EXAMEN - ALGEBRĂ, AN I, 31.01.2025
- SOLUŢII ŞI BAREME -

Exerciţiul 1: (a) Enunţaţi teorema de caracterizare a funcţiilor surjective. (1 punct)

(b) Definiţi conceptul de ciclu, de transpoziţie şi arataţi ca orice ciclu este un produs de traspoziţii. (0,5 puncte)

(c) Definiţi conceptul de ideal bilateral şi enunţaţi teorema fundamentala de izomorfism pentru inele. (1 punct)

Exerciţiul 2: Fie A o mulțime finită cu cel puțin două elemente și $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : A \to \mathbb{N}$. Pe $\mathcal{F}$ considerăm următoarele relații binare:

- $f \sim_1 g \iff$ există $a \in A$ astfel încât $f(a) = g(a)$
- $f \sim_2 g \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) \neq \emptyset$
- $f \sim_3 g \iff \sum_{a\in A} f(a) = \sum_{a\in A} g(a)$

(a) Care dintre relațiile binare de mai sus sunt relații de echivalență? (1,25 puncte)

(b) Determinați câte un sistem de reprezentanți pentru relațiile de echivalență identificate la punctul (a). (1,25 puncte)

Soluție: Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $A = \{1, \dots, n\}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
(a) $\sim_1$ și $\sim_2$ nu sunt relații de echivalență pentru că nu sunt tranzitive. De exemplu, dacă $f(a) = 1$, $g(a) = a$ și $h(a) = 2$, $(\forall)$ $a \in A$, atunci $f \sim_1 g$, $g \sim_1 h$, dar $f \nsim_1 h$ și $f \sim_2 g$, $g \sim_2 h$, dar $f \nsim_2 h$ . . . . 0,5 × 2 = 1 punct
$\sim_3$ este o relație de echivalență . . . . 0,25 puncte
(b) Un posibil sistem de reprezentanți pentru $\sim_3$ este dat de

$$\mathcal{S} = \{f_m : A \longrightarrow \mathbb{N} : f_m(1) = m, f_m(a) = 0, (\forall)\ a \geq 2,\ m \in \mathbb{N}\}$$

$\mathcal{S}$ este un sistem (complet și independent) de reprezentanți . . . . 1,25 puncte

Exerciţiul 3: Fie grupul $(\mathbb{Z}^2, +)$.

(a) Aratați ca $(\mathbb{Z}^2, +)$ nu e grup ciclic şi determinaţi un $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ pentru care $(m, 0) \in \langle(2, 3), (-1, 5)\rangle$. Este m unic? (1,25 puncte)

(b) Demonstraţi că $\mathbb{Z}^2/\langle(2, 3)\rangle$ este un grup infinit şi că $\mathbb{Z}^2/\langle(2, 3), (-1, 5)\rangle$ este un grup finit. (1,25 puncte)

Barem şi soluţii: (a) Verificarea faptului că $\mathbb{Z}^2$ nu este ciclic . . . . 0,5 puncte

Presupunem că ar fi ciclic: există $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ astfel încât $\langle (a,b)\rangle = \mathbb{Z}^2$. În particular, $(1,0),(0,1) \in \langle (a,b)\rangle$, deci există $k,l \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(1,0) = k(a,b)$ şi $(0,1) = l(a,b)$. Dar atunci $a = b = 0$, o contradicţie.

Determinarea unui m .... 0,5 puncte

Căutăm $m \in \langle (2,3),(-1,5)\rangle$ *i.e.* unul pentru care există $k,l \in \mathbb{Z}$ cu $(m,0) = k(2,3) + l(-1,5)$, deci $m = 2k-l$ şi $3k+5l = 0$. A doua ecuaţie are soluţii de tip $k = 5a, l = -3a$ cu $a \in \mathbb{Z}$. Mergând la prima ecuaţie, $m = 10a + 3a = 13a, a \in \mathbb{Z}$. De exemplu, pentru $a = 1, (13,0)$ aparţine subgrupului cerut.

m nu este unic .... 0,25 puncte

Aşa cum se vede mai sus, $(13a,0) \in \langle (2,3),(-1,5)\rangle$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}$.

(b) $\mathbb{Z}^2/\langle (2,3)\rangle$ este grup infinit .... 0,5 puncte

Prin definiţie, în $\mathbb{Z}^2/\langle (2,3)\rangle$, $\widehat{(a,b)} = \widehat{(c,d)}$ dacă şi numai dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a-c = 2k$ şi $b-d = 3k$. Ca atare, de exemplu, şirul $x_n = \widehat{(n,0)}$, $n \geq 0$, este format din elemente distincte, ca atare grupul este infinit.

$\mathbb{Z}^2/\langle (2,3),(-1,5)\rangle$ este grup finit .... 0,75 puncte

Din punctul (a), ştim că $(13,0) \in \langle (2,3),(-1,5)\rangle$. Printr-o demonstraţie similară, se vede că $(0,13) \in \langle (2,3),(-1,5)\rangle$.

Fie $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Din Teorema de împărţire cu rest, există $q,r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < 13$ astfel încât $a = 13q + r$. La fel, există $q',r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r' < 13$ astfel încât $b = 13q' + r'$, deci avem

$$(a,b) = q(13,0) + (r,b) = q(13,0) + (r, 13q' + r') = q(13,0) + q'(0,13) + (r,r').$$

Cum $q(13,0)+q'(0,13) \in \langle (2,3),(-1,5)\rangle$, rezultă că $\widehat{(a,b)} = \widehat{(r,r')}$ în $\mathbb{Z}^2/\langle (2,3),(-1,5)\rangle$. Dar cum $0 \leq r,r' < 13$, avem cel mult $13 \cdot 13 = 169$ clase de echivalenţă diferite, deci grupul factor este finit.

Exerciţiul 4: Pe mulțimea $R := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim următoarele operații:

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d), \qquad (a,b) \cdot (c,d) := (ac, ad+bc)$$

(a) Arătați că $(R, +, \cdot)$ este un inel comutativ care nu este corp. (1,25 puncte)

(b) Arătați că $I := \{(0,b) \,|\, b \in \mathbb{R}\}$ este un ideal al inelului R și că există un izomorfism de inele $R/I \simeq \mathbb{R}$. (1,25 puncte)

Soluție: (a) Verificarea proprietăților din definiția inelului comutativ .... 1 punct
Se arată că există elemente nenule neinversabile. Spre exemplu, avem $(0,1) \cdot (0,1) = (0,0)$, deci $(0,1)$ este divizor al lui zero, ceea ce înseamnă că nu poate fi inversabil. 0.25 puncte
(b) Verificarea proprietăților din definiția idealului .... 0.5 puncte
Construcția unui izomorfism concret (cu justificările aferente, *e.g.* buna definire, faptul că e izomorfism de inele) sau aplicarea teoremei fundamentale de izomorfism. Pentru prima variantă, putem lua $f : R/I \to \mathbb{R}$, $f([(x,y)]) = x$. Pentru a doua variantă, putem

lua $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$, și arătăm că f este morfism surjectiv de inele și că nucleul său este chiar idealul I, deci prin aplicarea teoremei fundamentale obținem izomorfismul cerut. . . . . 0.75 puncte