Potențialul electric

I) Legătura dintre potențialul electric și intensitatea câmpului electric

• **Gradientul unei funcții scalare**

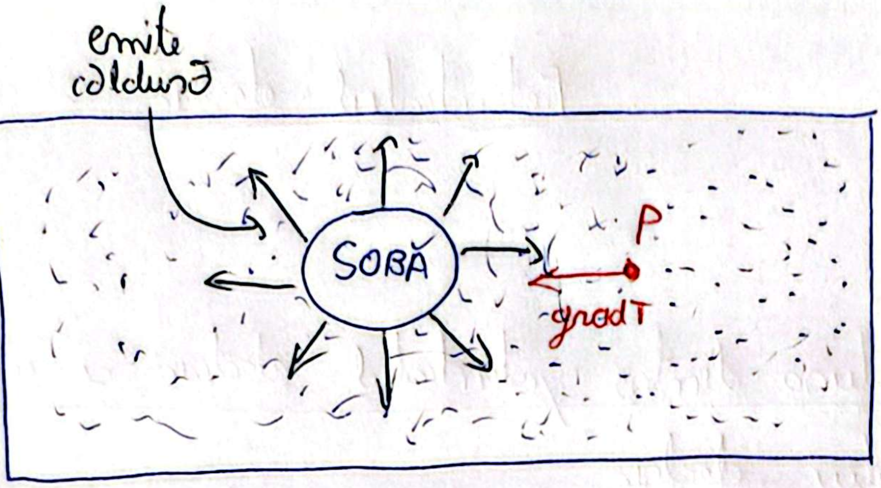
- reprezintă un vector orientat pe direcția pe care mărimea crește cel mai repede

Notații: Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{gathered} \text{grad}\, f(x,y,z) \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k} \\ \text{sau} \\ \nabla f(x,y,z) \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k} \end{gathered}}$$

! Gradientul nu poate fi aplicat ~~punctelor~~ mărimilor vectoriale ($\nexists$ grad $\vec{F}$)!

• Pentru a înțelege mai bine semnificația fizică a gradientului putem considera o sobă care încălzește o cameră. Considerăm un punct aleatoriu P din cameră și ne întrebăm pe ce direcție crește temperatura cel mai repede?

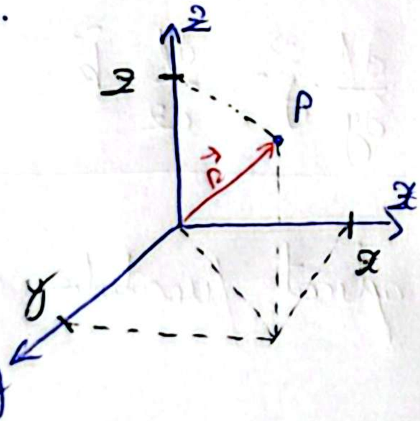


Răspunsul este dat de gradient, iar în cazul în care soba emite căldură uniform, grad T va fi orientat direct către centrul sobei (T - temperatura).

• <u>Exemple matematice</u>

~~• Considerăm un vector de poziție $\vec{r}(x,y,z)$~~

• Considerăm funcția $r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ care reprezintă chiar modulul vectorului de poziție $\vec{r}$.



$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r(x,y,z)$$

$$\text{grad } r=\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{=r}}=\frac{x}{r}$$

Analog: (din simetria funcției)

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} r = \frac{x}{r}\cdot\vec{i} + \frac{y}{r}\cdot\vec{j} + \frac{z}{r}\cdot\vec{k} =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\underbrace{\left(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}\right)}_{\vec{r}} = \frac{1}{r}\cdot\vec{r}$$

• Exemplul 2

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \operatorname{grad}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \cancel{\operatorname{grad}}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\cancel{2}x$$

$$= -\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$$

$$= -\frac{x}{r^3}$$

Analog, din simetria funcției: $\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{y}{r^3}$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{z}{r^3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3}\cdot\vec{i} - \frac{y}{r^3}\cdot\vec{j} - \frac{z}{r^3}\cdot\vec{k} =$$

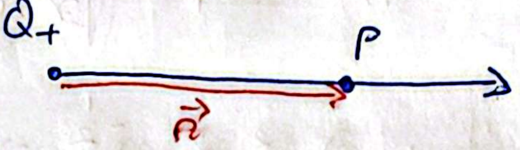
$$= -\frac{1}{r^3}\underbrace{\left(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}\right)}_{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}}$$

• **Legătura gradient – intensitatea câmpului electric**

• Ne amintim formula vectorială a ~~câmpului~~ intensității câmpului electric.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kQ}{r^3}\cdot\vec{r}}$$



• Am observat în cadrul exemplului 2 că:

$$\boxed{\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{kQ}{r^3}\cdot\vec{r} = -kQ\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -kQ\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$$

• Deoarece gradientul este o funcție liniară cu proprietatea că ~~α·grad f~~ $= \alpha\cdot\operatorname{grad}(f) = \operatorname{grad}(\alpha f)$ rezultă:

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\left(\frac{kQ}{r}\right)}$$

$\parallel V$ = funcția potențial electric ce este creat de o sarcină punctiformă la distanța r de ea

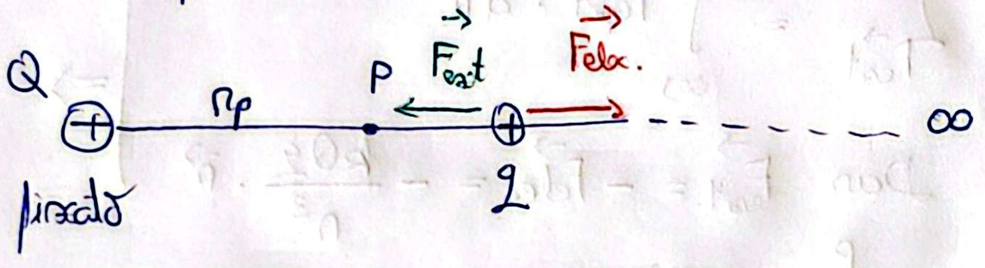
$$V(x,y,z) \overset{def}{=} \frac{kQ}{r} + C$$

↳ constantă oarecare

• În practică, constanta c este neglijabilă.

$[V]_{S.i.} = 1V$ (volt)

II Semnificatia fizică a potentialului electric



• Considerăm o sarcină $Q>0$ pe care o fixăm.

Întrebare: Ce lucru mecanic trebuie să efectuăm pentru a deplasa sarcina $q>0$ de la ∞ până în punctul P aflat la distanta r_P de sarcina Q?

Solutie:

• Ne propunem să deplasăm sarcina q uniform (fără accelerație).

forta dată de Legea lui Coulomb

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{elec} = 0 \Rightarrow F_{ext} = F_{elec}$$

forta cu care împingem sarcina q

• Din păcate, pe măsură ce ne apropiem de sarcina Q, $\vec{F}_{elec}$ devine din ce în ce mai mare, deci își modifică valoarea în modul. Pentru a mentine adevărată relația $\vec{F}_{elec} + \vec{F}_{ext} = 0$, va trebui să modificăm și valoarea în modul pentru $\vec{F}_{ext}$.

- Așadar, lucrul mecanic va fi dat de relația:

$$L_{\vec{F}_{ext}}^{(\infty\to P)} = \int_{(\infty)}^{(P)} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow$$

Dar $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{elec} = -\dfrac{kQq}{r^3}\cdot\vec{r}$

$$\Rightarrow L_{\vec{F}_{ext}}^{(\infty\to P)} = \int_{(\infty)}^{P} -\frac{kQq}{r^3}\cdot\vec{r}\cdot d\vec{r} =$$

$$= -kQq\int_{\infty}^{P} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{r}$$

- Pentru a putea rezolva integrala va trebui să obținem forma scalară a produsului $\vec{r}\cdot d\vec{r}$

$$\vec{r}\cdot d\vec{r} = \underbrace{(x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k})}_{\vec{r}}\underbrace{(dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}+dz\cdot\vec{k})}_{d\vec{r}} =$$

$$= x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

În același timp:

$$r\,dr = r\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz\right)$$

$$= r\cdot\left(\frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz\right)$$

$$= x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

Deci: $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$ în acest caz

$$\Rightarrow L_{\vec{F}_{ext}}^{(\infty \to P)} = -kQq \int_{\infty}^{P} \frac{r \cdot dr}{r^3}$$

$$= -kQq \int_{\infty}^{P} \frac{1}{r^2} \cdot dr$$

$$= -kQq \left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{P}$$

$$= -kQq \left(-\frac{1}{r_P} - \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r}\right)$$

$$= -kQq \left(-\frac{1}{r_P} - 0\right) = \frac{kQq}{r_P}$$

$$\Rightarrow L_{\vec{F}_{ext}}^{(\infty \to P)} = \frac{kQq}{r_P} \Rightarrow \frac{L_{\vec{F}_{ext}}^{(\infty \to P)}}{q} = \underbrace{\frac{kQ}{r_P}}_{= V_P} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_P = \frac{L_{\vec{F}_{ext}}^{(\infty \to P)}}{q}}$$ → pentru cazul în care punctul de plecare sau de sosire este $\pm\infty$

! Atenție:

• Dacă am fi plecat dintr-un punct B aflat la distanța r_B de sarcina Q, atunci am fi avut:

$$L_{\vec{F}_{ext}}^{(B\to P)} = -kQq\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_B^P = kQq\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_P^B =$$

$$= kQq\left(-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_P}\right)$$

$$= \frac{kQq}{r_P} - \frac{kQq}{r_B}$$

$$\Rightarrow \frac{L_{\vec{F}_{ext}}^{(B\to P)}}{q} = \frac{kQ}{r_P} - \frac{kQ}{r_B}$$

$$\boxed{\frac{L_{\vec{F}_{ext}}^{(B\to P)}}{q} = V_P - V_B}$$

! Atenție

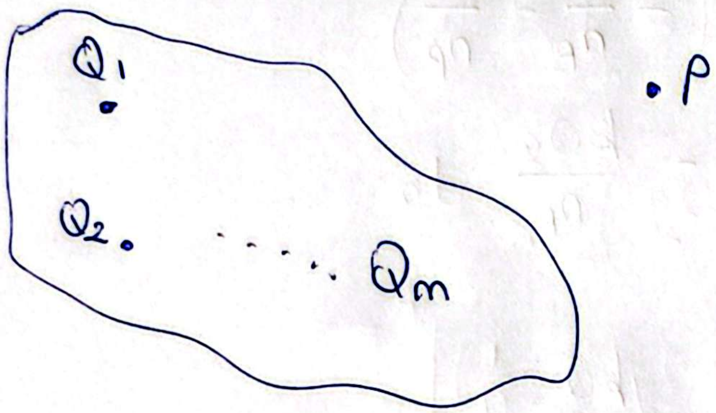
Dacă considerăm lucrul mecanic efectuat de FORȚA ELECTRICĂ, atunci formula devine:

$$\boxed{\frac{L_{\vec{F}_{elec}}^{(B\to P)}}{q} = V_B - V_P} \quad \text{sau} \quad \boxed{\frac{L_{BP}}{q} = \underbrace{V_B - V_P}_{U_{BP}}}$$

U_{BP} – tensiunea electrostatică între punctele B și P

• ~~[illegible]~~

III Potențialul electric creat într-un punct de mai multe sarcini punctiforme



• Fiecare sarcină creează în jurul ei un câmp electric. Dacă vrem să aflăm care va fi intensitatea câmpului electric în punctul P, vom obține relația:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

• Dar $-\mathrm{grad}(V) = \vec{E}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\mathrm{grad}(V_P) = -\mathrm{grad}(V_1) - \mathrm{grad}(V_2) - \dots - \mathrm{grad}(V_n)$$

· Proprietate: $\mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g) = \mathrm{grad}(f+g)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\mathrm{grad}(V_P) = -\mathrm{grad}(V_1 + V_2 + \dots + V_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_P = V_1 + V_2 + \dots + V_n}$$