Funcția

$$B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R},\ B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

se numește funcția Beta a lui Euler

Funcția

$$\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ \Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$$

se numește funcția Gama a lui Euler

Propoziție

1) $\Gamma(1) = 1$

2) $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$, $\forall p > 0$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}^*$

3) $B(p,q) = B(q,p)$, $\forall p,q > 0$

4) $B(p+1,q) + B(p,q+1) = B(p,q)$, $\forall p,q > 0$

5) $p\,B(p,q+1) = q\,B(p+1,q)$, $\forall p,q > 0$

6) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $\forall p,q > 0$.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

$x^2 = t$, $x = \sqrt{t}$. $x=0$, $t=0$; $x=\infty$, $t=\infty$ $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\underset{\underset{1.}{\parallel}}{\Gamma(1)}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$B\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

$$\underset{\substack{x=t^2 \\ dx=2t\,dt}}{=\!=} \int_0^1 \frac{2t\,dt}{t\sqrt{1-t^2}} = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= 2\lim_{\substack{c\to 1 \\ c<1}} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2\lim_{c\nearrow 1}\left(\arcsin t\Big|_0^c\right) = \pi$$

$$\Longrightarrow \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Longrightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Serii de funcții

Fie X o mulțime nevidă. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții $f_n : X \to \mathbb{R}$. Pt $n \geq 0$ fie

$$S_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$$

Perechea de șiruri de funcții $((f_n)_{n\geq 0}, (S_n)_{n\geq 0})$ se numește seria de funcții generată de șirul de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$ și se not cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$.

$A = \{x \in X \mid \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă$\}$

A - mulțimea de convergență a seriei de fct. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

Exemplu. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

$A = (-1, 1)$ - mulțimea de conv.

$x \in (-1,1)$; $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$.

Definiție: Fie $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$ și $f : X \to \mathbb{R}$. Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform la f dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_\varepsilon, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

A - mulțimea de convergență a seriei de fct. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

$f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

f - se numește suma seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

Fie $B \subset A$ și $f : B \to \mathbb{R}$. Spunem că seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge simplu la funcția f pe mulțimea B dacă șirul $(S_n)_{n\geq 1}$ converge simplu la f

adică dacă pt orice $x \in B$, seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge către $f(x)$.

Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniform la f pe mulțimea B dacă șirul $(S_n)_{n \geq 0}$ converge <u>uniform</u> pe mulțimea B către f.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \text{ mulțimea de conv: } A = \mathbb{R}.$$

$$S_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{(1+x^2)} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+x^2}}, \quad x \neq 0.$$

$$S_n(x) = x^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}{\frac{x^2}{1+x^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1+x^2 \qquad x \neq 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1+x^2, & x \neq 0. \end{cases}$$

Suma seriei este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0. \\ 1+x^2, & x \neq 0 \end{cases}$

Seria nu converge uniform la f pt că f nu este cont. în zero.

<u>Teoremă</u> 1 (Cauchy)

Fie $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$. Șirul de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform pe X dacă și numai dacă:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, a.î. $\forall n, m \geq n_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X$$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X$$

Dem: Să pres. că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, a.î. $\forall m, n \geq n_\varepsilon, \forall x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad (*).$$

Atunci $(f_n(x))_{n \geq 0}$ este Cauchy și deci convergent.

Fie $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$. Deci $f_n \xrightarrow{s} f$

Trecând la limită în $(*)$ cu $m \to \infty$ obținem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

Așadar, $f_n \xrightarrow{u} f$

<u>Definiție</u>. Un șir de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, a.î. $\forall m, n \geq n_\varepsilon$, $\forall x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

se numește <u>uniform Cauchy</u>

Teorema se reformulează astfel:

<u>Teorema 1</u>. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un șir de funcții $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Șirul $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform dacă și numai dacă este uniform Cauchy

Teoremă (Criteriul lui Cauchy)

Fie $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniform pe X dacă și numai dacă:

$$(1)\left(\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \text{ a.î. } \forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}^*, \\ \quad |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X \end{array}\right.$$

$|S_{n+m}(x) - S_n(x)|$

Dem.: $\sum_{n=0} f_n$ conv unif $\Longleftrightarrow (S_n)_{n\geq 0}$ conv. uniform.

$\Longleftrightarrow (S_n)_{n\geq 0}$ este uniform. Cauchy $\Longleftrightarrow$ (1).

$$(S_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n)$$

Teoremă (Weierstrass)

(1) Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ și $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dacă $$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$$

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$.

(2) Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi a.î.

$$|f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$$

Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniform pe X. (rezultă din Crit. Cauchy)

Dem. 2) Fie $\varepsilon>0$. Cum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este conv și $a_n \geq 0$ $\forall n$,

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ avem.

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+m} < \varepsilon$$

Pt $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in X$,

$$\left|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\dots+f_{n+m}(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)|+\dots+|f_{n+m}(x)|$$

$$\wedge\!\!\!|$$

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+m} < \varepsilon$$

Aplicăm Crit. lui Cauchy.

Exercitiu: Studiați convergența uniformă a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} \quad \text{pe } [-1, 1]$$

$$f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}, \quad n \geq 1$$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ convergentă}$$

$$\xRightarrow{\text{Weierstrass}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} \text{ converge uniform.}$$

Serii de puteri

O serie de funcții de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \text{ cu } a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}$$

se numește serie de puteri centrată în c.

Este suficient să considerăm serii centrate în zero adică de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, cu $a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Teoremă (Cauchy–Hadamard). Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și $\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dacă

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \in (0, \infty) \\ \infty, & \rho = 0. \\ 0, & \rho = \infty \end{cases}$$

atunci

1) seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut conv dacă $|x| < R$.

2) seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă dacă $|x| > R$

Dem. I) $\rho \in (0,\infty)$. Fie $|x| < R = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho|x| < 1$.

$$|x| \cdot \underbrace{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\rho} < 1 \Leftrightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este conv. adică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este abs. conv.

$$|x| > R = \frac{1}{\rho} \Rightarrow |x| \cdot \rho > 1 \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă.

II) $\rho = 0$, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este abs. conv pt $\forall x \in \mathbb{R}$.

III) $\rho = \infty$. Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă pt $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Definiție</u>. Numărul R din teorema anterioară se numește rază de convergență a seriei de puteri

<u>Remarcă</u> $R = \sup \{ r \geq 0 \mid \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ convergentă$\}$

Propoziție

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și R raza ei de convergență.

1) Dacă există $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \in (0,\infty) \\ 0, & \rho = \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases}$$

2) Dacă există $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \in (0,\infty) \\ 0, & \rho = \infty \\ \infty, & \rho = 0. \end{cases}$$

Propoziție. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R și mulțimea de convergență A,

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converg}\}$$

1) Dacă $R \in (0, \infty)$ atunci $(-R, R) \subset A \subset [-R, R]$.

2) Dacă $R = 0$ atunci $A = \{0\}$

3) Dacă $R = \infty$ atunci $A = \mathbb{R}$.

Exercițiu: Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} x^n$.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n 3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) 3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

$$R = \frac{1}{\rho} = 3.$$

Pt $x=3$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n}\cdot 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ conv (Leibniz).

Pt $x=-3$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă.

Mulțimea de conv este

$A = (-3, 3]$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $R=\infty$, $A=\mathbb{R}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$, $R=0$; $A=\{0\}$.

Propoziție - Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $R>0$. Atunci pt orice $0<r<R$ seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

Dem: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ convergentă

$|a_n x^n| \le |a_n r^n|, \forall x \in [-r, r]$

$\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ seria converge uniform.

Corolar. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $R>0$ și $f:(-R,R) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Atunci f este continuă.

<u>Propoziție</u>. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$ are raza de convergență tot R. Dacă $R > 0$ și $f:(-R,R) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ atunci f este derivabilă pe $(-R,R)$ și

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)', \quad \forall x \in (-R,R).$$

<u>Dem.</u> $\overline{\lim} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ pt că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \qquad S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

$$\tilde{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \lim_{n\to\infty} S_n'(x).$$

Fie $0<r<R$.

$$\left.\begin{array}{l} S_n \xrightarrow{u} f \text{ pe } [-r,r] \\ S_n' \xrightarrow{u} \tilde{f} \text{ pe } [-r,r] \end{array}\right| \Longrightarrow f \text{ este derivabilă și}$$

$$f'(x)=\tilde{f}(x),\ \forall x\in[-r,r].$$

Cum $r \in (0,R)$ a fost ales arbitrar rezultă că f este derivabilă pe $(-R,R)$ și pt orice $x \in (-R,R)$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

<u>Corolar</u> Dacă $R>0$, atunci $f : (-R,R) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

este derivabilă de orice ordin pe $(-R,R)$ și

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) x^{n-p}, \quad \forall x \in (-R,R).$$

Exerciții

1) Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{n+1}, \\ \sin^2 \frac{\pi}{x}, & \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < x. \end{cases}$

Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n \ge 1}$. Determinați mulțimea de convergență a seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ și decideți dacă convergența este uniformă.

2*) Arătați că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^2+n}{n^2}$ converge uniform pe orice interval mărginit, dar pt orice $x \in \mathbb{R}$

seria nu este absolut convergentă.

3*) Arătați că dacă f este uniform continuă pe $[0,\infty)$ și integrala $\int_0^\infty f(x)\,dx$ este convergentă atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4) Presupunem că $f_n : [a,b] \to [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ sunt funcții continue, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă pentru orice $x \in [a,b]$ și funcția $x \longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este continuă pe $[a,b]$. Arătați că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniform pe $[a,b]$.

5) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n} dx$ și $\int_0^{2\pi} (\sin x)^{2n+1} dx$ cu ajutorul funcției beta a lui Euler.

6) Arătați că integrala improprie $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx$, $a>0$ este convergentă și determinați valoarea ei

7) Fie $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ o funcție continuă a.î. $\int_0^{\infty} f(x)\,dx < \infty$. Arătați că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n x f(x)\,dx = 0.$$