Topologie

Def.: Fie $X \neq \emptyset$. O mulțime $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se numește **topologie pe X** dacă:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

b) $(\forall)\ D_1, D_2 \in \mathcal{T}$, avem $D_1 \cap D_2 \subset \mathcal{T}$

c) $(\forall)\ (D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, avem $\bigcup\limits_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$ $(I \neq \emptyset)$

Def.: Fie $X \neq 0$ și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe X. Perechea $(X, \mathcal{T})$ s.n. **spațiu topologic**.

ex.: 1) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic.

2) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic.

3) Fie $X = \mathbb{R}$ și $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic

Justificare pentru 3):

a) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ (evident)

b) Fie $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$. Arătăm că $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$.
Dacă $D_1 = \emptyset$ sau $D_2 = \emptyset$, atunci $D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \mathcal{T}$.
Dacă $D_1 = \mathbb{R}$ sau $D_2 = \mathbb{R}$, atunci $D_1 \cap D_2 = D_2 \in \mathcal{T}$ sau $D_1 \cap D_2 = D_1 \in \mathcal{T}$.
Dacă $D_1 = (-\infty, a_1)$ și $D_2 = (-\infty, a_2)$ cu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, atunci $D_1 \cap D_2 = (-\infty, \min\{a_1, a_2\}) \in \mathcal{T}$.

c) Fie $(D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$. Arătăm că $\bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$.

Dacă $D_i = \emptyset$, $(\forall)\ i\in I$, atunci $\bigcup_{i\in I} D_i = \emptyset \in \mathcal{T}$.

Dacă $(\exists)\ i_0 \in I$ a.î. $D_{i_0} = \mathbb{R}$, atunci $\bigcup_{i\in I} D_i = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că

$D_i = (-\infty, a_i)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ i \in I$.

Avem $\bigcup_{i\in I} D_i = (-\infty, \sup_{i\in I} a_i) \in \mathcal{T}$.

$$\left(\begin{array}{l} \sup(0,2) = 2 \\ \sup(0,2] = 2 \end{array}\right)$$

Deci $(\underset{\mathbb{R}}{\overset{\|}{X}}, \mathcal{T})$ este spațiu topologic. $\square$

Def.: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic.

1) O mulțime $D \subset X$ s.n. **mulțime deschisă** dacă $D \in \mathcal{T}$.

2) O mulțime $F \subset X$ s.n. **mulțime închisă** dacă $X \setminus F \overset{\text{not.}}{=\!=} CF \in \mathcal{T}$ (complementara lui F)

3) O mulțime $K \subset X$ s.n. **mulțime compactă** dacă din orice acoperire cu mulțimi deschise a sa se poate extrage o subacoperire finită (i.e. $(\forall)\ (D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ a.î. $K \subset \bigcup_{i\in I} D_i$, $(\exists)\ J \subset I$, J finită a.î. $K \in \bigcup_{i\in J} D_i$).

4) Fie $x \in X$. O mulțime $V \subset X$ s.n. vecinătate a lui x dacă $(\exists)\ D \in \tau$ a.î. $x \in D \subset V$.

Analiza topologică a unei mulțimi

Def.: Fie (X, τ) un spațiu topologic, $A \subset X$ și $x_0 \in X$. Spunem că x_0 este:

1) punct interior al lui A dacă A este vecinătate a lui x_0.

2) punct aderent (sau de aderență) al lui A dacă pentru orice vecinătate V a lui x_0, avem $V \cap A \neq \emptyset$.

3) punct de acumulare al lui A dacă pentru orice vecinătate V a lui x_0, avem $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

4) punct frontieră al lui A dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct interior al lui A.

5) punct izolat al lui A dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct de acumulare al lui A.

Notații: În contextul definiției precedente, notăm:

1) $\mathring{A} = \{x \in X \mid x_0$ punct interior al lui A$\}$ (interiorul lui A)

2) $\bar{A} = \{x_0 \in X \mid x_0$ punct aderent al lui A$\}$ (închiderea sau aderența lui A)

3) $A' = \{x_0 \in X \mid x_0$ punct de acumulare al lui

$A\}$

(mulțimea punctelor de acumulare ale lui A sau mulțimea derivată a lui A)

4) $Fr(A) = \partial A = \{x_0 \in X \mid x_0$ punct frontieră al lui $A\} = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

(frontiera lui A)

5) $Izo(A) = {}'A = \{x_0 \in X \mid x_0$ punct izolat al lui $A\} = \bar{A} \setminus A'$

(mulțimea punctelor izolate ale lui A)

Notație: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $x \in X$.

$$\mathcal{V} \overset{\text{not.}}{=} \{V \subset X \mid V \text{ vecinătate a lui } x\}$$

Def.: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic, $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că x este o limită a șirului $(x_n)_n$ în raport cu topologia $\mathcal{T}$ și scriem $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{T}}} x_n = x$ sau $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{T}} x$ dacă $(\forall)\, V \in \mathcal{V}_x$, $(\exists)\, n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_V$, avem $x_n \in V$.

Observație! Sintagma „în raport cu topologia $\mathcal{T}$" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul topologic $(X, \mathcal{T})$".

ex.: Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Pentru orice $x_0 \in X$, avem $\mathcal{V}_{x_0} = \{X\}$.

Fie acum $x \in X$, $y \in X$ și $(x_n)_n \subset X$.
$(x \neq y)$

Avem $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{\tau}{=} x$ și $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{\tau}{=} y$

Observație! În general, într-un spațiu topologic, un șir poate avea mai multe limite.

Def.: Fie (X,τ) un spațiu topologic. Spunem că (X,τ) este **spațiu topologic separat** (sau **Hausdorff**) dacă $(\forall)\, x,y\in X$, $x\neq y$, $(\exists)\, U\in \mathcal{V}_x$, $(\exists)\, V\in\mathcal{V}_y$ a.î. $U\cap V=\emptyset$.

Propoziție: În orice spațiu topologic separat, orice șir are o singură limită.

Def.: Fie $X\neq\emptyset$. O funcție $d: X\times X\to\mathbb{R}$ s.n. **distanță** (sau **metrică**) pe X dacă:

1) $d(x,y)\geq 0$, $(\forall)\, x,y\in X$
2) $d(x,y)=0 \iff x=y$, $(\forall)\, x,y\in X$
3) $d(x,y)=d(y,x)$, $(\forall)\, x,y\in X$
4) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$, $(\forall)\, x,y,z\in X$ (inegalitatea triunghiului)

Def.: Fie $X\neq\emptyset$ și $d: X\times X\to\mathbb{R}$ o metrică pe X. Perechea (X,d) s.n. **spațiu metric**.

Exemple de spații metrice:

1) Fie $X\neq\emptyset$ și $d: X\times X\to\mathbb{R}$,

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$$

Perechea (X, d) este spațiu metric.

2) Fie $X = \mathbb{R}$ și $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x - y|$.
Perechea (X, d) este spațiu metric.

3) Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $X = \mathbb{R}^m$ și $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$, $d_1(\underset{(x_1,\dots,x_m)}{x}, \underset{(y_1,\dots,y_m)}{y}) =$

$$= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_m - y_m| = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|.$$

Perechea (X, d_1) este spațiu metric.

4) Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $X = \mathbb{R}^m$ și $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$, $d_2(x,y) =$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Perechea (X, d_2) este spațiu metric.

5) Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $X = \mathbb{R}^m$ și $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$, $d_\infty(x,y) =$

$$= \max \{ |x_i - y_i| \mid i = \overline{1,m} \}$$

Perechea (X, d_∞) este spațiu metric.

Def.: Fie (X, d) un spațiu metric, $x \in X$ și $r > 0$.

1) $B(x, r) \overset{\text{def.}}{=\!=} \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$

(bila deschisă de centru x și rază r)

2) $B[x, r] = \overline{B}(x, r) \overset{\text{def.}}{=\!=} \{ y \in X \mid d(x,y) \le r \}$

(bila închisă de centru x și rază r)

Teoremă: Fie (X, d) un spațiu metric și
$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid (\forall)\, x \in A, (\exists)\, r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subset A\}$
Atunci $(X, \mathcal{T}_d)$ este spațiu topologic.

Dem.: a) $\emptyset \in \mathcal{T}_d$ (evident)

Fie $x \in X$.

Pentru orice $r > 0$ avem $B(x, r) \subset X$.

Deci $X \in \mathcal{T}_d$.

b) Fie $D_1 \in \mathcal{T}_d$ și $D_2 \in \mathcal{T}_d$. Arătăm că $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}_d$.

Dacă $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, atunci $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}_d$.

Presupunem că $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

Fie $x \in D_1 \cap D_2$. Deci, $x \in D_1$ și $x \in D_2$.

$x \in D_1 \in \mathcal{T}_d \Rightarrow (\exists)\, r_1 > 0$ a.î. $B(x, r_1) \subset D_1$.

$x \in D_2 \in \mathcal{T}_d \Rightarrow (\exists)\, r_2 > 0$ a.î. $B(x, r_2) \subset D_2$.

Alegem $r = \min\{r_1, r_2\}$

Avem $B(x, r) \subset B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subset D_1 \cap D_2$

Așadar, $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}_d$.

c) Fie $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}_d$. Arătăm că $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}_d$

Dacă $\bigcup_{i \in I} D_i = \emptyset$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}_d$.

Presupunem că $\bigcup_{i \in I} D_i \neq \emptyset$.

Fie $x \in \bigcup_{i \in I} D_i$. Deci, $(\exists)\, i_0 \in I$ a.î. $x \in D_{i_0}$

$x \in D_{i_0} \in \mathcal{T}_d \Rightarrow (\exists)\, r > 0$ a.î. $B(x, r) \subset D_{i_0}$

$$B(x,r) \subset D_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} D_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}_d.$$

Prin urmare, $(X, \mathcal{T}_d)$ este spațiu topologic. $\square$

Def.: Topologia $\mathcal{T}_d$ din definiția precedentă s.n. topologia indusă de metrica d.

Observație! Dându-se un spațiu metric (X, d), putem construi spațiul topologic $(X, \mathcal{T}_d)$. Ca atare, are sens să vorbim despre mulțimi deschise, mulțimi închise, vecinătăți, mulțimi compacte etc. într-un spațiu metric (referindu-ne la topologia indusă de metrica respectivă).

Def.: (Adaptarea definiției interiorului, aderenței etc. în spații metrice)

Fie (X, d) un spațiu metric, $A \subset X$ și $x_0 \in X$.

Spunem că x_0 este:

1) punct interior al lui A (i.e. $x_0 \in \mathring{A}$) dacă $(\exists)\ r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \subset A$.

2) punct aderent (sau de aderență) al lui A (i.e. $x_0 \in \bar{A}$) dacă $(\forall)\ r > 0$, avem $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

3) punct de acumulare al lui A (i.e. $x_0 \in A'$) dacă $(\forall)\ r > 0$, avem $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

4) punct frontieră al lui A (i.e. $x_0 \in Fr(A) = \partial A$)

dacă x_0 este punct aderent al lui A și x_0 nu este punct interior al lui A.

5) **punct izolat al lui A** (i.e. $x_0 \in \operatorname{Izo}(A) = {}'A$) dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct de acumulare al lui A.

Def.: Fie (X, d) un spațiu metric, $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita x în raport cu metrica d și scriem $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x$ sau $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} x$ dacă

$\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$ (i.e. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem $d(x_n, x) < \varepsilon$).

Propoziție: Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci (X, τ_d) este **spațiu topologic separat** (sau **Hausdorff**).

Observație! În orice spațiu metric, orice șir are o singură limită.

Terminologie: În contextul definiției precedente, dacă $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x$, spunem că $(x_n)_n$ converge către x în raport cu metrica d.

Observație! Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul metric (X, d)".