21.11.2023

Curs 8

Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Considerăm $\mathbb{R}^p = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall\ i = \overline{1,p}\}$

Def: Fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Definim:

1) $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_p+y_p)$

2) $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_p)$

Obs: Atunci când nu specificăm, se subînțelege că notăm $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y$ etc.

Def: Pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$ definim NORMA lui x prin
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}$$

Prop: Funcția $\|\cdot\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\underset{\mathbb{R}^p}{\overset{x}{\cap}} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\overset{\|x\|}{\cap}}$

are proprietățile:

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}^p$

2) $\|x\| = 0 \iff x = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^p} \in \mathbb{R}^p$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall \; x, y \in \mathbb{R}^p$

4) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \; \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall \; x \in \mathbb{R}^p$

Obs: Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ avem $\overset{d(x,y)}{\overset{\|}{d_2(x,y)}}$

$= \|x-y\|$

Obs: Orice sp. normat e și topologic

Obs: Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$ și $f : A \to \mathbb{R}^q$

Pt orice $a \in A$ avem
$$f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_q(a))$$
Prin urmare, am definit funcțiile
$$f_1, \dots, f_q : A \to \mathbb{R}$$

Derivate parțiale și fct. diferențiabile

$a \in \mathring{A}$ $\qquad df(a)(x) = f'(a) \cdot x$

1) f deriv în a $\qquad T(x) = \underset{\overset{\|}{\frac{\partial f}{\partial x}(a)}}{f'(a)} \cdot x$

$\Updownarrow$

2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{|x-a|} = 0$

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \dots, f_q)$ și $a \in \overset{\circ}{A}$.

Def

1. Spunem că f este $\boxed{\text{derivabilă parțial}}$ (sau că f admite derivată parțială) în raport cu variabila x_i (unde $i = \overline{1,p}$ fixat) în punctul a dacă există în $\mathbb{R}^q$ limita

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t}}, \text{ unde } e_i = (0, 0, \dots, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$$

În acest caz notăm $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t}}$ și numim pe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ derivata parțială a fct. f în raport cu variabila x_i, în punctul a.

2. Spunem că f este $\boxed{\text{diferențiabilă}}$ (sau derivabilă) în punctul a, dacă există o aplicație liniară $T: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ (i.e $T(x+y) = T(x) + T(y)$ $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^p$ și $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^p$) a.î.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0_{\mathbb{R}^q} = \underset{\in \mathbb{R}^q}{(0, 0, \dots, 0)}$$

Obs.: Apl liniară T din def precedentă, dacă există, este $\boxed{\text{unică}}$, se notează cu $df(a)$ (sau $Df(a)$ sau $f'(a)$) și se numește $\boxed{\text{DIFERENȚIALA}}$ fct. f în pct a. [$df(a): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

Obs

1) Fie $c \in A$. Sunt echivalente:

i) f cont în c

ii) $f_1, \dots, f_q$ cont în c

2) Fie $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Sunt echiv:

i) f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i, în punctul a

ii) $f_1, \dots, f_q$ admit derivată parțială în raport cu ~~raport~~ variabila x_i, în pct. a

Dacă una dintre afirm i) sau ii) de la 2) e adev, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(a) \right)$$

3) Sunt echivalente:

i) f dif în a

ii) $f_1, \dots, f_q$ dif în a

Dacă una dintre afirm i) sau ii) de la 3) e adev, atunci:

$$df(a) = (df_1(a) \dots df_q(a))$$

Teoremă: Dacă f este diferențiabilă în a atunci f este derivabilă parțial în rap cu variabila x_i, în punctul a, $\forall i \in \{1, 2, \dots p\}$ și $df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $(q, p) \times (p, 1) = (q, 1)$

$$df(a)(\underset{(u_1, \dots, u_p)}{\underset{\parallel}{u}}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \dots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \dots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) \dots \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

Obs: Dacă $q=1$, formula precedentă devine

$df(a): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$\underset{\substack{\| \\ (u_1, u_2, \dots, u_p)}}{df(a)(u)} = {}^t\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)\right] \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\, u_p$$

Teoremă: Dacă f este diferențiabilă în a, atunci f este ~~diferențiabilă~~ continuă în a.

Obs: Reciproca nu e adevărată.

Dacă nu e continuă nu e diferențiabilă.

Obs: Orice aplicație liniară $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ e diferențiabilă în orice pct $a \in \mathbb{R}^p$ și $df(a) = f$

$$df: \mathring{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$$

Obs Pt orice $i \in \{1, \dots, p\}$ proiecția

$pr_i: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $\quad pr_i(\underset{(u_1,\dots,u_p)}{u}) = u_i$ este diferent. în orice $a \in \mathbb{R}^p$ și $dpr_i(a) = pr_i$, deoarece pr_i este const.

Notăm $pr_i = dx_i \ \forall\, i = \overline{1,p}$

Cu această notație, dacă $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ e dif. în $a \in \mathring{A}$ atunci $df(a): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

$$\underset{\substack{\| \\ (u_1,\dots,u_p)}}{df(a)(u)} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\, u_p$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, pr_1(u) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\, pr_p(u)$$

$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, dx_1(u) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\, dx_p(u)$

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\, dx_p$$

<u>Teoremă</u>: Criteriul de diferențiabilitate

Pp că există $V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$ a.î. f admite toate derivatele parțiale pe V (i.e. $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \in \mathbb{R}^q$ $\forall\, c \in V$, $\forall\, i = \overline{1,p}$) și $\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \to \mathbb{R}^q$ e cont în a pt orice $i = \overline{1,p}$.

Atunci f e dif în a

<u>ex</u> Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - x + 2z$

Studiați dif lui f în $(1,2,3)$ și în cazul în care f e dif în $(1,2,3)$ det $df(1,2,3)$

$y, z \to$ const

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + 0 + 0 - y - 1$
$= 2x - y - 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 + 2y + 0 - x - 0 + 0$
$= 2y - x$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 + 0 + 2z - 0 - 0 + 2$
$= 2z + 2$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ cont pe $\mathbb{R}^3$

Crit de dif

$\mathbb{R}^3$ mult deschisă (deci este vecinătate pt toate pct sale)

f dif pe $\mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ dif în $(1,2,3)$

$df(1,2,3): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$df(1,2,3)(u,v,w)$

$$= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)\cdot u}_{} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)\cdot v}_{} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)\, w}_{}$$

$$= (2\cdot\cancel{1}-2-1)u + (2\cdot 2-1)v + (2\cdot 3+2)w$$

$$= -u + 3v + 8w$$

ie $df(1,2,3) = -dx + 3dy + 8dz$ $\square$

exc: Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Studiați cont lui f

b) Det $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$

c) Stud. dif lui f

Sol

a) vezi Seminar 6

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{(xy)'_x \sqrt{x^2+y^2} - xy\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = \frac{(xy)'_y - xy\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+(t,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f\{(t,0)\} - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0}{\sqrt{t^2+0^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_2) - f(0,0)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+(0,t)) - f(0,0)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t}{\sqrt{0^2+t^2}} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Am obținut

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot x \\ \qquad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} - xy \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} y \\ \qquad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă $\Rightarrow$

f dif pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Studiem dif lui f în $(0,0)$

Dacă f ar fi dif în $(0,0)$ atunci

$df(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ~~df~~

$$df(0,0)(u,v) = {}^t\left[\left(\underset{0}{\underset{\parallel}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}} \quad \underset{0}{\underset{\parallel}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right]$$

$= 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$\to 0 \Rightarrow f$ dif în $(0,0)$

$\to \neq 0 \rightarrow f$ nu e dif în $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\cancel{2}n^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}n^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$

Deci, f nu e dif în $(0,0)$ $\square$

$(f(x^2))' = f'(x^2) \cdot 2x$

$f(x,y) = f(xy, x^2+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ?$$

$$f(x,y) = f(\underset{\substack{\parallel \\ x+y}}{u(x,y)}, \underset{\substack{\parallel \\ x^2+y^2}}{v(x,y)})$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g=(u,v)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

(x,y) (u,v)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

f - diferentiabilă
g - diferentiabilă

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

nou 2-5, luni 11/18

după 5 dec, fizic

online curs, marți seminar

5-12-19 dec

7-8