \in V : x \sim y \bmod W\} = x + W$

Spațiul cât (mulțimea factor)

Se notează $V/_W = \{\hat{x} / x \in V\}$ are o structură de K-sp. vectorial cu operațiile:

„+" $\forall \hat{x}, \hat{y} \in V/_W \quad \hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$

„·" $\forall a \in K, \forall \hat{x} \in V/_W \quad a \cdot \hat{x} = \widehat{ax}$

$(V/_W, +)$ grup abelian, grupul factor coresp. subgrupului normal W în V.

Înmulțirea cu scalari este corect definită.

Fie $a \in K$, $x, y \in V$ cu $\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow \widehat{ax} = \widehat{ay}$

$\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow x \sim y \bmod W \Rightarrow x - y \in W \Rightarrow a(x-y) \in W \Rightarrow ax - ay \in W \Rightarrow$
$\Rightarrow \widehat{ax} = \widehat{ay}$

Obs Proiecția canonică

$\pi : V \to V/W$ este

$x \longmapsto \hat{x}$ este apl liniară surjectivă

cu $\operatorname{Ker} \pi = \{x \in V \mid \pi(x) = \hat{0}\} = W$

$\hat{x} = \hat{0}$

$x \sim 0$

$x \in W$

Teoremă Fie $W \subseteq V$ subsp. vect. cu $\dim_K V < \infty$. Atunci

$\dim V/_W = \dim V - \dim W$

Dem. Aplicăm Th rang-defect pt $\pi : V \to V/_W$

$\dim V = \dim \operatorname{Im} \pi + \dim \operatorname{Ker} \pi = \dim V/_W + \dim W$

$\Rightarrow \dim V - \dim W = \dim V/W$

Aplicație/Teorema Grassmann: Fie V_1, V_2 subsp. vect în V, cu $\dim V < \infty$. Atunci

$\dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

$V_1+V_2 = \{x+y : x \in V_1 ~~și~~, y \in V_2\} = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$

Dem Fie funcția $f : V_1 \times V_2 \to V$

$(x, y) \longmapsto x - y$

- această fct f este apl liniară

$f(a(x,y) + b(x', y')) = a f((x,y)) + b \cdot f((x', y'))$

$\forall a, b \in K, \forall (x,y), (x',y') \in V_1 \times V_2$

$\boxed{\operatorname{Im} f = V_1 + V_2}$

$x \in V_1, y \in V_2 \Rightarrow \underset{f(x-y)}{x - y} = x + (-y) \in V_1 + V_2 \Rightarrow Im f \subseteq V_1 + V_2$

$x \in V_1, y \in V_2 \quad x + y = x + (-y) = f((x, -y)) \subseteq Im f \Rightarrow V_1 + V_2 \subseteq Im f \Big| \Rightarrow Im f = V_1 + V_2$

$(x, y) \in Ker f \Leftrightarrow f((x,y)) = 0 \Leftrightarrow x \in V_1 \Rightarrow Ker f = \{(x,x) \mid x \in V_1 \cap V_2\}$

$x \in V_1 \qquad x = y \qquad x \in V_2 \qquad \underline{\underline{Ker}}\ V_1 \cap V_2$

$y \in V_2$

Din TR rang-defect

$\dim(V_1 \times V_2) = \dim Im f + \dim Ker f =$

$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$

~~Teorema fu~~

Teorema fundamentală de izomorfism (TFI) la sp. vect

Fie $f: V \to \underline{W}$ morfism de sp. vectoriale. Aceasta induce un izomorfism de sp vectoriale $\bar{f}: V/_{Ker f} \simeq Im f$, unde $\bar{f}(\hat{x}) = f(x)$, $\forall \hat{x} \in V/W$

Determinanți

Pt $A \in M_n(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \det A \in \mathbb{R}$

$n=1 \quad \det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$

$n=2 \quad \det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

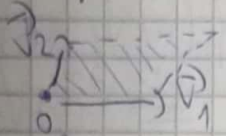
$n=3 \quad 3! = 6$ termeni

$n=4 \quad 4! = 24$ termeni

Motivație geometrică

$V = \mathbb{R}$-sp. vect. al vectorilor din plan fixați într-un pct O.

Reper $\{O, e_1, e_2\}$ în plan



$\text{aria}(v_1, v_2)$ = aria cu semn a paralelogramului cu vârful în O și laturile v_1, v_2

$\text{aria}: V \times V \to \mathbb{R}$

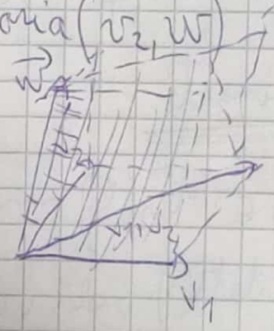
- este liniară în fiecare argument

$\text{aria}(a\vec v_1 + b\vec v_2, \vec w) = a \cdot \text{aria}(\vec v_1, \vec w) + b \cdot \text{aria}(\vec v_2, \vec w)$

$\text{aria}(\vec v, a\vec w_1 + b\vec w_2) = a \cdot \text{aria}(\vec v, \vec w_1) + b \cdot \text{aria}(\vec v, \vec w_2)$

- $\text{aria}(\vec v, \vec v) = 0$
- $\text{aria}(\vec e_1, \vec e_2) = 1$

$\text{aria}(v_1 + v_2, w) = \text{aria}(v_1, w) + \text{aria}(v_2, w)$



~~aria(v_1, v_2)~~

$\vec v_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2$

$\vec v_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2$

$\text{aria}(\vec v_1, \vec v_2) = \text{aria}(a_{11} e_1 + a_{12} e_2, a_{21} e_1 + a_{22} e_2) \overset{\text{liniaritate}}{=}$

$= a_{11}\, \text{aria}(e_1, a_{21} e_1 + a_{22} e_2) + a_{12}\, \text{aria}(e_2, a_{21} e_1 + a_{22} e_2) =$

$= a_{11} a_{21} \underbrace{\cancel{\text{aria}(e_1, e_1)}}_{0} + a_{11} a_{22} \underbrace{\text{aria}(e_1, e_2)}_{1} + a_{12} a_{21} \underbrace{\text{aria}(e_2, e_1)}_{-1} + a_{12} a_{22} \underbrace{\cancel{\text{aria}(e_2, e_2)}}_{0} =$

$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

~~Ne gândim să lucrăm cu aplicații~~

Fie V un K sp vect $\dim V = n$

$f: V \times V \times \dots \times V \to K$

cu propr că

① f este liniară în fiecare argument

② $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ dacă $\exists\, i < j$ cu $v_i = v_j$ | $(\Leftrightarrow)$

$(\Leftrightarrow)$ ① și ② $\Leftrightarrow$ ① și ②': $f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots v_j, v_i \dots v_n)$

$(\Leftrightarrow)$ ① și ②'': $f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, \dots, v_n)\ \forall \sigma \in S_n$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{nr de inv din } \sigma}$

$\varepsilon(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \circ \varepsilon(\sigma_2), \forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n$

Fixăm $e_1, e_2, \dots, e_n$ o bază în V

$\to$ exprimăm $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \forall i = \overline{1,n}$

$$f(v_1 \dots v_n) = \Big(\underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}}_{\overset{\text{def}}{=}\ \det A \text{ determinantul matricei } A}\Big) \cdot f(e_1, \dots, e_n)$$

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \to \\ v_2 \to \\ v_n \to \end{array} A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$$

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ Notăm $T_\sigma(A) = \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots$

$\dots a_{n\sigma(n)} \Rightarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma(A)$

Proprietăți:

① $\det A = \det(A^T)$

② Dacă A are o linie nulă $\Rightarrow \det A = 0$

Dem $L_i(A) = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0 \ \forall j = \overline{1,n} \Rightarrow T_\sigma(A) = 0 \ \forall \sigma \in S_n \Rightarrow$
$\Rightarrow \det A = 0$

③ Dacă B se obț. din A cu înmulțirea unei singure linii cu $\lambda \in K \Rightarrow \det B = \lambda \det A$

Dem $L_i(B) = \lambda \cdot L_i(A)$

$T_\sigma(B) = \lambda \cdot T_\sigma(A) \ \forall \sigma \in S_n \Rightarrow \det B = \lambda \cdot \det A$

④ Dacă putem descompune elementele unei linii din A drept $(b_1+c_1, b_2+c_2, \ldots, b_n+c_n)$ și notăm cu B, resp C, matricile obținute din A înlocuind linia resp cu $b_1 \ldots b_n$ resp cu $(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow \det A = \det B + \det C$

dem

$$L_i(A) \quad \det\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ b_1+c_1, b_2+c_2, \ldots, b_n+c_n \\ \cdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cdots \\ b_1, b_2, \ldots, b_n \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1, c_2, \ldots, c_n \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$T_\sigma(A) = T_\sigma(B) + T_\sigma(C)$$

⑤ Dacă A are 2 linii proporționale $\Rightarrow \det A = 0$

⑥ Dacă B se obține din A permutând 2 linii $\Rightarrow \det B = -\det A$

CamScanner

7) Dacă B se obține din A adunând la linia i linia j înmulțită cu $\lambda \in K \Rightarrow \det B = \det A$

8) Prop 2 – 7 au loc și dacă înlocuim liniile cu coloane

CamScanner

CURS 6 - GAL 02.04.2024

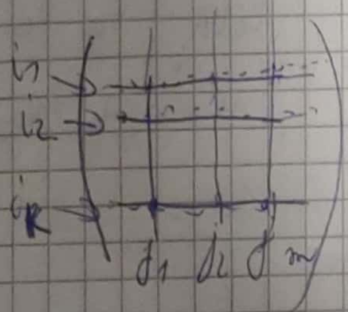
Dezvoltarea determinanților

$p\in\mathbb{N}$ $[p]=\{1,2,\dots,p\}$

- $A\in M_{p,q}(K)$

$I\subset[p]$ $J\subset[q]$ $I=\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$, $J=\{j_1,j_2,\dots,j_m\}$

A_{IJ} matricea obținută din intersecția liniilor I cu coloanele J



card I card J

$|I|=m, |J|=m \Rightarrow \det(A_{IJ})$ n. minor de ordin m a lui A

- $A\in M_n(K)$ matrice pătratică $I\subset[n]$, $J\subset[n]$

$m\le n$ $|I|=|J|=m \Rightarrow \begin{cases} I=\{i_1<i_2<\dots<i_m\} \\ J=\{j_1<j_2<\dots<j_m\}\end{cases}$

$\bar{I}=[n]\setminus I$

$\bar{J}=[n]\setminus I$

$M=\det(A_{I,J})$

$M'=(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_m+j_1+\dots+j_m}\cdot\det(A_{\bar{I},\bar{J}})$

Regula lui Laplace: $A \in M_n(K)$ $m \le n$

$$\det(A) = \sum_{M} M \cdot M'$$

$I = \{i_1, \dots, i_m\}$ — M minor de ordin m cu liniile I

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

CEVA = suma liniilor (indicii) și coloanelor

Luăm $I = \{1, 3\}$ la alegere

Luăm M cu liniile 1, 3 și coloanele pe rând (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4) (3,4) ...

M' cu liniile și coloanele opuse

$$\det A = (-1)^{CEVA} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{CEVA} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{CEVA} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \dots$$

La fel, dacă fixăm coloanele $J = \{j_1, \dots, j_m\}$

Vom avea C_n^m termeni

Exercițiu

$$A = \begin{pmatrix} M_n & N_{n \times p} \\ 0 & P_p \end{pmatrix} \quad \boxed{\det A = \det M_n \cdot \det P_p}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & M_n \\ P_p & N_{p \times n} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (-1)^{np} \cdot \det M_n \cdot \det P_p$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & \\ 0 & a_{22} & \dots & \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot \dots \cdot a_{nn}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \dots & 0 \\ \cancel{0\ 0} & & & \\ a_{1n} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11}\cdot \dots \cdot a_{nn}$$

<u>Caz Particular</u> <u>$m=1$</u>

$I=\{i_1\}$ coloanele pe care le ~~aij~~ alegem $J=\{j\}$ ~~cu $\forall j \neq i_1$~~

$j \in [n]$

$A_{IJ} = a_{ij}$

$A_{ij} = \cancel{\det(A_{\bar{I},\bar{J}})}(-1)^{i+j} \det(A_{\bar{I}\bar{J}})$ complementul algebric al lui a_{ij}.

<u>Ex</u> $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ luăm $i=j=1$

$$A_{i,j} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ Dezvoltarea determinantului după linia i.

$A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ Fixăm un $i \in \overline{1,n}$ și fie $p \neq i$

B se obține din A înlocuind linia p cu linia i

$\det B = 0$ (2 linii egale)

Dezvoltăm $\overset{\det AB}{\text{după}}$ linia p

$a_{i_1} A_{p_1} + \dots + a_{i_n} A_{p_n} = 0 \ \forall p \in [n], p \neq i$

↳ d de pe linia p și coloana 1, … n

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \cdot \begin{pmatrix} A_{p_1} \\ \vdots \\ A_{p_n} \end{pmatrix} = 0, \forall p \in [n], p \neq i$$

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{A^*} = (0, 0 \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{poziția } i}}{\det A}, 0 \dots 0)$$

Calculăm $A \cdot A^* = ?$

$$A = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad l_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$$

liniile lui A

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} l_1 \cdot A^* \\ l_2 \cdot A^* \\ \vdots \\ l_n \cdot A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_n$$

$A^* \cdot A = \det(A) \cdot I_n$ folosind dezvoltarea după coloane

A inversabilă $\Rightarrow \exists B$ a. î. $A^* B = B^* A = I_n$

Teoremă:

$A \in M_n(K)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ și atunci $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

$A, B \in M_n(K)$ $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Regula lui Cramer

$A = (a_{ij})_{i,j = \overline{1,n}} \in M_n(K)$ inversabilă. Atunci sistemul $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ are

soluție unică și $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, unde $\Delta = \det(A)$, Δ_i = det matricei obținută prin înlocuirea coloanei i a lui A cu $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Def $A \in M_{m,n}(K)$ Rangul lui A este ordinul maxim al unui minor nenul al lui A.

$\boxed{\text{T}}$ $Rg(A)$ nu se schimbă la transformări elementare

$A \in M_{m,n}(K)$ $A \xrightarrow[\text{tr. elem.}]{} \begin{pmatrix} 1 & ? & ? & \cdots \\ 0 & 1 & ? & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} = B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} = C$

$Rg(A) = Rg(C)$ = nr de 1-uri de pe diag principală

~~RgB~~

$Rg A = Rg B = \dim_K < c_1(A), \ldots, c_n(A) >$; $c_1(A), \ldots, c_n(A)$ col lui A

$= \dim_K < l_1(A), \ldots, l_m(A) >$ $l_1(A) \ldots l_m(A)$ liniile lui A

$\boxed{\text{T. Kronecker}}$

$A \in M_{m,n}(K)$ are un minor nenul de ordin $r < \min(m,n)$ și toți minorii obținuți prin bordarea sa $= 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = r$

Aplicații la sisteme liniare

$$Ax = b \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \& \; A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

Sistemul are soluție $\Leftrightarrow$ nr de pivoți din forma eșalon a lui A = nr de pivoți din forma eșalon a lui $\overline{A} = (A|b)$

T Capelli: $Ax = b$ compatibil $\Leftrightarrow$ $rg\, A = rg\, \overline{A}$

T. Rouche: Un sistem liniar este compatibil $\Leftrightarrow$ toți determinanții caracteristici sunt 0.

C:

Vezi
CURS 7 - GAL

Vectori și valori proprii. Diagonalizare.

Fie V un K-sp. vectorial cu $\dim_K V = n < \infty$

fie $f: V \to V$ o apl. liniară

Fie B, o bază în $V \Rightarrow [f(v)]_B = A \cdot [v]_B \ \forall v \in V$

unde $A = [f]_B$

Caz particular

λ s.n. „valori proprii"

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ este o matrice diagonală

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

$B \xrightarrow{S} B'$

$[f]_{B'} = S^{-1} \cdot [f]_B \cdot S$

Def: 1) Fie $f: V \to V$ este o apl liniară diagonalizabilă dacă $\exists B$ (*) o bază în V cu $[f]_B = D$ o matrice diagonală

2) Mat $A \in M_n(K)$ spunem că este diagonalizabilă dacă $\exists S \in M_n(K)$ (⊗) inversabilă S^{-1} a.î. $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$ o matrice diagonală

Terminologie

- Spunem că (*) este o bază de diagonalizare pt f
- — II — (⊗) este o matrice de diagonalizare pt mat A.

Obs: Pornind cu $A \in M_n(K)$, notăm $f: K^n \to K^n$, care e o apl.
$v \to A \cdot v$
liniară
$[f]_{canonică} = A$

Conform def: Acest f este apl. lin. diagonalizabilă $\Leftrightarrow \exists B_1$ bază în K^n cu $[f]_{B_1} = D$, o mat diagonală.

Fie S mat de trecere de la baza canonică din $K^n \rightsquigarrow B_1$
Avem relația:
$$D = S^{-1} \cdot \underset{\substack{\parallel \\ A}}{[f]_{canonică}} \cdot S \Rightarrow A \text{ diagonalizabilă}$$

Revenim la $S^{-1} \cdot A \cdot S = D \Leftrightarrow A \cdot S = S \cdot D$

$$A \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ A \cdot v_1 & \dots & A \cdot v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1 \\ A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2 \\ \vdots \\ A \cdot v_n = \lambda_n v_n \end{cases}$$

Așadar: Matricea $A \in M_n(K)$ este diagonalizabilă (peste K) $\Leftrightarrow$ $\exists$ o bază $\{v_1, \dots, v_n\}$ pt K^n și $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ a.î. $\boxed{A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i}$

Def

① Fie $A \in M_n(K)$. Spunem că $\lambda \in K$ este val proprie („eigen value") pt mat A a.î. dacă $\exists_{\neq 0}\, v \in K^n$ a.î. $A \cdot v = \lambda \cdot v \to$
, notăm cu $Spec(A)$ = valorile proprii pt A

② Pt $\lambda \in Spec(A)$, un vector $v \in K^n$ s.n. vector propriu pt λ dacă $A \cdot v = \lambda \cdot v$

Notăm $V_\lambda(A) = \{v \in K^n \mid A \cdot v = \lambda v\} \leq K^n$
exer

①' Spunem că $\lambda \in K$ este o val proprie pt apl. liniară $f: V \to V$ dacă $\exists_{\neq 0} v \in V$ a.î. $\underset{A \cdot v}{f(v)} = \lambda \cdot v \rightarrow$ Notăm $Spec(f)$ val proprii pt f.

②' Fie $\lambda \in Spec(f)$. Spunem că $v \in V$ este vector propriu pt f dacă

$f(v) = \lambda \cdot v \rightsquigarrow V_\lambda(f)$ acești vectori proprii pt λ

Cum găsim vectorii și valorile proprii pt $A \in M_n(K)$?

Fie $A \in M_n(K)$

$v \in V_\lambda(A) \Rightarrow A \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow \lambda v - A \cdot v = 0_V \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda \cdot I_n - A) \cdot v = 0 \Rightarrow v$ este sol pt sist. lin. omogen,

$$\left(\lambda \cdot I_n - A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Deci $\boxed{V_\lambda(A) = \operatorname{Ker} f(\lambda I_n - A)}$

Dacă știm λ aflăm „ușor" $V_\lambda(A)$

λ e val proprie $\Leftrightarrow V_\lambda(A) \neq \{0\} \Rightarrow \dim V_\lambda(A) > 0 \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$

$$\det(\lambda I_n - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_2 - a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \lambda_n - a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda^n \dots \lambda^{n-1} \dots$$

expr polinomială de grad n în λ

Def (1): Polinomul caracteristic al matricei $A \in M_n(K)$ este

$P_A(x) = \det(xI_n - A) \in K[x]$

$$xI_n - A = \begin{pmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & x-a_{nn} \end{pmatrix}$$ mat caracteristică a lui A

Obs $P_A(x)$ are gradul n

$$P_A(x) = x^n - \mathrm{Tr}A \cdot x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

$$P_A(0) = \det(-A)$$

Def 2 Fie $f: V \to V$ apl lin, B o bază în V și notăm $A = [f]_B$. Polinomul caracteristic al lui f se definește ca $P_f(x) = P_A(x) \in K[x]$

Prop: $P_f(x)$ nu depinde de baza aleasă

~~Dem~~

Teoremă: $\lambda \in K$ este val proprie pt $A \in M_n(K) \Leftrightarrow \lambda$ este rădăcină pt polinomul caracteristic pt $P_A(x)$.

$$P_A(x) = \det(xI_n - A) = x^n - \dots\dots$$

În unele cărți: $\det(A - xI_n) = \det(-(xI_n - A)) = (-1)^n \cdot P_A(x)$

Def Fie $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$

Notăm $m_a(\lambda)$ = multiplicitatea lui λ ca rădăcină pentru $P_A(x)$.

↳ „multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ"

$m_g(\lambda) = \dim_K V_\lambda(A)$: multiplicitatea geometrică ~~a val proprii~~ pentru λ

Propoziție

Pentru $\lambda \in Spec(A)$ avem $1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$

Prop:

Fie $v_1, v_2, \dots, v_n$ vectori vectori proprii nenuli pentru valorile proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$

Atunci $v_1, \dots, v_n$ sunt SLI.

Teoremă $\lambda \in K$ este val proprie a $A \in M_n(K) \Leftrightarrow \lambda$ este rad pt $P_A(x)$

$(x-\lambda)^{m_a(\lambda)} / P_A(x)$ dar $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)+1} \nmid P_A(x)$

Consecință

Prop: $\sum\limits_{\lambda \in Spec(A)} V_\lambda(A)$ este o sumă directă de subspații în K^n

Teoremă (Crit de diagonalizare)

Matricea $A \in M_n(K)$ este diagonalizabilă peste $K \Leftrightarrow$

1) $P_A(x)$ se scrie ca produs de factori liniari în $K[X]$

(2) $\forall \lambda \in Spec(A)$ $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$

Corolar: Dacă mat $A \in M_n(K)$, polinomul caracteristic $P_A(x)$ are n rădăcini distincte $\Rightarrow$ A este diag peste K

Teorema: Orice mat sim din $M_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă peste $\mathbb{R}$.

Exemple 1) Arătați că $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ nu e diagonalizabilă.

2) Arătați că $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă.