Tutoriat 3 CDI

Funcții continue

Def:

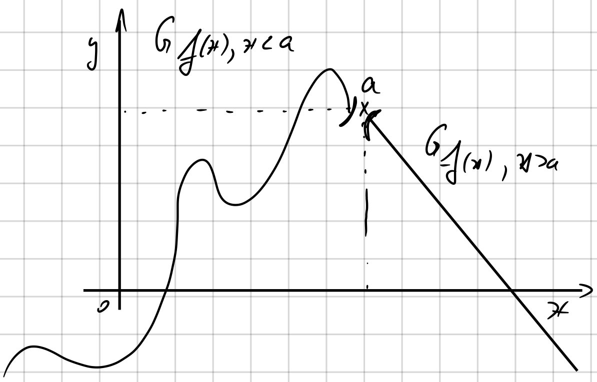
• f s.n. continuă în $a \in D$ dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}_{f(a)}$ (în Y), $\exists\, U \in \mathcal{V}_a$ (în X) a.î. $f(U \cap D) \subset V$.

$(X, d_1), (Y, d_2)$ sp. metrice $\quad D \subset X, \; f: D \to Y$

• f s.n. continuă dacă f este continuă în fiecare punct din D.

• f s.n. discontinuă în $a \in D$ dacă f nu este continuă în a.

Adică fie a un punct



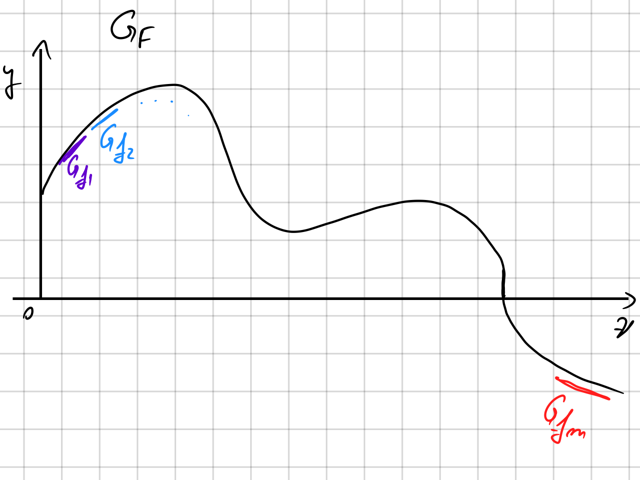
dacă $f(a) \in G_f \Rightarrow$ funcția este continuă

TEOREMĂ

(1) $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$

$f_i: D \to \mathbb{R}, \; i = \overline{1,m}$

Dacă F continuă $\Rightarrow f_i$ continuă, $\forall\, i = \overline{1,m}$



* gândiți-vă că $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt segmente din F (care alcătuiesc F)

② $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ sp. metrice

$f: X \to Y \quad g: Y \to Z$

Dacă f este continuă în $a \in X$ și g este continuă în $f(a) \in Y$, atunci $g \circ f: X \to Z$ este continuă în a.

Funcții continue cu valori reale

(X, d) sp. metric ; $f, g: X \to \mathbb{R}$; $M_f = \{x \in X, f(x) = 0\}, \alpha \in \mathbb{R}$

TEOREMĂ

Dacă f, g sunt continue, atunci:

1) $f+g$, $f-g$, αf, $f \cdot g$ sunt continue
2) $\frac{f}{g}$ continuă pe $X \setminus M_g$
3) $|f|$ continuă

Continuitate laterală

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad a \in D' \cap D$

Spunem că f este continuă la stânga în a dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.

—//— este continuă la dreapta în a dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

$\Rightarrow$ f continuă în $a \Leftrightarrow$ continuă la stânga și continuă la dreapta

Puncte de discontinuitate

$[f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ a \in \underset{\text{acumulare}}{D'} \cap D]$

Df: • a s.n. punct de discontinuitate de speța I dacă

- f nu este continuă în a
- $\exists \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ și $\exists \lim\limits_{x \searrow a} f(x) \in \mathbb{R}$

$\neq$

• a s.n. punct de discontinuitate de speță a II-a dacă

(ii) - f nu este continuă în a

- a nu este punct de discontinuitate de speță I

TEOREME (discontinuitate)

(1) $f: I = \overset{\circ}{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f crescătoare
$\quad\ $ inter.

Atunci f are pct. de discont. de speță I

(2) $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f monotonă

Atunci mulțimea discontinuităților lui f este cel mult numărabilă.

CONVERGENȚA SIMPLĂ ȘI CONVERGENȚA UNIFORMĂ

Def: Spunem că $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge simplu (punctual) pe mulțimea A dacă $\{f_n\}_{n\geq 1}$ este convergent $\forall x \in A$.

Not: $f_n \xrightarrow{s} f$

Def: Spunem că f_n converge uniform la funcția f pe A dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq n(\varepsilon)$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in A.$$

Not: $f_n \xrightarrow{u} f$

Obs! $f_n \xrightarrow{u} f$ pe $A \Rightarrow f_n \xrightarrow{s} f$ pe A

RECIPROCA NU ESTE ADEVĂRATĂ

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir de funcții, $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- → convergența simplă $\left(f_n \xrightarrow[A\subseteq D]{s} f\right)$; $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
- → convergența uniformă $\left(f_n \xrightarrow[A\subseteq D]{u} f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0\right)$

Exemplu:

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = x^n \cdot \dfrac{1}{1+x^n}, \ \forall x \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

C.S: Fie $x \in [0,1]$

Se calculează $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

$x \in [0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$A = \{x \in D \mid \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\} : [0,1]$

$f : A = [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$ ✓

C.U: constatăm că: 1) f_n funcție continuă pe $[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2) f_n nu este continuă pe $[0,1]$ $\Big/ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\cancel{f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{u} f}$

! PROP

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{u} & f \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{continuă pe } A & \Rightarrow & \text{continuă pe } A \end{array}}$$