Curs 12

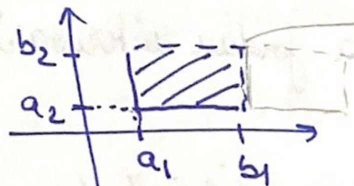
Integrarea fcț. de mai multe variabile reale

Obs: Toate intervalele de forma (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ și $[a,b]$ sunt considerate cu $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Obs: Lucrăm cu sp metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$

$$d_2 \overset{\text{not}}{=} d$$

Def: 1) O mulțime de forma $D = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ s.n dreptunghi. Notăm $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{not}}{=} \{ D \subset \mathbb{R}^n \mid D\text{-dreptunghi} \}$



$n=2 \Rightarrow$ lăsăm loc de BUNĂ ZIUA

2) O mulțime de forma $E = \bigcup_{i=1}^{p} D_i$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ și $D_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\forall\, i = \overline{1,n}$ s.n ELEMENTARĂ.

Notăm $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \{ E \subset \mathbb{R}^n \mid E \text{ mulț. element} \}$

3) Fie $D = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Numărul $\text{vol}(D) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$

$$= \boxed{\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)}$$

s.n VOLUMUL lui D

pt $n=2 \to$ ARIE
$n=3 \to$ chiar VOLUM

4. Fie $E = \bigcup_{i=1}^{p} D_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $D_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\forall\ i = \overline{1,p}$ şi

$D_i \cap D_j = \emptyset\ \forall\ i \neq j$.

Numărul $vol(E) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{p} vol(D_i)$ s.n volumul lui E

Prop: Orice mulţ. element. poate fi scrisă ca reuniune finită de drept. disjuncte două câte două (deci putem defini $vol(E)$, pt orice $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$)

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$, A mărg.

Def: 1) $\mu^*(A) \overset{def}{=} \inf\{vol(F) \mid F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), A \subset F\}$

(măsura Jordan exterioară a lui A)

2) $\mu_*(A) \overset{def}{=} \sup\{vol(E) \mid E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), E \subset A\}$

(măsura Jordan interioară a lui A)

Obs $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$

Def Spunem că A <u>măsurabilă Jordan</u> dacă

$\mu_*(A) = \mu^*(A)$

Notaţie $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ măsurabilă Jordan}\}$

Def: Dacă $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, valoarea comună $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ s.n. măsura Jordan a lui A şi se notează

Prop Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărg. ~~Sunt~~ ~~atei~~ Atunci:

1). $\mu^*(A) \leq \mu^*(Fr(A)) + \mu_*(\mathring{A})$

2) $\mu^*(\bar{A}) = \mu^*(A)$

3) $\mu_*(A) = \mu_*(\mathring{A})$

Prop Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărg. Sunt echiv:

1) $A \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2) $\bar{A}, \mathring{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi $\mu(\bar{A}) = \mu(\mathring{A})$

3) $Fr(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi $\mu(Fr(A)) = 0$

Prop Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$

1) Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ şi $B \subset \mathbb{R}^q$ mărg. Atunci $A \times B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ e mărg şi avem ineg.:

$$\mu^*(A \times B) \leq \mu^*(A) \cdot \mu^*(B) \text{ şi } \mu_*(A \times B) \geq \mu_*(A) \cdot \mu_*(B)$$

2) Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ şi $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^q)$. Atunci

$A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{p+q})$ şi $\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$

- Exemple de mulţimi măsurabile / nemăsurabile Jordan

1) Fie $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

Justificare: $\mu^*(A) = \mu^*(\underset{\underset{[0,1]}{\parallel}}{\bar{A}}) = \mu^*([0,1]) = \mu^*([0,1))$

$= \mu^*([0,1)) = \mu([0,1)) = 1 - 0 = 1$

$\mu_*(A) = \mu_*(\underset{\underset{\emptyset}{\parallel}}{\mathring{A}}) = \mu_*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

$\mu_*(A) < \mu^*(A) \Rightarrow A \notin \mathcal{J}(\mathbb{R})$

2. $A = \{(x,0) \mid x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$. Avem că

$A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

$A = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times \{0\}$

<u>Justificare</u> $A \subset [0,1] \times [0,1] \Rightarrow A$ mărg.

$$\mu^*(A) = \mu^*(\bar{A}) = \mu^*([0,1] \times \{0\})$$

$$\bar{A} = [0,1] \times \{0\}$$

$$\leq \mu^*([0,1]) \times \mu^*(\{0\})$$

! Orice mt deschisă e măsur. Jordan

$$= \mu^*(\overline{[0,1]}) \cdot \mu^*(\{0\}) = \mu^*([0,1]) * \mu^*(\{0\})$$

$$= \mu([0,1]) \cdot \mu^*(\{0\}) = (1-0) \cdot \mu^*(\{0\})$$

$$= \mu^*(\{0\})$$

Pt orice $\varepsilon > 0$ avem $\{0\} \subset [0, \varepsilon)$, deci pt orice $\varepsilon > 0$ avem $\mu^*(\{0\}) \leq vol([0, \varepsilon)) = \varepsilon$

Așadar, $\mu^*(\{0\}) = 0$

Prin urmare, $\mu^*(A) = 0$. Așadar, $\mu^*(A) = \mu_*(A) = 0$.

Deci, $A \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ $\square$

<u>Prop</u>

1) Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt integrab Riem și $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, at mulțimea

$$\Gamma_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

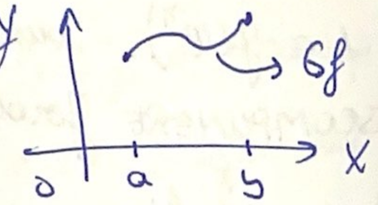
e măsura Jordan și $\mu(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$

4

2) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e integr. R, atunci

$Gf = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^2$ e măs. J şi

$\mu(Gf) = 0$



Ex: Fie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq x^2\} \subset \mathbb{R}^2$

Arăt. că $A \in J(\mathbb{R}^2)$ şi det $\mu(A)$

Sol $|x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$|y| \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq y \leq x^2$

Deci, $A = \{(x,y) \mid x \in [-1;1], -x^2 \leq y \leq x^2\}$

Fie $f, g: [-1;1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2$. Avem $f(x) \leq g(x) \; \forall x \in [-1,1]$

f, g cont $\Rightarrow f, g$ integ. R

$A = \Gamma_{f,g}$

Deci, $A \in J(\mathbb{R}^2)$ şi $\mu(A) = \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx$

$= \int_{-1}^{1} (x^2 + x^2)\, dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$ $\square$

Def: Fie $X \neq \emptyset$, $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ şi $\lambda: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$

Spunem că tripletul $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ este spaţiu cu măsură aditivă dacă:

1) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, avem $A \cup B \in \mathcal{A}$ şi $A \setminus B \in \mathcal{A}$ (va rezulta că $A \cap B \in \mathcal{A}$)

2) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ a.î. $A \cap B = \emptyset$ avem $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$

Prop $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), vol)$ și $(\mathbb{R}^n, \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), \mu)$ sunt spații cu măsură aditivă.

Def Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Spunem că $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ e o DESCOMPUNERE Jordan a lui A dacă:

1) $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$

2) $\forall\ i,j \in \{1,2,\dots,n\},\ i \neq j$ avem $\mu(A_i \cap A_j) = 0$

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ o descomp Jordan a lui A.

Def: 1) $\|\mathcal{A}\| \overset{def}{=} \max\{diam(A_i) \mid i = \overline{1,p}\}$

norma lui $\mathcal{A}$

, unde $diam(A_i) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A_i\}\ \forall\ i = \overline{1,p}$

2) O familie $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^n$ s.n sistem de pct intermediare asociat lui $\mathcal{A}$ dacă $\alpha_i \in A_i,\ \forall\ i = \overline{1,p}$

Obs 1) PA orice $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și pt orice $\varepsilon > 0$, există $\mathcal{A}$ o descomp Jordan a lui A ai $\|\mathcal{A}\| < \varepsilon$

2) Dacă $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ e o desc J. a lui A, atunci $\mu(A) = \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i)$

ex: Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ și $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Știm că $A \subset \mathcal{J}(\mathbb{R})$. Fie $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$ o diviz. a intervalului $[a,b]$.

Familia $\mathcal{A} = \{[x_{i-1}, x_i] \mid i=\overline{1,p}\}$ e desc.
$\mathcal{J}$ a lui A

- Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o descomp. $\mathcal{J}$ a lui A și $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ un s.p.i asociat lui $\mathcal{A}$.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$

Def: Suma $\sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i)\mu(A_i)$ s.n suma Riemann asociată fct f, desc. $\mathcal{A}$ și s.p.i $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ asociat lui $\mathcal{A}$ și se notează $\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}})$

Def: Spunem că f este integr. R (pe A) dacă $\exists I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ ai prop că $\forall \mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ desc $\mathcal{J}$ a lui A cu $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon$ și $\forall (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ s.p.i asoc. lui $\mathcal{A}$ avem că $|I - \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}})| < \varepsilon$

Obs: Numărul real I din def prec., dacă există, este unic.

Notație: $I \overset{not}{=} \int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$

$$\overset{not}{=} \int_A f(x)\, dx$$

Notații
1) Dacă $n=2$, scriem $I = \iint_A f(x,y)\, dx dy$
2) Dacă $n=3$, scriem $I = \iiint_A f(x,y,z)\, dx dy dz$

Obs: În contextul def prec. avem $\int_A f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$

$$= \lim_{\|\mathcal{A}\|\to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}})$$

exc Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\mu(A)=0$ și $f: A\to\mathbb{R}$

Arătați că f e integr. R și $\int_A f(x)\,dx = 0$.

Sol Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc. $\mathcal{J}$ a lui A

$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A_i) = 0, \forall\, i=\overline{1,p}$

Fie $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ s.p.i. asoc. lui $\mathcal{A}$.

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = \sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i)\underbrace{\mu(A_i)}_{=0} = 0$$

Deci, f e integrab R și $\int_A f(x)\,dx =$

$$\lim_{\|\mathcal{A}\|\to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = \lim_{\|\mathcal{A}\|\to 0} 0 = 0$$

exc Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $a\in\mathbb{R}$ și $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x) = a$.

Ar. că f e integr. R și $\int_A f(x)dx = a\,\mu(A)$

Sol: Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc $\mathcal{J}$ a lui A și

$(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ un s.p.i asoc lui $\mathcal{A}$.

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{f(\alpha_i)}_{a}\mu(A_i)$$

$$= a\sum_{i=1}^{p}\mu(A_i) = a\,\mu(A)$$

Deci, f e integr R şi $\int_A f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{A}\|\to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}})$

$= \lim_{\|\mathcal{A}\|\to 0} (a\,\mu(A)) = a\,\mu(A)$ $\square$

Prop: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi $f: A \to \mathbb{R}$

1) Dacă f e cont şi mărg, atunci f e integr R.
2) Dacă A e compactă şi f e cont, atunci f e integr. R.

Prop: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$ şi $f, g: A \to \mathbb{R}$ două fct integr. R. şi $\int_A (f \pm g)(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx \pm \int_A g(x)\,dx$ şi $\int_A (af)(x)\,dx = a \int_A f(x)\,dx$

• Dacă, în plus, $f(x) \le g(x)$ atunci $\int_A f(x)\,dx \le \int_A g(x)\,dx$

Prop Fie $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi $f: A\cup B \to \mathbb{R}$ o fct integr. R (pe $A\cup B$). Atunci f e integr R pe A şi pe B (i.e: $f|_A : A \to \mathbb{R}$ e integr R şi $f|_B : B \to \mathbb{R}$ e integr. R)

Dacă, în plus, $\mu(A\cap B) = 0$, atunci $\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$

Prop Fie $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi $f: A\cup B \to \mathbb{R}$ o fct mărg. şi integr. R pe A şi pe B. Atunci, f e integrab R pe $A\cup B$.

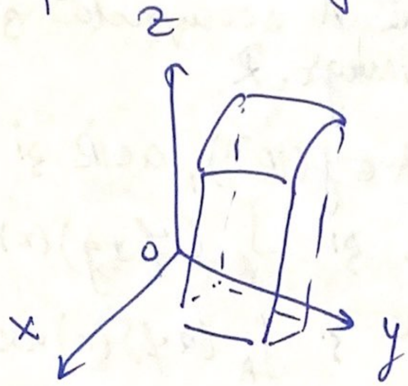
Dacă, în plus, $\mu(A\cap B) = 0$, atunci $\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$

• <u>Interpretare geometrică a integralei multiple</u>

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R.

1) Dacă $n=2$ și $f(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in A$ atunci

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ reprez. volumul corpului cuprins între planul xOy și graficul fct. f.



2) Dacă $n=2$, atunci $\iint_A 1\,dx\,dy$ reprez aria mulțimii A.

3) Dacă $n=3$, atunci $\iiint_A 1\,dx\,dy\,dz$ reprez volumul lui A

<u>Teoremă</u> (Teorema lui FUBINI)

Fie $B \subset \mathbb{R}^n$ compactă și măsurabilă Jordan și $\alpha, \beta : B \to \mathbb{R}$ continue a.î. $\underset{(x_1,\dots,x_n)}{\alpha(x)} \leq \underset{(x_1,\dots,x_n)}{\beta(x)}$ $\forall x \in B$

Fie $A = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_{n+1}) \in B$ și $\alpha(x_1, \dots, \hat{x_j}, \dots x_{n+1}) \leq x_j \leq \beta(x_1, \dots, \hat{x_j}, \dots x_{n+1})\}$
$\subset \mathbb{R}^{n+1}$

unde $(x_1,\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_{n+1})$

Fie $f: A \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e compactă și măsurabilă Jordan, f e integrab. R (pe A) și

$$\int_A f(x_1,\dots,x_{n+1})\,dx_1\dots dx_{n+1} =$$

$$\int_B \left(\int_{\alpha(x_1,\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1})}^{\beta(x_1,\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1})} f(x_1,\dots,x_{n+1})\,dx_j \right) dx_1\dots dx_{j-1}\,dx_{j+1}\dots dx_{n+1}$$

Cazuri particulare ale teoremei prec.

$\boxed{1}$ Integrala dublă

i) Dacă $A = [a,b]\times[c,d]$ și $f: A \to \mathbb{R}$ e cont, atunci A e mult comp. și măs. J și

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

ii) Dacă $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ \alpha(x)\le y\le\beta(x)\}$ unde $\alpha,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont a.î. $\alpha(x)\le\beta(x)$ $\forall x\in[a,b]$ și $f: A\to\mathbb{R}$ e cont, atunci A e mult compactă și măs. J și

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

iii) Dacă $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[c,d],$
$\varphi(y)\le x\le\psi(y)\}$, unde $\varphi,\psi:[c,d]\to\mathbb{R}$ cont a.î.

$\varphi(y) \leq \psi(y)\ \forall\ y \in [c, d]$ şi $f: A \to \mathbb{R}$ e cont,
atunci A e mulţ compactă şi măs. J şi

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

$\boxed{2}$ Integrala triplă

i) Dacă $A = [a,b] \times [c,d] \times [k,p]$ şi $f: A \to \mathbb{R}$ e cont, deci A e mulţ compactă şi măs J şi

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_k^p f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_k^p \left(\int_c^d f(x,y,z)\,dy \right) dz \right) dx$$

ii) Fie $B \subset \mathbb{R}^2$ o mulţ compactă şi măs J
şi $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B$ şi $\varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$, unde $\varphi, \psi: B \to \mathbb{R}$ cont a.î.
$\varphi(x,y) \leq \psi(x,y)\ \forall (x,y) \in B$

Fie $f: A \to \mathbb{R}$ continuă
Atunci A e mulţime comp. şi măs. J şi

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_B \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

etc.