

Tutoriat 3 - Analiză

1. Dați exemple sau explicați de ce nu există

a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata discontinuă în exact 2 pte.

b) $g: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ mărginită care nu e int. Riemann

c) $g: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ int. Riem. care nu e deriv.

d) $h: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ cont. în 2 pte, & deriv. într-un pte.

e)

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ int. Riemann. $\Leftrightarrow g$ este mărg. & Dine g este neglj. Lebesgue.

$A \subseteq \mathbb{R}$ neglj. Lebesgue $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists (I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de intervale a.î. $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ & $\sum_{m=1}^{\infty} l(I_m) < \varepsilon$.

! Orice mulțime cel mult numărabilă este neglj. Lebesgue.

$$a) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

g cont.

$$g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

$$\text{Fie } x_m = \frac{1}{2\pi m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$g'\left(\frac{1}{2\pi m}\right) = -1 \not\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow g'(0) \neq g'(x_m) \text{ e cont.}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}, & x \neq 0, 1 \\ 0, & x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$f_1(x) = \sin \frac{1}{x} \rightarrow$ discontinuu în 0, dar are P.D.

$f_2(x) = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow$ continuă în 0, dar nu e derivabilă în 0

$f_3(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \rightarrow$ derivabilă dar nu are derivata cont.

$f_4(x) = x^3 \sin \frac{1}{x} \rightarrow$ de 2 ori derivabilă, a doua derivată disp.

b) Suma lui Dirichlet.

c) partea întreagă, ~~dar~~ partea fracționară

d) $\begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x \rightarrow 0 \\ 3x^2 \rightarrow 0 \end{matrix}$$

2) $x_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m + \sqrt{k^2 - k + 1}}$

$\int_{[a,b]} f \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \forall (\Delta_m)_m \text{ cu } \|\Delta_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ și } \forall (\xi_i)_{i=1}^n \text{ răd}$
de pet. intermediare, avem

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k) (x_{k+1} - x_k) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{1 + \sqrt{k^2 - k + 1}} = ?$$

În particular dacă luăm $\Delta_m = (a, a + \frac{b-a}{m}, a + \frac{b-a}{m}, \dots, b)$

$$\xi_i = a + \frac{b-a}{m} i$$

$$\text{Atunci } \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} k)$$

continuare ex 2.

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+5} + \dots + \frac{1}{3n+(3n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3n+3k-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3 + \frac{3k-1}{n}}$$

$$\text{Fie } f(x) = \frac{1}{3+3x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$$

$$\xi_i = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\}$$

integrabilă Riemann

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1}{3+3x} dx$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3 + 3 \cdot \frac{k - \frac{1}{3}}{n}}$$

$$\frac{k-1}{n} \leq \frac{k - \frac{1}{3}}{n} \leq \frac{k}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{3} \leq 0$$

Continuare ex e.

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\sqrt{\frac{k^2 - k + 1}{m^2}}\right)$$

$$\Delta_n = \left(0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1\right)$$

$$\mathcal{Z}_m = \left\{ \sqrt{\frac{k^2 - k + 1}{m^2}} \mid k \in \overline{1, m} \right\}$$

$$\frac{k-1}{m} \leq \sqrt{\frac{k^2 - k + 1}{m^2}} \leq \frac{k}{m}.$$

$$\Leftrightarrow k-1 \leq \sqrt{k^2 - k + 1} \leq k \quad \Leftrightarrow \quad (1)^2.$$

} \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 \leq k^2 - k + 1 \leq k^2 \quad | -k^2$$

$$\begin{aligned} -2k + 1 \leq -k + 1 \leq 0 &\Leftrightarrow 0 \leq k \leq 2k - 1 \quad \textcircled{A} \\ \int_{\text{int. } \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}$$

$$5) f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Decideți dacă f, g, fg integrabile Riemann

Arăt că f este mărginită

$$x \in (0, 1] \quad |f(x)| = \left| x + \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 + 1 = 2.$$

Pt $x=0$ $|f(x)|=3$.

Peim urmasa: $|f(x)| \leq 3$ pt $x \in \{0,1\}$

Dea f e mărginită

f cont pe $(0,1) \Rightarrow D_f \subseteq \{0\} \Rightarrow D_f = \{0\}$

D_f numărabilă

$\Rightarrow D_f$ neglijabilă Lebesgue

Dea f este int \mathbb{R} .

Este g mărginită pe $\{0,1\}$?

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} = +\infty \Rightarrow g$ nemărginită pe $\{0,1\}$

Dim criteriul Lebesgue $\Rightarrow g$ nu este int \mathbb{R}

$$fg(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} + \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sin x} & , x \in (0,1) \\ 3 & , x = 0 \end{cases}$$

Este fg mărg?

Alegem $x_m = \frac{1}{2m\pi + \frac{\pi}{2}}$

$fg(x_m) = \frac{1}{2m\pi + \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2m\pi + \frac{\pi}{2}}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2m\pi + \frac{\pi}{2}}\right)}$

$\lim_{m \rightarrow \infty} fg(x_m) = 1 + \infty = \infty \Rightarrow fg$ nemărginit pe $\{0,1\}$

$\Rightarrow fg$ nu e int \mathbb{R}

6) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-7)^n$ e conv în $x=8$ și div în $x=5$

a) Este seria conv în $x \neq 0$? Date în $x=5$?

b) Aflați valoarea maximă pe care o poate lua raza de conv?

R = raza de conv.

1) seria e conv în 8 și centrată în 7 $\Rightarrow R \geq 1$

2) seria e div în 5 și centrată în 7 $\Rightarrow R \leq 2$ \Rightarrow

Dacă seria ar fi conv în 10 $\Rightarrow R \geq 3$

$\Rightarrow 1 \leq R \leq 2$ c)

\Rightarrow x6

Deci seria nu e conv în 10.

Fie $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (-1)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

în $x=8$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow$ conv.

în $x=5$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ div.

în $x=9$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow$ conv (Leibnitz)

$b_n = \frac{1}{2^n}$

în $x=8$: $\sum \frac{1}{2^n} \rightarrow$ conv.

în $x=5$: $\sum (-1)^n \rightarrow$ div.

în $x=9$: $\sum 1 \rightarrow$ div.

b) R_{\max} = raza maximă de conv.

Cum pt $(a_n)_n$, avem că $R=2 \Rightarrow R_{\max} \geq 2$

dar $R_{\max} \leq 2$.

dim(1)

$\Rightarrow R_{\max} = 2$.

⊙ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cont. a.î. $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ ⊙

Dem că f e bij.

Pie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x_0) = f(y_0) \xRightarrow{(*)} 0 \geq |x_0 - y_0| \geq 0$

$\Rightarrow |x_0 - y_0| = 0$

$\Rightarrow x_0 = y_0 \Rightarrow f \text{ inj. } (1)$

f ~~inj~~ cont

\Rightarrow

$\Rightarrow f$ monotomă. Fără a restrânge generalitatea, putem pp. că $f \uparrow$. At. pt $\forall x \geq y$, avem,

$f(x) - f(y) \geq x - y$

$\Downarrow y = 0.$

$f(x) - f(0) \geq x \quad \forall x \geq 0. / \lim_{x \rightarrow \infty}$

$\Rightarrow f(\infty) - f(0) \geq \infty \Rightarrow f(\infty) \geq \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

$\downarrow x = 0.$

$f(0) - f(y) \geq -y \quad \forall y \leq 0 / \lim_{y \rightarrow -\infty}$

$\Rightarrow f(0) - f(-\infty) \geq \infty \Rightarrow f(-\infty) \leq -\infty \Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = -\infty$

f cont $\Rightarrow f$ are PD.

$\Rightarrow \text{Im } f \subseteq \mathbb{R} = \mathbb{R}$ i.e. f surj. (2)

$\text{Dim } (1), (2) \Rightarrow f \text{ bij.}$