Tutoriat 2 CDI

1. Bile

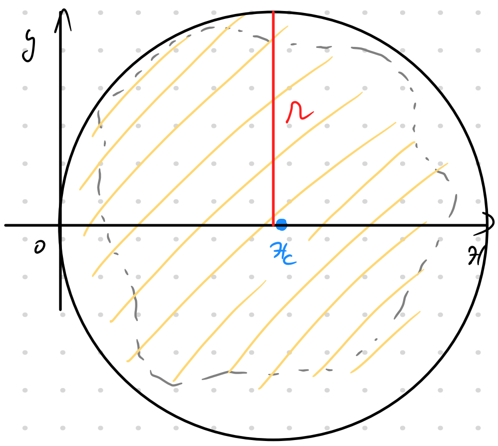
$X_1, X_2, \dots, X_n \neq \emptyset$, $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = \overline{1,n}\}$

=> produs cartezian => notăm $\boxed{X^n}$

norma lui x: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

- Bilă deschisă de centru x și rază r

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$$

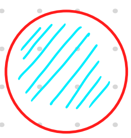


=> ce înseamnă?

R: toate punctele posibile din interiorul cercului dat de raza r, dar care nu ating limita cercului (nu ating punctele de pe frontieră)

Exemple concrete:

($\mathbb{R}^2$) 2D: $x^2 + y^2 < 1$ =>



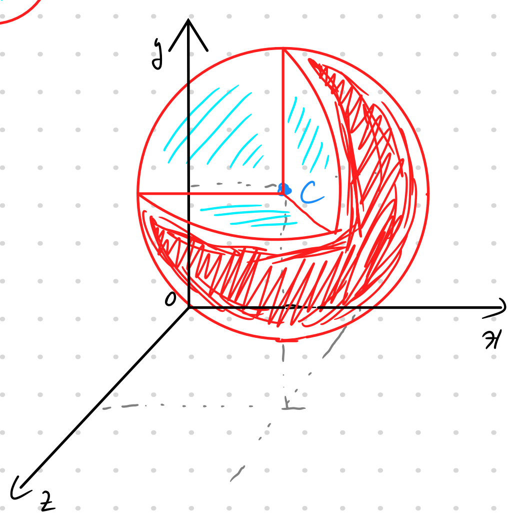
3D: $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ ($\mathbb{R}^3$)

($\mathbb{R}$) 1D: sunt toate intervalele deschise

(a, b)

$(-\infty, b)$

$(a, +\infty)$

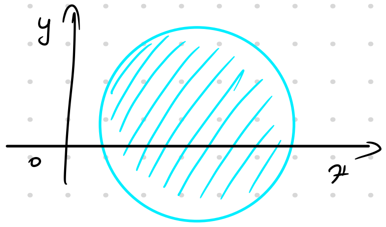


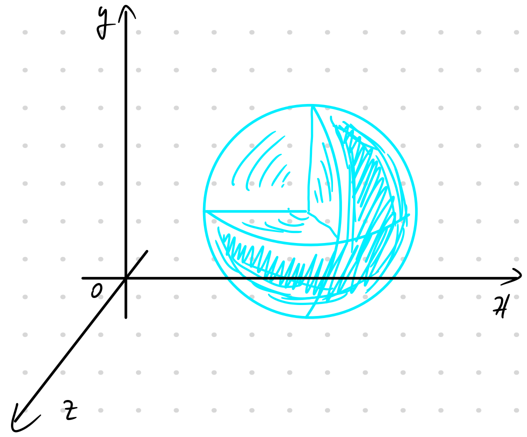
($\mathbb{R}^n$) => mulțimea tuturor punctelor a căror normă < r
(spațiu topologic standard, NU bilă)

• Bilă închisă de centru x și rază r

$$B[x,r] = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| \le r \}$$

→ față de bilele deschise, acum adăugăm punctele de frontieră





2. Elemente de topologie generală

• mulțimi deschise (D) $\qquad B(x, r_x) \subset D$

$\mathbb{R} \to (0,1)$

$\mathbb{R}^2 \to \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}, y\in(0,1)\}$, $B(x,r)$

PROPRIETĂȚI:

1. $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sunt mulțimi deschise
2. D_1, D_2 deschise $\Rightarrow D_1 \cap D_2$ deschise
3. $\{D_j\}_{j\in J}$ deschise $\Rightarrow \bigcup_{j\in J} D_j$ deschisă

contraexemplu (2)

$D_1 = (0, 10)$
$D_2 = (1, 11)$
(!) $D_3 = [-1, 2]$
$\Rightarrow D_1 \cap D_2 \cap D_3 = (1, 2)$

• mulțime închisă $\qquad B[x, r_x] \subset D$

$\mathbb{R} \to [0,1]$

$\mathbb{R}^2 \to \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}, y \ge 0\}$

$\to \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-2y=0\}$

P:
1. $\emptyset$ și $\mathbb{R}^n$ sunt mulțimi închise
2. $\{F_j\}_{j\in J}$ închise $\Rightarrow \bigcap_{j\in J} F_j$ mulțime închisă
3. $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ închise $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ este mulțime închisă

3. Topologii [nu intră la examen]

$X \neq \emptyset$

$\mathcal{T}$ = familia tuturor submulțimilor ale lui X care verifică condițiile:

a) $\emptyset, X \subset \mathcal{T}$

b) $D_1, D_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$

c) $\{D_j\}_{j \in J} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} D_j \in \mathcal{T}$

$\mathcal{T}$ s.n. o topologie pe X

$(X, \mathcal{T})$ s.n. spațiu topologic.

TEOREMĂ:

Familia de mulțimi $\mathcal{T} = \boxed{\{D \mid D \subset \mathbb{R} \text{ deschis}\}} \cup$

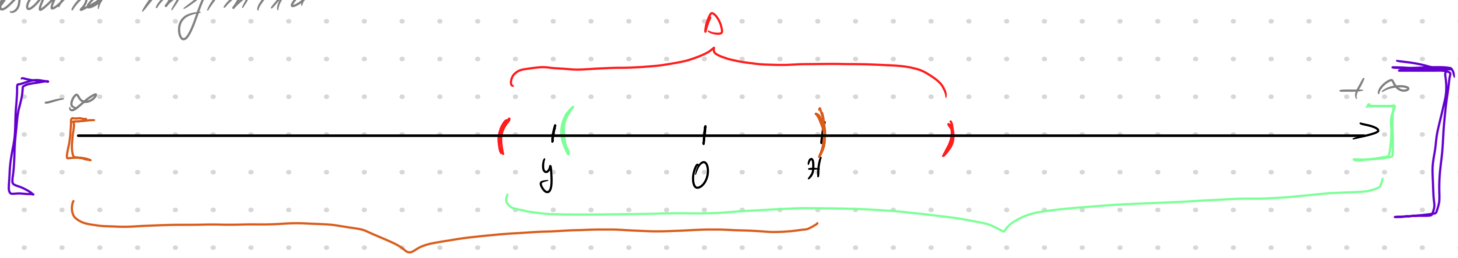
$\cup \{\underline{D \cup [-\infty, x)},\ D \subseteq \mathbb{R}$ mulțime deschisă, $x \in \mathbb{R}\} \cup$

$\cup \{\underline{D \cup (y, +\infty]},\ D \subset \mathbb{R}$ deschisă, $y \in \mathbb{R}\} \cup$

$\cup \{\underline{D \cup [-\infty, x) \cup (y, +\infty]},\ D \subset \mathbb{R}$ deschisă, $x, y \in \mathbb{R}\}$

formează o topologie pe $\overline{\mathbb{R}}$ (topologia uzuală de pe $\overline{\mathbb{R}}$)

Ce vrea să spună autorul? Luăm $\boxed{D}$ deschisă ca atare, o mulțime deschisă infinită



x și y sunt 2 puncte arbitrare pe $\mathbb{R}$; orice combinație posibilă de reuniuni între mulțimea noastră D, punctul y cu cel mai apropiat extrem $\{-\infty\}$ și punctul x cu cel mai apropiat extrem $\{+\infty\}$ va forma $\overline{\mathbb{R}}$.

asta este o topologie $\Rightarrow$