Tutoriat 3

Algebră 1

31 Octombrie 2025

Relații pe mulțimi

1. Relații binare

Definiție 1.1. *Fie A o mulțime nevidă. O submulțime $\rho \subseteq A \times A$ se numește relație binară pe A. Dacă $(x, y) \in \rho$, atunci scriem/notăm $x \,\rho\, y$.*

Exemplu. $\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$ este o relație pe A, numită *diagonala* lui A.

Definiție 1.2. *Fie ρ o relație binară pe A. Atunci:*

a) ρ se numește reflexivă dacă $x \,\rho\, x$, pentru orice $x \in A$,

$$\text{i.e.: } \Delta_A \subseteq \rho.$$

b) ρ se numește simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,

$$x \,\rho\, y \Rightarrow y \,\rho\, x.$$

c) ρ se numește tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,

$$x \,\rho\, y \text{ și } y \,\rho\, z \Rightarrow x \,\rho\, z.$$

d) ρ se numește antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,

$$x \,\rho\, y \text{ și } y \,\rho\, x \Rightarrow x = y.$$

Definiție 1.3. *Fie ρ o relație binară pe A.*

a) ρ se numește relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

b) ρ se numește relație de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă. În acest caz, perechea (A, ρ) se numește mulțime ordonată.

2. Relații de ordine

Observație. O mulțime ordonată (A, ρ) se mai notează cu $(A, \leq)$. În alte terminologii, (A, ρ) se numește *parțial ordonată* sau *poset*.

Definiție 2.1. *Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată.*

a) Un element $m \in A$ se numește element maximal dacă

$$m \leq a,\ a \in A \Rightarrow a = m.$$

b) Un element $p \in A$ se numește prim element dacă

$$p \leq x,\ \forall x \in A.$$

c) Fie $B \subseteq A$ o submulțime. Un element $a \in A$ se numește superiorul (resp. inferiorul) lui B și scriem

$$a = \sup(B) \quad (\textit{resp. } a = \inf(B))$$

dacă au loc următoarele două condiții:

(i) $x \leq a$, pentru orice $x \in B$ (resp. $a \leq x$, pentru orice $x \in B$);

(ii) dacă $a' \in A$ și $x \leq a'$, pentru orice $x \in B$, atunci $a \leq a'$ (resp. dacă $a' \leq x$, pentru orice $x \in B$, atunci $a' \leq a$).

Observație. În altă terminologie, spunem că a este *supremumul (infimumul)* lui B.

Definiție 2.2. *Fie $B \subseteq (A, \leq)$ o submulțime într-o mulțime ordonată. Un element $a \in A$ se numește majorant (resp. minorant) al lui B dacă*

$$x \leq a \ (\textit{resp. } a \leq x), \quad \forall x \in B.$$

Definiție 2.3. *O mulțime ordonată $(A, \leq)$ se numește latice dacă*

$$\exists \sup\{a, b\} \textit{ și } \inf\{a, b\}, \quad \forall a, b \in A.$$

Definiție 2.4. *Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată.*

a) $(A, \leq)$ se numește bine ordonată dacă orice submulțime nevidă a sa are un prim element.

b) $(A, \leq)$ se numește total ordonată dacă

$$\forall a, b \in A,\ a \leq b \textit{ sau } b \leq a.$$

c) $(A, \leq)$ se numește inductiv ordonată dacă orice submulțime total ordonată a sa are un majorant.

Definiție 2.5 (Diagrama Hasse a unei mulțimi parțial ordonate)**.** *Fie $(X, \leq)$ o mulțime parțial ordonată finită. Elementele lui X sunt notate cu puncte $\bullet$ și dacă $x, y \in X$ cu $x \leq y$ și $x \neq y$, atunci punctul corespunzător lui x îl scriem „mai jos” decât cel al lui y.*

Două puncte corespunzătoare lui x și y le unim printr-un segment dacă și numai dacă

$$x \leq y,\ x \neq y \textit{ și nu există } z \in X \textit{ astfel încât } x \leq z,\ z \leq y,\ x \neq z \neq y.$$

3. Relații de echivalență

Observație. O relație de echivalență ρ se notează, de obicei, cu "$\sim$", "$\approx$", etc. Astfel, $x\,\rho\,y \Leftrightarrow x \sim y$.

Definiție 3.1. *Fie $\sim$ o relație de echivalență pe A, și $a \in A$. Mulțimea*

$$\hat{a} := \{\, b \in A \mid b \sim a \,\}$$

se numește clasa de echivalență a elementului a.

Mulțimea tuturor claselor de echivalență se notează cu $A/\!\sim$ și se numește mulțimea factor a lui A prin $\sim$.

Observație. Deci,

$$A/\!\sim\, = \{\, \widehat{a} \mid a \in A \,\}.$$

Observație. Definim funcția

$$\pi : A \longrightarrow A/\!\sim, \qquad \pi(a) := \widehat{a}, \quad \forall a \in A.$$

Funcția π este surjectivă (proiecție canonică) și, după cum se poate verifica, relația indusă de π este chiar $\sim$, adică

$$\sim_\pi = \sim .$$

Definiție 3.2. *Fie A o mulțime nevidă și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi nevide ale lui A. Familia $(A_i)_{i\in I}$ se numește partiție a lui A dacă:*

a) $A_i \cap A_j = \varnothing$, *pentru orice* $i \neq j \in I$;

b) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

Propoziție 3.1. *Fie $\sim$ o relație de echivalență pe A. Atunci:*

1. $a \in \widehat{a}$, *pentru orice* $a \in A$; *deci* $\widehat{a} \neq \varnothing$, *pentru orice* $a \in A$.
2. $\widehat{a} = \widehat{b} \Leftrightarrow a \sim b$.
3. *Dacă* $a, b \in A$ *atunci* $\widehat{a} = \widehat{b}$ *sau* $\widehat{a} \cap \widehat{b} = \varnothing$.
4. $A = \displaystyle\bigcup_{\widehat{a} \in A/\sim} \widehat{a}$.

Proof. Fie $\sim$ o relație de echivalență pe A.

1) Cum $a \sim a$ (reflexivitate), rezultă $a \in \widehat{a}$; în particular $\widehat{a} \neq \varnothing$.

2) ($\Rightarrow$) Dacă $\widehat{a} = \widehat{b}$, atunci $a \in \widehat{a} = \widehat{b}$, deci $a \sim b$.
($\Leftarrow$) Dacă $a \sim b$, arătăm incluziunile reciproce. Fie $x \in \widehat{a}$; atunci $x \sim a \sim b$, iar prin tranzitivitate $x \sim b$, deci $x \in \widehat{b}$. Astfel $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. Analog, luând $y \in \widehat{b}$ obținem $y \sim b \sim a$ și $y \in \widehat{a}$, deci $\widehat{b} \subseteq \widehat{a}$. Concluzie $\widehat{a} = \widehat{b}$.

3) Presupunem $\widehat{a} \cap \widehat{b} \neq \varnothing$ și fie $z \in \widehat{a} \cap \widehat{b}$. Atunci $z \sim a$ și $z \sim b$, iar prin simetrie și tranzitivitate $a \sim z \sim b$, deci $a \sim b$. Prin (2) urmează $\widehat{a} = \widehat{b}$. Așadar, pentru $a, b \in A$, ori $\widehat{a} = \widehat{b}$, ori $\widehat{a} \cap \widehat{b} = \varnothing$.

4) Notăm cu $A/\sim$ mulțimea tuturor claselor de echivalență. Arătăm egalitatea $A = \bigcup_{\widehat{a} \in A/\sim} \widehat{a}$.

„$\subseteq$": Pentru $a \in A$, din (1) avem $a \in \widehat{a}$, iar $\widehat{a} \in A/\sim$; deci $a \in \bigcup_{\widehat{a} \in A/\sim} \widehat{a}$.

„$\supseteq$": Dacă $u \in \bigcup_{\widehat{a} \in A/\sim} \widehat{a}$, atunci există o clasă $\widehat{a}$ cu $u \in \widehat{a} \subseteq A$, deci $u \in A$.

□

Corolar 3.1. *Dacă $\sim$ este o relație de echivalență pe A, atunci mulțimea factor $A/\sim$, formată din clasele de echivalență, formează o partiție a lui A (conform punctelor 3 și 4 din Propoziția 1).*

Reciprocă. Fie $(A_i)_{i \in I}$ o partiție a mulțimii A și definim relația de echivalență:

$$a \approx b \overset{\text{def}}{\iff} \exists i \in I \text{ astfel încât } a, b \in A_i.$$

Atunci $\approx$ este o relație de echivalență pe A, ale cărei clase de echivalență sunt mulțimile A_i, adică:

$$A/\approx = \{ A_i \mid i \in I \}.$$

Definiție 3.3. *Fie $\sim$ o relație de echivalență pe A. O familie de elemente $(a_i)_{i \in I}$ ale lui A se numește sistem de reprezentanți pentru $\sim$ dacă:*

1. *pentru orice $i \neq j \in I$, avem că $a_i \nsim a_j$ (adică a_i nu este echivalent cu a_j);*
2. *pentru orice $a \in A$, există $i \in I$ astfel încât $a \sim a_i$.*