Seminar 1

1. Fie $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați, folos. def. că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Sol: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$ (îl caut pe n_ε efectiv / îl aprox.

Căutăm $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - 0| < \varepsilon$.

$|x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

$n_\varepsilon = ?$

$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

$n \geq n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Alegem $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

$\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $\square$

2. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ și $l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Arătați că $l \in \mathbb{Z}$ (și e constant de la un rang încolo)

<u>Sol:</u>

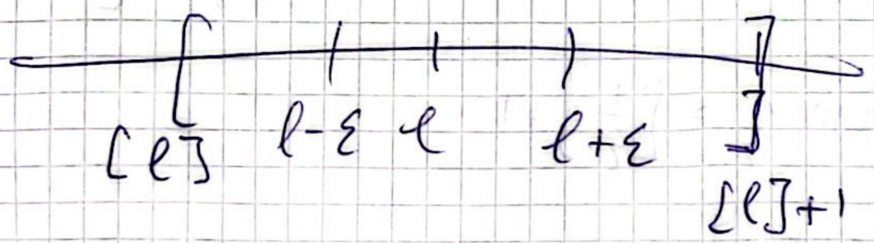
$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \ge n_\varepsilon \quad |x_n - l| < \varepsilon \right)$$

Pp prin R.A. că $l \notin \mathbb{Z}$

<u>Știm:</u> Din def. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge n_\varepsilon$, $|x_n - l| < \varepsilon$

$|x_n - l| < \varepsilon \Rightarrow x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

* micș. interv. până aj la între 2 nr întregi $([l], [l]+1)$ și aj la contradicție că nu am x_n în interv, $x_n \subset \mathbb{Z}$, dar eu între 2 nr întregi nu pot avea nu al treilea nr întreg între ele.



Alegem $\varepsilon > 0$ a.î. $[\ell] < \ell - \varepsilon$ și $\ell + \varepsilon < [\ell] + 1$

$\varepsilon < \ell - [\ell]$

$\varepsilon < [\ell] + 1 - \ell$

Un astfel de ε există deoarece $\ell - [\ell] > 0$

$[\ell] + 1 - \ell > 0$

deci putem alege $\varepsilon \in (0, \min\{\ell - [\ell], [\ell] + 1 - \ell\})$.

Cu acest ε avem:

1) $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$

2) $x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

3) $x_n \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

CONTRADICȚIE

Prin urmare, pp făcută a fost greșită, deci $\ell \in \mathbb{Z}$ $\square$

<u>Criteriul raportului pt șiruri de termeni strict pozitivi</u>

Fie $(x_n)_n \subset (0;\infty)$ a.î. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$

$\in [0;\infty] = [0;\infty) \cup \{\infty\}$

1) Dacă $\ell < 1$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

2) Dacă $\ell > 1$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$

3) Dacă $\ell = 1$, atunci acest criteriu nu decide

3. Fie $a>0$. Det $\lim_{n\to\infty} n\cdot a^n$

Sol:

Notăm $(x_n)_n$, $x_n = n\cdot a^n$ — $(x_n)_n > 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{n\cdot a^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{1}\cdot a = a$$

Cf. crit rap pt șiruri cu term poz:

1. dacă $a>1$ $\Rightarrow$ atunci $\lim_{n\to\infty} n\cdot a_n = \infty$
(i.e. $a\in(0,1)$ - lunul)
2. dacă $a<1$ atunci $\lim_{n\to\infty} n\cdot a_n = 0$
3. dacă $a=1$ atunci criteriul nu decide

$x_n = n\cdot 1^n = n$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot a^n = \lim_{n\to\infty} n\cdot 1^n = \infty\cdot 1 = \infty$$

Am obținut

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & a\in(0,1) \\ \infty, & a\in[1,\infty) \end{cases}$$

Criteriul radicalului pt șiruri cu termeni pozitivi

Fie $(x_n)_n \subset [0,\infty)$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} l\in[0,\infty]$

1. Dacă $l<1$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2. Dacă $l>1$ atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

3. Dacă $l=1$, atunci crit nu decide.

4. Fie $a, b \in (0;\infty)$. ~~Det~~ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{an^2+5n+8}{bn^2+3n+2}\right)^n$

Sol: Vom folosi criteriul radicalului pt șiruri cu termeni pozitivi

Notăm $x_n = \left(\frac{an^2+5n+8}{bn^2+3n+2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{an^2+5n+8}{bn^2+3n+2}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{an^2+5n+8}{bn^2+3n+2} = \frac{a}{b}$$

1. dacă $a<b$ atunci $\frac{a}{b}<1$

deci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2. dacă $a>b$, atunci $\frac{a}{b}>1$

deci $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

3. dacă $a=b$

$$x_n = \frac{an^2+5n+8}{an^2+3n+2}$$

$$x_n = \frac{an^2+3n+2+2n+8}{an^2+3n+2}$$

$$= \left(1 + \frac{2n+8}{an^2+3n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+8}{an^2+3n+2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n+8}{an^2+3n+2}\right)^{\frac{an^2+3n+2}{2n+8}}\right]^{\frac{2n+8}{an^2+3n+2}\cdot n}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+8}{an^2+3n+2}} = e^{\frac{2}{a}}$$

Am obținut $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & a<5 \\ +\infty, & a>5 \\ e^{\frac{2}{a}}, & a=5 \end{cases}$

Prop: Fie $(x_n)_n \subset (0,\infty)$ a.î.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0,+\infty]$

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

5. Det urm limită $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Sol Notăm $x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

6. Det. $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ și precizați dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ unde

a) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \dfrac{n}{2n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Sol:

$x_{2k} = \dfrac{1+(-1)^{2k}}{2} + (-1)^{2k} \dfrac{2k}{2\cdot 2k+1}$

$= \dfrac{1+1}{2} + \dfrac{2k}{4k+1} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$x_{2k+1} = \dfrac{1+(-1)^{2k+1}}{2} + (-1)^{2k+1} \dfrac{2k+1}{4k+3}$

$= 0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$l \neq \dfrac{3}{2}$, $l \neq -\dfrac{1}{2}$

$\exists (x_{n_p})_p$ $\quad x_{n_p} \xrightarrow[p\to\infty]{} l$

el ori e inclus fie în (x_{2k}) (x_{2k+1}) / fie jum jum.

$\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$

$L((x_n)_n) = \{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\}$

$\underline{\lim}\, x_n = -\dfrac{1}{2}$, $\overline{\lim}\, x_n = \dfrac{3}{2}$

$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $\square$

b) $x_n = 1 + 2(-1)^n + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Sol:

Partiționăm șirul $(x_n)_n$ în ~~două~~ 4 subșiruri $(x_{4k})_k$, $(x_{4k+1})_k$, $(x_{4k+2})_k$, $(x_{4k+3})_k$

$\cancel{x_{2k} = 1 + 2(-1)^k + 3}$

Sol

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty} 1 + 2\cdot(-1)^{4k} + 3(-1)^{\frac{\cancel{4}^{2}k\cdot(4k+1)}{\cancel{2}}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} 1 + 2\cdot(-1)^{4k+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{(4k+1)(\cancel{4k+2})}{\cancel{2}}}$$

$$= 1 + 2 - 3 = -4$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = \lim_{k\to\infty} 1 + 2(-1)^{4k+2} + 3(-1)^{\frac{(\cancel{4k+2})(4k}{\cancel{2}}}$$

$x_{4k+3} = 1$