Seminar 4

Structuri algebrice în informatică

1) Pe $\mathbb{Z}$ definim relația „$\sim$"

$n \sim m \Leftrightarrow n^2 + m^2 = 2$

Studiați proprietățile.

(R) Fie $x \in \mathbb{Z}$

$\sim$ reflexivă $\Leftrightarrow x \sim x$

$x \sim x = x^2 + x^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{\pm 1\} \subset \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sim$ nu e reflexivă (pt $x = 2$, obs. că $2 \nsim 2$)

(S) Fie $x, y \in \mathbb{Z}$ a.î. $x \sim y$

$\sim$ simetrică $\Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

$x \sim y = x^2 + y^2 = 2$

$y \sim x = y^2 + x^2 = 2$

$\Rightarrow x \sim y = y \sim x$

$\Rightarrow \sim$ simetrică

(T) Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$ a.î. $x \sim y$ și $y \sim z$

$\sim$ tranzitivă $\Leftrightarrow x \sim z$

$x \sim y = x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 + x^2 = 2 \Leftrightarrow$

$y \sim z \Rightarrow y^2 + z^2 = 2 \Leftrightarrow z^2 + y^2 = 2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + z^2 = 4 - 2y^2 \end{cases} \Rightarrow$$ ~~$\sim$ tranzitivă pentru $y \in \{\pm 1\}$~~

$x^2 - z^2 = 0$

~~($\sim$) antitranzitivă~~

$x^2+y^2=2 \Rightarrow x^2=1$ și $y^2=1$, $(x,y\in\mathbb{Z})$
$y^2+z^2=2 \Rightarrow y^2=1$ și $z^2=1$, $(y,z\in\mathbb{Z})$ $\Bigg| \Rightarrow x^2+z^2=$

$\Rightarrow$ „$\sim$" tranzitivă

$\sim = \{(1,-1), (-1,-1), (-1,1), (1,1)\}$

(A) Fie $x,y\in\mathbb{Z}$

$1\sim -1$, $-1\sim 1$, $-1\neq 1 \Rightarrow$ „$\sim$" nu este antisimetrică

2) Pe $\mathbb{C}$ definim relația $\sim$ dată prin $z_1\sim z_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$

a) Arătați că „$\sim$" este o relație de echivalență pe $\mathbb{C}$

b) Determinați $\hat{0}$, $\widehat{3+5i}$

c) Determinați $\mathbb{C}/\sim$ și un sistem de repr. pentru $\sim$

3) Pe $\mathbb{C}^*$ definim relația $\sim$ prin

$z_1\sim z_2 \Leftrightarrow \arg z_1=\arg z_2$

a) Arătați că $\sim$ este o rel de echivalență pe $\mathbb{C}^*$

b) Determinați $\widehat{3+5i}$, $\widehat{3+3i}$

c) Determinați $\mathbb{C}^*/\sim$ și un sistem de repr.

$z \in \mathbb{C}^*$

$\arg z = \sphericalangle$ axa $[Ox$ și semidr. $[Oz) \in [0, 2\pi)$

$\downarrow$

argumentul redus

$z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbb{R}$

$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

φ este unic în $[0, 2\pi)$

$\varphi = \arg z$

a) (R) Fie $z \in \mathbb{C}^*$

$z \sim z \Leftrightarrow \arg z = \arg z$ (adevărat) $\Rightarrow$ „$\sim$" reflexivă

(S) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ a.î. $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow$

$\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \arg z_2 = \arg z_1 \Leftrightarrow z_2 \sim z_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ „$\sim$" simetrică

(T) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, a.î. $z_1 \sim z_2$ și $z_2 \sim z_3$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \\ z_2 \sim z_3 \Leftrightarrow \arg z_2 = \arg z_3 \end{array}\right| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ „$\sim$" tranzitivă

Din (R), (S) și (T) $\Rightarrow$ „$\sim$" relație de echivalență

b) $\widehat{3+3i} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \arg(3+3i) \} = *$

$\arg = \frac{\pi}{4}$ (ne aflăm pe prima bisectoare)

$* = \{ z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{\pi}{4} \} = \{ a + ai \mid a \in \mathbb{R}_+^* \}$

$\widehat{3+5i} = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid \arg z = \operatorname{arctg} \frac{5}{3} \} = \{ a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}_+^*, \frac{b}{a} = \frac{5}{3} \} = \{ a + \frac{5a}{3} \mid a \in \mathbb{R}_+^* \}$

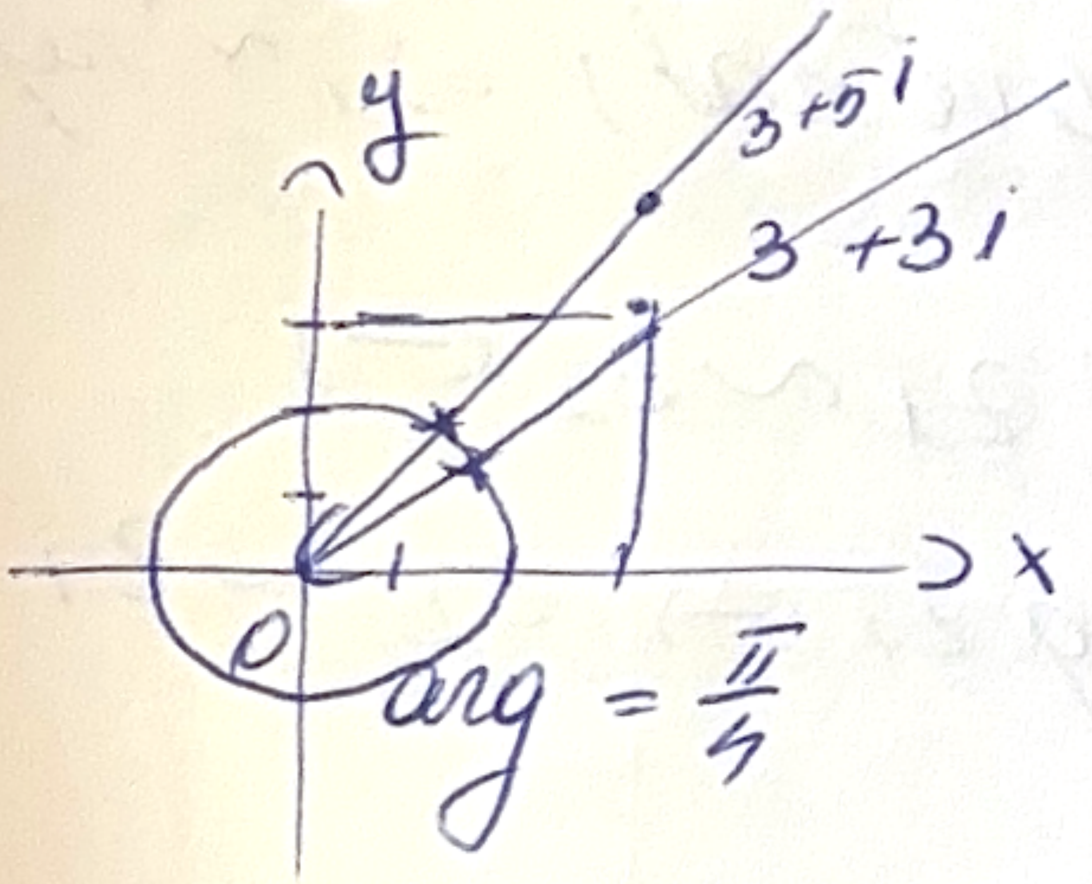
c)

$\mathbb{C}^* / \sim$

$\hat{z} = \{ w \in \mathbb{C}^* \mid w \sim z \} = \{ w \in \mathbb{C}^* \mid \arg w = \arg z \}$

$\hat{z} = (O_z$

$S = \mathcal{C}(O(0,0), 1)$ sistem de reprezentanți deoarece taie orice semidreaptă într-un sg punct.



$\mathbb{C}^* \ni z \Rightarrow \frac{z}{|z|} \in S$

Alg. lui Euclid

Aflați $d = \gcd(54, 17)$ cu Alg. lui Euclid și $u, v \in \mathbb{Z}$ cu $54u + 17v = d$. (*)

Împărțim cu rest $\underset{a}{54} = \underset{q}{3} \cdot \underset{b}{17} + \underset{(r_1)}{3}$

$17 = 5 \cdot 3 + 2 \quad (r_2)$

$3 = 1 \cdot 2 + 1 \quad (r_3)$

$2 = 2 \cdot 1 + 0 \quad (r_4)$

$gcd(54, 17) = \underline{1}$

$1 = 3 - 2 = 3 - (17 - 5 \cdot 3) = 6 \cdot 3 - 17 = 6(54 - 3 \cdot 17)$
$- 17 = 6 \cdot 54 - 19 \cdot 17$

$u = 6$, $v = -19$ o soluție pt. ec (*)

<u>Temă</u>: Aflați toate soluțiile în $\mathbb{Z}$ pt. ec.

$$54u + 17v = 1$$