Tutoriat 3

Breviar teoretic: ! Pentru a arăta că funcția este continuă pe întreg intervalul dat:

1) Menționăm că funcția este continuă pe intervalele unde este clar acest lucru

2) Demonstrăm că funcția e continuă în punctele de discontinuitate. Cum? Păi:

- Calculăm $\left| f(x,y) - f(\text{pct. de disc.}) \right|$ ← modul

- Ajungem la o variantă mai condensată, de obicei prin majorări

- La final se înlocuiesc variabilele cu val. pct. de discontinuitate

Deci dacă $\lim\limits_{(x,y)\to pct} f(x,y) = f(pct) \Rightarrow$ funcția este continuă în acel punct.

! Pentru a arăta că o fct este uniform continuă pe un interval:

~~1) Se arată că f continuă pe întreg intervalul (opt)~~

1) Se calculează $f'(x)$.

2) Se arată că $|f'(x)| \leq A$. Acest A este ceva finit strict pozitiv (deci $A > 0$).

Exerciții

1) Studiați continuitatea următoarelor funcții:

a)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

<u>Sol</u>:

· f continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare)

· studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$.

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y}\right|=\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\cdot|y$$

$=\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right)\cdot|y|$

Cum evident $x^2\leq x^2+y^2$ $\Rightarrow\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right)\cdot|y|\leq 1\cdot|y|=|y|$

~~Fie~~ Prin trecere la limită $|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)\Rightarrow f$ cont. în $(0,0)$

□

b)
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

<u>Sol</u>:

· f continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare)

· studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

$$\left| f(x,y) - f(0,0) \right| = \left| (x^2+y^2) \sin\frac{1}{xy} - 0 \right| = (x^2+y^2) \left| \sin\frac{1}{xy} \right|$$

$$\leq \underbrace{(x^2+y^2)\cdot 1}_{\text{pentru că}} = x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

pentru că $-1 \leq \sin\frac{1}{xy} \leq 1$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f$ cont în $(0,0)$ $\square$

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1} - 1}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol:

· f cont pe $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu funcții elementare)

· studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$.

$$\left| f(x,y) - f(0,0) \right| = \left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1} - 1} - 0 \right| = \left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1} - 1} \right|^{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}$$

$$= \left| \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{\underbrace{(\sqrt{x^2+y^2+1} - 1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}_{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}} \right| = \left| \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{(x^2+y^2)}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{\cancel{x^2+y^2}} \right| = \sqrt{x^2+y^2+1} + 1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \sqrt{1}+1 = 2 \neq 0$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) \Rightarrow f$ nu e cont în $(0,0)$ $\square$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol:

· f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu fcț elementare)

· studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^4+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \right| = \frac{x^2}{x^4+y^2}|y|$$

Este $\frac{x^2}{x^4+y^2} \leq 1$? Păi nu prea, cam nasol :///

De ce? Păi fie $y = x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^4+x^4} = \frac{x^2}{2x^4} = \frac{1}{2x^2}$ ~~...~~

Păi și asta e ≤ 1, nu? Nu chiar. Fie $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Mai mare ca 1, deci nu merge prin majorări.

Trebuie să găsim o variantă comodă pt. a dem. că f nu e continuă, iar asta ar fi când x și y se află la aceeași putere, deci luăm $y = x^2$.

Fie $y_n = n \Rightarrow x_n = \sqrt{n}$ ~~...~~ $, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow f(\sqrt{n}, n) = \frac{(\sqrt{n})^2 \cdot n}{(\sqrt{n})^4 + n^2} = \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow (\exists)$ un x și un y a.î. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| \neq 0$

$\Rightarrow$ f nu e cont.