Test de seminar Algebră I - Grupa 103
26.11.2024

Nume și prenume: ____________________

Grupa: ______

1. Pentru fiecare din următoarele obiecte, daţi un exemplu justificat sau explicaţi de ce nu există:

a) Relaţie de echivalenţă pe $[0, 1]$ care determină exact 2024 de clase de echivalenţă. **(1p)**

b) Funcţie $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to [24, 2025]$ care este injectivă. **(1p)**

c) O lege de compoziţie pe $\mathbb{Z}$ care are element neutru dar nu este asociativă. **(1p)**

2. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinaţi toate submulţimile $B \subseteq A$ pentru care numărul de funcţii de la A la B este egal cu numărul de funcţii de la B la A. **(1p)**

3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy$ şi relaţia de echivalenţă pe $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \sim (x', y') \iff f(x, y) = f(x', y')$.

a) Demonstraţi că f este surjectivă şi determinaţi o inversă la dreapta (secţiune) a lui f. **(1p)**

b) Determinaţi (desenaţi) clasele de echivalenţă $\widehat{(0, 0)}$ şi $\widehat{(1, 1)}$. **(1p)**

c) Determinaţi un sistem complet de reprezentanţi pentru $\sim$. Puteţi descrie (desena) $\mathbb{R}^2/\sim$? **(1p)**

4.

a) Fie G un grup finit. Demonstraţi că mulţimea $\{g \in G \mid g \neq g^{-1}\}$ are un număr par de elemente. **(0,5p)**

b) Folosind subpunctul precedent, deduceţi că orice grup G cu $|G|$ par conţine un element de ordin 2. **(1,5p)**

c) Demonstraţi că singurul morfism de grupuri $(\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ este cel nul. **(1p)**