Curs 2

Serii de numere reale

Serii Taylor: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Def: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$

$s_n = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n = \sum_{k=p}^{n} x_k$

$\forall\, n \geq p$

Perechea $\left((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p}\right)$ se numește serie de numere reale

Notație: În contextul def. precedente, notăm

$$\sum_{n=p}^{\infty} x_n \overset{\text{not.}}{=} \left((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p}\right)$$

$$\overset{\text{not}}{=} \sum_{n\geq p} x_n \overset{\text{not}}{=} \sum_n x_n$$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$p=1$

$x_n = \frac{1}{n^2}$

$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$!

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Obs: În general $p=0$ sau $p=1$, cazuri pe care le vom considera în definiții, teoreme etc.

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de nr. reale ($s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$)

Def: 1) Elementele șirului $(x_n)_n$

se numesc termenii seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$

2) Elem. șirului $(s_n)_n$ se numesc sumele parțiale ale seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$

3) Dacă există $\lim_{n\to\infty} s_n \overset{not}{=} \alpha \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, acest α se numește suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și vom scrie

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha}_{\text{suma seriei } = \alpha}$$

4) Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e convergentă dacă șirul $(s_n)_n$ e convergent

5) Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e divergentă dacă șirul $(s_n)_n$ e divergent

<u>Prop</u> (CRIT. NECESAR DE CONV) Dacă $\sum_n x_n$ e convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \to \neg p \end{array}}$$

<u>Corolar</u> (Consec.) CRIT. SUFIC. DE DIVERG.

Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ atunci $\sum_n x_n$ e divergentă

<u>Obs</u> Folosind <u>doar</u> afirmația „$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$", nu putem decide dacă seria $\sum_n x_n$ e conv sau div.

Exc Determinați sumele seriilor de mai jos și precizați dacă sunt convergente sau divergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ $(0^0 = 1$ prin convenție$)$

$= 1 + q + q^2 + \ldots$

Sol:.

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$p = 1$

$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

$= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}}_{0}$

$= 1 - 0 = 1 \in \mathbb{R}$

Deci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 1 \in \mathbb{R}$ i.e

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e convergent

b) $x_n = q^n, \ q \in \mathbb{R}$

$p = 0, \ x_0 \ x_1 \ x_n$

$s_n = q^0 + q^1 + \dots + q^n$

$= 1 \frac{\cancel{(q^{n+1} - 1)}}{\cancel{q - 1}}$

$$s_n = \begin{cases} n+1, & q = 1 \\ 1\frac{(q^{n+1} - 1)}{q-1}, & q \neq 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Dacă $q = 1$ atunci $\lim_{n \to \infty} s_n = +\infty$

deci $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, adică

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ e diverg.

- Fie $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{n \to \infty} q^{n+1} \begin{cases} 0, & q \in (-1; 1) \\ +\infty, & q > 1 \\ \nexists, & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \begin{cases} \cancel{0}, & \cancel{q \in (-1; 1)} \\ \frac{1}{1-q}, & q \in (-1; 1) \\ \infty, & q > 1 \\ \nexists, & q \leq -1 \end{cases}$$

Dacă $q \in (-1, 1)$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă

Dacă $q > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ e divergentă

Dacă $q \leq -1$ atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nu are sumă i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ e diverg. $\square$

<u>Obs</u>: În aplicații, putem folosi (fără justificare) convergențele urm. serii de nr reale:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \to$ conv: $q \in (-1, 1)$
$\to$ div: $q \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

(serie geometrică)

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \to$ conv: $\alpha > 1$
$\to$ div: $\alpha \leq 1$

(serie armonică generalizată)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \to$ conv
$(\alpha = \frac{3}{2})$

$\sum \left(\frac{an^2 + 2n}{5n^2 + 3n} \right)^n \longrightarrow \sum q^n$???

q, α NU TREB SĂ DEP. DE N!!
NU E OK

Obs q și α din obs. precedentă sunt nr. reale care nu depind de n!
(pot depinde de alți parametri)

Prop Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ două serii de nr. reale și $a \in \mathbb{R}^*$

1) Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt ~~di~~convergente atunci $\sum_n (x_n \pm y_n)$ e convergentă.
În plus, $\sum_n (x_n \pm y_n) = \sum_n x_n \pm \sum_n y_n$

2) Dacă $\sum_n x_n$ e conv (resp. div), atunci $\sum_n a\, x_n$ e conv (resp. div).
pt $a=0$ $\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 \Rightarrow$ e converg
În plus, $\sum_n (a\, x_n) = a \left(\sum_n x_n\right)$
(doar atunci când există suma)

3) Dacă $\sum_n x_n$ e conv și $\sum_n y_n$ e div (sau $\sum_n x_n$ div și $\sum_n y_n$ conv) atunci $\sum_n (x_n \pm y_n)$ e diverg.

4) Dacă $\sum_n x_n$ e div și $\sum_n y_n$ e diverg atunci $\sum (x_n \pm y_n)$ poate fi sau convergentă sau divergentă.

$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \to$ diverg
$y_n = \frac{1}{n} \to$ divergent
$\Big| \Rightarrow \sum_n (x_n - y_n)$ e converg

<u>Teoremă (Crit. lui Cauchy pt nr reale)</u>

Fie $\sum_n x_n$ o serie de nr reale. Sunt echiv:

1) $\sum_n x_n$ e converg

folos la exam. $\to$ 2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aî $\forall n \geq n_\varepsilon$
$\forall m \in \mathbb{N}^*$ avem

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m}| < \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon$$

<u>Criterii de converg. pt serii cu term pozitivi</u>

1. Criteriul raportului

Fie serie $\sum_n x_n$, $x_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ aî

$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} l$.

1) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv.

2) Dacă $l > 1$ atunci $\sum_n x_n$ e diverg

3) Dacă $l = 1$ atunci crit. nu decide

② Criteriul radicalului

Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a.î. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} l$

1) Dacă $l<1$ at $\sum_n x_n$ e conv

2) Dacă $l>1$ at $\sum_n x_n$ e div.

3) Dacă $l=1$ at. crit nu decide

③ Crit. Raabe - Duhamel

Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n > 0$ a.î.

$\exists \lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)\right] \overset{not}{=} l$

1) Dacă $l<1$ at $\sum_n x_n$ e div.

2) Dacă $l>1$ at $\sum_n x_n$ e conv.

3) Dacă $l=1$ crit. nu decide.

④ Crit. condensării

Dacă $(x_n)_n \subset [0;\infty)$ este descresc. at. seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n 2^n x_{2^n}$ au aceeași convergență (fie sunt ambele convergente, fie ambele divergente)

⑤ Criteriul de comparație cu inegalit.

Fie seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ cu prop că $\forall n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n$.

1) Dacă $\sum_n y_n$ e conv, atunci $\sum_n x_n$ e conv.

2) Dacă $\sum_n x_n$ e div, atunci $\sum_n y_n$ e div.

⑥ Criteriul de comparație cu limită

Fie seriile $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0; \infty]$

1) Dacă $l \in (0; +\infty)$ atunci $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$ (i.e seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ au aceeași converg/natură)

2) Dacă $l = 0$ și $\sum_n y_n$ e converg atunci $\sum_n x_n$ e conv.

3) Dacă $l = \infty$ și $\sum_n y_n$ e div, atunci $\sum_n x_n$ e diverg.

Criterii de converg pt serii cu termeni oarecare

Def: Fie $\sum_n x_n$ o serie de nr. reale. Spunem că $\sum_n x_n$ este absolut converg dacă $\sum_n |x_n|$ e conv.

Prop: Orice serie de nr. reale absolut convergentă este și convergentă.

Obs: Reciproca prop precedente nu e adev.

① Criteriile Abel - Dirichlet

I. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n) \subset \mathbb{R}$ a.î.

i) $(x_n)_n$ este descresc și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

ii) $\exists M > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $|y_0 + y_1 + \dots + y_n| \leq M$

Atunci $\sum_n x_n \cdot y_n$ e converg

II. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n) \subset \mathbb{R}$ a.î.

i) $(x_n)_n$ este monoton și mărg

ii) $\sum_n y_n$ e converg

Atunci $\sum_n x_n \cdot y_n$ e conv.

2. Criteriul lui Leibniz

Fie $(x_n)_n \subset [0,\infty)$ a.î. $(x_n)_n$ e descresc și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci $\sum_n (-1)^n x_n$ e convergent

Exc: Fie $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Arătați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e converg.

b) Arătați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e diverg.

Sol Fie $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$(x_n)_n$ descr. și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$a_n = (-1)^n x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Cf. Crit. lui Leibniz, avem că $\sum_n a_n$ e converg.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div (serie armonică gener. cu $\alpha = 1$) $\square$

Exc

Studiați convergența seriilor

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (3n)} \cdot \frac{1}{2^n}$

Sol

$$x_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (3n)} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Rap de fco prod

$\Rightarrow$ crit Rap, crit Raabe

* încerc. crit în ord în care mi s-au dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{\cancel{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}(3(n+1)-2)}{\cancel{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3n} \cdot 3(n+1)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{\cancel{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}}{\cancel{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3n}} \cdot \cancel{\frac{1}{2^n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{3n+3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \xRightarrow{\text{Crit Rap.}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e conv. $\square$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$

Sol Fie $x_n = \frac{1}{2^n + 3^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$y_n = \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$x_n < y_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ conv}$$

(serie geom cu $q = \frac{1}{2}$)

Cf. Crit. de comp. cu ineg avem că

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e conv $\square$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$

Sol: $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}} \ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^3}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^2}}$$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5+n^3}}{\sqrt{n^5+n^2}} = \sqrt{1} = 1 \in (0, +\infty)$$

Conf. Crit de comp cu limită avem

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n^2}}}{\cancel{\sqrt{n^3}}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

div (serie armonică gen cu $\alpha = \frac{1}{2}$)