Teorema lui L'Hôpital

Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a<b$, $I \subset \mathbb{R}$ interval a.î. $(a,b) \subset I \subset [a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ și $f,g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (respectiv $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$).

2) f și g sunt derivabile (pe $I \setminus \{x_0\}$) și $g'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I \setminus \{x_0\}$.

3) $(\exists)\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci:

i) $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I \setminus \{x_0\}$ (respectiv $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in V \cap (I \setminus \{x_0\})$)

ii) $(\exists)\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ și $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $f : A \to \mathbb{R}$.

<u>Def.</u>: Spunem că f este derivabilă de două ori în punctul a dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. f este derivabilă pe $V \cap A$ și $f' : V \cap A \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a. Derivata funcției f' în punctul a s.n. derivata a doua a funcției f în punctul a sau derivata de ordinul doi a funcției f în punctul a și se no-

teză $f''(a)$ sau $f^{(2)}(a)$.

Def.: Dacă f este derivabilă de două ori pe o mulțime nevidă $B \subset A$, putem defini funcția

$$\underset{\underset{\underset{(f')'}{\parallel}}{f^{(2)}}}{\overset{\parallel}{f''}} : B \to \mathbb{R},\quad \underset{B}{\underset{\cap}{x}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{f''(x)}}$$

și numim această funcție derivata a doua a lui f sau derivata de ordin doi a lui f.

Inductiv, se definește derivata de ordinul n sau a n-a derivată a lui f, notată $f^{(n)}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Fie, în continuare, $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $n \in \mathbb{N}$ și $f : I \to \mathbb{R}$.

Def.: Spunem că f este de clasă C^n (pe I) dacă f este derivabilă de n ori (pe I) și $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ este continuă.

Notație: $C^n(I) = \{ g : I \to \mathbb{R} \mid g$ este de clasă C^n (pe I)$\}$

$(C^0(I) = C(I))$

Def.: Spunem că f este de clasă C^∞ (pe I) dacă f este indefinit derivabilă (pe I).

Notație: $C^\infty(I) = \{g : I \to \mathbb{R} \mid g$ este de clasă C^∞ (pe I)$\}$

Teoremă: (Formula lui Taylor cu rest Lagrange)

Fie, în plus, $a \in I$. Presupunem că f este derivabilă de $n+1$ ori (pe I). Atunci, $(\forall)\ x \in I$, $x \neq a$, $(\exists)\ c$ între a și x (i.e. $c \in (a, x)$ sau $c \in (x, a)$) a.î.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\overset{\text{not}}{=}\ T_n(x)\ \text{(polinomul Taylor de ordinul } n)}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\overset{\text{not.}}{=}\ R_n(x)\ \text{(restul de ordinul } n \text{ al Formulei lui Taylor cu rest Lagrange)}}$$

Def.: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f, F : I \to \mathbb{R}$ a.î. F este derivabilă (pe I) și $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in I$. În acest caz, spunem că F este o primitivă a lui f.

Șiruri de funcții

Fie $A \neq \emptyset$, (Y, d) un spațiu metric, $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n : A \to Y$ și $f : A \to Y$.

Def.: Spunem că șirul de funcții $(f_n)_n$:

1) converge simplu (sau punctual) către f dacă, $(\forall)\, x \in A$, avem $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \overset{d}{=\!=} f(x)$

(i.e. $(\forall)\, x \in A$, $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq n_{\varepsilon, x}$, avem $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$)

Vom nota, în acest caz, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f$ (sau $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} f$)

2) converge uniform către f dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, avem $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, $(\forall)\, x \in A$.

Vom nota, în acest caz, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$

Propoziție: Dacă $(f_n)_n$ converge uniform către f, atunci $(f_n)_n$ converge simplu către f.

Observație! Reciproca propoziției precedente nu este, în general, adevărată.

Teoremă: Sunt echivalente:

1) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in A} d(f_n(x), f(x))\right)=0$

În continuare, particularizăm cele discutate mai sus pentru $(Y,d)=(\mathbb{R},d)$, d fiind metrica euclidiană pe $\mathbb{R}$, i.e. $d(x,y)=|x-y|$, $(\forall)\ x,y\in\mathbb{R}$.

Așadar, considerăm $A\neq\emptyset$, $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n: A\to\mathbb{R}$ și $f: A\to\mathbb{R}$.

Propoziție: 1) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f \iff (\forall)\ x\in A$, avem $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x) \iff (\forall)\ x\in A$, $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ n_{\varepsilon,x}\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n\geq n_{\varepsilon,x}$, avem $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

2) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \iff (\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n\geq n_\varepsilon$, avem $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $(\forall)\ x\in A$

Teoremă: Sunt echivalente:

1) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$

Exercițiu: Studiați convergența simplă și uniformă pentru $(f_n)_{n\geq1}$, unde $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

Sol.: Fie $x \in [-1,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f, \text{ unde } f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=0$$

Convergența uniformă:

V1 (cu majorări, minorări)

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}-0\right| = \frac{|x|}{1+n^2x^2},\ (\forall)\, x\in[-1,1],$$

$(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2}$$

$\leq a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$

$\geq b_n,\ b_n>0,\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

și $b_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$

Știm că $a^2+b^2 \geq 2ab$, $(\forall)\, a,b\in\mathbb{R}$.

Avem $\underbrace{1^2}_{a^2} + \underbrace{n^2|x|^2}_{b^2} \geq 2\cdot \underbrace{1}_{a}\ \underbrace{n\cdot|x|}_{b}$, $(\forall)\, x\in[-1,1]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Deci $1+n^2x^2 \geq 2n|x|$, $(\forall)\, x\in[-1,1]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$,

i.e. $1 \geq \dfrac{2n|x|}{1+n^2x^2}$, $(\forall)\, x\in[-1,1]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$, i.e.

$$\frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}, \ (\forall)\ x \in [-1,1], (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Așadar, $\sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Prin urmare, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$.

V2 (Calculul supremumului)

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2} - 0\right| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|, (\forall)\ x \in [-1,1],$$

$(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = ?$$

Fie $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n'(x) = \left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{1+n^2x^2 - 2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2},$$

$(\forall)\ x \in [-1,1]$

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow nx^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{n}$$

x	-1		$-\frac{1}{n}$		0		$\frac{1}{n}$		1
$f_n'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$		$+ +$	0	$- - -$	
$f_n(x)$	$\frac{-1}{1+n^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2n}$	$\nearrow$			$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	$\frac{1}{1+n^2}$

Deci $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Așadar, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$ $\square$

Teoremă: Fie (X,τ) un spațiu topologic, $\emptyset \neq A \subset X$, (Y,d) un spațiu metric, $a\in A$, $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n : A \to Y$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ și $f: A\to Y$. Dacă $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$ și f_n continuă în a, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$, atunci f este continuă în a.

Teorema lui Dini:

Fie (X,τ) un spațiu topologic, $\emptyset\neq A\subset X$, $f_n : A\to\mathbb{R}$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ și $f: A\to\mathbb{R}$. Dacă f_n continuă $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$, f continuă, $(f_n)_n$ monoton, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f$ și A compactă, atunci $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$.

Teorema lui Polya:

Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $f_n : [a,b]\to\mathbb{R}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ și

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă f_n monotonă, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, f continuă și $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{s} f$, atunci

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f.$$

Teorema lui Bernstein

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci există un șir de funcții polinomiale $(f_n)_n$, $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, a.î. $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f$.

Teorema de permutare a limitei cu derivata

Fie $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$, $f_n: I \to \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ cu proprietățile:

1) I este interval nedegenerat și mărginit
2) $(\exists)\, x_0 \in I$ a.î. $(f_n(x_0))_n$ convergent
3) f_n derivabilă, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$
4) $(\exists)\, g: I \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n' \xrightarrow[n \to +\infty]{u} g$.

Atunci $(\exists)\, f: I \to \mathbb{R}$ derivabilă a.î.

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f \text{ și } f'(x) = g(x),\ (\forall)\, x \in I$$

(i.e. $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n\right)' = f'$)

Serii de funcții

Fie $A \neq \emptyset$, $p \in \mathbb{N}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ ($(f_n)_n$ este un șir de funcții) și $s_n : A \to \mathbb{R}$, $s_n(x) = f_p(x) + f_{p+1}(x) + \ldots + f_n(x)$, $(\forall)\, n \geq p$.

Def.: Perechea $((f_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p})$ s.n. **serie de funcții.**

Notație: $((f_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p}) \overset{not.}{=} \sum_{n=p}^{\infty} f_n$

$\left(= \sum_{n \geq p} f_n = \sum_n f_n\right)$

Observație! În general, $p = 0$ sau $p = 1$.

Fie $\sum_n f_n$ o serie de funcții ($s_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$).

Def.: Spunem că seria de funcții $\sum_n f_n$:

1) **converge simplu** (sau este simplu convergentă) dacă $(s_n)_n$ converge simplu.
2) **converge uniform** (sau este uniform convergentă) dacă șirul de funcții $(s_n)_n$ converge uniform.
3) **converge absolut** (sau este absolut convergentă) dacă, $(\forall)\, x \in A$, seria de numere

reale (pozitive) $\sum\limits_{n}' |f_n(x)|$ este convergentă.

Def.: Dacă $\sum\limits_{n}' f_n$ converge simplu, limita (simplă sau punctuală) a șirului de funcții $(s_n)_n$ s.n. suma seriei de funcții $\sum\limits_{n}' f_n$ și se notează tot $\sum\limits_{n}' f_n$.

Teoremă: Fie (X, τ) un spațiu topologic, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ a.î. f_n continuă în a $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ și $\sum\limits_{n}' f_n$ converge uniform către funcția $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă în a.

Teorema lui Weierstrass:

Fie $A \neq \emptyset$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ și $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.:

1) $|f_n(x)| \leq a_n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $(\forall)\, x \in A$

2) $\sum\limits_{n}' a_n$ convergentă

Atunci seria de funcții $\sum\limits_{n}' f_n$ converge uniform și absolut.

Def.: Fie $A \neq \emptyset$ și $f_n : A \to \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.
Mulțimea $M \overset{\text{def.}}{=} \{x \in A \mid \sum\limits_{n}' f_n(x) \text{ convergentă}\}$ s.n. mulțimea de convergență a seriei de funcții $\sum\limits_{n}' f_n$.

Exercițiu: Arătați că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ converge uniform.

Sol.: Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2} \right| = \frac{|\sin(nx)|}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

Fie $a_n = \frac{1}{n^2}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Avem: 1) $|f_n(x)| \leq a_n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergentă

(serie armonică generalizată, $\alpha = 2$)

Conform Teoremei lui Weierstrass, avem că $\sum_n f_n$ converge uniform $\square$