Tutoriat 6 CDI

Diferențiabilitate. Puncte de extrem

Def: Fie $F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$ $a \in D$

a) F s.n. diferențiabilă în a dacă $\exists\ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniară a.î.

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0}$$

T – diferențiala lui F sau derivata Fréchet a lui F în a

b) F s.n. diferențiabilă pe $\mathbb{R}$ dacă F diferențiabilă în $\forall\ a \in D$.

Notație: $dF(a)$

(T): F diferențiabilă în $a \in D$, atunci F continuă în a.

F constantă $\Rightarrow dF(a) = 0,\ \forall\ a \in D$

F liniară $\Rightarrow dF(a) = F,\ \forall\ a \in D$

Def: $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$

a) Spunem că f are derivată direcțională în a după direcția v dacă există $\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = \frac{df}{dv}(a)}$ $\Rightarrow$ derivata Gâteaux

BONUS
(GEOMETRIE SEM II)

* $v \to$ vector direcțional

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ s.n. baza canonică, unde e_i, $i = \overline{1,n}$ este vector unitate / canonic

ex: $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$

$\mathbb{R}^3 \Rightarrow \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$

Dacă vrem să dezvoltăm un element prin acești vectori vom avea:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ → dezv. vectorului în baza canonică

ex: $\mathbb{R}^3$: $x = (2, -1, 5) \Rightarrow x = 2e_1 - 1e_2 + 5e_3$.

↳ coordonate în spațiu vectorial

Def: $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad a \in D$

*a) Spunem că f are derivată parțială în a în raport cu variabila x_k dacă $\boxed{\exists \frac{df}{de_k}(a) =: \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)}$

b) Dacă $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ derivabilă parțial în a în rap. cu x_k

c) f deriv. part. în a dc f deriv. part. în $\forall a \in D$

*d) f este de clasă C^1 pe D (not $C^1(D)$) dc. f deriv. part. pe D și $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ sunt continue $\forall k \in \overline{1,m}$.

ex: $f(x,y) = x \ln(xy)$ $\quad f: D \to \mathbb{R}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, xy > 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x \ln(xy))'_x = x' \ln(xy) + x \cdot (\ln xy)' =$$

$$= \ln(xy) + x \cdot \frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x \ln(xy))'_y = x' \ln(xy) + x (\ln xy)' =$$

$$= 0 + \cancel{x} \cdot \frac{(xy)'_y}{\cancel{x}y} = 0 + \frac{x}{y}$$

$$(\ln(xy))'_x = \frac{(xy)'_x}{xy} = \frac{y}{xy}$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2 + x^2yz + y^3$ $\quad df = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2 + 2xyz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xy + x^2z + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2y$$

$$\Rightarrow df(x,y,z) = (y^2 + 2xyz)\,dx + (2xy + x^2z + 3y^2)\,dy + x^2y\,dz$$

Matricea Jacobiană

$F : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$, $F = (f_1, \dots, f_m)$

$f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$