- Vectori și valori proprii ale lui $T \in \mathcal{L}(V_n)$ -

Vrem să găsim bazele lui V_n în rap. cu care matricea unui endomorfism $T \in \mathcal{L}(V_n)$ să aibă o formă simplă, mai exact să fie o matrice diagonală.

Def. ① Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$. Sp. că vectorul $\vec{x} \neq \vec{0}_V$ din V_n este vector propriu ptr. T dc. $\exists \lambda \in K$ a.î.

$$\boxed{T(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}}$$

; $\lambda \overset{\text{s.n.}}{=}$ val. proprie corespunzătoare vectorului propriu $\vec{x}$

Teorema ② Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V_n)$ admite n vectori proprii lin. indep. DACĂ ȘI NUMAI DACĂ $\exists$ o bază a lui V_n a.î. matricea A a lui T în această bază să fie de forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Observație: Valorile proprii λ_i; $i = \overline{1,n}$ nu sunt neapărat distincte.

Def. ③ Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V_n)$ s.n. DIAGONALIZABIL dc. $\exists$ o bază B în V_n formată numai din vectori proprii ptr. T.

Propoziția ④ : Vectorul $\vec{x}$ este propriu dacă și numai dacă matricea coloană X a coord. vectorului $\vec{x}$ în baza B este sol. nebanală ptr. sistemul liniar și omogen. (1)

Deci, T admite vectori proprii

$$\Updownarrow$$

λ este sol. a ecuației algebrice de grad n

$$\boxed{\det(A-\lambda I_n)=0}$$

Def ⑤ : Polinomul $p(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$ s.n. polin. caracteristic asociat matricei A, iar ec. $p(\lambda)=0$ s.n. ec. caract. a matricei A.

Prop. ⑥ : Fie $\boxed{\lambda \in K \text{ o răd.}}$ a ec. caracteristice $\boxed{p(\lambda)=0}$ asociată lui $T\in \mathcal{L}(V_n)$. Atunci λ este val proprie ptr. T. Reciproc, dc λ = val. proprie ptr. T, at. λ = răd. a ec. caract. $\boxed{p(\lambda)=0}$

Prop. ⑦ : Polinomul caract. al matricei pătratice de ordinul n, A, are expresia:

$$p(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n-\delta_1\lambda^{n-1}+\delta_2\lambda^{n-2}-\dots+(-1)^n\delta_n);$$

unde δ_k = suma minorilor diagonali de ordin k ai matricei A

Evident, $\delta_1=\mathrm{Tr}\,A=a_1^1+a_2^2+\dots+a_n^n$

$\delta_n=\det A$

(→ Formula se dem. cu regula lui Laplace de scriere a unui det. ca sumă de 2 det.)

Exemplu: Fie A matrice de ordin 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 1+2+3+0 = 6$$

Laplace: $\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$

$+ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -40$

$\delta_4 = \det A = 1 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 3\lambda^2 - 40\lambda + 1$

Știm că un endomorfism al lui V_n are matrice diferite în raport cu baze diferite.

Q: Ce se întâmplă cu polin. caract.?

Prop. 8 Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$. B, B' = baze ale lui V_n,
A = matricea lui T în baza B
A' = matricea lui T în baza B'
At. $p_A(\lambda) = p_{A'}(\lambda)$

Def 9 Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$; B = bază oarecare a lui V_n
s.n. polin. caract. al lui T, polin. caract. al matricei lui T în baza B. Răd. caract. ale lui T sunt răd. polin. caract. al mat. lui T în baza B. → toate răd. caract. ale lui T + toți coef. $\in K$ ai lui p = invarianți ai lui T
Mulț. răd. caract. ale lui T = Spectrul lui T
|| mat.
Spec(T)

$V(\lambda) := \{ \vec{x} \in V_n \mid T(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} \}$, cu λ = val. pr.
↳ mulțimea tuturor vect. pr. ai unui endomorfism T, coresp. val. pr. λ, la care am adăugat vect. nul.
→ este subsp. liniar al lui V,
de $\boxed{\text{dimensiune} = n - \text{rang}(A - \lambda I_n)}$
→ mai mult, dc λ are ord. de multipl. m_λ ca răd. caract. a lui T, $\dim(V_\lambda) \leq m_\lambda$

Prop. 10: Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$ și $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ val. pr. distincte ale lui T. Fie $\vec{u_i} \in V(\lambda_i) \setminus \{\vec{0}\}$, $i = \overline{1,p}$
At. $\{\vec{u_1}; \dots; \vec{u_p}\}$ e s.l.i.

$\boxed{T}$ 11: Dc $T \in \mathcal{L}(V_n)$ are n val. pr. distincte, at. T = diagonalizabil

Def (12): Sp-că o mat. pătratică, de ord. n este diag. dc. ea este asemenea cu o mat. diagonală.

Prop. (13): Fie $A \in M_n(K)$. Dc. A are toate răd caract. simple și în K, at. A este diagonalizabilă.

Teoremă (14) (de diagonalizare a unui endomorfism):

$T \in \mathcal{L}(V_n)$ = diagonalizabil dc. și numai dc. urm. cond. sunt satisfăcute:

(i) răd. ec. caract. sunt toate din K

(ii) ord. de multiplicitate ($m_{\lambda i}$) al fiecărei val. pr. λi = dim. subsp. pr. $V(\lambda i)$

Prop (18): Fie $A \in M_n(K)$, $\{\lambda i\}_{i=\overline{1,p}}$ răd. caract. ale lui A de multipl. $m_1, \dots, m_p$ at. A este diagon. dc. și numai dc. sunt îndeplinite cond.:

(i) răd. caract. ale lui A sunt toate din K

(ii) $n - \text{rang}(A - \lambda I_n) = m_i$; $\forall i \in \overline{1,p}$

Algoritm practic de diagonalizare al unui endomorfism.

- Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$ un endomorfism și o bază B în V_n

$A \overset{\text{not.}}{=}$ matricea lui T în baza B

(I) Se rezolvă ecuația $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

→ Dc. această ec. are răd. care nu sunt din K, at. cond. (i) din T. anterioară nu este satisfăcută ⇒ $\boxed{T \neq \text{diagonalizabil}}$

→ Dc. toate răd. $\in K$ ⇒ at. ptr. fiecare val. pr. λ_i, se det. subsp. pr. $V(\lambda_i)$ astfel:

(II) • Se caută (orice) un vector din V_n cu matricea col. X a coord. sale, a.î.:

$$\boxed{(A - \lambda_i I_n) \cdot X = 0}$$

• Se rezolvă sistemul ⇒ se det. $V(\lambda_i)$, astfel. Se pune în evidență câte o bază ptr. fiecare $V(\lambda_i)$ ⇒ astfel, aflăm $\dim(V_{\lambda_i})$

→ dc. ∃ o val. pr. λ_i ptr. care $\dim(V_{\lambda_i}) < m_{\lambda_i}$ ⇒ (ii) nu este satisfăcută ⇒ $T \neq$ diagon.

→ dc. $\dim(V_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}$, ptr. toate val. pr.

⇒ $\boxed{T = \text{diagon.}}$

★ În acest caz, baza $\bar{B}$ formată prin reuniunea bazelor tuturor subsp. proprii det. anterior, este bază a lui V_n în rap. cu care matricea endomorfismului T are forma diagonală: $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, λ_i = se repetă de atâtea ori cât este ord. ei de multiplicitate.