Seminar 10
Structuri Algebrice în Informatică.

Determinați dacă $I = (x^2+1, x^2+3x)$ din $\mathbb{R}[x]$ este întregul inel.

<u>Met 1</u>. $I = \{(x^2+1)\cdot u(x) + (x^2+3x)\cdot v(x) \mid u, v \in \mathbb{R}[x]\}$

$\mathbb{R}$ corp $\Rightarrow$ $\gcd(x^2+1, x^2+3x) = 1$ (2)

(1)

x^2+1: ireductibil în $\mathbb{R}[x]$; $x^2+3x = x(x+3)$ desc. în f. ireductibile

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $I = (1)\,\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x]$

(*) 1 inversabil în ideal

~~Met 2: $I = \mathbb{R}[x]$~~

<u>Met 2</u>: $I = \mathbb{R}[x] \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 1 \in I$

caut dacă $\exists\, u, v \in \mathbb{R}[x]$ cu $1 = u(x)\cdot(x^2+1) + v(x)(x^2+3x)$

<u>Met 3</u>: $I = (x^2+1, x^2+3x)\,\mathbb{R}[x]$

$$x^2+3x = x^2+1 + 3x - 1$$

$$I = (x^2+1, 3x-1) = (\tfrac{1}{3}x+1, 3x-1)\,\mathbb{R}[x]$$

$$x^2+1 = \tfrac{1}{3}x(3x-1) + \tfrac{1}{3}x + 1$$

$$3x-1 = 9(\tfrac{1}{3}x+1) - 10$$

$$I = (\tfrac{1}{3}x+1, -10)\,\mathbb{R}[x] = \underline{\underline{\mathbb{R}[x]}}\ ✓$$

-10 inversabil în $\mathbb{R}[x]$

$-\frac{1}{10} \in \mathbb{R}[x]$

Temă: Determinați dacă idealul $J = (X^2+1, X^2+3X)$ în $\mathbb{Z}[X]$ este întregul inel

$\mathbb{Z}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{Z}[i]$ izo de inele

$\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[i]$ morfism ~~de~~ surj de inele cu $\ker \varphi = (X^2+1)$

$P(X) \longrightarrow P(i)$

Temă: $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$ izo de inele

$\mathbb{C}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ izo de inele

Metoda I

Pentru a aplica LCR caut $\varphi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}\times\mathbb{C}$

T.F izo $f : A_1 \to A_2$ morfism de inele $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1/\ker f \simeq \operatorname{Im} f$ izo de inele

morfism surjectiv de inele cu $\ker f = (X^2+1)$

$P(X) \longrightarrow$ ~~$t0,0$~~ $(P(i), P(-i)) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$

φ este bine definit $\varphi(P(X)) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$

φ este morfism de inele: $\varphi(P_1+P_2) = \varphi(P_1)+\varphi(P_2)$

$((P_1+P_2)(i), (P_1+P_2)(-i))$

$= (P_1(i) + P_2(i), P_1(-i)+P_2(-i))$ ~~$= P_1(i)$~~

$= (P_1(i), P_1(-i)) + (P_2(i), P_2(-i))$

Analog: $\varphi(P_1 \cdot P_2) = \varphi(P_1)\cdot\varphi(P_2)$

$\varphi(1) = (1(i), 1(-i)) = (1,1)$

• $\operatorname{Ker} f = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \tau(P) = (0,0)\}$

$(P(i), P(-i)) = (0,0)$

$P(i) = P(-i) = 0 \Rightarrow i$ și $-i$ sunt rădăcini pt. P

$\Rightarrow X - i \mid P$

$X + i \mid P$

$\Leftrightarrow (X-i)(X+i) \mid P \Leftrightarrow X^2+1 \mid P \Leftrightarrow P \in (X^2+1)$

Deci $\operatorname{Ker} f = (X^2+1)$ ✓ (1)

• τ surjecție

pt $\forall$ $a, b \in \mathbb{C}$ găsim $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ a.î.

$\tau(P) = (a, b)$

$P(i) = a$ și $P(-i) = b$

caut P de gradul 1.

$P(X) = mX + n$ cu $m, n \in \mathbb{C}$

$P(i) = m \cdot i + n = a$

$P(-i) = -mi + n = b$

sistem de 2 ec. cu necunoscutele m și n.

$\Rightarrow 2n = a + b \Rightarrow n = \frac{a+b}{2}$

$\tau\left(\frac{a-b}{2i} X + \frac{a+b}{2}\right) = (a, b) \Rightarrow f$ surjecție

Aplicăm T.F izomorfism la inele (2)

$\Rightarrow \mathbb{C}[X]/(X^2+1) \simeq \operatorname{Im} f = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

LCR: Dacă I_1, I_2 ideale comaximale în inelul A, atunci $A/I_1 \cap I_2 \simeq A/I_1 \times A/I_2$ izo de inele

$I_1 + I_2 = A$

Metoda II (cu LCR)

În inelul $A = \mathbb{C}[X]$ considerăm idealele $I_1 = (X+i)$ și $I_2 = (X-i)$ în $\mathbb{C}[X]$

$I_1 \cap I_2 = (X+i) \cap (X-i) = (\text{lcm}(X+i, X-i)) =$ ireductibile

$= ((X+i)(X-i)) = (X^2+1)$ (corp)

$I_1 + I_2 = (X+i)+(X-i) = (X+i, X-i) = \gcd(X+i, X-i)$
$= (1) = \mathbb{C}[X]$

dacă I_1, I_2 ideale comaximale și „putem" aplica LCR.

$\overset{LCR}{\Longrightarrow} \mathbb{C}[X]/I_1 \cap I_2 \simeq \dfrac{\mathbb{C}[X]}{I_1} \times \dfrac{\mathbb{C}[X]}{I_2}$ izo de inele

$\mathbb{C}[X]/(X^2+1) \underset{izo}{\simeq} \dfrac{\mathbb{C}[X]}{(X+i)} \times \mathbb{C}[X]/(X-i) \underset{izo}{\simeq} \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$A[X]/(X-a) \simeq A$ izo de inele

Ex: Arătați că inelul $\mathbb{Z}[X]$, idealul $I=(2,X)$ nu este ideal principal, adică $\nexists f \in \mathbb{Z}[X]$ a.î. $I=(f)$

Dem. Pp. p.A $\exists f \in \mathbb{Z}[X]$ cu $I=(f)$

$(2,X)=(f) \Rightarrow 2 \in (f) \Rightarrow \exists u \in \mathbb{Z}[X]$

cu ~~$2 \cdot f(x) =$~~ $2 = f(x) \cdot u(x)$ $\Rightarrow 0 = 0 + 0 \Rightarrow$

$\mathbb{Z}$ inel integru grad f

$\Rightarrow$ grad $f = 0 \Rightarrow f \in \mathbb{Z}^*$, $f \in \{\pm 1, \pm 2\}$

Dacă $f = \pm 2 \Rightarrow$ $X \in (\pm 2) \Rightarrow X = \pm 2\, u(x)$ cu $u \in \mathbb{Z}[X]$

$u(x) = \pm \frac{1}{2} x \in \mathbb{Z}[X]$

Dacă $f = \pm 1 \Rightarrow (f) = \mathbb{Z}[X] \Rightarrow (2,X) = \mathbb{Z}[X]$

$(2,X) = \{2 \cdot p(x) + x \cdot p_2(x) \mid p_1, p_2 \in \mathbb{Z}[X]\}$

$\underline{a + x \cdot \text{ceva}}$

sunt polinoamele cu termen liber par, deci $\neq \mathbb{Z}[X]$

$1 \notin (2,X)$

$1 = 2 \cdot p_1(x) + x \cdot p_2(x)$ cu $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}[X]$ $\Big| \Rightarrow$

facem $x = 0$

$1 = 2 \cdot p_1(0) + 0 \Rightarrow p_1(0) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ contradicție

Deci $1 \notin I \Rightarrow I \subsetneq \mathbb{Z}[X]$,

deci I nu e ideal principal în $\mathbb{Z}[X]$

Arătați că sunt izomorfe inelele $\mathbb{Q}[X]/(X^2-1) \simeq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, dar nu sunt izomorfe inelele $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1)$ și $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Pt. prima parte: vrem să aplicăm LCR în inelul $\mathbb{Q}[X]$ pt. idealele

$I_1=(X-1)$ și $I_2=(X+1)$

$I_1+I_2=(X-1)+(X+1) = (X-1, X+1)\,\mathbb{Q}[X] =$
(Q corp)

$= \gcd((X+1),(X-1)) = (1) = \mathbb{Q}[X]$

I_1, I_2 ideale comaximale în $\mathbb{Q}[X]$

$\cancel{I_1\cdot I_2} =$

$I_1\cap I_2 = (X-1)\cap(X+1) = \operatorname{lcm}((X+1),(X-1)) =$

$= (X^2-1)$

Aplicăm LCR $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}[X]/(X^2-1) \simeq \mathbb{Q}[X]/(X-1) \times \mathbb{Q}[X]/(X+1) \simeq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$
izo inele

Deci
Arătăm că $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1)$ și $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ au nr. diferit de elemente idempotente va rezulta că nu sunt inele izomorfe.

$\hat{f} \in \mathbb{Z}[X]/(X^2-1)$ idempotent $\Rightarrow \hat{f}^2=\hat{f}$

$\hat{f} = \widehat{aX+b}$ cu $a,b\in\mathbb{Z}$

$\hat{f}^2 = \widehat{aX+b}^2 = \widehat{(aX+b)^2} = \widehat{a^2X^2+2abX+b^2} =$

$= \widehat{a^2(X^2-1)+2abX+b^2+a^2} = \widehat{a^2(X^2-1)} + \widehat{2abX+a^2+b^2}$

$\hat{f}^2 = \hat{f} \Rightarrow \widehat{2abx + a^2+b^2} = \widehat{ax+b}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$

grad < 2

identificăm $\xRightarrow[\text{coeficienții}]{}$ $\begin{cases} 2ab = a \\ a^2+b^2 = b \end{cases}$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$

Dacă $a \neq 0 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Deci $a = 0 \Rightarrow b^2 = b \Rightarrow b(b-1) = 0 \Rightarrow$

~~$b \in \{0, 1\}$~~

$b \in \{0, 1\}$

Idempotenții din $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1)$ sunt $\hat{0}$ și $\hat{1}$ $\Rightarrow$ $\underline{2 \text{ idemp}}$

Idempotenții din $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $= \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$\underline{4 \text{ idempotenți}}$

$(a, b)^2 = (a, b)$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$

$(a^2, b^2) = (a, b)$

$\begin{cases} a^2 = a \Rightarrow a \in \{0, 1\} \\ b^2 = b \Rightarrow b \in \{0, 1\} \end{cases}$

Concluzie: cele 2 inele nu sunt izomorfe (diferă nr. de idempotenți)