

Topologie

Def: Fie X o multime: se numeste topologie pe X o familie de submultimi $\mathcal{D} \subset P(X)$ cu proprietatile

- (1) $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ cu $U_i \in \mathcal{D}$, $\forall i \in I$ atunci $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{D}$
- (2) $n \in N$, ($m \geq 2$) $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{D}$, $\exists U_n \in X$, $U_1 \cap U_2 \subseteq U_n$
- (3) $\emptyset, X \in \mathcal{D}$

• Elementele din \mathcal{D} s.m. deschise
complementarele lor s.m. inchise

- Axiomele se reformuleaza -

- (1) $\bigcap_{i \in I} F_i =$ inchisă ptr. orice familie de inchise $\{F_i\}_{i \in I}$
- (2) $\forall n, \forall \{F_i\}_{i=1}^n$ inchise $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n F_i =$ inchisă
- (3) \emptyset, X inchise

Topologia uzuala

Topologia uzuala pe \mathbb{R} : prim. oif o submultime $\Delta \subset \mathbb{R}$ s.m. deschisa (in top. uz.) staca $\forall x \in \Delta$, $\exists \varepsilon > 0$ a.i. $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \Delta$

$(0, 1]$ - deschis? NU! ptr ca $\nexists \varepsilon > 0$ a.i. $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \subset (0, 1]$

\mathbb{N} - deschisa? NU! ptr ca $\nexists \varepsilon > 0$ a.i. $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \subset \mathbb{N}$

Fie $A \subset X$ submultime arbitrară. Un punct $x \in A$ s.m. **punct interior** lui A dacă există $\delta \in \mathbb{D}$ a.i. $x \in D \subset A$. Notație $\overset{\circ}{A} = \{ \text{punktele interioare ale lui } A \}$

Ex: $\cdot \overset{\circ}{[0,1]} = (0,1)$
 $\cdot \overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset \quad \cdot \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset \quad \cdot \overset{\circ}{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \emptyset$

Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic, $A \subset X$ submultime. S.m. **enchidere** a lui A (în raport cu topologia \mathcal{D}) multimea \bar{A} definită prin:

$$\bar{A} = \bigcap F \quad (F \text{ mshb})$$

Prop: 1) \bar{A} este închisă

2) \bar{A} este "cea mai mică" multime închisă care conține A i.e. $\forall F \subset X$ închisă, dacă $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset F$

3) $\forall A, B \subset X$ avem ca $\bar{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic $A \subset X$ submultime. Familia de submultimi ale lui A $\mathcal{D}_A = \{ A \cap D | D \subset X, D = \text{deschis} \}$ este o topologie pe A numită **topologie induată**.

Fie (X, \mathcal{Q}) sp topologic. O familie de deschizături $B \subset \mathcal{D}$ s.m. **bază** pentru topologia data dacă intersecția fiecărui nr finit de elemente din B este tot elem. al lui B .

Fie $(X, \mathcal{D}_X), (Y, \mathcal{D}_Y)$ spații topologice. O funcție $f: X \rightarrow Y$ care are proprietatea că $\forall D \subset Y$ deschis, atunci $f^{-1}(D)$ deschis în X s.m. **funcție continuă**.

* $f: X \rightarrow Y$ funcție $\cdot A \subset X$ sub $f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f(x) | x \in A \}$
 $\cdot B \subset Y$ sub $f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in X | f(x) \in B \}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f este continuă dacă $\forall x \in \mathbb{R}$ și $\forall \epsilon > 0$ există $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ a.t. $\forall y$, $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$

Fie (X, Δ) sp. topologic. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sir de elem. din X , $x \in X$. Spunem că sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la x dacă și doar dacă există în X cu l.e.s., $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 = m(\Delta)$ a. s. $x_n \in \Delta$ și $m \geq m(\Delta)$.

Homeomorfism

Fie X și Y două sp. topologice. O funcție $f: X \rightarrow Y$ suntem homeomorfism dacă este bijecțivă, continuă și înversa ei, f^{-1} - continuă.

Dacă între două spații topologice există un homeomorfism, spunem că ele sunt homeomorfe.

! Orice interval de forma (a, b) ; $a, b \in \mathbb{R}$ este homeomorf cu \mathbb{R} .

Spatii topologice produs

Fie (X, Δ_X) , (Y, Δ_Y) spații topologice. Definim pe $X \times Y$ o topologie numită topologie produs astfel:

o submultime $U \subset X \times Y$ va fi numita deschisă dacă $\forall P = (x, y) \in U$, există un deschis $\Delta_1 \subset X$ (i.e. $\Delta_1 \in \Delta_X$) și un deschis $\Delta_2 \subset Y$ a. s. $(x, y) \in \Delta_1 \times \Delta_2 \subset U$.

sectiuni arbitrară de deschisă e deschisă

- 1) $P_1: X \times Y \rightarrow X$, $P_1(x, y) = x$; $P_2: X \times Y \rightarrow Y$, $P_2(x, y) = y$ continue
- 2) spațile $X \times Y$ și $X \times X$ sunt homeomorfe
- 3) fct. $S: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, non: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ def. printr. $S(x, y) = \frac{x+y}{1+xy}$ și $x, y \in \mathbb{R}$

→ Sunt continue pe $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cu top produs

4) Prin inducție după m putem extinde pe \mathbb{R}^n și topoologie naturală $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ (topologia naturală pe \mathbb{R}^n)
funcțiile polinomiale pe \mathbb{R}^n sunt funcții continue

Spatii metrice

Fie X o multime. S.m. metruca pe X o funcție
 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietăți:

- 1) "Inegalitatea triunghiului": $\forall x, y, z \in X$
 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$
- 2) "Simetrie": $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$
- 3) "Positiv definită": $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

CURS 3 și 4 și 5

~Topologia inducă de o metrică~

Fie (X, d) spațiu metric, și submultime $U \subset X$ s.m. deschisă dacă $U = \emptyset$ sau, $\forall x \in U, \exists r > 0$ a.ș. $B(x, r) := \{y \in X | d(y, x) < r\}$ este deschisă de centru x și rază r .

Def: O topologie pe o mulțime X s.m. metrizabilă (sau topologie metrică) dacă există o metrică pe X ce o induce.

Def: Fie X un spațiu topologic, X s.m. separat Hausdorff (T_2) dacă $\forall x \neq y, \exists U_1, U_2$ deschise a.ș. $x \in U_1, y \in U_2$, și $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

? Orice topologie metrică este separată Hausdorff. ?

Exemple de topologii care nu sunt separate Hausdorff:

- X infinită cu topologia cofinată
- X cu top. groză

Def: Fie $(x_1, d_1), (x_2, d_2)$ spații metrice. O funcție $f: X_1 \rightarrow X_2$ s.n. izometrie (pe imagine) dacă $\forall x, y \in X_1$ dacă $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$.

? Orice funcție care este izometrie (pe imagine) este injectivă. ?

Def: Fie X submulțime, d_1, d_2 metrice pe X . spunem că d_1, d_2 sunt echivalente dacă $\exists m > 0, \exists M > 0$ a.ș. $\forall x, y \in X$ $m d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq M d_1(x, y)$.

? Dacă două metrice sunt echivalente, atunci topologile generate de ele coincid. ?

Def: Fie (X, d) spațiu metric, $X = \{x_m\}_{m \geq 1}$ set de elemente din X . spunem că X este convergent la un element $l \in X$ dacă $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$ a.ș. $d(x_m, l) < \epsilon, \forall m > N(\epsilon)$.

Def: Fie (X, d) spatiu metric, $X = \{x_m\}_{m \geq 1}$ sir de elemente din X . Spunem că $\{x_m\}_{m \geq 1}$ este **sir Cauchy** (sir fundamental) dacă $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ a. s. $\forall m, n \geq N(\varepsilon)$, $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$.

Def: Un spatiu metric X s.m. **complet** dacă orice sir Cauchy din X este convergent.

Teorema: Fie (X, d) un spatiu metric, atunci X poate fi completat în sensul că există un sp. metric (\bar{X}, \bar{d}) a. s.:

- 1) (\bar{X}, \bar{d}) este complet
- 2) \exists o fct $i: X \rightarrow \bar{X}$ care este izometrică pe imagine
- 3) $i(X)$ este densă în \bar{X} adică orice element din \bar{X} este egal cu limita unei sér de elemente din $i(X)$

~ Convexitate ~

Def: Un spatiu topologic nevid X s.m. conex dacă nu există doi deschisi $U_1, U_2 \subset X$:

- U_1, U_2 nemari, $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$
- disjuncti $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- $X = U_1 \cup U_2$

Sal

Un spatiu topologic X este conex cînd singurele submulțimi ale lui X care sunt simultan închise, deschise sunt \emptyset și X .

Propoziție: Fie X spatiu topologic, $U_1, U_2 \in X$ deschisi, conecți. Dacă $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ atunci $U_1 \cup U_2$ e conexă.

? X, Y spații topologice, $f: X \rightarrow Y$ funcție continuă. Dacă $U \subset X$ deschis, conex atunci $f(U)$ conex (cu topologia indușă). ?

Def: Fie X un spatiu topologic. S.m. **drum** în X o funcție continuă $f: [0, 1] \rightarrow X$ (pe $[0, 1]$ considerăm topologia usuală)

Def: Un spatiu topologic X s.m. conex prin arce daca orice $x \neq y$ există un drum f.a.t. $f(0)=x, f(1)=y$.

Propozitie: Orice spatiu topologic conex prin arce e conex.

? \mathbb{R}^m ($m > 1$) și orice biță în \mathbb{R}^n sunt multimi conexe.?

Corolar: O submultime deschisă a lui \mathbb{R} este conexă \Leftrightarrow este interval.

~ Compactitate (în spațiu metric)

Def: Fie X un spatiu topologic. X s.m. quasi-compact daca orice ar fi $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 'biță' deschisă în X a.t. $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ există o submultime finită $J \subset I$ a.t. $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$.

Terminologie: \mathcal{U} s.m. acoperire deschisă a lui X . O subfamilie $M = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, $J \subset I$ a.s. $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ s.m. subacoperire a lui \mathcal{U} .

Deci, un spatiu este quasi-compact daca din orice acoperire cu deschisi a lui X pot extrage o subacoperire finită.

Def: Un spatiu topologic X s.m. compact daca e quasi-compact și separat Hausdorff.

? Topologia cofinita e quasi-compactă, dar nu și compactă pentru că nu e separata Hausdorff.?

Propozitie: $f: X \rightarrow Y$ fct. cont. între spații separate Hausdorff. Daca X este compact, atunci $f(x)$ este compact.

Rem: În general, funcț. continuă nu întorc compactul în compact! (o funcție ce întoarce compactul în compact s.m. funcție proprie)!

Propozitie: (X, d) sp. metric; $K \subset X$ compact atunci K este:

- marginit, adică \exists o biță $B_x(R)$ ($x \in X, R > 0$) a.t. $K \subset B_x(R)$
- închis (în top induză de d)

(X, d) sp. metric, $K \subset X$ închis și marginit $\Rightarrow K$ compact! NU!

CURS 6

- Topologie -

Propozitie: Fie $X \times Y$ sp. topologice compacte. Atunci $X \times Y$ (cu topologia produsă compactă) este compact.

Fie $V_{x,i} = \bigcap_{y \in J^x} p_{x,y}(U_i)$, atunci $\{V_x\}_{x \in X}$ acoperire a lui X cu deschis. Cum X compact pot alege $x_1, \dots, x_n \in X$ a. i. $\{V_{x,i}\}$ acoperire deschisă pentru X .

Deci $X \times Y$ - reunirea deschiselor $\{U_i\}_{i \in J^X}$ unde $J = \bigcup_{i=1}^n J^{x_i}$

Teorema: Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval închis și marginot $I = [a, b]$. Atunci I este compact.

Teorema (Heine-Borel) O submultime a lui \mathbb{R}^n ($n \geq 1$ arbitrar) este compactă (\Rightarrow) este închisă și marginată.

Teorema ("Criteriul general de compactitate în spațiu metric")
Un sp. metric este compact (\Rightarrow) este complet și uniform marginot adică pentru orice $\epsilon > 0$ poate fi acoperit cu un nr finit de bile de rază ϵ .

X multime. Adeljim o relație de echivalență pe X este totușa cu a defini o partiție a lui X , adică o descompunere a lui $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ cu $X_i \cap X_j = \emptyset \forall i, j$

(Partiție \Rightarrow rel de echivalență $x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in I$ a. t. $x, y \in X_i$)

Definiție: Fie X un spațiu topologic, " \sim " o relație de echivalență pe X și X/\sim = multimea claselor de echivalență moduloul.

Fie $p: X \rightarrow X/\sim$ = proiecția canonică

Definim pe X/\sim o topologie astfel: $U \subset X/\sim$ deschis ($\Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset X$ e deschis).

Exemplu de spațiu factor:

1) Fie $X = [0, 1]$ (cu topologia usuală). Definim \sim pe X astfel:

Clasele de echivalență sunt:

- submultimiile de forma $\{x\}$, $x \in (0, 1)$
- submulțimea $\{0, 1\}$

2) Colapsarea unui subspaciu: $X = \text{sp. topologic arbitrar}$,
 $Y \subset X$ submulțime. Definim o partiție a.e. X via o rel de
echivalență: $x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \text{ dacă } x, y \notin Y \\ x \sim y, \text{ dacă } x, y \in Y \end{cases}$

Vom nota X/Y sp. top. factor

De pildă, la ex(1), $X = [0, 1]$, $Y = \{0, 1\}$

Fie $X = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, O) \leq 1\}$ (discul de raza $= 1$)

$Y = \{P \in X \mid d(P, O) = 1\}$ (cercul de raza $= 1$)

$X/Y \cong$ sferă

3) Fie $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Definim \sim astfel $(x, 0) \sim (x, 1)$

$\forall x \in [0, 1]$

$X/\sim \cong$ cilindru

CURS 7

Teorema ("Teorema Banach de punct fix"): Fie (X, d) spatiu metric complet, $f: X \rightarrow X$ functie. Daca $\exists K \in (0, 1)$ a.t. $d(f(x'), f(y)) \leq k \cdot d(x, y) \forall x, y \in X$, atunci f are un punct fix adica $\exists x_0 \in X$ a.t. $f(x_0) = x_0$. În plus, punctul fix al lui f este unic.

Remarca: O functie cu prop. de mai sus (*) s.n. contractie.