Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Lucrăm în spațiul metric $(\mathbb{R}^p, \underset{d}{\underset{\|\text{not.}}{d_2}})$.

Teoremă (Teorema de permutare a limitei cu integrala).

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$, $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ a.î.:

1) f_n integrabilă Riemann și mărginită $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

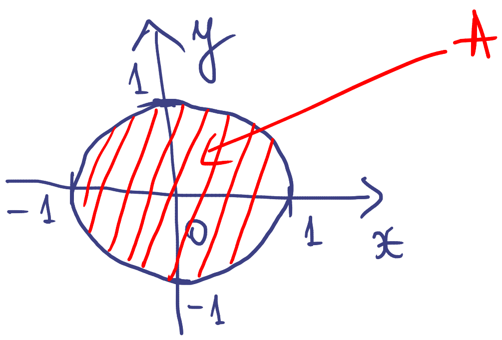
Atunci f este integrabilă Riemann și mărginită și

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx.$$

Exercițiu. Fie $A = B[(0,0), 1] = \overline{B}((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

Determinați $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_A \frac{\cos(n(x+y)) + 2(x^2+y^2)}{n^2 + nx^2 + y^2}\,dx\,dy$.

Soluție.



A convexă și mărginită $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

A închisă și mărginită $\Rightarrow A$ compactă.

Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$, $f_n(x,y) = \dfrac{\cos(n(x+y)) + 2(x^2+y^2)}{n^2+nx^2+y^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ continuă } \forall n \in \mathbb{N}^* \\ A \in J(\mathbb{R}^2) \text{ și } A \text{ compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n$ integrabilă Riemann și mărginită $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Convergența simplă

Fie $(x,y) \in A$.

$$0 \le |f_n(x,y)| = \frac{|\cos(n(x+y)) + 2(x^2+y^2)|}{n^2+nx^2+y^2} \le \frac{|\cos(n(x+y))| + |2(x^2+y^2)|}{n^2+nx^2+y^2} \le$$

$$\le \frac{1+2}{n^2} = \frac{3}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Avem $0 \le |f_n(x,y)| \le \dfrac{3}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad |f_n(x,y)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \frac{3}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x,y)| = 0$. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = 0$.

Așadar $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 0$.

Convergența uniformă

$$\sup_{(x,y)\in A} |f_n(x,y) - f(x,y)| = \sup_{(x,y)\in A} \left| \frac{\cos(n(x+y)) + 2(x^2+y^2)}{n^2+nx^2+y^2} - 0 \right| \le$$

$$\le \sup_{(x,y)\in A} \frac{|\cos(n(x+y))| + |2(x^2+y^2)|}{n^2+nx^2+y^2} \le \frac{1+2}{n^2} = \frac{3}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f.$$

Conform Teoremei de permutare a limitei cu integrala avem că f este integrabilă Riemann și mărginită și $\lim_{n\to\infty} \iint_A f_n(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A 0\,dx\,dy = 0.$ $\square$

<u>Definiție.</u> O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numește neglijabilă Lebesgue dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (D_n)_{n\geq 0}$ o familie de dreptunghiuri a.î. $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \overset{\circ}{D}_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} vol(D_n) < \varepsilon$.

<u>Observații.</u>

1) Orice submulțime a unei mulțimi neglijabile Lebesgue este, la rândul ei, neglijabilă Lebesgue.

2) Orice mulțime cel mult numărabilă este neglijabilă Lebesgue.

3) Orice reuniune cel mult numărabilă de mulțimi neglijabile Lebesgue este, la rândul ei, neglijabilă Lebesgue.

4) Dacă $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(A) = 0$, atunci A este neglijabilă Lebesgue.

Teoremă (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann). Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Sunt echivalente:

1) f este integrabilă Riemann.

2) D_f este neglijabilă Lebesgue, unde $D_f = \{x \in A \mid f$ nu este continuă în $x\}$.

__Exercițiu.__ Fie $f: [0,1] \times [2,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x+3y \,; & (x,y) \in ([0,1]\times[2,3]) \setminus \{(0,2)\} \\ 1 \,; & (x,y) = (0,2). \end{cases}$$

Arătați că f este integrabilă Riemann.

__Soluție.__ $[0,1]\times[2,3] \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

$|f(x,y)| = |2x+3y| \leq 2|x| + 3|y| \leq 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11 \;\forall (x,y) \in$
$\in ([0,1]\times[2,3]) \setminus \{(0,2)\}$

$|f(0,2)| = 1 < 11$

$\Longrightarrow |f(x,y)| \leq 11 \;\forall (x,y) \in [0,1]\times[2,3] \Longrightarrow$

$\Rightarrow f$ mărginită.

$D_f \subset \underbrace{\{(0,2)\}}_{\text{finită} \Rightarrow \text{neglijabilă Lebesgue}}$ $\Big| \Rightarrow D_f$ neglijabilă Lebesgue.

Deci f este integrabilă Riemann. $\square$

Fie $\phi \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,n}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ o descompunere Jordan a lui A.

Considerăm $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\forall\, i = \overline{1,n}$ și $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\forall\, i = \overline{1,n}$.

<u>Definiție.</u> 1) $S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(A_i)$ se numește suma Darboux superioară asociată funcției f și descompunerii Jordan $\mathcal{A}$.

2) $s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(A_i)$ se numește suma Darboux inferioară asociată funcției f și descompunerii Jordan $\mathcal{A}$.

3) $\overline{\int_A} f(x)\,dx = \overline{\int_A} f(x_1, \dots, x_p)\,dx_1 \dots dx_p =$
$= \inf\{S_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui $A\}$ se numește

integrala Darboux superioară asociată funcției f.

4) $\underline{\int_A} f(x)\,dx = \underline{\int_A} f(x_1, \dots, x_p)\,dx_1 \dots dx_p =$

$= \sup \{ s_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui $A\}$ se numește integrala Darboux inferioară asociată funcției f.

Observații.

1) $s_{\mathcal{A}}(f) \le S_{\mathcal{A}}(f)$.

2) $\underline{\int_A} f(x)\,dx \le \overline{\int_A} f(x)\,dx$.

Teoremă (Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann).

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f este integrabilă Riemann.

2) $\underline{\int_A} f(x)\,dx = \overline{\int_A} f(x)\,dx$ (caz în care avem

$\underline{\int_A} f(x)\,dx = \overline{\int_A} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$).

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \mathcal{A}_\varepsilon$ descompunere Jordan a lui A a.î.

$S_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) - s_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) < \varepsilon$.

4) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui A, $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon$, avem $S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$.

<u>Exercițiu.</u> Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, $\mu(A) > 0$ și $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \,; & x, y \in \mathbb{Q} \\ 1 \,; & \text{altfel.} \end{cases}$$

Determinați $\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy$, $\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy$ și precizați dacă f este integrabilă Riemann.

<u>Soluție.</u> $|f(x,y)| \leq 1 \;\forall (x,y) \in A \Rightarrow f$ mărginită.

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,n}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ o descompunere Jordan a lui A,

$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in A_i\} \;\forall i = \overline{1,n}$ și $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in A_i\} \;\forall i = \overline{1,n}$.

$$S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i) > 0}}^{n} M_i\, \mu(A_i).$$

$$s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i) > 0}}^{n} m_i\, \mu(A_i).$$

$\mu(A_i) > 0 \Rightarrow \mu_*(A_i) > 0 \Rightarrow \exists D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{vol}(D) > 0$ a.î. $D \subset A_i$ (1)

Fie $B=\{(x,y)\in A \mid x,y\in\mathbb{Q}\}$ și $C=\{(x,y)\in A \mid x\notin\mathbb{Q}$ sau $y\notin\mathbb{Q}\}$.

Conform relației (1), pentru orice $i\in\{1,\dots,n\}$ cu proprietatea că $\mu(A_i)>0$, avem $A_i\cap B\neq\phi$ și $A_i\cap C\neq\phi$, deci, pentru orice $i\in\{1,\dots,n\}$ cu proprietatea că $\mu(A_i)>0$, avem $M_i=1$ și $m_i=0$.

Așadar $S_{\mathcal{A}}(f)=\sum\limits_{\substack{i=1\\ \mu(A_i)>0}}^{n} M_i\,\mu(A_i)=\sum\limits_{\substack{i=1\\ \mu(A_i)>0}}^{n}\mu(A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(A_i)=\mu(A)$ și

$$s_{\mathcal{A}}(f)=\sum_{\substack{i=1\\ \mu(A_i)>0}}^{n} 0\cdot\mu(A_i)=0.$$

Prin urmare $\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy=\inf\{S_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui $A\}=\mu(A)$ și $\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy=$

$=\sup\{s_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui $A\}=0$.

$\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy\neq\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow f$ nu este integrabilă Riemann. $\square$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $q \in \mathbb{N}^*$. Lucrăm cu spațiile metrice $(\mathbb{R}^n, d_2)$ și $(\mathbb{R}^q, d_2)$.

$d_2 \overset{\text{not.}}{=} d$ (în ambele cazuri)

Def.: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathring{A}$ și $f: A \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \dots, f_q)$ o funcție care admite toate derivatele parțiale (de ordinul I) în punctul a.

Matricea
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

s.n. matricea jacobiană (sau matricea Jacobi) asociată lui f în a și se notează $J_f(a)$.

Dacă $n = q$, atunci $J_f(a)$ este matrice pătratică, determinantul său s.n. jacobianul lui f în a și se notează $\det J_f(a)$.

Teorema de schimbare de variabilă - Varianta 1

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V deschise și $h: U \to V$ un difeomorfism de clasă C^1 (i.e. h este bijectivă și h, h^{-1} sunt de clasă C^1).

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\bar{A} \subset U$ (rezultă de mai sus că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$) şi $f: h(A) \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann şi mărginită. Atunci funcţia $(f \circ h)\,|\det J_h|: A \to \mathbb{R}$ este integrabilă R şi mărginită şi

$$\int_{h(A)} f(y)\,dy = \int_A (f \circ h)(x)\,|\det J_h(x)|\,dx.$$

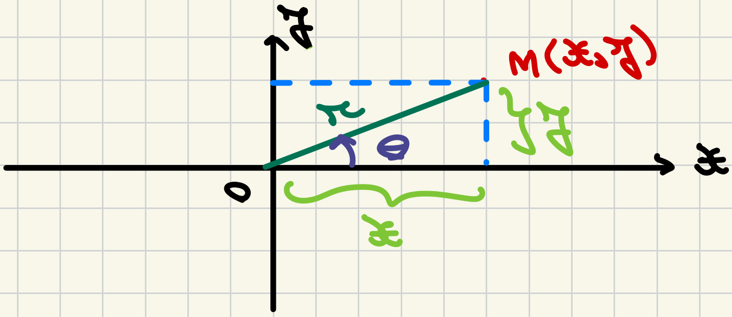
Teorema de schimbare de variabilă - Varianta 2

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V deschise a.î. $Fr(V) = \partial V$ este neglijabilă Lebesgue şi $h: U \to V$ un difeomorfism de clasă C^1.

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A \subset U$, $h(A)$ este mărginită, $\det J_h(A)$ este mărginită (rezultă de mai sus că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$) şi fie $f: h(A) \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă R şi mărginită. Atunci $(f \circ h)\,|\det J_h|: A \to \mathbb{R}$ este integrabilă R şi mărginită şi

$$\int_{h(A)} f(y)\,dy = \int_A (f \circ h)(x)\,|\det J_h(x)|\,dx.$$

Schimbări standard de variabilă în integrala dublă



$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$$

1. Trecerea la coordonate polare

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (putem avea $\alpha = \beta = 0$), $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă R și mărginită.

S.V. $(*)\ \begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta \\ y = \beta + r\sin\theta \end{cases}, \quad r \in [0, +\infty),\ \theta \in [0, 2\pi]$

Atunci $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r f(\alpha + r\cos\theta,$ $\beta + r\sin\theta)\,dr\,d\theta$, unde B se obține din condiția $(x,y) \in A$.

$$(*) \Rightarrow \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

2. Trecerea la coordonate polare generalizate

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (putem avea $\alpha = \beta = 0$) și $a, b \in (0, +\infty)$. Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă R și mărginită.

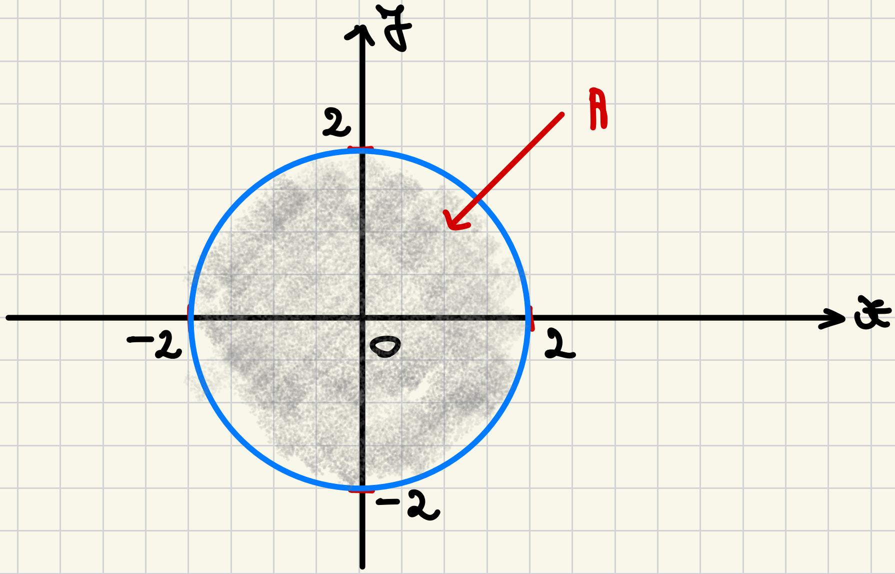
S.V. $\begin{cases} x = \alpha + a r\cos\theta \\ y = \beta + b r\sin\theta \end{cases}, \quad r \in [0, +\infty),\ \theta \in [0, 2\pi]$

Atunci $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B abr f(\alpha + ar\cos\theta,$
$\beta + br\sin\theta)\,dr\,d\theta$, unde B se obține din condiția $(x,y)\in A$.

Exercițiu: Determinați $\iint_A y\,dx\,dy$, unde

$$A = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\le 4\}.$$

Sol.:



A convexă și mărginită $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

A închisă și mărginită $\Rightarrow$ A compactă

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$.

f continuă

S.V. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r\in[0,+\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$

$(x,y)\in A \Rightarrow x^2+y^2\le 4 \Rightarrow (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \le 4$

$\Rightarrow r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \le 4 \Rightarrow r^2 \le 4 \Rightarrow \begin{cases} r\in[0,2] \\ \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$

$$= 1$$

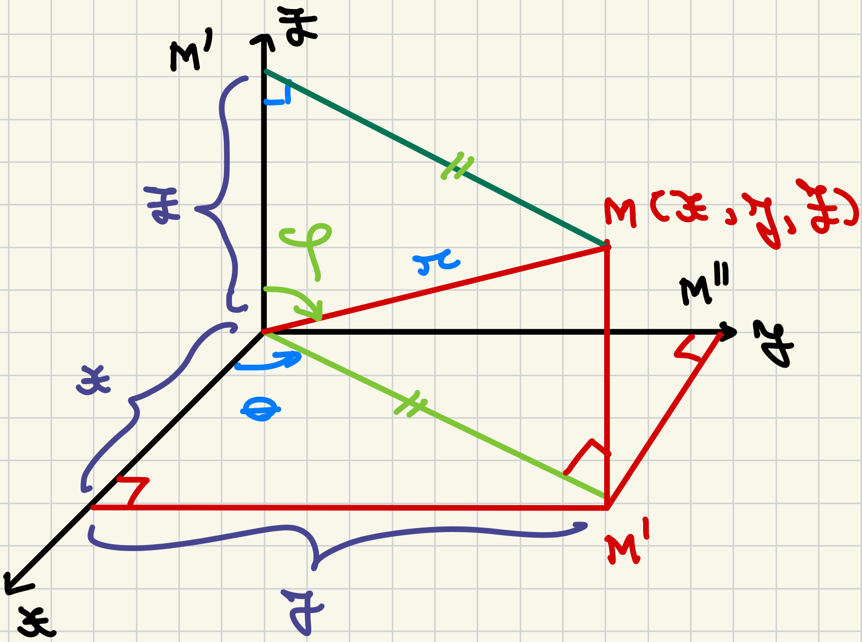
Fie $B=[0,2]\times[0,2\pi]$, $B\in J(\mathbb{R}^2)$ şi B compactă.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r\cdot r\sin\theta\,d\theta\right)dr = \int_0^2 \left(r^2(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right)dr$$

$$= \int_0^2 r^2(-1+1)\,dr = \int_0^2 0\,dr = 0 \quad \square$$

Schimbări standard de variabilă în integrala triplă



$$\cos\varphi = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi = \frac{MM'}{r} \Rightarrow MM' &= r\sin\varphi \\ MM' &= OM' \end{aligned}\right| \Rightarrow OM' = r\sin\varphi$$

$\cos\theta = \frac{x}{OM'} \Rightarrow x = r\cos\theta\sin\varphi$

$\sin\theta = \frac{y}{OM'} \Rightarrow y = r\sin\theta\sin\varphi$

$r \in [0, +\infty)$
$\theta \in [0, 2\pi]$
$\varphi \in [0, \pi]$

1. Trecerea la coordonate sferice

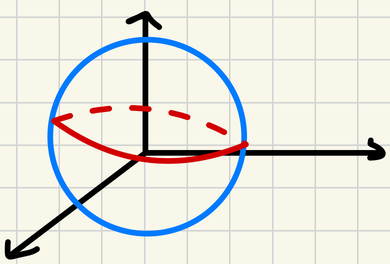
Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (putem avea $\alpha = \beta = \gamma = 0$), $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ integrabilă R. și mărginită.

$$\text{S.V.} \begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta\sin\varphi \\ y = \beta + r\sin\theta\sin\varphi, & r \in [0, +\infty), \\ z = \gamma + r\cos\varphi & \theta \in [0, 2\pi], \\ & \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

Atunci $\iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$

$$= \iiint_B r^2 \sin\varphi\, f(\alpha + r\cos\theta\sin\varphi, \beta + r\sin\theta\sin\varphi, \gamma + r\cos\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

unde B se obține din condiția $(x, y, z) \in A$.



2. Trecerea la coordonate sferice generalizate

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (putem avea $\alpha = \beta = \gamma = 0$) și $a, b, c \in (0, +\infty)$.

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ integrabilă R. și mărginită.

$$\text{S.V.} \begin{cases} x = \alpha + ar\cos\theta\sin\varphi \\ y = \beta + br\sin\theta\sin\varphi, & r \in [0, +\infty), \\ z = \gamma + cr\cos\varphi & \theta \in [0, 2\pi], \\ & \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

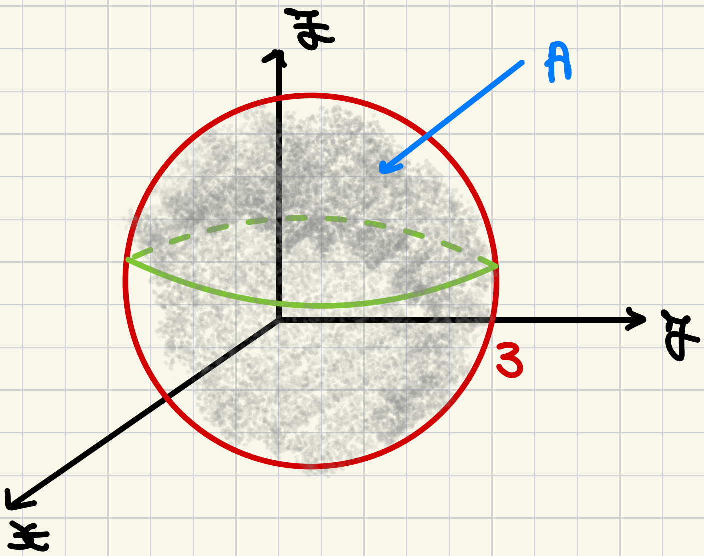
Atunci $\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$

$$= \iiint_B abc\, r^2 \sin\varphi\, f(\alpha + ar\cos\theta\sin\varphi, \beta + br\sin\theta\sin\varphi, \gamma + cr\cos\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

unde B se obține din condiția $(x, y, z) \in A$.

Exercițiu: Determinați $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, unde $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.

Sol.:



A convexă și mărginită $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$

A închisă și mărginită $\Rightarrow A$ compactă

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

f continuă

$$\text{S.V.} \begin{cases} x = r\cos\theta \sin\varphi \\ y = r\sin\theta \sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}, \quad r \in [0,+\infty), \quad \theta \in [0,2\pi], \quad \varphi \in [0,\pi]$$

$(x,y,z) \in A \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2 +$

$+ (r\cos\varphi)^2 \le 9 \Rightarrow r^2\sin^2\varphi\,\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1} +$

$+ r^2\cos^2\varphi \le 9 \Rightarrow r^2\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{1} \le 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2 \le 9 \Rightarrow \begin{cases} r \in [0,3] \\ \theta \in [0,2\pi] \\ \varphi \in [0,\pi] \end{cases}$$

Fie $B = [0,3] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$.

$B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și B compactă

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_B r^2 \sin\varphi \, f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r^2 \sin\varphi \sqrt{r^2} \, d\varphi \right) d\theta \right) dr =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} \left(r^3 (-\cos\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \right) d\theta \right) dr =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} 2r^3 \, d\theta \right) dr = \int_0^3 \left(2r^3 \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) dr$$

$$= \cancel{4}\pi \cdot \frac{r^4}{\cancel{4}} \Big|_{r=0}^{r=3} = 81\pi \quad \square$$