CURS#12

14. Analiza senzitivităţii/stabilităţii sistemelor de ecuaţii liniare pătratice: număr de condiţionare a unei matrice; estimare riguroasă; estimare riguroasă pe componente.

PROBLEME

1) Arătaţi că au loc inegalităţile

$$\frac{1}{n}\kappa_2(\mathbf{A}) \leq \kappa_1(\mathbf{A}) \leq n\kappa_2(\mathbf{A}), \quad \forall\ \mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),$$
$$\frac{1}{n}\kappa_\infty(\mathbf{A}) \leq \kappa_2(\mathbf{A}) \leq n\kappa_\infty(\mathbf{A}), \quad \forall\ \mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),$$
$$\frac{1}{n^2}\kappa_1(\mathbf{A}) \leq \kappa_\infty(\mathbf{A}) \leq n^2\kappa_1(\mathbf{A}), \quad \forall\ \mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

3.7. ANALIZA SENZITIVITĂȚII/STABILITĂȚII SISTEMELOR LINIARE PĂTRATICE

Considerăm sistemul de ecuații liniare

(1) $\boxed{A\,\underline{x} = \underline{b}}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă
$\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

<u>Motivație</u>: Cum se comportă soluția sistemului (1) pentru <u>date perturbate</u>, i.e. pentru perturbații $\Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $\Delta\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ ale matricei sistemului (1) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, respectiv ale membrului drept $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, în raport cu <u>soluția exactă</u> $\underline{x}^* := A^{-1}\underline{b}$?

ANALIZĂ FOLOSIND DVS

$$\boxed{A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\, \underline{u}_i\, \underline{v}_i^T} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} U := [\underline{u}_1 \dots \underline{u}_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}):\ U^T U = I_n \\ V := [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}):\ V^T V = I_n \\ \Sigma := \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Inserăm (2) în (1) și obținem

$$
\begin{array}{l|l}
U^T & U\Sigma V^T \underline{x} = \underline{b} \\
\Sigma^{-1} & \Sigma V^T \underline{x} = U^T \underline{b} \\
V & V^T \underline{x} = \Sigma^{-1} U^T \underline{b} \quad \Rightarrow
\end{array}
$$

$$\underline{x} = V \Sigma^{-1} U^T \underline{b}$$

$$= [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n] \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}\right) \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \\ \vdots \\ \underline{u}_n^T \end{bmatrix} \underline{b}$$

$$= [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n] \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}\right) \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \underline{b} \\ \vdots \\ \underline{u}_n^T \underline{b} \end{bmatrix}$$

$$= [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n] \begin{bmatrix} (\underline{u}_1^T \underline{b}) / \sigma_1 \\ \vdots \\ (\underline{u}_n^T \underline{b}) / \sigma_2 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{v}_1 \frac{\underline{u}_1^T \underline{b}}{\sigma_1} + \underline{v}_2 \frac{\underline{u}_2^T \underline{b}}{\sigma_2} + \dots + \underline{v}_n \frac{\underline{u}_n^T \underline{b}}{\sigma_n} \Rightarrow$$

$$\boxed{\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\underline{u}_i^T \underline{b}}{\sigma_i} \underline{v}_i} \quad (3)$$

<u>OBS</u>: Magnitudinea lui $\sigma_n(A) = \sigma_{min}(A)$ are un impact major asupra soluției (3) a sistemului liniar (1)!

NUMĂR DE CONDIȚIONARE

Considerăm, din nou, sistemul liniar

$$(1) \quad A\underline{x} = \underline{b}, \quad \begin{cases} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ } \underline{\text{inversabilă}} \\ \underline{b} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Considerăm <u>sistemul perturbat</u> (parametrizat) asociat lui (1):

$$(2) \quad \boxed{(A + \varepsilon F)\, \underline{x}(\varepsilon) = \underline{b} + \varepsilon \underline{f}}$$

unde:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ mic} \\ \bullet\ F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \bullet\ \underline{f} \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} : A + \varepsilon F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ } \underline{\text{invers}} \quad \left(\text{Alegem } \varepsilon \in \mathbb{R} : |\varepsilon|\, \|A^{-1}F\| < 1\right)$$

<u>OBS</u>:

- $\varepsilon F \in M_n(\mathbb{R})$ <u>perturbare</u> a lui $A \in M_n(\mathbb{R})$;
- $\varepsilon \underline{f} \in \mathbb{R}^n$ <u>perturbare</u> a lui $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$;
- $\underline{x}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ <u>soluția sistemului perturbat</u> (2), i.e. depinde de parametrul $\varepsilon \in \mathbb{R}$;
- $\underline{x} := \underline{x}(0)$ soluția sistemului (1).

<u>OBS</u>:

$\underline{x}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ derivabilă într-o vecinătate a lui $\varepsilon = 0 \xRightarrow{\text{Taylor}}$

$$\boxed{\underline{x}(\varepsilon) = \underline{x}(0) + \varepsilon \dot{\underline{x}}(0) + O(\varepsilon^2)} \quad (3)$$

<u>OBS</u>: Vrem o estimare pt. $\|\underline{x}(\varepsilon) - \underline{x}\|$, deci este suficient să determinăm $\dot{\underline{x}}(0)$!

- Inserăm (3) în (2) și obținem:

$$(A + \varepsilon F)\left(\underline{x} + \varepsilon \dot{\underline{x}}(0) + O(\varepsilon^2)\right) = \underline{b} + \varepsilon \underline{f}$$

$$A\underline{x} + \varepsilon\left(A\dot{\underline{x}}(0) + F\underline{x}\right) + O(\varepsilon^2) = \underline{b} + \varepsilon \underline{f} \Rightarrow$$

ε^0: $\quad A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad \checkmark$ verificat prin (1)

ε^1: $\quad A\underline{\dot{x}}(0) = \underline{f} - F\underline{x} \implies$

$$\boxed{\underline{\dot{x}}(0) = A^{-1}(\underline{f} - F\underline{x})} \quad (4)$$

- Revenim la (3) și obținem, pt orice normă vectorială și pt norma matricială indusă:

$$\|\underline{x}(\varepsilon) - \underline{x}\| \overset{(3)}{=} \|\varepsilon\underline{\dot{x}}(0) + O(\varepsilon^2)\|$$

$$\leq |\varepsilon| \, \|\underline{\dot{x}}(0)\| + O(\varepsilon^2)$$

$$\overset{(4)}{=} |\varepsilon| \, \|A^{-1}(\underline{f} - F\underline{x})\| + O(\varepsilon^2)$$

$$\leq |\varepsilon| \, \|A^{-1}\| \cdot \|\underline{f} - F\underline{x}\| + O(\varepsilon^2)$$

$$\leq |\varepsilon| \, \|A^{-1}\| \left(\|\underline{f}\| + \|F\| \cdot \|\underline{x}\|\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$= \|\underline{x}\| \, |\varepsilon| \, \|A^{-1}\| \left(\frac{\|\underline{f}\|}{\|\underline{x}\|} + \|F\|\right) + O(\varepsilon^2)$$

Din (1), rezultă:

$$\|\underline{b}\| = \|A\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\| \implies$$

$$\boxed{\frac{1}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\|A\|}{\|\underline{b}\|}} \quad (5)$$

$$\overset{(5)}{\leq} \|\underline{x}\|\,|\varepsilon|\,\|A^{-1}\|\left(\frac{\|\underline{f}\|}{\|\underline{b}\|}\|A\| + \|F\|\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$= \|\underline{x}\| \underbrace{\left(\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\right)}_{=:\,\kappa(A)}\left(\frac{|\varepsilon|\,\|\underline{f}\|}{\|\underline{b}\|} + \frac{|\varepsilon|\,\|F\|}{\|A\|}\right) + O(\varepsilon^2)$$

$=: \kappa(A)$ <u>numărul de condiționare al lui A</u>

$$= \|\underline{x}\|\,\kappa(A)\left(\frac{\|\varepsilon\underline{f}\|}{\|\underline{b}\|} + \frac{\|\varepsilon F\|}{\|A\|}\right) + O(\varepsilon^2) \Rightarrow$$

Am obținut

$$\boxed{\frac{\|\underline{x}(\varepsilon) - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\varepsilon F\|}{\|A\|} + \frac{\|\varepsilon\underline{f}\|}{\|\underline{b}\|}\right) + O(\varepsilon^2)} \quad (6)$$

i.e. numărul de condiționare al lui A, $\kappa(A)$, este o <u>măsură a stabilității</u> sistemului liniar (1) !

<u>DEFINIȚIE</u>: <u>Numărul de condiționare al lui $A \in M_n(\mathbb{R})$</u> asoc. normei matriciale $\|\cdot\|$ pe $M_n(\mathbb{R})$ indusă de norma vectorială

$\|\cdot\|$ pe $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\kappa(A) := \begin{cases} \|A\|\,\|A^{-1}\|, & A \text{ inversabilă} \\ +\infty, & A \text{ neinversabilă} \end{cases}} \quad (7)$$

<u>OBS</u>:

1) În general, $\kappa_p(A) := \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$, unde $\|\cdot\|_p$ este norma matricială indusă de norma vectorială $\|\cdot\|_p$ pe $\mathbb{R}^n$, $p \in \{1, 2, \infty\}$.

2) Pentru orice normă matricială indusă de o normă vectorială, $\boxed{\kappa(A) \geq 1}$

<u>Dem</u>:

$$1 = \|I_n\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| =: \kappa(A)$$

pt orice normă matricială indusă de o normă vectorială

□

3) $\kappa(A)$ <u>mare</u> $\Rightarrow A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ <u>rău condiționată</u>;

$\kappa(A)$ <u>mic</u> $\Rightarrow A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ <u>bine condiționată</u>.

4) $\kappa(A^{-1}) = \kappa(A)$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

5) $\kappa(\alpha A) = \kappa(A), \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$

6) $\kappa_p, \ p \in \{1, 2, \infty\}$, sunt <u>echivalente</u>.

Mai mult, au loc relațiile:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{n}\kappa_2(A) \le \kappa_1(A) \le n\,\kappa_2(A), \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ &\frac{1}{n}\kappa_\infty(A) \le \kappa_2(A) \le n\,\kappa_\infty(A), \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ &\frac{1}{n^2}\kappa_1(A) \le \kappa_\infty(A) \le n^2\kappa_1(A), \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}} \quad (8)$$

<u>Dem</u>: <u>EX</u>!

DETERMINANTUL ȘI APROAPE SINGULARITATEA

Motivație:

Știm $\det A = 0 \Longleftrightarrow A$ <u>singulară</u>.

Atunci, $\det A \approx 0 \Longleftrightarrow A$ <u>aproape singulară</u>?

1)

$$B_n := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow$$

$\det B_n = 1$ și $\kappa_\infty(B_n) = n2^{n-1}$, i.e. <u>nu există corelație</u> între $\det B_n$ și $\kappa_\infty(B_n)$!

2) $D_n := \operatorname{diag}(10^{-1}, 10^{-1}, \dots, 10^{-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow$

$\det D_n = 10^{-n}$ și $\kappa_p(D_n) = 1$, i.e. <u>nu există corelație</u> între $\det D_n$ și $\kappa_p(D_n)$!

ESTIMARE RIGUROASĂ A SENZITIVITĂȚII/ STABILITĂȚII SISTEMELOR LINIARE PĂTRATICE

Relația (6) arată legătura dintre $\kappa(A)$ și viteza de variație a lui $\underline{x}(\varepsilon)$ la $\varepsilon = 0$, i.e. $\dfrac{\|\underline{x}(\varepsilon) - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}$. Cu toate acestea, relația (6) depinde de alegerea lui ε "<u>suficient de mic</u>" și nu discută mărimea termenului $O(\varepsilon^2)$, i.e. un <u>inconvenient</u>!

LEMA #1:

$A\underline{x} = \underline{b}$, $\begin{cases} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ \underline{\text{inversabilă}} \\ \underline{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}_n\} \end{cases}$

$(A+\Delta A)\underline{y} = \underline{b} + \Delta\underline{b}$, $\begin{cases} \Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \|\Delta A\| \le \varepsilon \|A\| \\ \Delta\underline{b} \in \mathbb{R}^n : \|\Delta\underline{b}\| \le \varepsilon \|\underline{b}\| \end{cases}$

Dacă $\boxed{\varepsilon\, \kappa(A) =: r < 1}$, atunci

(i) $A + \Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ <u>inversabilă</u>;

(ii) $\boxed{\dfrac{\|\underline{y}\|}{\|\underline{x}\|} \le \dfrac{1+r}{1-r}}$ (9)

Dem:

(i) $\|A^{-1}\Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \varepsilon \|A\| =$

$= \varepsilon(\|A\| \, \|A^{-1}\|) = \varepsilon \, \kappa(A) =: r < 1 \implies$

Teorema $(E := A^{-1}\Delta A) \implies A + \Delta A$ inv

(ii) $A + \Delta A = A(I_n + A^{-1}\Delta A) \implies$

Sistemul perturbat devine

$$A(I_n + A^{-1}\Delta A)\,\underline{y} = \underline{b} + \Delta\underline{b}$$

$$(I_n + A^{-1}\Delta A)\,\underline{y} = A^{-1}(\underline{b} + \Delta\underline{b})$$

$$(I_n + A^{-1}\Delta A)\,\underline{y} = \underline{x} + A^{-1}\Delta\underline{b}$$

Prin urmare, obținem:

$$\boxed{\underline{y} = (I_n + A^{-1}\Delta A)^{-1}(\underline{x} + A^{-1}\Delta\underline{b})} \implies$$

$$\|\underline{y}\| = \|(I_n + A^{-1}\Delta A)^{-1}(\underline{x} + A^{-1}\Delta\underline{b})\|$$

$$\leq \|(I_n + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \left(\|\underline{x}\| + \|A^{-1}\| \cdot \underbrace{\|\Delta\underline{b}\|}_{\leq \varepsilon \|\underline{b}\|}\right)$$

$$\underset{\text{Lema Banach}}{\leq} \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \left(\|\underline{x}\| + \|A^{-1}\| \, \varepsilon \, \|\underline{b}\|\right)$$

$$= \frac{1}{1-\|A^{-1}\Delta A\|}\left(\|\underline{x}\|+\|A^{-1}\|\frac{r}{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}\|\underline{b}\|\right)$$

$r := \varepsilon\,\kappa(A) = \varepsilon\,\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$

$$= \frac{1}{1-\|A^{-1}\Delta A\|}\left(\|\underline{x}\|+r\frac{\|\underline{b}\|}{\|A\|}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\|A^{-1}\Delta A\|}\left(\|\underline{x}\|+r\frac{\|A\underline{x}\|}{\|A\|}\right)$$

$$\leq \frac{1}{1-\|A^{-1}\Delta A\|}\left(\|\underline{x}\|+r\frac{\|A\|\cdot\|\underline{x}\|}{\|A\|}\right)$$

$$= \|\underline{x}\|\frac{1+r}{1-\|A^{-1}\Delta A\|} \overset{(*)}{\leq} \frac{1+r}{1-r}\|\underline{x}\|$$

Cf i), $\|A^{-1}\Delta A\| \leq r \Rightarrow 1-r \leq 1-\|A^{-1}\Delta A\|$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1-\|A^{-1}\Delta A\|} \leq \frac{1}{1-r}} \quad (*)$$

Prin urmare, am obținut

$$\|\underline{y}\| \leq \frac{1+r}{1-r}\|\underline{x}\| \Rightarrow \boxed{\frac{\|\underline{y}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{1+r}{1-r}} \quad (9)$$

$\square$

TEOREMA #1:

În ipotezele Lemei #1, are loc estimarea

$$\boxed{\frac{\|\underline{y}-\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{2r}{1-r}} \qquad (10)$$

unde $\boxed{r := \varepsilon\,\kappa(A) < 1}$

<u>Dem</u>: Scădem sistemul neperturbat din cel perturbat și obținem

$$A(\underline{y}-\underline{x}) + (\Delta A)\underline{y} = \Delta\underline{b}$$

$$A(\underline{y}-\underline{x}) = \Delta\underline{b} - (\Delta A)\underline{y}$$

$$\underline{y}-\underline{x} = A^{-1}[\Delta\underline{b} - (\Delta A)\underline{y}]$$

$$\boxed{\underline{y}-\underline{x} = A^{-1}(\Delta\underline{b}) - (A^{-1}\Delta A)\underline{y}}$$

Atunci, rezultă

$$\|\underline{y}-\underline{x}\| = \|A^{-1}(\Delta\underline{b}) - (A^{-1}\Delta A)\underline{y}\|$$

$$\leq \|A^{-1}(\Delta\underline{b})\| + \|(A^{-1}\Delta A)\underline{y}\|$$

$$\leq \|A^{-1}\|\underbrace{\|\Delta\underline{b}\|}_{\leq \varepsilon\|\underline{b}\|} + \|A^{-1}\|\underbrace{\|\Delta A\|}_{\leq\varepsilon\|A\|}\|\underline{y}\|$$

$$\leq \|A^{-1}\| \,\varepsilon \|\underline{b}\| + \|A^{-1}\| \,\varepsilon \|A\| \|\underline{y}\|$$

$$= \varepsilon \underbrace{\left(\|A^{-1}\| \, \|A\|\right)}_{= \kappa(A)} \left(\frac{\|\underline{b}\|}{\|A\|} + \|\underline{y}\| \right)$$

$$= \varepsilon \, \kappa(A) \left(\frac{\|A\underline{x}\|}{\|A\|} + \|\underline{y}\| \right)$$

$$\leq \varepsilon \, \kappa(A) \left(\frac{\|A\| \, \|\underline{x}\|}{\|A\|} + \|\underline{y}\| \right)$$

$$= \varepsilon \, \kappa(A) \, \|\underline{x}\| \left(1 + \frac{\|\underline{y}\|}{\|\underline{x}\|} \right)$$

$$\underset{\text{Lemma\#1}}{\leq} \varepsilon \, \kappa(A) \, \|\underline{x}\| \left(1 + \frac{1+r}{1-r} \right)$$

$$= \frac{2\varepsilon}{1-r} \kappa(A) \, \|\underline{x}\| \underset{\varepsilon \kappa(A) =: r}{=} \frac{2r}{1-r} \|\underline{x}\| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\|\underline{y} - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{2r}{1-r}} \qquad (10)$$

$\square$

OBS:

1) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este bine condiționată, i.e. $\kappa(A)$ mic, atunci mici perturbări ale datelor sistemului neperturbat ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$) determină o soluție a sistemului perturbat, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, care aproximează bine soluția sistemului neperturbat, $\underline{x} := A^{-1}\underline{b} \in \mathbb{R}^n$.

2) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este rău condiționată, i.e. $\kappa(A)$ mare, atunci mici perturbări ale datelor sistemului neperturbat pot genera o soluție a sistemului perturbat, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, care aproximează inacurat soluția sistemului neperturbat $\underline{x} := A^{-1}\underline{b} \in \mathbb{R}^n$.

3) În ipotezele Teoremei #1, pentru $\underline{b} \leftarrow I_n$, $\Delta\underline{b} \leftarrow \underline{O}_n$ și $\underline{x} \leftarrow X := A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, obținem

$$\begin{cases} AX = I_n \\ (A + \Delta A)Y = I_n \end{cases}$$

$$A^{-1}(A + \Delta A)\, Y = A^{-1} I_n$$

$$(I_n + A^{-1}\Delta A)\, Y = A^{-1}(AX)$$

$$(I_n + A^{-1}\Delta A)\, Y = A^{-1}(AX)$$

$$Y = (I_n - A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1}(AX) \quad \Longrightarrow$$

$$\|Y\| \leq \|(I_n - A^{-1}\Delta A)^{-1}\|\, \|A^{-1}\|\, \|A\|\, \|X\|$$

$$\leq \frac{1}{1-r}\, \kappa(A)\, \|X\| \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} \|Y\| \leq \frac{\kappa(A)}{1-r}\, \|\underline{X}\|, \\ \begin{cases} X := A^{-1} \\ Y := A^{-1} + \Delta(A^{-1}) \end{cases} \end{gathered}} \qquad (11)$$