Tutoriat 5

R = raza de convergență $= \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$

$(-R, R)$ = interval de convergență

$M = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_n a_n \cdot x^n \text{ conv} \}$ = mulțimea de convergență a seriei $\sum_n a_n x^n$

Folosim 2 formule principale:

1) Dacă $(\exists) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

2) Dacă $(\exists) \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$

! $(-R, R) \subset M \subset [-R, R]$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

La final vor fi de testat 2 cazuri pentru $[-R, R]$. De obicei una dintre variante va face ca seria să conțină doar termeni pozitivi și se folosesc criteriile și teoremele de acolo, iar cealaltă va conține și termeni negativi sau $(-1)^n$. Pentru ultima menționată cel mai des se vor folosi următoarele:*

* Deseori și Criteriul suficient de divergență

1) Criteriul lui Leibniz (a_n = seria excluzând $(-1)^n$)

· Dacă șirul termenilor pozitivi a_n este descrescător ($a_{n+1} \leq a_n$) și $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci seria ~~diverge~~ converge.

2) Definiția absolut convergenței

· O serie $\sum_n z_n$ s.n. absolut convergentă $\Leftrightarrow \sum_n |z_n|$ e convergentă.

↳ Dacă o serie este absolut convergentă, automat este și „simplu" convergentă.

1) Determinați mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$

<u>Sol</u>:

Voi nota $a_n = (n+1)$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{1} = 1$$

Fie M mulțimea de convergență a seriei de puteri din enunț.

Avem $(-R, R) \subset M \subset [-R, R]$, i.e. $(-1, 1) \subset M \subset [-1, 1]$

Studiem dacă $-1 \in M$ și $1 \in M$.

Dacă $x = -1$, seria devine $\sum_n (n+1) \cdot (-1)^n$.

Aici putem demonstra că seria diverge în 2 moduri:

1) Analizăm termenii: $-2, 3, -4, \ldots \Rightarrow \nexists$ limită

2) Facem limită din modul

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |(n+1)(-1)^n| = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

$\Rightarrow$ diverge conform Criteriului Suficient de Divergență

Deci $-1 \notin M$

Dacă $x = 1$, seria devine $\sum_n (n+1) \cdot 1^n = \sum_\infty (n+1)$

$\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty \neq 0$, divergentă conform Criteriului Suficient de Divergență $\Rightarrow 1 \notin M$

Așadar $M = (-1, 1)$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n+1}} \cdot x^n$

Sol:

Notez $a_n = \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+2}} \cdot \frac{3^n \sqrt{n+1}}{(-1)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \right| = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Fie M mulțimea de convergență a seriei de puteri din enunț.

Avem $(-3, 3) \subset M \subset [-3, 3]$

Studiem dacă $-3 \in M$ și $3 \in M$.

Dacă $x = 3$, seria devine $\sum_n \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n+1}} \cdot 3^n = \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Șirul a_n este descrescător și $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \overset{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow}$ seria converge

Deci $3 \in M$

Dacă $x = -3$, seria devine $\sum_n \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n+1}} \cdot (-3)^n = \sum_n \frac{(-1)^n \cdot 3^n \cdot (-1)^n}{3^n \sqrt{n+1}} =$

$= \sum_n \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n+1}} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow$ serie cu termeni pozitivi!

Folosim Criteriul de comp cu limită.

Fie $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ evident

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1 \in (0, \infty)$$

$\Rightarrow \sum_n a_n \sim \sum_n y_n$; $\sum_n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ divergentă, serie armonică gen. cu $\alpha \leq 1$

Deci $-3 \notin M$. Așadar $M = (-3, 3]$.

TS

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^2 \sqrt{3^n}} \cdot (x+2)^n$

Sol:

Pentru simplificarea calculelor voi nota $x+2$ cu y.

Notez $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)^2 \sqrt{3^n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{(n+2)^2 \sqrt{3^{n+1}}} \cdot \frac{(n+1)^2 \sqrt{3^n}}{(-1)^n 2^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{3^n}{3^{n+1}}} \right| = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Fie M mulțimea de convergență a seriei de puteri din enunț.

Avem $(-R, R) \subset M \subset [-R, R]$, i.e. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \subset M \subset \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Studiem dacă $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{\sqrt{3}}{2} \in M$.

Dacă $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, seria devine $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^2 \sqrt{3^n}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n =$

$= \sum_n \frac{(-1)^{2n}}{(n+1)^2} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{3^n}} \cdot \frac{(\sqrt{3})^n}{2^n} = \sum_n \frac{1}{(n+1)^2} \to$ serie cu termeni strict pozitivi

$\Rightarrow$ Fie $b_n = \frac{1}{n^2}$; Evident $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \in (0, \infty).$$

$\Rightarrow \sum_n a_n \sim \sum_n b_n \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^2} \to$ conv $\left\}\right.$ serie armonică gen, cu $\alpha > 1$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ conv $\Rightarrow$ Deci $-\frac{\sqrt{3}}{2} \in M$

Dacă $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, seria devine $\sum\limits_{n} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^2 \sqrt{3}^n} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$= \sum\limits_{n} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum\limits_{n} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot (-1)^n.$

$\frac{1}{(n+1)^2}$ descr. și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0 \xrightarrow{C.\ Leibniz}$ seria converge

Deci $\frac{\sqrt{3}}{2} \in N$

~~Avem $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \subset N \subset \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$~~

Așadar $N = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Fie M mulțimea de convergență a seriei de puteri

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^2 \sqrt{3}^n} \cdot (x+2)^n$

$y \in N = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \le x+2 \le \frac{\sqrt{3}}{2} \;/-2 \Rightarrow -2-\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2} - 2$

Așadar $M = \left[-2-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}-2\right]$ □

RESTANȚĂ 2025

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot 15 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot (7n+1)}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (3n+2)} \cdot (x+2)^n$

<u>Sol</u>:

Pentru simplificarea calculelor voi nota $x+2$ cu y.

Notez $a_n = \frac{8 \cdot 15 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot (7n+1)}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{8 \cdot 15 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot (7n+1) \cdot (7n+8)}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} \cdot \frac{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{8 \cdot 15 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot (7n+1)}\right|$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{7n+8}{3n+5}\right| = \frac{7}{3}$

$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$

Fie N mulțimea de conv a seriei de puteri din enunț.

Avem $(-R, R) \subset N \subset [-R, R]$, i.e. $\left(-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right) \subset N \subset \left[-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right]$

Studiem dacă $-\frac{3}{7}$ și $\frac{3}{7} \in N$

Dacă $y = -\frac{3}{7}$, seria devine $\sum_n \frac{8\cdot 15\cdot 22\cdot \ldots \cdot (7n+1)}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \ldots \cdot (3n+2)} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^n$

$$= (-1)^n \cdot \Bigg[\underbrace{\frac{8\cdot 15\cdot 22\cdot \ldots \cdot (7n+1)\cdot 3^n}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \ldots \cdot (3n+2)\cdot 7^n}}_{c_n}\Bigg]$$

$c_n > c_{n+1}$? $\Leftrightarrow$ $1 > \frac{c_{n+1}}{c_n} = \ldots = \frac{7n+8}{3n+5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{21n+24}{21n+35}$ $\overset{<1}{\text{A}}$

$\Rightarrow c_n$ descr

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{8\cdot 5\cdot 22\cdot \ldots \cdot (7n+1)}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \ldots \cdot (3n+2)}}_{\to \frac{7}{3}} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{7}\right)^n}_{\to 0} = \frac{7}{3}\cdot 0 = 0 \xrightarrow[\text{Leibniz}]{\text{Crit}} \text{seria converge}$$

$\boxed{\text{Deci } -\frac{3}{7} \in N}$

Dacă $y = \frac{3}{7}$, seria devine $\underbrace{\sum_n \frac{8\cdot 15\cdot 22\cdot \ldots \cdot (7n+1)}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \ldots \cdot (3n+2)} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n}_{\text{serie cu termeni strict pozitivi}}$

Folosesc Crit Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \overset{\text{calcule } (\ldots)}{=} \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{21n+35}{21n+24} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{21n+35-21n-24}{21n+24}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{11}{21n+24}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{11n}{21n+24} = \frac{11}{21} < 1 \xrightarrow[\text{Raabe-Duhamel}]{\text{Cf. Crit}} \text{seria diverge}$$

Deci $\frac{3}{7} \notin N$

Așadar $N = \left[-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right)$

Fie M mulțimea de convergență a seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\cdot 15\cdot 22\cdot \ldots \cdot (7n+1)}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \ldots \cdot (3n+2)} \cdot (x+2)^n.$$

$y \in N = \left[-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right) \Rightarrow -\frac{3}{7} \le y < \frac{3}{7} \Leftrightarrow -\frac{3}{7} \le x+2 \le \frac{3}{7} \,/ -2$

$\Leftrightarrow -\frac{10}{7} \le x < -\frac{4}{7}$

Așadar $M = \left[-\frac{10}{7}, -\frac{4}{7}\right)$. □

Exercițiu de intuiție:

Dați exemplu de o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ cu raza de convergență $R = 5$. Justificați.

<u>Sol</u>:

Dacă ne uităm la exercițiile rezolvate până acum, am observat că ceva de genul $\frac{---}{a^n}$ va rezulta în $R = a$. Deci trebuie să avem ceva de genul $\frac{---}{5^n}$ cu restul termenilor care dispar după limită.

! Atenție, se începe de la $n=0$, deci nu putem avea ceva de genul $\frac{---}{n \cdot 5^n}$.

Ca exemplu, voi lua $a_n = \frac{(n+1)}{5^n}$

Testăm:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n+1} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{5}} \quad ✓$$

$\square$