CURS#4

6. Factorizarea LU fără pivotare: teorema de existenţă şi unicitate; algoritm; legătura cu MEG fără pivotare; condiţii necesare şi suficiente.
7. Factorizările LDU şi $\mathrm{LDL}^{\mathsf{T}}$: teorema de existenţă şi unicitate; algoritm.

PROBLEME

1) Fie matricea

$$\mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{I}_n - \mathbf{m}^{(1)} \left(\mathbf{e}^{(1)}\right)^{\mathsf{T}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),$$

unde

$$\mathbf{m}^{(1)} \coloneqq \left[0 \; m_2^{(1)} \; m_3^{(1)} \; \ldots \; m_n^{(1)}\right]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{e}^{(1)} \coloneqq \left[1 \; 0 \; 0 \; \ldots \; 0\right]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

şi matricea permutare simplă

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}_{2\ell} \coloneqq \operatorname{col}\left[\mathbf{e}^{(1)} \; \mathbf{e}^{(\ell)} \; \mathbf{e}^{(3)} \; \ldots \; \mathbf{e}^{(\ell-1)} \; \mathbf{e}^{(2)} \; \mathbf{e}^{(\ell+1)} \; \ldots \; \mathbf{e}^{(n)}\right] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Arătaţi că matricea $\mathbf{P}^{(2)}\,\mathbf{M}^{(1)}\,\mathbf{P}^{(2)}$ este o matrice inferior triunghiulară şi are o structură similară cu cea a matricei $\mathbf{M}^{(1)}$, i.e.

$$\mathbf{P}^{(2)}\,\mathbf{M}^{(1)}\,\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{I}_n - \widetilde{\mathbf{m}}^{(1)} \left(\mathbf{e}^{(1)}\right)^{\mathsf{T}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{unde} \quad \widetilde{\mathbf{m}}^{(1)} \coloneqq \left[0 \; \widetilde{m}_2^{(1)} \; \widetilde{m}_3^{(1)} \; \ldots \; \widetilde{m}_n^{(1)}\right]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n.$$

2) Fie $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă. Arătaţi că matricea $\mathbf{A}$ admite MEGFP dacă şi numai dacă matricea $\mathbf{A}$ admite factorizarea LU fără pivotare.

3. METODE DE FACTORIZARE

Considerăm, din nou, sistemul de ecuații liniare:

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (1)$$

<u>Date</u>: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ inversabilă;

$\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

<u>Necunoscutele</u>:

$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

<u>MOTIVAȚIA</u>: Vrem să <u>descompunem/</u>
<u>/factorizăm</u> A sub forma:

$$A = LU \qquad (2)$$

$L := (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ inferior triunghiulară $(l_{ij} = 0,\ 1 \le i < j \le n)$

$U := (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ superior triunghiulară $(u_{ij} = 0,\ 1 \le j < i \le n)$

OBSERVAȚII:

1) Dacă are loc descompunerea / factorizarea (2) a matricei A, atunci sistemul (1) se rezolvă astfel:

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff (LU)\underline{x} = \underline{b} \iff$$

$$L(\underbrace{U\underline{x}}_{=:\underline{y}}) = \underline{b} \iff$$

$$\begin{cases} L\underline{y} = \underline{b}, \text{ ie det. } \underline{y} := L^{-1}\underline{b} \in \mathbb{R}^n \\ \quad\text{(met. subst. ascendente)} \\ U\underline{x} = \underline{y}, \text{ ie det. } \underline{x} := U^{-1}\underline{y} \in \mathbb{R}^n \\ \quad\text{(met subst. descendente)} \end{cases}$$

2) Dacă sistemul (1) se rezolvă prin MEGFP, atunci au loc $\underline{\underline{O(n^3)}}$ operații algebrice elementare.

3) Dacă sistemul (1) se rezolvă folosind (2), atunci au loc $\underline{\underline{O(n^2)}}$ operații alg. elementare.

3.1. FACTORIZAREA LU FĂRĂ PIVOTARE

Fie matricea $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Considerăm următoarea partiționare a lui A:

$$A=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] \stackrel{\text{not}}{=\!:} \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \underline{A}_{12}^T \\ \hline \underline{A}_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

unde

- $a_{11} \in \mathbb{R}$
- $\underline{A}_{12}^T := (a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n}) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$
- $\underline{A}_{21} := (a_{21}\ a_{31} \ldots a_{n1})^T \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n-1}$
- $A_{22} = (a_{ij})_{i,j=\overline{2,n}} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

DEFINIȚIE:

S.n. <u>complementul Schur</u> asociat pivotului $a_{11} \neq 0$ matricea

$$\boxed{S := A_{22} - \underline{A}_{21} \frac{1}{a_{11}} \underline{A}_{12}^T \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})} \quad (3)$$

OBSERVAȚIE:

Matricea S, ie complementul Schur asociat pivotului nenul a_{11}, este bine definită, în sensul că:

- $A_{22} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

- $\underbrace{\underline{A}_{21}}_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})} \underbrace{\frac{1}{a_{11}}}_{\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})} \underbrace{\underline{A}_{12}^T}_{\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

OBSERVAȚIE:

Definiția <u>complementului Schur</u> poate fi extinsă pentru o partiționare mai generală a lui A, i.e.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$$

$$=: \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

- $A_{11} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ <u>inversabilă</u>
- $A_{12} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,k} \\ j=\overline{k+1,n}}} \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R})$
- $A_{21} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{k+1,n} \\ j=\overline{1,k}}} \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$
- $A_{22} = (a_{ij})_{i,j=\overline{k+1,n}} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$

DEFINIȚIE:

Sn complementul Schur asociat matricei de colț (minorului principal de ordin k) $A_{11} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ inversabilă, matricea:

$$\boxed{S := A_{22} - A_{21} (A_{11})^{-1} A_{12} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})} \quad (4)$$

În continuare, presupunem că $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ poate fi factorizată sub forma (2), ie

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \underline{A}_{12}^T \\ \hline \underline{A}_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$$

pp.

$$= \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{2n} & \cdots & l_{nn} \end{array}\right]}_{=L} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \hline 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{array}\right]}_{=U}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} l_{11} & \underline{0}_{1,n-1} \\ \hline \underline{L}_{21} & L_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} u_{11} & \underline{U}_{12}^T \\ \hline \underline{0}_{n-1,1} & U_{22} \end{array}\right]$$

L_{22}: inferior triunghiulară

U_{22}: ~~s~~ superior triunghiulară

$$= \left[\begin{array}{c|c} l_{11} u_{11} & l_{11} \underline{U}_{12}^T \\ \hline \underline{L}_{21} u_{11} & \underline{L}_{21} \underline{U}_{12}^T + L_{22} U_{22} \end{array}\right] \Longrightarrow$$

Egalând prima și ultima matrice (partiționate similar), obținem

$$\begin{cases} l_{11} u_{11} = a_{11} & (5) \\ l_{11} \underline{U}_{12}^T = \underline{A}_{12}^T & (6) \\ \underline{L}_{21} u_{11} = \underline{A}_{21} & (7) \\ \underline{L}_{21} \underline{U}_{12}^T + L_{22} U_{22} = A_{22} & (8) \end{cases}$$

(5): # ecuații $= 1$

nec $= 2$ (l_{11}, u_{11})

(6): # ecuații $= n-1$

nec $= n-1$ $(\underline{U}_{12}^T)$

(7): # ecuații $= n-1$

nec $= n-1$ $(\underline{L}_{21})$

(8): # ecuații $= (n-1)^2$

nec $= \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{(L_{22})} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{(U_{22})} = n(n-1)$

Relațiile (5)-(8):

$$\# \text{ecuații} = 1+2(n-1)+(n-1)^2 = n^2$$

$$\# \text{nec} = 2+2(n-1)+n(n-1)$$

$$= 2n + n(n-1) = n^2+n$$

Prin urmare, relațiile (5)-(8) reprezintă un sistem de <u>n^2-ec</u> pentru <u>(n^2+n) necunoscute</u>, i.e avem n necunoscute în plus față de nr. total de ecuații!

Pentru a obține o soluție unică a sistemului (5)-(8), este suficient să fixăm <u>n necunoscute</u>.

<u>Ecuația (5)</u>:

$$l_{11} u_{11} = a_{11} \Rightarrow \text{Fixăm } \boxed{l_{11} = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{11} = a_{11}}$$

Ecuația (6):

$$\ell_{11} \underline{U}^T_{12} = \underline{A}^T_{12} \iff \underline{U}^T_{12} = \underline{A}^T_{12} \iff$$

$$\boxed{u_{1j} = a_{1j},\ j = \overline{2,n}}$$

Ecuația (7):

$$\underline{L}_{21} u_{11} = \underline{A}_{21} \iff \underline{L}_{21} = \frac{1}{u_{11}} \underline{A}_{21}$$

$$\iff \underline{L}_{21} = \frac{1}{a_{11}} \underline{A}_{21} \iff$$

$$\boxed{\ell_{i1} = a_{i1}/a_{11},\ i = \overline{2,n}}$$

Ecuația (8) devine

$$L_{22} U_{22} = A_{22} - \underline{L}_{21} \underline{U}^T_{12} =$$

$$= A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \underline{A}_{21} \underline{A}^T_{12} =: S \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

complementul Schur asociat lui $a_{11} \neq 0$,

i.e factorizarea LU a lui $S \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

OBSERVAȚII:

1) Singura presupunere de până în acest moment: $a_{11} \neq 0$, i.e pivotul de la momentul actual $\neq 0$ (similar cu cerințele MEGFP)

2) În fapt, presupunerea mare este că A admite MEGFP.

3) Se poate demonstra:

TEOREMA #1 (teorema de caracterizare a MEGFP și LU f. pivotare):
Fie $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ inversabilă.
Echivalente:

(i) $A_k := (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, $k=\overline{1,n}$, inversabile;

(ii) A admite MEGFP;

(iii) A admite factorizarea LU fără pivotare.

TEOREMA #2 (existența și unicitatea factorizării LU fără pivotare):
Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care admite MEGFP.
Atunci:

$\exists!\ L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- inferior triunghiulară;
- $l_{ii} = 1,\ i = \overline{1,n}$;

$\exists!\ U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- superior triunghiulară;

astfel încât $A = LU$.

Demonstrație:

EXISTENȚA: Am demonstrat mai sus în cazul primei linii a lui U, $(u_{11}\ u_{12} \dots u_{1n})$, și a primei coloane a lui L, $(1\ l_{21} \dots l_{n1})^T$, vezi ecuațiile (5) – (7).

Am obținut că problema se reduce la posibilitatea factorizării LU fără pivotare a complementului Schur asociat lui $a_{11} \neq 0$, ie

$$S = A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \underline{A}_{21} \underline{A}_{12}^T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} -$$

$$- \frac{1}{a_{11}} \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{a_{11}}\begin{bmatrix} \boxed{a_{21}a_{12}} & a_{21}a_{13} & \cdots & a_{21}a_{1n} \\ a_{31}a_{12} & a_{31}a_{13} & \cdots & a_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}a_{12} & a_{n1}a_{13} & \cdots & a_{n1}a_{1n} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$S_{11} = a_{22} - \frac{1}{a_{11}} a_{21} a_{12} = \frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}}$$

$$= \frac{\det\left[(a_{ij})_{i,j=1,2}\right]}{\det\left[(a_{ij})_{i,j=1}\right]} = \frac{\det(A_2)}{\det(A_1)} \neq 0$$

cf Teoremei #1.

Prin urmare, S admite MEGFP, deci și LU fără pivotare. $\square$

UNICITATEA:

Fie $L^{(k)} = (\ell_{ij}^{(k)})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k=1,2$, inferior triunghiulară cu $\ell_{ii}^{(k)}=1$, $i=\overline{1,n}$, $k=1,2$, și $U^{(k)} = (u_{ij}^{(k)})_{i,j=\overline{1,n}} \in$

$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară, $k=1,2$,

a.î.:

$$A = L^{(1)} U^{(1)} = L^{(2)} U^{(2)}$$

$$L^{(1)} \neq L^{(2)}, \quad U^{(1)} \neq U^{(2)}$$

Atunci:

$$(L^{(1)})^{-1} A (U^{(2)})^{-1} \Rightarrow$$

$$\underbrace{(L^{(1)})^{-1} L^{(1)}}_{=I_n} U^{(1)} (U^{(2)})^{-1} = (L^{(1)})^{-1} L^{(2)} \underbrace{U^{(2)} (U^{(2)})^{-1}}_{=I_n} \Rightarrow$$

$$\underbrace{U^{(1)} (U^{(2)})^{-1}}_{\text{superior triunghiulară}} = \underbrace{(L^{(1)})^{-1} L^{(2)}}_{\text{inferior triunghiulară}} \Rightarrow$$

$$\boxed{U^{(1)} (U^{(2)})^{-1} = (L^{(1)})^{-1} L^{(2)} = D := \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)}$$

Dar $\left[(L^{(1)})^{-1} L^{(2)}\right]_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$, $\Rightarrow$

$d_i = 1$, $i = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $\boxed{D = I_n}$

Rezultă $L^{(1)} = L^{(2)}$ și $U^{(1)} = U^{(2)}$ Abs $\square$

ALGORITM (LU fără pivotare):

Date: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$k = \overline{1,n}$:

$l_{kk} = 1$

$u_{kk} = a_{kk}$

$i = \overline{k+1,n}$:

$l_{ik} = a_{ik} / u_{kk}$

$u_{ki} = a_{ki}$

end

$i = \overline{k+1,n}$:

$j = \overline{k+1,n}$:

$a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} u_{kj}$

end

end

end

Output: $L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

OBS: Demonstrația Teoremei #1

Cf MEGFP, au loc relațiile:

- $A \equiv A^{(1)} \longmapsto A^{(2)}$: $M^{(1)} A^{(1)} = A^{(2)}$

$$M^{(1)} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21}^{(1)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1}^{(1)} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n - \underline{m}^{(1)} (\underline{e}^{(1)})^T$$

$$\underline{m}^{(1)} := (0, m_{21}^{(1)}, \dots, m_{n1}^{(1)})^T \in \mathbb{R}^n$$

- $A^{(2)} \longmapsto A^{(3)}$: $M^{(2)} A^{(2)} = A^{(3)}$

$\vdots$

- $A^{(n-1)} \longmapsto A^{(n)} \equiv U$ superior triung:

$$M^{(n-1)} A^{(n-1)} = A^{(n)} \equiv U$$

Astfel, obținem:

$$U \equiv A^{(n)} = M^{(n-1)} A^{(n-1)} =$$

$$= M^{(n-1)} M^{(n-2)} A^{(n-2)} = \dots =$$

$$= \underbrace{M^{(n-1)} M^{(n-2)} \dots M^{(1)}}_{=: M} A^{(1)} \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inf. triung.}}}{M} A$$

$\Rightarrow U = M A$

$M := M^{(n-1)} M^{(n-2)} \dots M^{(1)}$

$M^{(k)}$, $k=\overline{1,n-1}$, inferior triung. inversabile

$\Rightarrow M$ inferior triunghiulară și inversabilă, ie

$L := M^{-1} = \left(M^{(n-1)} M^{(n-2)} \dots M^{(1)}\right)^{-1}$

$= \left(M^{(1)}\right)^{-1} \left(M^{(2)}\right)^{-1} \dots \left(M^{(n-1)}\right)^{-1}$

$M^{(k)} := I_n - \underline{m}^{(k)} \left(\underline{e}^{(k)}\right)^T$, $k=\overline{1,n-1}$

$\left(M^{(k)}\right)^{-1} = I_n + \underline{m}^{(k)} \left(\underline{e}^{(k)}\right)^T$, $k=\overline{1,n-1}$

inferior triunghiulară

Astfel, obținem: $A = LU$, unde

$L := M^{-1}$ inferior triunghiură și

U superior triunghiulară.

Cf. Teoremei #2, rezultă echivalența MEGFP și factorizării LU. $\square$

3.2. FACTORIZĂRILE LDU și LDL^T

TEOREMA #3 (existența și unicitatea factorizărilor LDU și LDL^T):

a) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă și a.î. admite factorizarea LU fără pivotare.

Atunci:

$\exists!$ $L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- inferior triunghiulară;
- $l_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$;

$\exists!$ $D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

$\exists!$ $U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- superior triunghiulară;
- $u_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$;

astfel încât $A = LDU$.

b) Dacă, în plus, $A = A^T$, atunci

$A = LDL^T$.

Dem:

b) evident dacă a) adev!

a) EXISTENȚA:

A admite factorizarea LU f.p. $\Longrightarrow$

$\exists!\ L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- inferior triunghiulară;
- $l_{ii} = 1,\quad i=\overline{1,n}$;

$\exists!\ \tilde{U} = (\tilde{u}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- superior triunghiulară;
- $\tilde{u}_{ii} = \dfrac{\det A_i}{\det A_{i-1}},\ i=\overline{1,n}$ (cf Teor#2);

$(\det A_0 \equiv 1)$

a.î. $A = L\tilde{U}$.

Fie $D = \operatorname{diag}(\tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{22}, \dots, \tilde{u}_{nn}) \Longrightarrow$

$\exists!\ D^{-1} = \operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{\tilde{u}_{11}}, \dfrac{1}{\tilde{u}_{22}}, \dots, \dfrac{1}{\tilde{u}_{nn}}\right) \Longrightarrow$

$$D^{-1}\tilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{u}_{12}/\tilde{u}_{11} & \cdots & \tilde{u}_{1n}/\tilde{u}_{11} \\ & 1 & \cdots & \tilde{u}_{2n}/\tilde{u}_{22} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} =: U$$

$$\Rightarrow A = L\tilde{U} = LD(D^{-1}\tilde{U}) = LDU$$

$\blacksquare$

UNICITATEA:

Rezultă din unicitatea factorizării LU fără pivotare și din unicitatea lui D^{-1}.

Altă demonstrație:

Pp că $A = L^{(k)}U^{(k)}D^{(k)}$, $k=1,2$, unde:

$L^{(k)} = (l_{ij}^{(k)})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$:

- inferior triunghiulară;
- $l_{ii}^{(k)} = 1$, $i=\overline{1,n}$, $k=1,2$;

$D^{(k)} = \mathrm{diag}\left(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_n^{(k)}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

$U^{(k)} = \left(u_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- superior diagonală;
- $u_{ii}^{(k)} = 1$, $i = \overline{1,n}$, $k = 1,2$.

Pornim de la egalitatea:

$$L^{(1)} D^{(1)} U^{(1)} = L^{(2)} D^{(2)} U^{(2)} \Rightarrow$$

$$\left(L^{(2)}\right)^{-1} L^{(1)} D^{(1)} U^{(1)} \left(D^{(1)} U^{(1)}\right)^{-1} =$$

$$= \left(L^{(2)}\right)^{-1} L^{(2)} D^{(2)} U^{(2)} \left(D^{(1)} U^{(1)}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(L^{(2)}\right)^{-1} L^{(1)}}_{\text{inferior triunghiulară}} = \underbrace{D^{(2)} U^{(2)} \left(D^{(1)} U^{(1)}\right)^{-1}}_{\text{superior triunghiulară}} \Rightarrow$$

$\exists\, D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\left.\begin{aligned} &\left(L^{(2)}\right)^{-1} L^{(1)} = D^{(2)} U^{(2)} \left(D^{(1)} U^{(1)}\right)^{-1} = D \\ &l_{ii}^{(k)} = 1,\ i = \overline{1,n},\ k = 1,2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left[\left(L^{(2)}\right)^{-1} L^{(1)}\right]_{ii} = 1 = d_i, \ i=\overline{1,n} \implies$$

$$D = I_n \implies$$

$$\left(L^{(2)}\right)^{-1} L^{(1)} = D^{(2)} U^{(2)} \left(D^{(1)} U^{(1)}\right)^{-1} = I_n \implies$$

$$\boxed{L^{(1)} = L^{(2)}} \ \& \ D^{(1)} U^{(1)} = D^{(2)} U^{(2)} \ (*)$$

Înmulțim relația $(*)$ cu $\left(D^{(1)}\right)^{-1}$ la stânga și cu $\left(U^{(2)}\right)^{-1}$ la dreapta:

$$\left(D^{(1)}\right)^{-1} D^{(1)} U^{(1)} \left(U^{(2)}\right)^{-1} =$$

$$= \left(D^{(1)}\right)^{-1} D^{(2)} U^{(2)} \left(U^{(2)}\right)^{-1} \implies$$

$$\underbrace{U^{(1)} \left(U^{(2)}\right)^{-1}}_{\text{superior triunghiulară}} = \underbrace{\left(D^{(1)}\right)^{-1} \left(D^{(2)}\right)}_{\text{diagonală}} \implies$$

$$\begin{cases} U^{(1)} \left(U^{(2)}\right)^{-1} = \tilde{D} = \operatorname{diag}(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_n) \\ u^{(k)}_{ii} = 1, \ i=\overline{1,n}, \ k=1,2 \end{cases} \implies$$

$$\tilde{d}_i = 1, \ i=\overline{1,n} \implies \boxed{U^{(1)} = U^{(2)}} \overset{(*)}{\implies} \boxed{D^{(1)} = D^{(2)}} \quad \square$$