ANALIZĂ

① Noțiunea de vecinătate:

• Fie $x \in \mathbb{R}$, mulțimea $V \subseteq \mathbb{R}$ nevidă s.n. vecinătate a punctului $x \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, a.î. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq V$

• Mulțimea nevidă $V \subseteq \mathbb{R}$ s.n. vecinătate a lui $-\infty \Leftrightarrow$ $\exists\ \varepsilon > 0$, a.î. $[-\infty, -\varepsilon] \subseteq V$

• Mulțimea nevidă $V \subseteq \mathbb{R}$ s.n. vecinătate a lui $+\infty \Leftrightarrow$ $\exists\ \varepsilon > 0$, a.î. $(\varepsilon, +\infty] \subseteq V$.

Șir convergent

• Fie $(x_n)_n \in \mathbb{R}$ un șir

Spunem că $(x_n)_n$ convergent la $l \in \mathbb{R}$, dacă:

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, a.î. $|x_n - l| < \varepsilon$, $\forall\ n \geq n_\varepsilon$

$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$

• Șirul $(x_n)_n$ s.n. convergent $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$

Limita unui șir

• Fie $l \in \mathbb{R}$, spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita l dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, avem:

$|x_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

• Spunem că $(x_n)_n$ are limita $+\infty$, dacă:

$\forall\ c > 0$, $\exists\ n_c \in \mathbb{N}$, a.î. $x_n \geq c$, $\forall\ n \geq n_c$

• Spunem că $(x_n)_n$ are limita $-\infty$, dacă:

$\forall\ c > 0$, $\exists\ n_c \in \mathbb{N}$, a.î. $x_n \leq -c$, $\forall\ n \geq n_c$

② Proprietățile vecinătăților

1. Tranzitivitate: Dacă o vecinătate U conține alta, V, care la rândul ei conține un punct x, atunci U este și ea o vecinătate a lui x.
2. Intersecția vecinătăților: Intersecția a două vecinătăți ale unui punct este o altă vecinătate a acelui punct.
3. Unind 2 vecinătăți, rezultatul e tot o vecinătate a acelui pct.

Proprietățile șirurilor convergente în $\mathbb{R}$

1. Dacă un șir converge către un anumit $l \in \mathbb{R}$, atunci aceasta este singura valoare către care șirul tinde la infinit.
2. Suma, produsul, diferența a două șiruri convergente sunt convergente.
3. Dacă $a_n \le b_n, \forall n$, $(a_n)_n, (b_n)_n$ convergente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$, a.î. $a_n \le b_n \le c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

Teorema privind convergența șirurilor monotone.

$\forall$ șir monoton și mărginit este convergent.

În plus, dacă $(x_n)_n$ este crescător și mărginit superior $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ conv. și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup(x_n)$

Dacă $(x_n)_n$ este descrescător și mărginit inferior $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ conv și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf(x_n)$

3 Distanța

Fie $X \neq \emptyset$ o mulțime. O funcție $d: X \times X \to [0, \infty)$ s.n. distanță, dacă verifică:

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z), \forall x,y,z \in X$

Spațiu metric

Perechea (X,d) s.n. spațiu metric = o mulț. și o funcție distanță.

Bilă într-un spațiu metric

Fie (X,d) un spațiu metric, un element $a \in X$ și $r > 0$.

1. Mulțimea $\{x \in X \mid d(x,a) < r\}$ s.n. bila de centru a și raza r și se notează cu $B(a,r)$
2. O mulțime $A \subset X$ s.n. mărginită, dacă $\exists$ o bilă $B(a,r)$, a.î. $A \subset B(a,r)$

$B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$ bilă deschisă
$B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$ bilă închisă.

Șir convergent
Fie un spațiu metric. $(x_n)_n \subseteq X$ s.n. convergent la un element $a \in X$, dacă pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, a.î.
$d(x_n, a) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$

$d(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in B(a, \varepsilon)$

Șir Cauchy
Fie (X,d) un spațiu metric. Un șir $(x_n)_n \subseteq X$ s.n. Cauchy, dacă pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, a.î. $d(x_n, x_m) < \varepsilon$
$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_\varepsilon$.

4 Teorema privind proprietățile șirurilor convergente și Cauchy într-un spațiu metric.
Fie (X,d) un spațiu metric. Atunci:
i) $\forall$ șir convergent este Cauchy
ii) $\forall$ șir Cauchy este mărginit
iii) $\forall$ șir convergent este mărginit
iv) $\forall$ șir Cauchy care are un subșir convergent este mărginit.

5 Limita superioară/inferioară
$\overline{\lim}\, x_n = \inf \{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid v < x_n\}$ este finită$\}$
$= \max\, \mathcal{L}((x_n)_n)$
$\underline{\lim}\, x_n = \sup \{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid v > x_n\}$ este finită$\}$
$= \min\, \mathcal{L}((x_n)_n)$
$\mathcal{L}((x_n)_n) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_n$ subșir,
a.î. $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x\}$.

Serii

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir, $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$(S_n)_n$ - şirul sumelor parţiale

Definim seria $\sum_{n\geq 1} x_n \,/\, \sum_{n\geq 0} x_n \,/\, \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ det. de $(x_n)_n$.

Spunem că seria e convergentă dacă $(S_n)_n$ convergent.

În acest caz de $\ell = \lim_{n\to\infty} S_n$, numim ℓ = suma seriei $\sum_{n\geq 1} x_n$

- $(s_n)_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n x_n$ divergentă.

Criterii de convergenţă

Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ şir $\sum_n x_n$

1) Criteriul raportului (D'Alembert)

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \begin{cases} \ell<1 \Rightarrow \sum \text{ conv.} \\ \ell>1 \Rightarrow \sum \text{ div} \\ \ell=1 \Rightarrow \text{Raabe Duhamel} \end{cases}$$

2) Criteriul radicalului (Cauchy)

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \begin{cases} \ell>1 \Rightarrow \sum \text{ div} \\ \ell<1 \Rightarrow \sum \text{ conv} \\ \ell=1 \Rightarrow P_1 \end{cases}$$

3) Criteriul comparaţiei

Fie $\sum_n x_n, \sum_n y_n$, a.î. $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0,+\infty)$

Atunci $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$

4) Criteriul Raabe Duhamel

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \begin{cases} \ell<1 \Rightarrow \sum \text{ div} \\ \ell>1 \Rightarrow \sum \text{ conv} \\ \ell=1 \Rightarrow \text{Revenim la enunţ} \end{cases}$$

5) Criteriul logaritmic

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} \quad \begin{cases} l<1 \Rightarrow \Sigma \text{ div} \\ l>1 \Rightarrow \Sigma \text{ conv.} \\ l=1 \Rightarrow ? \end{cases}$$

6) Criteriul condensării

Dacă $(x_n)_n \downarrow \Rightarrow \sum_n x_n \sim \sum_n 2^n x_{2^n}$

(P1) Σx_n, $x_n \not\to 0 \Rightarrow S$ div

seria geometrică

$$\sum_n q^n = \begin{cases} \text{conv}, & q \in (-1,1) \\ \text{div}, & q \notin (-1,1) \end{cases}$$

seria armonică

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{conv}, & \alpha > 1 \\ \text{div}, & \alpha \le 1 \end{cases}$$

7) Criteriul Leibniz

$$\left.\begin{array}{l} \sum_n (-1)^n x_n \\ x_n \searrow^n 0 \end{array}\right| \Rightarrow \sum_n (-1)^n x_n \text{ conv.}$$

Spunem că Σx_n absolut conv dacă $\sum_n |x_n|$ conv.

Topologie

Fie $X \neq \emptyset$. O mulț. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ s.n. topologie, dacă:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2) $\forall D_1, D_2 \in \mathcal{T}$, $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$

3) $\forall (D_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}$, $\bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$

$A \subseteq \mathbb{R}$ s.n. deschisă, dacă $\forall a \in A$, $\exists r > 0$, a.î. $B(a,r) \subseteq A$.

$B \subseteq \mathbb{R}$ s.n. închisă, dacă $C_B = \mathbb{R} \setminus B$

A' - mulț. punctelor de acumulare

· $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ pct. acumulare al mulțimii $A\}$

$\forall V \in \mathcal{V}_x, (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

· $x \in A' \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_x$, $V \cup A$ are o infinitate de elemente

· Dacă $\exists x_n \in A$, $x_n \xrightarrow{n} x \Rightarrow x \in A')$

$\bar{A}$ - mulțimea punctelor aderente

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ pct. aderent al mulțimii $A\}$

$\forall V \in \mathcal{V}_x, V \cap A \neq \emptyset$

A mulț. închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

$\bar{A} = A' \cup A$

$\mathring{A}$ - interiorul mulțimii A

$\mathring{A} = \{x \in A \mid \exists x > 0, \text{a.î. } B(x, r) \subseteq A\}$

$\mathring{A} \subseteq A$.

A mulț. deschisă $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

$Fr(A)$ - frontiera mulțimii A

$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

$Iz(A)$ - punctele izolate

$Iz(A) = \bar{A} \setminus A'$

A $Int(A)$

Teorema de caracterizare a mulțimilor deschise $\mathbb{R}$:

1) $\emptyset$ și $\mathbb{R}$ sunt deschise

2) Intersecția oricăror 2 mulț. deschise din $\mathbb{R}$ e o mulțime deschisă din $\mathbb{R}$

3) Reuniunea unei familii arbitrare de mulțimi deschise din $\mathbb{R}$ este o mulțime deschisă din $\mathbb{R}$.

Teorema de caracterizare a mulțimilor închise pe $\mathbb{R}$.

1) $\emptyset$ și $\mathbb{R}$ sunt închise

2) Reuniunea $\forall$ 2 mulțimi închise din $\mathbb{R}$ e o mulț. închisă în $\mathbb{R}$

3) Intersecția unei familii arbitrare de mulțimi închise din $\mathbb{R}$ este o mulțime închisă din $\mathbb{R}$.

Definiția unei funcții continue în $\mathbb{R}$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e continuă în x_0, dacă pt. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, a.î. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

f s.n. continuă $\Leftrightarrow$ Fie (X_1, τ_1) și (X_2, τ_2) sp. topologice, $a \in X_1$, $f: X_1 \to X_2$

f s.n. continuă dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

6 Teorema privind caracterizarea continuității în spații metrice.

Fie $f: H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție

Spunem că f uniform continuă pe H, dacă: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, a.î. $\forall x, y \in H$ cu $|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Dacă $f: X \to Y$ uniform continuă și spațiul metric (X, d) este compact atunci funcția f este uniform continuă

Convergența simplă

Fie $f_n, f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Spunem că $(f_n)_n$ converge simplu la f (scriem $f_n \xrightarrow{cs} f$) dacă $\forall x \in A$ șirul numeric $(f_n(x))_n$ are limita numărul $f(x)$.

Convergența uniformă

Spunem că $f_n \xrightarrow{cu} f$, dacă

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, a.î.

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ (\forall)\ n \in n_\varepsilon.$$

(T1) $f_n \xrightarrow{cu} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{cs} f$

(T2) $f_n \xrightarrow{cu} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

(T3) Transportul continuității prin C.U.

Fie $f_n \xrightarrow{cu} f$, f_n continue pe A, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ f continuă pe A.

Teorema privind mărginirea funcțiilor continue.

$\forall$ funcție pe un interval închis și mărginit este mărginită și își atinge marginile.

① O funcție continuă pe uniform compact $\Rightarrow$ e uniform continuă.

② O funcție uniform continuă duce un șir convergent din $\mathbb{R}$ într-un șir convergent.

$\left.\begin{array}{l}(x_n)_n \text{ conv} \\ f \text{ uniform continuă}\end{array}\right| \Rightarrow (f(x_n))_n$ converg.

Dacă $\exists$ $(x_n)_n$ conv. și $(f(x_n))_n$ nu e conv $\Rightarrow$ f nu e uniform continuă.

③ Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci

a) f uniform continuă pe $\mathbb{R}$

b) $\forall$ $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ cu $x_n - y_n \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow$ $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n} 0$

Dacă $\exists (x_n)_n, (y_n)_n \subseteq A$ cu $x_n - y_n \xrightarrow{n} 0$ și $f(x_n) - f(y_n) \overset{n}{\not\to} 0 \Rightarrow f$ nu e unif. cont.

④ f derivabilă și mărginită $\Rightarrow f$ uniform continuă

⑤ $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ cont, atunci:

1) f uniform continuă pe $(a,b]$

2) $\exists$ $\tilde{f}: [a,b] \to \mathbb{R}$, continuă $\tilde{f}|_{(a,b]} \cong f$

⑥ $f: I \cup J \to \mathbb{R}$

$I \cap J \neq \emptyset$, f unif cont pe I, J $\Rightarrow$ f uniform cont pe $I \cup J$.

Mulțime compactă

$A \subset X$ s.n. compactă prin șiruri, dacă $\forall$ șir $(x_n)_n \subset A$ se poate extrage un subșir convergent la un punct x din A.

Mulțimile compacte în $\mathbb{R}^n$ închise și mărginite.

$\forall$ mulțime compactă prin șiruri A din spațiu metric (X,d) este un spațiu metric complet.

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^n$, o mulțime este compactă, dacă este închisă și mărginită.

Funcția uniform continuă.

Fie (X, d_1), (Y, d_2) două spații metrice, $f: X \to Y$ o fct.

f este uniform continuă $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$,

$\forall x_0 \in X$, $d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Derivata

Fie $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$

Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s.n. derivata lui f în x_0 și s.n. cu $f'(x_0)$. În acest caz, spunem că f are derivată în x_0.

Dacă $f'(x_0)$ este finită, f are derivată în x_0.

Dacă f e derivabilă în toate pct. unei mulțimi $E \subseteq (a,b)$, atunci spunem că f e derivabilă pe E.

Caracterizarea alternativă a derivatei

Fie $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$

$$f_s'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f_d'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivatele la dreapta și la stânga în x_0 ale lui f s.n. derivatele laterale ale lui f în x_0.

7 Teorema Fermat

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, c un punct din interiorul intervalului I şi $f: I \to \mathbb{R}$ cu urm. prop:

1) c e punct de extrem local al funcției f

2) f e derivabilă în c.

Atunci $f'(c) = 0$.

Teorema Rolle

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

1) f e continuă

2) f e derivabilă pe (a, b)

3) $f(a) = f(b)$

Teorema Lagrange

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$]

1) f e continuă pe $[a, b]$

2) f e derivabilă pe (a, b)

Atunci $\exists$ $c \in (a, b)$, a.î. $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Teorema lui Darboux

Fie I un interval nedegenerat al axei reale şi $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci, pentru orice interval J inclus în I, $f'(J)$ este interval.

Regula lui l'Hospital

Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, I un interval din $\mathbb{R}$, a.î. $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$

$f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, a.î.:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

2) f şi g derivabile şi $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$

3) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

Teorema lui Cauchy

Fie $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, a) f, g continue pe $[a,b]$

b) f, g derivabile pe (a,b)

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, atunci:

Derivabilitatea limitei unui şir de funcţii

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ $c \in I$, a.î. $f_n(c)$ converge către c.
2. $f_n'(x)$ converge uniform către o funcţie $g(x)$ pe I.
3. $\exists$ un interval deschis y, care conţine c, a.î. $f_n'(x)$ să fie continuă pe y, pentru fiecare n.

Teorema Cauchy - Hadamard

Fie $(x_n)_n$ un şir mărginit de numere reale. Definim $\overline{\lim}\, x_n$, ca fiind limita sa superioară, notată cu $\overline{\lim}\, x_n$, ca fiind $\max\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subşir al lui $(x_n)_n$, a.î. $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x\}$

Polinomul Taylor

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, compusă, a.î. $\exists$ $f^{(n)}$ pe (a,b) şi $f^{(n+1)} = (f^{(n)})' = (f')^{(n)}$ şi $\exists$ $f^{(n+1)}(c)$ s.n. polinom Taylor de ordin $n+1$ asociat fct. f în pct. c.

$$T_{f,n+1,c}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Prima teoremă a lui Taylor

Fie $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o fct:

1) $\exists$ $f', f'', \dots, f^{(n-1)}: [a,b] \to \mathbb{R}$ şi sunt continue

2) $\exists$ $f^{(n)}: (a,b) \to \mathbb{R}$

Atunci, $\forall \alpha, \beta \in [a,b]$, $\exists$ μ, între α şi β, a.î.

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{n}(\mu)}{n!}(\beta-\alpha)^n$$

Taylor cu rest Lagrange

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ şi $c\in(a,b)$, a.î. $\exists\, f^{(n+1)}$ pe (a,b). Atunci $\forall\, x\in(a,b]$, $\exists\, \alpha=\alpha_x$ între x şi c ($\alpha\in(x,c)$), a.î.

$$f(x)=T_{f,n,c}(x)+\underbrace{\frac{f^{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{R_{f,n,c}(x)}$$

$n=0 \Rightarrow$ Th. Lagrange.

Definiţia derivatei în raport cu un vector

$f: B(a,r)\to\mathbb{R}^n$, $v\in\mathbb{R}^n$, $B(a,r)\subset\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

Derivata unei funcţii de mai multe variabile.

Fie $f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\lim_{x_k\to a_k}\frac{f(a_1,\dots,a_{k-1},x_k,a_{k+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{x_k-a_k}=\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

Proprietăţile funcţiilor derivabile

1) $f(x)$ derivabilă în x, dacă $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\ \exists$.

f e continuă, de asemenea f şi f' există.

2) Dacă $f(x)$ derivabilă în $g(x)$, iar $g(x)$ e der. în $x \Rightarrow$

$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

3) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

5) $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

Def. derivatelor parțiale

Funcția f are derivată parțială în punctul a în raport cu variabila x_i are derivată în a în sens obișnuit:

$$\exists \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i}(a)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ s.n. derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x_i în punctul a.

Def. derivatei de ordin superior

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă parțial pe D.

Fie $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$

Dacă $\exists$ derivata parțială în $a \in D$ în raport cu x_j a funcției $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, atunci s.n. derivata parțială de ordin 2 a funcției f în punctul a.

Not: $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = (f'_{x_i})'_{x_j} = f''_{x_i x_j}$

Teorema lui Schwarz

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $a \in D$ un punct de acumulare. Dacă derivatele parțiale mixte există și sunt continue într-o vecinătate a punctului a, atunci ele sunt egale.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(a)$$

Teorema lui Young

$f(a) = c$, $f(b) = d$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_c^d f^{-1}(y)\,dy = bd - ac$$

Teorema funcțiilor implicite

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o m d, $F: D \to \mathbb{R}$ și $(a,b) \in D$.

1. $F(a,b)=0$
2. $F \in C^1(D)$
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$

atunci $\exists$ o vecinătate U a pct. a în $\mathbb{R}$, o vecinătate V a punctului b în $\mathbb{R}$ și o unică fct $y: U \to V$, a.î.:

1. $F(x,(y(x))=0, \forall x \in U$
2. y e diferențiabilă pe U
3. $y(a)=b$.

Teorema multiplicatorului Lagrange

Fie $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $f, g_1, \dots, g_p : D \to \mathbb{R}$,

$f(x,y)$; $g_1(x,y) \dots, g_p(x,y)$, $x=(x_1, \dots, x_p)$, $y=(y_1, \dots, y_p)$

$(x_0, y_0) \in \{(x,y) \in D \mid g_1(x,y) = \dots = g_p(x,y)=0\} = S$

1) $f, g_1, \dots, g_p$ sunt de clasă C^1 (admit derivate parțiale cont)

2) (x_0, y_0) pct. de extrem local pentru $f|_S$, $V \subseteq D$, a.î. $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ are semn const pe $V \cap S$

3. $$\frac{D(g_1,\dots,g_p)}{D(y_1,\dots,y_p)}(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(x_0,y_0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n}(x_0,y_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_n}{\partial y_2}(x_0,y_0) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n}(x_0,y_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_p g_p.$$

Operații cu funcții derivabile

1) $(f+g)' = f' + g'$

2) $(\alpha \cdot f)' = \alpha f'$

3) $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}$