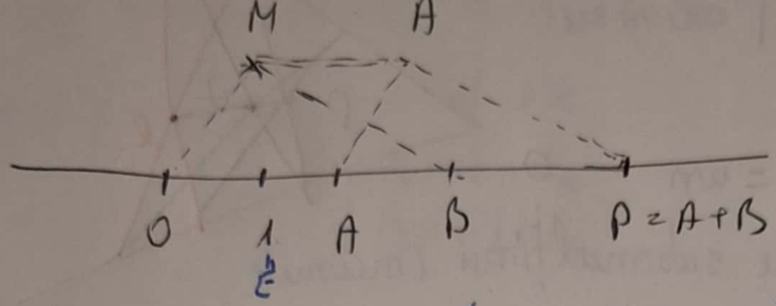
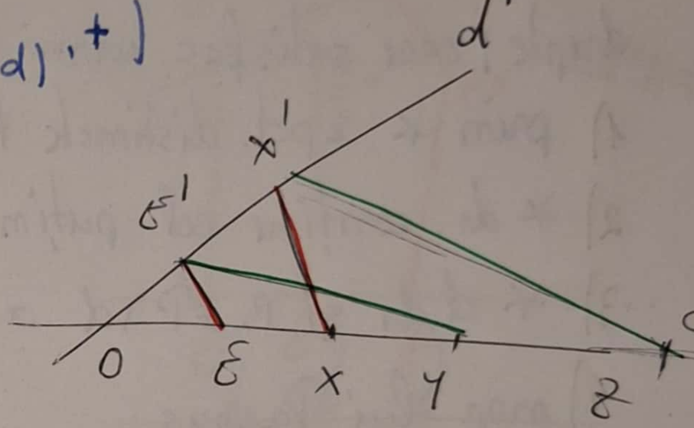
Curs 2 - Geometrie - 3.10.2023



$d = K(O, E, d) \Rightarrow (K(O,E,d), +)$



Ducem $\begin{cases} XX' \parallel EE', \ X' \in d' \\ X'Z \parallel E'Y, \ Z \in d \end{cases}$

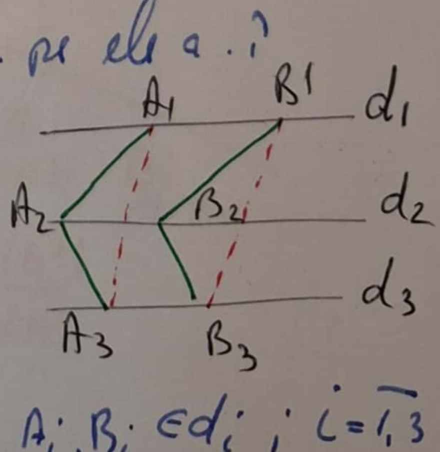
$\frac{Z}{Y} = \frac{X'}{E'} = \frac{X}{E} \Rightarrow Z = XY$ în $\mathbb{R}$.

Punem prin def. $\boxed{Z = X \cdot Y} \Rightarrow$ str. grup.

Q: indep. constr. noastre de aleg. făcute.

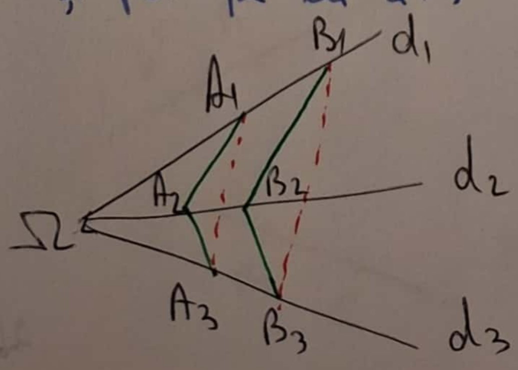
Am avea nevoie de prop. precum:

1) Desargues-P: $\forall$ aș alege 3 dr pll și pct. pe ele a.î.



$\left.\begin{matrix} A_1A_2 \parallel B_1B_2 \\ A_2A_3 \parallel B_2B_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1A_3 \parallel B_1B_3$

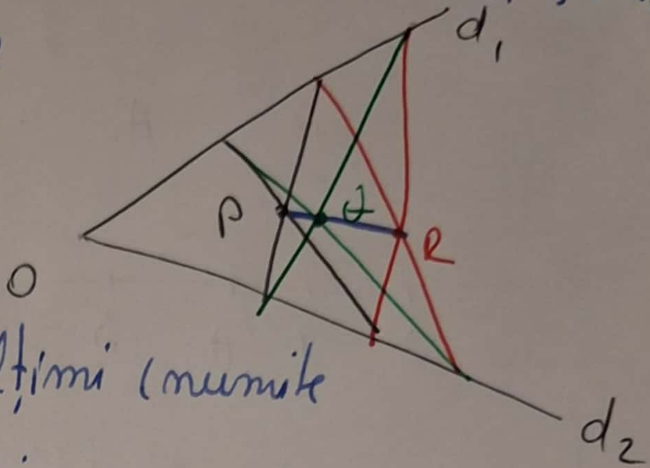
2) Desargues-C: $\forall$ aleg 3 dr. concurente și pct. pe ele a.î. $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{\Omega\}$; $A_i, B_i \in d_i$; $i = \overline{1,3}$



$\left.\begin{matrix} A_1A_2 \parallel B_1B_2 \\ A_2A_3 \parallel B_2B_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1A_3 \parallel B_1B_3$

Prop Pappus: $\forall$ 2 dr, $\forall$ 3 pct pe fiecare $\begin{cases} \forall A_1, A_2, A_3 \in d_1 \setminus \{O\} \\ \forall B_1, B_2, B_3 \in d_2 \setminus \{O\} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_2 \cap A_2B_1 = \{P\} \\ A_1B_3 \cap A_3B_1 = \{Q\} \\ A_2B_3 \cap A_3B_2 = \{R\} \end{array}\right\} \Rightarrow P\text{-}Q\text{-}R \text{ coliniare}$$



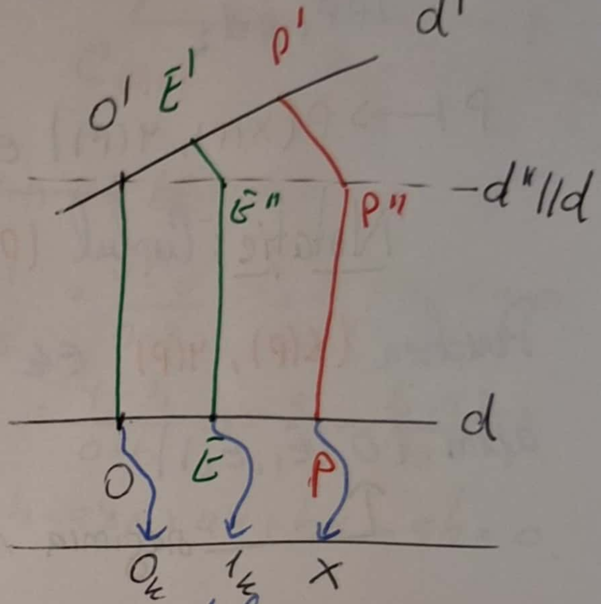
Plan pappuian = un plan P cu o fam. de submulțimi (numite drepte) care satisfac urm. prop:

1) prin $\forall$ 2 pct. distincte trece o dr. și numai una
2) $\forall$ dr. conține cel puțin 2 pct. și $\exists$ 3 necol.
3) $\forall$ d dr și $B \in P \setminus d \Rightarrow \exists!$ o dr. d' $\begin{cases} P \in d' \\ d \parallel d' \text{ și } d \cap d' = \emptyset. \end{cases}$
4) prop. lui Pappus

Teoremă: Fie P un plan pappuian $\Rightarrow$ atunci $\forall$ dr $d \in P$ și $\forall\, O \neq E \in d \Rightarrow d = k(O, E, d)$ are o structură naturală de corp.

Curs 3 - Geometrie - 16.10.2023

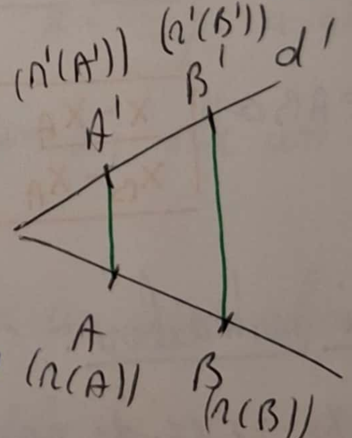
Def: Fie d - dreaptă, $r: d \to k$ s.n. așezarea riglei pe d și este o funcție bij $\begin{cases} r: d \to k \\ r(O) = 0_k \\ r(E) = 1_k \end{cases}$



Def: Fie d - dreaptă și $r: d \to k$ o așezare a riglei. Dc. d' este o dr. arbitrară, $O' \neq E' \in d'$ spunem că așezarea riglei $r': d' \to k$ este indusă de r (sau r și r' sunt compatibile) dc.

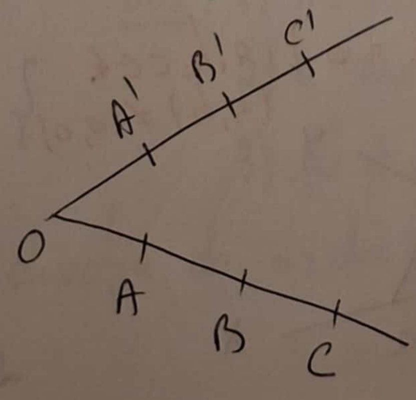
$$\begin{cases} OO' \parallel EE'', \ E'' \in d'' \\ PP'' \parallel OO', \ P'' \in d'' \Rightarrow r'(P') \overset{def}{=} r(P) \\ E'E'' \parallel P'P'' \end{cases}$$

Obs: (Th Thales):



$\left.\begin{array}{l} d \neq d' \text{ și } d \cap d' = \{O\} \\ \text{Pp. am fixat așez riglei} \\ r: d \to k \text{ și pp. că pe } d' \\ \text{am ales așez. indusă de } r, r' \end{array}\right\}$ $\Rightarrow AA' \parallel BB' \Leftrightarrow \dfrac{r(B)}{r(A)} = \dfrac{r'(B')}{r'(A')}$

Mai general



$AA' \parallel BB' \parallel CC' \Leftrightarrow$

$$\frac{r'(C') - r'(A')}{r'(B') - r'(A')} = \frac{r(C) - r(A)}{r(B) - r(A)}$$

Notație $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{r(C) - r(A)}{r(B) - r(A)}$

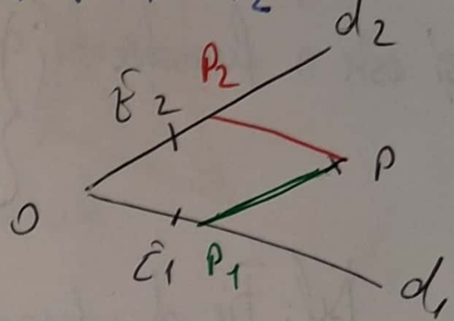
Obs: d_1, d_2 - 2 dr. concurente, $d_1 \cap d_2 = \{O\}$. Fie

$\left.\begin{array}{l} E_1 \in d_1 \setminus \{O\} \\ E_2 \in d_2 \setminus \{O\} \end{array}\right\}$ Să p.p. că am fixat așezarea riglei $\left\{\begin{array}{l} r_1 : d_1 \to k \\ r_2 : d_2 \to k \end{array}\right.$

compatibile între ele. Fie P pct arbitrar, $P \notin d_1 \cup d_2$

Ducem $\left\{\begin{array}{l} PP_2 \parallel d_1 \\ PP_1 \parallel d_2 \end{array}\right.$ și punem $X(P) := r_1(P_1)$

$Y(P) := r_2(P_2)$



$P \longmapsto P(X(P), Y(P)) \in k \times k = k^2$

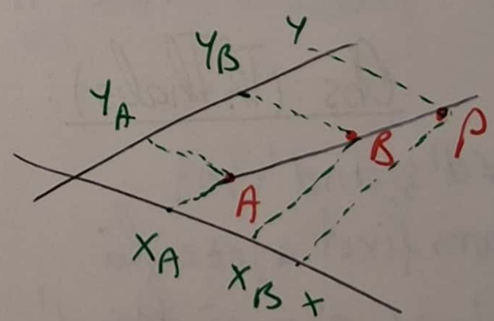
Notație: Cuplul $(O, (E_1, E_2))$ s.n. reper afin al planului.

Perechea $(X(P), Y(P)) \in k^2$ s.n. coord. lui P în raport cu reperul afin $(O, (E_1, E_2))$

originea reperului

Ecuațiile dr. det. de 2 pct. distincte A și B

$P(x, y) \in AB \iff \boxed{\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}}$



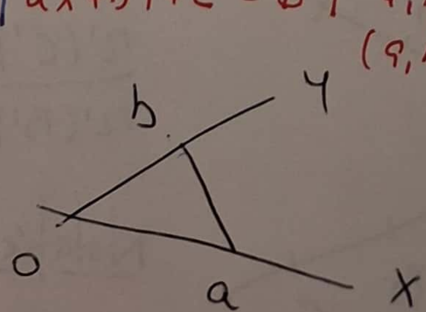
• Cazuri particulare:

1) $x_B = x_A \Rightarrow$ ec. dr AB este $x = x_A$

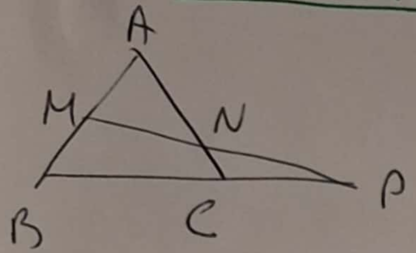
2) $y_B = y_A \Rightarrow$ ec. dr. AB este $y = y_A$

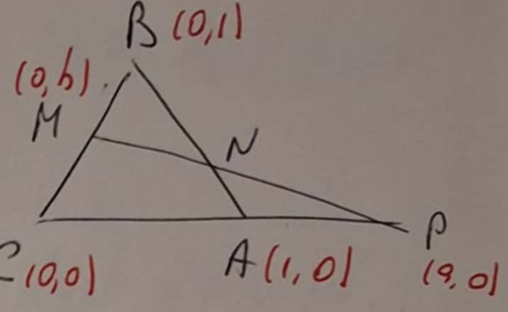
• Ec. generală a dreptei: $d = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0 \mid a, b, c \in k,\ (a, b) \neq (0, 0)\}$

• Ec. prin tăieturi: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$



Th. Menelaus: M-N-P coliniar $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \dfrac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = -1$





Dem: Alegem reperul $(C, (A,B))$
$\uparrow$
origine.

$\Rightarrow$ " $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \dfrac{1-b}{0-b} = \dfrac{b-1}{b}$

$\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \dfrac{a-0}{1-a} = \dfrac{a}{1-a}$.

$\{N\} = \cancel{BC \cap CP}\ AB \cap MP$.

$AB: \dfrac{x-1}{1-0} = \dfrac{y-0}{0-1} \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$.

$MP: \dfrac{x-0}{a-0} = \dfrac{y-b}{0-b} \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{b-y}{b} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xb = ab - ay \Leftrightarrow ay + bx - ab = 0$.

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ ay + bx - ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{x_N}\ y_N = \dfrac{(a-1)b}{a-b} \Rightarrow \dfrac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \dfrac{\frac{ab-b}{a-b} - 0}{1 - \frac{ab-b}{a-b}} = \dfrac{ab-b}{a-ab} = \dfrac{b(a-1)}{a(1-b)}$

Def: Fie k un corp. Un vector (în dim 2) este un elem. din k^2.

Def: Fie A, B pct. în plan raportate la un reper afin.

$A = (x_A, y_A)$
$B = (x_B, y_B)$ $\Rightarrow$ vectorul $\vec{AB}$ va fi prin def: $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

Obs: 1) $\vec{AB} = -\vec{BA}$

2) k^2 are o str. canonică de k sp. vect.

3) fie d o dr. $dir(d) = \{\vec{AB} \mid A, B \in d\} \subset k^2$ s.n. direcția dr. $\Rightarrow dir(d)$ este subspațiu vectorial pt. k^2

Curs 4 - Geometrie - 23.10.2023

Def: S.n. reper cartezian în k^2 un cuplu $(O, (e_1, e_2))$, $O \in k^2$ fixat și e_1, e_2 neproporționali.

Def: Fie $R = (O, (e_1, e_2))$ un reper cartezian fixat și P un pct.
Cuplul de scalari din k unic det. a.î $\vec{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2$ s.n. coord. lui P în raport cu reperul fixat.

Ex: Fie un reper $R \begin{cases} O = (1,1) \\ e_1 = (1,-1) \\ e_2 = (0,1). \end{cases}$

$P = (2,3)$. Aflați coord. lui P în rap cu R.

$\vec{OP} = (1,2) = (1,-1) + 3\cdot(0,1) \Rightarrow$ coord. sunt $(1,3)$.

Obs: În general, componentele (coord lui P în raport cu reperul canonic în $k^2 = \left\{ \begin{array}{l} O = (0,0) \\ e_1 = (1,0) \\ e_2 = (0,1) \end{array} \right)$ ale unui pct P diferă de coord. lui în raport cu repere arbitrare.

Schimbarea coord. cu schimbarea rep. cartezian

Fie $\begin{cases} R_1 = (O_1, (e_1, e_2)) \\ R_2 = (O_2, (f_1, f_2)) \end{cases}$ 2 rep. carteziene și P $\begin{cases} (x_1, x_2) \text{ în } R_1 \\ (y_1, y_2) \text{ în } R_2. \end{cases}$

(coord. lui P în rap. cu cele 2 ~~sist~~ repere).

$\Rightarrow \vec{O_1P} = x_1 e_1 + x_2 e_2.$ $\quad\quad \vec{O_1O_2} = v_1 e_1 + v_2 e_2.$

$O_2P = y_1 f_1 + y_2 f_2.$

Știu că $\exists$ scalari a.î. $f_1 = u_{11} e_1 + u_{21} e_2$, $f_2 = u_{12} e_1 + u_{22} e_2$ $\Rightarrow U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$

inversabilă

$$\vec{O_2P} = -\vec{O_1O_2} + \vec{O_1P}$$

$$\vec{O_1P} = \vec{O_1O_2} + \vec{O_2P} \Rightarrow x_1 e_1 + x_2 e_2 = (v_1 e_1 + v_2 e_2) + (y_1 f_1 + y_2 f_2)$$

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = (v_1 e_1 + v_2 e_2) + (y_1 u_{11} e_1 + y_1 u_{21} e_2 + y_2 u_{12} e_1 +$$
$$+ y_2 u_{22} e_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = v_1 + y_1 u_{11} + y_2 \cdot u_{12} \\ x_2 = v_2 + y_2 u_{12} + y_2 u_{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = UY + V$$

Fie $\begin{cases} R_1 = (O_1, (e_1, e_2)) \\ R_2 = (O_2, (f_1, f_2)) \end{cases}$ 2 repere și $\begin{cases} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ coord } P \text{ în } R_1 \\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ coord } P \text{ în } R_2 \end{cases}$

și U a.î. $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$; $\begin{cases} f_1 = u_{11} e_1 + u_{21} e_2 \\ f_2 = u_{12} e_1 + u_{22} e_2. \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{X = UY + V}$

$Y = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\vec{O_1O_2} = v_1 e_1 + v_2 e_2.$

Def.: Fie k un corp com. O fct. liniară $f: k^2 \to k^2$, $f(X) = AX + B$ s.n. afină, $A \in M_2(k)$, $B \in M_{2,1}(k)$.

Def.: O funcție afină bij ($\det A \neq 0$) s.n. automorfism afin. (schimbare de coordonate)

Obs: $f: k^2 \to k^2$ automorfism afin

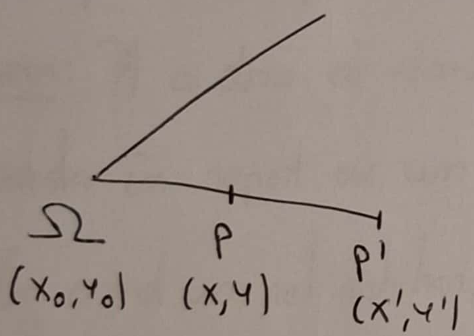
1) f duce drepte în drepte ($\forall d$ dr. $\Rightarrow f(d)$ dr.)

2) f păstrează pll ($d_1 \parallel d_2 \Rightarrow f(d_1) \parallel f(d_2)$)

Exemple:

1) $f: k^2 \to k^2$, $f(x) = x + B$ ← translația

2) $f: k^2 \to k^2$, $f(x) = \lambda x + B$ ← omotetie
$\lambda \in k \setminus \{0\}$

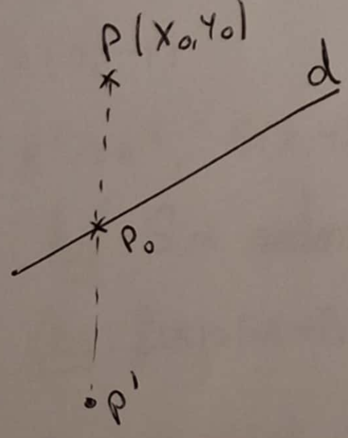


$\overline{\Omega P'} = \lambda \overline{\Omega P} \Rightarrow x' - x_0 = \lambda(x - x_0)$

$y' - y_0 = \lambda(y - y_0)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0(1-\lambda) \\ y_0(1-\lambda) \end{pmatrix}$

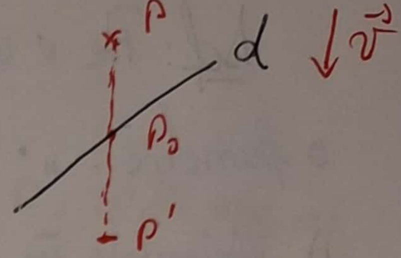
3) $f: k^2 \to k^2$, $f(x)$ = simetria față de o dr. $\parallel$ cu o dir. dată.



$d: \begin{cases} x = \alpha + u_1 t \\ y = \beta + u_2 t \end{cases}$.

$P_0 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P' \in d \ldots$

Curs 5 - Geometrie - 6.11.2023



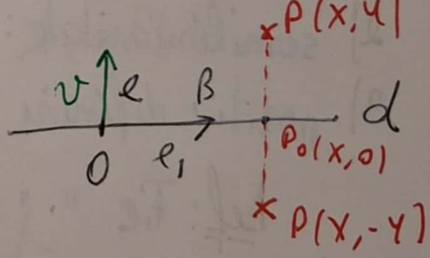
Def: Fie $d \in k^2$ o dr., $v \neq 0$, $v \in dir(d)$.

Definim simetria față de d pll cu v funcția $s: k^2 \to k^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{PP_0} = \overrightarrow{P_0P'}$ unde P_0 e unicul pct. de pe dr d a.î. $\overrightarrow{PP_0} = \alpha \vec{v}$; $\alpha \in k$.

Obs: Calitatea unei funcții $f: k^2 \to k^2$ de a fi afină nu depinde de reperul cartezian ales.

Dem: Pt. a dem. că simetria = fct. afină e suf. să probăm aceasta în raport cu un reper cart. bine ales

Aleg $O \in d$ un pct. arbitrar.



Aleg $B \neq O \in d \Rightarrow$ fixez $e_1 = \overrightarrow{OB}$

$e_2 = v$

$\overrightarrow{PP_0} = (0, -y)$

$\overrightarrow{P_0P'} = (0, -y)$

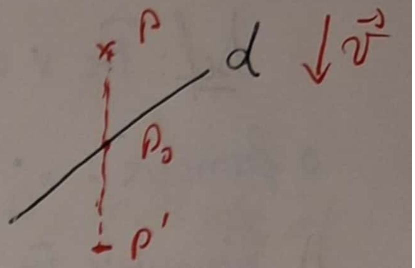
$\Rightarrow s: k^2 \to k^2$, $s(x,y) = (x,-y)$ e funcție afină

Def: S.n. automorfism afin o funcție afină bij $f: k^2 \to k^2$.

Obs: $f(x) = AX + B$ automorfism afin $\Leftrightarrow$ A inv ($\det A \neq 0$)

Ex: $k = \mathbb{Z}_p \Rightarrow \exists\ p^2(p^2-1)(p^2-p)$ funcții afine bij $f: k^2 \to k^2$.

Curs 5 - Geometrie - 6.11.2023



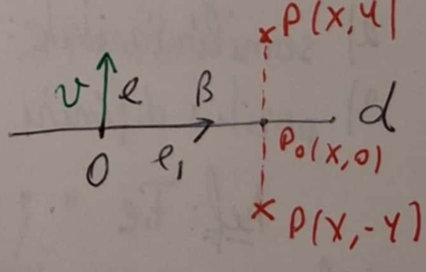
Def: Fie $d \in k^2$ o dr., $v \neq 0$, $v \in dir(d)$.

Definim simetria față de d pll cu v funcția $s: k^2 \to k^2 \iff \overrightarrow{PP_0} = \overrightarrow{P_0P'}$ unde P_0 e unicul pct. de pe dr d a.î. $\overrightarrow{PP_0} = \alpha \vec{v}$; $\alpha \in k$.

Obs: Calitatea unei funcții $f: k^2 \to k^2$ de a fi afină nu depinde de reperul cartezian ales.

Dem: Pt. a dem. că simetria = fct. afină e suf. să probăm aceasta în raport cu un reper cart. bine ales

Aleg $O \in d$ un pct. arbitrar.



Aleg $B \neq O \in d \Rightarrow$ fixez $e_1 = \overrightarrow{OB}$

$e_2 = v$

$\overrightarrow{PP_0} = (0, -y)$

$\overrightarrow{P_0P} = (0, -y)$

$\Rightarrow s: k^2 \to k^2$, $s(x,y) = (x,-y)$ e funcție afină

Def: S.n. automorfism afin o funcție afină bij $f: k^2 \to k^2$.

Obs: $f(x) = Ax + B$ automorfism afin $\iff A$ inv ($\det A \neq 0$)

Ex: $k = \mathbb{Z}_p \Rightarrow \exists\ p^2(p^2-1)(p^2-p)$ funcții afine bij $f: k^2 \to k^2$.

Geometrie euclidiană $\boxed{k=\mathbb{R}}$

Def: Fie V un sp. vect. peste $\mathbb{R}$. S.n. produs scalar peste V o funcție: „ $\cdot$ ": $V\times V \to \mathbb{R}$ cu prop:

1) liniaritate în prima variab: $(\alpha u_1+\beta u_2)\cdot v = \alpha(u_1\cdot v)+\beta(u_2\cdot v)$
2) simetrie: $u\cdot v = v\cdot u$
3) pozitivitate. $v\cdot v \geq 0 \ \forall\, v\in V$ și $v^2=0 \Leftrightarrow v=0$.

Ex: produsul scalar canonic: $(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = x_1y_1+x_2y_2$.

Def: Fie „ $\cdot$ " un produs scalar pe V. Definim lungimea/norma unui vector $v\in V$ prin $\|v\| = \sqrt{<v,v>}$

Prop: Funcția normă $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}$ are prop:

1) subaditivitate: $\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$
2) semiliniaritate: $\|\alpha v\| = |\alpha|\cdot\|v\|$
3) pozitiv definire: $\forall\, v \Rightarrow \|v\|\geq 0$ cu eg. pt. $v=0$.

Def: Fie „ $\cdot$ " un prod. scalar pe V și fie u, v vectori nenuli. Definim măsura $\sphericalangle$ format între u, v prin formula

$$m(\widehat{u,v}) = \arccos \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

Curs 6 - Geometrie - 13.11.2023

Obs: $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$

Ex de aplicație: Fie d o dr, $d: ax+by+c=0$, $(a,b) \neq (0,0)$

$dir(d) = \{\vec{AB} \mid A, B \in d\}$.

$A(x_A, y_A) \in d \Rightarrow a x_A + b y_A + c = 0$.

$B(x_B, y_B) \in d \Rightarrow a x_B + b y_B + c = 0$ $\quad (-)$

$$a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0$$

$\Rightarrow dir(d) = \{a v_1 + b v_2 = 0\}$ $\cancel{v_1, v_2}$

Cum arată un vector $\vec{u}(u_1, u_2) \perp d$?

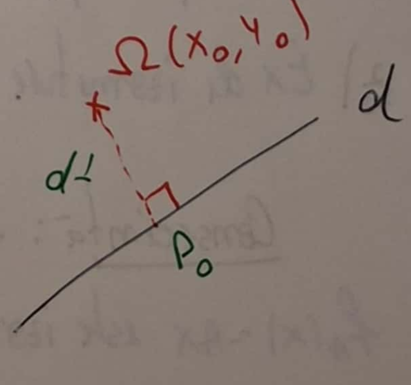
$v \in dir(d)$; $v = (v_1, v_2)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \\ \qquad\qquad\quad a v_1 + b v_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (u_1, u_2) = \lambda(a, b)$$

$u \perp d \Rightarrow \vec{u} = \lambda(a, b)$

Ex de aplicație: Dist. de la un pct. la o dreaptă.

Fie $\Omega(x_0, y_0)$ pct. fixat, $d: ax+by+c=0$.



$d^\perp: \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$; $(a, b) \in d^\perp$

$$d^\perp = \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}$$

$d \cap d^\perp \Rightarrow a(at_0 + x_0) + b(bt_0 + y_0) + c = 0$

$(a^2 + b^2) t_0 = -a x_0 - b y_0 - c \Rightarrow t_0 = \dfrac{-a x_0 - b y_0 - c}{a^2 + b^2}$

$\Rightarrow P_0 = (at_0 + x_0, bt_0 + y_0)$

$$d(\Omega, d) = \|\overrightarrow{\Omega P_0}\| = \|t_0(a,b)\| = |t_0| \cdot \|(a,b)\|$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{d(P(x_0,y_0), d: ax+by+c=0) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Clase speciale de apl. afine în context euclidian

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ afină $\Leftrightarrow f(x) = AX + B$.

Def: O funcție afină $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s.n. izometrie dc. păstrează distanțele $\Leftrightarrow d(A,B) = d(f(A), f(B))$

Obs:

1) Mulțimea izometriilor planului $Izo(\mathbb{R}^2)$ form. un gr. în raport cu „$\circ$" funcțiilor.

2) Ex de izometrie: translația $\begin{cases} T_B: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T_B(x) = x + B. \end{cases}$

Consecință: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = AX + B$ izo $\Leftrightarrow f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_A(x) = AX$ este izometrie. (apl. lin. indusă de f)

3) $f_A(x)$ păstrează prod. scalar. $\boxed{u \cdot v = f_A(u) \cdot f_A(v)}$
(f izo)

4) f_A păstrează prod scalar $\Leftrightarrow \exists$ 2 vect. nenuli și neproporționali

e_1 şi e_2 ($\{e_1, e_2\}$ bază $\mathbb{R}^2$) a.î. $\boxed{e_i e_j = f_A(e_i) \cdot f_A(e_j)}$, $i,j=\overline{1,2}$

Prop: Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = AX + B$. Atunci f izo $\Leftrightarrow$ matricea A satisface $\boxed{A \cdot {}^tA = I_2}$

Dem: $A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ şi f izo $\overset{?}{\Rightarrow} {}^tA \cdot A = A \cdot {}^tA = I_2$.

Iau $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. $\Rightarrow f_A(e_1) = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$ şi $f_A(e_2) = \begin{pmatrix} n \\ q \end{pmatrix}$

$e_1 \cdot e_1 = f_A(e_1) \cdot f_A(e_1) \Rightarrow 1 = m^2 + p^2$

$e_2 \cdot e_2 = f_A(e_2) \cdot f_A(e_2) \Rightarrow n^2 + q^2 = 1$

$e_1 \cdot e_2 = f_A(e_1) \cdot f_A(e_2) \Rightarrow 0 = mn + pq$

$${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+p^2 & mn+pq \\ mn+pq & n^2+q^2 \end{pmatrix} = I_2.$$

Curs 7 - Geometrie - 20.11.2023

Notație: $O(2) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = I_2\}$

Obs: $(O(2), \cdot)$ grup și s.n. gr. ortogonal

$A \in O(2)$ s.n. matrice ortogonală

$SO(2) = \{A \in O(2) \mid \det A = 1\}$ este subgrup normal, de indice 2, și s.n. gr. special ortogonal.

Obs: $A \in O(2) \Rightarrow \det A = \pm 1$.

Descrierea gr. $O(2)$ și $SO(2)$

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = I_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 & (1) \Rightarrow a = \cos\alpha \text{ și } b = \sin\alpha \\ c^2+d^2=1 & (2) \Rightarrow c = \cos\beta \text{ și } d = \sin\beta \\ ac+bd=0 & (3) \Rightarrow \cos(\alpha-\beta)=0 \Rightarrow \alpha-\beta \in \{\pm\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$

Caz 1: $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

Caz 2: $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Consecință: $SO(2) = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

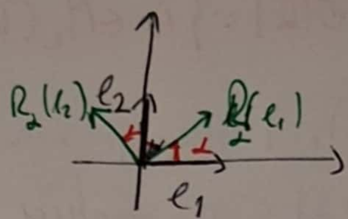
$O(2) = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Reprezentare geometrică

$\boxed{1}$ $A \in SO(2) \Rightarrow A = R_\alpha$ (notație de centru $O(0,0)$ și $\measuredangle \alpha$)

$R_\alpha(e_1) = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha$

$R_\alpha(e_2) = -e_1 \sin\alpha + e_2 \cos\alpha$

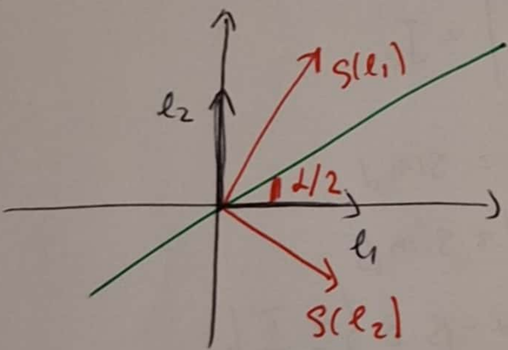


$$\Rightarrow R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Obs: 1) $R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta}$

2) $R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$

$\boxed{2}$ $A \in O(2) \setminus SO(2) \Rightarrow A = S_\alpha$ (simetrie



$s(e_1) = (\cos\alpha) e_1 + (\sin\alpha) e_2$

$s(e_2) = (\cos\gamma) e_1 + (\sin\gamma) e_2$

$\gamma = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Alte clase remarcabile de transformări afine ale planului

Def: Transformările care păstrează $\measuredangle$ s.n. transformări conforme sau asemănări. (Dc. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x) = AX$, $\det A \neq 0$

$m(\widehat{u,v}) = m(\widehat{f(u), f(v)})$)

Obs: Mulțimea transformărilor conforme form. un gr. $CO(2)$ numit gr. conform ortogonal.

Obs: O transformare conformă care nu e izometrie este omotetia $f(x) = \lambda x$, $\forall \lambda \neq \pm 1$.

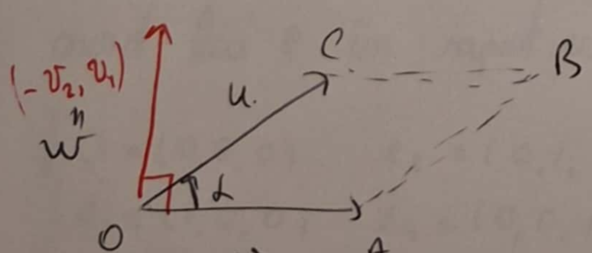
Prop: $\forall$ transformare conformă se descompune în produsul (compunerea) dintre o izometrie și o omotetie.

Consecință: $CO(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 \neq 0 \right\} \cup \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 \right\}$

Teoremă: Fie P mulțimea poligoanelor din plan. Atunci $\exists!$ o funcție $s: P \to P$ (funcție arie) a.î.

1) s(pătrat de lat 1) $= 1$
2) s e invariantă la izometrii.
3) aditivitate: $P = P_1 \cup P_2$ polig. cu cel mult laturi comune $\Rightarrow s(P) = s(P_1) + s(P_2)$

Obs: Fie u, v 2 vectori nenuli necol în plan. Atunci S_{pll} generat de $\begin{cases} u = (u_1, u_2) \\ v = (v_1, v_2) \end{cases}$ este egală cu: $\left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right|$



$S_{OABC} = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\alpha$

$u \cdot w = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = S_{OABC}$

$u_1 \cdot (-v_2) + u_2 \cdot v_1 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

Curs 8 - Geometrie - 22.11.2023

$SL(2,\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ și s.n. gr. special liniar.

Spațiul tridimensional afin

__Def__: Fie k un corp comutativ: spațiul afin cu str. canonică va fi $A_k^3 \overset{def}{:=} k^3$; $k^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in k\}$.

__Def__: Fie A_k^3 un ~~sp~~ spațiu afin. S.n. reper cartezian în A_k^3 $R = \{(O, (e_1, e_2, e_3)) \mid$ unde (e_1, e_2, e_3) bază în $k^3\}$.

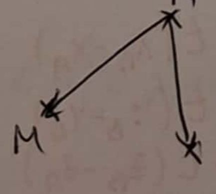
__Def__: Coord. unui pct P în raport cu R sunt (x_1, x_2, x_3), unde $\vec{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$.

__Obs__: Dc. $P = (\alpha, \beta, \gamma) \in k^3$, atunci (α, β, γ) constituie și coord lui P în raport cu reperul $R \Leftrightarrow R$ e reperul canonic:

$$\begin{cases} O = (0,0,0) & e_2 = (0,1,0) \\ e_1 = (1,0,0) & e_3 = (0,0,1). \end{cases}$$

__Def__: Fie $X \in k^3$ o mulțime. Vom nota pt. un pct. $\Omega \in X$ fixat: $\operatorname{dir}_\Omega(X) = \{\vec{\Omega P} \mid P \in X\}$ direcția lui ~~Ω~~ X din Ω.

$\operatorname{dir}_M X = \{\vec{MN}, \vec{MP}, \vec{MM}\}$



$\operatorname{dir}_N X = \{\vec{NM}, \vec{NN}, \vec{NP}\}$

Obs: În cazul unei dr. din E^2 direcția dr. nu depinde de pct-ul ales.

Def: S.n. dreaptă în E^3 o submulțime $d \subset E^3$ a.î. $\dim(d)$ este un subspațiu vectorial de dim. 1.

Obs: Dc. $\dim_\Omega(d)$ (Ω arbitrar) este subsp. vectorial $\Rightarrow$ $\Rightarrow \dim_P(d)$ nu depinde de pct $P \in d$ ales.

Ecuații ale dreptelor:

1) Dr. det de 2 pct. $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$:

$$\boxed{\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}}$$

2) Dr. det de un pct. $A(x_A, y_A, z_A)$ și un vector nenul $v = (v_1, v_2, v_3) \in \dim(d)$.

$$\boxed{\frac{x-x_A}{v_1} = \frac{y-y_A}{v_2} = \frac{z-z_A}{v_3}}$$

Convenție: Dc. $x_A = x_B$ scriem $x - x_A = 0$. Analog pt. $y_B = y_A$ și $z_B = z_A$.

3) Ecuații parametrice:

1) $\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_B + t(z_B - z_A) \end{cases}$ sau 2) $\begin{cases} x = x_A + t v_1 \\ y = y_A + t v_2 \\ z = z_A + t v_3 \end{cases}$

Def: S.n. plan în E^3 o submulțime $\mathcal{L}$ a.î. $dir(\mathcal{L}) \subset E^3$ este un subsp. vect. de dim 2.

Ecuații ale planului:

1) Planul det. de un pct. $A = (x_A, y_A, z_A)$ și direcția sa: $dir = \langle u, v \rangle$

$$\begin{cases} u = (u_1, u_2, u_3) \\ v = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x - x_A & u_1 & v_1 \\ y - y_A & u_2 & v_2 \\ z - z_A & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Dem: $P \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \vec{AP} \in dir\, \mathcal{L} \Leftrightarrow \vec{AP} \in \langle u, v \rangle \Leftrightarrow \{\vec{AP}, u, v\}$ mulțime liniar dependentă $\Leftrightarrow$ $\overset{dc.}{\cancel{x-x_A}}$ $P(x, y, z)$ atunci

$$\begin{vmatrix} x - x_A & u_1 & v_1 \\ y - y_A & u_2 & v_2 \\ z - z_A & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Consecință: Pt. a scrie ec. planului det de 3 pct. A, B, C necoliniare putem folosi formula de mai sus în care luăm $u = \vec{AB}$ și $v = \vec{AC}$.

2) Ec. parametrică a planului: $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L} = \langle u, v \rangle$

$$\begin{cases} x = x_A + t_1 u_1 + t_2 v_1 \\ y = y_A + t_1 u_2 + t_2 v_2 \\ z = z_A + t_1 u_3 + t_2 v_3 \end{cases}$$

Dem: $P(x, y, z)$; $\vec{PA} \in \mathcal{L} \Rightarrow \vec{PA} \in \langle u, v \rangle \Rightarrow \vec{PA} = t_1 u + t_2 v$.

Obs: Ecuațiile carteziene ale $\left\langle \begin{array}{l} \text{mulțimilor form cu 1 pct.} \\ \text{dreptelor} \\ \text{planelor} \end{array} \right.$

sunt de forma $MX = N$; $\begin{cases} M \in M_3(k) \\ N \in M_{3,1}(k) \\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$ și mulțimea e

$\begin{cases} 1) \text{ pct dc. } rg M = 3 \\ 2) \text{ dr dc } rg M = 2 \\ 3) \text{ plan dc } rg M = 1. \end{cases}$

Paralelism

Def: 2 dr d_1 cu $dir(d_1) = \langle u \rangle$ și d_2 cu $dir(d_2) = v$ sunt paralele dc. $dir(d_1) = dir(d_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \setminus \{0\}$ a.î $v = \lambda u$.

Obs: Fie un plan de ecuație $\pi : mx + ny + pz + q = 0$ $\Rightarrow dir(\pi) : mx + ny + pz = 0$.

Def: 2 plane π_1 și π_2 sunt paralele dc. $dir\, \pi_1 = dir\, \pi_2$ $\Leftrightarrow \exists \lambda \in k^*$ a.î $(m_1, n_1, p_1) = \lambda (m_2, n_2, p_2)$

Curs 8 - Geometrie - 27.11.2023

Def: Fie d dreaptă, π un plan. Spunem că $d \parallel \pi \Leftrightarrow$

$\text{dir } d \subset \text{dir } \pi$.

Ex: fie $d: \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t-1 \\ x_3 = \alpha t + 1 \end{cases}$ și $\pi: x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

$d: \frac{x_1}{1} = \frac{x_2+1}{1} = \frac{x_3-1}{\alpha} \Rightarrow \text{dir } d = \langle (1, 1, \alpha) \rangle$

$\text{dir } \pi = \langle x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \rangle$

$\text{dir } d \subset \text{dir } \pi \Rightarrow 1 - 1 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Ex: π plan a.î. $\pi: x_1 - x_2 - 2x_3 - 1 = 0$, și $P = (1, 1, 1)$.

Se cere ec. planului π' a.î. $\begin{matrix} \pi' \parallel \pi \\ P \in \pi' \end{matrix}$

$\pi' = 1 \cdot (x_1 - 1) - 1(x_2 - 1) - 2(x_3 - 1) = 0$.

Aspecte metrice: $k = \mathbb{R}$

Def: Definim produsul scalar canonic pt. $u = (u_1, u_2, u_3)$
$v = (v_1, v_2, v_3)$

astfel: $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$

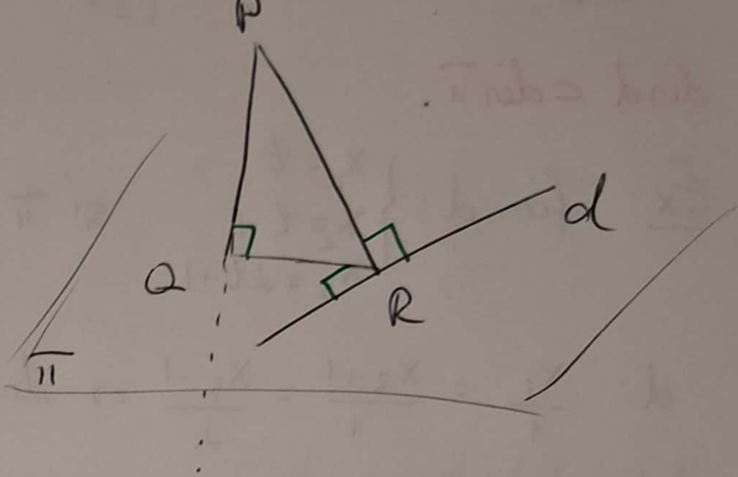
Def: $P = (x_P, y_P, z_P)$ $\Rightarrow$ distanța de la P la Q este
$Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ $d(P, Q) = \sqrt{\langle \vec{PQ}, \vec{PQ} \rangle} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + \dots}$

Def: Măsura $\measuredangle$ dintre 2 vectori $u \neq v \neq 0$ va fi

$$\cos(\measuredangle u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

$u \perp v \iff u \cdot v = 0.$

Th. 3 perpendiculare



$$\left.\begin{array}{l} PQ \perp \pi \\ QR \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow PR \perp d.$$

Dem: din $d = \langle v \rangle$

$\vec{PQ} \perp \pi \Rightarrow \langle \vec{PQ}, v \rangle = 0.$

$\vec{QR} \perp d \Rightarrow \langle \vec{QR}, v \rangle = 0.$

$$\langle \vec{PR}, v \rangle = \underbrace{\langle \vec{PQ}, v \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \vec{QR}, v \rangle}_{0} = 0 \Rightarrow PR \perp d.$$

Obs: [O dr. $d \perp \pi$ ($d \perp d'$ $\forall d' \in \pi$)] $\iff$ [d e $\perp$ pe 2 dr neparalele din π.]

Obs: Formula dist de la $P(x_0, y_0, z_0)$ la $\pi: ax + by + cz + d = 0$ este:

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dem: din $\pi \langle ax + by + cz = 0 \rangle$

Un vector $u \perp \pi \Rightarrow u = (a, b, c) \Rightarrow$ ec dr prin $P_0 \perp \pi$ va fi

$$d^{\perp}: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \cap \pi \Rightarrow t_0 = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \ldots$$

Transformări ale spațiului

Aspecte afine (k = corp comutativ arbitrar)

Def: S.n. aplicație afină o funcție $f: k^3 \to k^3$
$$f(X) = AX + B,$$

$$\begin{cases} A \in M_3(k) \\ B \in M_{3,1}(k) \end{cases}$$

Ex: $\begin{cases} 1) \text{ translația: } f(X) = X + B \\ 2) \text{ omotetia: } f(X) = \lambda X + B, \ \lambda \in k \setminus \{0\} \\ 3) \text{ automorfisme liniare: } f(X) = AX + B; \ \det A \neq 0. \end{cases}$

Pentru $\boxed{k = \mathbb{R}}$

Prop: O apl. afină este izometrie ($\forall P, Q \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$
$d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$) $\Leftrightarrow f(X) = AX + B$ cu $A \cdot {}^tA = I_3$.

Dem: Obs că f izometrie $\Leftrightarrow T(X) = AX$ păstrează produsul scalar $\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = \langle T(u), T(v) \rangle$.

$$O(3) = \{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A \cdot {}^tA = I_3 \}$$

$(O(3), \cdot)$ este grup

$SO(3) = \{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \} \Leftarrow$ gr. special ortogonal.

Prop: Fie $A \in SO(3)$. Atunci A are o "axă" de rotație
$\Leftrightarrow \exists\, v \neq 0$ vector a.î. $Av = v$.

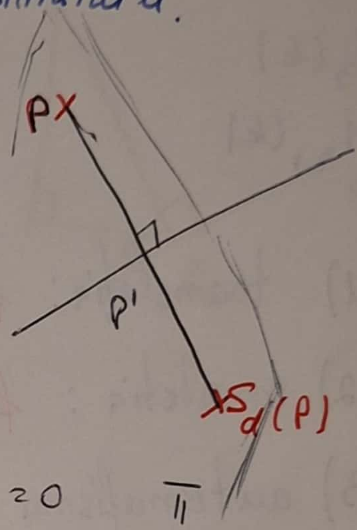
Dem: Arăt că $Av = v$ are cel puțin o sol

$v = (v_1, v_2, v_3)$ nenulă. $\Leftrightarrow \det(A - I_3) = 0$.

$$d = \det(A - I_3) = \underbrace{\det A}_{1}\,(I_3 - {}^tA) = \det(I_3 - A) = (-1)^3 d = -d$$

$\Rightarrow d = 0$.

Ex de transformări ortogonale: simetriile.



$$d: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{și } P = (1,2,3)$$

$\Rightarrow \text{dir } d = \langle (1,2,2) \rangle$

Iau planul π a.î. $\begin{cases} P \in \pi \\ \pi \perp d \end{cases}$

$\Rightarrow \pi: 1\cdot(x-1) + 2(y-2) + 2(z-3) = 0$

$\pi: x + 2y + 3z - 10 = 0.$

$P' = \pi \cap d \Leftrightarrow t_0 + 1 + 4t_0 - 2 + 4t_0 - 11 = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow P' = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$

$S_d(P) = \left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$

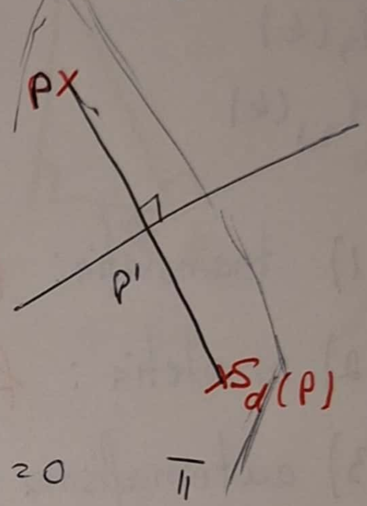
Dem: Arăt că $AV = V$ are cel puțin o sol

$v = (v_1, v_2, v_3)$ nenulă. $\iff \det(A - I_3) = 0.$

$$d = \det(A - I_3) = \underbrace{\det A}_{1}(I_3 - {}^tA) = \det(I_3 - A) = (-1)^3 d = -d$$

$$\Rightarrow d = 0.$$

Ex de transformări ortogonale: simetriile.



$d: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 2t \end{cases}$ și $P = (1,2,3)$

$\Rightarrow$ dir $d = \langle (1,2,2) \rangle$

Iau planul π a.î. $\begin{cases} P \in \pi \\ \pi \perp d \end{cases}$

$\Rightarrow \pi : 1\cdot(x-1) + 2(y-2) + 2(z-3) = 0$

$\pi : x + 2y + 3z - 10 = 0.$

$P' = \pi \cap d \iff t_0 + 1 + 4t_0 - 2 + 4t_0 - 11 = 0 \iff t_0 = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow P' = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$

$S_d(P) = \left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\cancel{7}}{3}\right)$

Curs 10-11 - Geometrie - 6.12.2023

Conica (= curbe plane de gr 2)

Def: Fie A = planul afin peste un corp k cu char k $\neq 2$.

Fie R un reper cartezian fixat peste A. S.n. conică / curbă algebrică de gr 2 o submulțime $\mathcal{C} \subset A$ pt. care $\exists$ un polinom $F \in k[X,Y]$ de gr 2 a.î. $\mathcal{C} = \{F(X,Y) = 0\}$.

(F = ec. conicei)

Formă generală pol gr 2: $F(X,Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2b_1X + 2b_2Y + c$

Pb: Putem găsi, făcând eventual o schimbare afină de coord., o ec. mai simplă pt. conica dată?

Obs (Gauss): Ec. $\forall$ conice se poate aduce prin schimbări afine de coord. la una din urm. forme:

1) $\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \mu = 0$ cu $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$.
2) $\lambda_1X^2 + \mu Y = 0$ cu $\lambda_1, \mu \neq 0$.
3) $\lambda_1X^2 + c = 0$ cu $\lambda_1 \neq 0$

} forma canonică

Dem obs: Pp. $\boxed{a_{11} \neq 0 \text{ sau } a_{22} \neq 0}$ (De. $a_{22} \neq 0$ fac schimbarea de variab. $X \leftrightarrow Y$ și obț. $a_{11} \neq 0$).

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2b_1X + 2b_2Y + c = 0.$$

$$a_{11}\left(x^2+2\frac{a_{12}}{a_{11}}xy+\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2y^2\right)+\underbrace{\left(a_{22}-\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2\right)}_{\lambda_2}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0$$

$$\underset{\lambda_1\neq 0}{a_{11}}\underbrace{\left(x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)}_{x_1}^2+\lambda_2\underbrace{y}_{y_1}^2+2b_1x+2b_2y+c=0.$$

Fac schimb. afină de coord $\begin{cases} x_1=x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y \\ y_1=y. \end{cases}$

Ec. devine $\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+2b_1'x_1+2b_2'y_1+c=0.$

$\boxed{\text{Dc. } \lambda_2\neq 0}$ $\Rightarrow \lambda_1(x_1^2+2b_1'+(b_1')^2)+\lambda_2(y_1^2+2b_2'+(b_2')^2)+$
$+\underbrace{(c-(b_1')^2-(b_2')^2)}_{c'}=0.$

$\lambda_1(x_1+b_1')^2+\lambda_2(y_1+b_2')^2+c'=0.$

Fac schimb. afină de coord $\begin{cases} x_2=x_1+b_1' \\ y_2=y_1+b_2' \end{cases}$

Ec. devine $\lambda_1x_2^2+\lambda_2y_2^2+c'=0.$

$\boxed{\text{Dc. } \lambda_2=0}$ $\Rightarrow \lambda_1(x_1^2+2b_1'+(b_1')^2)+2b_2'y_1+\underbrace{(c-(b_1')^2)}_{c'}=0$

$\lambda_1(x_1+b_1')^2+2b_2'y+c'=0.$

Fac schimb. afină de coord $\begin{cases} x_2=x_1+b_1' \\ y_2=y_1. \end{cases}$

Ec. devine $\lambda_1x_2^2+2b_2'y_2+c'=0.$

Dc. $b_2' = 0 \Rightarrow$ ec. este $\lambda_1 x_2^2 + c' = 0$.

Dc. $b_2' \neq 0 \Rightarrow$ ec este $\lambda_1 x_2^2 + 2b_2\left(y_2 + \frac{c'}{2b_2}\right) = 0$.

Fac schimb. afină de coord $\begin{cases} x_3 = x_2 \\ y_3 = y_2 + \frac{c'}{2b_2} \end{cases}$

Ec. devine $\lambda_1 x_3^2 + 2b_2 y_3 = 0$.

$\boxed{\text{Dc. } a_{11} = a_{22} = 0} \Rightarrow a_{12} \neq 0$ (ec. de gr. 2) $\Rightarrow$ fac schimb. de coord. $\begin{cases} x = x_1 + y_1 \\ y = x_1 - y_1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ ec. se reduce la cazul ant.

Reprezentări grafice ale conicii ($k = \mathbb{R}^2$)

În cazul $k = \mathbb{R}^2$, făcând eventual schimbări afine de coord, ec. poate fi adusă într-o formă mai simplă, forma canonică.

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0$; $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.

$\boxed{1 \cdot \mu = 0} \Rightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$.

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ schimb. $\begin{cases} x_1 = \sqrt{\lambda_1}\, x \\ y_1 = \sqrt{\lambda_2}\, y \end{cases}$ $\Rightarrow$ ec. devine $\boxed{x^2 + y^2 = 0}$
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ înmulțesc rel cu $-1 \Rightarrow$ caz de mai sus.
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ schimb $\begin{cases} x_1 = \sqrt{\lambda_1}\, x \\ y_1 = \sqrt{-\lambda_2}\, y \end{cases}$ $\Rightarrow$ ec. devine $\boxed{x^2 = y^2}$
- $\lambda_1 < 0, \lambda_1 > 0 \Rightarrow$ înmulțesc rel cu $-1 \Rightarrow$ caz de mai sus

$\boxed{\bullet \mu \neq 0} \Rightarrow a = \frac{\lambda_1}{\mu},\ b = \frac{\lambda_2}{\mu} \Rightarrow$ ec. devine $a x^2 + b y^2 + 1 = 0$.

- $\underline{a, b > 0} \Rightarrow$ schimb $\begin{cases} x_1 = \sqrt{a}\, x \\ y_1 = \sqrt{b}\, y \end{cases} \Rightarrow$ ec. devine $\boxed{x^2 + y^2 + 1 = 0}$
- $\underline{a, b < 0} \Rightarrow$ schimb $\begin{cases} x_1 = \sqrt{-a}\, x \\ y_1 = \sqrt{-b}\, y \end{cases} \Rightarrow$ ec. devine $\boxed{x^2 + y^2 - 1 = 0}$
- $\underline{a > 0, b < 0} \Rightarrow$ schimb. $\begin{cases} x_1 = \sqrt{a}\, x \\ y = \sqrt{-b}\, y \end{cases} \Rightarrow$ ec. devine $\boxed{x^2 - y^2 + 1 = 0}$
- $\underline{a < 0, b > 0} \Rightarrow$ schimb $\begin{cases} x_1 = \sqrt{-a}\, x \\ y_1 = \sqrt{b}\, y \end{cases} \Rightarrow$ ec. devine $\boxed{-x^2 + y^2 + 1 = 0}$

2) $\lambda_1 x^2 + \mu y = 0$ cu $\lambda_1, \mu \neq 0$.

- $\underline{\lambda_1 > 0} \Rightarrow$ schimb $\begin{cases} x_1 = \sqrt{\lambda_1}\, x \\ y_1 = \mu y \end{cases} \Rightarrow$ ec. devine $\boxed{x^2 + y = 0}$
- $\underline{\lambda_1 < 0} \Rightarrow$ schimb $\begin{cases} x_1 = \sqrt{-\lambda_1}\, x \\ y_1 = -\mu y \end{cases} \Rightarrow$ ec. de mai sus.

3) $\lambda_1 x^2 + \mu = 0 \Leftrightarrow \cancel{x^2 = -\frac{\mu}{\lambda_1}}$

$\boxed{\bullet \mu = 0} \Rightarrow$ ec. devine $\boxed{x^2 = 0}$

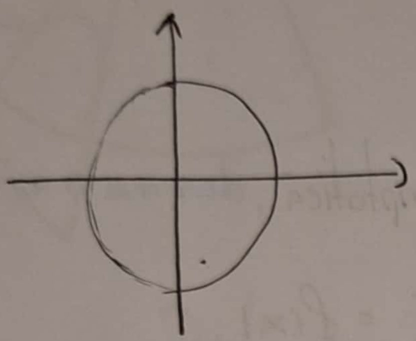
$\boxed{\bullet \mu \neq 0} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\mu} x^2 + 1 = 0$.

- $\frac{\lambda_1}{\mu} > 0 \Rightarrow$ schim $x' = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\mu}}\, x \Rightarrow$ ec. devine $\boxed{x^2 + 1 = 0}$
- $\frac{\lambda_1}{\mu} < 0 \Rightarrow$ schimb $x' = \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\mu}}\, x \Rightarrow$ ec. devine $\boxed{x^2 = 1.}$

Reprezentare grafică:

1) $x^2+y^2+1=0 \Rightarrow$ conica vidă

2) $x^2+y^2-1=0 \Rightarrow$ elipsa (caz particular cerc)



3) $x^2-y^2+1=0 \Rightarrow$ hiperbolă

$y = \pm\sqrt{x^2+1}$

! Această conică e simetrică față de Ox și Oy. !

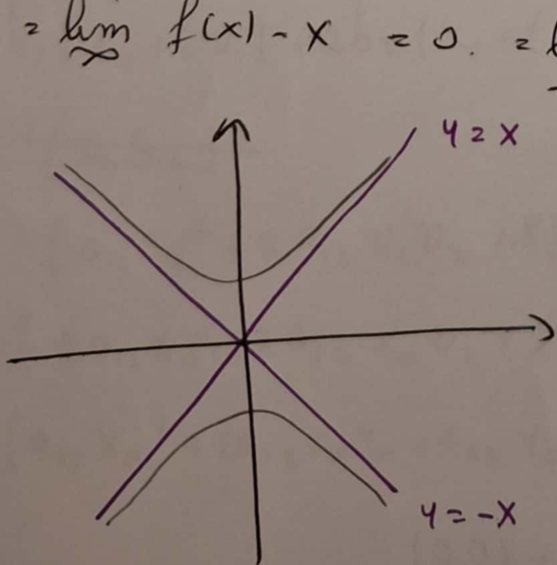
$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$\lim\limits_{\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \nexists$ asimptotă orizontală.

$m = \lim\limits_{\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1 \text{ la } +\infty \\ -1 \text{ la } -\infty \end{cases}$

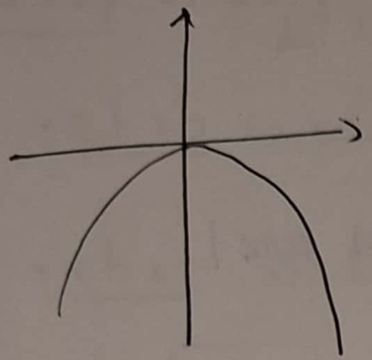
$n = \lim\limits_{\infty} f(x) - x = 0 = \lim\limits_{-\infty} (-f(x)+x)$

$\Rightarrow$ $y = x$ asimptotă oblică la $+\infty$, $y=-x$ — " — $-\infty$



f' și $f'' > 0$.

4) $x^2+y=0 \Rightarrow$ parabolă



! Pt. parabolă apare o direcție asimptotică, dar nu o asimptotă !

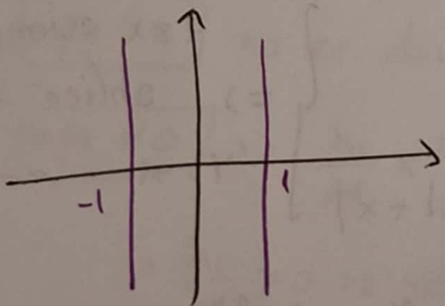
$x^2=y$ schimb $x \leftrightarrow y \Rightarrow y=\sqrt{x}=f(x)$.

$\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x}=0=m.$

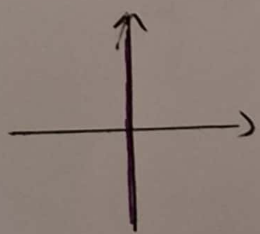
$n=\lim\limits_{\infty} f(x)-mx=\infty.$

5) $x^2+1=0 \Rightarrow$ conica vidă

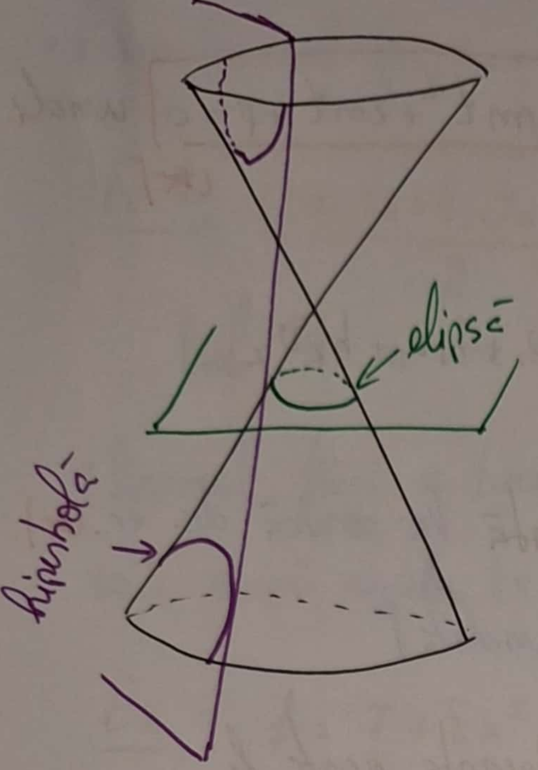
6) $x^2-1=0 \Rightarrow$ pereche de dr. $\parallel$ $\mathcal{C}=\{(1,y) \mid y\in\mathbb{R}\} \cup \{(-1,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$

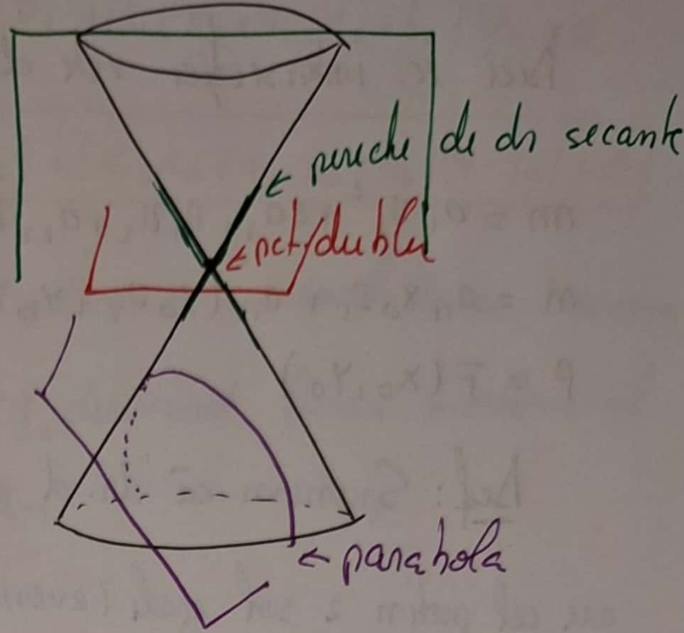


7) $x^2=0 \Rightarrow$ dr. dublă $\mathcal{C}=Oy$.



8) $x^2+y^2=0 \Rightarrow$ pct. dublu $\mathcal{C}=(0,0)$





Poziția unei dr. față de conică

Pb: Se dă conica $\mathcal{C}: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$

și dr. $d: \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$, $v = (v_1, v_2) \in \operatorname{dir}(d)$.

Ce putem spune despre $\mathcal{C} \cap d = ?$

Intersecția $\mathcal{C} \cap d$ e ec. în t:

$$a_{11}(x_0 + tv_1)^2 + 2a_{12}(x_0 + tv_1)(y_0 + tv_2) + a_{22}(y_0 + tv_2)^2$$
$$+ 2b_1(x_0 + tv_1) + 2b_2(y_0 + tv_2) + c = 0 \Leftrightarrow$$

~~$t^2(v_1^2 + \ldots$~~

$$t^2(a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2) +$$
$$t(2a_{11}x_0v_1 + 2a_{12}x_0v_2 + 2a_{12}y_0v_1 + 2a_{22}y_0v_2 + 2b_1v_1 + 2b_2v_2) +$$
$$+ (a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2b_1x_0 + 2b_2y_0 + c) = 0.$$

Deci ec. intersecției este de forma $\boxed{mt^2+2nt+p=0}$ unde (★)

$m = a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2$

$n = a_{11}x_0v_1 + a_{12}(x_0v_2 + y_0v_1) + a_{22}y_0v_2 + b_1v_1 + b_2v_2$

$p = F(x_0, y_0)$

Def: Spunem că dr. d este tangentă la conică dc. ec. (★) are cel puțin 2 sol egale (eventual confundate)

Caz 1: $m \neq 0$ => ec. (★) e de gr 2 => dreapta poate fi

- exterioară <=> (★) nu are sol
- tangentă <=> (★) are 2 sol confundate
- secantă <=> (★) are 2 sol dif.

Caz 2: $\begin{cases} m = 0 \\ n \neq 0 \end{cases}$ => ec. (★) e ec. de gr. 1 => are sol unică =>

Def: Spunem că dr. d are direcție asimptotică când

$\boxed{m = 0 \Leftrightarrow a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 = 0.}$

Terminologie: O dr. de direcție asimptotică pt. care (★) are sol s.n. secantă de dir. asimptotică.

Tangenta la conică

Fie $\mathcal{C}$ o conică, $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$. Dr. $d \ni P_0$ e tg. la conică

=> $\begin{cases} p = 0 \text{ (termenul liber)} \\ n = 0 \text{ (ec. de gr. 2 are 2 sol confundate.} \end{cases}$

$\Rightarrow$ are loc rel $(a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1)v_1+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+b_2)v_2=0$.

Ec. tg: $\boxed{\underset{A}{\underbrace{(a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1)}}(x-x_0)+\underset{B}{\underbrace{(a_{12}x_0+a_{22}y_0+b_2)}}(y-y_0)=0}$

Def: Fie k un corp, f un polinom cu coef în k. Derivăm (formal, fără a trece la limite), derivând fiecare monom al său după regula $(x^d)'=dx^{d-1}$.

Ex: $f=\bar{1}+\bar{2}x^2+x^3\in\mathbb{Z}_3[x]$

$f'=\bar{0}+\bar{2}\cdot\bar{2}x+\bar{3}\cdot x^2$

$f'=\cancel{x}$

Notație: Fie f un polinom în mai multe variabile $\{x_1,\dots x_n\}$.

Notez $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pol f derivat în funcție de x_i, iar celelalte = const.

Ex: $F(x,y,z)=2xy^2z+3x^2+2y^2+5z^3+4x^2y$.

$\frac{\partial F}{\partial x}=2y^2z+6x+8xy$.

$\frac{\partial F}{\partial z}=2xy^2+15z^2$

$\frac{\partial F}{\partial y}=4xyz+4y+4x^2$

Ec. tangentei este: $\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0}$

Caz particular: $F(x,y)=y-f(x)$

$\frac{\partial F}{\partial x}=-f'(x)$ și $\frac{\partial F}{\partial y}=1\Rightarrow$ ec. tg este $y-y_0=f'(x)(x-x_0)$

Pb: Dat un pct $P=(x_0,y_0)\in\mathcal{C}$ se poate întâmpla ca prin el să existe 2 tg. distincte?

Pp: $(x_0,y_0)\in\mathcal{C}$ și $d_1=\begin{cases}x=x_0+tv_1\\ y=y_0+tv_2\end{cases}$ $\quad d_2=\begin{cases}x=x_0+tu_1\\ y=y_0+tu_2\end{cases}$

cu $(u_1,u_2)\notin\langle(v_1,v_2)\rangle \Rightarrow \begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ u_1 & u_2\end{vmatrix}\neq 0$.

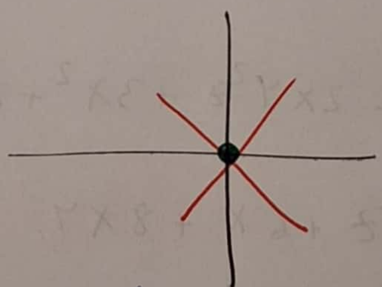
Pp. $\begin{rcases} d_1 \text{ tg} \Rightarrow \\ d_2 \text{ tg} \Rightarrow \end{rcases}$ $\begin{cases} Av_1+Bv_2=0.\\ Av_1+Bv_2=0\end{cases}$

Acest sistem în necunoscutele A și B va fi unic det $\Rightarrow$

are sol unică $A=B=0. \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

Def: Pct. în care $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, prin ele se pot duce 2 tg dif. la ~~ge~~ conică și s.n. pct. singulare

Ex: $F(x,y)=x^2+y^2$



Def: Pct. care nu sunt singulare s.n. pct. netede sau regulate.

Curs 12 - Geometrie - 11.12.2023

Ec. conicei $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$

se scrie sub formă matriceală $\boxed{{}^tXAX + 2BX + C = 0}$ cu $A = {}^tA$.

$\Rightarrow$ ec. intersecției $\mathcal{C} \cap d \Leftrightarrow$

$${}^t(X_0 + tv)A(X_0 + tv) + 2B(X_0 + tv) + C = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2({}^tvAv) + (\overbrace{{}^tX_0Av}^{\in} + \overbrace{{}^tvAX_0}^{=} + 2Bv)t +$$

$$+ ({}^tX_0AX_0 + 2BX_0 + C) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ({}^tvAv)t^2 + 2({}^tX_0Av + Bv)t + F(X_0) = 0.$$

Dr.
- are dir. asimptotică $\Leftrightarrow \boxed{{}^tvAv = 0}$ $v \in \text{dir}(d)$
- este tg. la conică $\Leftrightarrow \boxed{({}^tX_0A + B) \cdot v = 0}$ $v \in \text{dir}(d)$

$\Rightarrow$ ec. $X \in T_{X_0}\mathcal{C} \Leftrightarrow ({}^tX_0A + B)(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow$

$${}^tX_0AX - {}^tX_0AX_0 + BX - BX_0 = 0 \quad (1).$$

$X_0 \in \mathcal{C} \Rightarrow {}^tX_0AX_0 + 2BX_0 + C = 0. \Rightarrow 2BX_0 + C = -{}^tX_0AX$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow {}^tX_0AX + BX_0 + BX + C = 0$ ec. tg. $T_{X_0}\mathcal{C}$.

Obs: Ec tangentei într-un pct. $X_0 \in \mathcal{C}$ se poate scrie ca:

$\boxed{{}^tX_0AX + BX + BX_0 + C = 0}$ $\rightarrow$ dedublarea în pct-ul $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ a ec. conicei

Def: Fie $\mathcal{C} \in k^2$ cu char $k \neq 2$ de ec. $F(x,y) = 0$,

$F(x,y) = {}^tXAX + 2BX + C$. Un pct. $\Omega = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ este centru pt. $\mathcal{C}$ <=> F ia val egale în pct. sim față de Ω <=>

$$\boxed{F(X_\Omega - X) = F(X + X_\Omega)}$$

Prop: ec. centrelor: Un pct. de coord X_Ω este centru pt. conică $\mathcal{C}$ <=> $\boxed{AX_\Omega + {}^tB = 0}$

Dem: ${}^t(X + X_\Omega)A(X + X_\Omega) + 2B(X + X_\Omega) + \cancel{C} =$

$= {}^t(X - X_\Omega)A(X - X_\Omega) + 2B(X_\Omega - X) + \cancel{C}$ <=>

<=> $\cancel{{}^tXAX} + {}^tX_\Omega AX + {}^tXAX_\Omega + \cancel{{}^tX_\Omega AX_\Omega} + 2BX + \cancel{2BX_\Omega} =$

$= \cancel{{}^tXAX} - {}^tXAX_\Omega - {}^tX_\Omega AX + \cancel{{}^tX_\Omega AX_\Omega} + \cancel{2BX_\Omega} - 2BX$.

<=> ${}^tX_\Omega AX + {}^tXAX_\Omega + 2BX = 0$. <=>

<=> $\cancel{X_\Omega\, {}^tXAX_\Omega + BX = 0}$. $({}^tX_\Omega A + B)X = 0$ <=>

<=> ${}^tX_\Omega A + B = 0$ <=> $AX_\Omega + {}^tB = 0$.

Obs: Ec. centrelor este $\boxed{\frac{\partial F}{\partial(x)}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0}$

=> Un pct. $\Omega = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ este pct. singular $\mathcal{C}$ <=> e centru de simetrie al conicii și e situat pe conică.

1) Elipsa (pt. ec. canonică) : $F(x,y) = x^2+y^2-1$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow x = y = 0$

$\Rightarrow$ elipsa are centru de simetrie $O(0,0) \notin$ elipsă $\Rightarrow$ nu are pct. singulare.

2) Hiperbolă : $F(x,y) = x^2-y^2+1$

Ec. centrelor : $2x = 2y = 0 \Rightarrow \mathcal{H}$ are centru de simetrie $O = (0,0)$ $\notin \mathcal{H} \Rightarrow$ nu are pct. singulare

3) Parabola : $F(x,y) : x^2-2y = 0$.

Ec. centrelor : $\begin{cases} 2x = 0. \\ -2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ nu are centru de simetrie $\Rightarrow$ nu are pct. singulare.

4) Perechea de dr. secante : $F(x,y) = x^2-y^2$

Ec. centrelor : $2x = -2y = 0 \Rightarrow$ are centru de simetrie $O = (0,0) \in \mathcal{C}$ $\Rightarrow$ are $(0,0)$ pct. singular.

5) Perechea de dr $\parallel$: $F(x,y) = x^2-1 = 0$.

Ec. centrelor : $2x = 0 \Rightarrow$ toate pct. de forma $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$ sunt centre de simetrie, nu are pct. sg.

6) Dr. dublă : $x^2 = 0$

Ec. centrelor : $2x = 0 \Rightarrow$ toate pct. $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$ sunt centre de sim, + pct. sg.

Remarcă: Dc. $\mathcal{C}$ = dr. dublă $\Rightarrow$ $\forall$ dr $\cap \mathcal{C}$ este tangentă la conică.

Dem: $d: \begin{cases} x = tv_1 \\ y = b + tv_1 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C} \cap d$: are ec. $(tv_1)^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ e o răd. dublă.

7) Pct. dublu: $F(x,y) = x^2 + y^2$

Ec. centrelor: $2x = 2y = 0 \Rightarrow (0,0)$ centru de simetrie + pct sg.

Pb: Dată o conică de ec. generală, putem să o aducem la formă canonică prin izometrii?

Prop: Ec. oricărei conice poate fi adusă la formă canonică prin izometrii.

Dem: $\mathcal{C}: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$.

Vrem coef xy să fie 0. Fac o notație: $\begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$.

$\mathcal{C} \Leftrightarrow a_{11}(x'\cos\theta + y'\sin\theta)^2 + 2a_{12}(x'\cos\theta + y'\sin\theta)(-x'\sin\theta + y'\cos\theta) + a_{22}(-x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 \Rightarrow$

partea pătratică

$\Rightarrow$ coef lui $x'y'$ va fi:

$-2a_{11}\sin\theta\cos\theta + 2a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2a_{22}\sin\theta\cos\theta =$

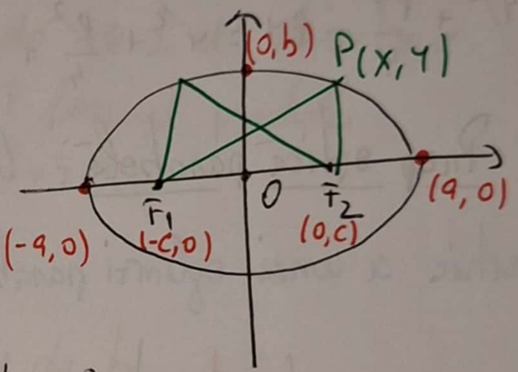
$a_{11}\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta - a_{22}\sin 2\theta = 0. \;\; | : \cancel{\cos 2\theta}\ \sin 2\theta$

$\text{ctg}\, 2\theta = \cancel{\frac{-2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}}\ \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}}.$

$\boxed{k = \mathbb{R}}$

Descrieri metrice ale elipsei / hiperbolei / parabolei

Prop: Fie F_1, F_2 pct. fixate în plan și $a \in \mathbb{R}$ a.î. $2a > |F_1F_2|$.
Mulțimea pct. din plan care satisfac $\boxed{|PF_1| + |PF_2| = 2a}$ este o elipsă, iar F_1 și F_2 s.n. focare.



Dem: Aleg un sist. de coord. a.î. $Ox = \overrightarrow{F_1F_2}$ și O mij. F_1F_2.

$|PF_1| + |PF_2| = 2a \iff$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad |\,()^2$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2xc+\cancel{y^2} = 4a^2+\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}-2xc-4a\sqrt{} \iff$$

$$\iff xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \iff x^2c^2 + a^4 - 2a^2xc = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - 2a^2xc \iff$$

$$\cancel{x^2+c^2} \quad x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 + x(-2a^2c+2a^2c) + a^2(c^2-a^2) = 0.$$

$$\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \implies \boxed{a^2 = b^2+c^2}$$

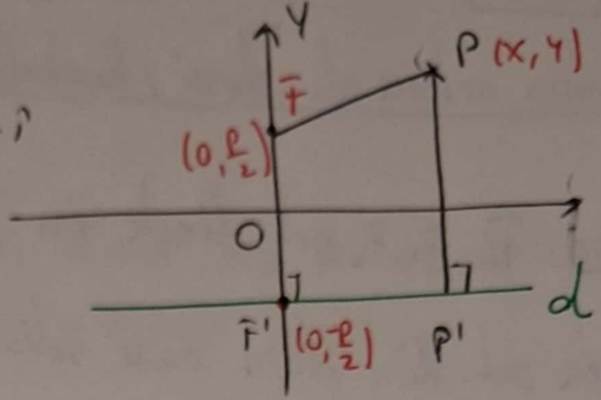
Def: a și b s.n. semiaxele elipsei.

Prop: Fie F_1, F_2 pct. fixate, $F_1 \neq F_2$ și $a \in \mathbb{R}$. Mulțimea pct. a.î. $\boxed{\big||PF_1| - |PF_2|\big| = a}$ este o hiperbolă.

Prop: Fie d o dr. fixată și $F \notin d$ fix. Mulțimea pct. P a.î. $\boxed{d(P,F) = d(P,d)}$ este o parabolă.

F s.n. focar și d - directoarea parabolei

Dem: Aleg un reper xOy a.î. O mij FF'; $Ox \parallel d$.

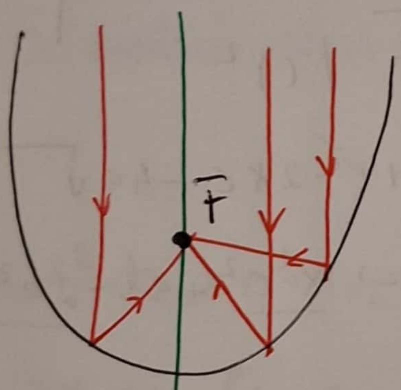


$d(P,F) = d(P,d) \Leftrightarrow$

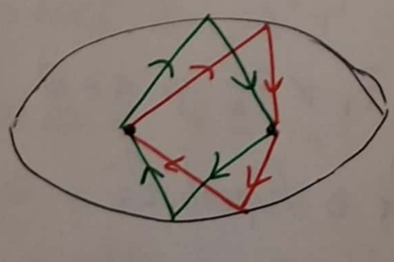
$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} = \left(y+\frac{p}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x^2+\cancel{y^2}+\cancel{\frac{p^2}{4}}-py = \cancel{y^2}+\cancel{\frac{p^2}{4}}+py. \Rightarrow x^2 = 2py. \Rightarrow \text{parabolă.}$$

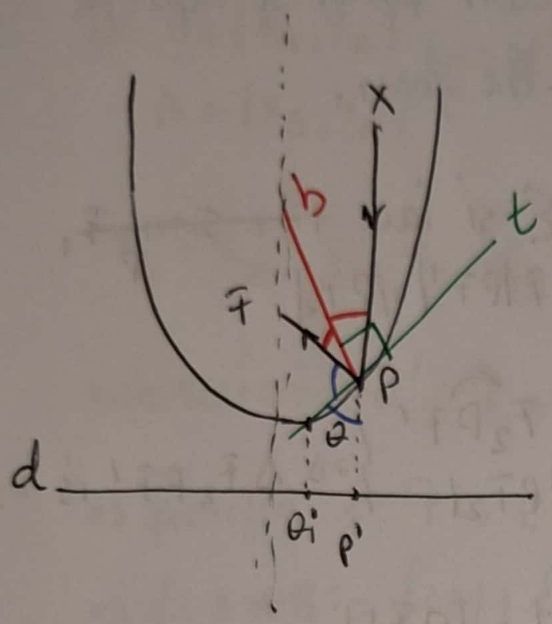
Prop optică parabolă: O rază de lumină $\parallel$ cu axa de simetrie a unei oglinzi parabolice se reflectă trecând prin focar.



Prop. optică elipsă: O rază optică care trece printr-un focar al elipsei se reflectă prin al 2-lea focar.



Curs 13 - Geometrie - 18.12.2023



Dem prop. optică parabolă:

Prop.: O rază de lumină $\parallel$ axa de simetrie a parabolei se reflectă trecând prin focar.

Ip: dr $XP \perp d$ directoare
F focarul parabolei
$r_i = FP$.

Notez b - bis $\sphericalangle X\hat{P}F$
t - perpendiculara în P pe dr. b.

Vreau t tangentă

Evident $t \nparallel d$. $\Rightarrow$ tb. să arăt că $t \cap \mathcal{C} = \{P\}$.

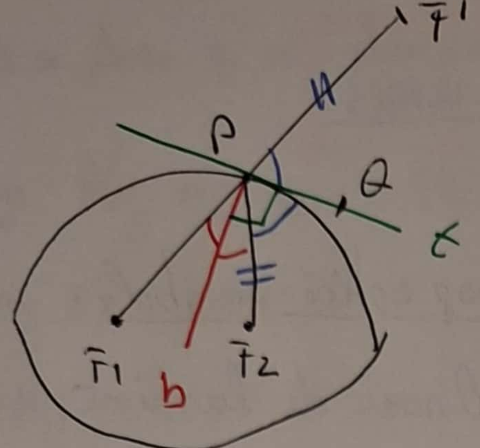
Fie $Q \in t \setminus \{P\}$ pct. arbitrar.

$$\left.\begin{array}{l} b \perp t \\ b \text{ bis } F\hat{P}X \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t \text{ bis } F\hat{P}P' \\ |PF| = |P'P| \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PFP' \text{ is} \Rightarrow PQ \text{ mediatoarea } [FP']$$

$\Rightarrow |FQ| = |QP'|$ (1).

Dc. $Q \in \mathcal{C} \Rightarrow |FQ| = |QQ'|$ (2) $\Bigg\}\overset{(1) \text{ și } (2)}{\Rightarrow} |QP'| = |QQ'|$ fals

$\Rightarrow t \cap \mathcal{C} = \{P\} \Rightarrow t$ tg. $\mathcal{C}$.



Prop: O rază de lumină care trece printr-un focar se reflectă prin al 2-lea focar.

Dem: $P \in \mathcal{E}$ și iau ~~$F' = \text{sim}_P F_1$~~.
$F' \in F_1P$ a.î. $|PF'| = |PF_2|$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } b - \text{bis } \sphericalangle F_1PF_2 \\ t \perp b \text{ cu } P \in t \\ Q \in t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} QP \text{ bis } \widehat{F_2PF'} \\ |PF'| = |PF_2| \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta F_2PF' \text{ is} \Rightarrow$$

$\Rightarrow PQ$ mediatoare $[F_2F'] \Rightarrow |QF_2| = |QF'|$

$$|F_1Q| + |QF_2| = |F_1Q| + |QF'| > |F_1F'| = |F_1P| + |PF_2| = 2a$$

$\Rightarrow Q \notin \mathcal{E} \Rightarrow t \cap \mathcal{E} = \{P\} \Rightarrow t$ tg. la elipsă.

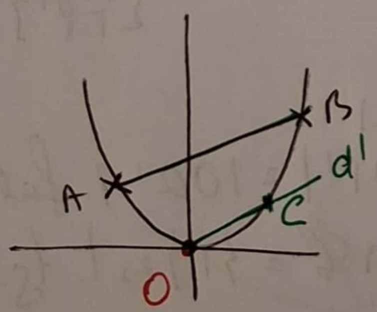
Q: Prop. optică hiperbolă?

Structuri grupale pe conice

k - corp arbitrar cu char $k \neq 2$.

1) **Parabolă**: $(P): y = x^2$. Definim o lege de compoziție $\star : P \times P \to P$ astfel: $O = (0,0)$

$A \star B = C$ unde.



Caz 1: Dc $A \neq B$ ducem paralela d' la AB care trece prin O și $\{C\} = d' \cap P$.

Caz 2: Dc. $A = B$ ducem d' paralela la tangenta în A la P, care trece prin O și $\{C\} = d' \cap P$.

<u>Obs</u>: legea $\star$ este $\begin{cases} \text{com} \\ \text{asociativă} \\ \text{are elem. neutru.} \end{cases}$

Dc. $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ $\Rightarrow d' : \dfrac{x}{x_B - x_A} = \dfrac{y}{y_B - y_A} \Leftrightarrow y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x$

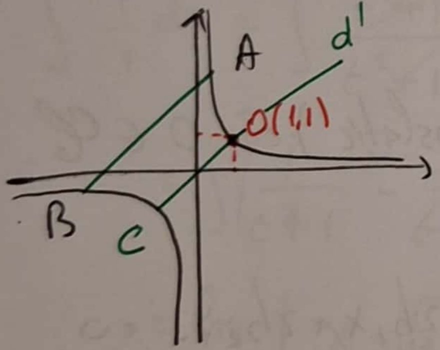
$y_B = x_B^2$ și $y_A = x_A^2 \Rightarrow$ ec. $d' : (x_A + x_B) x = y$.

intersectăm $d' \cap P \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow C(x_A + x_B, (x_A + x_B)^2)$

$\Rightarrow$ funcția $f : P \to k$, $f(P) = x_P$ este bij. Din $C = (x_A + x_B, (x_A + x_B)^2)$

$\Rightarrow f(A \star B) = f(A) + f(B) \Rightarrow \boxed{(P, \star) \simeq (k, +)}$

2) <u>Hiperbolă</u> : $\mathcal{H} : xy = 1$. Definim legea de comp $\star : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$



astfel: $\begin{cases} O = (1,1) \\ A \star B = C \text{ unde } C \text{ se obține} \end{cases}$

intersectând pll prin origine la AB (dc. $A = B$ la tg în A la $\mathcal{H}$).

$d' : \dfrac{x-1}{x_B - x_A} = \dfrac{y-1}{y_B - y_A} \Rightarrow y - 1 = (x-1) \cdot \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = (x-1) \cdot \dfrac{\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_A}}{x_B - x_A}$

$d' : y - 1 = (x-1) \cdot \dfrac{-1}{x_A x_B}$

$d' \cap \mathcal{H} \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y - 1 = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x} = (1-x) \cdot \dfrac{1}{x_A x_B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{C(x_A x_B, y_A \cdot y_B)}$ $\Rightarrow$ funcția $f : \mathcal{H} \to k \setminus \{0\}$, $f(P) = x_P$

e bij și $f(A \star B) = f(A) f(B)$ și $\boxed{(\mathcal{H}, \star) \simeq (k \setminus \{0\}, \cdot)}$

Raționalizarea conicelor

Def: Fie k un corp com. s.n. fracție rațională cu coef în k o fr. de forma $\frac{P(t)}{Q(t)}$, unde $P, Q \in k[X]$.

Notație: $k(t) = \left\{ \frac{P(t)}{Q(t)} \mid P, Q \in k[X] \right\}$

Def: O curbă în k^2 dată de o ec. pol $F(X,Y)=0$ s.n. curbă rațională dc. $\exists$ fracții raționale neconstante $A, B \in k(t)$ a.î ec. curbei să se scrie $F(A(t), B(t)) = 0$.

Ex: Curba de ec $X^3+Y^3=1$ nu e rațională

Prop: Orice conică e rațională.

Dem: Pot pp. (făcând eventual o translație) că $O \in \mathscr{C}$.

$\Rightarrow$ ec. va fi de forma:

$$F(X,Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2b_1X + 2b_2Y = 0.$$

Intersectez conica cu o dr de ec $Y=tX$ cu $t \in k$ arbitrar.

$\Rightarrow$ ec. $\cap$ devine $a_{11}(X)^2 + 2a_{12}tX^2 + a_{22}t^2X^2 + 2b_1X + 2b_2tX = 0 \mid :X$

$\Leftrightarrow (a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2)X + 2b_1 + 2b_2t = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = \dfrac{-2(b_1+b_2t)}{a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2} \in k(t) \Rightarrow X \in k(t) \Rightarrow Y \in k(t).$

Aplicație: Să se calculeze $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = ?$

Notez $y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \underbrace{y^2 = x^2+1}_{\mathcal{H}}$ și originea $O = (0,1) \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow$ Ec. dr prin O ~~ale~~ sunt $y-1 = tx \Rightarrow$ intersectez $d \cap \mathcal{H}$

și obțin $(tx+1)^2 = x^2+1 \Leftrightarrow t^2x^2+2tx+\cancel{1} = x^2+\cancel{1} \;|: x$

$\Leftrightarrow (t^2-1)x+2t = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-2t}{t^2-1}}$ și $\boxed{y = -\frac{t^2+1}{t^2-1}}$

$$dx = \frac{2(t^2+1)}{(t^2-1)^2}\,dt$$

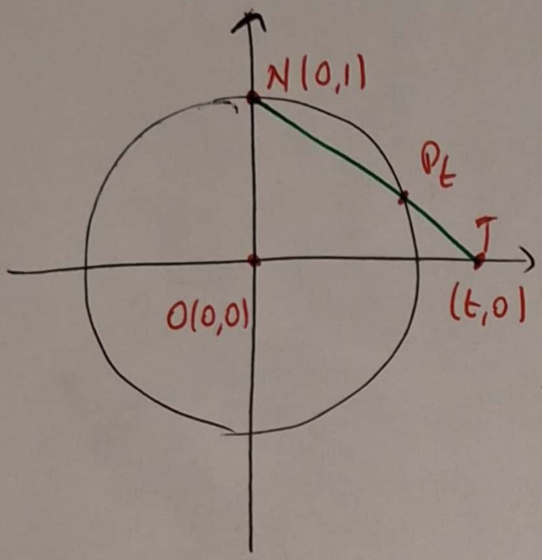
$$\int \frac{1}{y}\,dx = \int \frac{\cancel{t^2-1}}{\cancel{t^2+1}} \cdot \frac{2(\cancel{t^2+1})}{(t^2-1)^{\cancel{2}}}\,dt = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt =$$

$$= \int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt = \ln\frac{t+1}{t-1} + \mathcal{C} = \ln|x+y| + \mathcal{C} =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \mathcal{C}.$$

Curs 14 - Geometrie - 20.12.2023

Raționalizarea cercului: $\mathcal{C}: x^2+y^2=1$.



$NT: \frac{x-0}{t-0} = \frac{y-1}{0-1} \Leftrightarrow \boxed{y = 1-\frac{x}{t}}$

$NT \cap \mathcal{C} \Rightarrow x^2 + \left(1-\frac{x}{t}\right)^2 = 1$

$x^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right) - \frac{2}{t}x + \cancel{1} = \cancel{1} \;\; | : x$

$x = \frac{2}{t}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \boxed{\frac{2t}{t^2+1} = x_{P_t}}$

și $\boxed{y_{P_t} = \frac{t^2-1}{t^2+1}}$

Am obținut parametrizarea rațională $f: k \dashrightarrow \mathcal{C}$

$f(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$

Ec. lui Pitagora: $a^2+b^2=c^2$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $c\neq 0$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1 \Rightarrow P\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)\in\mathbb{Q}^2$ aparține conicei $x^2+y^2=1$

$\xrightarrow[\text{anterioară}]{\text{parametrizarea}}$ $\exists\, t\in\mathbb{Q}$ a.î. $\frac{a}{c} = \frac{2t}{t^2+1}$ și $\frac{b}{c} = \frac{t^2-1}{t^2+1}$.

$t = \frac{m}{n}$, $(m,n)=1$, $m,n\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ și $\frac{b}{c} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} \Rightarrow$ Sol primitivă este

de forma $\begin{cases} a = 2mn \\ b = m^2-n^2 \\ c = m^2+n^2 \end{cases}$