Șiruri de numere reale

Def

Fie $A \subset \mathbb{N}$ o mulțime numărabilă
$\hookrightarrow (\exists) g: A \to \mathbb{N}$, bijectivă)

O func. $f: A \to \mathbb{R}$ se numește (s.n.) șir de nr. reale

Notații

1) $f(n) \overset{not}{=} x_n \ (\forall) n \in A$

2) ținând cont de notația 1) și de def. precedentă, obținem șirul de nr. reale $(x_n)_{n \in A}$

Obs

1) Atunci când A se subânțelege, vom scrie doar $(x_n)_n$

2) În general $A = \mathbb{N}$ sau $A = \mathbb{N}^*$, cazuri în care vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sau $(x_n)_{n \geq 0}$ sau $(x_n)_n$)

Def

Fie $(x_n) \subset \mathbb{R}$

1) Spunem că $(x_n)_n$ este convergent dacă $(\exists) l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n \to \infty} x_n = l$

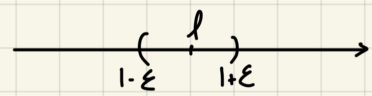
2) Spunem că $(x_n)_n$ este divergent dacă nu e convergent (nu are limită, sau limita lui este $\pm\infty$)

Monotonia:

1) crescător : $x_n \leq x_{n+1}$
2) descrescător : $x_n \geq x_{n+1}$
3) strict cresc. : $x_n < x_{n+1}$
4) strict desc. : $x_n > x_{n+1}$
5) monoton : cresc. sau desc.
6) strict monoton: strict cresc. sau strict desc.
7) mărginit dacă $a \leq x_n \leq b$ sau $(\exists)\ M > 0$ a.î. $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ avem $|x_n| < M$

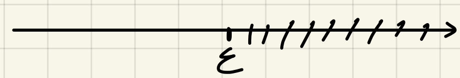
Def

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $l \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita l și scriem că $\lim_{n \to \infty} x_n = l$ dacă $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon \iff x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$



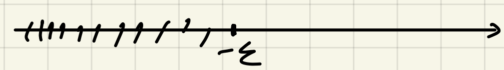
Def

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$
Spunem că $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ și scriem $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$ dacă $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n > \varepsilon$



Def

Spunem că $(x_n)_n$ are lim. $+\infty$ și scriem $\lim_{n \to \infty} = -\infty$ dacă $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n < -\varepsilon$



Criteriul lui Weierstrass

Orice șir de nr. reale monoton și mărginit este convergent

Obs

Reciproca teoremei precedente este falsă

Exc

Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$
a) Arătați că x_n nu e monoton
b) că $(x_n)_n$ e conv.

Sol: a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$

$x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}$
$x_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$
$x_{2k+2} = \frac{1}{2k+2}$

$x_{2k} > x_{2k+1}$ și $x_{2k+1} < x_{2k+2} \Rightarrow$ șirul nu este monoton

b) Avem $x_n = a_n \cdot b_n \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, unde $a_n = \frac{1}{n} \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $b_n = (-1)^n \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
$|b_n| = |(-1)^n| = 1 < 2, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b_n =$ mărginit

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = 0 \Rightarrow x_n =$ convergent $\square$
(„0 · mărg." = 0)

Prop

Orice șir de nr. reale convergent este mărginit.

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ și $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci:

1) $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$
2) $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot x_y) = x \cdot y$
3) $\lim_{n\to\infty} (a x_n) = ax$
4) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

1) $(\lim_{n\to\infty} x_n = 0) \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0)$
2) $(\lim_{n\to\infty} x_n = x) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|)$
3) Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ și $(y_n)_n$ e mărginit, atunci $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = 0$ ("$0 \cdot$ mărginit $= 0$")

Criteriul cleștelui

Fie $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î. $(\exists)\ n_0 \in \mathbb{N}$ cu prop. că $(\forall) n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n \leq z_n$

Presupunem că $(\exists)\ l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = l$, atunci și $\lim_{n\to\infty} y_n = l$

Exc

Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

Arătați că nu e convergent

Sol

Arătăm că $(x_n)_n$ nu e șir Cauchy

$(x_n)_n$ e șir Cauchy $\Leftrightarrow (\forall) \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$

$(x_n)_n$ nu e șir Cauchy $\Leftrightarrow (\exists)\ \varepsilon_0 > 0, (\forall)\ k \in \mathbb{N}$, $(\exists)\ m_k, n_k \in \mathbb{N}^*$, $m_k \geq k$, $n_k \geq k$, $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$

$$x_m - x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m} \cdot (m-n)$$

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}(2n-n) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Alegem $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$

Fie $k \in \mathbb{N}$

Alegem $m_k = 2(k+1)$, $n_k = k+1$

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = \frac{1}{n_{k+1}} + \dots + \frac{1}{2n_k} \geq \frac{1}{2n_k}(2n_k - n_k) = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

Deci x_n nu este șir Cauchy $\Rightarrow$ nu e convergent

Temă:

Fie $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$

Det. $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ și dacă $(\exists)$ limita

$$x_{2n} = 1 + \frac{2n}{4n+1} \to 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2n+1} = 0 - \frac{2n+1}{4n+2} = -\frac{1}{2}$$

$\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$

$\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x_n$

Șiruri Cauchy

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_n$ e șir Cauchy dacă $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall) m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$

Terminologie

Șirurile Cauchy se mai numesc și șiruri fundamentale.

Teoremă

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Urm. afir. sunt echiv.:

1) $(x_n)_n$ e convergent
2) $(x_n)_n$ e șir Cauchy

Lema lui Cesaro

Orice șir de nr. reale mărginit admite măcar un subșir convergent

Limitele extreme ale unui șir de nr. reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Fie $x \in \overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Spunem că x e punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă $(\exists)\ (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ (subșir) a.î. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

Notație: $L((x_n)_n) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x$ e punct limită al lui $(x_n)_n\}$

Prop

$(\exists)$ un cel mai mare punct limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$ și un cel mai mic punct limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$

Def

1) Cel mai mare punct limită al șirului $(x_n)_n$ se numește limita superioară a sa și se notează $\limsup_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim}\, x_n$
2) Cel mai mic se numește limita inferioară și se notează $\liminf_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim}\, x_n$

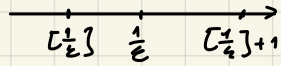
Prop

1) $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$
2) $(x_n)_n$ are lim. $\Leftrightarrow \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$

Sol: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \overset{def}{\iff} (\forall)\varepsilon>0, (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \ge n_\varepsilon, |x_n - 0| < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$

Căutăm n_ε a.î. $(\forall)\, n \ge n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$



$|x_n - 0| < \varepsilon \iff |\frac{1}{n}| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

Alegem $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$

$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

$(\forall)\, n \ge n_\varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Deci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

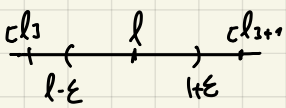
2. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ și $l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n = l$

Arătați că $l \in \mathbb{Z}$

Sol: P.R.A. că $l \notin \mathbb{Z}$

Știm: $\lim_{n\to\infty} x_n = l \iff (\forall)\varepsilon > 0, (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \ge n_\varepsilon, |x_n - l| < \varepsilon$

$|x_n - l| < \varepsilon \iff x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$



Alegem $\varepsilon > 0$ a.î. $[l] < l - \varepsilon$ și $l + \varepsilon < [l] + 1$

Un astfel de ε există deoarece $l - [l] > 0$ și $[l] + 1 - l > 0$

Deci $\varepsilon \in (0, \min\{l - [l], [l] + 1 - l\})$

Avem: 1) $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$

2) $x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon), (\forall)\, n \ge n_\varepsilon$

3) $x_n \in \mathbb{Z}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ contradicție

Prin urmare $l \in \mathbb{Z}$

1) Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$
2) Dacă $l>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$
3) Dacă $l=1$, atunci criteriul nu decide

3. Fie $a>0$
Det. $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a^n$
Aplicăm criteriul raportului pt. șiruri cu term. strict poz.

Sol: Fie $x_n=n\cdot a^n$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+a}{n}=a$$

1) Dacă $a<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a^n=0$
2) Dacă $a>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a^n=+\infty$
3) Dacă $a=1$, atunci crit. nu decide

Fie $a=1$

$x_n=n\cdot 1^n=n$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$

Am obținut:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot a^n=\begin{cases}0, & \text{dacă } a\in(0;1)\\ +\infty, & \text{dacă } a\in[1;+\infty)\end{cases}$$

Criteriul radicalului pt. șiruri cu term. poz.

Fie $(x_n)_n\subset[0;+\infty)$ a.î. $(\exists)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\overset{not}{=}l\in[0;\infty]$

1) Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$
2) Dacă $l>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$
3) Dacă $l=1$, crit. nu decide

4. Fie $a,b\in(0;+\infty)$. Det. $\lim\limits_{n\to\infty}(a\cdot n^2+5n+8$

Aplicăm crit. ...

1)

2)

3) $a=b \Rightarrow x_n=\left(\dfrac{an^2+5n+8}{an^2+3n+2}\right)^n$

$x_n=\left(1+\dfrac{2n+6}{an^2+3n+2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\left(\left(1+\frac{2n+6}{an^2+3n+2}\right)^{\frac{an^2+3n+2}{2n+6}}\right)^{\frac{2n+6}{an^2+3n+2}\cdot n}=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n+6}{an^2+3n+2}\cdot n}=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n^2+6n}{an^2+3n+2}}=e^{\frac{2}{a}}=\sqrt[a]{e^2}$$

Atunci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

5. Det. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Sol: Fie $x_n = n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

6. Det. $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ și precizați dacă $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde

a) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$

Sol: $x_{2k} = \frac{1+(-1)^{2k}}{2} + (-1)^{2k} \cdot \frac{2k}{2(2k)+1} = 1 + \frac{2k}{4k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x_{2k+1} = \frac{1+(-1)^{2k+1}}{2} + (-1)^{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{4k+3} = 0 - \frac{2k+1}{4k+3} \xrightarrow[k\to\infty]{} -\frac{1}{2}$

$\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$

Deci $L((x_n)_n) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

$\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$

$\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$

$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow (\nexists) \lim\limits_{n\to\infty} = x_n$

b) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$

Sol: $x_{4k} = 1-2+3 = 2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 2$

$x_{4k+1} = 1+2-3 = 0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$x_{4k+2} = 1-2-3 = -4 \xrightarrow[k\to\infty]{} -4$

$x_{4k+3} = 1+2+3 = 6 \xrightarrow[k\to\infty]{} 6$

$L((x_n)_n) = \{-4, 0, 2, 6\}$

$\mathbb{N} = 4\mathbb{N} \cup (4\mathbb{N}+1) \cup (4\mathbb{N}+2) \cup (4\mathbb{N}+3)$

$\underline{\lim}\, x_n = -4$

$\overline{\lim}\, x_n = 6$

$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow (\nexists) \lim\limits_{n\to\infty} = x_n$

Serii de numere reale

Def

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n = x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n = \sum_{k=p}^{n} x_k$, $(\forall) n \geq p$

Perechea $((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n \geq p})$ se numește serie de numere reale

Notație

În contextul def. precedente, notăm

$\sum_{n=p}^{\infty} x_n \overset{not}{=} ((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$

$\Vert not$

$\sum_{n\geq p} x_n \overset{not}{=} \sum_n x_n$

Obs

În general $p=0$ sau $p=1$, cazuri pe care le vom considera în definiții, teoreme, etc.

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, o serie de nr. reale ($s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$)

Def

1) elementele șirului $(x_n)_n$ se numesc termenii seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$
2) elementele șirului $(s_n)_n$ se numesc sumele parțiale ale seriei
3) dacă $(\exists) \lim_{n\to\infty} s_n \overset{not}{=} \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, acest α se numește suma seriei și vom scrie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha$
4) Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e convergentă dacă $(s_n)_n$ e convergent
5) Spunem că e divergentă dacă $(s_n)_n$ e divergent

Prop $\longrightarrow$	**Corolar (criteriul suficient de divergență)**
Dacă $\sum_n x_n$ e conv., atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$	Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci $\sum_n x_n$ e divergentă

Obs

Folosind doar afirmația „$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$", nu putem decide dacă $\sum_n x_n$ e div. sau conv.

Exc.

Det. sumele seriilor de mai jos și precizați dacă sunt conv. sau div.:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$

($0^0 = 1$ prin convenție)

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$p = 1$

$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) =$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \in \mathbb{R}$

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ seria e conv.

b) $x_n = q^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

$p = 0$

$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

$s_n = \begin{cases} n+1, & q = 1 \\ 1\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}, & q \neq 1 \end{cases}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Dacă $q = 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, deci $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n =$ div.

Fie $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0, & q \in (-1;1) \\ +\infty, & q > 1 \\ (\nexists), & q \leq -1 \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & q \in (-1,1) \\ \infty, & q > 1 \\ (\nexists), & q \leq -1 \end{cases}$

Dacă $q \in (-1;1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ = conv.

Dacă $q > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ = div.

Dacă $q \leq -1$, $\nexists \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ = div

Obs

În aplicații, putem folosi (fără justificare), convergențele urm. serii de nr. reale:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ — conv. ; $q \in (-1,1)$; div. ; $q \in \mathbb{R} \setminus (-1;1)$

(seria geometrică)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ — conv ; $\alpha > 1$; div. ; $\alpha \leq 1$

(seria armonică generalizată)

Obs

q și α din obs. precedentă sunt nr. reale care <u>nu</u> depind de n

Prop

Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$, 2 serii de nr. reale și $a \in \mathbb{R}^*$

1) Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt conv., atunci $\sum_n (x_n \pm y_n)$ e conv.
   În plus, $\sum_n (x_n \pm y_n) = (\sum_n x_n) \pm (\sum_n y_n)$
2) Dacă $\sum_n x_n$ e conv. (resp. div.), atunci $\sum_n (a x_n)$ e conv. (resp. div.)
   În plus, $\sum_n (a x_n) = a(\sum_n x_n)$
3) Dacă $\sum_n x_n$ e conv. și $\sum_n y_n$ e div., atunci $\sum_n (x_n \pm y_n)$ e div.
4) Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt div., atunci $\sum_n (x_n \pm y_n)$ poate fi sau conv. sau div.

1. Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} \ell$

a) Dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv.
b) Dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e div.
c) Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide

2. Fie seria $\sum_n x_n$ $x_n \geq 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} \ell$

a) Dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv.
b) Dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e div.
c) Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide

3. **Criteriul Raabe-Duhamel**

Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n > 0$, a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \overset{not}{=} \ell$

a) Dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e div.
b) Dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv.
c) Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide

4. **Criteriul condensării**

Dacă $(x_n)_n \subset [0;\infty)$ este un şir desc., atunci seriile $\sum_n x_n$ şi $\sum_n 2^n x_{2^n}$ au aceeaşi convergenţă

5. **Criteriul de comparaţie cu inegalităţi**

Fie seriile $\sum_n x_n$ şi $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, a.î. $(\exists)\, n_0 \in \mathbb{N}$ cu prop. că $(\forall)\, n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n$

1) Dacă $\sum_n y_n$ e conv., atunci şi $\sum_n x_n$ e conv.
2) Dacă $\sum_n x_n$ e div., atunci şi $\sum_n y_n$ e div

6. **Criteriul de comparaţie cu limită**

Fie seriile $\sum_n x_n$ şi $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0$, $y_n > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{not}{=} \ell \in [0, +\infty]$

1) Dacă $\ell \in (0;\infty)$, atunci $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$ (i.e. au aceeaşi convergenţă (natură))
2) Dacă $\ell = 0$ şi $\sum_n y_n$ e conv. $\Rightarrow \sum_n x_n$ e conv.
3) Dacă $\ell = \infty$ şi $\sum_n y_n$ e div. $\Rightarrow \sum_n x_n$ e div.

Sunt echivalente:

1) $\sum_n x_n$ e conv.
2) $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, $(\forall)\, m \in \mathbb{N}^*$ avem $|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}| < \varepsilon$

Criterii de conv. pt. serii cu term. oarecare

Def

Fie $\sum x_n$ o serie de nr. reale. Spunem că $\sum_n x_n$ este absolut convergentă dacă seria $\sum_n |x_n|$ e conv.

Prop

Orice serie de nr. reale absolut convergentă este convergentă.

Obs

Reciproca propoziţiei precedente nu e adevărată

1. **Criteriile Abel-Dirichlet**

I. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ şi $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.:

i) $(x_n)_n$ este desc. şi $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$
ii) $(\exists)\, M > 0$ a.î. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, avem $|y_0 + y_1 + \ldots + y_n| \leq M$

$\Rightarrow$ Atunci $\sum_n x_n \cdot y_n$ e conv.

II. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ şi $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.:

i) $(x_n)_n$ este monoton şi mărg.
ii) $\sum_n y_n$ e conv.

$\Rightarrow$ Atunci $\sum_n x_n \cdot y_n$ e conv.

2. **Criteriul lui Leibniz**

Fie $(x_n)_n \subset [0;\infty)$ a.î. x_n e desc şi $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci $\sum_n (-1)^n x_n$ e conv.

a) Arătați că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e conv.

b) Arătați că $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e div.

Sol:

a) Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

x_n este desc. și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$a_n = (-1)^n x_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

Conform crit. lui Leibniz avem că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e conv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ = div. (serie armonică generalizată cu $\alpha = 1$)

Exc. Studiați conv. seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot 3n} \cdot \frac{1}{2^n}$

Sol

$x_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)} \cdot \frac{1}{2^n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n+3)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)} \cdot 2^n = \frac{3n(3n+1)}{(3n+3)(3n-2)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3n+1}{3n+3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \overset{\text{crit. rap.}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

e conv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$

Sol:

Fie $x_n = \frac{1}{2^n + 3^n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$y_n = \frac{1}{2^n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$x_n < y_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ conv. (serie geom. cu $q = \frac{1}{2}$)

Conform criteriului de comp. cu inegalități, avem că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e conv.

c) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$

Sol: $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^3}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2}} = 1\cdot 1 = 1 \in (0; +\infty)$$

Conf. Crit. Comp. cu lim.

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ = div. (serie armonică generalizată cu $\alpha = \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ = div.

a) $x_n = (1+\frac{1}{n})^n \sin\frac{n\pi}{3}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

Sol

$x_{6k} = (1+\frac{1}{6k})^{6k} \sin\frac{\overset{2}{\cancel{6}}k\pi}{\cancel{3}_1} = (1+\frac{1}{6k})^{6k} \sin(2k\pi) = e\cdot 0 = 0 \xrightarrow[k\to\infty]{} \boxed{0}$

$x_{6k+1} = (1+\frac{1}{6k+1})^{6k+1} \sin\frac{6k\pi+\pi}{3} =$

$= \dots \sin(2k\pi+\frac{\pi}{3}) = e\cdot\sin\frac{\pi}{3} = e\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\sqrt{3}e}{2}$

$x_{6k+2} = (1+\frac{6}{6k+2})^{6k+2} \sin\frac{2\pi}{3} = e\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\sqrt{3}}{2}e$

$x_{6k+3} = \dots \sin\pi = 0 \to 0$

$x_{6k+4} = \dots \sin\frac{4\pi}{3} = \dots \sin(\frac{6\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}) = \sin(2\pi-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e$

$x_{6k+5} = \dots \sin\frac{5\pi}{3} = \dots \sin(\frac{6\pi}{3}-\frac{\pi}{3}) = e\cdot\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e$

$$\boxed{\mathbb{N}^* = 6\mathbb{N}^* \cup (6\mathbb{N}+1) \cup \dots \cup (6\mathbb{N}+5)}$$

$\underline{\lim}\, x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}e$

$\overline{\lim}\, x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}e$

$L((x_n)_n) = \{0, \frac{\sqrt{3}}{2}e, -\frac{\sqrt{3}}{2}e\}$

$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow (\not\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $\square$

b) $x_n = \frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2+1}, (\forall) n\in\mathbb{N}$

Sol: $-1 \le \cos\frac{n\pi}{2} \le 1, (\forall) n\in\mathbb{N}$

$-\frac{n}{n^2+1} \le x_n \le \frac{n}{n^2+1}, (\forall) n\in\mathbb{N}$

$\searrow \ \downarrow \ \swarrow$
0

2. Det. suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ și prec. dacă e conv

Sol:

$x_n = \frac{n}{(n+1)!}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+1)!} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{1!} + \cancel{\frac{1}{2!}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n!}} - \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} - \dots - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = 1$, seria este conv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n, a>0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n\sqrt{n}}, a>0$

d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

a) Sol: $x_n=\frac{\sqrt{n-1}}{n^2}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

Fie $y_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

$x_n<y_n, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

$\sum_{n=1}^{\infty}y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ = conv. (serie arm. gen., $\alpha=\frac{3}{2}$) □

b) Sol:

$x_n=\left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)^n$

Aplic. crit. rad.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{2}\to\frac{a}{2}$

Avem.:

1) Dacă $\frac{a}{2}<1$, $a\in(0;2)$, => ser. e conv.
2) Dacă $\frac{a}{2}>1$, seria e div.
3) Dacă $a=2$, crit. nu decide

Fie $a=2$

$x_n=\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}$, care $\overset{\text{dem. că}}{\text{are}}$ $\lim\neq 0$ => seria e div.

c) Sol:

$x_n=\frac{a^n}{n\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt[n]{n\sqrt{n}}}=a$

1 (vezi sem. 1)

Conf. crit. rad:

1) Dacă $a<1$ (ie. $a\in(0;1)$), seria e conv.
2) Dacă $a>1$ (ie. $a\in(1;+\infty)$), seria e div.
3) Dacă $e=1$, crit. nu decide

Fie $a=1$

$x_n=\frac{1^n}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n\sqrt{n}}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty}x_n=1\neq 0$ => seria e div. conform. crit. suf. div.

d) Sol: $x_n=\frac{1}{n\ln n}, (\forall) n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$(x_n)_n$ desc. și poz.

Conf. crit. condensării.

$\sum_{n=1}^{\infty}x_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}2^n x_{2^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}2^n x_{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\cancel{2^n}\cdot\frac{1}{\cancel{2^n}\ln 2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{n}$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ - div.

$\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{n}$ = div. $\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}x_n$ = div.

e) Sol: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n+3)}\cdot x^n, x>0$

Aplic. crit. rap.:

$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{7\cdot 13}\cdot\ldots\cdot(6n+7)}{\cancel{8\cdot 13}\cdot\ldots\cdot(5n+8)}\cdot\frac{\cancel{8\cdot 13}\cdot\ldots\cdot\cancel{(5n+3)}\cdot x^{n+1}}{\cancel{7\cdot 13}\cdot\ldots\cdot\cancel{(6n+1)}x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{6n+7}{5n+8}\cdot x=\frac{6}{5}\cdot x$

1) Dacă $\frac{6}{5}x<1$ (ie. $x\in(0,\frac{5}{6})$) => seria e conv.
2) Dacă $\frac{6}{5}x>1$ (ie. $x\in(\frac{5}{6},0)$) => seria e div.
3) Dacă $x=\frac{5}{6}$, crit. nu decide

Fie $x=\frac{5}{6}$

$x_n=\frac{7\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot\ldots\cdot(5n+3)}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

Aplicăm. crit. Raabe-Duhamel

$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{5n+8}{6n+7}\cdot\frac{6}{5}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{30n+48}{30n+35}-\frac{30n+35}{30n+35}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{13}{30n+35}=\frac{13}{30}<1$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ = div.

Fie $X \neq \emptyset$. O mulțime $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ s.n. topologie pe X dacă:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2) $(\forall) D_1, D_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$
3) $(\forall)(D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ avem $\bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$

$\{D_i \mid i \in I\}$

Def

Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe X.
Perechea $(X, \mathcal{T})$ s.n. **spațiu topologic**.

Ex:

1) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.
Perechea $(X, \mathcal{T})$ e sp. top.
2) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.
Perechea $(X, \mathcal{T})$ e sp. top.
3) Fie $X = \mathbb{R}$ și $\mathcal{T} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$
Perechea $(X, \mathcal{T})$ e sp. top.

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top.

Def

Fie $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita x, (sau că converge către x) în raport cu top. $\mathcal{T}$

și scriem $\lim_{n\to\infty} x_n \overset{\mathcal{T}}{=} x$ (sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}} x$) dacă
$(\forall)\ V \in \mathcal{V}_x$, $(\exists)\ n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_V$, avem $x_n \in V$

Obs

Sintagma „în raport cu top. $\mathcal{T}$" = „în spațiul topologic $(X, \mathcal{T})$"

Obs

Fie sp. top. $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
$(\forall)\ x \in X$, $\mathcal{V}_x = \{X\}$

Fie $(x_n)_n \subset X$. Considerăm $x, y \in X$, $x \neq y$.
Avem $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ și $\lim_{n\to\infty} x_n = y$

Deci, într-un sp. top., limita unui șir nu este neapărat unică!

Def

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top.

1) O mulțime $D \subset X$ s.n. **mulțime deschisă** dacă $D \in \mathcal{T}$
2) O mulțime $F \subset X$ s.n. **mulțime închisă** dacă $X \setminus F \overset{def}{=} CF \in \mathcal{T}$
3) Fie $x \in X$. O mulțime $V \subset X$ s.n. **vecinătate** a lui x dacă $(\exists)\ D \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D \subset V$

Notație: pt. orice $x \in X$, notăm $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid V$ vecinătate a lui $x\}$

Def

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top. O mulțime $K \subset X$ s.n. **mulțime compactă** dacă $(\forall)(D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ a.î. $K \subset \bigcup_{i\in I} D_i$, $(\exists)\ J \subset I$, J finită, cu prop. că avem incluziunea $K \subset \bigcup_{j\in J} D_j$

(„Din orice acoperire deschisă a lui K se poate extrage o acoperire deschisă și finită a lui K)

Analiza topologică a unei mulțimi

Def

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top., $A \subset X$ și $x_0 \in X$. Spunem că x_0 este:

1) **punct interior** al lui A, dacă $A \in \mathcal{V}_{x_0}$
(i.e. $(\exists)\ D \in \mathcal{T}$ a.î. $x_0 \in D \subset A$)
2) **punct aderent** (de aderență) al lui A, dacă $(\forall)\ V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap A \neq \emptyset$
3) **punct de acumulare** al lui A, dacă $(\forall)\ V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$
4) **punct frontieră** a lui A dacă este punct aderent și nu este punct interior a lui A
5) **punct izolat** dacă nu este punct aderent sau de acumulare

Notații

1) $\mathring{A} = \{x \in X \mid x$ punct interior a lui $A\}$
(interiorul lui A)
2) $\bar{A} = \{x \in X \mid x$ punct aderent a lui $A\}$
(închiderea / aderența lui A)
3) $A' = \{x \in X \mid x$ punct de acum. a lui $A\}$
(mulțimea derivată a lui A)
4) $Fr(A) = \partial A = \{x \in X \mid x$ punct. frontieră a lui $A\}$
(frontiera lui A)
5) $Izo(A) = \overset{\cdot}{A} = \{x \in X \mid x$ pct. izolat a lui $A\}$

Def

Fie $(X, \mathcal{T})$ sp. top. Spunem că $(X, \mathcal{T})$ este **sp. top. separat** (sau Hausdorff) dacă $(\forall)\ x, y \in X$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_x$, $(\exists)\ W \in \mathcal{V}_y$ a.î. $V \cap W = \emptyset$

Prop

Într-un sp. top. separat, limita oricărui șir este unică metrică (sau distanță) pe X dacă:

1) $d(x,y) \geq 0$, $(\forall)\, x,y \in X$
2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$, $(\forall)\, x,y \in X$
3) $d(x,y) = d(y,x)$, $(\forall)\, x,y \in X$
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $(\forall)\, x,y,z \in X$ (inegalitatea triunghiului)

Def

Fie $X \neq \emptyset$ și $d : X \times X \to \mathbb{R}$ o metrică pe X.
Perechea (X,d) s.n. spațiu metric.

Ex: 1) $d(x,y) = \begin{cases} 0 \,;\, x = y \\ 1 \,;\, x \neq y \end{cases}$

2) $X = \mathbb{R}$ și $d(x,y) = |x-y|$
(X,d) e sp. metric

3) $X = \mathbb{R}^n$ și $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$,
$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

4) $X = \mathbb{R}^n$ și $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$,
$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
(distanța euclidiană)

5) Fie $X = \mathbb{R}^n$ și $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$,
$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = \overline{1,n}\}$

2) Fie $(D_i)_{i \in I} \subset \tau_d$
$\underline{\bigcup_{i \in I} D_i \in \tau_d}$

Dacă $\bigcup_{i \in I} D_i = \emptyset$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \tau_d$
P.P. că $\bigcup_{i \in I} D_i \neq \emptyset$
$(\Rightarrow (\exists)\, i_0 \in I$ a.î. $D_{i_0} \neq \emptyset)$

Fie $x \in \bigcup_{i \in I} D_i$. Deci $(\exists)\, j_0 \in I$ a.î. $x \in D_{j_0}$
$D_{j_0} \in \tau_d \Rightarrow (\exists)\, r > 0$ a.î. $B(x,r) \subset D_{j_0}$
Avem $B(x,r) \subset D_{j_0} \subset \bigcup_{i \in I} D_i$

Din 1), 2), 3) $\Rightarrow (X, \tau_d)$ e sp. top.

Obs

Fie (X,d) un sp. metric.
Sp. top. (X, τ_d) este separat (Hausdorff)

Def

Fie (X,d) un sp. metric, $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$.
Spunem că $(x_n)_n$ are limita x în raport cu metrica d (sau că $(x_n)_n$ conv. către x în rap. cu d) și scriem $\lim_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$ sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$ dacă
$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ (i.e. $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$ avem $d(x_n,x) < \varepsilon$)

1) $B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$
(bila deschisă)

2) $B[x,r] = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$
(bila închisă)
$= \overline{B}(x,r)$

T

Fie (X,d) un sp. metric și $\tau_d = \{A \subset X \mid (\forall)\, x \in A, (\exists)\, r > 0 \text{ a.î. } B(x,r) \subset A\} \cup \{\emptyset\}$
perechea (X, τ_d) e sp. top.

Dem:

1) $\emptyset \in \tau_d$
$\underline{X \in \tau_d}$
Fie $x \in X$
Fie $r > 0$, avem $B(x,r) \subset X$
$\Rightarrow X \in \tau_d$

2) Fie D_1 și $D_2 \in \tau_d$
$\underline{D_1 \cap D_2 \in \tau_d}$

Dacă $D_1 = \emptyset$ sau $D_2 = \emptyset \Rightarrow D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \tau_d$
P.P. că $D_1, D_2 \neq \emptyset$
Dacă $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ atunci $D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \tau_d$
P.P. că $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$
Fie $x \in D_1 \cap D_2$
Avem $x \in D_1$ și $x \in D_2$
$D_1 \in \tau_d \Rightarrow (\exists)\, r_1 > 0$ a.î. $B(x, r_1) \subset D_1$
$D_2 \in \tau_d \Rightarrow (\exists)\, r_2 > 0$ a.î. $B(x, r_2) \subset D_2$
Alegem $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$
Avem $B(x,r) \subset B(x,r_1) \subset B(x,r_2) \subset D_1 \cap D_2$

Def

Topologia τ_d se numește topologia indusă de metrica d

Obs

Dându-se un spațiu metric (X,d), putem construi sp. top. (X, τ_d).
Ca atare, are sens să vb. despre mulțimi deschise, închise, vecinătăți, mulțimi compacte, etc. într-un sp. metric (referindu-ne la topologia indusă de acea metrică)

Obs

Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul metric (X,d)".

Obs

În orice sp. metric, limita oricărui șir este unică.

a) $\sum_{n=1} \tau(n) x^n$, $x>0$, unde $\tau(n)$ = nr. div. lui n

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+n}{3^n+n^3}$

a) $1 \le \tau(n) \le n \ / \cdot x^n$

$x^n \le \tau(n) x^n \le n x^n$

$x \le \sqrt[n]{\tau(n) x^n} \le (\sqrt[n]{n}) x$

$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$

x

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+n}{3^n+n^3}$

$x_n = \frac{a^n+n}{3^n+n^3}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$x_n = \frac{a^n}{3^n+n^3} + \frac{n}{3^n+n^3}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Fie $a_n = \frac{a^n}{3^n+n^3}$ și $b_n = \frac{n}{3^n+n^3}$

$b_n < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\sum_n \frac{1}{n^2}$ e conv (serie arm. gen. cu $\alpha = 2$)

Cf. crit. comp. cu ineg., avem că $\sum_n b_n$ e conv.

Deci $\sum_n x_n \sim \sum_n a_n$

Considerăm $c_n = \frac{a^n}{3^n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

calc. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim \frac{\cancel{a^n}}{3^n+n^3} \cdot \frac{3^n}{\cancel{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n(1+\frac{n^3}{3^n})} = 1 \in (0,\infty)$

Conf. crit. de comp. cu lim că $\sum_n a_n \sim \sum_n c_n$

$\sum_n c_n = \sum_n \frac{a^n}{3^n} = \sum_n \left(\frac{a}{3}\right)^n \begin{cases} \text{conv. dacă } a \in (0,3) \\ \text{div. dacă } a \in [3,\infty) \end{cases}$ (serie geom. cu $q = \frac{a}{3}$)

Pt. a dem. că $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$ putem folosi crit rap. pt. șiruri cu term. strict poz.

$x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} x^n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}} \cdot \frac{n\sqrt{n+1}}{x^n} = \frac{x \cdot n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}} = \frac{x \cdot n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Conf. crit. rap. avem:

1) Dacă $x<1$, at. seria e conv.

2) Dacă $x>1$, at. seria e div.

3) Dacă $x=1$, crit. nu decide

Fie $x=1$, $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{n}}{\cancel{n}\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1 \in (0,+\infty)$

Conf. crit. de comp. cu lim.

$\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$

$\sum_n y_n = \sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ = conv. (serie arm. gen., $\alpha = \frac{3}{2}$)

$\Rightarrow \sum_n x_n$ = conv.

$x_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{(\cos\frac{1}{n})(\cos\frac{1}{n+1})} = \dfrac{\sin(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})}{(\cos\frac{1}{n})(\cos\frac{1}{n+1})} = \dfrac{\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n+1}\cdot\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}} - \dfrac{\sin\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n+1}} = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1}, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$s_n = x_1+x_2+\ldots+x_n = tg 1 - \cancel{tg\frac{1}{2}} + \cancel{tg\frac{1}{2}} - \cancel{tg\frac{1}{3}} + \ldots + \cancel{tg}\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1} = tg 1 - tg\frac{1}{n+1}, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = tg 1 \in\mathbb{N}^*$ deci $\sum\limits_n x_n$ = conv. □

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}}$

Arătăm că $x_n > 0, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$, avem $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \in (0;\frac{\pi}{2})$, deci $x_n > 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

Considerăm $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\underbrace{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \in (0;+\infty)$

Conf. crit. comp. cu lim.

$\Rightarrow \sum\limits_n x_n \sim \sum\limits_n y_n$

$\sum\limits_n y_n = \sum\limits_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ = div. (serie arm. gen. cu $\alpha = \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow \sum\limits_n x_n$ = div.

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^{\lambda}}, x\in\mathbb{R}, \lambda\in\mathbb{R}_+^*$

Folosim crit. Abel-Dirichlet (I)

Fie $x_n = \frac{1}{n^{\lambda}}$ și $y_n = \cos(nx)$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

x_n = desc. și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (1)

$(\exists)\, M>0$ a.î. $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*, |y_1+\ldots+y_n| \le M$

M nu poate depinde de n, dar poate depinde de x

Fie $z = \cos x + i\sin x$

$z^2 = \cos 2x + i\sin 2x$ (form lui Moivre)

. . . . .

$z^n = \cos nx + i\sin nx$

"+"

$y_1+\ldots+y_n = \cos x + \ldots + \cos nx = Re(z+z^2+\ldots+z^n)$

P.p. că $z\neq 1$, i.e. $x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$z+z^2+\ldots+z^n = z\cdot\dfrac{z^n-1}{z-1} = \dfrac{z^{n+1}-z}{z-1} = \dfrac{\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x - \cos x - i\sin x}{\cos x + i\sin x - 1} = \dfrac{\cos(n+1)x - \cos x + i(\sin(n+1)x - \sin x)}{\cos x - 1 + i\sin x} =$

$= \dfrac{-\cancel{2}\sin\frac{n+2}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x + i\cdot\cancel{2}\sin\frac{n}{2}x\cdot\cos\frac{n+2}{2}x}{\cancel{1}-\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2}+\cancel{1}+i\cdot\cancel{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\overset{-i}{\sin\frac{n+2}{x}} + i\cos\frac{n+2}{x}}{\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{n+2}{2}x + i\sin\frac{n+2}{2}x}{\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}} =$

$= \dfrac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2})^{\cancel{n+2}\, n+1}}{\cancel{\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}}} = \dfrac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2})^{n+1} =$

$= \dfrac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot(\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x)$

$\cos x = \cos(2\cdot\frac{x}{2}) = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$

$\sin x = \sin 2\cdot\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$y_1+\ldots+y_n = Re(z+z^2+\ldots+z^n) = \dfrac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{n+1}{2}x$

Deci $|y_1+\ldots+y_n| = \dfrac{|\sin\frac{n}{2}\cdot x|}{|\sin\frac{x}{2}|}\cdot|\cos\frac{n+1}{2}x| \le \dfrac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$, Alegem $M = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

Avem, pt. $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$, $|y_1+\ldots+y_n| \le M$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ Cf. crit. Abel-Dirichlet (I) că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\cdot y_n$ e conv.

$\sum_{n=1} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ div. dacă $\alpha \in (0,1]$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos\frac{1}{n})\cos n}{n}$

-Curs 4-

Prop. ale interiorului unei mulțimi

Fie $(X,\mathcal{T})$ un sp. top., $A \subset X$ și $B \subset X$

1. $\mathring{A} \subset A$

Justificare

Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \in \mathcal{V}_x$

Deci $(\exists)\ D \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D \subseteq A$.

Deci $x \in A$, adică $\mathring{A} \subset A$

2. $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$

J „⊂" (dublă incluziune)

Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \in \mathcal{V}_x$

Deci $(\exists)\ D \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D \subset A$.

Așadar $x \in \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$, i.e. $\mathring{A} \subset \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$ (1)

„⊃"

Fie $x \in \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$. Deci $(\exists)\ D_1 \in \mathcal{T}, D_1 \subset A$ a.î. $x \in D_1$.

Avem că $(\exists)\ D_1 \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D_1 \subset A$,

așadar $A \in \mathcal{V}_x$, adică $x \in \mathring{A}$,

ie $\bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D \supset \mathring{A}$ (2)

(1) + (2) ⇒ $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$

3. $\mathring{A} \in \mathcal{T}$ (interiorul este mult. deschisă)

J $\mathring{A} \in \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D \Rightarrow \mathring{A} \in \mathcal{T}$

Obs

Din prop. 2 și 3, rezultă că $\mathring{A}$ este cea mai mare (în sensul incluziunii) mulțime deschisă inclusă în A

4. A deschisă $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

„⇐"

J $\left.\begin{array}{l}\mathring{A} \text{ deschisă } (\mathring{A} \in \mathcal{T}) \\ A = \mathring{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A = \text{deschisă}$

„⇒"

$\left.\begin{array}{l}A \text{ deschisă} \\ A \subset A \\ \mathring{A} \text{ este cea mai mare mult. deschisă incl în } A\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}A \subset \mathring{A} \\ \mathring{A} \subset A\end{array}\right\} \Rightarrow A = \mathring{A}$

5. Dacă $A \subset B$, atunci $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

J

6. a) $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$

b) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

J

Prop

Fie (X,d) un sp. metric, $A \subset X$ și $x_0 \in X$

1. $x_0 \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\ r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \subset A$
2. $x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall)\ r > 0$, avem $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$
3. $x_0 \in A' \Leftrightarrow (\forall)\ r > 0$, avem $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$
4. $x_0 \in Fr(A) = \partial A \Leftrightarrow x_0 \in \bar{A} \setminus \mathring{A}$
5. $x_0 \in Izo(A) = {}'A \Leftrightarrow x_0 \in \bar{A} \setminus A'$

Obs

Incluziunea de la 6.b) poate fi strictă

Obs

Din 2 și 3, rezultă că $\bar{A}$ este cea mai mică mult. închisă ce include pe A

Prop. ale aderenței unei mulțimi

Fie $(X,\mathcal{T})$ un sp. top., $A \subset X$ și $B \subset X$

1. $A \subset \bar{A}$

J Fie $x \in A$.

Fie $V \in \mathcal{V}_x$

Avem $x \in V$ și $x \in A$. Deci $V \cap A \neq \emptyset$,

i.e. $x \in \bar{A}$, i.e. $A \subset \bar{A}$ □

2. $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$

„⊂"

J Fie $x \in \bar{A}$. Arătăm că $x \in \bigcap_{\substack{F \text{ înc.} \\ F \supset A}} F$

P.R.A. că $x \notin \bigcap_{\substack{F \text{ înc.} \\ F \supset A}} F$

Deci $(\exists)\ F_1$ închisă, $F_1 \supset A$, a.î. $x \notin F_1$

$\Rightarrow x \in CF_1 \overset{def}{=} X \setminus F_1$

$\left.\begin{array}{l}F_1 \text{ înc.} \Rightarrow CF_1 \in \mathcal{T} \text{ (deschisă)} \\ x \in CF_1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}CF_1 \in \mathcal{V}_x \\ x \in \bar{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A \cap CF_1 \neq \emptyset$

Contradicție cu $F_1 \supset A$. Prin urmare $x \in \bigcap F$ ie. $\bar{A} \subset \bigcap F$

„⊃"

Fie $x \in \bigcap_{\substack{F \text{ înc.} \\ F \supset A}} F$. Arătăm că $x \in \bar{A}$

P.R.A. că $x \notin \bar{A} \Rightarrow (\exists)\ V_1 \in \mathcal{V}_x$ a.î. $A \cap V_1 = \emptyset$

$V_1 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow (\exists)\ D_1 \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D_1 \subset V_1$

$V_1 \cap A = \emptyset \Rightarrow D_1 \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset CD_1 = X \setminus D_1$

$\left.\begin{array}{l}D_1 \in \mathcal{T} \Rightarrow CD_1 \text{ închisă} \\ CD_1 \supset A \\ x \in \bigcap_{\substack{F \text{ înc.} \\ F \supset A}} F\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x \in CD_1 \\ \text{dar } x \in D_1\end{array}$ - contradicție

$\Rightarrow \bigcap F \subset \bar{A}$

$\Rightarrow \bar{A} = \bigcap F$

3. $\bar{A}$ închisă

J $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ înc.} \\ F \supset A}} F \Rightarrow C\bar{A} = C(\bigcap F) = \bigcup_{\substack{F \text{ înc.} \\ F \supset A}} CF \in \mathcal{T} \Rightarrow \bar{A}$ închisă

4. A închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

„⇐"

J $\left.\begin{array}{l}\bar{A} \text{ închisă} \\ A = \bar{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A$ închisă

„⇒"

$\left.\begin{array}{l}A \text{ închisă} \\ A \subset A \\ \bar{A} \text{ - cea mai mică mult. închisă ce îl conține pe } A\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}A \subset \bar{A} \\ \bar{A} \subset A\end{array}\right\} \Rightarrow A = \bar{A}$

5. Dacă $A \subset B$, atunci $\bar{A} \subset \bar{B}$ J

6. a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ J

b) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

Obs

Incl. de la 6.b) poate fi strictă

2) $\mathring{\complement A} = \complement \bar{A}$

Prop ale mulțimii punctelor de acumulare

Fie (X, τ) un sp. top. și $A \subset X$

1) $A' \subset \bar{A}$

Fie $x \in A' \Rightarrow (\forall) V \in \mathcal{V}_x,\ V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$
$\Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$
$\Rightarrow x \in \bar{A}$, i.e. $A' \subset \bar{A}$ $\square$

2) $\bar{A} = A \cup A'$

"$\supset$"

$\left.\begin{array}{l} A \subset \bar{A} \\ A' \subset \bar{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup A' \subset \bar{A}$ (1)

"$\subset$"

Fie $x \in \bar{A} \Rightarrow (\forall) V \in \mathcal{V}_x,\ V \cap A \neq \emptyset$

P.R.A. că $x \notin A \cup A'$. Deci $x \notin A$ și $x \notin A'$

$x \notin A' \Rightarrow (\exists) V_1 \in \mathcal{V}_x$ a.î. $V_1 \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$

$\left.\begin{array}{l} x \in \bar{A} \\ V_1 \in \mathcal{V}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_1 \cap A \neq \emptyset \\ V_1 \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \end{array}\right| \Rightarrow V_1 \cap A = \{x\}$, contradicție cu $x \notin A$

Așadar $x \in A \cup A'$, i.e. $\bar{A} \subset A \cup A'$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \bar{A} = A \cup A'$ $\square$

1) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\exists)(x_n)_n \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

2) $x \in A' \Leftrightarrow (\exists)(x_n)_n \subset A \setminus \{x\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$

Obs

$(\mathbb{R}, d)$ e sp. metric unde $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

Considerăm sp. metric $(\mathbb{R}, d)$, $x \in \mathbb{R}$ și $r > 0$

1) $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x,y) < r\} =$
$= \{y \in \mathbb{R} \mid y \in (x-r; x+r)\}$

2) $B[x,r] = \overline{B}(x,r) = [x-r; x+r]$

Obs

În sp. metric $(\mathbb{R}, d)$:

1) Intervalele de forma $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ și (a,b) sunt mulț. deschise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$

2) Intervalele de forma $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ și $[a,b]$ sunt mulț. închise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$

Exc

Faceți analiza topologică a mulț. $A \subset \mathbb{R}$, unde: (i.e. det. $\mathring{A}, \bar{A}, A', Fr(A)$ și $Izo(A)$)

a) $A = \mathbb{Q}$

Sol:

1) $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists) r > 0$ a.î. $\underbrace{B(x,r)}_{(x-r,\,x+r)} \subset \underbrace{A}_{\mathbb{Q}}$

Avem $\mathring{A} = \emptyset$, deoarece între orice 2 nr. reale, există o inf. de nr. raționale și iraționale.

2) $\bar{A} = ?$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall) r > 0$, avem $\underbrace{B(x,r)}_{(x-r,\,x+r)} \cap \underbrace{A}_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$

$\bar{A} \subset \mathbb{R}$

Arătăm că $\mathbb{R} \subset \bar{A}$

Fie $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$

Avem $(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, deoarece între orice 2 nr. reale, există o inf. de nr. raționale și iraționale.

Prin urmare, $x \in \bar{A}$, adică $\mathbb{R} \subset \bar{A}$

Așadar $\bar{A} = \mathbb{R}$

3) $A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow (\forall) r > 0$, $(x-r, x+r) \cap \{\mathbb{Q} \setminus \{x\}\} \neq \emptyset$

$A' \subset \mathbb{R}$

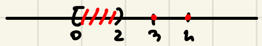
Arătăm că $\mathbb{R} \subset A'$

Fie $x \in \mathbb{R}$. Fie $r > 0$. Avem $(x-r, x+r) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ deoarece între orice 2 nr. reale, există o inf. de nr. raționale și iraționale.

Prin urmare, $x \in A'$, adică $\mathbb{R} \subset A'$. Așadar $A' = \mathbb{R}$

4) $Fr(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

5) $Izo(A) = {}'A = \bar{A} \setminus A' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ $\square$



$A \subset \overline{A'}$ ... $\overline{A} \subset [0,2) \cup \{3,4\}$

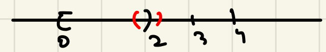
$[0,2] \cup \{3,4\}$ - mult. închisă ce conține A

$\Rightarrow \overline{A} \subset [0,2] \cup \{3,4\}$

Deci $[0,2) \cup \{3,4\} \subset \overline{A} \subset [0,2] \cup \{3,4\}$

Studiem dacă $2 \in \overline{A}$

$2 \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall)\ r>0$, avem $(2-r, 2+r) \cap A \neq \{0\}$



Deci $2 \in \overline{A}$

1) $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\ r>0$, a.î. $(x-r, x+r) \subset A$

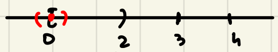
$\mathring{A} \subset A = [0,2) \cup \{3,4\}$

$(0,2)$ - mult. deschisă incl. în A $\Big\} \Rightarrow (0,2) \subset \mathring{A}$

Avem $(0,2) \subset \mathring{A} \subset [0,2) \cup \{3,4\}$

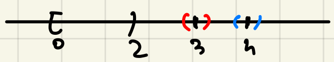
Studiem dacă $0 \in \mathring{A}$, $3 \in \mathring{A}$, $4 \in \mathring{A}$

$0 \in A \Leftrightarrow (\exists)\ r>0$ a.î. $\underbrace{(0-r, 0+r)}_{(-r,r)} \subset A$



Deci $0 \notin \mathring{A}$

$3 \in A \Leftrightarrow (\exists)\ r>0$ a.î. $(3-r, 3+r) \subset A$



Deci $3 \notin \mathring{A}$

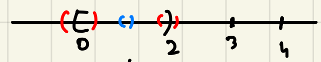
Analog $4 \notin \mathring{A}$

3) $A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow (\forall)\ r>0$, avem $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$A' \subset \overline{A} = [0,2] \cup \{3,4\}$

Fie $x \in [0,2]$



Deci $x \in A'$, i.e. $x \in [0,2]$

$3 \in A' \Leftrightarrow (\forall)\ r>0$, avem $(3-r, 3+r) \cap (A \setminus \{3\}) \neq \emptyset$

Deci $3 \notin A'$

Analog $4 \notin A'$

Așadar $A' = [0,2]$

4) $Fr(A) = \partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{0,2,3,4\}$

5) $Izo(A) = {}'A = \overline{A} \setminus A' = \{3,4\}$ $\square$

1. Stud. conv. seriilor

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos\frac{1}{n})\cos n}{n}$

Sol

Vom aplica crit. Abel-Dirichlet (II)

Fie $x_n = \cos\frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$y_n = \frac{\cos n}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$-1 \leq x_n \leq 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)_n$ - mărg.

$\left.\begin{array}{l} \underset{(0,\frac{\pi}{2})}{x} \longmapsto \underset{(0,1)}{\cos x} \text{ este desc.} \\ \frac{1}{n} \in (0, \frac{\pi}{2}), (\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \\ (\frac{1}{n})_n \text{ - desc.} \end{array}\right\} \Rightarrow (x_n)_n$ - cresc.

Deci $(x_n)_n$ - monoton și mărg., $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ (1)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ - conv. (vezi ult. ex. din sem. 3) (2)

Din (1) și (2) avem că $\sum_n x_n \cdot y_n$ - conv.

Sol

$x_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$z_n = \frac{1}{n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Vom folosi criteriul lui Leibniz pt. $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ - conv. (crit. lui Leibniz)

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - div. (serie arm. gen., $\alpha = 1$)

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ = div. $\square$

2. a) Arăt. că $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

b) Stud. conv. seriei $\sum_n (1-\cos\frac{1}{n}) x^n, x > 0$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = [\frac{0}{0}] \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\frac{x}{n}} = \frac{1}{2}$

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

a) Arăt. că d_1 e metrică pe $\mathbb{R}^n$

1) $d_1(x,y) \geq 0, (\forall) x,y \in \mathbb{R}^n$ (evident, fiind sumă de module)

2) $d_1(x,y) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \iff (\forall) i \in \overline{1,n}$, avem $|x_i - y_i| = 0 \iff$

$\iff (\forall) i \in \overline{1,n}$, avem $x_i = y_i \iff$

$\iff x = y$

3) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x)$, $(\forall) x,y \in \mathbb{R}^n$

4) Fie $x,y,z \in \mathbb{R}^n$

Arătăm că $d_1(x,z) \leq d_1(x,y) + d_1(y,z)$

$d_1(x,z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^{n} |\underbrace{x_i - y_i} + \underbrace{y_i - z_i}| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = d_1(x,y) + d_1(y,z)$

Aşadar d_1 este metrică pe $\mathbb{R}^n$

Sol: "$\Rightarrow$"

$\lim_{k\to\infty} x^k \overset{d_1}{=} x \Rightarrow \lim_{k\to\infty} d_1(x^k, x) = 0$

$\Rightarrow (\forall)\, \varepsilon>0, (\exists) k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, k \geq k_\varepsilon$, avem $d(x^k, x) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall)\, \varepsilon>0, (\exists) k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, k \geq k_\varepsilon$, avem $\sum_{i=1}^{n} |x_1^k - x_1| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall)\, \varepsilon>0, (\exists) k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, k \geq k_\varepsilon, (\forall)\, i \in \overline{1,n}$, avem $|x_i^k - x_i| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i, (\forall)\, i \in \overline{1,n}$

"$\Leftarrow$"

$\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i \Rightarrow \lim_{k\to\infty} (x_i^k - x_i) = 0, (\forall)\, i \in \overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |x_i^k - x_i| = 0, (\forall)\, i \in \overline{1,n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\lim_{k\to\infty} |x_i^k - x_i|) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} d_1(x^k, x) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^k \overset{d_1}{=} x$

$\left(\frac{2}{n}, \frac{2n+1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d_1} (0,2)$

Ineg. Cauchy-Buniakowski-Schwarz (CBS)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $d_2 \overset{not}{=} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

Arăt. că d_2 e metrică pe $\mathbb{R}^n$

Sol

$(\forall)\, x,y \in \mathbb{R}^n$

1) $d(x,y) \geq 0$ (evident, fiind radical)

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow (\forall)\, i \in \overline{1,n}$, avem $(x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (\forall)\, i \in \overline{1,n}$, avem $x_i = y_i$

$\Leftrightarrow x = y$

3) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = d(y,x)$

4) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

Arătăm că $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\underbrace{x_i - y_i} + \underbrace{y_i - z_i})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((x_i - y_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i) + (y_i - z_i)^2\right)} =$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2} \underset{C.B.S.}{\leq} \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}_{a^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}_{b^2} + 2 \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}}_{a} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}}_{b}} = \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}\right)^2}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2} = d_2(x,y) + d_2(y,z)$

Deci d_2 e metrică pe $\mathbb{R}^n$

Arătați că $(\exists)\, a, b, c \in (0, \infty)$ a.î. $a\, d_1(x,y) \leq d(x,y) \leq b\, d_1(x,y), (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}^n$

Sol

$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \cdot 1 \underset{C.B.S.}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} =$

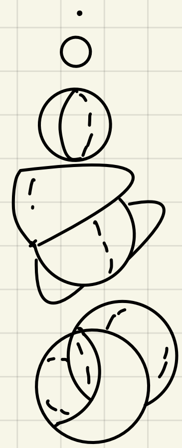
$= \sqrt{n}\, d(x,y), (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}^n$

Alegem $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right)^2} =$

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = d_1$

Alegem $b = 1$ $\square$



sp. metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$

$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

Obs

Dacă $n = 1$, atunci $d_2(x,y) = |x-y|$

Def

d_2 s.n distanța euclidiană a lui $\mathbb{R}^n$

Notație

Atunci când nu este pericol de confuzie, notăm $d \overset{not}{=} d_2$

Def

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Spunem că A e mărg. dacă $(\exists)\, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ a.î. $A \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Prop

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Mulțimea A este mărg. $\Leftrightarrow$ $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^n$, $(\exists)\, r > 0$ a.î. $A \subset B(x,r)$

Teorema Heine-Borel

În sp. metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$, o mulț. $K \subset \mathbb{R}^n$ e compactă $\Leftrightarrow$ este închisă și mărginită.

Exc

Studiați dacă mulț. K de mai jos sunt compacte în sp. met. $(\mathbb{R}, d)$

a) $K = \mathbb{N}$

Sol

K nu e mărg. $\Rightarrow$ nu e compactă

b) $K = (0;1)$

Sol

$\overline{K} = [0;1] \not\subset K \Rightarrow K$ nu e închisă $\Rightarrow$ nu e compactă

(închiderea)

c) $K = [0,1] \cup \{2\}$

Sol

$\left.\begin{array}{l} K \subset [0,2] \Rightarrow K = \text{mărg.} \\ \overline{K} = K \Rightarrow K = \text{închisă} \end{array}\right\} \Rightarrow K = \text{compactă}$

Prop

Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ sp. metric, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$, $l \in Y$ și $f : A \to Y$. Sunt echiv:

1) $\lim_{x \to a} f(x) = l$

2) $\forall (x_n)_n \subset A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim_{n \to \infty} x_n \overset{d_1}{=} a$, avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} l$

Obs

Pe $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se introduce distanța $\overline{d} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $\overline{d}(x,y) = |\overline{f}(x) - \overline{f}(y)|$, unde $\overline{f}$ este func. bij. def. pe $\overline{\mathbb{R}}$ cu valori în $[-1,1]$ prin $\overline{f}(x) = \begin{cases} -1, & x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = +\infty \end{cases}$

Perechea $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ este sp. metric (și sp. top. Hausdorff / separat)

$(\overline{\mathbb{R}}, \tau_{\overline{d}})$

Limite de funcții

Fie $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ sp. top., $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$, $l \in Y$ și $f : A \to Y$

Spunem că f are lim. l în a și scriem $\lim_{x \to a} f(x) = l$ dacă $(\forall)\, W \in \mathcal{V}_l$, $(\exists)\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $(\forall)\, x \in V \cap A$, $x \neq a$, avem $f(x) \in W$

Obs

În general, limita unei func. într-un punct nu este unică.

Obs

Dacă sp. top. (Y, τ_2) e separat (Hausdorff), atunci $l \in Y$ e unic

Prop

Fie (X, τ) sp. top., $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A'$, $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ și $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ a.î. $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ și $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$. Atunci:

1) $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to a} (f+g)(x) = l_1 + l_2$

2) $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = l_1 l_2$

3) $\lim_{x \to a} |f|(x) = \lim_{x \to a} |f(x)| = |l_1|$

4) $\lim_{x \to a} (-f)(x) = \lim_{x \to a} (-f(x)) = -l_1$

5) $l_1 = +\infty$ și $l_2 > -\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$

6) $l_1 = -\infty$ și $l_2 < \infty \Rightarrow \lim_{x \to a} (f+g)(x) = -\infty$

7) $l_1 = +\infty$ și $l_2 > 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$

8) $l_1 = +\infty$ și $l_2 < 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$

9) $(\exists)\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $V \subset A$ și $f(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in V$ și $l_1 \in \mathbb{R}^*$ $\Rightarrow \lim_{x \to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{l_1}$

10) $(\exists)\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $V \subset A$ și $f(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in V$ și $l_1 \in \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim_{x \to a} \left(\frac{1}{f}(x)\right) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ldots}{x} = 1$

5) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a\in(0;\infty)$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^r - 1}{x} = r$, $r\in\mathbb{R}$

Fie $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2)$ sp. top., $a\in X$ și $f: X\to Y$.

F e cont. în a dacă $(\forall)\, W\in \mathcal{V}_{f(a)}$ avem $f^{-1}(W)\in\mathcal{V}_a$

Def

În contextul def. precedente spunem că f e cont. (pe X) dacă f e cont. în orice $x\in X$

Obs

Fie $(X,\mathcal{T})$ sp. top., $\emptyset\neq A\subset X$ și $\mathcal{T}_A = \{D\cap A \mid D\in\mathcal{T}\}$.
$(A,\mathcal{T}_A)$ e sp. top.
↳ topologia indusă de A

Prop

Fie $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2)$ sp. top., $\emptyset\neq A\subset X$, $a\in A$ și $f: A\to Y$.
Sunt echiv:

1) f - cont. în a
2) $(\forall)\, W\in\mathcal{V}_{f(a)}$, $(\exists)\, V\in\mathcal{V}_a$ a.î. $f(V\cap A)\subset W$

Ex

Fie $(X,\mathcal{T}_1)$ și $(Y,\mathcal{T}_2)$ sp. top. Fie $y_0\in Y$

1) Func. identitate $1_X: X\to X$ este cont.
2) Func. const. $f: X\to Y$, $f(x) = y_0$ e cont.

Prop

Fie $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2),(Z,\mathcal{T}_3)$ sp. top., $a\in X$, $f: X\to Y$, cont. în a și $g: Y\to Z$ cont. în $f(a)$.
Atunci $g\circ f: X\to Z$ e cont. în a

Prop

Fie $(X,\mathcal{T}_1)$ un sp. top., $\emptyset\neq A\subset X$, $a\in A$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ un sp. top., $f: X\to Y$

1) f - cont. în a, atunci $f|_A: A\to Y$ e cont. în a
2) Dacă $A\in\mathcal{V}_a$ și $f|_A: A\to Y$ e cont. în a, atunci $f: X\to Y$ e cont. în a

obs

1) Fie $(X,\mathcal{T})$ - sp. top., $a\in X$ și $f: X\to\mathbb{R}$.
Atunci f - cont. în a $\Leftrightarrow$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\, V_\varepsilon\in\mathcal{V}_a$, a.î. $(\forall)\, x\in V_\varepsilon$, avem $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

2) Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ sp. metrice, $a\in X$ și $f: X\to Y$.
Atunci f e cont. în a $\Leftrightarrow$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\, x\in X$ cu prop. că $d_1(x,a)<\delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x),f(a))<\varepsilon$
(i.e. $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\, x\in X$ cu prop. că $x\in B(a,\delta_\varepsilon)$, avem $f(x)\in B(f(a),\varepsilon)$)

3) Fie $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}$, $a\in A$ și $f: A\to\mathbb{R}$. Atunci f e cont. în a $\Leftrightarrow$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\, x\in A$ cu prop. că $|x-a|<\delta_\varepsilon$, avem $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

4) Fie $\emptyset\neq A\subset\overline{\mathbb{R}}$ a.î. $+\infty\in A$ și $f: A\to\mathbb{R}$.
Atunci f e cont. în $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$, a.î. $(\forall)\, x\in A$ cu prop. că $x>\delta_\varepsilon$, avem $|f(x)-f(+\infty)|<\varepsilon$

5) Fie $\emptyset\neq A\subset\overline{\mathbb{R}}$ a.î. $+\infty\in A$ și $f: A\to\overline{\mathbb{R}}$ a.î. $f(+\infty)=+\infty$
Atunci f e cont. în $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\, x\in A$ cu prop. că $x>\delta_\varepsilon$ avem $f(x)>\varepsilon$

1) f cont. în a
2) $(\forall)(x_n)_n \subset X$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n \overset{d_1}{=} a$
avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} f(a)$

Prop
Fie $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ sp. top., $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A \cap A'$ și $f: A \to Y$. Sunt echiv:
1) f - cont. în a
2) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Prop
Fie $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ - sp. top. și $f: X \to Y$. Sunt echiv:
1) f continuă
2) $(\forall) D \subset Y$, o deschisă, avem că $f^{-1}(D) \subset X$ e deschisă
$(D \in \tau_2)$ $(f^{-1}(D) \in \tau_1)$
3) $(\forall) F \subset Y$, o închisă, avem că $f^{-1}(F) \subset X$ e închisă
4) $(\forall) B \subset Y$, avem $f^{-1}(\bar{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$
5) $(\forall) A \subset X$, avem $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Atunci $f+g$, $f \cdot g$ și $|f|$ sunt cont. în a

Dacă, în plus, $(\exists) V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(x) \neq 0$, $(\forall) x \in V$, atunci $\frac{1}{f}: V \to \mathbb{R}$ e cont. în a

Prop
Fie (X,τ_1) un sp. top., $\emptyset \neq K \subset X$ o mult. compactă, (Y,τ_2), și fie $f: X \to Y$ o func. cont. Atunci $f(K)$ e mult. compactă

Teoremă
Fie (X,τ) un sp. top., $\emptyset \neq K \subset X$, o mult. compactă și $f: K \to \mathbb{R}$ cont. Atunci $(\exists)$ $x_*, x^* \in K$ a.î.
$f(x_*) = \min\{f(x) \mid x \in K\}$,
$f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in K\}$

Funcții uniform continue

Def
Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ sp. metrice și $f: X \to Y$.
Spunem că f e uniform cont. (u.c.) dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)\, x, a \in X$ cu prop. că $d_1(x,a) < \delta_\varepsilon$ avem $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Prop
Orice func. uniform continuă este func. continuă

Obs
Reciproca prop. precedente este falsă

Prop
Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$, sp. met. a.î. X - mult. compactă (ne referim la topologia τ_{d_1}) și $f: X \to Y$ o func. cont. Atunci f e u.c.

Prop
Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ sp. metrice, și $f: X \to Y$. Sunt echiv.:
1) f - u.c.
2) $(\forall)(x_n)_n \subset X$, $(\forall)(y_n)_n \subset X$ a.î. $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,y_n) = 0$, avem $\lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Def
Fie (X,d) un sp. met. și $(x_n)_n \subset X$.
Spunem că $(x_n)_n$ e șir Cauchy în raport cu metrica d dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, m,n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$ avem $d(x_m,x_n) < \varepsilon$

Obs
Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înloc. cu sintagma „în sp. metric (X,d)".

Prop
Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ sp. metrice, $(x_n)_n \subset X$, șir Cauchy în rap. cu metrica d_1 și $f: X \to Y$ o func. u.c. Atunci $(f(x_n))_n \subset Y$ e șir Cauchy în rap. cu d_2

Prop
Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ și $f:(a;b] \to \mathbb{R}$ (resp. $f:[a;b)$ sau $f:(a;b)$).
Sunt echiv:
1) f e u.c.
2) $(\exists)\, \tilde{f}: [a;b] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}$ - cont. a.î. $\tilde{f}|_{(a,b]} = f$

$\longrightarrow$ Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ și $f: A \to \mathbb{R}$. Sunt echiv.
1) f. u.c.
2) $(\forall)(x_n)_n \subset A$ și $(y_n)_n \subset A$ a.î. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, avem $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$

Atunci f e u.c.

Prop

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ şi $f: A \to \mathbb{R}$. Sunt echiv.

1) f e u.c.

2) $(\exists)\, a \in A$ a.î. f e u.c. pe $A \cap (-\infty, a]$ şi f e u.c. pe $A \cap [a, \infty)$ e u.c.

Seminar 5

1. Faceţi analiza topologică a mult.

a) $A = (0,1) \cup \{2\} \subset (\mathbb{R}, d)$

$\mathring{A} = ?$

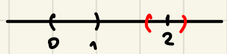
$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r > 0$ a.î. $\underset{(x-r,\, x+r)}{B(x,r)} \subset A = (0,1) \cup \{2\}$

$\left.\begin{array}{l} \mathring{A} \subset A \\ (0,1) \subset A \\ \hookrightarrow \text{deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow (0,1) \subset \mathring{A}$

Avem $(0,1) \subset \mathring{A} \subset (0,1) \cup \{2\}$

Stud. dacă $\{2\} \subset \mathring{A}$

$2 \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r > 0$ a.î. $(2-r, 2+r) \subset (0,1) \cup \{2\}$



Deci $2 \notin \mathring{A}$

$\mathring{A} = (0,1)$

$\bar{A} = ?$

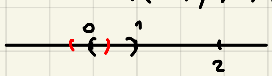
$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall)\, r > 0,\ \underset{(x-r,\, x+r)}{B(x,r)} \cap \underset{(0,1) \cup \{2\}}{A} \neq \emptyset$

$\left.\begin{array}{l} A \subset \bar{A} \\ A \subset [0,1] \cup \{2\} \\ [0,1] \cup \{2\} - \text{închisă} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A} \subset [0,1] \cup \{2\}$

Deci $(0,1) \cup \{2\} \subset \bar{A} \subset [0,1] \cup \{2\}$

Stud. dacă $0, 1 \in \bar{A}$

$0 \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall)\, r > 0,\ (-r, r) \cap (0,1) \cup \{2\} \neq \emptyset$



Deci $0 \in \bar{A}$

Analog $1 \in \bar{A}$

Deci $\bar{A} = [0,1] \cup \{2\}$

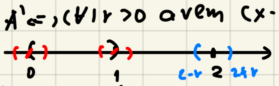
$A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow (\forall)\, r > 0$ avem $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$A' \subset \bar{A} = [0,1] \cup \{2\}$

Fie $x \in [0,1]$

$x \in A' \Leftrightarrow (\forall)\, r > 0$ avem $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$



Deci $[0,1] \subset A'$

$2 \in A' \Leftrightarrow (\forall)\, r > 0$ avem $(2-r, 2+r) \cap (A \setminus \{2\}) \neq \emptyset$

Deci $2 \notin A'$ Aşadar $A' = [0,1]$

$Fr(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{0, 1, 2\}$ $\quad Izo(A) = {}'A = \bar{A} \setminus A' = \{2\}$

$A = \mathbb{N} \subset (\mathbb{R}, d)$

b) 1) $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r > 0$, a.î. $(x-r, x+r) \subset \underset{\mathbb{N}}{A}$

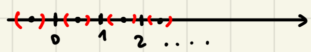
Deci $\mathring{A} = \emptyset$

2) $A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow (\forall)\, r > 0$ avem $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

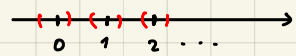
$x \in A' \Leftrightarrow (\forall)\, r > 0$ avem $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$



Deci $x \notin A'$

Fie $x \in \mathbb{N}$

$x \in A' \Leftrightarrow (\forall)\, r > 0,\ (x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$



Deci $x \notin A'$

Aşadar $A' = \emptyset$

3) $\bar{A} = A \cup A' = \mathbb{N}$

4) $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{N}$

5) $Izo(A) = \bar{A} \setminus A' = \mathbb{N}$

$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r>0, (x-r, x+r) \subset A$

Deoarece orice interval de forma $(x-r, x+r)$ conține o inf de nr. iraționale și raționale, avem că

$\mathring{A} = \emptyset$

2) $\bar{A} = ?$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\exists)(x_k)_k \subset A$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$

orice șir de el. din A poate avea drept limită un element al lui a (constant de la un rang încolo) sau 0

Deci $\bar{A} = A \cup \{0\}$

3) $A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow (\exists)(x_k)_k \subset A \setminus \{x\}$ a.i. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$

Conf celor discutate la pasul precedent, avem că $A' = \{0\}$

4) $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = A \cup \{0\}$

5) $Izo(A) = \bar{A} \setminus A' = A$

Obs

$(\mathbb{R}^2, d_2)$ este sp. metric, unde

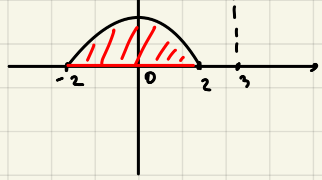
$d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

Obs

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ și $r>0$

1) $B((x,y),r) = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid d_2((x,y),(z,t)) < r\}$
$= \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-z)^2+(y-t)^2} < r\} =$
$= \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (z-x)^2+(t-y)^2 < r^2\} =$
= discul deschis de centru (x,y) și rază r

2) $B[(x,y),r] = \bar{B}((x,y),r) =$
$= \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (z-x)^2+(t-y)^2 \le r^2\}$
= discul închis de centru (x,y) și rază r



1) $\mathring{A} = ?$

$(x,y) \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r>0$ a.î. $B((x,y),r) \subset A$

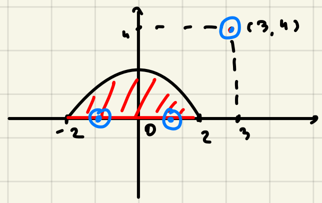
$\mathring{A} \subset A$

$\left.\begin{array}{l}\{(x,y) \mid x^2+y^2<4, y>0\} \subset A \\ \text{—||— deschisă}\end{array}\right\} \Rightarrow \{(x,y) \mid x^2+y^2<4, y>0\} \subset \mathring{A}$

Avem $\{(x,y) \mid x^2+y^2<4, y>0\} \subset \mathring{A} \subset A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y\ge 0\} \cup \{(3,4)\}$

Stud. dacă $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-2;2), y=0\} \cup \{(3,4)\} \subset \mathring{A}$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ a.î. $x \in (-2;2), y=0$



Deci $(x,y) \notin \mathring{A}$

Deci $(3,4) \notin \mathring{A}$

Așadar $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y>0\}$

2) $\bar{A} = ?$

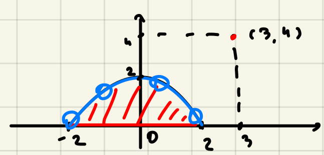
$(x,y) \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall)\, r>0, B((x,y),r) \cap A \ne \emptyset$

$A \subset \bar{A}$

$\left.\begin{array}{l}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4, y\ge 0\} \cup \{(3,4)\} \supset A \\ \text{—||— închisă}\end{array}\right\} \Rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4, y\ge 0\} \cup \{(3,4)\} \supset \bar{A}$

Așadar $A \subset \bar{A} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4, y\ge 0\} \cup \{(3,4)\}$

Stud. dacă $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4, y\ge 0\} \subset \bar{A}$



Deci $(x,y) \in \bar{A}$

Așadar

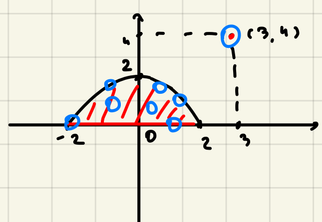
$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4, y\ge 0\} \cup \{(3,4)\}$

3) $A' = ?$

$(x,y) \in A' \Leftrightarrow (\forall)\, r>0, B((x,y),r) \cap (A \setminus \{(x,y)\}) \ne \emptyset$

$A' \subset \bar{A}$

Fie $(x,y) \in \bar{A}$



Deci $(3,4) \notin A'$

Așadar $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y\ge 0\}$

4) $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} =$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4, y\ge 0\} \cup \{(3,4)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-2,2), y=0\}$

5) $Izo(A) = \bar{A} \setminus A' = \{(3,4)\}$ □

Func. derivabile

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $f: A \to \mathbb{R}$

Spunem că func:

1) are derivată în a dacă (∃) în $\overline{\mathbb{R}}$ limita $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

2) este derivabilă în a dacă există și este finită limita de la 1)

Notație

În contextul def. precedente, dacă f are derivată în a, notăm $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ și $B \subset A$ a.î. f derivabilă pe B (i.e. f deriv. în orice punct din B).

Definim func $f': B \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ și o numim derivata lui B

Teoremă

Orice func. der. într-un punct este cont. în acel punct

(Reciproca nu e adv.)

Prop

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $f, g: A \to \mathbb{R}$, 2 func. der. în a. Atunci:

1) $f + g$ e deriv. în a, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2) αf e deriv. în a, $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
3) $f \cdot g$ e deriv în a, $(f \cdot g)' = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)$
4) Dacă $g(a) \neq 0$ (⇒ (∃) $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $g(x) \neq 0$, (∀) $x \in V \cap A$) atunci $\frac{f}{g}$ e deriv în a, $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g^2(a)}$

Teoremă

Fie $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$, intervale nedegenarate, $a \in I$, $f: I \to J$ o func. der. în a și $g: J \to \mathbb{R}$, o func. der. în $f(a) \in J$.

Atunci $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ e deriv. în a și $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Teoremă

Fie $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$, intervale nedegenarate, $a \in I$, $f: I \to J$, o func. cont. și bij.

Dacă f - deriv. în a și $f'(a) \neq 0$, atunci func. inv. $f^{-1}: J \to I$ e deriv. în $b = f(a) \in J$ și $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ și $f: A \to \mathbb{R}$

Spunem că a este:

1) pct. de minim local al lui f dacă (∃) $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \leq f(x)$, (∀) $x \in V \cap A$

2) pct. de maxim local al lui f dacă (∃) $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \geq f(x)$, (∀) $x \in V \cap A$

3) pct. de extrem local al lui f dacă a este 1) sau 2)

Teorema lui Fermat

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ și $a \in A$ a.î.

1) $a \in \mathring{A}$
2) a, pct. de extrem local
3) f deriv în a

Atunci: $f'(a) = 0$

Teorema lui Rolle

Fie $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ a.î.

1) f cont. pe $[a,b]$
2) f deriv. pe (a,b)
3) $f(a) = f(b)$

Atunci (∃) $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$

Teorema lui Darboux

$I \subset \mathbb{R}$ - int. ned. și $f: I \to \mathbb{R}$ - deriv.

Atunci (∀) I, J interval, avem că $f'(J)$ e interval (i.e. f' are prop. lui Darboux)

Teorema lui Lagrange

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f - cont. pe $[a,b]$
2) f - deriv. pe (a,b)

Atunci (∃) $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Prop. (consecințe Lagrange)

Fie un $I \subset \mathbb{R}$ - int. nedegenerat și $f: I \to \mathbb{R}$ o func. deriv. (pe I)

1) Dacă $f'(x) = 0$, (∀) $x \in I$, atunci f e const.

2) Dacă $f'(x) \geq 0$, (∀) $x \in I$, atunci f e cresc.

3) Dacă $f'(x) \leq 0$, (∀) $x \in I$, atunci f e desc.

Teorema lui Cauchy

$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f, g - cont. pe $[a,b]$
2) f, g - der. pe (a,b)

Atunci (∃) $c \in (a,b)$ a.î. $(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$

Teorema lui l'Hospital

Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $I \subset \mathbb{R}$ interval ned. a.î. $(a,b) \subset I \subset [a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ și $f, g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (resp. $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$)

2) f, g - deriv. și $g'(x) \neq 0$, (∀) $x \in I \setminus \{x_0\}$

3) (∃) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci: α) $g(x) \neq 0$, (∀) $x \in I \setminus \{x_0\}$

β) (∃) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Spunem că f e deriv. de 2 ori în a dacă $(\exists)\ V\in\mathcal{V}_a$ a.î. f-deriv. pe $V\cap A$ și func. $f': V\cap A\to\mathbb{R}$ e deriv. în a. În acest caz, derivata func. f' în a se numește deriv. a doua a lui f în a și s.n. $f''(a)$ sau $f^{(2)}(a)$

Inductiv, se def. $f^{(n)}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$

Fie, în plus, ... I: (p. că f e deriv. de n+1 ori pe I
Atunci $(\forall)\ x\in I, x\neq a$, $(\exists)$ c între a și x a.î.

$$f(x)=\underbrace{f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\overset{not}{=}\ T_n(x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\overset{not}{=}\ R_n(x)}$$

$T_n(x)$ (polinomul Taylor de ordin n)

$R_n(x)$ (restul de ordin n al form. lui Taylor)

Fie $I\subset\mathbb{R}$ - int. ned., $n\in\mathbb{N}$ și $f:I\to\mathbb{R}$

Def

Spunem că f e de clasă C^n (pe I) dacă f e deriv. de n ori pe I și $f^{(n)}: I\to\mathbb{R}$ e cont.

Notație

$C^n(I)=\{f: I\to\mathbb{R} \mid f$ e de clasă $C^n\}$

Spunem că f e de clasă C^∞ dacă f este derivabilă de orice ordin pe I (i.e. f e indefinit derivabilă)

Notație

$C^\infty(I)=\{f: I\to\mathbb{R} \mid f$ e de clasă $C^\infty\}$

Def

Fie $I\subset\mathbb{R}$ int ned. și $f, F: I\to\mathbb{R}$.
F e o primitivă a lui f dacă F e deriv. și $F'(x)=f(x)$, $(\forall)\ x\in I$

Șiruri de func.

Fie $X\neq\emptyset$, (Y,d) un sp. metric, $(f_n)_n$ un șir de func., $f_n: X\to Y$ $((\forall)\ n\in\mathbb{N})$ și $f: X\to Y$.

Def

Spunem că $(f_n)_n$:

1) Converge simplu (punctual) către f, dacă, $(\forall)\ x\in X$, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\overset{d}{=}f(x)$ (i.e. $(\forall)\ x\in X, (\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)\ n_{\varepsilon,x}\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n\geq n_{\varepsilon,x}$, avem $d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$)
În acest caz notăm $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{s(p)}f$

2) Converge uniform către f dacă $(\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n\geq n_\varepsilon$, $(\forall)\ x\in X$, avem $d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$
În acest caz notăm $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u}f$

Teoremă

Dacă $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u}f$, atunci $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{s}f$

Obs

Reciproca e falsă

Def

O func. $g: X\to\mathbb{R}$ se numește mărg. dacă $(\exists)\ M>0$ a.î. $|g(x)|\leq M, (\forall)\ x\in X$

Prop

Fie $X\neq\emptyset$, $(f_n)_n$ un șir de func., $f_n: X\to\mathbb{R}$ a.î. f_n - mărg. $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$ și $f: X\to\mathbb{R}$. Sunt echiv.:

1) $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u}f$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$

Exc:

Fie $f_n: [-1;1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$
Stud. convergența simplă și uniformă pt. acest șir $(f_n)_n$

Sol Conv. simplă

Fie $x\in[-1,1]$
$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}=0 \Rightarrow f_n\xrightarrow[n\to\infty]{s}f$, unde $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

Conv. uniformă

I. Varianta cu majorări, minorări

$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}-0\right|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[-1;1]}\frac{|x|}{1+n^2x^2}\right)=0$?

$\sup\limits_{x\in[-1;1]}\frac{|x|}{1+n^2x^2}$ $\leq a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u}f$

$\sup\limits_{x\in[-1;1]}\frac{|x|}{1+n^2x^2} > b_n > 0$, $b_n \cancel{\xrightarrow[n\to\infty]{}} 0 \Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow[n\to\infty]{u}} f$

$1+n^2x^2=1^2+n^2|x|^2\geq 2\cdot1\cdot n|x|$ $(a^2+b^2\geq 2ab)$ $\Rightarrow 1\geq\frac{2n|x|}{1+n^2x^2}\Rightarrow\frac{1}{2n}\geq\frac{|x|}{1+n^2x^2}$

$\Rightarrow\frac{|x|}{1+n^2x^2}\leq\frac{1}{2n}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$, $(\forall)\ x\in[-1;1]$

$\Rightarrow\sup\limits_{x\in[-1;1]}\frac{|x|}{1+n^2x^2}\leq\frac{1}{2n}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\frac{|x|}{1+n^2x^2}\right)=0\Rightarrow f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u}f$

Fie $f_n: [-1;1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x \cdot 2xn^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*, (\forall)\, x \in [-1;1]$$

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - n^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{n}$$

x	-1		$-\frac{1}{n}$		0		$\frac{1}{n}$		1
$f_n'(x)$	$-$	$-$ $-$ $-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$ $-$ $-$	$-$
$f_n(x)$	$\frac{-1}{1+n^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2n}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	$\frac{1}{1+n^2}$

Deci $\sup\limits_{x\in[-1;1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in[-1;1]} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|\right) = 0$

Aşadar $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Teoremă (Bernstein)

Fie $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ o func. continuă.
Atunci $(\exists)\, (f_n)_n$ un şir de func. poli., $f_n: [a;b] \to \mathbb{R}$, a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

şir de func. $f_n: X \to Y$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $f: X \to Y$ a.î.
$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ şi $a \in X$.
Dacă f_n e cont în a, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, atunci f e cont. în a

Teorema lui Dini

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top., $\emptyset \neq K \subset X$ o mulț. compactă, $(f_n)_n$ un şir monoton de func. continue, $f_n: K \to \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ şi $f: K \to \mathbb{R}$ continuă.
Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Teorema lui Polya

Fie şirul de func. monotone $(f_n)_n$, $f_n: [a;b] \to \mathbb{R}$ şi func. cont. $f: [a;b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Teorema de permutare a limitei cu derivata

Fie $(f_n)_n$ un şir de func., $f_n: I \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) I - int. ned. şi mărginit
2) $(\exists)\, x_0 \in I$ a.î. $(f_n(x_0))_n$ e conv.
3) f_n deriv, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$
4) $(\exists)\, g: I \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{u} g$

Atunci $(\exists)\, f: I \to \mathbb{R}$ deriv. a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ şi $f' = g$
(i.e. $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$)

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol

f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu func.el.)

Stud. cont. lui f în (0,0)

Alegem $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ şi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f nu e cont. în origine $\square$

f - cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu func. el.)

Stud. cont. lui f în (0,0)

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

(pt. că $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$ $\Rightarrow 1 \geq \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$)

Deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

$\Rightarrow$ f - cont. în origine $\square$

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Stud. cont. şi unif. cont. func. f

Sol

f-cont. pe $\mathbb{R} - \{0\}$ (op. de func. el.)

Stud dacă f este cont. în 0:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\in [-1;1]} = 0 \ (0 \cdot \text{mărg.} = 0) = f(0)$$

Deci f cont. în 0

Fie $x \in \mathbb{R}^*$

$f'(x) = (x \sin\frac{1}{x})' = \sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

$|f'(x)| = |\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}| \leq |\sin\frac{1}{x}| + |\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}| \leq 1 + \left|\frac{1}{x}\right| \left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1 + 1 \cdot 1 = 2, (\forall) x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

deci f - unif. cont. pe $(-\infty; -1]$ şi pe $[1; +\infty)$ (pt. că derivata e mărg.)

$\left.\begin{array}{l} f \text{ - cont. pe } [-1;1] \\ [-1;1] \text{ - compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ - u.c. pe } [-1;1]$

Deci f este u.c. pe $\mathbb{R}$

$\quad\quad\quad\quad \lbrace 2, x\in B$

Arătați că:

a) f u.c. pe A și pe B

b) f nu e u.c. pe $A\cup B$

Sol

a) Fie $(x_n)_n \subset A$ și $(y_n)_n \subset A$ a.î. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$

Avem $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n\to\infty}(1-1) = 0$

Deci f e u.c. pe A

Analog f e u.c. pe B

b) Alegem $(x_n)_n \subset A\cup B$, $x_n = n$, $(\forall) n\in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$

și $(y_n)_n \subset A\cup B$, $y_n = n + \frac{1}{n}$, $(\forall) n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$

Avem $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(n - n - \frac{1}{n}) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Dar $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n\to\infty}(1-2) = -1 \neq 0$ deci f nu este u.c. □

4. Stud. uc. func.:

a) $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f:[1;2)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\forall) x\in[1,2)$

$|f'(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} \le 1$, $(\forall) x\in[1,2)$

c) $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

Alegem $(x_n)_n \subset (0,\infty)$, $(y_n)_n \subset (0,\infty)$

$x_n = \frac{1}{2n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $(\forall) n\in\mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$

$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n\to\infty}(2n - n) =$

$= \lim_{n\to\infty}(2n - n) = \infty \neq 0$

5. Fie $a\ge 0$ și $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

Arătați că f e u.c. $\Leftrightarrow a > 0$

Sol

„⇐"

Știm că $a>0$, arătăm că f e u.c.

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $(\forall) x\in(a;+\infty)$

$|f'(x)| = \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$, $(\forall) x\in(a;+\infty) \Rightarrow$ f e u.c.

$x\in(a;+\infty) \Rightarrow a < x \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{x}$

„⇒"

Știm că f e u.c. și arătăm că $a>0$

P.R.A. că $a=0$

Alegem $(x_n)_n \subset (0;+\infty)$, $(y_n)_n \subset (0;+\infty)$,

$x_n = e^{-n}$, $y_n = e^{-2n}$

$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{2n}}\right) = 0$

și $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n\to\infty}(-n + 2n) = \infty \neq 0$

Deci f nu e u.c., contradicție,

așadar $a>0$

P.R.A. că f u.c.

Deci $(\exists)\ \tilde{f}:[0;\frac{2}{\pi}]\to\mathbb{R}$ a.î. $\tilde{f}$ cont. și $\tilde{f}|_{(0;\frac{2}{\pi}]}=f$

$\tilde{f}$ - cont. în $0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\tilde{f}(x)=\tilde{f}(0)\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} \quad \left(\tilde{f}(x)=f(x)=\sin\frac{1}{x},\ (\forall)\ x\in(0;\tfrac{2}{\pi})\right)$$

Deci $(\exists)\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\in\mathbb{R}$

Alegem $x_n=\frac{1}{2n\pi},(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$ și $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{1}{x_n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n\pi)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=1$,

contradicție cu $(\exists)\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ $(0\neq 1)$

Așadar f nu e u.c.

7. Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ sp. metrice, $(x_n)_n\subset X$ un șir Cauchy în rap. cu metrica d_1 și $f:X\to Y$ - func. u.c.

Arătați că $(f(x_n))_n$ e tot șir Cauchy

Sol

f - u.c. $\Leftrightarrow(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ \delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\ x,y\in X$ cu prop. că $d_1(x,y)<\delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$

Fie $\varepsilon>0$ (și $\delta_\varepsilon>0$ de mai sus)

$(x_n)_n$ șir Cauchy în rap. cu met. $d_1\Rightarrow$

$\Rightarrow(\exists)\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ m,n\in\mathbb{N}, m\geq n_\varepsilon, n\geq n_\varepsilon$, avem $d_1(x_m,x_n)<\delta_\varepsilon$

Fie $m,n\in\mathbb{N}\geq n_\varepsilon$

$d_2(f(x_m),f(x_n))<\varepsilon$

Deci $(f(x_n))_n$ e șir Cauchy în rap. cu met. d_2 $\square$

Fie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un şir de func., $f_n : X \to \mathbb{R}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ şi $s_n : X \to \mathbb{R}$, $s_n(x) = f_p(x) + \ldots + f_n(x)$, $(\forall) n \geq p$

Def

Perechea $((f_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n \geq p})$ s.n. **serie de func.** şi se notează $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ (sau $\sum_{n\geq p} f_n$ sau $\sum_n f_n$)

Obs

În general $p=0$ sau $p=1$

Fie $\sum_n f_n$ o serie de func. ($s_n : X \to \mathbb{R}$, $s_n = f_0 + \ldots + f_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$)

Def

Spunem că seria de func $\sum_n f_n$:

1) **converge simplu** dacă şirul $(s_n)_n$ este simplu conv.

2) **converge uniform** dacă şirul $(s_n)_n$ este uniform conv.

3) **converge absolut** dacă seria $\sum_n |f_n(x)|$ e conv.

Def

Dacă $\sum_n f_n$ converge simplu, limita (simplă) a şirului $(s_n)_n$ se numeşte suma seriei $\sum_n f_n$ şi se notează tot cu $\sum_n f_n$

Teoremă

Pp. că $(X, \mathcal{T})$ e sp. top Fie $a \in X$.
Dacă $\sum f_n$ converge uniform către funcţia $f : X \to \mathbb{R}$ (i.e. $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$) şi f_n cont. în a, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, atunci f cont. în a

Teoremă (Weierstrass)

Pp. că $(\exists) (\alpha_n)_n \subset [0; \infty)$ a.î.:

1) $\sum_n \alpha_n$ conv.

2) $|f_n(x)| \leq \alpha_n$, $(\forall)$ $x \in X$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$

Atunci $\sum_n f_n$ converge uniform şi absolut

Exc

Arătaţi că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ este u.c. $(x \in \mathbb{R})$

Alegem $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (serie armonică gen., $\alpha = 2$)

Conf. teoremei lui Weierstrass avem că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}$ e u.c.

Def Mulţimea $A = \{x \in X \mid \sum_n f_n(x)$ e conv.$\}$ s.n. mulţ. de conv. a seriei de func. $\sum_n f_n$

Fie $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ şi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$, $(\forall) n \geq p$ ($0^0 = 1$ prin convenţie)

Def

Seria de func. $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n x^n$ s.n. **serie de puteri**

Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri

Def

1) Definim $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ $\left(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\right)$ (raza de conv. a seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$)

2) Intervalul $(-R, R)$ s.n. intervalul de conv. al seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$

3) Mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_n a_n x^n$ e conv.$\}$ s.n. mulţimea de conv. a $\sum_n a_n x^n$

Teoremă

Fie $\sum_n a_n x^n$ şi R:

1) Dacă $(\exists)$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0; \infty]$, atunci $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

2) Dacă $(\exists)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, atunci $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$

Teorema I a lui Abel

1) Pt. orice $x \in (-R, R)$, seria $\sum_n a_n x^n$ e abs. conv.

2) Pt. orice $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, $\sum_n a_n x^n$ e div.

Corolar

avem $(-R, R) \subset A \subset [-R, R]$

Exc

Det. mulţ. de conv. pt. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$

Sol

$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+1}(1 + \ldots + \frac{1}{n+1})|}{|(-1)^n(1 + \ldots + \frac{1}{n})|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}(1 + \ldots + \frac{1}{n})}{(-1)^n(1 + \ldots + \frac{1}{n})} + \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \ldots + \frac{1}{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \ldots + \frac{1}{n}}\right) = 1 \implies R = \frac{1}{1} = 1$$

$$\underbrace{0 \leq \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \ldots + \frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \frac{1}{n+1}}_{\downarrow\, 0}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$$

Fie A - mulţ. de conv. a $\sum_n a_n x^n$

Avem $(-1, 1) \subset A \subset [-1, 1]$

Stud. dacă $1 \in A$ şi $-1 \in A$

Pt. $x = 1$ seria devine $\sum_n a_n$

Fie $x_n = (-1)^n (1 + \ldots + \frac{1}{n})$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$

P.R.A. că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

Deci $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) = 0$

contradicţie cu faptul că şirul $(1 + \ldots + \frac{1}{n})$ nu e conv (vezi Curs 1)

Deci $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$.

Conf. crit. suf. de div. avem că $\sum_n x_n$ e div.

Prin urmare $1 \notin A$

că $\sum_{n}(1+\dots+t_n)$ e div.

Deci $-1 \notin A$

Așadar $A=(-1,1)$ □

Teorema a II-a a lui Abel

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu $R>0$ și mult. de conv. A.

Atunci func. $s: A \to \mathbb{R}$, $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e cont.

Explicații

1) Pt. orice $a \in (-R,R)$, s e cont. în a

2) Dacă $R \in A$ (resp. $-R \in A$), atunci s e cont. în R (resp. în $-R$), i.e.

$$\lim_{\substack{x\to R\\ x<R}} s(x) = s(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Teorema de derivare „termen cu termen" a seriilor de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu R. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} =$

$$\underset{n-1 \overset{not}{=} m}{=} \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{m+1}x^m = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \text{ are același } R$$

Dacă $R>0$ și $s:(-R,R)$, $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, atunci s e derivabilă și $s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

Teorema de integrare „termen cu termen" a seriilor de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu R. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \underset{t \overset{not}{=} x}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ are același R.

Dacă $R>0$ și $s, S:(-R,R)\to\mathbb{R}$, $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

atunci S e o primitivă a lui s

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $a \in I$ și $f \in C^{\infty}(I)$

Def

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ s.n. seria Taylor asoc. func. f în a

Teorema

Seria Taylor asoc. func. f în punctul a este conv. în punctul $x \in I$, $x \neq a$ și are suma $f(x)$ $\iff \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$, unde $R_n(x)$ e restul Formulei lui Taylor

Obs

În general $a=0$

Def

Seria lui Taylor asoc. lui f în 0 se mai numește și seria MacLaurin asoc. lui f.

Sol

$I = \mathbb{R}$

$a = 0 \in I$

$f: I \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$

$f \in C^\infty(I)$

$f^{(k)}(x) = e^x, (\forall) x \in \mathbb{R}, (\forall) k \in \mathbb{N}$

$f^{(k)}(0) = 1, (\forall) k \in \mathbb{N}$

$$\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_n \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Conf. Formulei lui Taylor cu rest Lagrange, $(\forall) n \in \mathbb{N}, (\forall) x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, $(\exists) c$ între 0 și x a.î. $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_n(x)}$

$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}, (\forall) x \in \mathbb{R}^*$

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}^*$

Fie $x \in \mathbb{R}^*$

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$

$$0 \le |R_n(x)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}\right| = \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \overset{not}{=} x_n, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

c între 0 și $x \Rightarrow 0 < e^c < e^{|x|}$

Este suf. să arătăm că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{|x|} |x|^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{e^{|x|} |x|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1$$

Conf. crit rap. pt șiruri cu term strict pozitiv avem că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Deci $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Așadar $\underbrace{f(x)}_{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (\forall) x \in \mathbb{R}^*$ $\square$

$f(0) = e^0 = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$

Înlocuim x cu $-x$ în relația precedentă și obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}, (\forall) x \in (-1,1)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Înlocuim x cu x^2 în ult. relație și obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, (\forall) x \in (-1,1)$$

Exc

Arătați că $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, (\forall) x \in [-1,1]$

Sol

Cons. $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, (\forall) x \in (-1;1)$$

Integrăm „termen cu termen" și obț. că $(\exists)$ $C \in \mathbb{R}$ a.î. $\underbrace{f(x)}_{\operatorname{arctg} x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C, (\forall) x \in (-1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 0^{2n+1} + C = 0 + C = C \end{array}\right\} \Rightarrow C = 0$$

Deci $\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, (\forall) x \in (-1,1)$

Pt. $x = 1$ seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} 1^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ conv. (crit. lui Leibniz)

Conf. teoremei a II-a a lui Abel, avem

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} 1^{2n+1}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1$$

Pt. $x = -1$ seria devine ...

Deci $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}, (\forall) x \in [-1,1]$

Seria binomială

$(\forall) \alpha \in \mathbb{R}, (\forall) x \in (-1,1)$, avem

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

(7) Fie (X,d_1), (Y,d_2) sp. metr., $(x_n)_n \subset X$ un șir Cauchy în rap. cu metrica d_1 și $f:X \to Y$, o funcț. u.c. Arătați că $(f(x_n))_n$ este șir Cauchy în rap. cu metrica d_2.

f u.c. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x,y \in X$ cu prop. că $d_1(x,y) < \delta_\varepsilon$ avem $d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$ și $\delta_\varepsilon > 0$ (de mai sus).

$(x_n)_n$ e șir Cauchy în rap. cu metrica $d_1 \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n,m \geq n_\varepsilon$ $d_1(x_n,x_m) < \delta_\varepsilon$.

Fie $n,m \in \mathbb{N}$, $m,n \geq n_\varepsilon$ avem $d_2(f(x_n),f(x_m)) < \varepsilon$.

Deci $(f(x_n))_n$ e șir Cauchy în rap. cu metrica d_2.

16.11.2023

(1) Studiați conv. simplă și uniformă pt. urm. șirurilor de funcții:

a) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Sol: C.S.: Fie $x \in [0,\infty)$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

C.U.:

$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{x}{x+n} \quad \forall x \in [0,\infty), \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{x+n} \underset{x=n}{\geq} \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow f_n \overset{u}{\underset{n\to\infty}{\not\to}}$

$\frac{1}{2} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$

urm. şiruri de func.:

b) $f_n : [2,3] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

c.s.
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f: [2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

c.u.
$\sup\limits_{x\in[2,3]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[2,3]} \frac{x}{x+n}$

Fie $f_n : [2,3] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$

$f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} \geq 0$, $(\forall)\, x \in [2,3]$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f_n$ cresc, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

x	2		3
$f_n'(x)$	+ + + + + + + + + +		
$f_n(x)$	$\nearrow$		

Deci $\sup\limits_{x\in[2,3]} f_n(x) = \frac{3}{3+n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{3+n} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

c) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Sol

c.s.
Fie $x \in [0,\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, $f: [0,\infty)$, $f(x) = x$

c.u.

$\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - x\right| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{\cancel{x^2} + \frac{1}{n} - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + x}\right| =$

$= \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + x} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

d) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n}{n+x}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Sol

c.s.
Fie $x \in [0,\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+x} = 1 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$

c.u.

$\sup\limits_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{n}{n+x} - 1\right| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{n+x}$

Fie $g_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{x}{n+x}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$g_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2} \geq 0$, $(\forall)\, x \in [0,\infty)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow g_n$ - cresc., $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

x	0		$+\infty$
$g_n'(x)$	+ + + + + + + + + +		
$g_n(x)$	$\nearrow$		1

Deci $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} g_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n}{x+n} = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Prin urmare $f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

e) $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

Sol

c.s. Fie $x \in (0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde

$f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

c.u.

$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ continuă, } (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \\ f \text{ nu e continuă (în 1)} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ $\square$

f) $f_n : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Sol

c.s.

$f_n(x) = \left(\frac{1+x}{e^{2x}}\right)^n = (f_1(x))^n$, $(\forall)\, x \in [\frac{1}{2}; 1]$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Arătăm că $0 \underset{\text{evident}}{\leq} f_1(x) < 1$, $(\forall)\, x \in [\frac{1}{2}, 1]$

Fie $g: [\frac{1}{2}; 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + x - e^{2x}$

$g'(x) = 1 - 2e^{2x}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 2e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2x = -\ln 2 \Leftrightarrow$

$x = \frac{-\ln 2}{2}$

x	$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$	− − − − − − − −		
$g(x)$	$1-2e$	$\searrow$	$1-2e^2$

Deci $g(x) \leq 1 - 2e < 0$, $(\forall)\, x \in [\frac{1}{2}; 1]$

Aşadar $1 + x < e^{2x}$, $(\forall)\, x \in [\frac{1}{2}; 1]$.

Prin urmare, $f(x) = \frac{1+x}{e^{2x}} < 1$, $(\forall)\, x \in [\frac{1}{2}; 1]$

$(a<b)$

c.u.

Avem:

1) $[\frac{1}{2}, 1]$ - compactă
2) $(f_n)_n$ e desc.
3) f_n, f sunt cont.
4) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$

Conf teoremei lui Dini avem că:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$$

g) $f_n : [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (\cos x)^n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Sol c.s.

$f_n(x) = (\cos x)^n = (f_1(x))^n$, $(\forall)\ x \in [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$0 \le f_1(x) < 1$, $(\forall)\, x \in [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Fie $x \in [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f : [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

c.u.

$x \longmapsto \cos x$ desc. $\Rightarrow f_n$ - desc., $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$x \in [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \in [0, 1)$

Avem:

1) $f_n, f : [\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$
2) f_n - desc., $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$
3) f - cont.
4) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$

Din teorema lui Polya avem:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$$

Arătați că $f_n g \xrightarrow[n\to\infty]{u} fg$

Sol

$\left.\begin{array}{l} g : [a,b] \to \mathbb{R}, \text{ cont.} \\ [a,b] \text{ - compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists)\, M > 0$ a.î. $|g(x)| \le M$, $(\forall)\, x \in [a,b]$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \Rightarrow (\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \ge n_\varepsilon$, $(\forall)\, x \in [a,b]$ avem $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$

Fie $\varepsilon > 0$. Avem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de mai sus

Fie $n \ge n_\varepsilon$ și $x \in [a;b]$

$|f_n(x) g(x)| - |f(x) g(x)| =$

$= |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)| \le M \cdot |f_n(x) - f(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

$\Rightarrow f_n g \xrightarrow[n\to\infty]{u} fg$

3. Stud. conv. s. și u. pt:

$(f_n)_n$ și $(f_n')_n$, unde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Sol

Pt. $(f_n)_n$:

c.s.

Fixăm $x \in \mathbb{R}$

$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} nx < \frac{\pi}{2}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$-\frac{\pi}{2n} < f_n(x) < \frac{\pi}{2n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

$\to 0$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Prin urmare $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

c.u.

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\operatorname{arctg} nx|}{n} \le \frac{\pi}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Pt. $f_n'(x)$:

$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{1+n^2x^2} \cdot \cancel{n}}{\cancel{n}} = \frac{1}{1+n^2x^2}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Fie $x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{s} g$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

c.u

$\left.\begin{array}{l} f_n' \text{ continuă}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \\ g \text{ nu e continuă (în 0)} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n' \overset{u}{\underset{n\to\infty}{\not\to}} g$

Temă:

$f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos nx}{n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Fie $p \in \mathbb{N}^*$ Considerăm $\mathbb{R}^p = \{(x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in \mathbb{R}, (\forall) i = \overline{1,p}\}$

Def

Fie $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$
$y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^n$
și $\alpha \in \mathbb{R}$:

1) $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$
2) $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_p)$

Obs

Atunci când nu specificăm se subînțelege că notăm $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_p)$, etc.

Def

Pt. orice $x \in \mathbb{R}^p$, def. norma lui prin:

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$

Prop

Func. $\|\cdot\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\underset{\mathbb{R}^p}{x} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\|x\|}$ are prop.:

1) $\|x\| \geq 0, (\forall) x \in \mathbb{R}^p$
2) $\|x\| = 0 \iff x = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^p} \in \mathbb{R}^p$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, (\forall) x, y \in \mathbb{R}^p$
4) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, (\forall) \alpha \in \mathbb{R}, (\forall) x \in \mathbb{R}^p$

Obs

Pt. orice $x, y \in \mathbb{R}^p$, avem $\underset{d(x,y)}{d_2(x,y)} = \|x - y\|$

Obs

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$ și $f : A \to \mathbb{R}^p$

Pt. orice $a \in A$ avem $f(a) = (f_1(a), \dots, f_q(a))$

Prin urm. am def. func.

$f_1, \dots, f_q : A \to \mathbb{R}$

Derivate parțiale și funcții diferențiabile

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \dots, f_q)$ și $a \in \mathring{A}$

Def

1) Spunem că f e deriv. parțial (admite derivată parțială) în raport cu variabila x_i ($i \in \{1, \dots, p\}$ fixat) în punctul a dacă există în $\mathbb{R}^q$ lim. urm.:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t}, \text{ unde } e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$$

În acest caz notăm $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t}$

derivata parțială a func. f în rap. cu var x_i și în punctul a

2) Spunem că f este diferențiabilă sau derivabilă în punctul a dacă există o aplicație liniară $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ a.î.:

$(T(x + y) = T(x) + T(y))$
$(T(\alpha x) = \alpha T(x))$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0_{\mathbb{R}^q} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^q$$

Obs

Aplicația liniară T, dacă există, este unică, se notează cu $df(a)$ (sau $Df(a)$ sau $f'(a)$) și se numește diferențiala lui f în a

$(df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q)$

Obs

1) Fie $c \in A$. Sunt echiv.:
   i) f cont. în c
   ii) $f_1, \dots, f_q$ cont în c

2) Fie $i \in \{1, \dots, p\}$. Sunt echiv.:
   i) f admite der. parțială în rap. cu var. x_i, în punctul a
   ii) $f_1, \dots, f_q$ admit der. parțială în rap. cu var. x_i, în punctul a

Dacă i) sau ii) de la 2) e adv., atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(a)\right)$$

3) Sunt echiv.:
   i) f dif. în a
   ii) $f_1, \dots, f_q$ dif. în a

Dacă i) sau ii) de la 3 e adv., atunci:

$df(a) = (df_1(a), \dots, df_q(a))$

Teorema

Dacă f este dif. în a, atunci f este der. parțial în rap. cu var. x_i, în punctul a, $(\forall) i = \overline{1,p}$ și $df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$,

$$df(a)(\underset{(v_1, \dots, v_p)}{v}) = {}^{t}\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}\right]$$

Obs

Dacă $q = 1$, form. prec. devine:

$df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

$$df(a)(v) = {}^{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) v_p$$

Reciproca e falsă

Obs
Orice aplicație liniară $f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2$ e dif. în orice punct $a\in\mathbb{R}^p$ și $df(a)=f$

Obs
Pt. orice $i\in\{1,\dots,p\}$, proiecția $pr_i:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $pr_i(v)=v_i$ este dif. în orice $a\in\mathbb{R}^p$ și $d\,pr_i(a)=pr_i$, deoarece pr_i e liniară

Notăm: $pr_i=dx_i$, $(\forall)\ i=\overline{1,p}$
Cu această notație, dacă $f:A\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ e dif. în $a\in\mathring{A}$, atunci $df(a):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$,
$$df(a)(v)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)v_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)v_p=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,pr_1(v)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\,pr_p(v)=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(v)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)dx_p(v)=$$
$$=df(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)dx_p$$

Teoremă (Crit. de dif.)
Pp. că $(\exists)\ V\in\mathcal{V}_a$, $V\subset A$ a.î. f admite toate deriv. parțiale pe V (i.e. $(\exists)\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\in\mathbb{R}^2$, $(\forall)\ c\in V$, $(\forall)\ i\in\overline{1,p}$) și $\frac{\partial f}{\partial x_i}:V\to\mathbb{R}^2$ e cont în a pt. orice $i=\overline{1,p}$.

Atunci f e dif. în a

$f(x,y,z)=x^2+y^2z^2-xy-x+2z$
Stud. dif. func. f în $(1,2,3)$ și în cazul în care f e dif. în $(1,2,3)$, det dif.

Sol
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x-y-1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y-x \qquad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z+2$$

$\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y};\frac{\partial f}{\partial z}$ continue pe $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^3$ - mult. deschisă (deci este vecinătate pt. toate punctele sale) $\Big\}\xRightarrow{\text{Crit. de dif.}}$ f dif. pe $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ f dif. în $(1,2,3)$

$df(1,2,3):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,
$$df(1,2,3)(u,v,w)=\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) & \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)}_{2\cdot1-2-1=-1}u+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)}_{2\cdot2-1=3}v+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)}_{2\cdot3+2=8}w=$$
$$=-u+3v+8w$$
i.e. $df(1,2,3)=-dx+3dy+8dz$ □

Exc
Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 : & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Stud. cont. lui f
b) Det. $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$
c) Stud. dif. lui f

a) Vezi seminar 6

b) Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=\frac{(xy)'_x\sqrt{x^2+y^2}-(xy)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x^2+y^2}=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cancel{2}x}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=\frac{(xy)'_y\sqrt{x^2+y^2}-(xy)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y}{x^2+y^2}=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}-xy\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cancel{2}y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f((0,0)+(t,0))-f(0,0)}{t}=$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t\cdot0}{\sqrt{t^2+0^2}}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0$$
Analog $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

Am obținut:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot x}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dots; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ deschisă $\Big\}\Rightarrow f$ dif. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Stud. dif. lui f în $(0,0)$
Dacă f ar fi dif. în $(0,0)$, atunci
$$df(0,0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ df(0,0)(u,v)=\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right]=0u+0v=0$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$
$=0 \Rightarrow f$ dif. în $(0,0)$
$\neq0 \Rightarrow f$ nu e dif. în $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq 0 \Rightarrow f$ nu e dif. în $(0,0)$ $\square$

1. Arătați că seria de func. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{n^4+x^2}$ converge uniform

Sol

$\frac{n^4+x^2}{2} \geq \sqrt{n^4x^2} = n^2|x|, (\forall) x \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 1 \geq \frac{2n^2|x|}{n^4+x^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{2|x|}{n^4+x^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\left|\frac{2x}{n^4+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -\frac{1}{n^2} \leq \frac{2x}{n^4+x^2} \leq \frac{1}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}_{-\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}} \leq \operatorname{arctg} \frac{2x}{n^4+x^2} \leq \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{n^4+x^2}\right| \leq \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

Arătăm că $\operatorname{arctg} x \leq x, (\forall) x \in [0,\infty)$

Fie $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0, (\forall) x \in [0,\infty)$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ ∞
$f'(x)$	+ + + + + + + + + +
$f(x)$	$\nearrow$

Atunci $f(x) \geq f(0) = 0, (\forall) x \in [0,\infty)$

Deci $\operatorname{arctg} x \leq x, (\forall) x \in [0,\infty)$

Conf. celor discutate mai sus, avem

$\left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{n^4+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, (\forall) x \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Deoarece $\sum_n \frac{1}{n^2}$ este conv., avem, cf. Th. lui Weierstrass, că $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{n^4+x^2}$ conv. uniform

2. Det. mult. de conv. pt. urm. serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} x^n$

Sol

$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\cdot 2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n \cdot 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$

$R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Fie A - mult. de conv. a seriei de puteri din enunț

Avem $(-2,2) \subset A \subset [-2,2]$

Stud. dacă -2 și $2 \in A$

Dacă $x = -2$

Seria devine: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{2^n}}{n\,\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ conv. (crit. lui Leibniz)

Deci $-2 \in A$

Dacă $x = 2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - divergentă (serie arm. gen. cu $\alpha = 1$)

Deci $2 \notin A$

Așadar $A = [-2,2)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n! \, x^n}{(a+1)\dots(a+n)}, a > 1$

Sol

$a_n = \frac{(-1)^n n!}{(a+1)\dots(a+n)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(a+1)\dots(a+n)(a+n+1)} \cdot \frac{(a+1)\dots(a+n)}{n! \, (-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a+n+1} = 1$

$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n} = 1$

Fie A - mult. de conv. a seriei de puteri din enunț

$(-1,1) \subset A \subset [-1,1]$

Stud. dacă $-1, 1 \in A$

Pt. $x = -1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)\dots(a+n)}$

Fie $x_n = \frac{n!}{(a+1)\dots(a+n)}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Aplicăm crit. Raabe - Duhamel

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(a+1)\dots(a+n)}} \cdot \frac{\cancel{(a+1)\dots(a+n)}(a+n+1)}{\cancel{n!}\,(n+1)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot n}{n+1} = a$; $a > 1$ $\Rightarrow$ Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e conv.

Prin urmare $-1 \in A$

Pentru $x = 1$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(a+1)\dots(a+n)}$

Fie $x_n = \frac{(-1)^n n!}{(a+1)\dots(a+n)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)\dots(a+n)} =$ conv.

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e abs. conv. $\Rightarrow$ e și conv.

Prin urmare $A = [-1,1]$

Notăm $y = x+3$

Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} y^n$

$a_n = \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}}{3^n} \right| = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = 3$

$R = \frac{1}{3}$

Fie B mulț. de conv. a seriei de puteri $\sum_n a_n y^n$

$(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}) \subset B \subset [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$

Stud. dacă $\pm \frac{1}{3} \in B$

Dacă $y = -\frac{1}{3}$, seria devine $\sum_n \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} (-\frac{1}{3})^n = \sum_n \frac{\cancel{3^n}}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\cancel{3^n}} = \sum_n (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ - conv. (Leibniz)

Deci $-\frac{1}{3} \in B$

Dacă $y = \frac{1}{3}$, seria devin $\sum_n \frac{\cancel{3^n}}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{1}{\cancel{3^n}} = \sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ - div. (serie armonică gen. $\alpha = \frac{1}{3}$)

Deci $\frac{1}{3} \notin B$

Așadar $B = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Fie A - mulț. de conv. a seriei de puteri din enunț

$\underset{x+3}{\overset{\shortparallel}{y}} \in B \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x+3 < \frac{1}{3} \,/-3$

$-\frac{10}{3} \leq x < -\frac{8}{3}$

$A = [-\frac{10}{3}, -\frac{8}{3})$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} (x-2)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \cdot x^{2n}$

(vezi la Matei)

f) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcțiile:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

$I = \mathbb{R}$

$a = 0$

$f \in C^{\infty}(I)$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

. . . .

Conf. Form. lui Taylor cu rest Lagrange,

$(\forall)\, x \in \mathbb{R}, x \neq 0, (\forall)\, n \in \mathbb{N}, (\exists)\, c$ între 0 și x a.î.

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{\text{Rest}}$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^*$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

Fie $x \in \mathbb{R}^*$

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Este suf. să arătăm că

$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$

$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|^{\leq 1}}{(n+1)!} |x^{n+1}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

Fie $x_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1$

Conf. crit. rap. pt. șiruri cu term. strict poz.

avem că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Deci $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$, prin urmare $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Așadar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^*$

(când n e par, term. e 0)

$f(0) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot 0^{2n+1}$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$

Deci $f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$

Teorema

Fie $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}^q$,
$g: A \to B$, $g = (g_1, \dots, g_q)$, $h: B \to \mathbb{R}^r$, $h = (h_1, \dots, h_r)$,
$f = h \circ g : A \to \mathbb{R}^r$, $f = (f_1, \dots, f_r)$ şi $a \in \mathring{A}$ a.î. $g(a) \in \mathring{B}$

Dacă g e dif. în a şi h e dif. în $g(a)$. Atunci:

1) $f = h \circ g$ e dif. în a şi $df(a) = d(h \circ g)(a) = dh(g(a)) \circ dg(a)$

2) $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) = \dfrac{\partial (h \circ g)_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{l=1}^{q} \dfrac{\partial h_i}{\partial y_l}(g(a)) \cdot \dfrac{\partial g_l}{\partial x_k}(a)$

$(\forall)\ i = \overline{1,r},\ k = \overline{1,p}$

Explicaţii teorema

1)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \arrow[r, "dg(a)"] \arrow[rr, bend right, "df(a) = dh(g(a)) \circ dg(a)"'] & \mathbb{R}^q \arrow[r, "dh(g(a))"] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

2)
$$\begin{tikzcd} A \subset \mathbb{R}^p \arrow[r, "g = (g_1, \dots, g_q)"] \arrow[rr, bend right, "f = h \circ g"'] & B \subset \mathbb{R}^q \arrow[r, "h = (h_1, \dots, h_r)"] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

$(x_1, \dots, x_p)$ $\qquad$ $(y_1, \dots, y_q)$

Au sens: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ $(\forall)\ k = \overline{1,p}$; $\quad \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)$ $(\forall)\ k = \overline{1,p}$; $\quad \dfrac{\partial h}{\partial y_l}(g(a))$ $(\forall)\ l = \overline{1,q}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = h(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)$

Arătaţi că f e dif şi det. derivatele ei parţiale
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z} \right)$

Sol

Fie $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)$ şi $f = h \circ g$

Fie $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_1(x,y,z) = xyz$
$g_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$
$g_3 = (x,y,z) = x+yz$

Avem $g = (g_1, g_2, g_3)$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z), \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z), \dfrac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) \right) =$
$= (yz, 2x, 1)$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = (xz, 2y, z)$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = (xy, 2z, y)$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z} \text{ - cont. pe } \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \text{ deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} h \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3 \\ g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow f = h \circ g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g = (g_1, g_2, g_3)"] \arrow[rr, bend right, "f = h \circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "h"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(x,y,z) $\qquad$ (u,v,w)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial (h \circ g)}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) +$
$\dfrac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) +$
$\dfrac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) =$

$= \dfrac{\partial h}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot yz +$
$\dfrac{\partial h}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2x +$
$\dfrac{\partial h}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial (h \circ g)}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) +$
$\dfrac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) +$
$\dfrac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z) =$

$= \dfrac{\partial h}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot xz +$
$\dfrac{\partial h}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2y +$
$\dfrac{\partial h}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot z$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial (h \circ g)}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) +$
$\dfrac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) +$
$\dfrac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial g_3}{\partial z}(x,y,z) =$

$= \dfrac{\partial h}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot yz +$
$\dfrac{\partial h}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2z +$
$\dfrac{\partial h}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot y$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Obs

În exc. precedent, putem nota $g = (u, v, w)$ i.e.
$g_1 = u$, $g_2 = v$, $g_3 = w$, ie
$u, v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u(x,y,z) = xyz$,
$v(x,y,z) = x^2+y^2+z$, $w(x,y,z) = x+yz$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g = (u,v,w)"] \arrow[rr, bend right, "f = h \circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "h"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(x,y,z) $\qquad$ (u,v,w)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) +$
$\dfrac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) +$
$\dfrac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \dfrac{\partial w}{\partial x}(x,y,z)$

$f = h(u,v,w)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

Derivate parțiale de ordin superior și diferențiale de ordin superior

Fie $p,q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \to \mathbb{R}^q$ și $a \in \mathring{A}$

Def

Fie $i,j \in \{1,\dots,p\}$

Pp. că $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a, V \subset A$, a.î. f admite derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pe V

(i.e. $(\exists)\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)\ (\forall)\ c \in V$)

Dacă func. $\frac{\partial f}{\partial x_j}: V \to \mathbb{R}^q$ admite derivată parțială în rap. cu var. x_i, în punctul a, această derivată parțială s.n. derivata parțială de ord. 2 a func. f în rap. cu var. x_i și x_j, în punctul a și se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$, dacă $i \neq j$ și s.n. cu

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, dacă $i = j$

Similar se def. der. parțiale de ord. $k \geq 3$

Notații corecte:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a)$ $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a)$ etc.

Notații greșite:

$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a)$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2}(a)$ etc

Formula lui Taylor cu rest Lagrange, cazul multidimensional

Fie $p,q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$ deschisă și convexă

(i.e. $(\forall)\ x,y \in D$, $(\forall)\ t \in [0,1]$, avem $(1-t)x + ty \in D$),

$n \in \mathbb{N}$, $f: D \to \mathbb{R}^p$ o func. care admite toate derivatele parțiale de ord. $n+1$ pe D și acestea sunt continue pe D și fie $a \in D$. Atunci:

$(\forall)\ x \in D, x \neq a$, $(\exists)\ c \in (a,x) \overset{not}{=} \{(1-t)a + tx \mid t \in (0,1)\}$ a.î.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2f(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}d^nf(a)(x-a)^n}_{T_n(x)}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c)(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

Lema lui Schwarz

Fie $i,j \in \{1,\dots,p\}$, $i \neq j$ și $V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$ a.î. f admite derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ pe V

Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: V \to \mathbb{R}^q$ e cont. în a, atunci

$(\exists)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \overset{\shortparallel}{}$

Def

Pp. că $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$ a.î. V admite toate derivatele parțiale de ordinul 2 a lui f în a

prin $d^2 f(a): \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$,

$$d^2 f(a)(\underset{(u_1,\dots,u_p)}{u}, \underset{(v_1,\dots,v_p)}{v}) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i v_j$$

Def

Pp. că $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$ a.î. V admite toate derivatele parțiale de ordinul 3 a lui f în a

prin $d^3 f(a): \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$,

$$d^3 f(a)(u,v,w) = \sum_{i,j,k=1}^{p} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a)\, u_i v_j u_k$$

Similar se def. $d^k f(a)$, $k \geq 3$

Notații

$d^2 f(a)(u,u) \overset{not}{=} d^2 f(a)(u)^2$

$d^3 f(a)(u,u,u) \overset{not}{=} d^3 f(a)(u)^3$

. . . .

Obs

Dacă $p=2$, $q=1$ și $u=(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$, atunci:

$$d^2 f(a)(u)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)u_2^2$$

. . . .

$$d^k f(a)(u)^k = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a)u_1^k + \dots + C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(a)u_1^{k-i}u_2^i + \dots + \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a)u_2^k$$

$f(x,y) = xy^3 + 2xy - 2x^2 + 3x + y - 2$

a) Det. deriv. parț. de ord 2 ale lui f

Sol

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 + 2y - 4x + 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 + 2x + 1 \qquad (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3y^2 + 2 \underset{\text{Schwarz}}{\overset{\text{Lema}}{=}} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6xy$$

b) Det. $df_{(1,2)}$ și $d^2f_{(1,2)}$

Sol

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont. pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ desc.} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^2 \Rightarrow f \text{ dif. în } (1,2)$$

$$df_{(1,2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ df_{(1,2)}(\underset{(u_1,u_2)}{u}) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right]^t =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)}_{11} u_1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)}_{15} u_2 = 11u_1 + 15u_2$$

Toate deriv. parț. de ord 2 sunt continue

$$d^2f_{(1,2)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ d^2f_{(1,2)}(\underset{(u_1,u_2)}{u}, \underset{(v_1,v_2)}{v}) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) \cdot u_1 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) \cdot u_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2) u_2 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) u_2 v_2 =$$

$$= -4u_1v_1 + 14u_1v_2 + 14u_2v_1 + 12u_2v_2$$

c) Det. polinomul Taylor de ord. 2 asoc. func. f în (1,2) (i.e. $T_2(x,y)$)

Sol

$$T_2(x,y) = f(1,2) + \frac{1}{1!} df_{(1,2)}((x,y) - (1,2)) + \dots + \frac{1}{2!} d^2f_{(1,2)}((x,y) - (1,2))^2 =$$

$$= f(1,2) + \frac{1}{1!}(11(x-1) + 15(y-2)) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)(x-1)(y-2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2\right) =$$

$$= 13 + 11(x-1) + 15(y-2) + \frac{1}{2}\left(-4(x-1)^2 + 28(x-1)(y-2) + 12(y-2)^2\right) =$$

$$= 13 + 11(x-1) + 15(y-2) - 2(x-1)^2 + 14(x-1)(y-2) + 6(y-2)^2 \quad \square$$

Def

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A$ și $f: A \to \mathbb{R}$.
Spunem că este:

1) punct de minim local al lui f, dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \le f(x), (\forall)\ x \in V \cap A$
2) punct de maxim local al lui f, dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \ge f(x), (\forall)\ x \in V \cap A$
3) punct de extrem local dacă este 1) sau 2)

Def

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \to \mathbb{R}$ și $a \in \mathring{A}$
Spunem că a este pct. critic. al lui f dacă f e dif. în a și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, (\forall) i = \overline{1,p}$

Teorema lui Fermat

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \to \mathbb{R}$ și $a \in A$ a.î.:

1) $a \in \mathring{A}$
2) a este punct de extrem local a lui f
3) f este dif. în a

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0\ (\forall)\ i = \overline{1,p}$

Def

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, D deschisă, $f: D \to \mathbb{R}^q$ și $k \in \mathbb{N}$. Spunem că f e de clasă C^k (pe D) dacă f admite toate der. parțiale de ord. k (pe D) și acestea sunt continue (pe D)

Criteriul de stabilire a punctelor de extrem local

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, D desc., $f: D \to \mathbb{R}$, o func. de clasă C^2 (pe D) și $a \in D$, un punct critic al lui f.

Notăm $H_f(a) =$ (matricea hessiană a lui f în a)

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix},\quad \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}$$

$\cdots$

$$\Delta_p = \det(H_f(a))$$

1) Dacă $\Delta_1 > 0 \ldots \Delta_p > 0$, atunci a este punct de minim local al lui f
2) Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^p \Delta_p > 0$, a e punct de maxim local al lui f
3) Dacă $\Delta_1 \ge 0, \ldots, \Delta_p \ge 0$, sau $\Delta_1 \le 0, \Delta_2 \ge 0, \ldots, (-1)^p \Delta_p \ge 0$ și $(\exists)\ i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ a.î. $\Delta_{i_0} = 0$, atunci nu se poate trage nicio concluzie
4) În toate celelalte cazuri, a nu este punct. de extrem local al lui f

Exc:

Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
Det. punctele de extrem local ale lui f și precizați natura lor

Exc

Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$

Det. pct. de extrem ale lui f și prec. natura lor.

Sol

$\mathbb{R}^2$ deschisă

Det. pct. critice ale lui f

f cont.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-15$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=6xy-12 \quad ,(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\text{ cont. pe } \mathbb{R}^2\\ \mathbb{R}^2 \text{ desc.}\end{array}\right\} \Rightarrow f$ dif. pe $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-15=0 \ /:3\\ 6xy-12=0 \ /:6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-5=0\\ xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+\frac{4}{x^2}-5=0\\ y=\frac{2}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^4-5x^2+4=0\\ y=\frac{2}{x}\end{cases}$$

Notăm $t=x^2$

Avem t^2-5t+4

$\Delta=9$

$t=\frac{5\pm3}{2}$, $t_1=4$, $t_2=1$

$x^2=4 \Rightarrow x\in\{\pm2\} \Rightarrow y\in\{\pm1\}$

$x^2=1 \Rightarrow x\in\{\pm1\} \Rightarrow y\in\{\pm2\}$

Soluțiile sist. de mai sus sunt:

$(2,1),(-2,-1),(1,2),(-1,-2)$

f este dif. pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ orice sol. a sist. este pct. critic al lui f

Punctele critice ale lui f sunt $(-2,-1),(1,2),(2,1),(-1,-2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x \quad ,(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6y \underbrace{=}_{\text{Lema lui Schwarz}} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Obs. că f este de clasă C^2

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & 6y\\ 6y & 6x\end{pmatrix},(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$Hf(2,1)=\begin{pmatrix}12 & 6\\ 6 & 12\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}\Delta_1=12>0\\ \Delta_2=\begin{vmatrix}12 & 6\\ 6 & 12\end{vmatrix}=108>0\end{array}\right\} \Rightarrow (2,1)$ pct. de minim local al lui f

$Hf(-2,-1)=\begin{pmatrix}-12 & -6\\ -6 & -12\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}\Delta_1<0\\ \Delta_2<0\end{array}\right\} \Rightarrow (-2,-1)$ pct. de maxim local al lui f

$Hf(1,2)=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & 6\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}\Delta_1=6>0\\ \Delta_2=-108<0\end{array}\right\} \Rightarrow (1,2)$ nu este pct. de extrem local al lui f

Analog nici $(-1,-2)$ nu este $\square$

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{p+1}$, D deschisă;
$F: D \to \mathbb{R}$ și $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0, y^0) \in D$ a.î.

1) $F(x_1^0, \dots, x_p^0, y^0) = 0$
2) F de clasă C^1 (pe D)
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0, \dots, x_p^0, y^0) \neq 0$

Atunci $(\exists)\ U = \mathring{U} \in \mathcal{V}_{(x_1^0, \dots, x_p^0)}$, $(\exists)\ V = \mathring{V} \in \mathcal{V}_{y^0}$

și $(\exists !)\ f: U \to V$ (f func. implicită)

cu prop:

a) $f(x_1^0, \dots, x_p^0) = y^0$

b) $F(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p)) = 0$, $(\forall)(x_1, \dots, x_p) \in U$

c) f este de clasă C^1 și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p))}$, $(\forall)(x_1, \dots, x_p) \in U$, $(\forall)\ i = \overline{1,p}$

Notație

În contextul T.F.I., $f \overset{\text{not}}{=} y$

Def

Func. f care se notează cu y din T.F.I. s.n. func. implicită asoc. ec. $F(x_1, \dots, x_p, y) = 0$

Obs

Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Dacă $F \in C^k$, atunci f (not. y) $\in C^k$

Exc

Arătați că ec. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 2$ definește într-o vec. a pct. $(1,1)$, func. implicită $y = y(x)$ și det. $y'(1)$ $\left(= \frac{dy}{dx}(1)\right)$

Sol

Fie $D = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{1+1}$ și $F: D \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2$
(D deschisă)

1) $F(1,1) = 0$

2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y + 1$
$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -2x + 2y + 1$ $\quad (\forall)(x,y) \in D = \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ cont. (pe D) $\Rightarrow$ F de clasă C^1

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -2 + 2 + 1 = 1 \neq 0$

Conf. T.F.I., $(\exists)\ U = \mathring{U} \in \mathcal{V}_1$
$(\exists)\ V = \mathring{V} \in \mathcal{V}_1$, $(\exists !)\ y: U \to V$
cu prop.:

a) $y(1) = 1$

b) $F(x, y(x)) = 0$, $(\forall)\ x \in U$

c) y este de clasă C^1 și $y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$, $(\forall)\ x \in U$

Pt. a det. $y'(1)$, avem 2 variante:

Varianta 1

↳ Folosim a) și c)

$$y'(x) = -\frac{2x - 2y(x) + 1}{-2x + 2y(x) + 1}, (\forall)\ x \in U \Rightarrow$$

$y'(x) \overset{c)}{=} \frac{dy}{dx}(x)$

$$y'(1) = -\frac{2 - 2y(1) + 1}{-2 \cdot 1 + 2y(1) + 1} = -\frac{2 - 2 + 1}{-2 + 2 + 1} = -1$$

Varianta 2

↳ Folosim a) și b)

$F(x, y(x)) = 0, (\forall)\ x \in U \Leftrightarrow x^2 - 2xy(x) + y^2(x) + x + y(x) - 2 = 0$, $(\forall)\ x \in U$

Derivăm ult. rel. în raport cu x:

$2x - 2y(x) - 2xy'(x) + 2y(x)y'(x) + 1 + y'(x) = 0$

$(\forall)\ x \in U \Rightarrow y'(x)(-2x + 2y(x) + 1) = -2x + 2y(x) - 1$, $(\forall)\ x \in U$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-2x + 2y(x) - 1}{-2x + 2y(x) + 1}, (\forall)\ x \in U$$

$\Rightarrow y'(1) = -1$ $\square$

și $(x^0, y^0) \in D$ $(x^0 = (x_1^0, \ldots, x_p^0),\ y^0 = (y_1^0, \ldots, y_q^0))$

a.î.:

1) $F(x^0, y^0) = 0_{\mathbb{R}^q} = (0, \ldots, 0)$

2) F este de clasă C^1 (pe D)

3) $$\frac{D(F_1, \ldots, F_q)}{D(y_1, \ldots, y_q)}(x^0, y^0) \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_q}(x^0, y^0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_q}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \ldots & \frac{\partial F_q}{\partial y_q}(x^0, y^0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Atunci $(\exists)\ U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}_{(x_1^0, \ldots, x_p^0)}$, $(\exists)\ V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}_{(y_1^0, \ldots, y_q^0)}$ și

$(\exists!)\ f : U \to V$, func. implicită,

$f = (f_1, \ldots, f_q)$ cu prop.

a) $f(x^0) = y^0$

b) $F(x, f(x)) = 0_{\mathbb{R}^q}$, $(\forall)\ x \in U$

c) f este de clasă C^1 și

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{D(F_1, \ldots, F_q)}{D(x_i, y_2, \ldots, y_q)}(x, f(x))}{\frac{D(F_1, \ldots, F_q)}{D(y_1, \ldots, y_q)}(x, f(x))}, \quad (\forall)\ i = \overline{1,p}, \quad (\forall)\ x \in U$$

$\ldots \ldots \ldots$

$$\frac{\partial f_q}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{D(F_1, \ldots, F_q)}{D(y_1, \ldots, y_{q-1}, x_i)}(x, f(x))}{\frac{D(F_1, \ldots, F_q)}{D(y_1, \ldots, y_q)}(x, f(x))}, \quad (\forall)\ i = \overline{1,p}, \quad (\forall)\ x \in U$$

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^p$, $\emptyset \neq A \subset E$, $f : E \to \mathbb{R}$ și $a \in A$.

Def

Spunem că a este:

1) pct. de minim local al lui f condiționat de A dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \le f(x)$, $(\forall)\ x \in V \cap A$

2) pct. de maxim local al lui f condiționat de A dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \ge f(x)$, $(\forall)\ x \in V \cap A$

3) pct. de extrem local al lui f condiționat de A dacă a este 1) sau 2)

Obs

Dacă $A = E$, se omite sintagma „cond. de A"

Denumire alternativă

Punctele de extrem local ale lui f condiționate de A s.n. și pcte. de extrem local ale lui f relative la A

Fie $1 \le k < p$ $(k \in \mathbb{N})$

și $g_1 \dots g_k : E \to \mathbb{R}$

Def

Dacă $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots g_k(x) = 0\}$, punctele de extrem local ale lui f cond. de A se numesc puncte de extrem local ale lui f cu legăturile $g_1(x) = 0 \dots g_k(x) = 0$

Pp, în continuare, că $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots g_k(x) = 0\}$, E este mulțime desc. și $f, g_1, \dots, g_k$ sunt de clasă C^1 (pe E)

Teorema urm. dă condiții necesare de existență pt. punctele de extrem local cu legături.

Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $a \in A$ (i.e. $g_1(a) = \dots g_k(a) = 0$)

Pp. că $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}} = k$ și că a este pct. de extrem local al lui f condiționat de A

Atunci $(\exists)\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ a.î.

$$(1)\ \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(a) = 0, \end{cases}$$

unde $L : E \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$

(i.e. $a \in A$)

a.î. $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}} = k$

și $(\exists)\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ a.î. A verif. sist. (1)

s.n. punct staționar al lui f cond. de A (sau cu leg. $g_1(x) = \dots g_k(x) = 0$)

2) Nr. reale $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ s.n multiplicatorii lui Lagrange

3) Func. L s.n. lagrangeianul problemei de extreme

Obs

Valorile $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ se schimbă odată cu punctul staționar condiționat a

Obs

Teorema prec. se poate reformula astfel:

„Orice pct. de extrem local cond. este punct staționar condiționat"

Obs

Reciproca este falsă

Algoritm pt. det. punctelor staționare condiționate

1) Se cons. func. $L : E \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nedeterminați)

2) Se formează sist.:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(x) = 0 \\ g_1(x) = 0 \\ \dots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

și se caută sol. acestuia

($p+k$ ec. și $p+k$ nec.)

$\downarrow$

$x_1, \dots, x_p$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$

3) Dacă $(a_1, \dots, a_p, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e sol. a sist. de la 2) și $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}} = k$ atunci $(a_1, \dots, a_p)$ e pct. staționar al lui f cu leg. $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$

Obs

Printre aceste pcte. staționare cond., se pot afla și punctele de extrem local cond.

pe cele care sunt pcte. de extrem local cond.

Fie $a=(a_1,\dots,a_p)\in E$ un pct. stat. al lui f cond. de A.
Aceasta înseamnă că $a\in A$ c.i.e. $g_1(a)=\dots g_k(a)=0$,

$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le p}}=k$ și $(\exists)\ \lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$

a.î. a să fie sol. a sist. (1)

Pp. că lagrangeianul L .... este de clasă C^2 pe E

Diferențiem în punctul a relațiile sist. $\begin{cases}g_1(x)=0\\g_2(x)=0\\\dots\\g_k(x)=0\end{cases}$ și obținem $\begin{cases}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\frac{\partial g_1}{\partial x_p}(a)dx_p=0\\\dots\dots\dots\\\frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\frac{\partial g_k}{\partial x_p}(a)dx_p=0\end{cases}$

Deoarece matricea acestui sistem liniar este

$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le p}}$ și rangul ei este k, putem exprima k diferențiale în func. de celelalte p-k

Pp. că det. urm. $\frac{D(g_1,\dots,g_k)}{D(x_{p-k+1},\dots,x_p)}(a)\neq 0$ (rangul e k)

Exprimăm $dx_{p-k+1},\dots,dx_p$ în func. de $dx_1,\dots,dx_{p-k}$

Putem scrie
$$(*)\begin{cases}dx_{p-k+1}=\sum_{i=1}^{p-k}\theta_i^1dx_i\\\dots\dots\dots\\dx_p=\sum_{i=1}^{p-k}\theta_i^k dx_i\end{cases}$$

Reamintim că $d^2L(a):\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$

$$d^2L(a)(u,v)=\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(a)\,u_i\cdot v_j$$

Fie $F(a):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $F(a)(u)=d^2L(a)(u)^2=$
$$=\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(a)u_iu_j$$

Putem scrie $F(a)=\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(a)dx_idx_j$

Înlocuim în expresia lui $F(a)$ pe $dx_{p-k+1},\dots,dx_p$ cu (*) și

def. $F(a)|_{leg.}=\sum_{i,j=1}^{p-k}A_{ij}\,dx_idx_j$, unde A_{ij} rez. din calcul

$\left(F(a)|_{leg}:\mathbb{R}^{p-k}\to\mathbb{R},\ F(a)|_{leg}(u)=\sum_{i,j=1}^{p-k}A_{ij}\,u_iu_j\right)$

1) Dacă $F(a)|_{leg}(u)\ge 0,\ (\forall)\ u\in\mathbb{R}^{p-k}$
și $F(a)|_{leg.}(u)=0 \iff u=0_{\mathbb{R}^{p-k}}$,
atunci a e pct. de minim local al lui f cu leg. $g_1(x)=\dots g_k(x)=0$

2) Dacă $F(a)|_{leg}(u)\le 0,\ (\forall)\ u\in\mathbb{R}^{p-k}$
și $F(a)|_{leg.}(u)=0 \iff u=0_{\mathbb{R}^{p-k}}$,
atunci a e pct. de maxim local al lui f cu leg. $g_1(x)=\dots g_k(x)=0$

Denumire alt.
Pctle. stat. cond. s.n. și pcte. critice cond.

Obs
În aplicațiile noastre avem $dx_i\cdot dx_j=dx_j\cdot dx_i$, $(\forall)\ i,j=\overline{1,p-k}$

1. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x func:

a) $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{2-x}$

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

Fie $y=\frac{x}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-y}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}y^n=\frac{1}{2}\cdot\sum_n\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_n\frac{1}{2^{n+1}}x^n, (\forall)\ x\in(-2,2)$

$x\in(-2,2)\Rightarrow y\in(-1,1)$

b) $f:[-1;1]\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1-x)$

2. a) Stud. cont. lui f

b) Det. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

c) Stud. dif. lui f

unde: i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Sol

a) Vezi seminar 6

b) Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{(xy)'_x\cdot(x^2+y^2)-(xy)\cdot(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2y+y^3-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{x(x^2+y^2)-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+(t,0))-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t}=\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$$

Am obț. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x(x^2+y^2)-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ - desc.

Stud. dif. lui f in (0,0)

f nu e cont. in (0,0)

$\Rightarrow$ f nu e dif. in (0,0) $\square$

ii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5y^2}{x^8+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Sol

a) f - cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Stud. cont. in (0,0)

V_1

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x^5y^2}{x^8+y^4}-0\right|=\left|\frac{x^5y^2}{x^8+y^4}\right|=\frac{|x^5y^2|}{x^8+y^4}=|x|\underbrace{\frac{x^4y^2}{x^8+y^4}}_{\leq\frac{1}{2}}\leq\frac{|x|}{2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0\Rightarrow f\text{- cont. in }(0,0)$$

$\left(\text{expl: } \frac{x^8+y^4}{2}\geq\sqrt{x^8\cdot y^4}=\frac{x^8+y^4}{2}\geq x^4\cdot y^2 \;/:x^8+y^4 \Rightarrow \frac{1}{2}\geq\frac{x^4y^2}{x^8+y^4}\right)$

V_2

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x^5y^2}{x^8+y^4}\right|=\frac{|x^5y^2|}{x^8+y^4}=\frac{|x^5|\cdot|y^2|}{x^8+y^4}=\left(\frac{|x|^8}{x^8+y^4}\right)^{\frac{5}{8}}\cdot\left(\frac{|y|^4}{x^8+y^4}\right)^{\frac{2}{4}}\cdot(x^8+y^4)^{\frac{5}{8}+\frac{2}{4}-1}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{x^8}{x^8+y^4}\right)^{\frac{5}{8}}}_{\leq1}\underbrace{\left(\frac{y^4}{x^8+y^4}\right)^{\frac{2}{4}}}_{\leq1}\cdot(x^8+y^4)^{\frac{9}{8}-1}\leq(x^8+y^4)^{\frac{1}{8}>0}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0\Rightarrow f\text{ cont. in }(0,0)$$

b) Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{5x^4y^2(x^8+y^4)-x^5y^2\cdot8x^7}{(x^8+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^5y(x^8+y^4)-x^5y^2\cdot4y^3}{(x^8+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-0}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$$

c) $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\text{ - cont. pe }\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\\ \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\text{ deschisă}\end{array}\right\}\Rightarrow f\text{ dif. pe }\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Stud. dif. lui f in (0,0)

Dacă f ar fi dif. în (0,0), atunci $df(0,0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $df(0,0)(u,v)\overset{+}{=}\left[\left(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}},\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}}\right)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right]=0u+0v=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^5y^2}{x^8+y^4}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5y^2}{(x^8+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^5 y_n^2}{(x_n^8+y_n^4)\sqrt{x_n^2+y_n^2}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^5}\cdot\frac{1}{n^4}}{\left(\frac{1}{n^8}+\frac{1}{n^8}\right)\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^9}}{\frac{2}{n^8}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{2n^9\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y^2}{(x^8+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$

Deci f nu e dif. în $(0,0)$ $\square$

iii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^4+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Sol

a) f cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Stud. cont. lui f în $(0,0)$

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{y^3}{x^4+y^2}\right| = \frac{|y^3|}{x^4+y^2} = |y|\cdot\underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\leq 1} \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0)$$

(Expl. $x^4+y^2 \geq y^2 \Rightarrow \frac{y^2}{x^4+y^2} \leq 1$)

b)
c) Rezolvați voi! $\square$

c) Stud. dif. lui f

unde: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{x^4+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Sol

b) Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{0\cdot(x^4\cdot y^2)-y^3\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2}=\frac{-4x^3y^3}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{3y^2(x^4+y^2)-y^3\cdot 2x}{(x^4+y^2)2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\dots=1$$

c) $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\text{ cont. in }\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\\ \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\text{ deschisă}\end{array}\right\}\Rightarrow$ f dif. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Stud. dif. lui f în $(0,0)$

Dacă f ar fi dif în $(0,0)$, atunci $df(0,0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$df(0,0)(u,v)\overset{+}{=}\left[\left(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}\ \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}\right)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right]=$$

$$=0\cdot u+1\cdot v=v$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(x,y)-df((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{y^3}{x^4+y^2}-0-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cancel{y^3}-x^4y-\cancel{y^3}}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\left|\frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\left|\frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{x^4|y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\underbrace{\frac{x^2|y|}{x^4+y^2}}_{\le\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}|x|\cdot\underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\le 1}\le\frac{1}{2}|x|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

(Expl. $\frac{x^4+y^2}{2}\ge\sqrt{x^4y^2}=x^2|y|\Rightarrow\frac{1}{2}\ge\frac{x^2|y|}{x^4+y^2}$

(expl. $\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{x^2}=|x|\Rightarrow 1\ge\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$)

Deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow f$ dif. în $(0,0)$

$$\quad 0 \;,\; (x,y) = (0,0)$$

a) f cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (op. cu func. el.)

Stud. cont. lui f în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^7y^8}{\sqrt{x^{28}+y^{28}}} - 0 \right| = \frac{|x|^7 y^8}{\sqrt{x^{28}+y^{28}}} = |y| \underbrace{\frac{|x|^7|y|^7}{\sqrt{x^{28}+y^{28}}}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{2}}} \leq |y|\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|y|}{\sqrt{2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0)$$

(Expl. $\frac{x^{28}+y^{28}}{2} \geq \sqrt{x^{28}\cdot y^{28}}$

$$\frac{x^{28}+y^{28}}{2} \geq x^{14}y^{14}$$

$$\frac{\sqrt{x^{28}+y^{28}}}{\sqrt{2}} \geq |x|^7|y|^7$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{|x|^7|y|^7}{\sqrt{x^{28}+y^{28}}}$$

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{7x^6y^8\sqrt{x^{28}+y^{28}} - \frac{x^7y^8}{2\sqrt{x^{28}+y^{28}}}\cdot 28x^{27}}{x^{28}+y^{28}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0}{t^{14}} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{0}{t^{14}} - 0}{t} = 0$$

2. Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Arătați că f e cont.

b) Det. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ și arăt. că sunt continue pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ și nu sunt cont. în $(0,0)$

c) Arăt. că f e dif.

a) f e cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Stud. cont. în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|xy\sin\frac{1}{x^2+y^2} - 0\right| = |xy|\underbrace{\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1} \leq |xy| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0)$$

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy\left(\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy\left(\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy\left(\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dots\dots$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Arăt. că $\frac{\partial f}{\partial x}$ nu e cont. în $(0,0)$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right) (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(y_n \sin\frac{1}{x_n^2+y_n^2} - \cos\left(\frac{1}{x_n^2+y_n^2}\right)\cdot\frac{-2x_n^2 y_n}{(x_n^2+y_n^2)^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\cdot\sin\frac{1}{\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2} - \cos\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2}\right)\cdot\frac{2\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}}{\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2\right)^2} =$$

$$= 0 - \lim_{n\to\infty}\cos 2n\pi\cdot\frac{\cancel{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^3}{2\cdot\cancel{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^4} =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}(1\cdot\sqrt{n\pi}) = -\infty \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ nu e cont. în $(0,0)$

Analog se arată că $\frac{\partial f}{\partial y}$ este cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

c) $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont. pe } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \text{ desc.}\end{array}\right\} \Rightarrow f$ dif. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Stud. dif. lui f în $(0,0)$

Dacă f ar fi dif în $(0,0)$,

atunci $df(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$df(0,0)(u,v) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y) - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\underbrace{\sin\frac{1}{x^2+y^2}}_{\leq 1}\right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x|\underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ dif. în } (0,0)$$

(Expl. $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$)

Arătați că f e dif. și $xz\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - yz\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + (x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$, $(\forall)(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Fie $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (xy,\ x^2+y^2-z^2)$

$f = f\circ g$

Fie $u, v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $u(x,y,z) = x\cdot y$

$v(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = (y, 2x)$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = (x, 2y)$ $\quad(\forall)(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = (0, 2z)$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \text{ cont. pe } \mathbb{R}^3\\ \mathbb{R}^3 \text{ desc.}\end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3$$

$$\left.\begin{array}{l}f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3\\ g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3\end{array}\right\} \Rightarrow f = f\circ g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g=(u,v)"] \arrow[rr, bend right, "f=g\circ f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(x,y,z) $\quad (u,v)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial(f\circ g)}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot y + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot x + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial(f\circ g)}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot(-2z)$$

$$xz\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - yz\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + (x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z} = \ldots = 0$$

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

$\mathbb{R}^2$ - desc., f. cont.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 4x^3$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3$ $\quad (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ - cont. pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ desc.} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 4x^3 = 0 \\ -4y^3 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - y^9 = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-y^8) = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = 0, x = 0 \\ \text{sau} \\ y = 1, x = 1 \\ \text{sau} \\ y = -1 \quad x = -1 \end{array}$$

Punctele crit. ale lui f sunt: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Obs că f e de clasă C^2

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \Rightarrow (0,0)$ Nu e pct. de ext. local

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -12 < 0 \\ \Delta_2 = 144 - 36 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,1)$ - pct. de max. local

$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (-1,-1)$ e pct. de max. local

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$

Sol

$(0,\infty)^3$ desc.

f cont.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} \qquad (\forall)(x,y,z) \in (0,\infty)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \text{ cont. pe } (0,\infty)^3 \\ (0,\infty)^3 \text{ desc.} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ dif. pe } (0,\infty)^3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow -z^{10} + z^2 = 0 \Rightarrow z^2(1 - z^8) = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow -x z^4 + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow x z^4 = \frac{1}{z} \Rightarrow x = \frac{1}{z^5} \\ -\frac{y}{z^2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{y}{z^2} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Singurul pct. crit al lui f este $(1,1,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{2}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{2x}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{2y}{z^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)$$

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & -\frac{1}{z^2} \\ 0 & -\frac{1}{z^2} & \frac{2y}{z^3} \end{pmatrix}$$

$$Hf(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 6 > 0 \\ \Delta_3 = 6 - 2 - 2 = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,1,1) \text{ pct. de extr. min.}$$

Exc

Fie $f:(0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = xy + xz + yz$

Să se det. punctele de extrem local ale lui f cu legătura $xyz = 1$

Sol

$E = (0,\infty)^3$ dex.

Fie $g: E \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = xyz - 1$

$(g = g_1)$ și $A = \{(x,y,z) \in E \mid g(x,y,z) = 0\}$

$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) =$

$= \operatorname{rang}(yz\ \ xz\ \ xy) = 1\ (\forall)(x,y,z) \in E$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y+z \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = yz$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x+z \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = xz$

$\frac{\partial f}{\partial z} = x+y \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$ cont. pe E

Fie $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$

$= xy + yz + xz + \lambda(xyz - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Scădem prima ec. din a doua și obț.:

$x - y + \lambda z(x-y) = 0$

$\Rightarrow (x-y)(1+\lambda z) = 0 \Rightarrow$

$x = y$ sau $\lambda z = -1$

Cazul 1

$x = y$

Din a 3-a ec. avem:

$x + x + \lambda x^2 = 0 \Rightarrow$

$x(2 + \lambda x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{\lambda}$
$x \in (0,\infty)$

$\Rightarrow y = -\frac{2}{\lambda}$

Cazul 2

$\lambda z = -1 \Rightarrow z = -\frac{1}{\lambda}$

$y - \frac{1}{\lambda} + \lambda y\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{\lambda} = 0$ contradicție

Din prima ec. avem:

$-\frac{2}{\lambda} + z + \lambda\left(-\frac{2}{\lambda}\right) \cdot z = 0$

$\Rightarrow -\frac{2}{\lambda} - z = 0 \Rightarrow z = -\frac{2}{\lambda}$

$-\frac{8}{\lambda^3} = 1 \Rightarrow \lambda = -2$

Deci $(x,y,z) = (1,1,1)$

Singurul pct. staționar al lui f cu leg. $xyz = 1$ este $(1,1,1)$

Avem $L(x,y,z) = xy + xz + yz - 2(xyz - 1)$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 - 2z = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1 - 2y = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}$

$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1 - 2x = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}$

$(\forall)(x,y,z) \in E$

Obs. că L e de clasă C^2

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1) = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(1,1,1) = \dots\dots = -1$

Fie $F_{(1,1,1)}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_{(1,1,1)}(u,v,w) = d^2L_{(1,1,1)}(u,v,w)^2$

Avem $F_{(1,1,1)} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1)dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1)dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1)dz^2 +$
leg

$2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(1,1,1)\,dx dy + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(1,1,1)\,dx dz + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(1,1,1)\,dy dz =$

$= -2(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz)$

Diferențiem legătura $xyz - 1 = 0$ în (x,y,z) și obț.:

$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$

În $(1,1,1)$ rel prec. devine:

$dx + dy + dz = 0$

Avem $dz = -dx - dy$

Fie $F_{(1,1,1)}|_{leg} = -2(dx\,dy + dx(-dx-dy) + dy(-dx-dy)) =$

$= -2(\cancel{dx dy} - dx^2 - \cancel{dx dy} - dx dy - dy^2) =$

$= 2(dx^2 + dx\,dy + dy^2) =$

$= 2\left(\left(\frac{1}{2}dx + dy\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}dx\right)^2\right)$ evident!

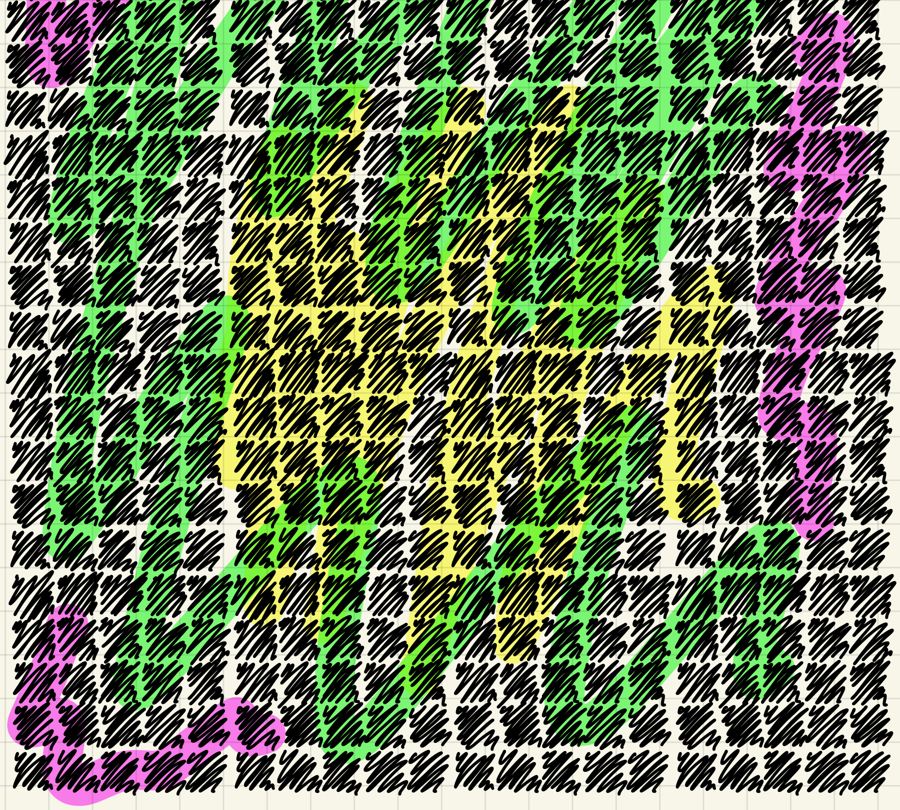
$= 2\left(\frac{1}{2}dx + dy\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}dx\right)^2$

$F_{(1,1,1)}|_{leg}: \mathbb{R}^{2 = 3-1} \to \mathbb{R}$, $F_{(1,1,1)}|_{leg}(\underset{(u_1,u_2)}{\overset{\shortparallel}{u}}) = 2\left(\frac{1}{2}u_1 + u_2\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u_1\right)^2$

$F_{(1,1,1)}|_{leg}(u) \geq 0$, $(\forall) u \in \mathbb{R}^2$

$F_{(1,1,1)}|_{leg}(u) = 0 \iff u = (0,0)$

Deci $(1,1,1)$ e pct. de min. local al lui f cu leg. $xyz = 1$



Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Def

1. S.n. diviziune a $[a,b]$, un sist. de puncte
$\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

Notăm $D([a,b])=\{\Delta \mid \Delta$ div. a lui $[a,b]\}$

2. Numărul $\|\Delta\| \overset{def}{=} \max\{x_i-x_{i-1} \mid i=\overline{1,n}\}$
s.n. norma div. Δ

3. S.n. sist. de puncte intermediare asoc. div. Δ, un sist. de puncte:
$\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ a.î. $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(\forall) i=\overline{1,n}$

4. Suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ s.n. Suma Riemann asoc. func. f, div. Δ și s.p.i. $\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ și s.n. cu $\sigma_\Delta(f,\xi)$

Def

Spunem că f e integr. Riemann dacă
$(\exists)\ I\in\mathbb{R}$ a.î. $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ \delta_\varepsilon>0$ a.î.
$(\forall)\ \Delta\in D([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ și
$(\forall)\ \xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ s.p.i., avem $|I-\sigma_\Delta(f,\xi)|<\varepsilon$

Obs

Nr. real I din def. prec., dacă există, este unic și se notează $I=\int_a^b f(x)dx$

Teoremă

f integr. Riemann $\Rightarrow$ f mărg. ($\not\Leftarrow$)

Teoremă

f cont. $\Rightarrow$ f integr. Riemann ($\not\Leftarrow$)

Teoremă

f monotonă $\Rightarrow$ f integr. Riemann ($\not\Leftarrow$)

Teorema de permutare a lim. cu integr.

Fie șirul de func. $(f_n)_n$, $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ și $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a.î.:

1) f_n integr. R $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$
2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Atunci f e integr. R și $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

Ex

Det. $\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}dx$

Sol

Fie $f_n:[\frac{1}{2},1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$

Știm din seminar 7 că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$,
unde $f:[\frac{1}{2},1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

f_n e cont. $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow f_n$ integr. R, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$

Conf. T.P.L.I. avem că $\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx=0$ $\square$

Def

O mult. $A\subset\mathbb{R}$ s.n. neglijabilă Lebesgue dacă pt. orice $\varepsilon>0$, există un șir $(I_n)_n$ de intervale desc. și mărg. a.î.:

1. $A\subset\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\ell(I_n)<\varepsilon$, $\ell(I_n)=$ lung. inter. I_n

$\ell((c,d))=d-c$

Obs

1. Orice submulțime a unei mult. neglij. Lecbeg este neglij. Leobg
2. Orice mult. cel mult numărabilă este neglij. Leubeg
3. Orice reuniune cel mult numărabilă de mult. neglij. Lesbeg este neglij. Leobueg

mulțimea discontinuităților lui f)

Criteriul lui Lebesgue de integr. R

Sunt echiv.:

1) f integr. R
2. f mărg. și D_f neglij. Lebesgue

Exc

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}; & x\in(0,1]\\ 7; & x=0\end{cases}$

Arătați că f e integr. R

Sol

$|f(x)|\le 7\ (\forall)\ x\in[0,1] \Rightarrow f$ mărg.

$D_f\subset\underbrace{\{0\}}$ finită $\Rightarrow$ neglij. Lebesgue

Cf. Crit. lui Lebesgue de integr. R avem că f integr. R $\square$

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărg.

Fie $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$

Fie $M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$

și $m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$

Def

1. $S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$

(suma Darboux superioară asoc. lui f și Δ)

2. $s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$

(— " — inf — " —)

3. $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf\{S_\Delta(f)\mid \Delta\in\mathcal{D}([a,b])\}$

(integr. Darboux superioară a func. f)

4. $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup\{s_\Delta(f)\mid\Delta\in\mathcal{D}([a,b])\}$

(— " — inf — " —)

Obs

1) $s_\Delta(f)\le S_\Delta(f)$
2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

1) f integr. R
2. $\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$
3. $\forall\,\varepsilon>0, (\exists)\ \Delta_\varepsilon\in\mathcal{D}([a,b])$ a.î. $S_{\Delta_\varepsilon}(f)-s_{\Delta_\varepsilon}(f)<\varepsilon$
4. $(\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)\ \delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\ \Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$, avem $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$

Obs

Dacă una dintre afirm. de mai sus e ader., $\int_a^b f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$

Exc

Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}\\ -1, & x\in[-1,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Det. $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ și prec. dacă f e integr. R

Sol

$|f(x)|\le 1, (\forall)\ x\in[-1,1]\Rightarrow f$ = mărg.

Fie $\Delta: -1=x_0<\dots<x_n=1$, $\Delta\in\mathcal{D}([-1,1])$

$M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=1, (\forall)\ i=\overline{1,n}$

(deoarece între orice 2 nr. reale $(\exists)$ inf. nr. $\mathbb{Q}$)

$m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=-1, (\forall)\ i=\overline{1,n}$

(deoarece între orice 2 nr. reale $(\exists)$ inf. nr. $\mathbb{Q}$)

$S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\dots+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_0=1-(-1)=2$

$s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=-2$

Cum Δ a fost aleasă arbitrar:

$\overline{\int_{-1}^{1}} f(x)dx=\inf\{S_\Delta(f)\mid\Delta\in\mathcal{D}([-1,1])\}=\inf\{2\mid\Delta\in\mathcal{D}([-1,1])\}=2$

$\underline{\int_{-1}^{1}} = \dots = -2$

$\overline{\int_{-1}^{1}} f(x)dx\ne\underline{\int_{-1}^{1}} f(x)dx \Rightarrow f$ nu e integr. R

I. Fie $-\infty < a < b \leq +\infty$ și $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, o func. integr. R pe orice interval $[a,d]$, $a<d<b$

Def

Dacă există $\lim\limits_{\substack{d\to b\\ d<b}} \int_a^d f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$, val. ei s.n. integr. improprie a lui f pe $[a,b)$ și s.n. $\int_a^b f(x)dx$

Def

1. Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv. dacă $\lim\limits_{\substack{d\to b\\ d<b}} \int_a^d f(x)dx$ e finită
2. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x)dx$ e div. dacă nu e conv.

II. Fie $-\infty \leq a < b < +\infty$ și $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, o func. integr. R pe orice interval $[c,b]$, $a<c<b$

Def

Dacă există $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$, val. ei s.n. integr. improprie a lui f pe $(a,b]$ și s.n. $\int_a^b f(x)dx$

Def

1. Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv. dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)dx$ e finită
2. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x)dx$ e div. dacă nu e conv.

III. Fie $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ și $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, o func. integr. pe orice interval $[c,d]$, $a<c<d<b$

Def

Dacă există $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$, val. ei s.n. integr. improprie a lui f pe (a,b) și s.n. $\int_a^b f(x)dx$

Def

1. Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv. dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)dx$ e finită
2. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x)dx$ e div. dacă nu e conv.

Prop

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, o func. integr. R pe orice interval $[c,d]$, $a<c<d<b$.
Dacă $(\exists)\ \alpha \in (a,b)$ a.î. integrl. improprii $\int_a^\alpha f(x)dx$ și $\int_\alpha^b f(x)dx$ sunt conv., atunci și integr. improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv. și $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx$

Vom enunța crit. de conv. doar pt. func.
def. pe $[a,+\infty)$, $a\in\mathbb{R}$

1. **Crit. de comp. cu inegalități**

Fie $f,g:[a,\infty)\to[0,\infty)$, 2 func. integr. R pe orice interval $[a,d]$, $a<d<\infty$

a.î. $0\le f(x)\le g(x)$, $(\forall)\,x\in[a,\infty)$

1) Dacă $\int_a^\infty g(x)\,dx$ e conv, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e conv.

2) Dacă $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e div, atunci $\int_a^\infty g(x)\,dx$ e div.

2. **Crit. de comp. cu limită**

Fie $f,g:[a,\infty)\to[0,\infty)$, 2 func. integr. R pe orice interval $[a,d]$, $a<d<\infty$ a.î.

1) $g(x)>0$, $(\forall)\,x\in[a,+\infty)$

2) $(\exists)\,\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{not}{=}l\in[0,\infty]$

i) Dacă $l\in(0,\infty)$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ și $\int_a^\infty g(x)\,dx$ au aceeași natură

ii) Dacă $l=0$ și $\int_a^\infty g(x)dx$ e conv., atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ e conv.

iii) Dacă $l=\infty$ și $\int_a^\infty g(x)dx$ e div, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ e div.

3. **Crit. integral al lui Cauchy**

Fie $f:[a,\infty)\to[0,\infty)$, o func. desc.
(deci este integr. R pe orice interval $[a,d]$, $a<d<\infty$).

Atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ și seria de nr. reale $\sum_{n=p}^\infty f(n)$ au aceeași natură
$(\forall\, p\in[a,\infty)\cap\mathbb{N})$

Def

1) $\Gamma:(0,\infty)\to(0,\infty)$,
$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

2) $B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$
$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

Prop

1) $\Gamma(1)=1$

2) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

3) $\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$, $(\forall)\,x\in(0,\infty)$
În particular, $\Gamma(1+n)=n!$ $(\forall)\,n\in\mathbb{N}$)

4) $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$ $(\forall)\,x\in(0,1)$

5) $B(x,y)=B(y,x)$ $(\forall)\,x,y\in(0,\infty)$

6) $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ $(\forall)\,x,y\in(0,\infty)$

7) $B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}\,dt$, $(\forall)\,x,y\in(0,\infty)$

Denumire alt.:
func. Γ și B s.n. și integrale euleriane

Exc
Det $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\,dx$

Sol
$$\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=\lim_{d\to\infty}\int_1^d\frac{1}{x^2}dx=$$
$$=\lim_{d\to\infty}-\frac{1}{x}\Big|_1^d=\lim_{d\to\infty}\left(-\frac{1}{d}+1\right)=1 \quad\square$$

1. Det. pctle. de extrem local ale func. și prec. natura lor, unde:

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4$

Sol

$\mathbb{R}^2$ desc.

f cont.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont. pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ desc.} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ dif. pe $\mathbb{R}^2$

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Singurul pct. critic al lui f este $(0,0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \quad (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Obs. că f e de clasă C^2

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Crit. nu decide

$f(x,y) \geq f(0,0) \quad (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$x^4 + y^4 \geq 0 \Rightarrow (0,0)$ pct. de min. global al lui f

$\Rightarrow (0,0)$ pct. de min. local al lui f $\square$

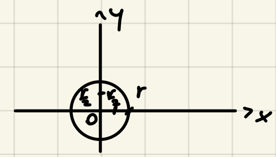
b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - y^4$

Sol

Ca la punctul a, $(0,0)$ e singurul pct. critic și criteriul cu Hessiana nu decide

$f(x,y) \quad f(0,0)$

$x^4 - y^4 \quad 0$



$(\forall)\ r > 0$, avem $\left(\frac{r}{2}, 0\right) \in B((0,0), r)$ și $\left(0, \frac{r}{2}\right) \in B((0,0), r)$

$(\forall)\ r > 0$, avem $f\left(\frac{r}{2}, 0\right) = \frac{r^4}{16} > 0 = f(0,0)$

și $f\left(0, \frac{r}{2}\right) = -\frac{r^4}{16} < 0 = f(0,0)$

Deci $f(0,0)$ nu e pct. de extrem local al lui f

impl. (şi unică) $z = z(x,y)$ şi det. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ şi $dz(1,0)$

. . . .

a) $z(1,0) = 0$

b) $F(x,y,z(x,y)) = 0$, $(\forall)\ (x,y) \in U$

c) . . . .

Pt. a det. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ avem 2 variante:

V_1 (fol. a) şi c))

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{\cos y - z(x,y)\sin x}{-y\sin z(x,y) + \cos x},\ (\forall)\ (x,y) \in U$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{\cos 0 - z(1,0)\sin 1}{-0\sin z(1,0) + \cos 1} = -\frac{1}{\cos 1}$$

$(z(1,0) = 0)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \dots = -\frac{1}{\cos 1}$$

z de clasă $C^1 \Rightarrow z$ dif. (pe U)

$$dz(1,0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ dz(1,0)(u,v) = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] =$$

$$= -\frac{u}{\cos 1} - \frac{v}{\cos 1} \quad \left(\text{i.e. } dz(1,0) = -\frac{1}{\cos 1}dx - \frac{1}{\cos 1}dy\right)$$

V_2 (fol. a) şi b))

Conf. b, avem $F(x,y,z(x,y)) = 0$, $(\forall)\ x,y \in U$, deci

$$x\cos y + y\cos z(x,y) + z(x,y)\cos x - 1 = 0\ (\forall)\ (x,y) \in U \quad (*)$$

Derivăm parţial relaţia $(*)$ în raport cu x şi obţ.:

$$\cos y - y\sin z(x,y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\sin x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)(-y\sin z(x,y) + \cos x) = -\cos y + z(x,y)\sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{-\cos y + z(x,y)\sin x}{-y\sin(z(x,y)) + \cos x}\ (\forall)\ (x,y) \in U$$

se repetă V_1

Sol

$\mathbb{R}^3$ desc.

Fie $g,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z)=-x+y+z-1$
$h(x,y,z)=x-z$

şi $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0$ şi $h(x,y,z)=0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y+z \quad \frac{\partial g}{\partial x}=-1 \quad \frac{\partial h}{\partial x}=1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+z \quad \frac{\partial g}{\partial y}=1 \quad \frac{\partial h}{\partial y}=0 \quad (\forall)(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=x+y \quad \frac{\partial g}{\partial z}=1 \quad \frac{\partial h}{\partial z}=-1$$

Toate deriv. parţiale de mai sus sunt cont.

Fie $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)=$
$=xy+xz+yz+\lambda(-x+y+z-1)+\mu(x-z)$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=0\\ g(x,y,z)=0\\ h(x,y,z)=0\end{cases} \iff \begin{cases} y+z-\lambda+\mu=0\\ x+z+\lambda=0\\ x+y+\lambda-\mu=0\\ -x+y+z=1\\ x-z=0 \Rightarrow x=z\end{cases} \Rightarrow y=1$$

Adunăm ec. 1 şi 3 şi obţ:

$x+2y+z=0 \xrightarrow[x=z]{y=1} 2x=-2$
$\Rightarrow x=-1$
$\Rightarrow z=-1$

$x+z+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$

$y+z-\lambda+\mu=0 \Rightarrow \mu=2$

$$\text{rang}\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(-1,1,-1) & \frac{\partial g}{\partial y}(-1,1,-1) & \frac{\partial g}{\partial z}(-1,1,-1)\\ \frac{\partial h}{\partial x}(-1,1,-1) & \frac{\partial h}{\partial y}(-1,1,-1) & \frac{\partial h}{\partial z}(-1,1,-1)\end{pmatrix}=\text{rang}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=2$$

Singurul pct. staţionar al lui f cu leg. $g(x,y,z)=0$ şi $h(x,y,z)=0$ este $(-1,1,-1)$

Avem: $L(x,y,z)=xy+xz+yz+2(-x+y+z-1)+2(x-z)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=1=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}=1=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=1=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial y}$$

Deriv. parţiale sunt cont.
$\Rightarrow L$ de clasă C^2

Fie $F_{(-1,1,-1)}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F_{(-1,1,-1)}(\underset{(v_1,v_2,v_3)}{v})=d^2L(-1,1,-1)(v)^2$, i.e. $F_{(-1,1,-1)}=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(-1,1,-1)dx^2+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(-1,1,-1)dy^2+\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(-1,1,-1)dz^2+$
$+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(-1,1,-1)dxdy+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}(-1,1,-1)dxdz+2\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(-1,1,-1)dydz=$
$=2(dxdy+dydz+dxdz)$

$1dx - 1dz = 0$

în punctul staț. $(-1,1,-1)$, sist. prec. devine:

$$\begin{cases} -dx + dy + dz = 0 \\ dx - dz = 0 \Rightarrow dz = dx \end{cases} \Rightarrow dy = 0$$

Fie $F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg} : \mathbb{R}^{3-2} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg} = 2(dx \cdot 0 + 0 \cdot dz + dx \cdot dx) = 2dx^2$ (i.e. $F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg}(\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{u}}) = 2u^2$)

$$\left.\begin{array}{l} F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg}(u) \geq 0, (\forall) u \in \mathbb{R} \\ F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,1,-1) \text{ e pct. de min. local al lui } f$$

Integrarea func. de mai multe variabile

Obs

Toate intervalele de forma (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b)$ sunt considerate cu $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$

Obs

Lucrăm cu sp. metric $(\mathbb{R}^n, \underset{d}{\overset{\text{not}}{d_2}})$ cu $n\in\mathbb{N}^*$

Def

1) O mult. de forma $D=[a_1,b_1)\times\ldots\times[a_n,b_n)=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ s.n. dreptunghi

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)=\{D\subset\mathbb{R}^n \mid D \text{ dreptunghi}\}$

2) O mult. de forma $E=\bigcup_{i=1}^{p}D_i$, unde $p\in\mathbb{N}^*$ și $D_i\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\ (\forall)\ i=\overline{1,p}$ s.n. mult. elementară.

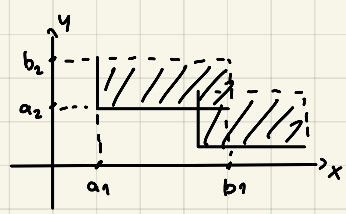
$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)=\{E\subset\mathbb{R}^n \mid E \text{ mult. el.}\}$

3) Fie $D=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Numărul $vol(D)=(b_1-a_1)\ldots(b_n-a_n)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ s.n. volumul lui D

4) Fie $E=\bigcup_{i=1}^{p}D_i\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $D_i\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\ (\forall)\ i=\overline{1,p}$ și $D_i\cap D_j=\emptyset\ (\forall)\ i\neq j$.

$vol(E)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{p}vol(D_i)$ s.n. volumul lui E



Prop

Orice mult. el. poate fi scrisă ca reuniune finită de dreptunghiuri dij. unote 2 câte 2. Deci putem defini $vol(E)$ pt. orice $E\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Fie $A\subset\mathbb{R}^n$, A mărg.

Def

1) $\mu^*(A)=\inf\{vol(F) \mid F\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n), A\subset F\}$ (măsura Jordan exterioară a lui A)

2) $\mu_*(A):=\sup\{vol(E) \mid E\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n), E\subset A\}$ (măsura Jordan interioară a lui A)

Def

Spunem că A e măsurabilă jordan dacă $\mu_*(A)=\mu^*(A)$

Notație

$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)=\{A\subset\mathbb{R}^n \mid A \text{ măsurabilă jordan}\}$

Def

Dacă $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, valoarea comună $\mu_*(A)=\mu^*(A)$ s.n. măsura jordan a lui A și se not cu $\mu(A)$

Prop

Fie $A\subset\mathbb{R}^n$ mărg. Atunci

1) $\mu^*(A)\le\mu^*(Fr(A))+\mu_*(\mathring{A})$

2) $\mu^*(\bar{A})=\mu^*(A)$

3) $\mu_*(A)=\mu_*(\mathring{A})$

Prop

Fie $A\subset\mathbb{R}^n$ mărg. Sunt echiv.

1) $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2) $\bar{A},\mathring{A}\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\bar{A})=\mu(\mathring{A})$

3) $Fr(A)\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(Fr(A))=0$

Prop

Fie $p,q\in\mathbb{N}^*$

1) Fie $A\subset\mathbb{R}^p$ și $B\subset\mathbb{R}^q$ mărg.

Atunci $A\times B\subset\mathbb{R}^{p+q}$ e mărg și avem ineg:

$\mu^*(A\times B)\le\mu^*(A)\cdot\mu^*(B)$

$\mu_*(A\times B)\ge\mu_*(A)\cdot\mu_*(B)$

2) Fie $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ și $B\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^q)$.

Atunci $A\times B\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^{p+q})$ și $\mu(A\times B)=\mu(A)\cdot\mu(B)$

Exemple de mulț. măsurabile Jordan /nemăsurabile

1. Fie $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ $\quad$ A e mărg, deoarece $A\subset[0,1]$

Avem că $A\notin\mathcal{J}(\mathbb{R})$

Justificare

$\mu^*(A)=\mu^*(\underbrace{\bar{A}}_{=[0,1]})=\mu^*([0,1])=\mu^*(\overline{[0,1)})=\mu^*([0,1))=\mu([0,1))=1-0=1$

$\mu_*(A)=\mu_*(\underbrace{\mathring{A}}_{=\emptyset})=\mu_*(\emptyset)=\mu(\emptyset)=0$

$\mu_*(A)<\mu^*(A)\Rightarrow A\notin\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2. $A=\underbrace{\{(x,0)\mid x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\}}_{=([0,1]\cap\mathbb{Q})\times\{0\}}\subset\mathbb{R}^2$

Avem că $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$?

Justificare

$A\subset[0,1]\times[0,1]\Rightarrow A$ mărg.

$\mu^*(A)=\mu^*(\underbrace{\bar{A}}_{=[0,1]\times\{0\}})=\mu^*([0,1]\times\{0\})\le\mu^*([0,1])\cdot\mu^*(\{0\})=\mu^*([0,1))\cdot\mu^*(\{0\})=$

$=\mu([0,1))\cdot\mu(\{0\})=$

$=(1-0)\cdot\mu^*(\{0\})=\mu^*(\{0\})$.

Pt. orice $\varepsilon>0$, avem $\{0\}\subset[0,\varepsilon)$,

deci $\mu^*(\{0\})\le vol([0,\varepsilon))=\varepsilon$

Așadar $\mu^*(\{0\})=0$, deci $\mu^*(A)=0$

Deci $\mu_*(A)=\mu^*(A)=0$

Deci $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ □

și $f(x) \le g(x), (\forall) x \in [a,b]$, atunci

mult. $I'_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ f(x) \le y \le g(x)\} \subset \mathbb{R}^2$

e măsurabilă Jordan și $\mu(I'_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$

2) Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e integr. R, atunci

$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^2$ e măs. J și $\mu(G_f) = 0$

Exc

Fie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1,\ |y| \le x^2\}$

A.î. că $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și det. $\mu(A)$

Sol

$|x| \le 1 \iff -1 \le x \le 1$

$|y| \le x^2 \iff -x^2 \le y \le x^2$

Deci $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ -x^2 \le y \le x^2\}$

Fie $f,g : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = -x^2,\ g(x) = x^2 \Rightarrow f(x) \le g(x), (\forall) x \in [-1,1]$

f,g cont. $\Rightarrow f,g$ integr. R

$A = I'_{f,g}$

Deci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(A) = \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{1} 2x^2\,dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$ □

Def

Fie $X \ne \emptyset$, $\emptyset \ne \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ și $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$

Spunem că tripletul $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ e sp. cu măsură aditivă dacă:

1) $(\forall) A,B \in \mathcal{A}$, avem $A \cup B \in \mathcal{A}$ și $A \setminus B \in \mathcal{A}$ (va rezulta că $A \cap B \in \mathcal{A}$)

2) $(\forall) A,B \in \mathcal{A}$ a.î. $A \cap B = \emptyset$ avem $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$

Prop

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \mathrm{vol})$ și $(\mathbb{R}^n, \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), \mu)$ sunt sp. cu măsură aditivă

Def

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Spunem că $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

e o descompunere Jordan a lui A dacă:

1) $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$

2) $(\forall)\ i,j \in \{1,\dots,p\},\ i \ne j$, avem $\mu(A_i \cap A_j) = 0$

1) $\|\mathcal{A}\| \overset{def}{=} \max\{\operatorname{diam}(A_i) \mid i=\overline{1,p}\}$, unde $\operatorname{diam}(A_i) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A_i\}$, $(\forall)\ i=\overline{1,p}$
(norma lui $\mathcal{A}$)

2) O familie $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^n$ s.n. sistem de puncte intermediare asoc. desc. lui $\mathcal{A}$ dacă $\alpha_i \in A_i$ $(\forall)\ i=\overline{1,p}$

Obs

1) Pt orice $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și pt. orice $\varepsilon > 0$, $(\exists)\ \mathcal{A}$, o desc. Jordan a lui A a.î. $\|\mathcal{A}\| < \varepsilon$

2) Dacă $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ e o desc. J. a lui A, atunci $\mu(A) = \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i)$

Exemplu

Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ și $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$

Știm că A e măs. Jordan

Fie $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$, o diviziune a intervalului $[a,b]$

Familia $\mathcal{A} = \{[x_{i-1}, x_i] \mid i=\overline{1,p}\}$ e desc. J. a lui A

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc. J. a lui A și $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ un sist. de pcte. inter. asoc. lui $\mathcal{A}$.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$

Def

Suma $\sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i)\mu(A_i)$ s.n. suma Riemann asoc. func. f, desc. $\mathcal{A}$ și s.p.i. $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ și s.n. cu $\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}})$

Spunem că f e integr. R (pe A) dacă $(\exists)\ I \in \mathbb{R}$ a.î. $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ cu prop. că $(\forall)\ \mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ desc. J. a lui A cu $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon$ și $(\forall)\ (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ s.p.i. asoc. lui $\mathcal{A}$, avem că $|I - \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}})| < \varepsilon$

Obs

Nr. real I din def. prec., dacă există, este unic

Notație

$I \overset{not}{=} \int_A f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n = \int_A f(x)\,dx$

Obs

În contextul def prec. avem $\int_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 \dots dx_n = \lim_{\|\mathcal{A}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}})$

Notații

1) Dacă $n=2$, scriem $I = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$
2) Dacă $n=3$, scriem $I = \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Arăt că f e integr. R și $\int_A f(x)dx = 0$

Sol

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ desc. a lui A

$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A_i) = 0, (\forall) i = \overline{1,p}$

Fie $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ s.p.i. asoc. lui $\mathcal{A}$

$\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = \sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i) \underbrace{\mu(A_i)}_{0} = 0$

Deci f e integr. R și $\int_A f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{A}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = 0$ □

Exc

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$ și $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = a$

Arătați că f e integr. R și $\int_A f(x)dx = a\mu(A)$

Sol

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc. J a lui A

și $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ s.p.i asoc. lui $\mathcal{A}$

$\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{f(\alpha_i)}_{a} \mu(A_i) = a \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) = a\mu(A)$

Deci f e integr. R pe a și $\int_A f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{A}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = a\mu(A)$ □

Prop

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$

1) Dacă f e cont. și mărg., atunci f e integr. R

2) Dacă a e compactă și f e cont, atunci f e integr. R

Prop

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$ și $f, g: A \to \mathbb{R}$, 2 func. integr. R

Atunci $f \pm g$ și $a \cdot f$ sunt integr. R și $\int_A (f \pm g)(x)dx = \int_A f(x)dx \pm \int_A g(x)dx$

și $\int_A (a f)(x)dx = a \int_A f(x)dx$

Dacă în plus $f(x) \le g(x)$, $(\forall)$ $x \in A$

atun $\int_A f(x)dx \le \int_A g(x)dx$

atunci f e integr R pe A și pe B

Dacă în plus, $\mu(A\cap B)=0$, atunci $\int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$

Prop

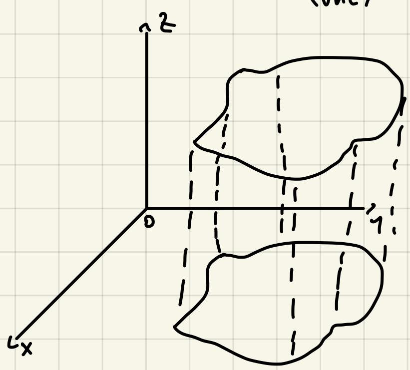
Fie $A,B \in J(\mathbb{R}^n)$ și $f: A\cup B \to \mathbb{R}$ o func. mărg. și integr. R. pe A și pe B. Atunci f e integr. R pe $A\cup B$

Dacă în plus, $\mu(A\cap B)=0$, atunci $\int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$

Interpretare geometrică a integralei multiple

Fie $A\in J(\mathbb{R}^n)$ și $f: A\to\mathbb{R}$ integr. R

1) Dacă $n=2$ și $f(x)\geq 0\ (\forall)\, x\in A$,
atunci $\iint_A f(x,y)\,dxdy$ repr. vol. corpului cuprins între planul xoy și graficul funcției f



2) Dacă $n=2$, atunci $\iint_A 1\,dxdy$ repr. aria mulț. A
3) Dacă $n=3$, atunci $\iiint_A 1\,dxdydz$ repr. vol. lui A

Teorema lui Fubini

Fie $B\subset\mathbb{R}^n$ compactă și măs. J. și $\alpha,\beta: B\to\mathbb{R}$ cont. a.î. $\alpha(x)\leq\beta(x), (\forall)\, x\in B$

Fie $A=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1,\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1})\in B$ și $\alpha(x_1,\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1})\leq x_j\leq\beta(x_1,\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1})\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$
unde $(x_1,\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_{n+1})$

Fie $f: A\to B$ cont. Atunci $A\subset\mathbb{R}^{n+1}$ e comp. și măs. J, f e integr. R pe A și $\int_A f(x_1,\dots,x_{n+1})\,dx_1\dots dx_{n+1} = \int_B\left(\int_{\alpha(x_1,\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1})}^{\beta(x_1,\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1})} f(x_1,\dots,x_{n+1})\,dx_j\right)dx_1\dots dx_{j-1}dx_{j+1}\dots dx_{n+1}$

1. Integrala dublă

i) Dacă $A=[a,b]\times[c,d]$ și $f:A\to\mathbb{R}$ e cont.,
atunci A e mulț. comp. și măs. J. și

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

ii) Dacă $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\in[a,b],\ \alpha(x)\le y\le\beta(x)\}$, unde $\alpha,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont.
și $f:A\to\mathbb{R}$ e cont., atunci A e mulț. comp. și măs. J. și

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

iii) Dacă $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\in[c,d],\ \varphi(y)\le x\le\psi(y)\}$,
unde $\varphi,\psi:[c,d]\to\mathbb{R}$ cont. a.î. $\varphi(y)\le\psi(y)\ (\forall)\,y\in[c,d]$
și $f:A\to\mathbb{R}$ cont., atunci A e mulț. comp. și măs. J
și $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$

2. Integrala triplă

i) Dacă $A=[a,b]\times[c,d]\times[k,p]$ și $f:A\to\mathbb{R}$ e cont.,
atunci A e mulț. comp. și măs. J. și

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_k^p f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

ii) Fie $B\subset\mathbb{R}^2$ o mulț. comp. și măs. J. și $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in B$ și $\varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y)\}$,
unde $\varphi,\psi:B\to\mathbb{R}$ cont.
Fie $:A\to\mathbb{R}$ cont.
Atunci A e mulț. comp. și măs. J. și

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_B\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy\text{, etc.}$$

al lui f cu leg. $y=0$ și nu este pct. de ext. local al lui f

Sol

Fie $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=y$ și
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^2$ desc.

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}=1$ $\quad (\forall)\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Toate deriv. parțiale de mai sus sunt cont. deci f este de clasă C^1

$\frac{\partial g}{\partial x}=0$

$\frac{\partial g}{\partial y}=1$

Fie $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $L(x,y)=x^3+y+\lambda y=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ g(x,y)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}3x^2=0 \Rightarrow x=0\\ 1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1\\ y=0 \Rightarrow y=0\end{array}$$

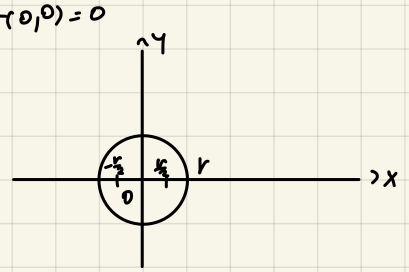
$\mathrm{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\ \ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)=\mathrm{rang}\,(0\ \ 1)=1$, $(\forall)\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\supset A\supset\{(0,0)\}$

Singurul pct. staționar al lui f cu leg. $g(x,y)=0$ este $(0,0)$

Arăt. că $(0,0)$ nu este pct. de ext. local al lui f cu leg. $g(x,y)=0$

$(\forall)\ (x,y)\in A$, avem $f(x,y)=f(x,0)=x^3$

$f(0,0)=0$



$(\forall)\ r>0$, avem $(\frac{r}{2},0)$ și $(-\frac{r}{2},0)\in A\cap B((0,0),r)$

$f(-\frac{r}{2},0)<f(0,0)<f(\frac{r}{2},0)$, $(\forall)\ r>0$

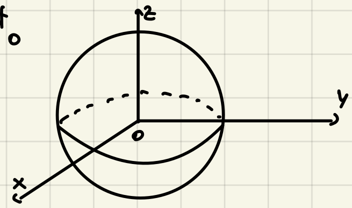
Deci $(0,0)$ nu e pct. de ext. local al lui $f|_A$ (f cu leg. $g(x,y)=0$)

Det. pctle. de ext. global și val. ext.
ale lui $f|_{B[(0,0,0),1]}$, unde $B[(0,0,0),1] \overset{not}{=} \bar{B}((0,0,0),1) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

Sol

f cont.
$B[(0,0,0),1]$ compactă (închisă și mărg.) $\Big|$ => f mărg. și își atinge marginile

Notăm $(0,0,0) \overset{not}{=} 0$



Căutăm pctle. criticice și staționare $(x^2+y^2+z^2=1)$
și calc. valorile func. și alegem max. și min.

Notăm $h = f|_{B(0,1)}$

$B(0,1)$ - desc.
h-cont.

$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x$

$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y \quad (\forall)\ (x,y,z)\in B(0,1)$

$\frac{\partial h}{\partial z} = 6z$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \text{ cont. pe } B(0,1) \\ B(0,1) \text{ desc.} \end{array}\right\} \Rightarrow h\text{-dif. pe } B(0,1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4x = 0 \\ 2y = 0 \\ 6z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0,0) \text{ pct. critic}$$

3. Fie $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ 2x+2y+z=1\}$
și $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$. Det. val. ext. (globale) ale lui $f|_A$

Sol

$A \subset B[(0,0,0),1] \Rightarrow A$ mărg.

Fie $g_1, g_2 : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, $g_2(x,y,z) = 2x+2y+z-1$

$\left.\begin{array}{l} A = g_1^{-1}(\{0\}) \cap g_2^{-1}(\{0\}) \\ \left.\begin{array}{l} g_1, g_2 \text{ cont.} \\ \{0\} \text{ - înc.} \end{array}\right\} \Rightarrow g_1^{-1}(\{0\}) \text{ închisă și } g_2^{-1}(\{0\}) \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ închisă}$

Continuați voi

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}dx$

Sol

Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

f_n cont. $\Rightarrow$ f_n integr. R, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Conv. s.

Fie $x \in [0,1]$

$|f_n(x)| = \frac{x|\sin(nx)|}{n^2+nx^2+x} \leq \frac{1}{n^2}$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

Conv. u.

$\sup\limits_{x\in[0,1]} (|f_n(x) - f(x)|) = \sup\limits_{x\in[0,1]} \frac{x|\sin(nx)|}{n^2+nx^2+x} \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f.$

Deci putem aplica th. de perm. a lim. cu integrala

şi avem că:

1) f e integr. R

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}dx = \int_0^1 0\,dx = 0$ □

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx$

Sol

Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

f_n cont. $\Rightarrow$ f_n integr. R $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

C.S

Daca $x \in \{0,1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Fie $x \in (0,1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{x}(1-x^2)^{n+1}}{n\,\cancel{x(1-x^2)^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(1-x^2)}{n} = 1-x^2 < 1$

Conf. crit. rap. pt. şiruri de nr. poz.,

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Deci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1$

$x\in[0,1]$ $\quad$ $x\in[0,1]$ $\quad$ $\uparrow_{x=\frac{1}{n}}$

Deoarece $(1-\frac{1}{n^2})^n > 0$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n = e^0 = 1 \neq 0$

Deci avem $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{u}{\not\rightarrow}} f$

Așadar nu putem aplica th. de perm. a lim. cu integrala

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^1 n(1-x^2)'(1-x^2)^n dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+1)}\int_0^1 ((1-x^2)^{n+1})' dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+1)}(0-1) = \frac{1}{2}\ \left(\text{dif. de } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0\right) \ \square$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$

Sol

Fie $f_n : [0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x) = \ln(1+x^n)$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

C.S. $\quad f_n$ - cont. $\Rightarrow f_n$ - integr. R

Fie $x\in[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ \ln 2, & x=1\end{cases}$$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ \ln 2, & x=1\end{cases}$

C.U.

$\left.\begin{array}{l} f_n\text{-cont.}, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^* \\ f \text{ nu e cont. (în 1)}\end{array}\right\} \Rightarrow f_n \underset{n\to\infty}{\overset{u}{\not\rightarrow}} f$

Așadar nu putem aplica th. de perm. a lim. cu integr.

$0 \le \ln(1+x^n) \le x^n$, $(\forall)\, x\in[0,1]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow 0 \le \underbrace{\int_0^1 \ln(1+x^n)dx}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \le \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = 0 \left(= \int_0^1 f(x)dx = 0\right)$

$\lim\limits_{d\to\infty}$ $\lim\limits_{d\to\infty}$ $\lim\limits_{d\to\infty}$

b) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim\limits_{c\to-\infty} \int_c^0 e^x dx = \lim\limits_{c\to-\infty} e^x \Big|_c^0 = \lim\limits_{c\to-\infty} (1-e^c) = 1-0 = 1$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim\limits_{\substack{d\to1\\d<1}} \int_0^d \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim\limits_{\substack{d\to1\\d<1}} \arcsin x \Big|_0^d = \lim\limits_{\substack{d\to1\\d<1}} (\arcsin d - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \lim\limits_{\substack{c\to0\\c>0}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x} dx \underset{\uparrow}{=} \lim\limits_{\substack{c\to0\\c>0}} \int_{\ln c}^{\ln\frac{1}{2}} t^{-2} dt = \lim\limits_{\substack{c\to0\\c>0}} -\frac{1}{t} \Big|_{\ln c}^{\ln\frac{1}{2}} = \lim\limits_{\substack{c\to0\\c>0}} \left(-\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} + \frac{1}{\ln c}\right) = -\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln 2}$ □

sv. $\ln x = t$

$\frac{1}{x} dx = dt$

$x = c \Rightarrow t = \ln c$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \ln\frac{1}{2}$

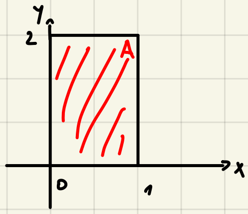
e) $\int_0^1 \frac{1}{x^5} dx = \lim\limits_{\substack{c\to0\\c>0}} \int_c^1 x^{-5} dx = \lim\limits_{\substack{c\to0\\c>0}} \left(\frac{1}{-4x^4} \Big|_c^1\right) = \lim\limits_{\substack{c\to0\\c>0}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4c^4}\right) = +\infty$ □

Exc

a) $\iint_A (2x+y)\,dxdy$

$A = [0,1] \times [0,2]$

Sol



$A = [0,1] \times [0,2] \Rightarrow A \in J(\mathbb{R}^2)$ şi A compactă

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x+y$

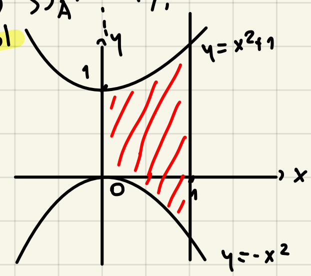
f cont.

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (2x+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\left(2xy + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{y=0}^{y=2} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 (4x+2)\,dx = 2x^2 + 2x \Big|_0^1 = 4 \quad \square$$

b) $\iint_A x\,dxdy$, unde A e mulţ. plană mărginită de $y = x^2+1$, $y = -x^2$, $x = 0$ şi $x = 1$

Sol



$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], -x^2 \le y \le x^2+1 \}$

Fie $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\alpha(x) = -x^2$, $\beta(x) = x^2+1$

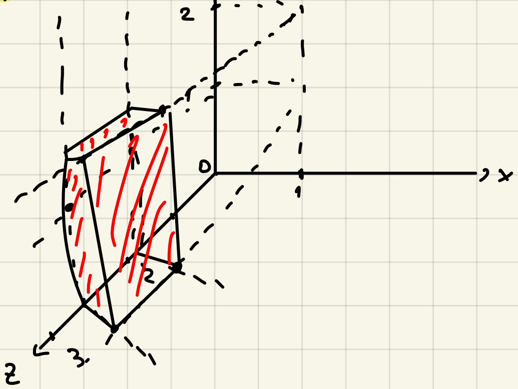
α, β - cont.

$A \in J(\mathbb{R}^2)$ şi A compactă

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$

f cont.

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2+1} x\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(yx \Big|_{-x^2}^{x^2+1} \right) dx = \int_0^1 (\cancel{x^3}\, x + \cancel{x^3})\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \square$$



$A = [0,1]\times[1,2]\times[2,3] \Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și A comp.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y$

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_2^3 y\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 yz \Big|_{z=2}^{z=3} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 y\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 dx = \int_0^1 \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Lucrăm în sp. metric $(\mathbb{R}^n, \underset{d}{\overset{\text{not}}{\|}}d_2)$

Prop

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ o mulț. convexă și mărg.

Atunci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathring{A}$ și $h: A \to \mathbb{R}^n$,

$h = (h_1, \dots, h_n)$ o func. care admite

toate deriv. parțiale în punctul a.

Matricea $\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s.n.

matricea jacobiană

(sau matricea Jacobi)

a lui h în a și s.n cu $J_h(a)$

Det. matricei

↳ jacobianul lui h în a

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V deschise,
$h: U \to V$ un difeomorfism de clasă C^1
(i.e. h e bij. și h, h^{-1} sunt de clasă C^1),
$\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\bar{A} \subset U$ și
$f: h(A) \to \mathbb{R}$ o func. integr. R și
mărg. (avem din cele de mai sus că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$)

Atunci func. $(f \circ h) \cdot |\det J_h|: A \to \mathbb{R}$ e integr. R și
mărg. și $\int_{h(A)} f(y)\,dy = \int_A (f \circ h)(x) \cdot |\det J_h(x)|\,dx$

Def

O mulț. $A \subset \mathbb{R}^n$ s.n. neglij. Lesboeg dacă
$(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)(D_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a.î.
$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$ și $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{vol}(D_k) < \varepsilon$

Obs

1) Orice submulț. a unei mulț. neglij. Leubeg este, la rândul ei, neglij. Loebek
2) Orice mulț. c.m. numărabilă este neglij. Lwbg
3) Orice reuniune c.m. numărabilă de mulț. neglij. Lesbesgue este neglij. Lowbeak
4) Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\mu(A) = 0$.
Atunci A este neglij. Loinbank

Teorema de schimbare de variabilă. Varianta 2 (Teorema lui Peste)

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V, deschise, $h: U \to V$
un difeomorfism de clasă C^1 a.î. $Fr(U)$ e neglij. Loaebaeske,
$\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A \subset U$, h și $\det J_h$ sunt mărg. pe A și
$f: h(A) \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg.
(din cele de mai sus avem că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$).

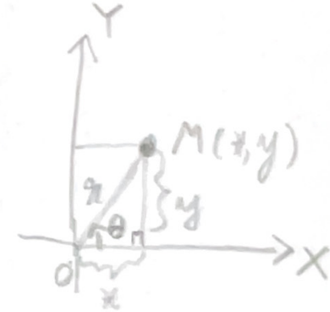
Atunci func. $(f \circ h) \cdot |\det J_h|: A \to \mathbb{R}$ e integr. R și
mărg. și $\int_{h(A)} f(y)\,dy = \int_A (f \circ h)(x) \cdot |\det J_h(x)|\,dx$

Schimbări standard de variabilă pentru integrala dublă

1. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare

$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta.$

$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta.$



θ în sens trigon.

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = 0$).
Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta \\ y = \beta + r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r f(\alpha + r\cos\theta, \beta + r\sin\theta)\,dr\,d\theta$,
unde B se găsește din condiția $(x,y) \in A$. $B \subset [0,\infty) \times [0, 2\pi]$

2. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare generalizate

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = 0$) și $a, b \in (0, \infty)$. Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + a r\cos\theta \\ y = \beta + b r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

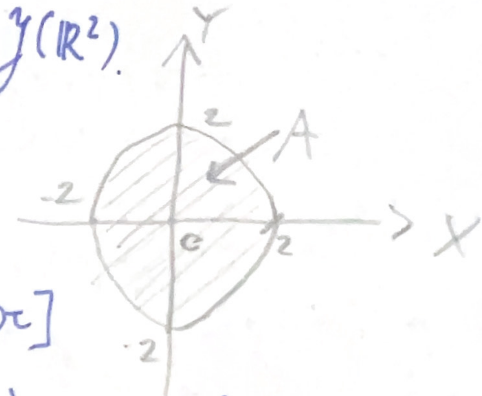
Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B abr\, f(\alpha + ar\cos\theta, \beta + br\sin\theta)\,dr\,d\theta$,

unde B se găsește din condiția $(x,y) \in A$, $B \subset [0,\infty) \times [0, 2\pi]$

exec. Det $\iint_A y\,dx\,dy$, unde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$.

Sol.: A mărg. și convexă $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

A închisă și mărginită $\Rightarrow A$ compactă



Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$. f cont.

S.V. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$x,y \in A \Rightarrow x^2+y^2 \leq 4 \Rightarrow r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \leq 4 \Rightarrow r^2 \leq 4 \Rightarrow r \in [-2,2] \cap$
$\cap [0,\infty) \Rightarrow r \in [0,2]$.

Fie $B = [0,2] \times [0,2\pi]$.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta \right) dr$$

$$= \int_0^2 r^2(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \int_0^2 r^2(-1)(1-1)\,dr = 0.$$

[$h: (0,2)\times(0,2\pi)$ ca să fie deschise. $h \to \mathring{A} \setminus ([0,2]\times\{0\})$ pt. a fol. teorema $\square$ riguros
de fapt $h: (0,\infty)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$]

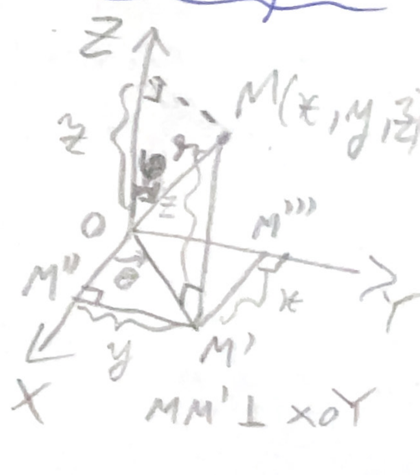
Schimbări standard de variabilă în integrala triplă

1) Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice

$z = r\cos\varphi$ $\quad \sin\varphi = \frac{OM'}{r} \Rightarrow OM' = r\sin\varphi$

$x = (r\sin\varphi)\cos\theta = r\cos\theta\sin\varphi$

~~$y = r\cos\theta$~~ $\quad y = r\sin\theta\sin\varphi$



[deducere intuitivă]

$\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi + \alpha \\ y = r\sin\theta\sin\varphi + \beta \\ z = r\cos\varphi + \gamma \end{cases}$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Avem $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B r^2 \sin\theta \cdot f(\alpha + r\cos\theta\sin\varphi, \beta + r\sin\theta\sin\varphi, \gamma + r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi$, unde B se găsește din condiția $(x,y,z) \in A$.

2. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice generalizate

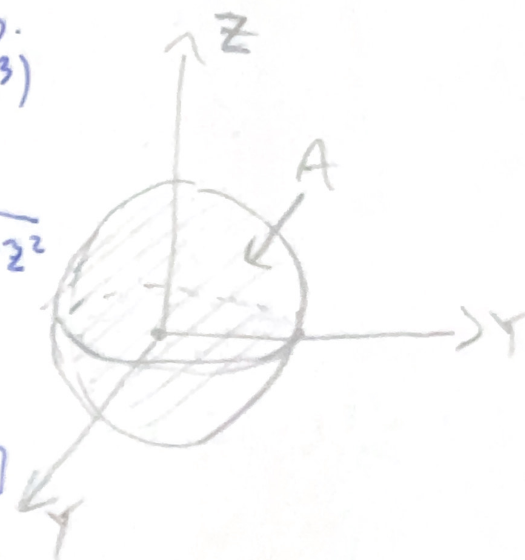
Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ și $a, b, c \in (0,\infty)$. Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + a r\cos\theta\sin\varphi \\ y = \beta + b r\sin\theta\sin\varphi \\ z = \gamma + c r\cos\varphi \end{cases}$, $r \in [0,\infty]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$

Avem $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint abc\, r^2 \sin\varphi\, f(\alpha + ar\cos\theta\sin\varphi, \beta + br\sin\theta\sin\varphi, \gamma + cr\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi$, unde B se găsește din condiția $(x,y,z) \in A$.

Exc Calc $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, unde

$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.



Sol] A convexă și mărg $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$

A compactă.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

f cont.

$$\text{S.V.} \begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & r\in[0,\infty),\ \theta\in[0,2\pi] \\ z = r\cos\varphi & \varphi\in[0,\pi] \end{cases}$$

$(x,y,z)\in A \iff x^2+y^2+z^2\le 1 \iff r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi$
$+ r^2\cos^2\varphi \le 1 \iff r^2\sin^2\varphi\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1} + r^2\cos^2\varphi \iff$

$\iff r^2 \le 1 \underset{r\in[0,\infty)}{\iff} r\in[0,1]$.

Fie $B = [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$

$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B r^2\sin\varphi\, f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$
$dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} r^2\sin\varphi\sqrt{r^2}\,d\varphi\right)d\theta\right)dr =$

$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} r^3(-\cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\theta\right)dr = \int_0^1 2r^3\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 4\pi\cdot\frac{1}{4} = \pi$

$1-(-1)=2$

Teoremă (Crit. lui Lebesgue de integrabilitate Riemann)

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită. Sunt $\equiv$:

1) f int. R

2) D_f e neg Lebesgue, unde $D_f = \{x \in A \mid f$ nu e cont. în $x\}$

Exc. Fie $f: [0,1] \times [2,3] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + 3y, & (x,y) \in [0,1] \times [2,3] \setminus \{(0,2)\} \\ 1, & x = 0 \text{ și } y = 2. \end{cases}$$

Studiați integr. R a fct. f.

Sol.: $|f(x,y)| = |2x+3y| \le 2|x| + 3|y| \le 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$, $\forall (x,y) \in [0,1] \times [2,3] \setminus \{(0,2)\}$

$|f(0,2)| = 1 \le 11$

$\Rightarrow |f(x,y)| \le 11, \forall (x,y) \in [0,1] \times [2,3]$ $\Rightarrow f$ mărg.

$D_f \subset \{(0,2)\}$. $\{(0,2)\}$ finită $\Rightarrow \{(0,2)\}$ neg. Lg.

$\Rightarrow D_f$ negl. Lebesgue. Așadar f e int. R conform crit. de integrabilitate Riemann.

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: A \to \mathbb{R}$ o fct. mărg. și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc. $\mathcal{J}$. a lui A

Notăm $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\forall i = \overline{1,p}$ și $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\forall i = \overline{1,p}$.

Def.: 1) $s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{p} m_i \mu(A_i)$ suma Darboux inferioară asociată lui f și $\mathcal{A}$.

2) $S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{p} M_i \mu(A_i)$ suma Darboux superioară

CDI - C_{13} 8 - (90)

3) $\underline{\int}_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \sup\{s_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ desc. J. a lui $A\}$

integrala Darboux inferioară asociată funcției f

int. Darboux superioară

4) $\overline{\int}_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \inf\{S_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ desc. Jordan a lui $A\}$

Teoremă (Crit. lui Darboux de integrabilitate Riemann)

Sunt echiv.:

1) f integr R.

2) $\underline{\int}_A f(x)\,dx_1\dots dx_n = \overline{\int}_A f(x)\,dx$, caz în care avem $\int_A f\,dx = \overline{\int} = \underline{\int}$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{A}_\varepsilon$ desc. Jordan a lui A a.î. $S_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) - s_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall \mathcal{A}$ desc. J. a lui A cu propr. că $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon$ avem $S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$

Obs. 1) $s_{\mathcal{A}}(f) \le S_{\mathcal{A}}(f)$ 2) $\underline{\int}_A f(x)\,dx \le \overline{\int}_A f(x)\,dx_1\dots dx_n$

Exc Fie $A \in J(\mathbb{R}^2)$ a.î. $\mu(A) > 0$ și $f: A \to \mathbb{R}$,

$f(x,y) = \begin{cases} 0; & x,y \in \mathbb{Q} \\ 1; & \text{altfel} \end{cases}$. Determ. $\overline{\iint}_A f(x,y)\,dx\,dy$, $\underline{\iint}$ și precizați dacă f integr. Riemann.

Sol: $|f(x,y)| \le 1\ \forall (x,y) \in A \Rightarrow f$ mărg.

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc. Jordan a lui A și

$M_i = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in A_i\}\ \forall i = \overline{1,p}$ și

$m_i = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in A_i\}\ \forall i = \overline{1,p}$.

$$S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i)>0}}^{n} M_i \mu(A_i)$$

$$s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i)>0}}^{n} m_i \mu(A_i)$$

$\mu(A_i) > 0 \Rightarrow \mu_*(A_i) > 0 \Rightarrow \exists D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),\ D \subset A_i$ și $vol(D) > 0$.

Fie $B_i = \{(x,y) \in A_i \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ și $C_i = \{(x,y) \in A_i \mid x \notin \mathbb{Q}$ sau $y \notin \mathbb{Q}\}$

Pentru $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ a.î. $\mu(A_i) > 0$, avem $D \cap B_i \neq \emptyset$ și $D \cap C_i \neq \emptyset$. Deci $\forall i = \overline{1,n}$ a.î. $\mu(A_i) > 0$, avem $M_i = 1$ și $m_i = 0$. Așadar $S_{\mathcal{A}}(f) = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i)>0}}^{n} 1 \mu(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A)$ și

$$s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i)>0}}^{n} 0 \cdot \mu(A_i) = 0.$$

$\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy = \inf\{S_{\mathcal{A}}(f) \mid \forall \mathcal{A}$ desc. Jordan a lui $A\} = \inf\{\mu(A)\} = \mu(A)$. $\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy = \sup\{\dots\} = \sup\{0\} = 0$

1. Det. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$

Sol

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \lim_{c\to-\infty} \frac{1}{2}\int_c^0 \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2}\lim_{c\to-\infty} \operatorname{arctg}(x^2)\Big|_c^0 =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{c\to-\infty}(0 - \operatorname{arctg}^2 c^2) = -\frac{1}{2}\lim_{c\to-\infty}(\operatorname{arctg}(c^2)) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \lim_{d\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^d \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \ldots\ldots = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4} dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$$

2. Stud conv. urm. integr. improprii:

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$

Fie $f, g : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$, $g(x) = \frac{1}{x^4}$

Avem $0 \le f(x) \le g(x)$ $(\forall)\, x \in [1, \infty)$

$$\int_1^{\infty} g(x) dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x^4} dx = \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Deci $\int_1^{\infty} g(x) dx$ este conv.

Conf. crit. de comp. cu ineg. avem că $\int_1^{\infty} f(x) dx$ este conv.

b) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-1} dx$

Sol

Fie $f, g : [2, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 1 \in (0, \infty)$$

Conf. crit. de comp. cu lim. avem că

$$\int_2^{\infty} f(x) dx \sim \int_2^{\infty} g(x) dx$$

$$\int_2^{\infty} g(x) dx = \lim_{d\to\infty} \int_2^d \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{d\to\infty} \int_2^d x^{-\frac{1}{2}} = \lim_{d\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_2^d = \lim_{d\to\infty} 2(\sqrt{d} - 2) = \infty$$

$\int_1^{\infty} g(x) dx$ div. $\Rightarrow \int_2^{\infty} f(x) dx$ div.

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$

Sol $\frac{1}{x^{11}} \in (0,1)\ (\forall)\ x \in [1,\infty)$
$\cap$
$(0,\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \sin\frac{1}{x^{11}} > 0,\ (\forall)\ x \in [1,\infty)$

Fie $f:[1,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \sin\frac{1}{x^{11}}$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{(0,\frac{\pi}{2})}{x} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\sin x} \text{ cresc.} \\ \underset{[1,\infty)}{x} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\frac{1}{x^{11}}} \text{ desc.} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ este desc.}$$

Conf. Crit. integral al lui Cauchy

avem că $\int_1^\infty f(x)dx \sim \sum_{n=1}^\infty f(n)$

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n=1}^\infty \sin\frac{1}{n^{11}}$$

Fie $x_n = \sin\frac{1}{n^{11}}\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ și $y_n = \frac{1}{n^{11}}\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^{11}}}{\frac{1}{n^{11}}} = 1 \in (0,\infty)$$

Conf. crit. de comp. cu limită,

avem că $\sum_{n=1}^\infty x_n \sim \sum_{n=1}^\infty y_n$

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{11}}$ = conv. (serie arm. gen. cu $\alpha = 11$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty x_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \sin\frac{1}{n^{11}}$ conv. $\square$

a) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \underset{1}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

s.v. $x^2 = t$
$\Rightarrow x = \sqrt{t}$
$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$
$x = 0 \Rightarrow t = 0$
$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$

c) $\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x}dx \underset{1}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^6}{2^6} e^{-t}dt = \frac{1}{2^7}\int_0^{\infty} t^6 e^{-t} = \frac{1}{2^7}\int_0^{\infty} t^{7-1} e^{-t} = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7}$ $\square$

s.v. $2x = t$
$\Rightarrow x = \frac{t}{2}$
$dx = \frac{1}{2}dt$
$x = 0 \Rightarrow t = 0$
$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

d) $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x^3}dx \underset{1}{=} \frac{1}{3}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{6}} \cdot e^{-t} \cdot t^{-\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$ $\square$

s.v. $x^3 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{3}}$
$dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$
$x = 0 \Rightarrow t = 0$
$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

e) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx \underset{1}{=} 2\int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{2-2t}}dt = \int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{2(1-t)}}dt = \frac{8}{\sqrt{2}}\int_0^1 t^2(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{8}{\sqrt{2}}\int_0^1 t^{3-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt$

s.v. $t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t$ $\quad dx = 2dt$
$x = 0 \Rightarrow t = 0$
$x \to 2 \Rightarrow t \to 1$

$= \frac{8}{\sqrt{2}} B\left(3, \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{16}{15} = \frac{128}{15\sqrt{2}} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$

$B\left(3,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2!\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\cancel{\sqrt{\pi}}}{\frac{15}{8}\cancel{\sqrt{\pi}}} = \frac{16}{15}$

$\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1+2+\frac{1}{2}\right) = \left(2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{5}{2}\Gamma\left(1+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$

Sol

$2x-1=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{7}{4}$

$2y-1=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{5}{4}$

$2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2\cdot\frac{7}{4}-1}(\cos t)^{2\cdot\frac{5}{4}-1}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\pi\sqrt{2}}{32} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{64}$

$B\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma(\frac{7}{4})\cdot\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{7}{4}+\frac{5}{4})} = \frac{\Gamma(\frac{7}{4})\cdot\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma(\frac{7}{4})\cdot\Gamma(\frac{5}{4})}{2!} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{32}$

$\Gamma(\frac{7}{4}) = \Gamma(1+\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}\Gamma(\frac{3}{4})$

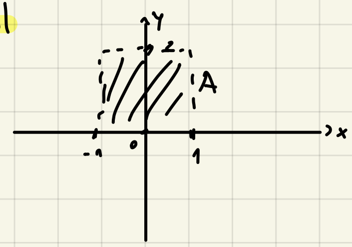
$\Gamma(\frac{5}{4}) = \Gamma(1+\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})$

$\Gamma(\frac{7}{4})\Gamma(\frac{5}{4}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4}) = \frac{3}{16}\Gamma(1-\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{4}) = \frac{3}{16}\frac{\pi}{\sin(\pi\cdot\frac{1}{4})} = \frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6\pi}{16\sqrt{2}} = \frac{6\pi\sqrt{2}}{32} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$ □

4) Det:

a) $\iint_A y\,dx\,dy$, unde $A=[-1,1]\times[0,2]$

Sol



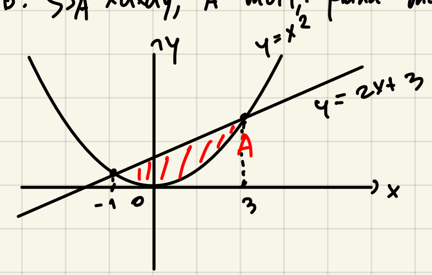
A-comp., $A\in J(\mathbb{R}^2)$

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y$

f-cont.

$\Rightarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^2 y\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 dx = \int_{-1}^{1} 2\,dx = 2x\Big|_{-1}^{1} = 4$ □

b. $\iint_A x\,dx\,dy$, A-mult. plană marg. de $y=x^2$ și $y=2x+3$



$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\in[-1,3],\ x^2\le y\le 2x+3\}$

Fie $\alpha,\beta:[-1,3]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=x^2$, $\beta(x)=2x+3$

α,β cont $\Rightarrow A\in J(\mathbb{R}^2)$ și A comp.

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x$

f_cont

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{3}\left(\int_{x^2}^{2x+3} x\,dy\right)dx = \int_{-1}^{3}\left(xy\Big|_{y=x^2}^{y=2x+3}\right)dx =$

$= \int_{-1}^{3}(-x^3+2x^2+3y)\,dx =$

$= \ldots\ldots =$

Sol

Det. pctle. de intersecție dintre $y=x^2$ și $y=2x+3$

$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x+3 \end{cases} \Rightarrow x^2=2x+3$

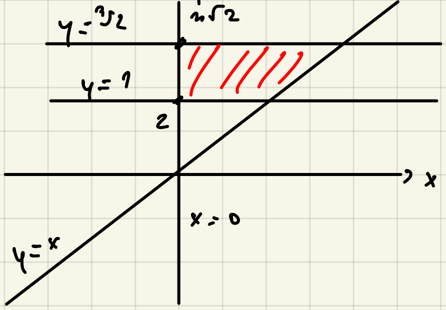
$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x_1=-1 \Rightarrow y_1=1$

$x_2=3 \Rightarrow y_2=9$

c) $\iint_A x\,dx\,dy$, A-mult. plană lim. de $y=-x^2-x+2$ și $y=x-1$



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [1, \sqrt[3]{2}], \ 0 \le x \le y\}$

Fie $\varphi, \psi : [1, \sqrt[3]{2}] \to \mathbb{R}$. $\varphi(x) = 0, \psi(x) = y$

φ, ψ cont.

$A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și compact.

Fie $f : A \to \mathbb{R}, f(x,y) = x$

f cont.

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(\int_0^y x\,dx \right) dy =$

Teorema de permutare a limitei cu integrala, Cazul multidimensional

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$, $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$ a.î.:

1) f_n integr. R și mărg. (pe A)
2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

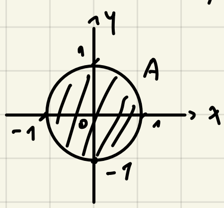
Atunci f este integr. R și mărg. și
$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$$

Exc

Fie $A = B[(0,0),1] = \overline{B}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

Det. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_A \frac{\cos(n(x+y)) + 2(x^2+y^2)}{n^2+nx^2+y^2}\,dx\,dy$

Sol



A convexă și mărg $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$
A compactă

Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$, $f_n(x,y) = \dfrac{\cos(n(x+y)) + 2(x^2+y^2)}{n^2+nx^2+y^2}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ cont } (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \\ A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2) \text{ și comp.} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n$ integr. R și mărg. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

C.s

Fie $(x,y) \in A$

$0 \leq |f_n(x,y)| = \dfrac{|\cos(n(x+y)) + 2(x^2+y^2)|}{n^2+nx^2+y^2} \leq \dfrac{|\cos(n(x+y))| + |2(x^2+y^2)|}{n^2+nx^2+y^2} \leq \dfrac{1+2}{n^2} = \dfrac{3}{n^2}\, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Avem $0 \leq |f_n(x,y)| \leq \frac{3}{n^2}\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$\searrow \downarrow \swarrow$
0

Deci $\lim_{n\to\infty} |f_n(x,y)| = 0$. Prin urmare $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = 0$

Așadar $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 0$

$(x,y)\in A$ ... $(x,y)\in A$ ... $n^2+nx^2+y^2$ ... $n^2 \; n\to\infty$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Conf. Th. de perm. a lim. cu integr. avem că f e integ. R şi mărg.

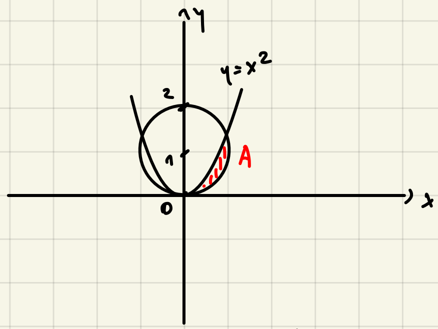
şi $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n(x,y)\,dxdy = \int_A f(x,y)\,dxdy = 0$ □

Seminar 14

1. Det:

a) $\iint_A (1-y)\,dxdy$, unde

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2 \le 1,\ y\le x^2,\ x\ge 0\}$



Det. pctle. de inter. dintre $x^2+(y-1)^2=1$ şi $y=x^2$

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+(x^2-1)^2-1=0 \Rightarrow x^2+x^4-2x^2+1-1=0$$

$\Rightarrow x^4-x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-1)=0$

$\Rightarrow x\in\{-1,0,1\}$

$x_1=-1 \Rightarrow y_1=1$

$x_2=0 \Rightarrow y_2=0$

$x_3=1 \Rightarrow y_3=1$

$x^2+(y-1)^2\le 1 \Rightarrow (y-1)^2 \le 1-x^2$

$\Rightarrow -\sqrt{1-x^2} \le y-1 \le \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow 1-\sqrt{1-x^2} \le y \le 1+\sqrt{1-x^2}$

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1],\ 1-\sqrt{1-x^2}\le y\le x^2\}$

Fie $\alpha,\beta:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=1-\sqrt{1-x^2}$,
$\beta(x)=x^2$

α,β cont.

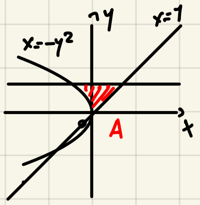
$\Rightarrow A\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ şi A comp.

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=1-y$

f - cont

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2} (1-y)\,dy\right)dx = \int_0^1 \left((-1)\frac{(1-y)^2}{2}\Big|_{y=1-\sqrt{1-x^2}}^{y=x^2}\right)dx =$$

$$= -\frac12\int_0^1 \left[(1-x^2)^2-(1-1+\sqrt{1-x^2})^2\right]dx = -\frac12\int_0^1 (\cancel{1}+x^4-2x^2-\cancel{1}+x^2)\,dx = -\frac12\int_0^1 (x^4-x^2)\,dx = -\frac12\left(\frac15-\frac13\right) = \frac{1}{15}$$ □



$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[0,1],\ -y^2\le x\le y\}$

Fie $f,\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$

$f(y)=-y^2$,

$\varphi(y)=y$ $\quad f,\varphi$ cont.

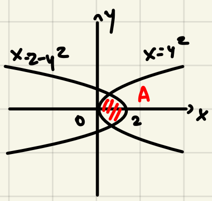
$A\in J(\mathbb{R}^2)$ şi comp.

$f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y$

f cont.

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{-y^2}^{y} y\,dx\right)dy=\int_0^1 xy\Big|_{x=-y^2}^{x=y}dy=\int_0^1 y^2+y^3\,dy=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ □

c) $\iint_A xy\,dx\,dy$, unde A e mult. plană limitată de $x=y^2$ şi $x=2-y^2$



Det. pctle. de inter. dintre $x=y^2$ şi $y=2-y^2$

$\begin{cases}x=y^2\\ 2-y^2\end{cases}\Rightarrow y^2=2-y^2\Rightarrow y^2=1,\ y=\pm1,\ x=1$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[-1,1],\ y^2\le x\le 2-y^2\}$

Fie $f,\varphi:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(y)=y^2$, $\varphi(y)=2-y^2$

f,φ cont.

$A\in J(\mathbb{R}^2)$, A comp.

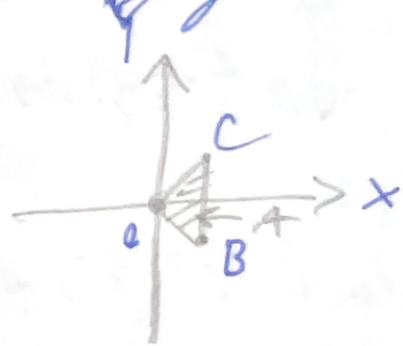
Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$

f cont.

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2}^{2-y^2} xy\,dx\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(\frac{y}{2}x^2\Big|_{x=y^2}^{2-y^2}\right)dy=\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{y}{2}\left((2-y^2)^2-x^2\right)}_{\text{func. impară}}dy=0$ □

d) $\iint_A x\,dx\,dy$, unde A e mulț. plană mărg. de

ΔOBC $(O(0,0),\ B(1,-1),\ C(1,1))$



Rez.: ~~$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1]$~~,

Scriem ec. dreptelor:

! $OB: \dfrac{y-y_O}{y_B-y_O}=\dfrac{x-x_O}{x_B-x_O} \Rightarrow \dfrac{y}{-1}=\dfrac{x}{1} \Rightarrow y=-x$

$OC: \dfrac{y-y_O}{y_C-y_O}=\dfrac{x-x_O}{x_C-x_O} \Rightarrow \dfrac{y}{1}=\dfrac{x}{1} \Rightarrow y=x$

! $BC: \dfrac{y-y_B}{y_C-y_B}=\dfrac{x-x_B}{x_C-x_B} \Rightarrow \dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{x-1}{1-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

CDI - C14

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in [0,1],\ -x \le y \le x\}.$

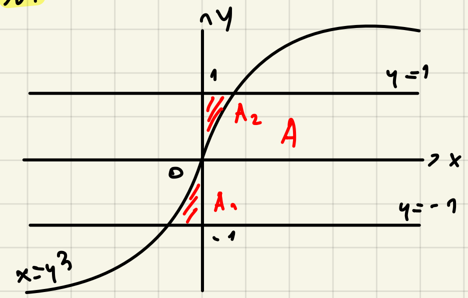
Fie $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\alpha(x) = -x$, $\beta(x) = x$ $\quad \alpha, \beta$ cont.

A mărg. și comp. $\quad$ Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$, f cont.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} x\,dy \right) dx = \int_0^1 x\,y \Big|_{y=-x}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^2)\,dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Sol



$A = A_1 \cup A_2$, unde $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1,0],\ y^3 \le x \le 0\}$
$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,1],\ 0 \le x \le y^3\}$

Fie $\varphi_1, \psi_1 : [-1,0] \to \mathbb{R}$,
$\varphi_1 = y^3$, $\psi_1 = 0$
φ_1, ψ_1 cont
$\Rightarrow A_1 \in J(\mathbb{R}^2)$ si A_1 comp.

Fie $\varphi_2, \psi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$
$\varphi_2 = 0$, $\psi_2 = y^3$
φ_2, ψ_2 cont
$A_2 \in J(\mathbb{R}^2)$ si comp.

$\Rightarrow A = A_1 \cup A_2 \in J(\mathbb{R}^2)$ si comp.

$A_1 \cap A_2 = \{(0,0)\} \Rightarrow \mu(A_1 \cap A_2) = 0 \cdot 0 = 0$

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{y^4}$
f - cont

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy =$

$= \int_{-1}^{0}\left(\int_{y^3}^{0} e^{y^4}\,dx\right)dy + \int_0^1\left(\int_0^{y^3} e^{y^4}\,dx\right)dy =$

$= \int_{-1}^{0}\left(e^{y^4} x \Big|_{x=y^3}^{x=0}\right)dy + \int_0^1\left(e^{y^4} x \Big|_{x=0}^{x=y^3}\right) =$

$= -\frac{1}{4}\int_{-1}^{0} 4y^3 e^{y^4}\,dy + \frac{1}{4}\int_0^1 4y^3 e^{y^4}\,dy$

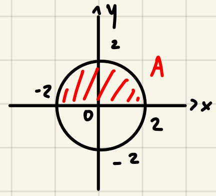
$-\frac{1}{4} e^{y^4}\Big|_{y=-1}^{y=0} + \frac{1}{4} e^{y^4}\Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{4}(1-e) + \frac{1}{4}(e-1) =$

$-\frac{1}{4}(1-e) - \frac{1}{4}(1-e) = -\frac{1}{4}(1-e+1-e) =$

$= -\frac{1}{4}(2-2e) = \frac{e-1}{2}$ □

a) $\iint_A e^{-x^2-y^2}\,dxdy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \le 4, y \ge 0\}$

Sol



A convexă și mărg

$\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$

A comp.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2-y^2}$

f cont.

S.V. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,2\pi]$

$(x,y)\in A \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \le 4 \\ r\sin\theta \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} r^2 \le 4 \\ r\sin\theta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r\in[0,2] \\ \theta\in[0,\pi] \end{matrix}$

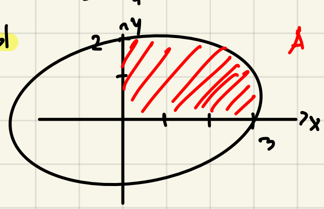
Fie $B = [0,2]\times[0,\pi]$

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_B r\,f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^2\left(\int_0^\pi r e^{-r^2} d\theta\right)dr = \int_0^2 \pi r e^{-r^2}\,dr = -\frac{\pi}{2}\int_0^2(-2r)e^{-r^2}dr = -\frac{\pi}{2}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=2} = -\frac{\pi}{2}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=2} = -\frac{\pi}{2}(e^{-4}-1) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-4})\ \square$$

b) $\iint_A \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\,dxdy$, $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \le 1, x\ge 0, y \ge 0$

Sol



A conv. și mărg

$\Rightarrow A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

A comp.

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}$

S.V. $x = 3r\cos\theta$, $y = 2r\sin\theta$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$

$(x,y)\in A \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \le 1 \\ x\ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9r^2\cos^2\theta}{9} + \frac{4r^2\sin^2\theta}{4} \le 1 \\ 3r\cos\theta \ge 0 \\ 2r\sin\theta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 \le 1 \\ \cos\theta \ge 0 \\ \sin\theta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow r\in[0,1], \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

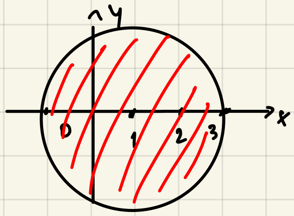
$B = [0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

$= \int_0 \left(\int_0 6r \sqrt{1-r^2}\, d\theta\right) dr = \int_0 \frac{\pi}{2} 6r\sqrt{1-r^2}\, dr = -\frac{3\pi}{2}\int_0 -2r\,(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\, dr = -\frac{3\pi}{2} \frac{\ldots}{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0} = \ldots \square$

1. Det.

a) $\iint_A y\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \le 4\}$

Sol



A convexă și mărg. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

A - compactă

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$

f - cont.

S.V.

$\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,2\pi]$

$(x,y) \in A \Rightarrow (\cancel{1} + r\cos\theta - \cancel{1})^2 + (r\sin\theta)^2 \le 4$

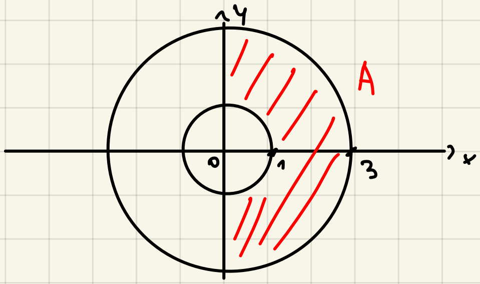
$r^2 \le 4 \Rightarrow \begin{cases} r \in [0,2] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$

Fie $B = [0,2] \times [0,2\pi]$

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r\, f(1 + r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$

$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\right) dr = \int_0^2 \left(r^2(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right) dr = 0 \;\square$

Sol



$$A = \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0\}}_{J(\mathbb{R}^2)} \setminus \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}}_{J(\mathbb{R}^2)}$$

Deci $A\in J(\mathbb{R}^2)$

A comp.

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

f cont.

S.V.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi)$

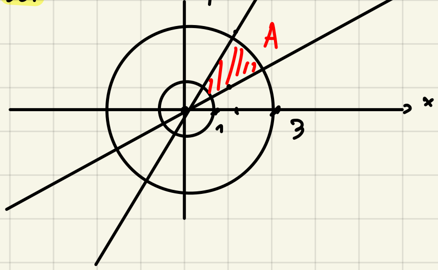
$$(x,y)\in A \Rightarrow \begin{cases}1\le x^2+y^2\le 9\\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1\le r^2\le 9\\ r\cos\theta\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} r\in[1,3] \\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi]\end{array}$$

Fie $B=[1,3]\times\left([0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi]\right)$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_1^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{r^2}\,d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r\sqrt{r^2}\,d\theta\right)dr =$$

$$= \int_1^3\left(r^2\cdot\frac{\pi}{2} + r^2\cdot\frac{\pi}{2}\right)dr = \pi\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_1^3 = \pi\cdot\frac{26}{3}$$



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 9,\ x \le \sqrt{3}y \le 3x\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$

$\underset{\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)}{\cap} \qquad \underset{\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)}{\cap}$

Deci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

A comp.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
f - cont.

S.V.

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, \infty)$

$(x,y) \in A \Rightarrow \begin{array}{l} 1 \le r^2 \le 9 \\ r\cos\theta \le \sqrt{3}\, r\sin\theta \\ r\sin\theta \le \sqrt{3}\, r\cos\theta \end{array} \underset{\theta \in (0, \frac{\pi}{2})}{\Rightarrow} \begin{cases} r \in [1,3] \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \le \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \in [1,3] \\ tg\,\theta \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \\ tg\,\theta \le \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \in [1,3] \\ \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \end{cases}$

Fie $B = [1,3] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$

$= \int_1^3 \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(r \operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} \right) \right) d\theta \right) dr = \int_1^3 \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r\theta\, d\theta \right) dr = \int_1^3 \left(r \cdot \frac{\theta^2}{2} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \right) dr = \int_1^3 \frac{r}{2} \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36} \right) dr =$

$= \int_1^3 \frac{3\pi^2}{36} \cdot \frac{1}{2} \cdot r\, dr = \frac{\pi^2}{24} \int_1^3 r\, dr = \frac{\pi^2}{48}(9-1) = \frac{\pi^2}{6}$ □

1) să schițăm grafic mult. ...

2) să justificăm că mult. din $\mathbb{R}^3$ sunt măs. J. (și nici compacte)

3) să arătăm că func. def. pe mult. din $\mathbb{R}^3$ sunt integr. R. (și nici mărg.)

Afirmațiile de la 2) și 3) se cons. adev. din enunțurile exc.

1. Det:

a) $\iiint_A (xyz+y^2)\,dx\,dy\,dz$, $A=[-1,1]\times[2,3]\times[0,2]$

Sol

$\iiint_A (xyz+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1}\left(\int_2^3\left(\int_0^2 (xyz+y^2)\,dz\right)dy\right)dx =$

$= \int_{-1}^{1}\left(\int_2^3 \frac{xyz^2}{2}+y^2z\Big|_0^2\,dy\right)dz =$

$= \int_{-1}^{1}\left(\int_2^3 (2xy+2y^2)\,dy\right)dz =$

$= \int_{-1}^{1}\left(xy^2+\frac{2}{3}y^3\Big|_2^3\right)dz = \int_{-1}^{1}\left(5x+\frac{2}{3}\cdot 19\right)dx =$

$= \frac{5}{2}x^2+\frac{19}{3}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{38}{3}$

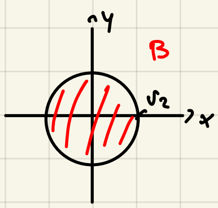
b) $\iiint_A x\,dx\,dy\,dz$, $A=[1,2]\times[0,1]\times[2,3]$

c) $\iiint_A (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in B,\ x^2+y^2\le z\le\sqrt{6-x^2-y^2}\}$ și $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2\}$

Sol

$\iiint_A (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz = \iint_B\left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,dz\right)dx\,dy =$

$= \iint_B\left(\frac{(x^2+y^2)z^2}{2}\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}}\right)dx\,dy = \iint_B \frac{(x^2+y^2)}{2}\cdot\left(6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right)dx\,dy$



B convexă și mărg.

$\Rightarrow B\in J(\mathbb{R}^2)$

B comp.

Fie $f: B\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{(x^2+y^2)}{2}(6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2)\,dx\,dy$

f cont.

S.V.

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$

$(x,y)\in B \Rightarrow x^2+y^2\le 2 \Rightarrow r^2\le 2 \Rightarrow r\in[0,\sqrt{2}]$

$\theta\in[0,2\pi]$

Fie $C=[0,\sqrt{2}]\times[0,2\pi]$

$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_C r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta\,dr =$

$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} r\cdot\frac{r^2}{2}(6-r^2-r^4)\,d\theta\,dr =$

$= \int_0^{\sqrt{2}} \theta\cdot\left(\frac{r^3}{2}(6-r^2-r^4)\right)\Big|_0^{2\pi} dr =$

$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{2}(6-r^2-r^4)\,dr =$

$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(3r^3-\frac{r^5}{2}-\frac{r^7}{2}\right)dr$

$= 2\pi\left(\frac{3}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{1}{12}r^6\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{1}{16}r^8\Big|_0^{\sqrt{2}}\right) =$

$= 6\pi-\frac{4}{3}\pi-2\pi=\frac{8}{3}\pi$

d) $\iiint_A xyz\,dx\,dy\,dz$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in B,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 5\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 9\le x^2+y^2\le 25\}$