C1

4.10.2024

Curs 1

EVALUARE: examen 2 ore

1 punct pentru seminar maxim

Bibliografie → minimală = curs + seminar

1. I. Colojoară, Analiză Matematică, Ed. Didactică și Pedagogică, 1983
2. N. Boboc, —"—, Ed. „U" Buc, 1999
3. R. Miculescu, —"—, Ed. Buc Universitară, 2017

C. Chiteș + R. Miculescu, Ed. Buc Univ, 2017 → Exerciții

INTRO

Calculul diferențial + integral ⊆ Analiza Matematică

Calculul diferențial + integral = calcul infinitezimal →

→ cel mai puternic instrument dezvoltat în studiul naturii

Isaac Newton (1643 - 1727)

Gottfried Leibniz (1646 - 1716)

„Integrală" ≃ 1690 frații Bernoulli

MOTIVAȚIA Calculul diferențial și integral

- Ecuațiile diferențiale
- Ecuațiile cu derivate parțiale →

→ Analiza numerică (Calcul numeric)

→ Informatică

OBIECTIV

Reconsiderarea unor concepte asimilate din liceu, dar într-un cadru mult mai general.

Șiruri de numere reale

Def:

Un șir de numere reale este o funcție $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$x_n := f(n)$ → termenul general al șirului

Not: $\{x_n\}$ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Def:

a) Șirul $\{x_n\}$ s.n. **majorat** dacă mulțimea termenilor săi este majorată.

b) Șirul $\{x_n\}$ s.n. **minorat** — " — minorată.

c) Șirul $\{x_n\}$ s.n. **mărginit** dacă este minorat și majorat.

d) Șirul $\{x_n\}$ este **nemărginit** dacă în afara oricărui interval real mărginit se găsește un termen al șirului.

$\boxed{Ex}$

crește până la 0

a) $x_n = -n$ este majorat, dar nu este minorat.

b) $x_n = (-1)^n n$ nu este nici majorat, nici minorat

Def:

a) Șirul $\{x_n\}$ s.n. **crescător** (strict) dacă $x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($x_n < x_{n+1}$, $\forall n$)

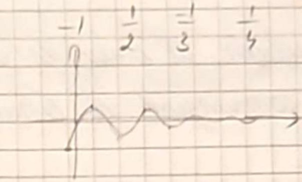
b) Șirul $\{x_n\}$ s.n. **descrescător** (strict) dacă $x_n \ge x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($x_n > x_{n+1}$ $\forall n$)

c) Șirul $\{x_n\}$ s.n. **monoton** (strict) dacă șirul este crescător (strict) sau descrescător (strict)

NON $\boxed{Ex}$

$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

→ x



Def:

$\{x_n\}$ și $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ șir crescător de numere nat.

șirul $y_k := x_{n_k}$ s.n. **subșir** al lui $\{x_n\}$.

Def:

a) Spunem că șirul $\{x_n\}$ are limita $x \in \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon$ $\forall n \ge n_\varepsilon$

În acest caz spunem că x_n este **convergent** la $x \in \mathbb{R}$ și o să notăm fie $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

b) Dacă $\{x_n\}$ nu are limită din $\mathbb{R}$ spunem că este **divergent**.

$\boxed{Ex}$

a) $x_n = (-1)^n$ nu are limită

Pp că $x_n \to l$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ $|(-1)^n - l| < \frac{1}{2}$

n = par $|1 - l| < \frac{1}{2}$

n = impar $|1 + l| < \frac{1}{2}$

$2 = |2| = |(1+l) + (1-l)| \le$

$\le |1+l| + |1-l| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

contradicție

TEOREMĂ

Limita ∀ șir convergent este unică.

TEOREMĂ

Orice subșir al unui șir convergent este la rândul lui convergent la limita șirului.

TEOREMĂ

Orice șir convergent este mărginit.

Reciproca este FALSĂ.

$x_n = (-1)^n$ mărginit, dar nu e convergent.

TEOREMĂ

Orice șir nemărginit este divergent

TEOREMĂ

$\{x_n\}$ $\alpha_n \geq 0$ $\alpha_n \to 0$

Dacă $|x_n - x| \leq \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $x_n \to x$

! (Criteriul comparației)

TEOREMĂ

$\{x_n\}, \{y_n\}$ $x_n \to x$
$y_n \to y$

Atunci

1) $x_n + y_n \to x + y$
2) $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda x_n \to \lambda x$
3) $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$
4) $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ at. $x \leq y$
5) $x_n \leq z_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $x_n \to x$, $y_n \to y$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow z_n \to z$ (T. Clește)
(converge la z)

6) $x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$

$\boxed{\text{EX}}$

$\{x_n\}$ a.î. $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}, \{x_{3n}\}$ convergente (subșiruri)

În ce condiții $\{x_n\}$ este convergent?

$x_n \to a$

$x_{2n+1} \to b$

$x_{3n} \to c$

considerăm $\{x_{6n}\}$ subșir

$x_{6n} \begin{cases} \to a \\ \to c \end{cases} \Rightarrow a = c$

$x_{3(2n+1)} \begin{cases} \to b \\ \to c \end{cases} \Rightarrow b = c$

$\Rightarrow \underline{a = b = c}$

cred

Dacă cele 3 subșiruri converg la aceeași limită, at...

$x_n \to a$
$x_{n+1} \to a$ $\Rightarrow \underline{x_n \to a}$

! **Rezultate fundamentale**

(un fel de Weierstrass înjumătățit!!)

TEOREMA de convergență a unui șir monoton

$\{x_n\}$ a) Dacă $\{x_n\}$ este crescător și majorat atunci $\{x_n\}$ este convergent

b) Dacă $\{x_n\}$ este descrescător și minorat atunci $\{x_n\}$ este convergent

TEOREMA (Lema lui Cesaro)

Orice șir mărginit admite subșir convergent

$\Rightarrow$

Def:

$\{x_n\}$ s.n. $\boxed{\text{șir Cauchy}}$ sau $\boxed{\text{șir fundamental}}$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\underbrace{|x_n - x_m| \leq \varepsilon}_{\text{serii ex 4}}$ $\forall n, m \geq n_\varepsilon$

TEOREMA

$\{x_n\}$ este convergent $\Rightarrow$ este șir Cauchy

$\boxed{\text{EX}}$

$\boxed{1}$ Să se arate că șirul $x_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin (nx)}{2^n}$ este Cauchy (deci convergent).

$$|x_n - x_{n+p}| = \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \overset{\text{ineg. triunghiului}}{\leq}$$

$$\leq \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} \right| + \dots + \left| \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^n} \to 0$$

$\boxed{2}$ Să se arate că șirul $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ nu este Cauchy (deci divergent).

$\varepsilon = 1 \ \exists \ n_0$ a.î. $n \geq n_0 \ |x_{2n} - x_n| < 1$ $(1 < \infty)$

$$|x_{2n} - x_n| \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \to$$

$\to \infty$ ∦

Șiruri cu limita $+\infty$ sau $-\infty$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dreapta reală încheiată

Def:

a) Spunem că șirul $\{x_n\}$ are limita $+\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n > \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$.

Notație $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ sau $x_n \to +\infty$

b) Spunem că șirul $\{x_n\}$ are limita $-\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n < -\varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$

Notație $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$ sau $x_n \to -\infty$

TEOREMA

$\{x_n\}$ $\{y_n\}$

a) $x_n \to +\infty$ $\quad x_n \leq y_n \ \forall n \Rightarrow y_n \to +\infty$

b) $y_n \to -\infty$ $\quad x_n \leq y_n \ \forall n \Rightarrow x_n \to -\infty$

TEOREMĂ $\{x_n\}, \{y_n\}$

a) $x_n \to +\infty, \ y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\} \Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$

b) $x_n \to -\infty, \ y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\} \Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$

c) $x_n \to +\infty, \ y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}, \ y > 0 \Rightarrow x_n \cdot y_n \to +\infty$

d) $x_n \to -\infty, \ y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}, \ y > 0 \Rightarrow x_n \cdot y_n \to -\infty$

TEOREMĂ

a) $x_n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$

b) $x_n \to +0 \Rightarrow x_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to +\infty$

TEOREMĂ

Orice șir crescător și nemărginit este convergent la $+\infty$.

Orice șir descrescător și nemărginit este convergent la $-\infty$.

Limite inferioare și superioare a unui șir

~~$\{x_n\}$~~

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$ mulțime majorată

a) $\sup A$ este cel mai mic majorant al lui A (supremul lui A)

OBS: Este posibil ca $\sup A \notin A$

$A = [0,1) \Rightarrow \sup A = 1 \notin A$

b) $A \subseteq \mathbb{R}$ mulțime minorată

$\inf A$ este cel mai mare minorant al lui A (infimul lui A)

$\{x_n\}$ $\quad y_n = \sup\{x_k, k \geq n\}$ $\quad y_n \searrow$

$z_n = \inf\{x_k, k \geq n\}$ $\quad z_n \nearrow$

Def:

a) S.n. limita superioară a șirului $\{x_n\}$, $y \in \overline{\mathbb{R}}$

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k, k \geq n\}$$

Notație: $y = \limsup_{n\to\infty} x_n \left(= \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \right)$

b) S.n. limita inferioară a șirului $\{x_n\}$, $z \in \overline{\mathbb{R}}$

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k, k \geq n\}$$

Notație: $z = \liminf_{n\to\infty} x_n \left(= \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \right)$

$\boxed{Ex}$

$x_n = (-1)^n$ $\quad \limsup_{n\to\infty} x_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} x_n = -1$

TEOREMĂ

$\{x_n\}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}} \iff \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$

În acest caz $\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$

TEOREMĂ (Analog lui Cesaro)

$\{x_n\}$ Atunci $\exists$ un subșir monoton al lui $\{x_n\}$, convergent la $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\exists$ un subșir monoton al lui $\{x_n\}$, convergent la $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

TEOREMĂ

$\{x_n\}$ $\quad A =$ mulțimea limitelor tuturor subșirurilor lui $\{x_n\}$

Atunci: 1) $A \neq \emptyset$

2) $\inf A = \liminf_{n\to\infty} x_n$, $\sup A = \limsup_{n\to\infty} x_n$

3) $\{x_n\}$ este convergent $\iff A$ are un singur el

EX

1. $x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ $\qquad A = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\limsup_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\mathbb{Q} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad A = \overline{\mathbb{R}}$

$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$

$\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$

3. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$x_{4n} = 2$

$x_{4n+1} = 0$ $\qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = -4$

$x_{4n+2} = -4$ $\qquad \limsup_{n\to\infty} x_n = 6$

$x_{4n+3} = 6$

TEOREMA

$\{x_n\}$ $\quad x_n > 0 \ \forall n$

Atunci $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le$

$\le \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

! **Corolar** $\quad \{x_n\}$ $x_n > 0 \ \forall n$

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty]$, atunci $\exists$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

Serii de numere reale

$\{x_n\}$ $\quad S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ s.n. șirul sumelor parțiale asociat lui $\{x_n\}$

Def

a) Cuplu $(\{x_n\}, \{S_n\})$ s.n. **serie** de numere reale, iar $\{x_n\}$ s.n. termenul general al seriei.

Notație $\sum_{n\ge 0} x_n$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ $\quad (\sum x_n)$

b) Seria $\sum_{n\ge 0} x_n$ s.n. **convergentă** dacă șirul sumelor parțiale este convergent.

c) Seria $\sum_{n\ge 0} x_n$ s.n. **absolut convergentă** dacă seria următoare: $\sum_{n\ge 0} |x_n|$ este convergentă.

d) Seria $\sum_{n\ge 0} x_n$ s.n. **divergentă** dacă nu e convergentă.

TEOREMĂ

Dacă seria $\sum_{n\ge 0} x_n$ este convergentă atunci șirul $\{x_n\}$ este convergent la 0 (zero).

!OBS Reciproca este falsă!

Seria armonică $\sum_{n\ge 0} \frac{1}{n}$ este divergentă.

! **Corolar** $\quad \sum_{n\ge 0} x_n$ cu șirul $\{x_n\}$ care nu converge la 0.

Atunci seria este divergentă.

TEOREMA

Dacă într-o serie se înlocuiesc un număr finit de termeni cu alte valori, atunci noua serie are aceeași natură cu seria inițială.

(amândouă divergente sau convergente)

Ex

1 Seria geometrică $\sum_{n\ge 0} q^n$

$$S_n = \begin{cases} 1+q+q^2+\dots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 0 \\ n+1, & q=0 \end{cases}$$

$|q|<1$ $\quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$

$|q|\ge 1$ $\quad \cancel{\lim_n}$ divergentă $\quad q\ge 1 \quad S_n \to \infty$; $\quad q \le 1 \quad \nexists \lim S_n$

2 Seria $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n(n+1)}$ $\qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$

3 $\sum_{n\ge 0} (-1)^n$ divergentă $\qquad S_{2n} = 0$

$S_{2n+1} = -1$

4 Seria armonică $\sum_{n\ge 0} \frac{1}{n}$ $\to$ este divergentă

$m_{armonică} = \frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n-1}}$

Demonstrație:

S_n nu este Cauchy $\qquad |S_n - S_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \ge$

$\ge \frac{p}{n+p} > \frac{1}{2} \quad (p \ge n)$

Criterii de convergență la serii

TEOREMA 1: Criteriul lui Cauchy (nu Cauchy)

Seria $\sum_{n\ge 0} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon \quad \forall p \ge 1$

TEOREMA 2: Criteriul lui Abel

$\{x_n\}, \{y_n\}$ $\qquad x_n$ descrescător și convergent la 0 ($\cancel{y_n} \searrow 0$)

$t_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ $\qquad \{t_n\}$ este mărginit

Atunci $\sum_{n\ge 0} x_n y_n$ este convergentă

TEOREMA 3: Criteriul lui Dirichlet

$\{x_n\}, \{y_n\}$ $\qquad x_n \searrow$, $\sum_{n\ge 0} y_n$ convergentă

Atunci seria $\sum_{n\ge 0} x_n y_n$ este convergentă.

TEOREMA 4: Criteriul lui Leibniz

$\{x_n\}$ x_n descrescător și convergent la 0

Atunci seria $\sum_{n\ge 0} (-1)^n x_n$ este convergentă

TEOREMA 5: Criteriul comparației

$\{x_n\}, \{y_n\}$ $x_n \le y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Atunci: 1) Dacă seria $\sum_{n\ge0} y_n$ este convergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n\ge0} x_n$ este convergentă

se păstrează natura

2) Dacă seria $\sum_{n\ge0} x_n$ este divergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n\ge0} y_n$ este divergentă

TEOREMA 6: Al doilea criteriu al comparației

$\{x_n\}, \{y_n\}$ $x_n, y_n > 0$ $\forall n$

Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{y_{n+1}}{y_n}$ $\forall n$

Atunci: 1) Dacă seria $\sum_{n\ge0} y_n$ este convergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n\ge0} x_n$ este convergentă

2) Dacă seria $\sum_{n\ge0} x_n$ divergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n\ge0} y_n$ divergentă

!

TEOREMA 7: Criteriul comparației raportului

$\{x_n\}, \{y_n\}$ $x_n, y_n > 0$ $\forall n$ (mai mari STRICT)

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in \mathbb{R}, \neq 0$ atunci $\sum_{n\ge0} x_n$ și $\sum_{n\ge0} y_n$

au aceeași natură. !

TEOREMA 8: Criteriul lui D'Alembert

$\{x_n\}$ $x_n > 0$ $\forall n$

Dacă $\exists L = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ atunci:

1) $L < 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n\ge0} x_n$ este convergentă

2) $L > 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n\ge0} x_n$ divergentă

TEOREMA 9: Criteriul lui Cauchy x2 (vezi T1)

$\{x_n\}$ $x_n > 0$ $\forall n$

Dacă $\exists L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ atunci:

1) $L < 1$ seria $\sum_{n\ge0} x_n$ este convergentă

2) $L > 1$ seria $\sum_{n\ge0} x_n$ este ~~divergentă~~

TEOREMA 10: Criteriul Raabe-Duhamel

$\{x_n\}$ $x_n > 0$ $\forall n$

Dacă $\exists L = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$ atunci

1) $L > 1$ seria $\sum_{n\ge0} x_n$ convergentă

2) $L < 1$ seria $\sum_{n\ge0} x_n$ divergentă

Elemente de topologie generală

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$X_1, X_2, \dots, X_n \neq \emptyset \quad X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
$x_i \in X_i,\ i = \overline{1,n}\}$

X^n s.n. produs cartezian

$x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \dots, x_n) \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$
norma lui x

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ \|x - y\| < r\}$ bila de centru x și raza r (deschisă)

$B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n;\ \|x - y\| \le r\}$ bila închisă

$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ \|x - y\| = r\}$ sfera de centru x și rază r

Def: $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \emptyset$ s.n. mulțime deschisă dacă pentru $\forall x \in D\ \exists\ r = r_x > 0$ a.î. $B(x, r_x) \subset D$.

Ex (DESCHISE): $\mathbb{R} \to (0,1)$
$\mathbb{R}^2 \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0,1)\}$, $B(x, r)$

Ex (închise (nu sunt deschise)): $\mathbb{R} \to [0,1)$
$\mathbb{R}^2 \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]\}$

PROPRIETĂȚI

1. $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sunt mulțimi deschise
2. D_1, D_2 deschise $\Rightarrow D_1 \cap D_2$ deschisă
3. $\{D_j\}_{j \in J}$ deschise $\Rightarrow \bigcup_{j \in J} D_j$ deschisă

Obs! a) 2 $\Rightarrow$ orice intersecție finită de mulțimi deschise este deschisă

b) Fie $D_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = [0, 1]$ nu este deschisă

Def: $F \subset \mathbb{R}^n$ s.n. închisă dacă $\mathbb{R}^n \setminus F$ este deschisă.
complementara lui F

Ex: $\mathbb{R} \to [0,1]$
$\mathbb{R}^2 \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R},\ y \ge 0\}$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x - 2y = 0\}$
orice egalitate verificată este închisă

PROPRIETĂȚI

1. $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sunt mulțimi închise
2. $\{F_j\}_{j \in J}$ închise $\Rightarrow \bigcap_{j \in J} F_j$ mulțime închisă
3. $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ închise $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ este mulțime închisă

Def a) $I \subset \mathbb{R}^n$ s.n. interval deschis dacă
$I = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_i < x_i < b_i,\ i = \overline{1,n}\}$
$a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i\ \forall\ i = \overline{1,n}$

$I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$

(b) $I \subset \mathbb{R}^n$ s.n. interval închis dacă

$I = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ;\ a_i \le x_i \le b_i \ \forall i = \overline{1,n} \}$
$= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

(c) $M \subset \mathbb{R}^n$ s.n. mărginită dacă $\exists\, I \subset \mathbb{R}^n$ un interval a.î. $M \subseteq I$.

TEOREMA DE STRUCTURĂ A MULȚIMILOR DESCHISE DIN $\mathbb{R}$

Orice mulțime nevidă și deschisă din $\mathbb{R}$ se poate scrie ca o reuniune cel mult numărabilă de intervale din $\mathbb{R}$ care sunt deschise, nevide și disjuncte.

- [O mulțime numărabilă este X $\exists\, f : X \to \mathbb{N}$ bijecție]
- [Cel mult numărabilă $\Rightarrow$ sau finită, sau numărabilă]

Obs! Plecând de la un interval deschis se pot obține toate mulțimile deschise.

O extindere

$X \neq \emptyset$

$\mathcal{T}$ familia tuturor submulțimilor ale lui X care verifică condițiile:

1) $\emptyset, X \subset \mathcal{T}$
2) $D_1, D_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$
3) $\{D_j\}_{j \in J} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} D_j \in \mathcal{T}$

$\mathcal{T}$ s.n. $\boxed{\text{o topologie}}$ pe X

$(X, \mathcal{T})$ s.n. $\boxed{\text{spațiu topologic}}$

Topologia uzuală de pe $\mathbb{R}$

TEOREMĂ

Familia de mulțimi $\mathcal{T} = \{ D ;\ D \subset \mathbb{R}$ deschisă din $\mathbb{R} \} \cup$
$\cup \{ D \cup [-\infty, x),\ D \subseteq \mathbb{R}$ deschisă (mulțime), $x \in \mathbb{R} \} \cup$
$\cup \{ D \cup (y, +\infty],\ D \subset \mathbb{R}$ deschisă, $y \in \mathbb{R} \} \cup$
$\cup \{ D \cup [-\infty, x) \cup (y, +\infty],\ D \subset \mathbb{R}$ deschisă, $x, y \in \mathbb{R} \}$
formează o topologie pe $\overline{\mathbb{R}}$ (s.n. $\boxed{\text{topologia uzuală de pe } \overline{\mathbb{R}}}$)

O altă extindere

Maurice Fréchet (1878 - 1973) $\to$ se poate vorbi de o distanță între obiecte matematice de orice tip (șiruri, funcții, ...)

spațiu metric

$\boxed{\text{Def}}$: $X \neq \emptyset$

Funcția $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ s.n. metrică pe X (distanță de X) dacă satisface următoarele condiții:

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
(2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
(3) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

(X, d) s.n. $\boxed{\text{spațiu metric}}$

Elementele lui (X, d) s.n. $\boxed{\text{puncte}}$

Exemple de spații metrice

1. $\mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$

2. $\mathbb{R}^m$ $\quad d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_m-y_m)^2}$

$x = (x_1, \dots, x_m)$

$y = (y_1, \dots, y_m)$

$d_1(x,y) = \max\limits_{k=\overline{1,m}} |x_k - y_k|$

$d_2(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k - y_k|$

$d_3(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$

3. A arbitrară $\quad B(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \text{ mărginite} \}$

$d : B(A) \times B(A) \to \mathbb{R}_+ \quad d(f,g) = \sup\{ |f(x) - g(x)|, x \in A\}$

Vecinătățile unui punct

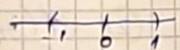
(X,d) sp. metric

Bila deschisă de centru x și rază r $\quad B(x,r) = \{ y \in X,\ d(x,y) < r\}$

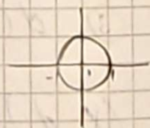
Bila închisă —"— $\quad B[x,r] = \{ y \in X ;\ d(x,y) \le r\}$

Ex

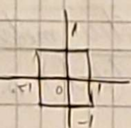
1. $(\mathbb{R}, d)$ $\quad B(0,1) = (-1,1)$



2. $(\mathbb{R}^m, d)$ $\quad B(0,1)$



3. $(\mathbb{R}^m, d_1)$



4. $(\mathbb{R}^m, d_2)$

Def (X,d) spațiu metric, $x \in X$

$V \subset X$ s.n. vecinătate a punctului x dacă

$\exists\, r > 0$ a.î. $B(x,r) \cap V \ne \emptyset$

$\mathcal{V}_x$ – mulțimea tuturor vecinătăților punctului x.

Ex $\quad (\mathbb{R}, d) \quad A = [0,1) \cup \{2\}$

$A \in \mathcal{V}_{\frac{1}{2}} \quad A \notin \mathcal{V}_0 \quad A \notin \mathcal{V}_2$

TEOREMA 1.

(X,d) sp. metric. Orice bilă deschisă este o vecinătate pentru orice punct al ei.

TEOREMA 2 (Proprietatea de separație Hausdorff)

(X,d) sp. metric. $x, y \in X \quad x \ne y$.

Atunci $\exists\, U \in \mathcal{V}_x \ \exists\, V \in \mathcal{V}_y$ a.î. $U \cap V = \emptyset$

DEMONSTRAȚIE

$x \ne y \quad d(x,y) = \alpha > 0$

Fie $U = B(x, \frac{\alpha}{3})$, $V = B(y, \frac{\alpha}{3})$.

Arăt. că $U \cap V = \emptyset$.

Pp. că $U \cap V \ne \emptyset \Rightarrow \exists\, z \in U \cap V$

$z \in V \to d(z,x) < \frac{\alpha}{3}$

$z \in U \to d(z,y) < \frac{\alpha}{3}$

$\underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{d(x,y)}} \le d(x,y) + d(y,z) < \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3}$

$\alpha \le \frac{2\alpha}{3}$ (contradicție) $\square$

Def: (X,d) sp. metric.
D s.m. <u>deschisă</u> dacă $D=\emptyset$ sau dacă
$\forall x \in D \ \exists r>0$ a.î. $B(x,r) \subset D$.

$\mathcal{T}$ - familia tuturor mulțimilor deschise din (X,d)

$\mathcal{T}_d$ - este o topologie pe X și poartă denumirea de $\boxed{\text{topologia indusă de } d}$

Obs! $(\mathbb{R}^n, d) \longrightarrow$ vezi începutul

TEOREMA

1. X este mulțime deschisă
2. D_1, D_2 deschise $\Rightarrow D_1 \cap D_2$ deschisă
3. $\{D_j\}_{j\in J}$ deschise $\Rightarrow \bigcup_{j \in J} D_j$ deschisă
   ↳ familii arbitrare
4. Orice mulțime deschisă se poate scrie ca o reuniune de bile deschise.

Def: (X,d) sp. metric. $F\subset X$ s.m. <u>închisă</u> dacă $X \setminus F$ este deschisă. ($C_X F$ deschis)

TEOREMA

1. $F_1, F_2 \subset X$ închise $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ închisă
2. $\{F_j\}_{j\in J} \subset X$ închise $\Rightarrow \bigcap_{j\in J} F_j$ închisă

Def: (X,d) sp. metric.
$A\subset X$, $A \neq \emptyset$
S.n. <u>diametrul</u> mulțimii A $\delta(A) = \sup\{d(x,y), x,y \in A\}$

Def:
1. A s.m. <u>mulțime mărginită</u> dacă $\delta(A) < +\infty$.
2. A s.m. <u>nemărginită</u> dacă $\delta(A) = +\infty$

TEOREMĂ

(X,d) sp. metric, $A, B \subset X$, $x_0 \in X$, $r>0$

1. Dacă $A\subset B$ atunci $\delta(A) \le \delta(B)$
2. $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A$ are un singur element
3. $\delta(B(x_0,r)) \le 2r$
   $\delta(B[x_0,r]) \le 2r$

TEOREMĂ (X,d) sp. metric $A \subset X$ $A\neq\emptyset$
Atunci A este mărginită $\Leftrightarrow \exists x_0 \in X \ \exists r>0$ a.î. $A \subseteq B(x_0,r)$

- <u>Interiorul unei mulțimi</u>

Def: (X,d) sp. metric. $A\subset X$ $A\neq\emptyset$
$x_0 \in A$ s.m. <u>punct interior</u> al mulțimii A dacă $\exists r>0$ a.î. $B(x_0,r)\subset A$.

Mulțimea tuturor punctelor interioare ale lui A s.n. $\boxed{\text{interiorul lui } A}$, pe care-l notăm cu $\mathring{A}$

TEOREMĂ (Proprietăți) (X,d) sp. metric $A,B\subset X$

1. $\mathring{A}\subset A$
2. $A\subset B \Rightarrow \mathring{A}\subset\mathring{B}$
3. $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \mathring{A}\cap\mathring{B}$
4. $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} \supset \mathring{A}\cup\mathring{B}$
5. $\mathring{A}$ este mulțime deschisă
6. A nu e deschisă $\Leftrightarrow A=\mathring{A}$
7. $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{D \text{ deschisă} \\ D\subset A}} D$

Închiderea unei mulțimi

Def: (X,d) sp. metric $A\subset X$ $A\neq\emptyset$
$x\in X$ s.n. <u>punct aderent al mulțimii A</u> dacă $\forall V\in \mathcal{V}_x$ (vecinătate) avem $V\cap A\neq\emptyset$

Mulțimea tuturor punctelor aderente ale mulțimii A s.n. $\boxed{\text{închiderea}}$ lui A și o notăm $\bar{A}$.

TEOREMĂ
(X,d) sp. metric, $A\subset X$ $A\neq\emptyset$
Atunci $x\in X$ este punct aderent $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$.

PROPRIETĂȚI
(X,d) sp. metric $A,B\subset X$

1. $A\subset\bar{A}$
2. $A\subset B\Rightarrow \bar{A}\subset\bar{B}$
3. $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$
4. $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$
5. $\bar{A}$ este mulțime închisă
6. A ~~mulțime~~ nu e închisă $\Leftrightarrow A=\bar{A}$
7. $\bar{A}=\bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A\subset F}} F$

Frontiera unei mulțimi

Def: (X,d) sp. metric $A\subset X$
S.n. <u>frontiera</u> mulțimii A $\partial A=\bar{A}\setminus\mathring{A}$

Ex $\mathbb{R}$ $A=[0,1)$ $\mathring{A}=(0,1)$ $\bar{A}=[0,1]$
$\partial A=\{0,1\}$

TEOREMA (Proprietăți)
(X,d) sp. metric, $A\subset X$
Atunci:

1. $\mathring{A}=A\setminus\partial A$
2. $\bar{A}=A\cup\partial A$
3. A este deschisă $\Leftrightarrow A\cap\partial A=\emptyset$
4. A este închisă $\Leftrightarrow \partial A\subset A$

Def: (X,d) sp. metric $A\subset X$
$x\in X$ s.n. <u>punct de acumulare</u> pentru A dacă $\forall V\in\mathcal{V}_x$, $(V\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset$.

Mulțimea tuturor punctelor de acumulare ale mulțimii A s.n. **mulțimea derivată**

Se notează cu A'

TEOREMĂ

(X,d) sp. metric $A \subset X$

$x \in X$ este pct. de acumulare $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

Obs! $\bar{A} = A \cup A'$

Ex

1. $A = (0,1)$ → 0 și 1 sunt pct de acumulare ale A care nu aparțin lui A
→ $\frac{1}{2}$ este pct de acumulare, $\in A$.

2. $A = [0,1) \cup \{2\}$
$\bar{A} = [0,1] \cup \{2\}$
$A' = [0,1]$

3. $A = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$
$A' = \{0\}$
$\bar{A} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

4. $A = \mathbb{N}$ $\bar{A} = \mathbb{N}$ $A' = \emptyset$

18.10.2024

Curs 3

Funcții continue

- **Limita unei funcții**

(X,d_1), (Y,d_2) spații metrice $D \subset X$ $f: D \to Y$
$a \in D'$ (a - punct de acumulare)

Def: $l \in Y$ s.n. limita funcției f în $a \in D'$ dacă $\forall$ vecinătate V al punctului l ($V \in \mathcal{V}_l$ în Y), $\exists$ $U \in \mathcal{V}_a$ (în X) a.î. $f((U \setminus \{a\}) \cap D) \subset V$

Notația $l = \lim_{x \to a} f(x)$

Obs!

1. $\forall x \in U$ $x \neq a$ $x \in D$ $f(x) \subset V$
2. E posibil ca $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ $(a \in D')$

TEOREMĂ (DE CARACTERIZARE A NOȚIUNII DE LIMITĂ)

(X,d_1), (Y,d_2) sp. metrice $f: D \subset X \to Y$, $a \in D'$

Următoarele afirmații sunt echivalente

1) $\lim_{x \to a} f(x) = l$

2) $\forall B_Y(l,\varepsilon)$ $\exists$ $B_X(a,\delta)$ a.î. $f((B_X(a,\delta) \setminus \{a\}) \cap D) \subset B_Y(l,\varepsilon)$

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x$ cu $d_1(x,a) < \delta_\varepsilon$ $x \neq a$ $\Rightarrow d_2(f(x), l) < \varepsilon$

④ $\forall x_n \in X,\ x_n \neq a,\ x_n \xrightarrow[X]{n} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[Y]{n} l$

TEOREMĂ (unicitatea limitei)

(X,d_1), (Y,d_2) sp. metrice $f: A \subset X \to Y$ $a \in A'$

Dacă $\exists \lim_{x\to a} f(x) = l$ atunci l este unic.

Ex 1) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin\frac{1}{x}$
↳ pct de acumulare

$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ $y_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}$

$f(x_n) \equiv 1$ $f(y_n) \equiv -1$

2) $f: \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ nu are limită în origine

$z_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n}\right)$ $z_n \to (0,0)$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{1,0\}$

$f(z_n) = \frac{a}{1+a^2}$

De ex. $a=2 \to f(z_n^1) = \frac{2}{5}$ // nu are limită

$a=-1 \to f(z_n^2) = \frac{-1}{2}$

TEOREMĂ (PRINCIPIUL SUBSTITUȚIEI)

(X,d_1), (Y,d_2), (Z,d_3) sp. metrice
$A \subset X$, $B \subset Y$, $a \in A'$
$f: A \to B\setminus\{y_0\}$ $g: B \to Z$

$\exists \lim_{x\to a} f(x) = y_0$ $\exists \lim_{y\to y_0} g(y) = l$

Atunci $\exists \lim_{x\to a} g\circ f(x) = \lim_{y\to y_0} g(y) = l$

Limita funcțiilor cu valori reale

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $g,f: A \to \mathbb{R}$ $a \in A'$

TEOREMĂ

Presupunem că $\exists \lim_{x\to a} f(x) = l_1$ și $\exists \lim_{x\to a} g(x) = l_2$.

Atunci:

1) $\exists \lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = l_1 + l_2$

2) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \cdot l_1$

3) $\exists \lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$

4) $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$, $l_2 \neq 0$ și $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$

TEOREMĂ

(X,d) sp. metric $f: A \subset X \to \mathbb{R}$ $a \in A'$
Dacă $\exists \lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, atunci $\exists U \in \mathcal{V}_a$ a.î.
$\forall x \in (U\setminus\{a\}) \cap A$, $f(x)$ are același semn cu $\lim_{x\to a} f(x)$.

TEOREMĂ

(X,d) sp. metric $f: A \subset X \to \mathbb{R}$ $a \in A'$
Dacă $\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ atunci $\exists U \in \mathcal{V}_a$ $\exists M > 0$
a.î. $|f(x)| \le M$ $\forall x \in U$ (este mărginită)

Limite laterale

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to X$, (X,d) sp. metric

Def:

a) a s.n. **punct de acumulare din stânga** pentru D dacă a este punct de acumulare pentru mulțimea $D_1 = D \cap (-\infty, a)$.

b) a s.n. **punct de acumulare din dreapta** pentru D dacă a este punct de acumulare pentru mulțimea $D_2 = D \cap (a, \infty)$

Def: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to X$, (X,d) sp. metric

a) $a \in D_1'$ unde $D_1 = D \cap (-\infty, a)$

$l_s \in X$ s.n. **limita la stânga** a lui f în a dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{l_s}$ (în X) $\exists U \in \mathcal{V}_a$ (în $\mathbb{R}$) a.î. $f((U \setminus \{a\}) \cap D_1) \subset V$

Notația $l_s = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ sau $l_s = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$

sau $l_s = f(a-0)$

b) $a \in D_2'$ unde $D_2 = D \cap (a, \infty)$

$l_d \in X$ s.n. **limita la dreapta** a lui f în a dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{l_d}$ (în X) $\exists U \in \mathcal{V}_a$ (în $\mathbb{R}$) a.î. $f((U \setminus \{a\}) \cap D_2) \subset V$

Notație: $l_d = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ sau $l_d = \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ sau

$l_d = f(0+a)$

TEOREMA

$f: D \subset \mathbb{R} \to X$, (X,d) sp. metric

Atunci:

1) $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l_s$, unde $a \in D_1'$ $\iff$

$\iff \forall x_n \in D$, x_n crescător, $x_n \to a$ $f(x_n) \to l_s$

2) $a \in D_2'$, $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l_d \iff$

$\iff \forall x_n \in D$, x_n descrescător, $x_n \to a$ $f(x_n) \to l_d$

TEOREMA

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to X$ (X,d) sp. metric $a \in D_1' \cap D_2'$

Atunci $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \iff \exists\, l_s = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$,

$\exists\, l_d = \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ și $l_s = l_d$.

În acest caz $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$

FUNCȚII CONTINUE

(X,d_1), (Y,d_2) sp. metrice $D \subset X$ $f: D \to Y$

Def:

a) f s.n. **continuă** în $a \in D$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)}$ (în Y) $\exists U \in \mathcal{V}_a$ (în X) a.î. $f((U \cap D)) \subset V$.

b) f s.n. **continuă pe D** dacă f este continuă în fiecare punct din D.

c) f s.n. **discontinuă** în $a \in D$ dacă f nu este continuă în a.

a s.n. punct de discontinuitate pt f

Obs! Problema continuității se pune doar în punctele din domeniul de def al funcției.

Ex: $f(x) = tg\, x \quad f: D \to \mathbb{R} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

Nu se pune pb. cont. în $x = \frac{\pi}{2}$

TEOREMĂ

$f: D \subset X \to Y \quad a \in D \cap D'$

Atunci f este continuă în $a \iff \exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

! **Ex** $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (fct. lui Dirichlet)

$\to$ nu e continuă în niciun punct

TEOREMĂ (de caracterizare a continuității)

(X, d_1), (Y, d_2) sp metrice $f: D \subset X \to Y \quad a \in D$

Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f continuă în a

2) $\forall B_Y(f(a), \varepsilon)$, $\exists B_X(a, \delta)$ a.î.

$f(B_X(a,\delta) \cap D) \subset B_Y(f(a), \varepsilon)$

3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon$ a.î. $\forall x \in D \ d_1(x,a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$

4) $\forall (x_n) \in D \quad x_n \xrightarrow[X]{n} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[Y]{n} f(a)$

TEOREMĂ

$F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad F = (f_1, \dots, f_m)$

$f_i : D \to \mathbb{R}, \ i = \overline{1,m}$

F continuă $\iff f_i$ continuă, $\forall i = \overline{1,m}$

TEOREMĂ (continuitatea funcțiilor compuse)

(X,d_1), (Y,d_2), (Z,d_3) sp metrice

$f: X \to Y \qquad g: Y \to Z$

Dacă f este continuă în $a \in X$ și g este continuă în $f(a) \in Y$ atunci $g \circ f: X \to Z$ este continuă în a.

Def: $X, Y \neq \emptyset \qquad f: X \to Y$

a) $A \subset X \quad f(A) = \{f(a), a \in A\} \subset Y$ s.n. imaginea directă a lui A prin f.

b) $B \subset Y \quad f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\} \subset X$ s.n. imaginea inversă a lui B prin f.

TEOREMĂ

(X,d_1) (Y,d_2) sp metrice $\quad f: X \to Y$

Următoarele afirmații sunt echivalente

1) f este continuă

2) $\forall D \subset Y$ deschisă $\quad f^{-1}(D) \subset X$ deschisă

3) $\forall F \subset Y$ închisă $\quad f^{-1}(F) \subset X$ închisă

4) $\forall A \subset X \quad f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Ex Imaginea directă (a unei fct. cont) nu verifică afirmațiile (2) și (3) din TEOREMĂ

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ $D = (-1, 1)$

$f(D) = [0, 1) \neq$ deschis

b) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $F = [1, \infty)$

$f(F) = (0, 1] \neq$ închis

* doar pe img inversă funcționează 2), 3)

Funcții continue cu valori reale

(X, d) sp. metric $f, g: X \to \mathbb{R}$ $M_f = \{x \in X; f(x) = 0\}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

TEOREMĂ

Dacă f, g fct. continue atunci:

1) $f + g$, $f - g$, αf, $f \cdot g$ sunt continue
2) $\frac{f}{g}$ continuă pe $X \setminus M_g$ (elimină ~~punct~~ răd. funcției)
3) $|f|$ continuă

TEOREMĂ

$f: X \to \mathbb{R}$

Dacă f continuă în $x_0 \in X$ și $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$) atunci $\exists\, V \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) $\forall x \in V$

Continuitate laterală

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \in D' \cap D$

Def: a) Spunem că f este continuă la stânga în a dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.

b) —11— continuă la dreapta în a dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

TEOREMĂ

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \in D' \cap D$

Atunci f este continuă în $a \Leftrightarrow f$ este continuă la stânga și la dreapta în a.

Def: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \in D' \cap D$

1) a s.n. punct de discontinuitate de speța I dacă
- f nu este continuă în a
- $\exists \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ și $\exists \lim\limits_{x \searrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ ($\neq$)

2) a s.n. punct de discontinuitate de speța a II-a dacă
- f nu este continuă în a
- a nu este punct de discontinuitate de speța I.

Ex 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = sgn(x)$ $\overset{\text{semn}}{sgn(x)} = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

0 pct de disc. de sp I

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

toate pct sunt de sp a II-a

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} \lim = +\infty \\ \lim = -\infty \end{pmatrix}$

0 pct de disc de sp. a II-a

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ (nu există lim)

0 pct de disc. de sp. a II-a

• **Discontinuitățile funcțiilor cu valori reale**

Def: $I\subseteq\mathbb{R}$ interval $\quad f:I\to\mathbb{R}$

a) f s.n. crescătoare (strict cresc) pe I dacă
$f(x_1)\leq f(x_2)$ $\left(f(x_1)<f(x_2)\right)$ $\forall\, x_1,x_2\in I$, $x_1\leq x_2$

b) f s.n. descrescătoare (strict descresc) pe I dacă
$f(x_1)\geq f(x_2)$ $\left(f(x_1)>f(x_2)\right)$ $\forall\, x_1<x_2$, $x_1,x_2\in I$

c) f s.n. monotonă dacă f se află în una din cele 4 situații de mai sus.

TEOREMA $\boxed{1}$

$f: I=\mathring{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f$ crescătoare

Atunci discontinuitățile lui f sunt de speța I

TEOREMA $\boxed{2}$

$f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f$ monotonă

Atunci mulțimea discontinuităților lui f este cel mult numărabilă.

OPERATORI LINIARI ȘI CONTINUI

Def: $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ s.n. operator liniar (aplicație liniară)

dacă: 1) $T(x_1+x_2)=T(x_1)+T(x_2)$ $\quad\forall\, x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$
[aditivitate]

2) $T(\alpha x)=\alpha T(x)$ $\quad\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n$
[omogenitate]

Notație: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)=\{T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m;\ T \text{ operatori liniari}\}$

TEOREMA

$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ op. liniar

T bijectivă $\iff$ $T(x)=0\implies x=0$

Def: $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ liniară și bijectiv s.n. izomorfism liniar.

Obs! $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

$x\in\mathbb{R}^n \implies x=(x_1,\dots,x_n)$

$\mathbb{R}^n$ $\quad e_1=(1,0,\dots,0)$

$e_2=(0,1,\dots,0)$ ...

$e_n=(0,0,\dots,1)$

• $\{e_1,\dots,e_n\}\subset\mathbb{R}^n$ baza canonica din $\mathbb{R}^n$

$x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$

$T(x)=T(x_1e_1+\dots+x_ne_n)=T(x_1e_1)+\dots+T(x_ne_n)=$

$=\cancel{T(x_1)\,T(e_1)+\dots+T(x_n)\,T(e_n)}$

$=x_1T(e_1)+\dots+x_nT(e_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\underbrace{T(e_i)}_{\in\mathbb{R}^m}$

$\{e_1', \dots, e_m'\} \subset \mathbb{R}^m$ baza canonică

$T(e_i) = (T_1(e_i), \dots, T_m(e_i)) = \sum_{j=1}^{m} T_j(e_i) \cdot e_j'$

Dacă $a_{ij} = T_i(e_j)$ $\quad i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

$\Rightarrow A_T = (a_{ij})$ $\quad$ A_T s.n. matrice atașată operatorului T

$T(x) = A_T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

TEOREMĂ 1

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad$ $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ op. liniari

Atunci $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ op. liniar

și $A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T$

TEOREMA 2.

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ op. liniar

Atunci T izomorfism liniar (bijectiv) $\Leftrightarrow$ A_T este inversabilă (nesingulară)

Obs! $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad$ T bijectiv dacă $\underline{m = n}$

TEOREMA 3

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ op. liniar. Atunci T este continuă.

DEMONSTRAȚIE (T_3)

$T = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ $\quad$ $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad j = \overline{1,m}$

TEOREMĂ $\Rightarrow$ T este continuă $\Leftrightarrow$ T_j continuă $\forall j$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Pot presupune că $m = 1$.

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{T(e_i)}_{=: \alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

Ineg. Cauchy-Schwarz-Buniakovski

$|T(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|$

$\exists M > 0; \quad |T(x)| \leq M \|x\|$ $\quad$ $x =: x_1 - x_2$

$T(x_1) - T(x_2) = T(x_1 - x_2)$ (aditivitate)

$\underline{|T(x_1) - T(x_2)|} = |T(x_1 - x_2)| \leq \underline{M \cdot \|x_1 - x_2\|}$

$x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M}$ a.î. $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |T(x) - T(x_0)| < \varepsilon \rightarrow T$ cont în x_0 $\underline{\text{O.K.}}$

$\square$

25.10.2024

Curs 4

Șiruri și serii de funcții

• **Convergența uniformă a șirurilor de funcții**

(X,d) sp. metric, $A \subset X$, $x_0 \in A$, $f_n: A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

Def: a) $\{f_n(x_0)\}_{n \geq 1}$ s.n. șir numeric.

b) Dacă $x_0 \in A$ a.î. șir. numeric convergent, x_0 s.n. punct de convergență al șirului f_n.

Mulțimea tuturor punctelor de convergență s.n. mulțimea de convergență a șirului f_n.

Def: Spunem că $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge simplu sau converge punctual pe A dacă $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ este convergent $\forall x \in A$.

Ex:

1)* $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1)$ $f_n(x) \to 0$

$x = 1$ $f_n(1) = 1 \to 1$

$f_n \to f$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

2)** $f_n: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$, $f_n(0) = 0$

$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{1+nx}\right| = \frac{x}{1+nx} < \frac{1}{n} \to 0$

$f_n \to f$, $f(x) \equiv 0$

Dacă f_n converge simplu la f → Notăm $f = \lim_{n\to\infty} f_n$

(sau) $f_n \to f$ (pe A)

Obs! $\forall x \in A$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n(x,\varepsilon)$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Obs! Problema $f_n \to f$

f_n are proprietăți (funcții mărginite, continue, derivabile)

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ f are aceleași proprietăți

În general, nu.

Ex: 1)* f_n e continuă și $f()$ nu e continuă

Def: Spunem că f_n (șirul) converge uniform la funcția f pe A dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq n(\varepsilon)$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in A$.

Notăm f; $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$ $\quad$ $f_n \xrightarrow{u} f$ (pe A) (u de la uniform)

Obs! 1) $f_n \xrightarrow{u} f$ pe $A \Rightarrow f_n \to f$ pe A

2) Reciproca nu este adevărată.

Ex 1)* convergență simplă, dar nu avem convergență uniformă

Ex 2)** conv. uniformă

CRITERII DE CONVERGENȚĂ UNIFORMĂ

TEOREMA 1.

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $f_n, f: A \to \mathbb{R}$

Atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pe $A \iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Ex $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$

$f_n(x) \longrightarrow 0$ $\quad f(x) \equiv 0$ (converge la)

$f_n'(x) = \frac{(1-n)x^2}{(1+nx^2)^2}$ $\quad f_n'(x) = 0 \iff x = \pm 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ pct de minim

$x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pct de maxim

$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0 \longrightarrow$ punctele de extrem absolut (global)

$f_n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \pm\frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0 \xrightarrow{T1} f_n \xrightarrow{u} f \equiv 0$

TEOREMA 2. (Criteriul lui Cauchy)

(X,d) sp. metric $A \subset X$, $f_n, f: A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

Atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pe $A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $m, n \geq n_\varepsilon$

$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in A.$ $\quad (*)$

Def: f_n care verifică condiția $(*)$ poartă denumirea de <u>șir uniform Cauchy</u> sau <u>șir fundamental</u>.

TEOREMA 3 (Criteriul lui ...)

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $f_n, f: A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

$\{a_n\}_{n\geq1}$ $\quad a_n \geq 0\ \forall n \geq 1$ $\quad a_n \longrightarrow 0$

Dacă $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n\ \forall n, \forall x \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$ pe A.

PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR UNIFORM CONVERGENTE

TEOREMA 1 (Transfer de mărginire)

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $f_n, f: A \to \mathbb{R}$

f_n este mărginită $\forall n \geq 1$, $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A.

Atunci f este mărginită.

DEMONSTRAȚIE

$f_n \xrightarrow{u} f \longrightarrow$ pt $\varepsilon = 1\ \exists n_1 \in \mathbb{N}$ a.î.

$\forall n \geq n_1$, $|f_n(x) - f(x)| < 1\ \forall x \in A$.

f_{n_1} mărginită $\Rightarrow \exists M_1 > 0$ (constantă) a.î. $|f_{n_1}(x)| \leq M_1, \forall x \in A$.

$|f(x)| = |f(x) - f_{n_1}(x) + f_{n_1}(x)| \leq |f_{n_1}(x) - f(x)| + |f_{n_1}(x)|$

$\leq 1 + M_1 = M\ \forall x \in A$. OK.

TEOREMA 2. (Transfer de existență a limitei)

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $f_n, f: A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $x_0 \in A'$ (pct de acumulare)

$f_n \xrightarrow{u} f$ pe A. Dacă există $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ $\forall n \geq 1$, atunci $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$ și

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$.

$\left[\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)\right]$

TEOREMA 3 (Transfer de continuitate)

(X,d) sp. metric $A \subset X$, $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

$f_n \xrightarrow{u} f$ pe A

Atunci, dacă f_n este continuă în x_0 $\forall\, n \geq 1$, atunci și f este continuă în x_0.

CONSECINȚĂ (COROLAR)

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ $f_n \xrightarrow{u} f$

Atunci dacă f_n este continuă pe A $\forall n \geq 1 \to f$ este continuă pe A.

Obs! Reciproca este falsă!

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ $\quad f_n(x) \to f(x) = 0$

f_n, f continue, DAR convergența nu este uniformă.

$$f_n'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ pct de maxim} \\ -\frac{1}{n} \text{ pct de minim} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. $\quad \lim\limits_{x \to 1} f_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1+n^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 \xRightarrow{T1}$$

$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u} f$

TEOREMA 4 (Transfer de integrabilitate)

$f_n, f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_n$ integrabile (Riemann) pe $[a,b]$, $n \geq 1$

$f_n \xrightarrow{u} f$ pe $[a,b]$

Atunci f este integrabilă (Riemann) pe $[a,b]$ și

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$\left[\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \right]$$

Obs! Reciproca este falsă!

Ex (anterior)

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $\quad f(x) \equiv 0$

$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{2n} \ln(1+n^2x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0$$

Dar $f_n \not\xrightarrow{u} f$.

Obs! $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ $\quad f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. $\quad f_n \xrightarrow{u} f$; $f(x) \equiv 0$

$f_n'(x) = x^{n-1}$ $\quad f_n'(1) = 1 \to 1 \neq f'(1) = 0$

TEOREMA 5 (Transfer de derivabilitate)

$I \subseteq \mathbb{R}$ interval mărginit $f_n : I \to \mathbb{R}$ derivabile

Pp. $\exists\, x_0 \in I$ a.î. $\{f_n(x_0)\}_{n\geq 1}$ este convergent.

$\exists\, g : I \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n' \xrightarrow{u} g$ pe I

Atunci $\exists\, f : I \to \mathbb{R}$ a.î.

a) $f_n \xrightarrow{u} f$ pe I

b) f este derivabilă și $f' = g \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$

Ex $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^4x^2)}{2n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+n^4x^2)}{2n} = 0 \quad \left(\text{L'H} \quad \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln(1+t^4x^2)}{2t} = 0\right)$

$\Rightarrow f_n \longrightarrow 0$ (punctual (simplu)

$f_n'(x) = \dfrac{xn^3}{1+n^4x^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Deci șirul se poate deriva termen cu termen.

Dar $f_n \not\xrightarrow{u} f$

Serii de funcții

- **Convergența uniformă a seriilor de funcții**

Def: (X,d) sp. metric, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $A \subset X$

a) Spunem că seria de funcții $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplu (punctual) pe A dacă șirul sumelor parțiale $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ este convergent simplu (punctual) pe A.

Notație: $\sum\limits_{n\geq 1} f_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f$ (suma seriei)

Def: Spunem că seria de funcții $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniform pe A dacă șirul sumelor parțiale $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ converge uniform pe A.

Limita lui s_n s.n. suma seriei.

Fie $f \overset{u}{=} \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Atunci **notație:** $\sum\limits_{n\geq 1} f_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \overset{u}{=} f$ (pe A.)

- **CRITERII DE CONVERGENȚĂ UNIFORMĂ A SERIILOR DE FUNCȚII**

TEOREMA 1 (Criteriul lui Cauchy)

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $f_n, f : A \to \mathbb{R}$

Atunci seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon\ \forall\, p \geq 1$

$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{p+n}(x)| < \varepsilon, \ \forall\, x \in A$

TEOREMA $\boxed{2}$ (Criteriul lui Weierstrass)

(X,d) sp. metric $A \subset X$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$ $\{a_n\}_{n\ge 1}$

$a_n \in \mathbb{R}_+$ a.î. $\sum_{n\ge1} a_n$ convergentă.

Dacă $|f_n(x)| \le a_n$ $\forall n \ge 1$ $\forall x \in A$, atunci $\sum_{n\ge1} f_n$ este convergentă.

Ex : 1) $\sum_{n\ge1} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ unif. converg.

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2+x^2}\right| \le \frac{1}{n^2+x^2} < \frac{1}{n^2} + \sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2} \text{ convergentă}$$

2) $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$, $x \in [-1,1]$, unif. converg.

$|\sin x| \le |x|$

$$\left|\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}\right| \le \frac{1}{n}\cdot\frac{|x|}{n} \le \frac{1}{n^2} + \sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2} \text{ convergentă}$$

$\sum f_n \cdot g_n$?

TEOREMA $\boxed{3}$ (Criteriul lui Abel)

(X,d) sp. metric $A \subset X$, $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$

$\sum_{n\ge1} f_n$ este uniform convergentă

g_n este un şir uniform mărginit şi monoton

Atunci $\sum_{n\ge1} f_n g_n$ uniform convergentă.

$[\ |g_n(x)| \le M \ \ \forall n \ \forall x \in A\ ]$

Ex : $\sum_{n\ge1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ $x \in [0,1]$ unif. convergentă

$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $\qquad g_n(x) = x^n$

$\sum_{n\ge1} f_n(x) = \sum_{n\ge1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ conv. (c. Leibniz)

$|g_n(x)| \le 1$, $\forall x$

TEOREMA $\boxed{4}$ (Criteriul lui Dirichlet)

(X,d) sp. metric $A \subset X$, $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$

Şirul sumelor parţiale $\sum_{k=1}^{n} f_k$ este uniform mărginit

$\{g_n\}_{n\ge1}$ este descrescător şi convergent uniform la 0.

Atunci $\sum_{n\ge1} f_n g_n$ este uniform convergentă.

TEOREMA $\boxed{5}$ (Criteriul lui Leibniz)

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $f_n : A \to \mathbb{R}$

$\{f_n\}_{n\ge1}$ este un şir descrescător şi uniform convergent la 0.

Atunci seria $\sum_{n\ge1} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă.

PROPRIETĂŢI ALE SERIILOR UNIFORM CONVERGENTE

TEOREMA $\boxed{1}$ (Transferul de mărginire)

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$, $f : A \to \mathbb{R}$

$\sum_{n\ge1} f_n \overset{u}{=} f$

Dacă f_n sunt mărginite atunci f este o funcţie mărginită.

TEOREMA 2 (Transferul existenței limitei)

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ $x_0 \in A'$ (pct de acumulare)

$\sum_{n\geq1} f_n \overset{u}{=} f$

Dacă $\exists \lim_{x \to x_0} f_n(x)$, $\forall n \geq 1$, atunci $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) =$

$= \sum_{n\geq1} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ $\left[= \lim_{x\to x_0} \sum_{n\geq1} f_n(x)\right]$.

TEOREMA $\boxed{3}$ (Transferul de continuitate)

(X,d) sp. metric $A \subset X$ $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$

$\sum_{n\geq1} f_n \overset{u}{=} f$

Dacă f_n sunt continue în x_0 (pe A), atunci și f este continuă în x_0 (pe A).

TEOREMA $\boxed{4}$ (Transferul de integrabilitate)

$f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ f_n integrabile (Riemann) pe $[a,b]$

$\sum_{n\geq1} f_n \overset{u}{=} f$ pe $[a,b]$.

Atunci f integrabilă (Riemann) pe $[a,b]$ și

$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\geq1} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

$\left[\int_a^b \sum_{n\geq1} f_n(x)\,dx = \sum_{n\geq1} \int_a^b f_n(x)\,dx \right]$

TEOREMA 5 (Transferul de derivabilitate)

$I \subseteq \mathbb{R}$ interval mărginit $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, f_n derivabile $\forall n \geq 1$

$\exists x_0 \in I$ a.î. $\sum_{n\geq1} f_n(x_0)$ convergentă

$\exists g : I \to \mathbb{R}$, ~~derivabil~~ $\sum_{n\geq1} f_n' \overset{u}{=} g$

Atunci $\exists f : I \to \mathbb{R}$ a.î.

1) $\sum_{n\geq1} f_n \overset{u}{=} f$

2) f derivabilă și $f' = g$

Obs! $f' = g \iff \left(\sum_{n\geq1} f_n\right)' = \sum_{n\geq1} f_n'$

se poate deriva termen cu termen

APROXIMAREA UNIFORMĂ A FUNCȚIILOR CONTINUE

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

Def: S.n. polinomul BERNSTEIN $\underbrace{}_{\text{de ordin } n}$ asociat lui f pe $[0,1]$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

TEOREMA LUI BERNSTEIN

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă.

Atunci $B_n \xrightarrow{u} f$ pe $[0,1]$.

TEOREMA LUI WEIERSTRASS

$f : [a,b] \overset{\subset\mathbb{R}}{\to} \mathbb{R}$ continuă.

Atunci $\exists$ un șir de polinoame (algebrice) care converge uniform la f pe $[a,b]$.

DEMONSTRAȚIE

$[a,b] \to [0,1]$

$g(t) = f(a + t(b-a))$

$g(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă

$P_m(x) = B_m\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$

$P_m(\cdot) \xrightarrow{u} f(\cdot)$

$\square$

1.11.2024

Curs 5

Funcții derivabile de o variabilă reală

$f : D \subseteq \mathbb{R}$ $\quad a \in D'$ (punct de acumulare)

Def: a) Spunem că f are derivată în a dacă $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \overline{\mathbb{R}}$.

b) Spunem că f este derivabilă în a dacă $\exists$ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$.

c) Spunem că f este derivabilă pe D dacă f este derivabilă în fiecare punct din D.

Notație: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Obs! Dacă $D = I$ interval nu este nevoie să pp că a este pct de acumulare.

TEOREMĂ

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad a \in D \cap D'$

Dacă f este derivabilă în a atunci f este continuă în a.

DEMONSTRAȚIE

$f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a)$ $\quad \square$

Obs! Reciproca este falsă

$f(x) = |x|$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Def: $D_1 = D \cap (-\infty, a)$ $\quad D_2 = D \cap (a, \infty)$

a) Dacă $a \in D_1'$. Spunem că f are derivată la stânga în a dacă $\exists$ $f_s'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Spunem că f este derivabilă la stânga în a dacă $\exists$ $f_s'(a) \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $a \in D_2'$.

Spunem că f are derivată la dreapta în a dacă $\exists$ $f_d'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Spunem că f este derivabilă la dreapta în a dacă $\exists$ $f_d'(a) \in \mathbb{R}$.

TEOREMĂ

$f : D \to \mathbb{R}$ $\quad a \in D_1' \cap D_2'$

Atunci f este derivabilă în $a \iff f$ este derivabilă la stânga și la dreapta în a și $f_d'(a) = f_s'(a)$.

$f'(a) = f_s'(a) = f_d'(a)$

TEOREMĂ (Regula lanțului)

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to J \subseteq \mathbb{R}$ $\quad g: J \to \mathbb{R}$

Dacă f este derivabilă în $a \in I$ și g este derivabilă în $f(a) \in J$ atunci $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a și $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

COROLAR

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to J \subseteq \mathbb{R}$ derivabilă cu $g: J \to \mathbb{R}$ derivabilă

Atunci compunerea $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă și

$(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \ \forall x \in I$

TEOREMĂ

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to J \subseteq \mathbb{R}$ continuă și bijectivă

Dacă f este derivabilă în a și $f'(a) \neq 0$, atunci $g = f^{-1}$, $g: J \to I$ este derivabilă în $b = f(a)$ și

$g'(b) = (f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

COROLAR

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to J \subseteq \mathbb{R}$ derivabilă, bijectivă, $f'(x) \neq 0, \forall x$

Atunci $f^{-1}: J \to I$ este derivabilă și $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

• Funcții derivabile pe un interval real

Def: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Spunem că $a \in D$ este punct de minim local (pct de minim relativ) pentru f dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(x) \geq f(a), \ \forall x \in V \cap D$.

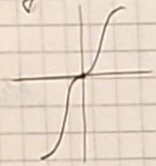
b) Spunem că $a \in D$ este punct de maxim local (maxim relativ) pentru f dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(x) \leq f(a), \ \forall x \in V \cap D$.

TEOREMĂ A LUI FERMAT

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dacă $x_0 \in \mathring{I}$ punct de extrem (minim/maxim local) și dacă f este derivabilă în x_0 atunci $f'(x_0) = 0$.

Obs! 1) Reciproca nu este adevărată. $f(x) = x^3$



2) Esențial $x_0 \in \mathring{I}$

$f(x) = x$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

0 pct de minim și $f'(0) \neq 0$

$f'(x) = 1$

Def: $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I \subseteq \mathbb{R}$ interval deschis

$x_0 \in I$ a.î. f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = 0$.

→ s.n. punct critic (punct staționar) a lui f.

TEOREMA LUI ROLLE

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$
f derivabilă pe (a,b)
$f(a)=f(b)$

Atunci $\exists\, c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$.

• TEOREMA LUI CAUCHY

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f,g continue pe $[a,b]$
f,g derivabile pe (a,b)

$g'(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,b)$

Atunci $\exists\, c\in(a,b)$ a.î. $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

TEOREMA LUI LAGRANGE

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f cont pe $[a,b]$
deriv. pe (a,b)

Atunci $\exists\, c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Obs! Punctele c din teoremele anterioare nu sunt unic determinate!

• CONSECINȚE ALE TEOREMEI LUI LAGRANGE

TEOREMA 1

$f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $I=\mathring{I}$, f derivabilă $f'(x)\equiv 0$ pe I

Atunci $\exists\, c\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x)\equiv c$.
constantă!

TEOREMA 2

$f,g: I=\mathring{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile cu $f'(x)=g'(x),\ \forall x\in I$

Atunci f și g diferă printr-o constantă.

Obs! I - interval ipoteză esențială

Ex: $f(x)=\operatorname{tg}(x)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

$$g(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}x+1, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ \operatorname{tg}x-1, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases}$$

$f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

dar $f(x)-g(x)=\begin{cases}-1, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ 1, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases}$

Proprietăți

$f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabilă

Atunci
1) $f'\geq 0$ pe $I \Rightarrow f$ crescătoare pe I
2) $f'>0$ pe $I\Rightarrow f$ strict cresc. pe I
3) $f'\leq 0$ pe $I\Rightarrow f$ descrescătoare pe I
4) $f'<0$ pe $I\Rightarrow f$ strict descresc. pe I

Obs! f derivabilă $\not\Rightarrow$ f' nu este continuă

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

TEOREMA LUI DARBOUX

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă $\Rightarrow$ f are prop. lui Darboux

$[\ a,b \in I,\ a<b$, pp $f'(a) < f'(b)$, $\forall \lambda \in (f'(a), f'(b))\ \exists$

$c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = \lambda\ ]$

- **CONSECINȚE**

COROLARUL 1

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă

Dacă $\exists\ a,b \in I$ a.î. $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ c \in (a,b)$ $f'(c) = 0$

COROLARUL 2

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă

Dacă f' nu se anulează pe I, atunci f' păstrează semnul constant

Regulile de tip l'Hospital.

TEOREMA (Cauchy)

$f, g: I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

- f, g sunt derivabile pe I
- $g'(x_0) \neq 0$
- $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

Atunci $\exists\ V \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $g(x) \neq 0\ \forall x \in V$ și

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

TEOREMA (L'HOSPITAL)

$f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$

- f, g sunt derivabile pe (a,b), $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$
- $\exists\ L = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$
- sau a) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \infty$

  sau b) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = 0$

Atunci $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \left(= \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \right)$

Obs! 1) Reciproca este falsă

$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow$ nu există

2) Atenție la verificarea ipotezei.

Dacă se aplică L'H: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \infty$

INCORECT! nici a), nici b) nu sunt verificate.

$\lim\limits_{x \searrow 0} \ln x = \infty$

$\lim\limits_{x \searrow 0} x = 0$

$\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\ln \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{y \to \infty} -y \cdot \ln y = -\infty$

$\frac{1}{x} \to y$

$x \to 0 \Rightarrow y \to \infty$

Diferențiala unei funcții

$f: I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Def: f s.m. diferențiabilă în $a \in I$ dacă $\exists A \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha: I \to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$ a.î.

$f(x) = f(a) + A(x-a) + \alpha(x)(x-a)$.

TEOREMĂ

$f: I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Atunci f e diferențiabilă în $a \in I$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ f este derivabilă în pct $a \in I$.

Def: $f: I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferențiabilă.

s.m. diferențiala lui f în $a \in I$, funcția

$df(a): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

se aplică un h din $\mathbb{R}$

$df(a)(h) = f'(a) \cdot h$

Obs! Dacă derivata lui f în a este un număr, diferențiala lui f în a este o funcție!
(operator liniar)

Derivate de ordin superior

$f: ~~I \subseteq \mathbb{R}~~ \to \mathbb{R}$
$D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}$

Def: a) f s.m. de două ori derivabilă în $x_0 \in D$, dacă $\exists V \in \mathcal{V}_{x_0}$ (o vecinătate a lui x_0) în care f este derivabilă și f' este la rândul său derivabilă în x_0

Notație: $f''(x_0)$

b) Dacă f este derivabilă de 2 ori în orice punct din D, spunem că f este de 2 ori derivabilă pe D.

RECURENȚĂ

Def: a) f s.m. de n ori derivabilă în $x_0 \in D$, dacă $\exists$ o vecinătate a punctului x_0 pe care f este de $(n-1)$ ori derivabilă și $f^{(n-1)}$ este derivabilă în x_0.

Notație: $f^{(n)}(x_0)$

b) f s.m. de n ori derivabilă pe D dacă este de n ori derivabilă în orice punct din D.

Def: a) f s.m. de clasă C^n (C^n mare) pe D, dacă f este de n ori derivabilă pe D și $f^{(n-1)}$ este continuă pe D.

b) f s.m. indefinit derivabilă pe D dacă f este de n ori derivabilă pe D pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Notație: $C^n(D) = \{ f: D \to \mathbb{R} \mid f$ de clasă C^n pe $D \}$

$C^\infty(D) = \{ f: D \to \mathbb{R} ;\ f$ este de n ori derivabilă, $\forall n \in \mathbb{N} \}$

TEOREMĂ

$f, g: \mathring{I} = I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n-ori derivabile în $x_0 \in I$ și $a \in \mathbb{R}$

Atunci $f+g$, $a \cdot f$, $f \cdot g$ sunt de n-ori derivabile în $x_0 \in I$.

Mai mult, avem:

1) $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$

2) $(af)^{(n)}(x_0) = a \cdot f^{(n)}(x_0)$

3) $(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot g(x_0) + C_n^1 f^{(n-1)}(x_0) \cdot g'(x_0) + \dots$
$+ C_n^k f^{(n-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0) + \dots + f(x_0) \cdot g^{(n)}(x_0)$

!

FORMULA LUI TAYLOR

$f : I = \mathring{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-ori derivabilă

Def: s.n. polinomul Taylor de grad n asociat lui f în $x_0 \in I$.

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \frac{x-x_0}{1!} + f''(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

? În ce măsură T_n aproximează funcția f.

$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ s.n. restul Taylor de grad n.

TEOREMA 1 (Formula lui Taylor cu rest Peano)

Fie $f : I = \mathring{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-ori derivabilă, $x_0 \in I$

Atunci $\exists\, \alpha : I \to \mathbb{R}$ continuă $\alpha(x_0) = 0$ a.î.

$$f(x) = T_n(x) + \alpha(x) \cdot \frac{(x-x_0)^n}{n!}, \quad \forall x \in I$$

TEOREMA 2 (Formula Taylor cu rest Lagrange)

Fie $f : I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (n+1)-ori derivabilă

Atunci $\forall\, x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$ $\exists\, \xi \in (x, x_0)$ (sau $\xi \in (x_0, x)$)

a.î. $f(x) = T_n(x) + f^{(n+1)}(\xi) \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

Obs! Dacă $x_0 = 0$ → Formula lui MACLAURIN

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ex: 1) $f(x) = e^x$ $\quad f^{(n)}(x) = e^x$ $\quad \xi = \theta x$ $\quad \theta \in (0,1)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

2) $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$

$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

...

$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right), \ k \in \mathbb{N}^*$

$f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1} \cos x \Rightarrow f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x \Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin \theta x$$

$\theta \in (0,1)$

Puncte de extrem pentru funcții derivabile

Pct de extrem $\xrightarrow{\text{T. Fermat}}$ le caută între pct. critice.

Cum decid?

TEOREMĂ

$f : I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-ori derivabilă

Dacă $f'(x_0) = 0$ $\ f''(x_0) = 0 \dots f^{(n-1)}(x_0) = 0$ $\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Atunci 1) dacă n este par, atunci x_0 este pct de extrem. Mai precis dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$ atunci x_0 este punct de maxim local; dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$ atunci x_0 este pct de minim local.

2) dacă n este impar, atunci x_0 <u>NU</u> este punct de extrem.

Ex: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$

$f(x+2\pi) = f(x), \forall x \to$ e suficient studiul pe perioada principală $[0, 2\pi)$

$f'(x) = 2\sin x(\cos x - 1) = 0 \to x_1 = 0$, $x_2 = \pi$

$x_1 = 0$ $\quad f''(x) = -2\cos x + 2\cos 2x \to f''(0) = 2-2 = 0$

$f'''(x) = 2\sin x - 4\sin 2x \to f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = 2\cos x - 8\cos 2x \to f^{IV}(0) = 2-8 = -6 < 0 \to$

$\to x_1$ este pct de maxim

$x_2 = \pi$ $\quad f''(\pi) = 4 > 0 \to x_2 = \pi$ este pct de minim.

$2k\pi$ pct de maxim

$(2k+1)\pi$ pct de minim

- **Diferențiala de ordin superior**

$f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\Delta$

Def: f s.m. <u>diferențiabilă de ordinul al II-lea</u> într-un $x_0 \in\Delta$ dacă $\exists$ o vecinătate V a lui x_0 a.î. f este derivabilă pe V și derivata sa f' este diferențiabilă în x_0.

Def: f diferențiabilă în $x_0\in\Delta$ s.m. <u>diferențiala de ordinul al doilea</u> a lui f în x_0 funcția $d^2f(x_0): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$d^2f(x_0)(h) = f''(x_0)\cdot h^2$.

- **RECURSIV** (RECURENȚĂ)

Def: $f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\Delta$

f s.m. diferențiabilă de ordinul n în $x_0\in\Delta$ dacă $\exists$ o vecinătate V a punctului x_0 a.î. f este de $(n-1)$-ori derivabilă pe V și $f^{(n-1)}$ este diferențiabilă în x_0.

Def: f diferențiabilă de n ori în $x_0\in\Delta$ s.m. <u>diferențiala de ordin n</u> a lui f în x_0, funcția

$d^n f(x_0): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)\, h^n$.

8.11.2024

Curs 6

Serii de puteri

Def: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ def seria de puteri $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

a_n s.n. coeficienții seriei de puteri.

Obs! Este un caz particular al unei serii de funcții.

TEOREMA I a lui Abel

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

1. Dacă $\exists\, x_0 \neq 0$ a.î. $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ este convergentă atunci $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este absolut convergentă ($\sum_{n\geq 0}|a_n x^n|$ conv) pentru $\forall x$ cu $|x| < |x_0|$

2. Dacă $\exists x_1$ a.î. $\sum_{n\geq 0} a_n x_1^n$ este divergentă atunci $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este divergentă pt $|x|>|x_1|$.

Obs! Putem avea situația

1) Seria converge doar pt $x=0$ și diverge $\forall x\neq 0$

$1+1!x+2!x^2+\dots+n!x^n+\dots$

2) Seria converge $\forall x\in\mathbb{R}$

$1+\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$

3) $\exists r>0$ a.î. $|x|<r$ convergentă și $|x|>r$ divergentă

$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$

$x=-1 \to$ convergentă $\to |x|<1 \Rightarrow$ convergentă

$x=1 \to$ divergentă $\to |x|>1 \Rightarrow$ divergentă

TEOREMA

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Atunci $\exists!\ r\in[0,+\infty]$ a.î.

1. Dacă $|x|<r$ seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este absolut convergentă
2. Dacă $|x|>r$ seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este divergentă.

Def: $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ $r\in[0,+\infty]$ s.n. raza de convergență a seriei dacă: 1) $|x|<r$ $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este absolut convergentă

2) $|x|>r$ $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este divergentă

Obs! 1) Din teoremă $\exists$ și unicitatea lui r

2) Problemele apar în $x=-r$ și $x=r$.

[$\sum_{n\geq 1} f_n$, $f_n: A\to\mathbb{R}$, $B=\{x\in A \mid \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ convergentă$\}$

s.n. mulțimea de convergență a seriei.]

Ex:

1) $1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$ $r=1$ m.c. $=(-1,1)$

2) $1+\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\dots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\dots$ $r=1$ m.c. $=[-1,1]$

3) $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$ $r=1$ m.c.: $[-1,1)$

4) $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\dots$ $r=1$ m.c.: $(-1,1]$

TEOREMĂ

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ și considerăm $\rho := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

Atunci:

1) Dacă $\rho=1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ convergentă (absolut) $\forall x\in\mathbb{R}$

2) Dacă $\rho=+\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ convergentă doar în $x=0$

3) Dacă $\rho\in(0,\infty) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ absolut convergentă pt $|x|<\frac{1}{\rho}$

și seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ divergentă pt $|x|>\frac{1}{\rho}$

4) $r=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ 0, & \rho=+\infty\\ \infty, & \rho=0\end{cases}$; este raza de convergență a seriei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\infty}=0\\ \frac{1}{0}=\infty\end{array}\right]$

COROLAR

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Atunci:

1) Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, atunci $r = \frac{1}{\rho}$ este raza de convergență a seriei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

2) Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$, atunci $r = \frac{1}{\rho}$ este raza de convergență.

[cu convenția $\frac{1}{\infty} = 0$ și $\frac{1}{0} = \infty$]

Ex

$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{2^n}$ vrem să-i găsim raza

$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \Rightarrow r = 2$ raza de convergență

GREȘIT!

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ $\quad a_{3k} = \frac{1}{2^k}$, $a_{3k+1} = 0$, $a_{3k+2} = 0$

$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3k]{|a_{3k}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[3k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{2}}$

Convergența uniformă a seriilor de puteri

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ raza de convergență r

$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pt $x \in (-r, r)$

? $f(\cdot)$ cont ? $f(\cdot)$ derivabilă ? $f(\cdot)$ integrabilă

TEOREMA 1

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență r

Atunci $\forall\, 0 < \rho < r$ seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pentru $|x| \leq \rho$

TEOREMA 2

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență r

Fie $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $x \in (-r, r)$

Atunci f este continuă pe $(-r, r)$.

TEOREMA 3 (Teorema a II-a a lui Abel)

Dacă seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este convergentă în $x = r$ (sau $x = -r$), atunci f este continuă în $x = r$ (respectiv $x = -r$).

TEOREMA 4

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență r

Atunci următoarele serii au și ele raza de convergență tot r:

$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$

$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots$

TEOREMA 5

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență r

$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pt $x \in (-r, r)$

Atunci f este integrabilă pe $[0, x]$ pentru orice $|x| < r$

și $\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^n$.

[Seria se poate integra termen cu termen pe $\forall [0, x]$ cu $|x| < r$]

Ex: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$

$\xrightarrow{T5}$ integrare $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$

T II A $x = -1$ $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \ln(1-x) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}$.

TEOREMA 6

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență r

$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pt $x \in (-r, r)$

Atunci f este derivabilă pe $(-r, r)$ și derivata sa

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + (n+1) a_{n+1} x^n + \dots$

[Seria se poate deriva termen cu termen pe $(-r, r)$]

Mai mult, f este de clasă C^∞ pe $(-r, r)$ și

$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}$

$f^{(k)}(0) = k!\, a_k$

Ex: (inversa) $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \forall x \in [-1, 1)$

T6 $\Rightarrow$ Derivez $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

convergentă doar pe $(-1, 1)$

în $x = -1$ seria este divergentă

- **Operații cu serii de puteri**

TEOREMA 1

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență $r_1 > 0$

$\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ cu raza de convergență $r_2 > 0$

Atunci seria $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$ are raza de convergență $r \geq \min\{r_1, r_2\}$.

Ex: $\sum_{n\geq 0} n x^n$ și $\sum_{n\geq 0} -n x^n$ amândouă divergente în general

convergente în $x = 0$ $(r = 0)$

$\sum_{n\geq 0} 0 \cdot x^n \to r = \infty$

TEOREMA 2

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență $r > 0$

Atunci $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n x^n$ are raza de convergență r.

PRODUSUL

$\sum_{n\ge0} a_n x^n$ și $\sum_{n\ge0} b_n x^n$

$$\left(\sum_{n\ge0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\ge0} b_n x^n\right) = \sum_{n\ge0}\left[a_0 b_n x^n + a_1 b_{n-1} x^{n-1} x + \dots + a_{n-1} b_1 x^{n-1} x + a_n b_0 x^n\right] =$$

$$= \sum_{n\ge0} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n = \sum_{n\ge0} c_n x^n$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

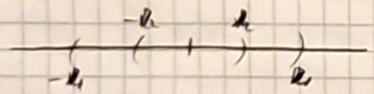
TEOREMA 3

$\sum_{n\ge0} a_n x^n$ cu raza de convergență $r_1 > 0$

$\sum_{n\ge0} b_n x^n$ cu raza de convergență $r_2 > 0$

Atunci seria produs $\sum_{n\ge0} c_n x^n$, unde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ are raza de convergență $r \ge \min\{r_1, r_2\}$.

Mai mult suma seriei produs este produsul sumelor celor două serii pe domeniul comun.



SERIA BINOMIALĂ

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Pp. că $\alpha \ne 0, 1, 2, \dots$ ($\notin \mathbb{N}$)

Af raza de convergență $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1 \Rightarrow \underline{\underline{r=1}}$$

$$f(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$x \in (-1, 1)$

Dinnia (T)

$$f'(x) = \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots$$

Calcul $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in (-1,1)$

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x) \quad \Big| \cdot (1+x)^{\alpha-1}$$

$$(1+x)^{\alpha} f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1} f(x)$$

$$(1+x)^{\alpha} f'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1} f(x) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{(1+x)^{2\alpha}}$$

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}\right)' = 0$$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î. $\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}} \equiv c \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = c(1+x)^{\alpha}$

$x = 0$ $\quad \underset{1}{\underset{\parallel}{f(0)}} = c \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow f(x) = (1+x)^{\alpha}$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

generalizare a binomului lui Newton

↳ denumirea de serie binomială

Cazuri particulare

$\alpha = -1$, $x \to -x$ $\qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \quad (*)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x - \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\, 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-3)}{2^n \cdot n!} \cdot x^n + \ldots$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1\cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^n + \ldots \quad (**)$$

În $(*)$ $x \to x^2$ $\qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$

Integrez (T) $\qquad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad (***)$

În $(**)$ $x \to -x$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1\cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \ldots$

Aici $x \to x^2$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \ldots$

Integrez (T) $\qquad \arcsin x = x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n-1)}x^{2n-1} + \ldots$

În $(***)$ $\underset{x<1}{x \to 1}$, $\boxed{\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)} + \ldots}$

$\hookrightarrow$ o aproximare a lui π

Dezvoltarea unei funcții în serii de puteri

Def: $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \in \mathring{I}$, f este de clasă $C^\infty(I)$

s.n. seria Taylor asociată funcției f în $x = 0$ următoarea serie de puteri:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Obs! ? seria convergentă și pentru $x \neq 0$ $\quad r = ?$

? $f(x)$ coincide cu seria Taylor

Ex: 1) $f(x) = e^x$ $\quad f \in C^\infty$ $\quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$r = \infty$

2) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \in (0, a) \\ 0, & x \in (-a, 0] \end{cases}$

f derivabilă pe $(-a, a)$

$$f_d'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x} = \lim_{\substack{(x \to 0 \\ x > 0) \\ y \to \infty}} \frac{e^{-y}}{\frac{1}{y}} = 0$$

$f_s'(0) = 0$ $\qquad \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ derivabilă în 0; $f'(0) = 0$

Analog (inducție) $\quad f \in C^\infty((-a, a))$

$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$

Dacă $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \equiv 0$ $\cancel{\alpha}$

TEOREMA

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \in \mathring{I}$, $f \in C^\infty(I)$

Atunci $f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{R_n(x)\}_{n\geq 1}$ este convergent la 0, unde $R_n(x)$ este restul MacLaurin / Lagrange

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_n x), \quad \theta_n \in (-1,1)$$

COROLAR

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I simetric față de origine

$f \in C^\infty(I)$

Dacă $\exists\, \underset{\text{constantă}}{M} > 0$ a.î. $|f^{(n)}(x)| \leq M$ $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$

atunci $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$

DEMONSTRAȚIE

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_n x)\right| \leq M \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\text{a})$$

$\square$

Ex:

1) $f(x) = e^x$ $\quad |f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^M$ $\forall x \in (-M, M)$

$\rightarrow e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$

$x = 1$ $\quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

$x = -1$ $\quad \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots$

2) $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & n = 1, 5, 9, \dots \\ -\sin x, & n = 2, 6, \dots \\ -\cos x, & n = 3, 7, \dots \\ \sin x, & n = 0, 4, \dots \end{cases}$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & n = 1, 5, 9, \dots \\ -1, & n = 3, 7, 11, \dots \\ 0, & n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Seria Taylor în 0: $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$|f^{(n)}(x)| \leq 1$ $\forall x \forall n$ $\Rightarrow$ corolarul poate fi aplicat $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\forall x$

Def: $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$, f de clasă $C^\infty(I)$

s.n. seria Taylor asociată lui f în x_0 seria de puteri: $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots +$

$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$

Toate rezultatele rămân adevărate și în acest caz.

15.11.2024

Curs 7

Calcul diferențial în $\mathbb{R}^n$

Def: Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$ $a \in D$

a) f s.n. diferențiabilă în a dacă $\exists$ $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniară a.î. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$.

b) f s.n. diferențiabilă pe $\mathbb{R}$ dacă f diferențiabilă în orice $a \in D$.

Obs! $\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = f(a) + T(x-a) + \alpha(x)\|x-a\|$
(vezi dif pe $\mathbb{R}$)

TEOREMĂ

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $a \in D$

Dacă f diferențiabilă în $a \in D$, atunci funcția T din definiție este unică.

Def: Funcția T din def. anterioară s.n. diferențiala funcției f în a.

sau

derivata Fréchet (a lui f în a).

Notație: $df(a)$

Obs! Dacă $n = 1$ $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, diferențiabilă în $a \in D$

$t \in \mathbb{R}$ $t = t \cdot 1$ $df(a)(t) = df(a)(t \cdot 1) = t \cdot \underline{df(a)(1)}$

Notație: $df(a)(1) =: f'(a)$

PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR DIFERENȚIABILE

TEOREMA 1

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f diferențiabilă în $a \in D$.
Atunci f este continuă în a.

DEM: $f(x) - f(a) = T(x-a) + \alpha(x)\|x-a\|$ $\square$

TEOREMA 2

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$
$f_i: D \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$

Atunci f diferențiabilă în $a \in D \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ f_i diferențiabilă în $a \in D$ $\forall i = \overline{1,m}$ și
$df(a) = (df_1(a), \ldots, df_m(a))$

TEOREMA 3

Dacă $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o funcție constantă, atunci $df(a) = 0$, $\forall a \in D$.

TEOREMA 4

Dacă $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este liniară, atunci $df(a) = f$, $\forall a \in D$.

DEM: $F(a+h) = F(a) + F(h)$

$F(x) = F(a) + F(x-a)$

$\square$

TEOREMA 5

$F, G : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Dacă F și G sunt diferențiabile în a, atunci $F+G$, λF sunt diferențiabile în a.

1) $d(F+G)(a) = dF(a) + dG(a)$

2) $d(\lambda F)(a) = \lambda\, dF(a)$

TEOREMA 6

$F : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G : D (= \mathring{D}) \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in D$

Dacă F și G sunt diferențiabile în $a \Rightarrow$

$\Rightarrow F \cdot G : D \to \mathbb{R}^m$ este dif. în a.

$$d(F \cdot G)(a) = dF(a) \cdot G(a) + F(a) \cdot dG(a)$$

- **Derivata direcțională**

$v \in \mathbb{R}^n$ $\quad v = (v_1, \dots v_n)$ $\quad \|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$

Pp. $\|v\| = 1$

$a \in \mathbb{R}^n$

$\{x = a + t \cdot v \,;\, t \in \mathbb{R}\}$ s.n. dreapta care trece prin a și de direcție v

Def: $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad a \in D$

a) Spunem că f are derivată direcțională în a după direcția v dacă există $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t} := \dfrac{df}{dv}(a)$

$\to$ [s.n. derivata Gâteaux]

b) Spunem că f derivabilă în a după direcția v dacă $\dfrac{df}{dv}(a) \in \mathbb{R}$.

Obs! $\quad a \in \mathring{D} \to \exists\, r > 0$ a.î. $B(a, r) \subset D$ (din def. interiorului)

$\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(t) = f(a + tv)$

$$\frac{df}{dv}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 2xy \cdot \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) $a = (0,0)$

b) $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$\varphi(t) = f(0 + tv) = \sin 2\theta$ $\quad$, $\varphi(0) = f(0) = 0$

$\sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(t) = 0, \forall t \neq 0 \Rightarrow f(\cdot)$ derivabilă

$\dfrac{df}{dv}(0) = 0$ dacă $V = (1,0)$, $V = (0,1)$, $V = (-1,0)$ sau $V = (0,-1)$

Dacă $\sin 2\theta \neq 0 \Rightarrow \varphi$ nu este derivabilă $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ nu are derivată direcțională în $(0,0)$ după $(\cos\theta, \sin\theta)$

Obs! $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (baza canonică)

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \qquad i = \overline{1,n}$$

$$\left[\, x = (x_1, \dots, x_n) \qquad x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \,\right]$$

Def: $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad a \in D$

a) Spunem că f are derivată parțială în a în raport cu variabila x_k dacă $\exists \dfrac{df}{de_k}(a) \overset{not}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

b) Dacă $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) \in \mathbb{R}$ spunem că f este derivabilă parțial în a în raport cu variabila x_k.

c) Spunem că f derivabilă parțială în $a \in D$ dacă f este derivabilă parțial în a în raport cu $\forall x_k$.

d) Spunem că f este de clasă C^1 pe D (not. $C^1(D)$) dacă f este derivabilă parțial pe D și $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ sunt continue $\forall k = \overline{1,n}$.

Ex: $f(x,y) = x \ln(xy)$ $\quad f : D (= \mathring{D}) \to \mathbb{R}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ xy > 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(xy) + \frac{x}{y} \qquad x \cdot \frac{(xy)'}{xy} = \frac{x}{y} \ ???$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{y} \ (?)$$

$x = ct$ $\quad x \cdot \dfrac{(xy)'}{xy} = \dfrac{x}{y}$

$y = ct.$ $\quad x \cdot \dfrac{(xy)'}{xy} = \dfrac{y}{y} = 1 \ (?)$

Ex: $f(x,y) = \begin{cases} \dots (y - x^2)^2 + x^6 \dots \\ 0 &, (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$a = (0,0)$

$v = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi)$

$$\varphi(t) = f(0 + tv) = \frac{t^3 \cos^5\theta}{t^6 \cos^6\theta + (\sin\theta - t\cos^2(\theta))^2}$$

$\varphi(0) = f(0) = 0$

Dacă $\theta \neq 0, \pi \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \dfrac{0}{\sin\theta} = 0 \to$

$\to \dfrac{df}{dv}(0) = 0$

Dacă $\theta = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \dfrac{t}{t^4 + 1} \to \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = 1 \to$

$\to \dfrac{df}{dv}(0) = 1$

Dacă $\theta = \pi \Rightarrow \varphi(t) = \dfrac{-t}{t^4 + 1} \to \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = -1 \to$

$\to \dfrac{df}{dv}(0) = -1$

Deci f este derivabilă în $a = (0,0)$ $\forall v$

! Dar f nu este continuă în $a = (0,0)$

$z_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}\right) \to (0,0)$

$f(z_n) = f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}\right) = n^3 \longrightarrow \infty\,!$

TEOREMA 1.

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$

Dacă f este diferențiabilă în a, atunci f este derivabilă în a în orice direcție $v \in \mathbb{R}^n$.

$$\frac{df}{dv}(a) = df(a)(v) \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^n$$

Obs! Reciproca este falsă. (vezi Ex)

TEOREMA 2.

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$

Dacă f este diferențiabilă în a, atunci f este derivabilă parțial în raport cu orice x_k și $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df(a)(e_k)}$

TEOREMA 3.

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$

Dacă f diferențiabilă în $a \in D$, atunci

$$df(a)(v) = \frac{df}{dv}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, v_k, \quad \forall\, v = (v_1, \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$$

TEOREMA 4

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$

Dacă f este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele sale ($\forall\, x_k$) pe o vecinătate V a lui a și $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ sunt continue în a.

Atunci f este diferențiabilă în a.

COROLAR $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Dacă f este de clasă $C^1(D) \Rightarrow f$ diferențiabilă pe D.

Def $F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$, $F = (f_1, \dots f_m)$, $f_i: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$

a) Spunem că F este derivabilă parțial în a (pe tot D) în raport cu x_k dacă $\forall\, f_i$ este derivabilă parțial în a (pe D) în raport cu x_k.

b) Spunem că F este de clasă C^1 ~~(D)~~ pe D dacă f_i este de clasă C^1 pe D.

PROPOZIȚIE

$F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Dacă F este de clasă C^1 pe D, atunci F este diferențiabilă pe D.

Ex (notație)

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = xy^2 + x^2yz + y^3$

$df = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2 + 2xyz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xy + x^2z + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2y$$

Notație: $df(x,y,z) = (y^2 + 2xyz)\,dx + (2xy + x^2z + 3y^2)\,dy + x^2y\,dz$

MATRICEA JACOBIANĂ

$F: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a\in D$, $F=(f_1,\dots,f_m)$

$f_i: D\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,m}$

Def: s.n. matricea Jacobiană a lui F în $a\in D$ următoarea matrice:

$$J_F(a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Dacă $m=n \to J_F(a)$ este matrice $n\times n \to$ determinant

$\det(J_F(a))$ s.n. Jacobianul lui F în a

TEOREMA (Dif. funcțiilor compuse) — Regula lanțului

$F: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n \to \Delta=\mathring{\Delta}\subseteq\mathbb{R}^m$

$G:\Delta\to\mathbb{R}^p$

Dacă F este diferențiabilă $a\in D$ și G este dif în $F(a)\in\Delta$, atunci $G\circ F: D\to\mathbb{R}^p$ și diferențiabilă în a și

$$d(G\circ F)(a)=dG(F(a))\circ d(F(a))$$

COROLAR

$$J_{G\circ F}(a)=J_G(F(a))\cdot J_F(a)$$

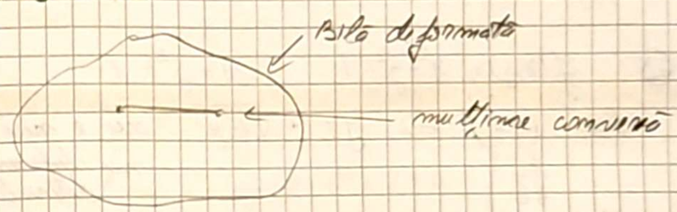
TEOREMA DE MEDIE

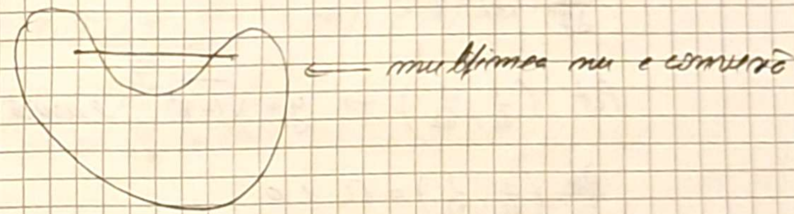
Def: $D\subset\mathbb{R}^n$

a) $a,b\in D$ $\quad [a,b]=\{x=a+\lambda(b-a);\ \lambda\in[0,1]\}$

s.n. segmentul care unește pe a cu b.

b) $C\subset\mathbb{R}^n$ s.n. convexă dacă $\forall a,b\in C$, atunci $[a,b]\subset C$.





TEOREMA DE MEDIE PT. FUNCȚII CU VAL. REALE

Fie $f: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, diferențiabilă (dif).

Atunci $\forall a,b\in D$ a.î. $[a,b]\subset D$,

$\exists\ \xi\in\{x=a+\lambda(b-a),\ \lambda\in(0,1)\}$ a.î.

$f(b)-f(a)=df(\xi)(b-a)$

TEOREMA DE MEDIE PT. FUNCȚII CU VAL. VECTORIALE

$F: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ diferențiabilă

(m)

$C\subset D$ convexă (mulțime)

Pp $\exists\ M>0$ a.î. $\|dF(x)\|\le M$ $\forall x\in C$

Atunci $\|F(b)-F(a)\|\le M\|b-a\|$ $\forall a,b\in C$

Funcții implicite

Def: $f : E \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Pp $\exists\, (x_0, y_0) \in E$ a.î. $f(x_0,y_0) = 0 \to f(x,y)=0$

$\overset{?}{\Rightarrow}\ y = \varphi(x)$

? $\varphi(\cdot)$ este unică

? $\varphi(\cdot)$ derivabilă

Ex $f(x,y) = x^2+y^2-1 \qquad x^2+y^2=1$

Pct. $(1,0) \to y = \pm\sqrt{1-x^2}$ nu e nici unică, nici ~~diferen~~ derivabilă în 1

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$!

Pct $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) \to y = \sqrt{1-x^2}$ e unică și derivabilă

$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) = \sqrt2 \neq 0$

TEOREMA FUNCȚIILOR IMPLICITE

$F : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă

$(x_0, y_0) \in D$

Dacă 1) $F(x_0,y_0) = 0$

2) F este de clasă $C^1(D)$

3) $\det\left(J_F^y(x_0,y_0)\right) \neq 0$

Atunci $\exists\, I_0 \in V(x_0)$ (în $\mathbb{R}^n$)

$\exists\, J_0 \in V(y_0)$ (în $\mathbb{R}^m$)

$\exists!\ \varphi\ I_0 \to J_0$ a.î.

a) $F(x, \varphi(x)) = 0$

b) $F(x,y) = 0 \quad (x,y) \in I_0 \times J_0 \Rightarrow y = \varphi(x)$

c) φ este diferențiabilă

$J_F^y(x_0,y_0) = \qquad F = (f_1, \dots, f_m)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) & & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(x_0,y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x_0,y_0) & & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Derivarea funcției implicite în cazuri particulare

1) $n = m = 1 \qquad f(x, \varphi(x)) = 0 \ \Big|\ \frac{\partial}{\partial x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

2) $m = 1,\ n = 2 \qquad f(x,y,\varphi(x,y)) = 0 \ \Big|\ \frac{\partial}{\partial x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}$$

$\frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(-)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-)}$$

Ex : Să se arate că sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^2u^2 + xzv + y^2 = 0 \\ yzu + xyv^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad (*)$$

determină în mod unic pe u și v ca funcții de x, y, z într-o vecinătate a lui $(0, 1, 3, 3, -3)$.

Fie $F = (f_1, f_2)$ $\quad f_1(u, v, x, y, z) = x^2u^2 + xzv + y^2$

$f_2(u, v, x, y, z) = yzu + xyv^2 - 3x$

$f_1, f_2 \ C^1 \Rightarrow F \ C^1 \quad F(0, 1, 3, 3, -3) = 0$

$\frac{\partial f_1}{\partial u}(-) = 2x^2u \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v}(-) = xz$

$\frac{\partial f_2}{\partial u}(-) = yz \qquad \frac{\partial f_2}{\partial v}(-) = 2xyv$

$\det J_F(0, 1, 3, 3, -3) = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} = -81 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow T$ se poate aplica O.K.

teorema

** EXPLICAȚIE

Derivăm în raport cu x cele 2 ec. ale $(*)$

$$\begin{cases} 2x^2 \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + xz \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) + 2xu^2(x,y,z) + \\ + zv(x,y,z) = 0 \\ yz \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + 2xyv \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) + y \cdot v^2(x,y,z) - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{4xyu^2(x,y,z)v(x,y,z) - 2yzu(x,y,z) - 3z + yzv^2(x,y,z)}{y(4x^2u(x,y,z)v(x,y,z) - z^2)}$$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = - - - -$

Derivate parțiale de ordin superior

Def : $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabilă parțial pe D

a) Spunem că f are derivata parțială de ordinul al doilea în raport cu x_k dacă $\exists$ derivata parțială $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$.

Notație: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$

Dacă $j \neq k$ s.m. derivată mixtă de ordinul al doilea

Dacă $j = k$:

Notație: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a)$! (o iei ca atare) BAFTA!

b) f s.m. de clasă C^2 pe D dacă f este derivabilă parțială de 2 ori pe D și derivatele parțiale de ordin 2 sunt continue pe D

c) f s.m. de clasă C^∞ pe D dacă f este de clasă C^q pe D $\forall q \in \mathbb{N}$.

Ex 1 : $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + 2x_1x_2)$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2)\cos(x_1^2 + 2x_1x_2)$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1\cos(x_1^2 + 2x_1x_2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)} =$

$= 2\cos(x_1^2 + 2x_1x_2) - 4(x_1 + x_2)^2\sin(x_1^2 + 2x_1x_2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = -4x_1^2 \sin(x_1^2+2x_1x_2)$$

Ex2 $f(x,y) = \begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Calcul

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cdot\dfrac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ pt $(x,y)\neq(0,0)$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cdot\dfrac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ pt $(x,y)=(0,0)$

(1) $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$

(2) $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim \frac{0}{x} = 0$$

Analog:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \dots = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \overset{def}{=} \lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x-0}{x} = 1$$

Analog $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1$

Deci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$!

! mergi pe regulate (Ex1), dacă ai singularitate e mai dificil (Ex2)

Curs 8

Calcul diferențial în $\mathbb{R}^n$

TEOREMA LUI SCHWARZ

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a\in D$

Pp. f are derivate parțiale mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ și $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ $(i\neq j)$ într-o vecinătate V a pct. a, finite și funcțiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ și $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ sunt continue în a.

Atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$.

COROLAR

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe D

Atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$ $\forall a\in D$ $\forall i\neq j$

- **Diferențiabilitate de ordin superior**

Def: $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a\in D$

(a) Spunem că f este de q ori diferențiabilă în a dacă f este de $q-1$ ori derivabilă parțială într-o vecinătate a punctului a și derivatele parțiale de ordin $q-1$ sunt diferențiabile în punctul a.

(b) f este de q ori diferențiabilă pe D dacă este diferențiabilă de q-ori în orice punct $a\in D$.

PROPOZIȚIE

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$ $\quad (V \in V_a)$

Dacă f este de q-ori derivabilă parțial în a și (toate) derivatele parțiale de ordin q sunt continue, atunci f este de q-ori diferențiabilă în a.

Obs! $df(a)(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$, $\forall h = (h_1, \dots, h_n)$

Def: Dacă $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$ este de q-ori diferențiabilă în a, diferențiala de ordin q se scrie

$$d^q f(a)(h) = \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{(q)}, \ \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$$

→ scriere formală

→ termeni de tip binom

→ (q) → putere simbolică

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)^{(q)} = \frac{\partial^q f}{\partial x_1^q}(a)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)^{(q-1)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \frac{\partial^q f}{\partial x_1^{q-1} \partial x_2}(a)$$

În general: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^q}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f(a)$

$q = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

Obs! $q = 2$ $\quad d^2 f(a)(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j$

$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

Matricea $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}}$ s.n. **matricea HESIANĂ** asociată lui f în a.

Ex: Să se scrie diferențialele de ordinul 1 și 2 într-un punct pt $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\sin(x+2y+3z)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2\sin(x+2y+3z)$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -3\sin(x+2y+3z)$

$df(x,y,z) = -\sin(x+2y+3z)dx - 2\sin(x+2y+3z)dy - 3\sin(x+2y+3z)$

Pt. $a = \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right)$; $df(a) = -\sin\frac{9\pi}{4}(dx+dy+dz) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(dx+dy+dz)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x+2y+3z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2\cos(x+2y+3z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -6\sin(x+2y+3z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -3\cos(x+2y+3z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\cos(x+2y+3z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -9\cos(x+2y+3z)$

$$d^2 f(x,y,z) = -\cos(x+2y+3z)(dx^2+4dy^2+9dz^2+4dx\,dy+6dx\,dz+12dy\,dz)$$

TEOREMĂ (Formula lui Taylor)

$f: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $q+1$ diferențiabilă $a\in D$ a.î. $B(a,r)\subset D$.

Atunci $\forall x\in B(a,r)$ $\exists\, \xi\in[a,x]$ a.î.

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}df(a)(x-a)+\frac{1}{2!}d^2f(a)(x-a)+\dots+\frac{1}{q!}d^q f(a)(x-a)+\frac{1}{(q+1)!}d^{q+1}f(\xi)(x-a)$$

Caz particular $n=2$, $q=2$

$f: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 2 ori diferențiabilă $a\in D$, $a=(a_1,a_2)$ a.î. $B(a,r)\subset D$

Atunci $\forall (x,y)\in B((a_1,a_2),r)$ $\exists\, \xi=(\xi_1,\xi_2)\in[(a_1,a_2),(x,y)]$ a.î.

$$f(x,y)=f(a_1,a_2)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2)\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_1,\xi_2)(x-a_1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi_1,\xi_2)(x-a_1)(y-a_2)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi_1,\xi_2)(y-a_2)^2\right)$$

□

Puncte de extrem pentru funcții definite pe $\mathbb{R}^n$

Def: $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

a) $a\in A$ s.n. punct de minim absolut (global) pentru f dacă $f(a)\le f(x)$, $\forall x\in A$.

$f(a)=\inf\{f(x);\ x\in A\}$ s.n. valoarea minimă a lui f pe A.

b) $a\in A$ s.n. punct de maxim absolut (global) pentru f dacă $f(x)\le f(a)$, $\forall x\in A$.

$f(a)=\sup\{f(x);\ x\in A\}$ s.n. valoarea maximă a lui f pe A.

Def: $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

a) $a\in A$ s.n. punct de minim relativ (local) al funcției f dacă $\exists\, V\in\mathcal{V}_a$ a.î. $f(x)\ge f(a)$, $\forall x\in V\cap A$.

b) $a\in A$ s.n. punct de maxim relativ (local) al funcției f dacă $\exists\, V\in\mathcal{V}_a$ a.î. $f(x)\le f(a)$, $\forall x\in V\cap A$.

Def: $f: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$a\in D$ s.n. punct critic (staționar) al lui f dacă f este diferențiabilă în a și dacă $df(a)=0$.

TEOREMA LUI FERMAT

$f: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, f este diferențiabilă în $a\in D$.

Dacă a este punct de extrem local atunci $df(a)=0$. (i.e., a pct crit)

Obs! 1. Punctele de extrem se caută printre punctele critice.

2. Reciproca teoremei lui Fermat este falsă.

Ex: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ $\quad\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0 \to df(0,0)=0$

$f(0,y)=-y^2<0=f(0,0)$

$f(x,0)=x^2>0=f(0,0)$

Def: Un punct critic care nu este pct. de ext. local s.n. punct șa.

TEOREMĂ:

$f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe D

Atunci: 1. Dacă $a \in D$ este un pct. de minim local, atunci diferențiala de ord. 2 ≥ 0

$d^2 f(a) \geq 0$.

$[\, d^2 f(a)(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \,]$

2. Dacă $a \in D$ este pct. de maxim local, atunci $d^2 f(a) \leq 0$

$[\, d^2 f(a)(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \,]$

Def: $(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$ matrice simetrică $(a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j = \overline{1,n})$

$\varphi(x) = \sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} a_{ij} x_i x_j \qquad x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$

[φ s.m. forma pătratică asociată matricei $(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$]

a) φ s.m. pozitiv definită dacă $\varphi(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

b) φ s.m. negativ definită dacă $\varphi(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

TEOREMA

$f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 $\quad a \in D$ pct. critic

Atunci:

1. Dacă $d^2 f(a)$ este pozitiv definită, atunci a este pct. de minim local.

2. Dacă $d^2 f(a)$ este negativ definită, atunci a este pct. de maxim local.

Cazuri particulare $n = 2$ și $n = 3$

$\boxed{n = 2}$

TEOREMĂ

$f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, $a \in D$ pct. critic.

Fie $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$

Atunci:

1. $B^2 - AC < 0$ și $A > 0$, atunci a este pct de minim local

2. $B^2 - AC < 0$ și $A < 0$, atunci a este pct de maxim local

3. $B^2 - AC > 0 \Rightarrow a$ este punct șa

Obs! Dacă $B^2 - AC = 0$ nu ne putem pronunța referitor la extremalitatea (nonextremalitatea) lui a.

Ex Să se determine pct de extrem local ale funcției

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 - 8$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4x^2y + 8$

$\begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 - 8 = 0 \\ 4y^3 + 4x^2y + 8 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 2 \\ y^3 + x^2y = -2 \end{cases} \ (+)$

$x^3 + y^3 + xy(x+y) = 0$

$(x+y)(x^2 - xy + y^2) + xy(x+y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow (1,-1)$ pct critic

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2+4y^2 \qquad A = 16$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2+4x^2 \qquad B = -8$$

$$C = 16$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8xy \qquad \left.\begin{matrix} B^2-AC = 64-16^2<0 \\ A>0 \end{matrix}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $(+1,-1)$ pct. minim.

$\boxed{n=3}$

TEOREMA

$f: D=\mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, $a \in D$ pct critic

Fie $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) \end{vmatrix}$$

Atunci:

1. $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$ $\Rightarrow$ a pct de minim local
2. $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$ $\Rightarrow$ a pct. de maxim local
3. În rest, a este punct șa.

Ex $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x-2y+2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 6y-2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4z+2x$$

$$\begin{cases} 2x-2y+2z=0 \\ 6y-2x=0 \\ 4z+2x=0 \end{cases} \Rightarrow a=(0,0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)=2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)=6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)=4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)=-2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a)=2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a)=0$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 16 \\ \Delta_3 = 8 \end{matrix} \longrightarrow a=(0,0,0) \text{ pct de minim}$$

Extreme cu legături. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

$f: D=\mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad C^1$

$g: D \to \mathbb{R}^m$ $\quad C^1$

? puncte de extrem ale funcției f care verifică o restricție (condiție suplimentară)

$\boxed{g(x,y)=0}$ (*)

Def: $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}^m$

$A = \{(x,y) \in D;\ g(x,y) = 0\}$

$(x_0, y_0) \in A$ s.m. <u>punct de extrem condiționat de (*)</u> dacă $\exists\ V \in \mathcal{V}_{(x_0,y_0)}$ din D a.î. $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ are semn constant pentru $\forall (x,y) \in V \cap A$.

Mai precis:

a) dacă $f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0\ \forall (x,y) \in V \cap A$
(x_0,y_0) s.m. <u>punct de minim al lui f cu legăturile (*)</u>

b) dacă $f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq 0\ \forall (x,y) \in V \cap A$
(x_0,y_0) s.m. <u>punct de maxim al lui f cu legăturile (*)</u>

Def: $(x_0,y_0) \in A$ s.m. punct critic cu legăturile (*) dacă (x_0,y_0) este punct critic pentru $f|_A$ (f restricționat la A)

TEOREMĂ (Existența multiplicatorilor lui Lagrange)

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ C^1

$g: D \to \mathbb{R}^m$ C^1 $\quad g = (g_1, \dots, g_m)$ $g_i: D \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$

$(x_0,y_0) \in D$ punct de extrem condiționat de legăturile (*) $[g(x,y) = 0]$

Pp. că $\det(J_g^y(x_0,y_0)) \neq 0$

$$\left[\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(x_0,y_0) \right)_{i,j=\overline{1,m}} \right]$$

Atunci $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ a.î. $L = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$

(x_0,y_0) se află printre soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}(x,y) = 0 & i = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_j}(x,y) = 0 & j = \overline{1,m} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Obs!
1. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ s.m. multiplicatorii lui Lagrange
2. $f(x,y) - f(x_0,y_0) = L(x,y) - L(x_0,y_0)$ pe A
3. Punctele critice ale lui f se găsesc printre punctele critice ale lui L.
4. Reciproca este falsă.

TEOREMĂ

Pp. verificate ipotezele teoremei anterioare.

Pp. f de clasă C^2, g de clasă C^2

Fie $d^2L(x_0,y_0) = \sum_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} a_{ij}\, dx_i\, dx_j$

Fie $\Delta_1 = a_{11}$ $\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ $\dots$ $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Atunci:

1. Dacă $\Delta_1 > 0 \dots \Delta_n > 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ pct de minim al lui f cu legăturile (*)
2. Dacă $(-1)^k \Delta_k > 0\ \forall k = \overline{1,n} \Rightarrow (x_0,y_0)$ pct de maxim al lui f cu legăturile (*)

Ex $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = xy$ cu $x^2+y^2=a$, $a \neq 0$

$\boxed{g(x,y) = x^2+y^2-a^2}$

$L(x,y) = xy + \lambda(x^2+y^2-a^2)$

$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = y + 2\lambda x$

$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 2\lambda y$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y) = x^2+y^2-a^2$

$\begin{cases} y+2\lambda x = 0 \\ x+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-a^2=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y+2\lambda x = 0 \\ x+2\lambda y = 0 \end{cases}$ → nu trebuie să aibă doar sol banală $(0,0)$

$\to \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

Pt. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} y+x=0 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow$ $x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ sau $x_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Pt $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ $\begin{cases} y-x=0 \\ x^2+y^2=0 \end{cases} \Rightarrow$ $x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$x_4 = \frac{-a}{\sqrt{2}}$, $y_4 = \frac{-a}{\sqrt{2}}$

Pt $\lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow L_1(x,y) = xy + \frac{1}{2}(x^2+y^2-a^2)$

$\frac{\partial L_1}{\partial x}(x,y) = x+y$ $\quad \frac{\partial L_1}{\partial y}(x,y) = x+y$

$\frac{\partial^2 L_1}{\partial x^2}(x,y) = 1$ $\quad \frac{\partial^2 L_1}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$ $\quad \frac{\partial^2 L_1}{\partial y^2}(x,y) = 1$

$d^2L_1(x,y) = dx^2 + dy^2 + 2dx\,dy = (dx+dy)^2 \to$

$\to (x_1,y_1), (x_2,y_2)$ punte de minim

Pt $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $L_2(x,y) = xy - \frac{1}{2}(x^2+y^2-a^2)$

$\frac{\partial L_2}{\partial x}(x,y) = y - x$ $\quad \frac{\partial L_2}{\partial y}(x,y) = x - y$

$\frac{\partial^2 L_2}{\partial x^2}(x,y) = -1$ $\quad \frac{\partial^2 L_2}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$ $\quad \frac{\partial^2 L_2}{\partial y^2}(x,y) = -1$

$d^2L_2(x,y) = -dx^2 - dy^2 + 2dx\,dy = -(dx-dy)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (x_3,y_3), (x_4,y_4) puncte de maxim

6.12.2024

Curs 9

Funcții integrabile Riemann

$[a,b]$ interval închis și mărginit

Def: a) Se va numi o partiție a lui $[a,b]$ un sistem de puncte $P = (x_0, \dots, x_n)$ a.î. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < b$.

Cea mai mare lungime $(x_i - x_{i-1})$ s.n. norma partiției.

Notație: $\|P\| = \max_{i=\overline{1,n}} (x_i - x_{i-1})$

b) Q o altă partiție a lui $[a,b]$ s.n. rafinare a partiției P dacă $P \subset Q$.

Spunem că Q este mai fină decât P.

Def: $[a,b]$ și $P=(x_0,\dots,x_n)$ o partiție a lui $[a,b]$.
Un sistem de puncte $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ s.n. sistem de puncte intermediare asociat partiției P dacă $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ $\forall\, i=\overline{1,n}$

Def: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $P=(x_0,\dots,x_n)$ partiție a lui $[a,b]$ și $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ sistem de puncte intermediare asociat lui P.

S.n. suma Riemann corespunzătoare lui f,P,ξ următorul nr. real $\sigma_P(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.

Def: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ s.n. integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă $\exists\, I_f\in\mathbb{R}$ a.î. $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall\, P$ partiție a lui $[a,b]$ cu $\|P\|<\delta_\varepsilon$ $\forall\,\xi$ pct. int. asociat lui P.

$$|I_f-\sigma_P(f,\xi)|<\varepsilon$$

Obs! Dacă $\exists\, I_f$ ca în def atunci el este unic.

Pp. $\exists\, I_f^1, I_f^2$ ca în def $\quad |I_f^1-I_f^2|\le|I_f^1-\sigma_P(f,\xi)|+$
$+|-I_f^2+\sigma_P(f,\xi)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$

Notație: I_f din def $\to \int_a^b f(x)\,dx$ integr. Riemann pe $[a,b]$

Ex: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^n}, & \text{dacă } \exists\, n\in\mathbb{N} \text{ a.î. } x=\frac{1}{n}\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$

este integr. Riemann pe $[0,1]$ și $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

$\forall P\ \forall\xi \quad 0\le\sigma_P(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\le$

$\le \|P\|\sum_{i=1} f(\xi_i) = 2\|P\|\sum_{i=1}\frac{1}{2^i} = 2\|P\|\to 0$

TEOREMĂ DE CARACTERIZARE A INTEGRABILITĂȚII CU AJUTORUL ȘIRURILOR DE SUME RIEMANN

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f este integrabilă Riemann
2) $\exists\, I_f\in\mathbb{R}$ (nr. real) a.î. $\forall\, P_n$ partiții ale lui $[a,b]$ cu $\|P_n\|\to 0$ și $\forall\,\xi_n$ sistem de pct. intermediare asociate lui P_n, $\sigma_{P_n}(f,\xi_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} I_f$.

Def: $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Spunem că f admite primitive pe I dacă $\exists\, F:I\to\mathbb{R}$ derivabilă a.î. $F'=f$.

În acest caz F s.n. o primitivă a lui f.

TEOREMĂ

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – integr. Riemann
– admite primitive

Atunci $\forall\, F$ o primitivă a lui f, avem
$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$.

TEOREMĂ

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă Riemann, atunci f este mărginită. Reciproca este falsă!

Suma Darboux superioară și inferioară

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită

Def: ~~Dacă $m_i = \inf$~~

Fix $P = (x_0, \dots, x_n)$ partiție a lui $[a,b]$ și

$m_i = \inf \{ f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

$M_i = \sup \{ f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

a) S.m. suma Darboux inferioară a lui f asociată partiției P:

$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

b) S.m. suma Darboux superioară a lui f asociată lui P

$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$

Obs! 1) P, Q partiții Q rafinare a lui P atunci
$L(f,P) \le L(f,Q) \le U(f,Q) \le U(f,P)$

2) P, Q partiții $L(f,P) \le U(f,Q)$

Proprietăți

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită, P partiție, ξ sistem de puncte intermediare asociat lui P

Atunci:

1) $L(f, P) \le \sigma_P(f, \xi) \le U(f, P)$

2) $L(f, P) = \inf \{ \sigma_P(f, \xi) ;\ \xi$ sis. pct. intermediare asociate lui $P \}$

$U(f, P) = \sup \{ \sigma_P(f, \xi) ;$ — " — $\}$

Integrala Darboux inferioară și superioară

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită

Def: a) S.m. integrala Darboux inferioară a lui f pe $[a,b]$.

$(L)\int_a^b f(x)\,dx = \sup \{ L(f,P);\ P$ partiție a lui $[a,b] \}$

b) S.m. integrala Darboux superioară a lui f pe $[a,b]$.

$(U)\int_a^b f(x)\,dx = \inf \{ U(f,P);\ P$ partiție a lui $[a,b] \}$

Obs! Există $(L)\int_a^b f(x)\,dx$, $(U)\int_a^b f(x)\,dx$ și sunt finite.

$(L)\int_a^b f(x)\,dx \le (U)\int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMA DE CARACTERIZARE A INTEGRABILITĂȚII RIEMANN CU AJUTORUL SUMELOR DARBOUX

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f este integr. Riemann pe $[a,b]$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon$ partiție a lui $[a,b]$ a.î.
$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Ex: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

nu este integr. Riemann.

$\forall P$ partiție $\quad U(f,P) = 1$
$\quad L(f,P) = 0$

TEOREMA DE CARACTERIZARE A INTEGRABILITĂȚII RIEMANN CU AJUTORUL INTEGRALELOR DARBOUX

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f este integr. Riemann pe $[a,b]$
2) $(U)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx$

În acest caz, $\int_a^b f(x)\,dx = (U)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMĂ

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

1) Dacă f este continuă, atunci f este integrabilă Riemann.

2) Dacă f este monotonă, atunci f este integrabilă Riemann.

<u>Permutarea limitei cu integrala</u>

TEOREMA DE CONVERGENȚĂ MĂRGINITĂ A INTEGR. R.

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ integr. Riemann

$\exists M > 0$ a.î. $|f_n(x)| \le M$, $\forall x \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Dacă $f_n \to f$ simplu pe $[a,b]$ și $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integr. Riemann, atunci $\int_a^b f(x)\,dx \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

TEOREMA DE CONVERGENȚĂ MONOTONĂ A INTEGRALEI RIEMANN

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann și monotone

$[$ De ex.: $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ $\forall n, \forall x]$

Dacă $f_n \to f$ simplu pe $[a,b]$ și $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integr. Riemann.

Atunci $\int_a^b f(x)\,dx \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

<u>Ex:</u> Calculați $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x \sin nx}{n^2 + nx^2 + x}\,dx$

$\left|\frac{x \sin nx}{n^2+nx^2+x}\right| \le \frac{x\,|\sin nx|}{n^2+nx^2+x} \le \frac{x}{n^2+nx^2+x} \le \frac{1}{n^2}$ $\forall n$, $\forall x \in [0,1]$

$M \to 1$, $\frac{1}{n^2} \to 0$

$f() : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 0$

$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

$f_n \xrightarrow{u} f$ pe $[0,1]$ $\longrightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ pe $[0,1]$

$\xRightarrow{T} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x\sin nx}{n^2+nx^2+x}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$.

Teoremele clasice ale calculului integral

TEOREMA FUNDAMENTALĂ A CALCULULUI INTEGRAL

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\exists\, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $F' = f$

2) $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b]$

TEOREMA DE MEDIE PT. INTEGR. RIEMANN

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann

$g(x) \geq 0, \ \forall x \in [a,b]$

Atunci $\exists\, c \in [a,b]$ a.î. $\int_a^b f(x) g(x)\,dx =$

$= f(c) \int_a^b g(x)\,dx$.

TEOREMA DE INTEGRARE PRIN PĂRȚI A INTEGR. RIEMANN

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile având derivatele integrabile Riemann.

Atunci $\int_a^b f'(x) g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x) g'(x)\,dx$.

TEOREMA DE SCHIMBARE A VARIABILEI

$g : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$

Pp. - g este de clasă C^1

- g' este > 0

- f este integrabilă Riemann

Atunci $(f \circ g) g' : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integr. Riemann și are loc $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ g) g'\,dx$.

COROLAR

$g : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad f : g([a,b]) \to \mathbb{R}$

Pp. - g de clasă C^1

- $g'(x) \neq 0 \ \forall x$

- f este integr. Riemann

Atunci $(f \circ g)|g'| : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann și are loc:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ g)(x) |g'(x)|\,dx$$

Ex: $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ cont a.î. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(n+x)\,dx = l \in \mathbb{R}$

Să se arate că

S.n.a.c. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx) = l$.

$\int_0^1 f(nx) = \frac{1}{n} \int_0^n f(y)\,dy = \frac{1}{n}\left(\int_0^1 f(y)dy + \int_1^2 f(y)dy + \ldots + \int_{n-1}^n f(y)\,dy\right)$

s.v. $nx = y$

$dx = \frac{1}{n} dy$

$k < y < k+1 \to 0 < \underbrace{y-k}_{z} < 1$

s.v. $z = y - k \qquad dz = dy$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\int_0^1 f(y)\,dy + \int_0^1 f(y+1)\,dy + \ldots + \int_0^1 f(y+n-1)\,dy\right) = (*)$

$\boxed{\text{Cesaro - Stolz}}$ $\{a_n\}, \{b_n\}$ b_n cresc, $b_n \to \infty$

$\to \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ (dacă cea de-a doua lim $\exists$)

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(y+n-1)\,dy = l$$

TEOREMA LUI TAYLOR CU RESTUL SUB FORMA INTEGRALĂ

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ clasă C^n. Atunci:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt.$$

DEM: $\frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{= (f^{(n-1)}(t))'}\,dt =$

$$= \frac{1}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{1}{(n-2)!} (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^b (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)\,dt$$

→ apoi se repetă procedura prin n pași

- **Integrale cu parametru**

$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$

$f: D \to \mathbb{R}$ continuă

Pp. că pt. $t \in [c,d]$ fixat $x \to f(x,t)$ este integr. Riemann $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$

Ce se poate spune despre F? Ce proprietăți are F?

TEOREMA DE CONTINUITATE A INTEGRALEI CU PARAMETRU

$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R};\ a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$

$f: D \to \mathbb{R}$ continuă

Fie $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$, $F: [c,d] \to \mathbb{R}$

Atunci F este continuă.

TEOREMA (derivabilitate a integralei cu parametru)

$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R};\ a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$

$f: D \to \mathbb{R}$ continuă

Fie $F: [c,d] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$

Pp. $\forall (x,t) \in D\ \exists \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ și $(x,t) \to \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ continuă

[f este de clasă C^1 în rap. cu a II-a variabilă]

Atunci F este derivabilă și $F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$.

TEOREMA (Formula lui Leibniz)

$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R};\ a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$

$f: D \to \mathbb{R}$ continuă

$\alpha, \beta: [c,d] \to [a,b]$ derivabile

Definim $\varphi: [c,d] \to \mathbb{R}$ $\varphi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx$

Pp. $\forall (x,t) \in D\ \exists \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ și $(x,t) \to \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ continuă

Atunci φ este derivabilă și $\varphi'(t) = f(\beta(t),t)\beta'(t) -$
$- f(\alpha(t),t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \leftarrow dt$

Ex: $g(t) = \int_a^t f(x, t)\, dx$ (x (constantă)) f cont. și de clasă C^1 în rap. cu variabila a 2-a

$$g'(t) = f(t, t) + \int_a^t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dt$$

TEOREMA DE INVERSARE A ORDINII DE INTEGRARE

(Teorema lui Fubini)

$\Delta = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$

$f : \Delta \to \mathbb{R}$ continuă

Atunci $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t)\, dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t)\, dx \right) dt$

13. 12. 2023

Curs 10

Integrala improprie

- Cazul funcțiilor nemărginite

$f : \Delta \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad (a, b] \subset \Delta$

$\forall c \in (a, b]$ f este integrabilă Riemann pe $[c, b]$,

i.e. $\exists\ I_c = \int_c^b f(x)\, dx$.

Def: Dacă $\exists\ I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î.

$|I - I_c| < \varepsilon \quad \forall c \in (a, a + \delta_\varepsilon)$.

Spunem că I este integrala improprie a lui f pe $(a, b]$

Notație: $I = \int_{a_+}^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{c \to a \\ c > a}} \int_c^b f(x)\, dx$

Analog dacă $[a, b) \subset \Delta$ $\quad \int_a^{b-} f(x)\, dx = \lim_{\substack{c \to b \\ c < b}} \int_a^c f(x)\, dx$

Ex: 1) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \ln \frac{1}{x}$ este integrabilă improprie pe $[0, 1]$

2) $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ nu este integrabilă improprie pe $[0, 1]$

- Cazul domeniilor nemărginite

$f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe orice interval $[a, c]$, i.e. $\exists\ I_c = \int_a^c f(x)\, dx$.

Def: Dacă $\exists$ un număr real $I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$ și $|I - I_c| < \varepsilon \quad \forall c \ge K_\varepsilon$.

Spunem că I este integrala improprie a lui f pe $[a, \infty)$.

Notație: $I = \int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\, dx$

Analog $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ $\quad \int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^a f(x)\, dx$.

Ex: 1) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^{-x}$

$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$

2) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^{-1}$ nu există integrala improprie pe $(0, \infty)$

CRITERII DE EXISTENȚĂ A INTEGRALELOR IMPROPRII

TEOREMA (Criteriul lui Cauchy)

$f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$. Pp. că f este integrabilă Riemann pe $[a, c]$ $\forall c > a$

Atunci următoarele afirmații sunt echivalente

1) $\exists \int_a^\infty f(x)\, dx$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ K_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\left| \int_c^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon$, $\forall\ b \ge c > K_\varepsilon$

TEOREMĂ (Criteriul pentru funcții pozitive)

$f : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+$ Pp că f este integrabilă Riemann pe $[a, c]$ $\forall\, c \geq a$.

Următoarele afirmații sunt echivalente în acest caz:

1) $\exists \int_a^\infty f(x)\, dx$

2) Mulțimea $\left\{ \int_a^c f(x)\,dx,\ c > a \right\}$ este mărginită

În acest caz $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx = \sup\limits_{c \geq a} \int_a^c f(x)\,dx$

TEOREMĂ (Criteriul comparației cu inegalități)

$f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ Pp. că f și g sunt integrabile Riemann pe $[a, c)$ $\forall\, c > a$.

Pp. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall\, x \in [a, \infty)$

Atunci dacă $\exists \int_a^\infty g(x)\,dx$ va exista și $\int_a^\infty f(x)\,dx$ și $\int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$.

TEOREMĂ (Criteriul comparației raportului)

$f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+$ Pp. că f și g sunt integrabile Riemann pe $[a, c]$, $\forall\, c > 0$.

Pp. că 1) $\exists \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$

2) $g(x) > 0$, $\forall\, x \in [a, \infty)$

Atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ și $\int_a^\infty g(x)\,dx$ au aceeași natură

[fie, simultan, există amândouă, fie nu există în același timp]

TEOREMĂ (Criteriul lui Dirichlet)

$f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$

1. f este continuă
2. $\exists\, M > 0$ a.î. $\left| \int_a^c f(x)\,dx \right| \leq M$ $\forall\, c \geq a$
3. g este o funcț. descrescătoare
4. $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$

Atunci $\exists \int_a^\infty f(x) \cdot g(x)\,dx$

Ex: 1. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ $\quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{t \to \infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$= \lim\limits_{t \to \infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}$

2. Să se studieze natura lui $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$

$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \int_t^1 \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2} \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{1}{x^2} \Big|_t^1 =$

$= \infty$ Divergentă

3. $\int_0^\infty \sin t\,dt$ divergentă

$\int_0^x \sin t\,dt = -\cos t \Big|_0^x = 1 - \underbrace{\cos x}$ nu există limita $\to$ divergenta

4. $\int_2^\infty \frac{\sin t + \cos t}{t \ln t}\,dt$ este convergentă

$g(t) = \frac{1}{t \ln t} \searrow$ $\quad \lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0$

$f(t) = \sin t + \cos t$ $\quad f$ cont

$\left| \int_2^x f(t)\,dt \right| = \left| \int_2^x (\sin t + \cos t)\,dt \right| = \left| \cos 2 - \cos x + \sin x - \sin 2 \right| \leq 4$ $\forall\, x$

Crit. Dirichlet $\to$ OK.

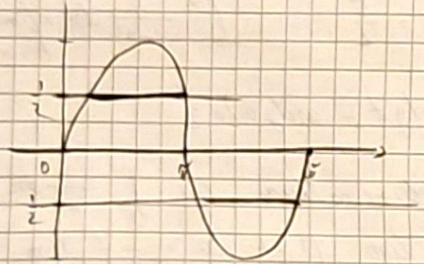
Def: $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$

Dacă $\exists \int_a^\infty |f(x)|\,dx$ vom spune că f este integrabilă impropriu absolut.

sau spunem că $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge absolut.

Ex: $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}$ $\exists$, dar nu converge absolut.

Existența $\to$ Criteriul lui Cauchy
$\left(f(x)=\sin x,\ g(x)=\frac{1}{x}\right)$



$\forall k\in\mathbb{N}$ $\exists J_k$ un interval de lungime $l>0$ a.î.
$J_k\subset[k\pi,(k+1)\pi]$ și $|\sin x|>\frac{1}{2}$ $\forall x\in J_k$

$$\int_\pi^{k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \ge \int_\pi^{2\pi}\frac{|\sin x|}{|x|}dx+\dots+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{|x|}\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}+\dots+\frac{1}{k\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)}_{\to\infty}$$

Integrala improprie cu parametru

$f:[a,\infty)\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ Pp. $\exists F(t)=\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$

Def: Spunem că integrala converge uniform în raport cu $t\in[\alpha,\beta]$ dacă $\forall \varepsilon>0$, $\exists k_\varepsilon\in\mathbb{R}$ a.î.
$\left|F(t)-\int_a^c f(x,t)\,dx\right|<\varepsilon$ $\forall c\ge k_\varepsilon$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$

Criterii de convergență uniformă pentru integrala improprie cu parametru

TEOREMĂ (Criteriul lui Cauchy)

$f:[a,\infty)\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ Pp $\exists F(t)=\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) Convergența este uniformă
2) $\forall\varepsilon>0$ $\exists k_\varepsilon\in\mathbb{R}$ a.î. $\left|\int_c^b f(x,t)\,dx\right|<\varepsilon$ $\forall b,c>k_\varepsilon$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$

TEOREMĂ (Criteriul lui Weierstrass)

$f:[a,\infty)\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ $M:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$

Pp. 1) $x\longmapsto f(x,t)$ este integrabilă Riemann pe $[a,c]$ $\forall c>a$

2) $|f(x,t)|\le M(x)$ $\forall x\in[a,\infty)$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$

3) $\exists\int_a^\infty M(x)\,dx$

Atunci $\exists F(t)=\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ și convergența uniformă. (în raport cu t)

TEOREMĂ (Criteriul lui Dirichlet)

$f, g : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$,

Pp. 1) f este continuă

2) $\exists M > 0$ (constantă) a.î. $\left|\int_a^c f(x,t)\,dx\right| \le M \quad \forall c > a$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$

3) $x \longmapsto g(x,t)$ este descrescătoare $\forall t \in [\alpha, \beta]$

4) $x \longmapsto g(x,t)$ este convergentă la 0 uniform în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$

[$\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $0 \le g(x,t) < \varepsilon$ $\forall x \ge k_\varepsilon$ și $\forall t \in [\alpha, \beta]$]

Ex: 1) $\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx$ convergentă uniformă în raport cu t

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1} \sin(x)\,dx$ convergentă uniformă în rap. cu $t \in [\gamma, \infty)$, $\forall \gamma > 0$

- **Regularitatea pentru integrala improprie cu parametru**

$f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ continuă a.î. $\exists$
$F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\,dx$

? $F()$ cont ? $F()$ derivabilă

TEOREMĂ (Continuitatea a integralei imp. cu parametru)

$f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ continuă

Pp $\exists$ $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\,dx$ și convergența este uniformă

Atunci $F()$ continuă.

TEOREMĂ (Inversarea ordinii de integrare pt integrala improprie cu parametru)

$f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ continuă

Pp. $\exists$ $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\,dx$ și convergența este unif.

Atunci $\int_a^\infty \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt \right) dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^\infty f(x,t)\,dx \right) dt$.

TEOREMĂ (Derivabilitatea integralei imp. cu param.)

$f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

Pp. 1. f este continuă

2. $\exists \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$, $\forall x$ și $(x,t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ cont.

3. $\exists$ $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\,dx$

4. $\exists$ $G(t) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt$ și convergența uniformă

Atunci $F()$ este derivabilă și $F'(t) = \int_a^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ cu convergență uniformă.

ȘIRURI CU INTEGRALE IMPROPRII

$f_n : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow{s} f$ simplu (punctual) $\Rightarrow$? $\int_a^\infty f(x)\,dx$

TEOREMĂ DE CONVERGENȚĂ MONOTONĂ

$f_n : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$

Pp. 1. $f_n \to f$ simplu

2. $\{f_n\}_n$ șir mărginit punctual și crescător

3. $\exists \int_a^\infty f_n(x)\,dx$

Atunci va $\exists \int_a^\infty f(x)\,dx \Longleftrightarrow \left\{ \int_a^\infty f_n(x)\,dx \right\}_n$ șir mărginit.

În acest caz $\int_a^\infty f(x)\,dx \left(= \int_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)\,dx$

TEOREMA DE CONVERGENȚĂ DOMINATĂ pt. șiruri de integrale improprii

$f_n : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $M : [a,\infty) \to \mathbb{R}$

Pp. că 1. f_n și f sunt integrabile Riemann pe $[a,c]$, $\forall c > a$, $\forall n \ge 1$

2. $f_n \to f$ simplu

3. $|f_n(x)| \le M(x) \quad \forall x \in [a,\infty) \ \forall n \ge 1$

4. $\exists \int_a^\infty M(x)\,dx$

Atunci 1. $\exists \int_a^\infty f_n(x)\,dx$ și $\exists \int_a^\infty f(x)\,dx$

2. $\int_a^\infty f(x)\,dx \left(= \int_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)\,dx$

- $\boxed{\text{Integrale improprii iterate}}$

$f : [a,\infty) \times [b,\infty) \to \mathbb{R}$ continuă

TEOREMA de inversare a ordinii de integrare pt. integrale improprii iterate

$f : [a,\infty) \times [b,\infty) \to \mathbb{R}$ continuă

$M : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $N : [b,\infty) \to \mathbb{R}$

$|f(x,t)| \le M(x) \cdot N(t) \quad \forall x \in [a,\infty) \ \forall t \in [b,\infty)$

$\exists \int_a^\infty M(x)\,dx$ și $\exists \int_b^\infty N(t)\,dt$.

Atunci:

1. $\exists \int_a^\infty \left(\int_b^\infty f(x,t)\,dt \right) dx$ și $\exists \int_b^\infty \left(\int_a^\infty f(x,t)\,dx \right) dt$

2. $\int_a^\infty \left(\int_b^\infty f(x,t)\,dt \right) dx = \int_b^\infty \left(\int_a^\infty f(x,t)\,dx \right) dt$

Funcțiile GAMMA și BETA

Funcția Gamma (a lui Euler) $\to$ 1730

$\to$ generalizare a noțiunii de factorial

$\to$ probabilități, statistică, combinatorică

$\to$ derivate fracționale

Def: $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\,dt$$

TEOREMA (Proprietățile funcției gamma)

1) $\Gamma(1) = 1$

2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

3) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x \in (0,\infty) \quad (\to \Gamma(n+1) = (n+1)!)$

4) $\Gamma(2x) = \pi^{-\frac{1}{2}}\, 2^{2x-1}\, \Gamma(x)\, \Gamma(x + \frac{1}{2})$

5) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \cdot \Gamma(x) = 1 \quad (\to \Gamma()$ nu e mărginită$)$

6) $\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{x^a\,\Gamma(x)} = 1 \quad \forall a \in (0,\infty)$

7) Γ este de clasă C^∞

8) Γ este o funcție convexă $[\Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda \Gamma(x) + (1-\lambda)\Gamma(y)]$ $\lambda \in (0,1)$, $\forall$ ~~x, y~~

Def: $B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ (f. beta)

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\,dt$$

TEOREMA (Proprietățile funcției beta)

1. $B(x,y) = B(y,x) \quad \forall x,y \in (0,\infty)$
2. $B(x,y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t \cdot \cos^{2y-1} t\,dt$
3. $B(x,y) = \int_0^\infty u^{x-1} \cdot \frac{1}{(1+u)^{x+y}}\,du \quad \forall x,y \in (0,\infty)$

TEOREMĂ (Legătura dintre f. gamma și beta)

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \forall\, x,y \in (0,\infty)$$

20.12.2021

Curs 11

Măsura Jordan

Camille Jordan (1838-1922)

Def: a) O mulțime $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ s.n. interval închis n-dimensional.

$[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ s.n. laturile lui I

b) Dacă considerăm următoarele partiții:

$a_1 = x_1^1 < x_2^1 < \ldots < x_{m_1}^1 = b_1 \rightarrow P_1(\mathcal{J})$

$a_2 = x_1^2 < x_2^2 < \ldots < x_{m_2}^2 = b_2 \rightarrow P_2(\mathcal{J})$

- - - - - - - - - - -

$a_n = x_1^n < x_2^n < \ldots < x_{m_n}^n = b_n \rightarrow P_n(\mathcal{J})$

generează o familie de intervale închise n-dimensionale de forma:

$[x_{k_1-1}^1, x_{k_1}^1] \times \ldots \times [x_{k_n-1}^n, x_{k_n}^n] \quad k_i = \overline{1, m_i} \quad i = \overline{1,n}$

generează o partiție a lui I.

Notăm cu $\mathcal{J} = \{I_1, \ldots, I_p\}$ (S nomd)

c) Dacă $\mathcal{J} = \{I_1, \ldots, I_p\}$ partiție a lui I, partițiile intervalelor reale $[a_i, b_i]$ le notăm cu $P_i(\mathcal{J})$, $i = \overline{1,n}$.

Dacă avem $\mathcal{J}, \mathcal{H}$ două partiții a lui I, spunem că $\mathcal{J}$ este mai fină (sau este o rafinare) a lui $\mathcal{H}$ dacă $P_i(\mathcal{J})$ este mai fină decât $P_i(\mathcal{H})$ $\forall\, i = \overline{1,n}$.

Def: $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ ← V nomd

Definim volumul lui I $\mathcal{V}(I) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$

Def: $I \subset \mathbb{R}^n$ interval închis n-dimensional, $\mathcal{J} = \{I_1, \ldots, I_p\}$ o partiție a sa.

$E \subset \mathbb{R}^n$ mulțime $E \subseteq I$

a) S.n. suma exterioară a lui E corespunzătoare partiției $\mathcal{J}$

$$V_e(E, \mathcal{J}) = \sum_{\substack{i \\ I_i \cap \bar{E} \neq \emptyset}} V(I_i)$$

b) S.n. suma interioară a lui E corespunzătoare partiției $\mathcal{J}$

$$V_i(E, \mathcal{J}) = \sum_{\substack{i \\ \mathring{E} \subseteq I_i}} V(I_i)$$

Obs! 1. $V_e(E, \mathcal{J}) - V_i(E, \mathcal{J}) = V_e(\partial E, \mathcal{J})$

$\partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E}$ (frontiera mulțimii)

2. $\mathcal{J}, \mathcal{H}$ partiții arbitrare ale lui I

$V_i(E, \mathcal{J}) \leq V_e(E, \mathcal{H})$

3. Dacă se rafinează partiția, atunci

- suma interioară crește
- suma exterioară descrește

Def: $I \subset \mathbb{R}^n$, interval închis n-dimensional
$E \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{E} \subset I$

a) S.n. măsura Jordan exterioară a lui E
$\mu^*(E) = \inf_{\mathcal{P}} \{ V_e(E, \mathcal{P}),\ \mathcal{P} \text{ partiție a lui } I \}$

b) S.n. măsura Jordan interioară a lui E
$\mu_*(E) = \sup \{ V_i(E, \mathcal{P}),\ \mathcal{P} \text{ partiție a lui } I \}$

Obs! 1. $0 \le \mu_*(E) \le \mu^*(E)$
2. $\mu_*(E)$, $\mu^*(E)$ nu depind de I!

Def: $E \subset \mathbb{R}^n$ mărginită s.n. măsurabilă Jordan dacă
$\mu_*(E) = \mu^*(E)$.

În acest caz $\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E)$ s.n.
măsură Jordan a lui E.

Obs! Dacă $I \subset \mathbb{R}^n$ interval închis n-dimensional,
atunci $\mu(I) = V(I)$

Def: a) Familia de mulțimi $\{E_p\}_p$, $E_p \subset \mathbb{R}^n$ s.n.
familie de mulțimi disjuncte dacă $E_p \cap E_q = \emptyset$,
$\forall p, q \ge 1$, $p \ne q$.

b) Familia de mulțimi măsurabile Jordan
$\{E_p\}_p$, $E_p \subset \mathbb{R}^n$ s.n. familie nesuprapusă de
mulțimi măsurabile Jordan dacă $\mu(E_p \cap E_q) = 0$,
$\forall p, q \ge 1$

Obs! 1. Orice familie de mulțimi măsurabile Jordan
disjunctă este o familie de mulțimi măsurabile
Jordan nesuprapuse. Reciproca este falsă.

2. Dacă $E \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan a.î. $\mu^*(E) = 0$
atunci $\mu(E) = 0$.

3. Dacă $E \subset \mathbb{R}^n$ pt care $\mu^*(E) = 0$, atunci
$\forall E_0 \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan $E_0 \subset E$, atunci
$\mu(E_0) = 0$.

TEOREMA 1.
$E \subset \mathbb{R}^n$ mărginită
Atunci E măsurabilă Jordan $\Leftrightarrow \mu(\partial E) = 0$.
(la măs. J., frontiera nu contează)

TEOREMA 2. (de caracterizare a mulțimilor de măsură
Jordan nulă)
$E \subset \mathbb{R}^n$ mărginită
Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
1) E măsurabilă Jordan și $\mu(E) = 0$
2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{I_1, I_2, \dots, I_p\}$ intervale închise n-dimensionale a.î. $\bar{E} \subset \bigcup_{j=1}^{p} I_j$ și $\sum_{j=1}^{p} V(I_j) < \varepsilon$.

TEOREMA 3.
$E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ măsurabile Jordan
Atunci $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$ măsurabile Jordan și
1. $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2)$
În particular $\to \mu(E_1 \cup E_2) \le \mu(E_1) + \mu(E_2)$
$\to$ dacă $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$

2. $E_1 \subseteq E_2$ $\quad \mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1)$
În particular $E_1 \subseteq E_2$, atunci $\mu(E_1) \le \mu(E_2)$

Def. $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$

$x + E = \{y;\ \exists\ z \in E$ a.î. $y = x + z\}$

$\alpha E = \{y;\ \exists\ z \in E$ a.î. $y = \alpha z\}$

TEOREMA 4.

$E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$

Atunci: 1. E este măsurabilă Jordan $\Leftrightarrow$ $x+E$ este măsurabilă Jordan și $\mu(x+E) = \mu(E)$.

2. E este măsurabilă Jordan $\Leftrightarrow$ αE este măsurabilă Jordan și $\mu(\alpha E) = \alpha^n \mu(E)$.

TEOREMA 5. (Transportul mulțimilor măsurabile Jordan)

$f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \Delta = \mathring{\Delta}$, Δ - mărginită $\quad E \subset \Delta$ măsurabilă Jordan

f este injectivă de clasă C^1 și $\det(J_f(x)) \neq 0$ $\forall x \in \Delta$. (mat. jacobi)

$f: \Delta \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

Atunci $f(E) \subseteq \mathbb{R}^n$ este măsurabilă Jordan.

COROLAR: $f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Δ mărginită f injectivă

1. Dacă $E \subset \Delta$ a.î. $\mu(E) = 0$, atunci $\mu(f(E)) = 0$.

2. Dacă f este de clasă C^1 și $\det(J_f(x)) \neq 0$ $\forall x \in \Delta$ și $\{E_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ o familie de mulțimi măsurabile Jordan nesuprapuse, atunci $\{f(E_p)\}_{p \in \mathbb{N}}$ este o familie de mulțimi măsurabile Jordan nesuprapuse.

Mai general (EXTINDERE)

$X \neq \emptyset$ $\quad P(X) = \{A, A \subset X\}$

Def. $\mathcal{A} \subset P(X)$ $\mathcal{A} \neq \emptyset$ s.n. inel de mulțimi dacă verifică următoarele 2 condiții:

1. $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ [o fam. de mulțimi]
2. $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$

Def. $\mathcal{A}$ - inel de mulțimi

O funcție $m: \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ s.n. o măsură pe $\mathcal{A}$ dacă $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$, $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Obs! $J(\mathbb{R}^n) = \{E \subset \mathbb{R}^n;\ E$ măsurabilă Jordan$\}$

Atunci $J(\mathbb{R}^n)$ este un inel de mulțimi și măsura Jordan $\mu: J(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ este o măsură.

Def. $m: J(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty)$ măsură s.n. invariantă la translații dacă:

$m(E) = m(x + E)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall E \in J(\mathbb{R}^n)$

Obs! Măsura Jordan μ este invariantă la translații.

TEOREMA 1 (inel / fam. de mulțimi)

$m: J(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ o ~~mulțime~~ măsură invariantă la translații; $m(A_1 \cup \dots \cup A_p) = m(A_1) + \dots + m(A_p)$ $\forall \{A_1, \dots, A_p\}$ nesuprapuse. (aditivitate)

Atunci $\exists\ \alpha > 0$ a.î. $m(E) = \alpha \cdot \mu(E)$, $\forall E \in J(\mathbb{R}^n)$

[măs. J generează $\forall$ altă măsură]

Obs! $\alpha = m([0,1]\times\ldots\times[0,1])$ (α = mărime)

TEOREMĂ 2

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ liniară și bijectivă

Atunci:

1. Dacă $E \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan, atunci $f(E) \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan.
2. $\exists\, \alpha_f \in \mathbb{R}$ a.î. $\mu(f(E)) = \alpha_f\, \mu(E)$, $\forall\, E \subset J(\mathbb{R}^n)$

Obs! $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ f liniară și bijectivă s.n. izomorfism (operatori liniari ← vezi)

$f \longrightarrow A_f$ $\qquad \alpha_f = \det(A_f)$

Obs! (Demonstrație TEOREMĂ 1)

PROP: $g: (0,\infty)\times(0,\infty)\times\ldots\times(0,\infty) \to [0,\infty)$ a.î. $\forall\, j = \overline{1,n}$, $h(x_j) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este aditivă $[h(x+y) = h(x) + h(y)\ \forall x,y]$

Atunci $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $g(x_1, \ldots, x_n) = \alpha x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (0,\infty)\times\ldots\times(0,\infty)$

Obs! $\alpha = g(1,1,\ldots,1)$

Dem: inducție după n.

$n=1$ $\quad g: (0,\infty) \to [0,\infty)$ $\quad g(x+y) = g(x) + g(y)\ \forall x,y$

Inducție după p $\quad g(px) = p\,g(x)\ \forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{p} g(px) \overset{x=\frac{1}{p}}{=} g(\frac{1}{p}) = \frac{1}{p} g(1)\ \forall p \in \mathbb{N}$

$g(\frac{m}{p}) = m\, g(\frac{1}{p}) = \frac{m}{p} g(1)$

$\forall\, r \in \mathbb{Q}$ $\quad g(r) = r\, g(1)$

g este crescătoare $\quad g(x) = g(y) + \underbrace{g(x-y)}_{\geq 0}\ \forall x \geq y$

$g(x) \geq g(y)\quad \forall x \geq y$

$x \in (0,\infty)$ $\quad \exists\, r \in \mathbb{Q}$ a.î. $r \leq x$ $\quad g(r) \leq g(x)$

$r\,g(1) \leq g(x)$

$\exists\, r \in \mathbb{Q}$ a.î. $r \geq x$ $\quad g(r) \geq g(x)$ $\quad r\,g(1) \geq g(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = x\, g(1)$

$r \to x$

$n-1 \longmapsto n$

$f(x_1) = g(x_1, \ldots, x_n)$

$f(x_1) = x_1 f(1) = x_1 \underbrace{g(1, x_2, \ldots, x_n)}$

$\qquad \overset{\shortparallel}{G(x_2, \ldots, x_n)}$ ip. inducție

$G(x_2, \ldots, x_n) = G(1, \ldots, 1)\, x_2 \ldots x_n =$

$= g(1, \ldots, 1)\, x_2 \ldots x_n$

$\underline{g(x_1, \ldots, x_n)} = f(x_1) = x_1 \cdot g(1, \ldots, 1)\, x_2 \ldots x_n =$

$= \underbrace{g(1, \ldots, 1)}_{\alpha}\, x_1 \ldots x_n$

20.01.2024

Curs 12

Integrala Riemann pe $\mathbb{R}^m$

Def: $E \subset \mathbb{R}^m$ măsurabilă Jordan $E \subset I$, I - interval închis m-dimensional

$\mathcal{Y} = \{I_1, \dots, I_p\}$ partiție a lui I

$f : E \to \mathbb{R}$ mărginită (f extinsă cu 0 (zero) în afara lui E)

a) S.m. suma inferioară a lui f corespunzătoare $\mathcal{Y}$

$L(f, \mathcal{Y}) = \sum_{i=1}^{p} m_i \, v(I_i)$ $\quad m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$

b) S.m. suma superioară a lui f corespunzătoare lui $\mathcal{Y}$

$U(f, \mathcal{Y}) = \sum_{i=1}^{p} M_i \, v(I_i)$ $\quad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$

c) S.m. integrala inferioară a lui f pe E

$(L)\int_E f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{Y} \subset I \text{ partiție}} L(f, \mathcal{Y})$

d) S.m. integrala superioară a lui f pe E

$(U)\int_E f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{Y} \subset I \text{ partiție}} U(f, \mathcal{Y})$

Obs! 1. $\mathcal{Y}, \mathcal{H}$ partiții ale lui I

$L(f, \mathcal{Y}) \le U(f, \mathcal{H})$

2. $\exists\, (L)\int_E f(x)\,dx$, $\exists\, (U)\int_E f(x)\,dx$ sunt independente de I

$(L)\int_E f(x)\,dx \le (U)\int_E f(x)\,dx$

Def: $f : E \to \mathbb{R}$ mărginită, $E \subset \mathbb{R}^m$ măsurabilă Jordan s.m. integrabilă (Riemann) pe E dacă

$(L)\int_E f(x)\,dx = (U)\int_E f(x)\,dx$

În acest caz $\int_E f(x)\,dx = (L)\int_E f(x)\,dx = (U)\int_E f(x)\,dx$ s.m. integrala (Riemann) a lui f pe E.

Notație: $m = 2$ $\quad \int_E f(u)\,du = \iint_E f(x,y)\,dx\,dy$

(s.m. integrala dublă)

$m = 3$ $\quad \int_E f(u)\,du = \iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

(s.m. integrala triplă)

TEOREMA 1.

$E \subset \mathbb{R}^m$ măsurabilă Jordan, $f : E \to \mathbb{R}$ integrabilă

Fie $g : I \to \mathbb{R}$, $E \subset I$, I interval închis m-dimensional

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Atunci g este integrabilă și $\int_I g(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$

DEM: luăm pe E și I submulțimi ale lui $I \Rightarrow$

$\Rightarrow L(f, \mathcal{Y}) = L(g, \mathcal{Y})$, $U(f, \mathcal{Y}) = U(g, \mathcal{Y})$ $\Rightarrow (U)\int_E f(x)\,dx = (U)\int_E g(x)\,dx$, $(L)\int_E f(x)\,dx = (L)\int_E g(x)\,dx$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ q.e.d.

TEOREMA 2

$E \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan, $E \subset I$, I interval închis n-dimensional

$f : E \to \mathbb{R}$ mărginită

Atunci $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathcal{J}_\varepsilon$ partiție a lui I a.î. $\forall$

$\mathcal{J} = \{I_1, \dots, I_p\}$ partiție a lui I mai fină decât $\mathcal{J}_\varepsilon$ a.î.

$$\left| (L)\int_E f(x)\,dx - \sum_{I_i \subset \overset{\circ}{E}} m_i\, v(I_i) \right| < \varepsilon \qquad m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$$

$i = \overline{1,p}$

$$\left| (U)\int_E f(x)\,dx - \sum_{I_i \subset E} M_i\, v(I_i) \right| < \varepsilon \qquad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$$

COROLAR

$E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$ mărginită

Dacă $\overset{\circ}{E} = \emptyset$, atunci f este integrabilă pe E și $\int_E f(x)\,dx = 0$.

TEOREMA 3

$E \subset \mathbb{R}^n$, măsurabilă Jordan, E închisă

$f : E \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este integrabilă pe E.

TEOREMA 4 (de caracterizare a măsurii Jordan cu ajutorul integralei Riemann)

$E \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan, E închisă

Atunci $\overset{\text{măsura lui } E}{\mu(E)} = \int_E 1\,dx$

EX: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall r > 0$

$$\mu(B(x,r)) = \frac{2r^n \pi^{\frac{n}{2}}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Obs! $n = 1 \to$ lungimea intervalului $(x-r, x+r)$

$$\frac{2r\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 2r \qquad \left(\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\right)$$

$n = 2 \to$ aria discului de rază r

$$\frac{2r^2\pi^{\frac{2}{2}}}{2\Gamma(1)} = \pi r^2 \qquad (\Gamma(1) = 1)$$

$n = 3 \to$ volumul sferei de rază r

$$\frac{2r^3\pi^{\frac{3}{2}}}{3\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2r^3\pi^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \left(\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\right)$$

TEOREMA 5

$E \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan

$f, g : E \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Dacă f și g sunt integrabile pe E, atunci $f+g$, αf sunt integrabile pe E.

$$\int_E (f+g)(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx;$$

$$\int_E (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_E f(x)\,dx.$$

2. Dacă $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ măsurabile Jordan și nesuprapuse și dacă f este integrabilă pe E_1 și f integrabilă pe E_2, atunci f este integrabilă pe $E_1 \cup E_2$ și $\int_{E_1 \cup E_2} f(x)\,dx =$
$= \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx.$

TEOREMA 6

$E \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan, $f, g : E \to \mathbb{R}$ mărginite

Atunci:

1. Dacă $E_0 \subset E$ a.î. $\mu(E_0) = 0$, atunci g este integrabilă pe E_0 și $\int_{E_0} g(x)\,dx = 0$.

2. Dacă $\{x \in E;\ f(x) \neq g(x)\}$ este de măsură Jordan nulă și dacă f este integrabilă pe E, atunci și g integrabilă pe E și $\int_E g(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$.

DEM: 1. $E_0 \subset E$ a.î. $\mu(E_0) = 0$

Dacă $\mu(E_0) = 0 \to \mathring{E}_0 = \emptyset \to$ Corolar $\to$ OK

Pp $\exists\, x \in \mathring{E}_0 \to \exists\, r > 0$ a.î. $B(x, r) \subset E_0$

Aleg $I \subset B(x, r)$ I interval închis n-dimensional

$0 < \mu(I) < \mu(B(x, r)) \le \mu(E_0) = 0$ $\not\!\!\!\alpha$ $\square$

2. Fie $E_0 = \{x \in E;\ f(x) \neq g(x)\}$ $\mu(E_0) = 0 \overset{1}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow g$ integrabilă pe E_0, $\int_{E_0} g(x)\,dx = 0 = \int_{E_0} f(x)\,dx$.

$E = E_0 \cup (E \setminus E_0)$ $\quad E_0 \cap (E \setminus E_0) = \emptyset \to$

$\to E_0, E \setminus E_0$ nesuprapuse $\to$ TS

$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_0} f(x)\,dx + \int_{E \setminus E_0} f(x)\,dx = 0 + \int_{E \setminus E_0} g(x)\,dx =$

$= \int_{E_0} g(x)\,dx + \int_{E \setminus E_0} g(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx.$

Obs! Se poate vorbi de $f : E \to \mathbb{R}$ integrabilă, fără ca f să fie definită pe E, f definită pe $E_1 \subset E$, dar $E \setminus E_1$ cu măsura Jordan nulă.

TEOREMA 7

$E \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan

$f, g : E \to \mathbb{R}$ integrabile pe E

Atunci:

1. Dacă $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in E$ atunci $\int_E f(x)\,dx \le \int_E g(x)\,dx$.

2. Dacă $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in E$, atunci

$m\,\mu(E) \le \int_E f(x)\,dx \le M\,\mu(E)$.

TEOREMA 8.

$E \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan $\quad f, g : E \to \mathbb{R}$ integrabile mărginite

$g(x) \ge 0$, $\forall x \in E$

Atunci:

1. $\exists\, c \in [\inf_{x \in E} f(x), \sup_{x \in E} f(x)]$ a.î. $\int_E f(x) g(x)\,dx = c \int_E g(x)\,dx$.

2. $\exists\, c \in [\inf_{x \in E} f(x), \sup_{x \in E} f(x)]$ a.î. $\int_E f(x)\,dx = c\,\mu(E)$.

DEM: 1. $f(x) g(x) \le \sup_{x \in E} f(x) \cdot g(x)$ $\quad \forall x \in E$

$f(x) g(x) \ge \inf_{x \in E} f(x) \cdot g(x)$

$\inf_{x \in E} f(x) \int_E g(x)\,dx \le \int_E f(x) g(x)\,dx \le \sup_{x \in E} f(x) \int_E g(x)\,dx$

Dacă $\int_E g(x)\,dx = 0 \to \int_E f(x) g(x)\,dx = 0 \to$ OK.

Dacă $\int_E g(x)\,dx \neq 0$. Aleg $c = \dfrac{\int_E f(x) g(x)\,dx}{\int_E g(x)\,dx}$ $\square$

TEOREMA 9

$E \subset \mathbb{R}^m$ măsurabilă Jordan

$f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ $\quad f : E \to \mathbb{R}$ integrabile

Dacă $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$ (uniform), atunci $\displaystyle\int_E f(x)\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx$.

TEOREMA 10

$f : V = \mathring{V} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, f continuă

Dacă $\displaystyle\int_E f(x)\,dx = 0$ $\quad \forall E \subset V$ măsurabilă Jordan,

atunci $f(x) = 0$ $\quad \forall x \in V$

TEOREMA LUI FUBINI (de permutare a unei integrări)

TEOREMA

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

Pp. 1. $x \longrightarrow f(x,y)$ este integrabilă pe $[a,b]$, pentru orice $y \in [c,d]$

2. $y \longrightarrow f(x,y)$ este integrabilă pe $[c,d]$, pentru orice $x \in [a,b]$.

3. f este integrabilă pe $[a,b] \times [c,d]$.

Atunci: a) $x \longrightarrow \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ este integrabilă pe $[a,b]$

b) $y \longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ este integrabilă pe $[c,d]$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Obs! Dacă f este continuă, atunci ipotezele teoremei sunt satisfăcute. (vezi Teorema schimbare de la integrabilitatea pe $\mathbb{R}$)

Def: $E \subset \mathbb{R}^m$ (mulțime/domeniu) s.n. simplă în raport cu axa Ox_j ($j = \overline{1,m}$) dacă $\exists H \subset \mathbb{R}^{m-1}$ compactă (închisă și mărginită) și măsurabilă Jordan dacă $\exists \varphi_1, \varphi_2 : H \to \mathbb{R}$ a.î.

$E = \{ (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m;$
$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m) \in H$ și
$\varphi_1(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m) \leq x_j \leq \varphi_2(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m) \}$

Vom spune că E este generată de H, φ_1, φ_2.

TEOREMA lui Fubini

$E \subset \mathbb{R}^m$ simplă în raport cu axa Ox_j și generată de H, φ_1, φ_2.

$f : E \to \mathbb{R}$ continuă

Atunci: 1. E este măsurabilă Jordan

2. $$\int_E f(x)\,dx = \int_H \left(\int_{\varphi_1(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m)}^{\varphi_2(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m)} f(x_1, \ldots, x_m)\,dx_j \right) dx_1 \ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1} \ldots dx_m$$

Cazuri particulare $m = 2, 3$

$m = 2$

Def: a) $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ s.n. simplă în raport cu axa Ox dacă $\exists \varphi_1, \varphi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue a.î. $\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ c \leq y \leq d \quad \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y) \}$.

b) $D \subset \mathbb{R}^2$ s.n. simplă în raport cu axa Oy dacă $\exists\, \varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue a.î.
$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \}$.

TEOREMĂ: (Formula de calcul a integralei duble pt domenii simple în raport cu axa Ox)

$D \subset \mathbb{R}^2$ simplă în raport Ox, $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă și mărginită

Pp. că $\forall$ ~~y∈[c,d]~~ $y \in [c,d]$ $\exists\, H(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx$.

Atunci H este integrabilă și $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy =$
$$= \int_c^d H(y)\, dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

TEOREMĂ (Formula de calcul a integralei duble pt domenii simple în raport cu axa Oy)

$D \subset \mathbb{R}^2$ simplă în raport cu Oy, $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă și mărginită.

Pp că $\forall x \in [a,b]$ $\exists\, G(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy$.

Atunci:
1. G este integrabilă pe $[a,b]$
2. $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b G(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$.

Ex: Să se calculeze:

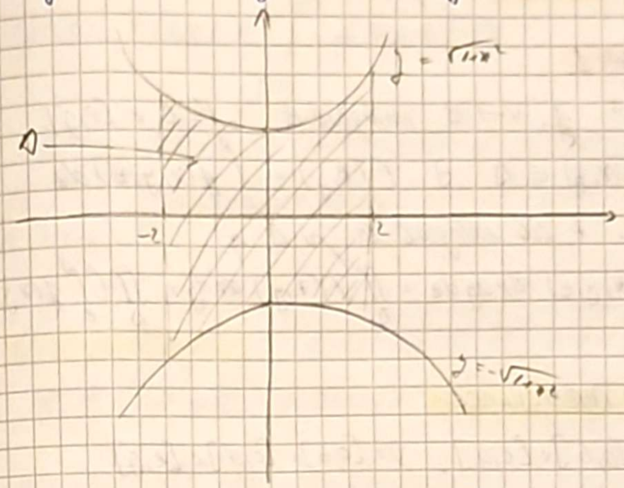
1) $I = \iint_D (x+y)\, dx\, dy$, unde $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1;\ x \le y \le 1 \}$

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Big|_{y=x}^{y=1} dx =$$
$$= \int_0^1 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) - \left(x^2 + \frac{x^2}{2} \right) \right] dx = \dots = \frac{1}{2}$$

2) $I = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$

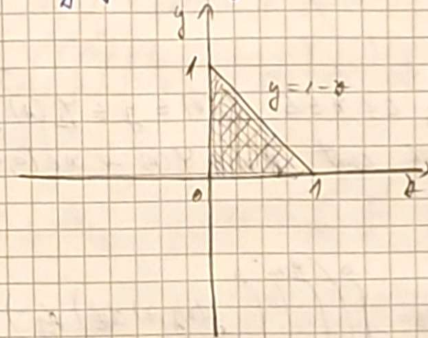
$D =$ domeniul mărginit de hiperbola $y^2 - x^2 = 1$ și de liniile drepte $x = 2$, $x = -2$

$y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 + x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1+x^2}$



$$I = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\, dy \right) dx$$

3) $I = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$, unde $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \underbrace{x \ge 0;\ y \ge 0}_{\text{axe}},\ \underbrace{x + y \le 1}_{\text{dreapta}} \}$
$y \le 1 - x$



$0 \le y \le 1 - x$

$x + y \le 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \le 1 - y$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\, dy \right) dx =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y)\, dx \right) dy$$

17.01.2025

Curs 13

Teoremele de tip Fubini

Formulele de calcul pentru integralele triple

TEOREMA 1.

$V \subset \mathbb{R}^3$ $f: V \to \mathbb{R}$ integrabilă $V = \Delta \times [e,g]$ $\Delta \subset \mathbb{R}^2$

Pp. $\forall (x,y) \in \Delta$ $\exists$ $F(x,y) = \int_e^g f(x,y,z)\,dz$

Atunci F este integrabilă pe Δ și

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Delta F(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta \left(\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

CAZURI PARTICULARE

1) $\Delta = [a,b]\times[c,d]$; $V = [a,b]\times[c,d]\times[e,g]$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$\left(= \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x,y,z)\,dz\right)$$

2) $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b\ \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

$\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ $\forall x \in [a,b]$

$V = \Delta \times [e,g]$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

TEOREMA 2

$V \subset \mathbb{R}^3$ $f: V \to \mathbb{R}$ integrabilă

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \underbrace{(x,y) \in \Delta}\ \ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$

$\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cont $\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Pp $\exists$ $F(x,y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

Atunci $F(\cdot,\cdot)$ este integrabilă și $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

$$= \iint_\Delta \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy.$$

Caz particular: $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\ \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

$\psi_1, \psi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue $\psi_1(x) \le \psi_2(x)$ $\forall x \in [a,b]$

$$\text{Atunci } \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx.$$

Ex: 1) Calculați $I = \iiint_V x^3y^2z\,dx\,dy\,dz$

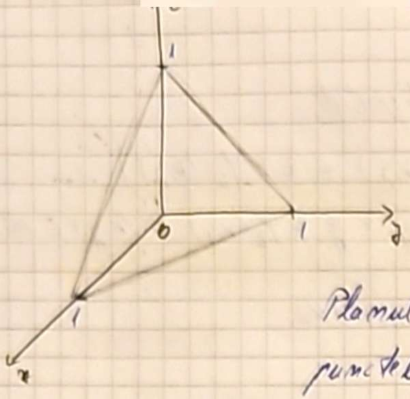
$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0,1],\ y \in [0,x],\ 0 \le z \le xy\}$

$$I = \int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^1 dx \int_0^x x^3y^2 \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x x^5y^4\frac{1}{2}\,dy = \int_0^1 \frac{x^5}{2}\cdot\frac{y^5}{5}\Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^{10}}{10}\,dx = \frac{1}{110}$$

2) Calculați $I = \iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.

V - domeniul din primul octant al axelor de coordonate mărginit de planul $x+y+z=1$



$$V = \{(x,y,z);\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\}$$

Planul $x+y+z=1$ intersectează axele în punctele $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(x+y+z)^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[1-(x+y)^2\right] dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \left(y - \frac{(x+y)^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (x^3 - 3x + 2)\, dx = \frac{1}{8}$$

SCHIMBAREA DE VARIABILĂ

Formula de schimbare de variabile pentru integrala dublă

TEOREMĂ

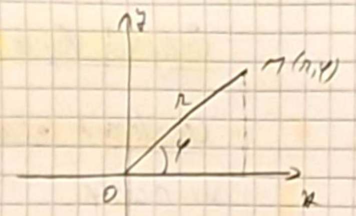
$\Delta_1 \subset \mathbb{R}^2$ compactă $F = (\varphi_1, \varphi_2) : \Delta_1 \to \Delta_2 \subset \mathbb{R}^2$ injectivă și de clasă C^1

$$\det J_F(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \ne 0 \quad \forall (u,v) \in \Delta_1$$

$f : \Delta \to \mathbb{R}$ continuă

Atunci $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\Delta_1} f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))\, |\det J_F(u,v)|\, du\, dv$

Integrala dublă în coordonate polare



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

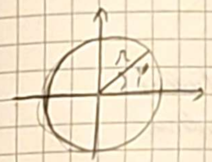
$$\iint f(x,y)\, dx\, dy = \iint f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

Ex: Calculați $I = \iint_S \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$

S = cerc de rază $R=1$ cu centrul în origine

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$



$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\cdot r\, dr\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\, dr\right) d\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

TEOREMĂ (Schimbarea de variabile pentru integrale triple)

$V_1 \subset \mathbb{R}^3$ compactă ~~$f : V_1 \to V$~~

$F = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : V_1 \to V_2$ injectivă și de clasă C^1

Pp. $\Delta(u,v,w) = \det J_F(u,v,w) \ne 0 \quad \forall (u,v,w) \in V_1$

$f : V \to \mathbb{R}$ continuă

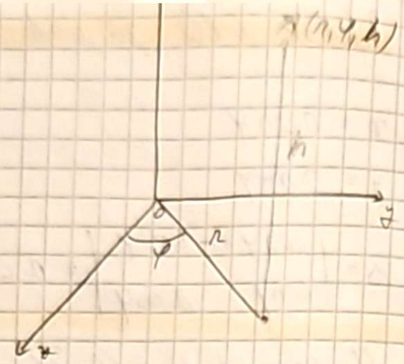
Atunci $\displaystyle\iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$

$$= \iiint_{V_1} f(\varphi_1(u,v,w), \varphi_2(u,v,w), \varphi_3(u,v,w))\, |\Delta(u,v,w)|\, du\, dv\, dw$$

Integrale triple

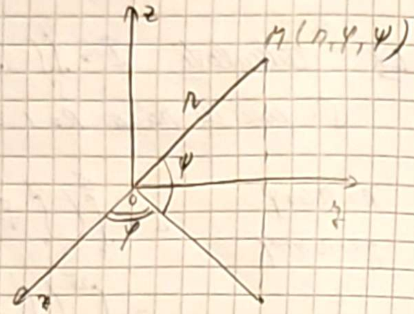
- **Coordonate cilindrice**

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$



$\Delta = r$

- **Coordonate sferice**



$x = r\cos\psi\cos\varphi$

$y = r\cos\psi\sin\varphi$

$z = r\sin\psi$

$\Delta = r^2\cos\psi$

φ - s.m. longitudine

ψ - s.m. latitudine

r - raza

Ex: V sfera de raza R

Calculați $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$

→ coord. sferice $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le r \le R$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r \cdot r^2\cos\psi\, dr = \pi R^4$$

→ **TEOREMĂ** (Schimbarea de variabilă pt integrala pe $\mathbb{R}^n$)

$\varphi : V = \overset{\circ}{V} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Pp. φ injectivă

φ de clasă C^1

$\det J_\varphi(x) \neq 0, \ \forall x \in V$

Atunci $\forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție continuă

$\forall E \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan a.î. $\bar{E} \subset V$

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\, dx = \int_E (f\circ\varphi)(u) \cdot |\det J_\varphi(u)|\, du$$

→ Măsura Jordan a unei bile deschise din $\mathbb{R}^n$.

→ **TEOREMĂ**

$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall r > 0 \quad \mu(B(x,r)) = \dfrac{2r^n \pi^{\frac{n}{2}}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}$.

$\left(\Gamma(x) = \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt\right)\right)$

DEM (Schiță)

$\mu(B(x,r)) = \mu(B(0,R)) = \int_{B(0,r)} 1\, dx \leftarrow$ T. de calcul a măsurii Jordan cu ajutorul integralei

↑ din invarianța la translații a măsurii Jordan $\square$

SV
$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\varphi_1 \\ x_2 = \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ x_3 = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\ - - - - - - - \\ x_{n-1} = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ x_n = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{cases}$$

$\rho \in [0,r] \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2} \in [0,\pi] \quad \varphi_{n-1} \in [0, 2\pi]$

$\Delta = \rho^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \ldots \sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}$

$$\int_{B(0,r)} 1\, dx = \int_{[0,r]\times\underbrace{[0,\pi]\times\ldots\times[0,\pi]}_{(n-2)\text{ ori}}\times[0,2\pi]} \rho^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1\ldots d\varphi_n\, dr$$

SV

$$\int_0^r \rho^{n-1}\,dr \underbrace{\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1 \dots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}$$

Obs! $\int_0^\pi \sin^{k-2}\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, \forall\, k \geq 2$!

$$= \frac{2\pi r^n}{n} \cdot \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \cdots \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{2\pi r^n}{n} \cdot \frac{\Gamma^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2 r^n \pi^{\frac{n}{2}}}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$