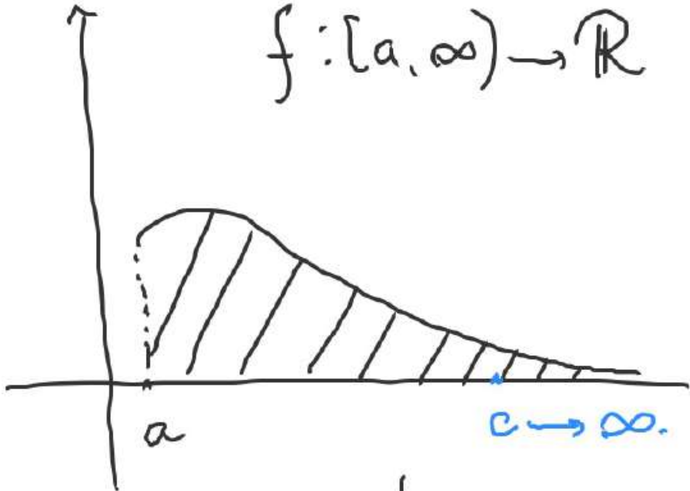
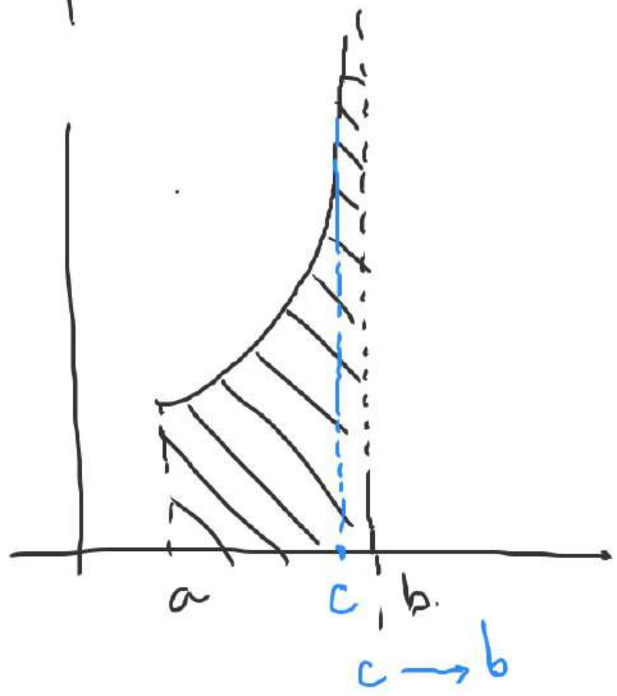
Integrale improprii

Fie $-\infty < a < b \leq \infty$ și $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ local integrabilă, adică f este integrabilă pe $[a,c]$, $\forall c\in(a,b)$. Spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă dacă există și este finită limita

$$\lim_{c\nearrow b}\int_a^c f(x)dx$$

Această limită (dacă există) se numește





$$\lim_{x\nearrow b} f(x)=\infty$$

integrala improprie a lui f şi se notează cu $\int_a^b f(x)dx$

O integrală improprie care nu este convergentă se numeşte divergentă

Spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ se numeşte absolut convergentă dacă integr. improprie $\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă.

Obs: În general o integrală improprie convergentă nu este absolut convergentă.

Dacă limita (1) este $+\infty$ (resp $-\infty$) vom scrie

$$\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \quad \left(\text{resp } \int_a^b f(x)\,dx = -\infty\right).$$

Similar definim integrale improprii pe intervale $(a,b]$ cu $-\infty \leq a < b < \infty$.

<u>Propoziție</u> Fie $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă și $c \in (a,b)$. Atunci integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă dacă și numai dacă $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă. În plus

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

<u>Definiție</u> O funcție $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ unde $-\infty\le a<b\le\infty$ se numește local integrabilă dacă f este integrabilă pe orice interval $[c,d]$ cu $a<c<d<b$. Spunem că integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă dacă există $c\in(a,b)$ a.î. integralele improprii $\int_a^c f(x)dx$ și $\int_c^b f(x)dx$ sunt convergente. Din propoziția anterioară rezultă că definiția nu depinde de c. In acest caz

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \quad \text{unde} \quad c\in(a,b)$$

Ex. 1) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^c = \lim_{c\to\infty} \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2}$$

Deci integr. este convergentă și $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

2) $\int_0^\infty \cos x\,dx$

$$\int_0^c \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^c = \sin c.$$ Nu există $\lim_{c\to\infty} \int_0^c \cos x\,dx$.

Deci int. improprie $\int_0^\infty \cos x\,dx$ este divergentă.

3) $\int_0^1 \ln x \, dx$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\int_c^1 \ln x \, dx = 1 \cdot \ln 1 - 1 - c \ln c + c$$

$$\lim_{\substack{c \to 0 \\ c > 0}} \int_c^1 \ln x \, dx = \lim_{\substack{c \to 0 \\ c > 0}} \left(c \ln c + c - 1 \right) = -1.$$

$$\lim_{\substack{c \to 0 \\ c > 0}} c \ln c = \lim_{d \to \infty} \frac{-\ln d}{d} = 0.$$

Int. este convergentă

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1.$$

Propoziție Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ cu $-\infty<a<b<\infty$ loc. integrabilă și mărginită. Atunci int improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă și pentru orice prelungire $\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ a lui f

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx.$$

Dem. Fie $\tilde{f}:[a,b]$ o prelungire a lui f.

$\tilde{f}$ - mărginită și mulțimea discont. lui f este neglijabilă Lebesgue. Deci $\tilde{f}$ este int Riemann.

Fie $I=\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$

Exemple. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_0^1 \frac{tg\,x}{x}\,dx$ convergente.

Corolar. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ continuă și astfel încât $\lim_{x\nearrow b} f(x)$ există și este finită. Atunci integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

Dem: $\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & a\le x<b \\ \lim_{x\nearrow b} f(x), & x=b. \end{cases}$

Propoziție (Crit Cauchy-Balzano). Fie $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ (unde b este finit sau infinit). Pentru ca limita

$$\lim_{x \to b} f(x)$$

să existe și să fie finită este necesar și suficient ca $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $c_\varepsilon \in (a,b)$ a.î. $\forall$ $c', c'' \in (c_\varepsilon, b)$ avem.

$$|f(c') - f(c'')| < \varepsilon.$$

Teoremă (Crit. lui Cauchy) Fie $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă Int. improprie $\int_a^b f\,dx$ este convergentă dacă și numai dacă

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists c_\varepsilon \in (a,b)$ a.î. $\forall c', c'' \in (c_\varepsilon, b)$ avem

$$\left| \int_{c'}^{c''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

<u>Teoremă</u> (a doua teoremă de medie).

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann cu f monotonă

Atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b fg\,dx = f(a)\int_a^c g\,dx + f(b)\int_c^b g\,dx$$

<u>Teorema</u> (Crit. Abel-Dirichlet).

Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabile cu prop:

1) f descrescatoare și $\lim_{x \to b} f(x) = 0$;

2) există $M > 0$ a.î. $\left| \int_a^c g\,dx \right| \leq M, \ \forall c \in (a,b)$.

Atunci int. improprie $\int_a^b fg\,dx$ este convergentă.

<u>Dem</u>: Fie $\varepsilon > 0$.

$1) \Longrightarrow \exists\, c_\varepsilon \in (a,b)$ a.î. $\forall\, x \in (c_\varepsilon, b)$ avem $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.

$c', c'' \in (c_\varepsilon, b)$; Din a doua teoremă de medie, există

$d \in [c', c'']$ a.î.

$$\int_{c'}^{c''} f g \, dx = f(c') \int_{c'}^{d} g \, dx + f(c'') \int_{d}^{c''} g \, dx$$

$$\left| \int_{c'}^{c''} f g \, dx \right| \leq |f(c')| \left(\left| \int_a^d g \, dx \right| + \left| \int_a^{c'} g \, dx \right| \right) +$$

$$+ |f(c'')| \cdot \left(\underbrace{\left| \int_a^{c''} g \, dx \right| + \left| \int_a^{d} g \, dx \right|}_{\leq 2M} \right) < \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \varepsilon .$$

(Teorema rezultă din crit. Cauchy)

Exemplu : $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ – convergentă (Vezi pag 8)

$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

1) $\frac{1}{x} \searrow 0$

2) $\left|\int_1^c \sin x\,dx\right| \leq 2$

$\xRightarrow{\text{Abel-Dirichlet}} \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ convergentă.

Deci $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ este convergentă.

Este $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ absolut convergentă ?

<u>Propoziție</u>. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ local integrabilă. Dacă $\int_a^b f\,dx$ este absolut convergentă, atunci int. improprie $\int_a^b f\,dx$ este convergentă.

<u>Dem.</u> $$\left|\int_{c'}^{c''} f\,dx\right| \le \int_{c'}^{c''} |f|\,dx.$$

aplicăm. Crit. Cauchy.

<u>Propoziție</u>: Fie $f:[a,b)\to[0,\infty)$ local integrabilă. Atunci $\int_a^b f\,dx$ este convergentă dacă și numai dacă

$$\exists M\geq 0 \text{ a.î. } \int_a^c f\,dx \leq M,\ \forall c\in[a,b)$$

<u>Dem</u>: $c\longmapsto\int_a^c f\,dx$ este o funcție crescătoare și atunci

$$\lim_{c\to b}\int_a^c f\,dx = \sup_{a<c<b}\int_a^c f\,dx$$

Teoremă (Crit. integral al lui Cauchy)

Fie $f: [a, \infty) \to [0, \infty)$ local integrabilă și descrescătoare. Fie p cel mai mic număr natural $a \leq p$.

Integrala $\int_a^\infty f\,dx$ și seria $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ au aceeași natură (adică fie ambele sunt convergente, fie ambele sunt divergente)

Dem. $n \geq p+1$, $\quad f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n-1)$.

$$\sum_{p+1}^{m} f(n) \le \int_p^m f(x)\,dx \le \sum_{p}^{m-1} f(n)$$

Teorema rezultă din faptul:

O serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ cu termeni pozitivi este convergentă

dacă și numai dacă șirul $(S_n)_{n\geq 1}$ al sumelor parțiale

este mărginit $\left(S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n\right)$.

Propoziție-1 Integrală $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ cu $a>0$ și $\alpha>0$

convergentă pt $\alpha>1$ și divergentă pt $0<\alpha\leq 1$.

Propoziție-2 Integrală $\int_0^{1} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$

este convergentă pt $\alpha<1$ și divergentă dacă $\alpha\geq 1$

Obs. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ convergentă dacă și numai dacă $\alpha>1$.

(vezi și din. Crit. integral al lui Cauchy și Prop 1)

Teoremă (Criteriul comparației cu inegalități)

Fie $f, g : [a,b) \longrightarrow [0,\infty)$ local integrabile a.î. $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b)$.

1) Dacă $\int_a^b g(x)\,dx$ este converg atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este converg

2) Dacă $\int_a^b f(x)\,dx$ este diverg atunci $\int_a^b g(x)\,dx$ este diverg.

Dem. $\int_a^b g\,dx$ conv $\Longrightarrow \exists M > 0$ ai $\int_a^c g\,dx \le M$, $\forall c \in (a,b)$

$0 \le f \le g \Longrightarrow \int_a^c f\,dx \le M$, $\forall c \in (a,b) \Longrightarrow \int_a^b f\,dx$ conv.

Teoremă (Crit. comparației cu limită)

Fie $f, g : [a,b) \to [0,\infty)$ local integrabile a.î.

$f \geq 0$ și $g(x) > 0$ pe $[c,b)$ cu $c \in (a,b)$, și limita

$\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ există și este finită și nenulă. Atunci

integralele improprii $\int_a^b f\,dx$ și $\int_a^b g\,dx$ au aceeași natură

Studiați conv. integralei

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^4+x}\,dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \text{ este converg.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1+x^4+x}}{\frac{1}{x^3}} = 1.$$

Comp. cu limită

$$\Longrightarrow \int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^4+x}\,dx \text{ conv.}$$

Funcțiile Beta și Gamma ale lui Euler

Teoremă

1) Integrala improprie

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

este convergentă $p, q > 0$.

2) Integrala improprie

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

este conv pt $p > 0$.

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

Fie $g(x) = x^{p-1} + (1-x)^{q-1}$, $p,q>0$.

Integrala $\int_0^1 g\,dx$ este convergentă. Vom arăta că

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le 2g(x), \quad \forall x \in (0,1)$$

I) $x \in (0, \frac{1}{2}]$: $(1-x)^{q-1} = (1-x)^q \cdot \frac{1}{1-x} \le 2$

$\Downarrow$

$$1-x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1-x} \le 2$$

$\Rightarrow x \in (0, \frac{1}{2}]$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le 2x^{p-1} \le 2g(x)$.

II). $x \in [\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow x^{p-1} = x^p \cdot \frac{1}{x} \le 2x^p \le 2$

$\Downarrow$

$x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} \le 2$

Pt $x \in [\frac{1}{2}, 1)$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le 2(1-x)^{q-1} < 2g(x)$

Așadar, $\forall x \in (0,1)$, $0 < x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le 2g(x)$

Cum $\int_0^1 g\,dx$ este convergentă, rezultă că

$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ este convergentă.

2) $\int_0^\infty x^{p-1} \cdot e^{-x}\, dx \quad , p>0$

Arătăm că $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x}\, dx$ și $\int_1^\infty x^{p-1} e^{-x}$ sunt conv.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x^{p-1} e^{-x} < x^{p-1} \\ \int_0^1 x^{p-1}\, dx \text{ conv} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_0^1 x^{p-1} e^{-x}\, dx \text{ este convergentă.}$$

$h(x) = x^{p-1} e^{-x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 h(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^{p+1} e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{p+1}}{e^x} = 0$.

$\Rightarrow$ există $\alpha > 1$ a.î. $0 < x^2 h(x) < 1$ pt orice $x \in [\alpha, \infty)$

Pe $[1,\alpha]$ funcția $x^2 h(x)$. mărginită pt că este continuă.

Fie $M = \max\left\{1, \sup_{x\in[1,\alpha]} x^2 h(x)\right\}$

Deci $0 < x^2 h(x) \leq M, \ \forall x \in [1,\infty)$, adică

$0 < x^2 \cdot x^{p-1} e^{-x} \leq M, \ \forall x \in [1,\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < x^{p-1} e^{-x} < \frac{M}{x^2}, \ \forall x \in [1,\infty)$

$\int_1^\infty \frac{M}{x^2}\,dx$ conv.

$\Longrightarrow \int_1^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx$ este conv.

$$\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 1 = \Gamma(2)$$

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^c x e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^c + \int_0^c e^{-x}\,dx\right) =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left(-ce^{-c} - e^{-x}\Big|_0^c\right) = \lim_{c\to\infty}\left(-ce^{-c} - e^{-c} + 1\right) = 1.$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1 = \Gamma(1)$$