Definiție:

O mulțime $V \neq \emptyset$ se numește spațiu vectorial peste K (sau K-spațiu vectorial V) dacă pe V se poate defini o operație algebrică internă.

$$(x, y) \in V \times V \xrightarrow{+} x + y \in V \text{ (adunarea vectorilor)}$$

împreună cu care V are o structură de grup abelian, adică îndeplinește axiomele:

- $x + y = y + x, \forall x, y \in V$
- $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in V$
- $\exists 0_V \in V$ a.î. $x + 0_V = x$, $\forall x \in 0_V$
- $\forall x \in V, \exists -x \in V$ a.î. $x + (-x) = 0_V$

precum și o operație algebrică externă

$$(\alpha, x) \in K \times V \to \alpha \cdot x \in V \text{ (înmulțire cu scalari) a.î.}$$

să îndeplinească axiomele

- $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V$
- $\alpha(x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V$
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$, $\forall \alpha, \beta \in X, \forall x \in V$
- $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$

Exemple:

- K- corp comutativ, $K^n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, a_i \in K, \forall i = \overline{1,n}$
- vectori în plan
- $K[x]$ polinoame în nedeterminata x cu coeficienți în corpul K

BAZE

Definiție:

Se numește bază a spațiului vectorial V o familie de vectori B care îndeplinește condițiile:

- B este liniar independentă
- B este sistem de generator pentru spațiul V

Dacă $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ este o bază în spațiul vectorial V, atunci orice vector $x \in V$ se scrie în mod unic:

$$x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Dimensiunea lui V este numărul de elemente dintr-o bază a lui V.

Exemple:

- în K^n: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – bază în K^n se numește bază canonică a lui K^n dacă dim $K^n = n$ și orice sistem liniar independent de K^n are mai puține sau același număr de elemente.

SUBSPAȚII VECTORIALE

Definiție:

O submulțime nevidă $U \subset V$ se numește subspațiu vectorial al lui V dacă operațiile algebrice de pe V induc pe U o structură de K-spațiu vectorial.

Teoremă:

Dacă U este o submulțime a K-spațiului vectorial V, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

• U este subspațiu vectorial în V

$$\begin{matrix} \forall x, y \in U \\ \forall \alpha \in K \end{matrix} \quad \text{avem} \begin{cases} \cdot\ x+y \in U & \forall x, y \in U \\ \cdot\ \alpha x \in U & \forall \alpha, \beta \in U \end{cases} \Rightarrow \forall \alpha x + \beta y \in U$$

Exemple:

• Mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali de grad n, $r[X]$ = reprez. subspațiului vectorial al spațiului vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali

• Mulțimea matricelor simetrice de ordin n este un subspațiu al mulțimii matricelor pătratice de ordin n

• Mulțimea V este subspațiu în V, numit subspațiu nul al lui V. Orice subspațiu diferit de spațiul vectorial V și de subspațiul nul s.n. subspațiu propriu.

SPAȚIU AFIN

Definiție:

Fie o mulțime amorfă A, nevidă, cu elemente numite puncte iar V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K. Dacă aplicația $f: A \times A$ are următoarele proprietăți:

- $f(A+B) + f(B,C) = f(A,C)$
- $\exists$ un punct O din A, a.î. f_0 e o bijecție

atunci tripletul (A, V, f) se va numi spațiu afin, iar f se va numi structură afină.

Teoremă:

Fie tripletul (A, V, f). Dacă (A, V, f) este un spațiu afin, atunci oricare ar fi o submulțime din A, aplicația $f_B: A \to V$ e o bijecție.

Exemplu:

Planul și spațiul geometric euclidian sunt spații afine peste spațiile vectoriale ale vectorilor liberi asociați.

SUBSPAȚIU AFIN

Definiție:

Fie $A = (X, \vec{X}, \emptyset)$ un spațiu afin peste K. O submulțime $Y \subset X$ s.n. subspațiu afin al lui X dacă $Y = \emptyset$ sau dacă $Y \neq \emptyset$ și există un subspațiu liniar V al lui $\vec{X}$ a.î. $\emptyset(V \times V) \subset$ $\subset Y^2$ și $Y, V, \emptyset / Y \times Y$ este un spațiu afin.

• ec. vectoriale: $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{r}, \ t \in \mathbb{R}$

• ec. canonice: $\dfrac{x^1-2}{3} = \dfrac{x^2+1}{-7} = \dfrac{x^3+3}{4} = \dfrac{x^4-5}{-2}$

• ec. parametrice: $\begin{cases} x^1 = 2+3t \\ x^2 = -1-7t \\ x^3 = -3+4t \\ x^4 = 5-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

II APLICAȚII LINIARE

Definiție:

$f: V \to W$ se numește aplicație liniară dacă:

1) f este aditivă ($f(\bar{x}+\bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$)

2) f este omogenă ($f(\bar{x}) = \alpha f(\bar{x}), \forall \alpha \in K, \forall \bar{x} \in V$)

unde V și W sunt 2 spații vectoriale peste K

Din 1), 2) $\Rightarrow$ $f(\alpha\bar{x}, \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$

CONDIȚIA DE LINIARITATE

Exemple:

• $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$

$f(x) = (x^1 + x^2, x^3 \ldots x^n) \quad \forall x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$

Aplicația f este o aplicație liniară

• $1_V: V \to V$, $1_V(\bar{x}) = \bar{x}$, $\forall \bar{x} \in V$ este o aplicație liniară numită aplicația identică

• $f: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, definită prin $f(p) = p'$ pentru $\forall p \in \mathbb{R}_3(x)$ este o aplicație liniară. p' – polinomul asociat derivatei func-

-ției asociate polinomului f.

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x_1 + x_3, 3x_2)$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3)$

Ca f să fie aplicație liniară trebuie să se verifice:

$$f(\alpha x + \beta y) = (2(\alpha x_1 + \beta y_1) + \alpha x_3 + \beta y_3, 3(\alpha x_2 + \beta y_2))$$
$$= (\alpha(2x_1 + x_3) + \beta(2y_1 + y_3), 3\alpha x_2 - 3\beta y_2)$$
$$= \alpha(2x_1 + x_3, 3x_2) + \beta(2y_1 - y_3, 3y_2) = \alpha f(x) + $$
$$+ \beta f(y)$$

$$f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Deci matricea aplicației f într-o pereche de baze canonice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ENDOMORFISME

Definiție:

Fie (U, K) și (V, K) spații vectoriale.

Aplicația $f: U \to V$ se numește morfism de spații vectoriale (aplicație liniară) dacă respectă condiția de liniaritate

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ pentru } \forall\, x, y \in U \text{ și } \forall\, \alpha, \beta \in K$$

Notăm prin $L_K(U, V)$ sau prin $Hom_K(U, V)$ mulțimea tuturor morfismelor $f: U \to V$

Dacă $U = V$ atunci f se numește endomorfism al lui V.

Exemple:

Să se determine endomorfismul $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ astfel încât $f(1,1,1) = (0,0,0)$; $f(1,0,0) = (3,1,0)$ și $f(0,0,1) = (1,2,0)$.

Avem $v_1 = (1,1,1)$; $v_2 = (1,0,0)$; $v_3 = (0,0,1)$ respectiv

$w_1 = (1,1,1)$; $w_2 = (3,1,0)$; $w_3 = (1,2,0)$.

Se obține $f(v_B) = y\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + (x-y)\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + (z-y)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x-4y+z\\x-3y+2z\\0\end{pmatrix}$

MATRICEA UNEI APLICAȚII LINIARE. SCHIMBAREA DE BAZĂ.

Fie $f: V \to V'$ o aplicație liniară între 2 spații vectoriale finit generate peste același corp comutativ K.

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ este o bază în V și $x_1', x_2', \dots, x_n'$ o bază în V' și deci se scriu în mod unic ca niște combinații liniare de vector $x_1', x_2', \dots, x_m'$.

$$\begin{cases} f(x_1) = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{21} x_2' + \dots + \alpha_{m1} x_n' \\ f(x_2) = \alpha_{12} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \dots + \alpha_{m2} x_n' \\ \vdots \\ f(x_n) = \alpha_{1n} x_1' + \alpha_{2n} x_2' + \dots + \alpha_{mn} x_n' \end{cases}$$

Se formează matricea:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

= Matricea aplicației liniare f în raport cu bazele $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ din V și $x_1', x_2', x_3' \dots x_n'$ din V'

Matricea A este la rândul ei determinat de cele 2 baze.

Dacă
$$\left.\begin{array}{l} (f(x_1), f(x_2) \dots f(x_n)) = (x_1', x_2', \dots, x_n') A_1 \\ (f(x_1), f(x_2) \dots f(x_n)) = (x_1', x_2', \dots, x_n') A_2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow A_1 = A_2$

III GEOMETRIE EUCLIDIANĂ PLANĂ

Axiome

1) Între două puncte se poate duce o linie dreaptă;

2) ∀ linie dreaptă poate fi prelungită nelimitat;

3) Se poate descrie un cerc de centru dat și de rază dată;

4) Toate unghiurile drepte sunt congruente între ele;

5) Dacă o linie dreaptă, care intersectează alte două linii drepte, formează de o aceeași parte a sa două unghiuri interne având suma mai mică decât două unghiuri drepte, cele două linii menționate se vor intersecta, dacă sunt prelungite, de partea în care suma unghiurilor este mai mică decât două unghiuri drepte.

PROPRIETĂȚI DE INCIDENȚĂ

1) Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

2) ∀ dreaptă conține cel puțin două puncte.

3) În orice plan, ∃ 3 puncte care nu sunt situate pe aceeași dreaptă.

PROPRIETĂȚI DE ORDONARE

1) Dacă punctul B se găsește între A și C, atunci punctele A,B,C sunt coliniare și distincte și B se găsește între C și A.

2) Dacă A, B sunt 2 puncte distincte, atunci ∃ c.p. un punct C astfel ca B să se găsească între A și C.

3) Dacă B se găsește între A și C, atunci A nu se găsește între C și B.

4) AXIOMA LUI PASCH

Dacă A, B, C sunt 3 puncte necoliniare și dacă d este o dreaptă situată în același plan cu aceste pct., a.î. d trece prin niciunul din pct. A, B, C și nu trece prin nici un punct situat între A și C, atunci dr. d trece printr-un punct situat între A și B.

5) Fiind date 3 puncte distincte și coliniare A, B, C a.î. A nu este între B și C, iar C nu este între A și B, cu siguranță pct. B se va găsi între A și C.

6) Dacă A, B, C sunt 3 puncte necoliniare și dacă L, M, N sunt 3 puncte a.î. L este între B și C, M este între C și A și N este între A și B, punctele L, M, N nu pot fi coliniare.

7) Fiind date 2 puncte A, B, ∃ c.p un punct M situat între A și B.

8) Dacă A, B, C, D sunt puncte a.î. B este între A și C și C este între B și D, punctele B, C se vor regăsi între A și D.

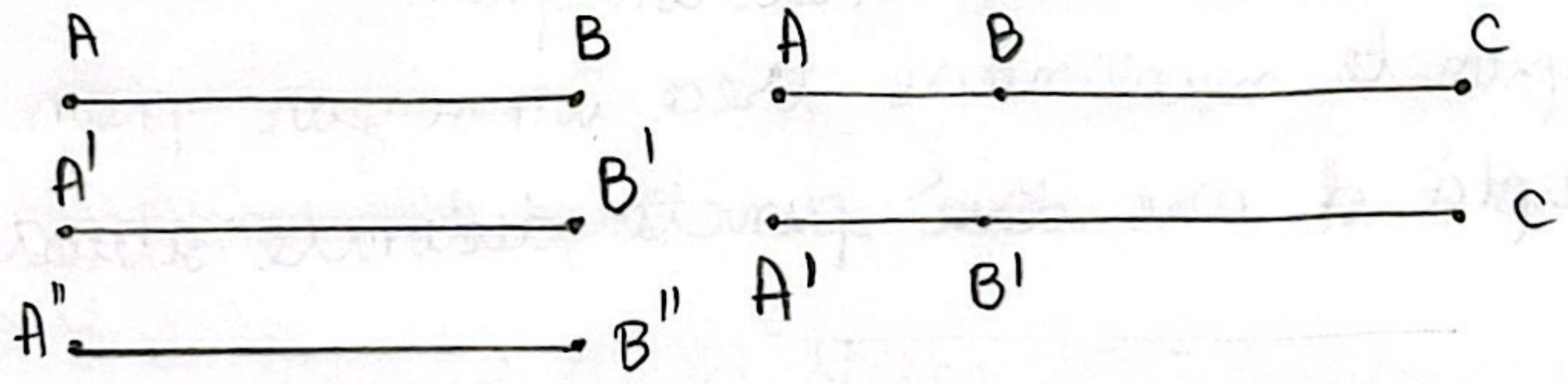
9) Dacă C este între D şi A şi dacă B este între A şi C, atunci B este între A şi D, iar C este între B şi D.

PROPRIETĂŢI DE CONGRUENŢĂ

1) Fie S o semidreaptă cu origine O şi fie |AB| un segmen
Există pe semidreapta S un sg. pct. M, astfel ca segmentul |OM| să fie congruent cu segmentul |AB|.

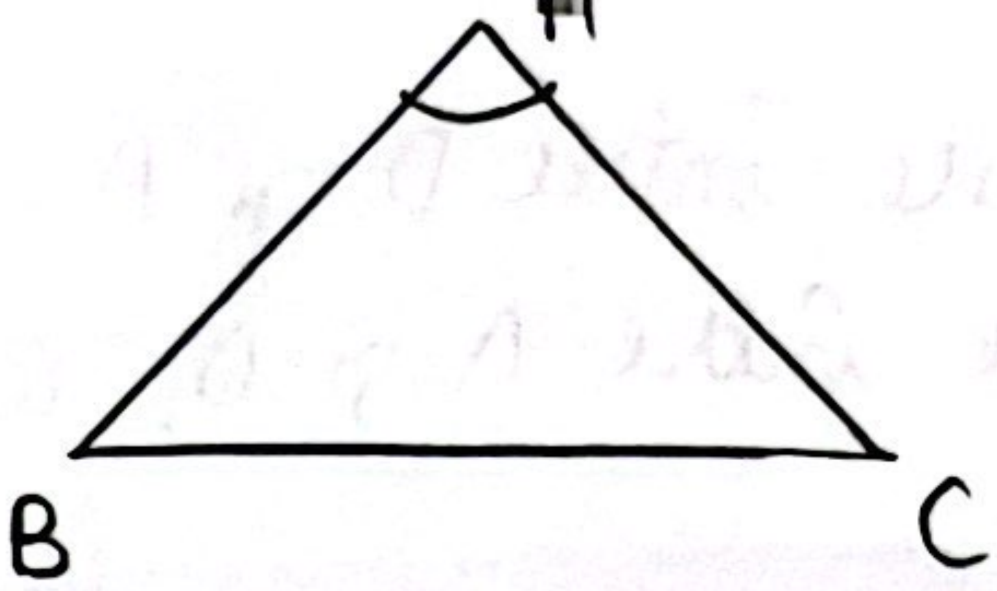
2) Dacă |AB|, |A'B'|, |A''B''| sunt 3 segmente astfel că $|AB| \equiv |A$ şi $|A'B'| \equiv |A''B''|$, atunci avem $|AB| \equiv |AB|$, $|A'B'| \equiv |AB|$ şi $|AB| \equiv |A''B''|$.

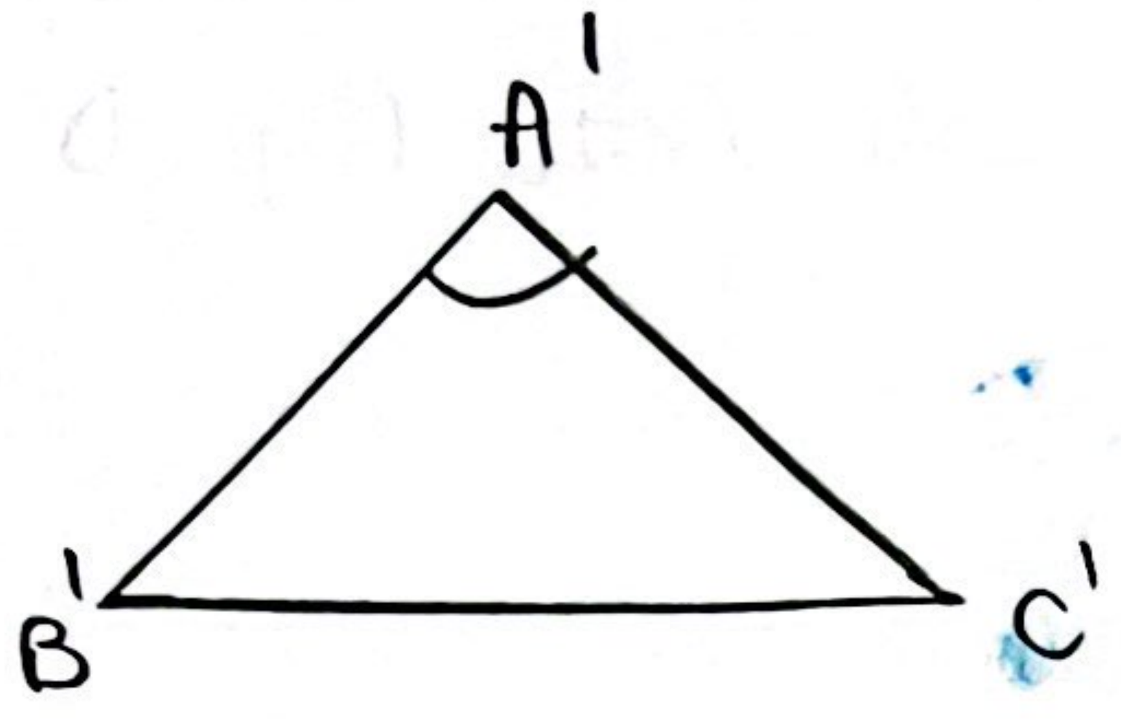
3) Dacă avem 6 puncte A, B, C, A', B', C' astfel încât B' se regăseşte între A' şi C', B se găseşte între A şi C şi $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, atunci $|AC| \equiv |A'C'|$.



4) Fiind date un unghi propriu-zis $\widehat{hk}$ şi o semidreaptă S într-un plan şi notând prin p' unul din semiplanele limitate de suportul lui S în planul p, există o singură semidreaptă t în semiplanul p', astfel ca S şi t să formeze un unghi congruent cu unghiul $\widehat{hk}$. ∀ unghi este congruent cu el însuşi.

5) Fiind date 2 triunghiuri ABC, A'B'C' astfel ca $\hat{A'} \equiv \hat{A}$, $|AB| \equiv |A'B'|$ şi $|AC| \equiv |A'C'|$, avem şi $\hat{B'} \equiv \hat{B}$.





IV GEOMETRIE EUCLIDIANĂ ÎN SPAȚIU.

Axiomele de incidență

1) Prin ∀ două puncte trece o dreaptă;

2) Prin ∀ două puncte distincte trece o singură dreaptă;

3) ∀ dreaptă conține c.p. două puncte. ∀ plan conține cel puțin 3 puncte necoliniare. ∃ c.p. un plan.

4) Prin ∀ 3 puncte necoliniare trece un plan.

5) Prin ∀ 3 puncte necoliniare trece un singur plan.

6) Dacă o dreaptă d are două puncte distincte situate în planul p

7) Dacă două plane au un punct comun, atunci ale două plante mai au c.p. un al doilea punct comun.

8) ∃ 4 puncte nesituate în același plan

AXIOMELE DE ORDONARE

1) Dacă un punct B se găsește între punctele A și C, atunci punctele A, B, C sunt coliniare și distincte și pct. B se găsește între C și A.

2) Fiind date 2 puncte distincte A, B ∃ un punct C a.î. B să se găsească între A și C.

3) Fiind date 3 puncte coliniare și distincte A, B, C a.î. B se află între A și C, A nu se poate afla între B și C, iar C nu se poate afla între A și C.

4) <u>Axioma lui Pasch</u>

Fiind date, într-un același plan, 3 puncte necoliniare A, B, C și o dreaptă d, astfel că el să treacă printr-un punct situat între B și C, dar d să nu treacă prin niciunul din pct.

A, B, C dreapta d. va trece fie printr-un punct situat între A, B sau A, C.

AXIOME DE CONGRUENȚĂ

1) Axioma purtării congruente a segmentelor

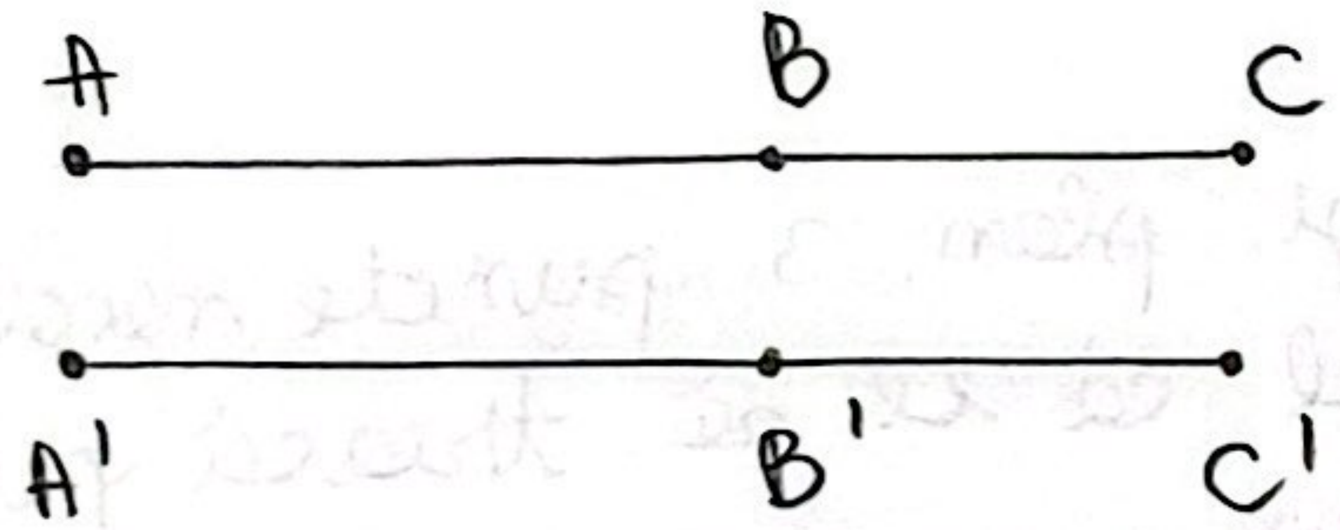
Fiind date un segment $|AB|$ și o semidreaptă S cu originea O, $\exists$ pe S un punct P și numai unul, astfel ca $|AB| \equiv |OP|$.

2) $\forall$ segment este congruent cu el însuși

3) Axioma de adunare a segmentelor

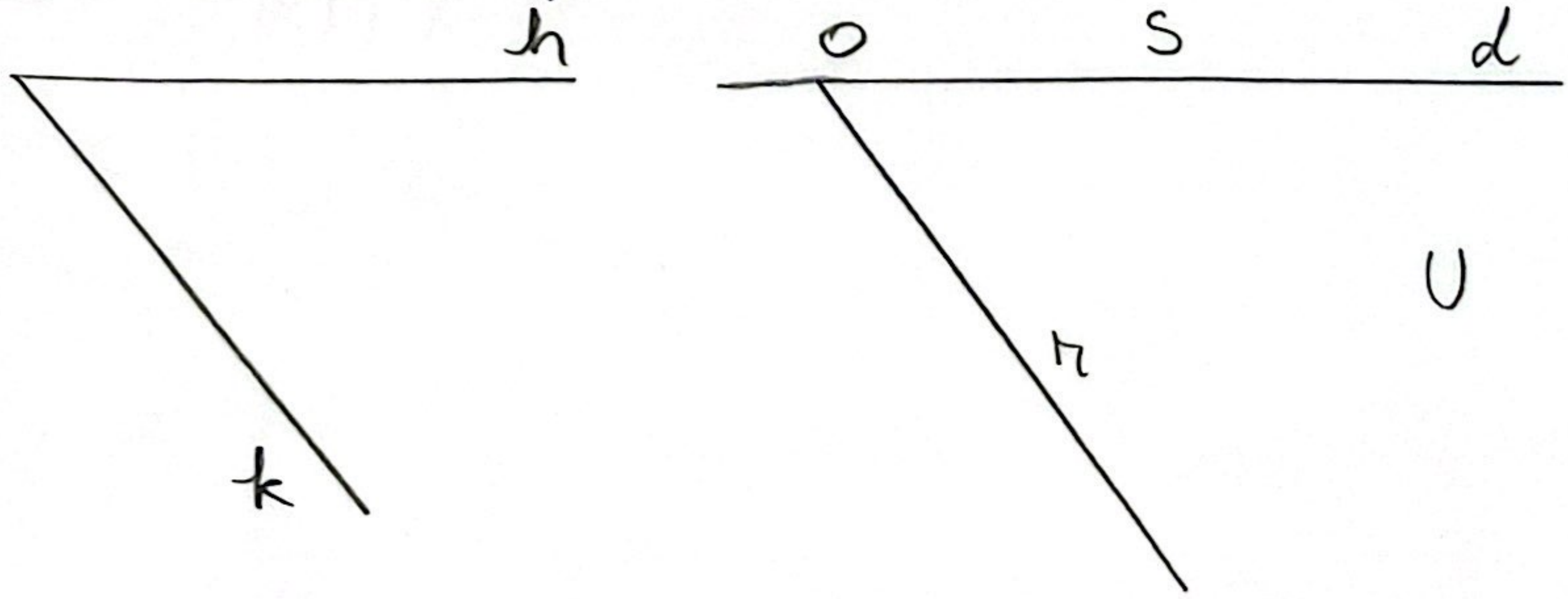
Fiind date segmentele $|AC|$, $|A'C'|$ și punctele $B \in |AC|$, $B' \in |A'C'|$ astfel ca:

$|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, avem $|AC| \equiv |A'C'|$



4) Axioma purtării congruente a unghiurilor

Fiind date un unghi propriu-zis $\widehat{hk}$, un semiplan u limitat de dreapta d și o semidreaptă $s \subset d$, cu originea O, există o semidreaptă r și numai una, astfel ca să avem $r \subset u$, r să aibă originea O și $\widehat{rs} \equiv \widehat{hk}$. $\forall$ unghi este congruent cu el însuși.



V GRUPUL $(O(2), \times)$, $(SO(2), \times)$

Grupul ortogonal se definește astfel:

$$O(n) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid X \cdot X^t = I_n\}$$

Grupul ortogonal formează o structură de grup în $GL(n;\mathbb{R})$. Astfel, dacă $X, Y \in O(n)$ atunci $X \cdot Y \in O(n)$. O consecință a definiției este aceea că determinantul oricărei matrici din $O(n)$ este ± 1. Din acest motiv, grupul ortogonal are două componente conexe și poate fi exprimat prin relația:

$$O(n) = SO(n) \cup O^-(n),$$

unde:

- $SO(n) = \{X \in O(n) \mid \det X = 1\} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid X \cdot X^t = I_n, \det X = 1\}$ se numește grupul rotațiile și este subgrup în $O(n)$.

- $O^-(n) = \{X \in O(n) \mid \det X = -1\}$ este cealaltă componentă conexă a lui $O(n)$ și nu formează grup în $O(n)$.

Grupul ortogonal $O(2)$ se definește astfel:

$$O(2) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X \cdot X^t = I_2\}$$

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Atunci $X \cdot X^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ca+db & c^2+d^2 \end{pmatrix}$

Dar condiția $X \cdot X^t = I_2$ impune satisfacerea următorului sistem de ecuații.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ca + db = 0 \end{cases}$$ de unde rezultă că $\exists \varphi, \theta \in [0, 2\pi)$ a.î.

$a = \sin \varphi$, $b = \cos \varphi$, $c = \sin \theta$, $d = \cos \theta$ verificând relația: $\cos(\varphi - \theta) = 0$. Rezultă că $\varphi - \theta \in \left(\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}\right)$

Astfel avem că:

$$a = \sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \theta$$

$$b = \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \sin \theta$$

Deci $O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi) \right\} \cup$

$\cup \left\{ \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

unde $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi) \right\}$ se numește grupul rotațiilor din plan, iar

$$O^-(2) = \left\{ \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

În ceea ce privește dimensiunile acestor grupuri privite ca varietăți diferențiabile, $\dim O(2) = \dim SO(2) = 1$.

VI CUADRICE

- Cuadricele sunt suprafețe algebrice de gradul al doilea, adică suprafețe ale spațiului afin euclidian tridimensional.
- Prin generalizare, se poate vorbi de suprafețe n-dimensionale în spațiul cu n+1 dimensiuni generate de locul geometric al soluțiilor unui polinom de grad 2. În coord $\{x_1, \dots, x_n\}$ cuadrica generată este definită de o ecuație algebrică de forma:

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n+1} x_i Q_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n+1} P_i x_j + R = 0}$$

care poate fi scrisă compact în notație matriceală:

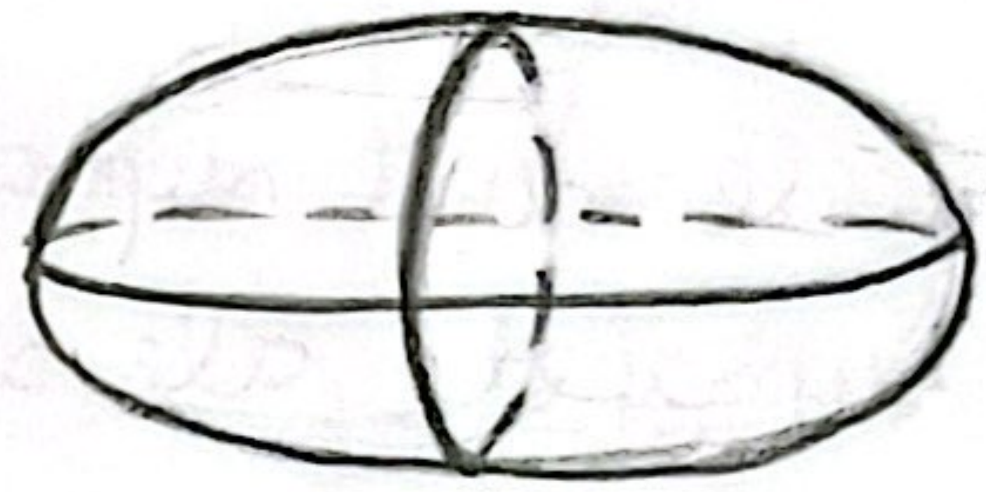
$$\boxed{XQx^T \cdot Px^T + R = 0}$$

unde $X = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ este o matrice vector linie, x^T este transpusa lui X, Q este o matrice $(n+1)\times(n+1)$, P este un vector linie $(n+1)$ - dimensional, iar R este o constantă scalară. Val din Q, P și R sunt de obicei nr. reale sau complexe.

- În planul euclidian cuadricele au o singură dim. $(n=1)$ adică sunt linii curbe. Aceste cuadrice sunt identice cu secțiunile conice și sunt cunoscute sub numele de conice.

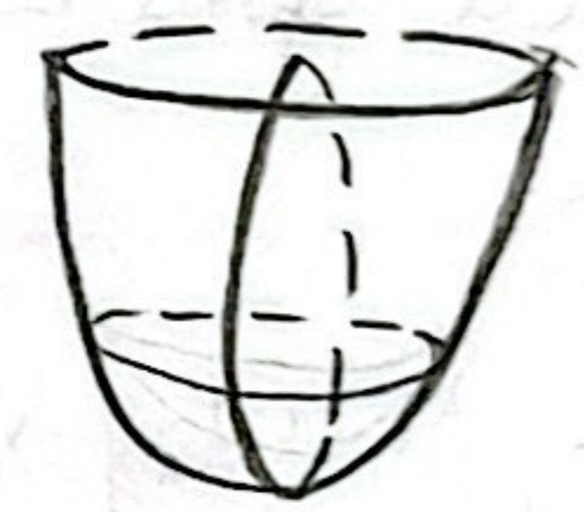
CUADRICE NEDEGENERATE

Elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



Sferoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$

Paraboloid eliptic $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=1$

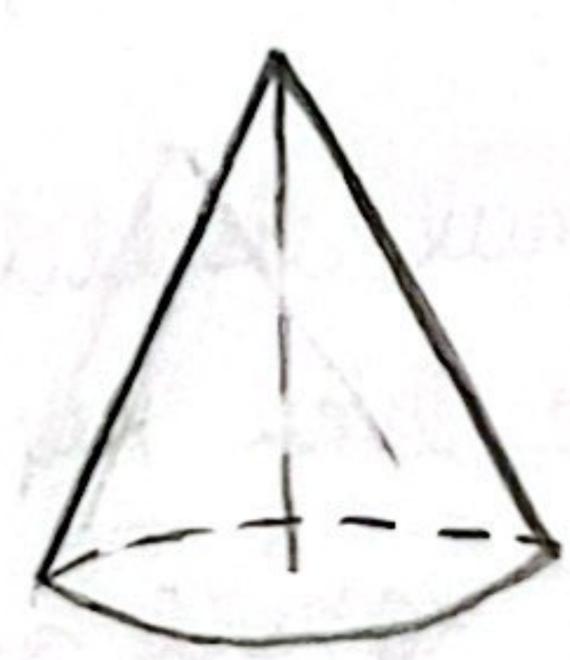


Paraboloid de rotație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-z=1$

Paraboloid hiperbolic $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b}-z=0$

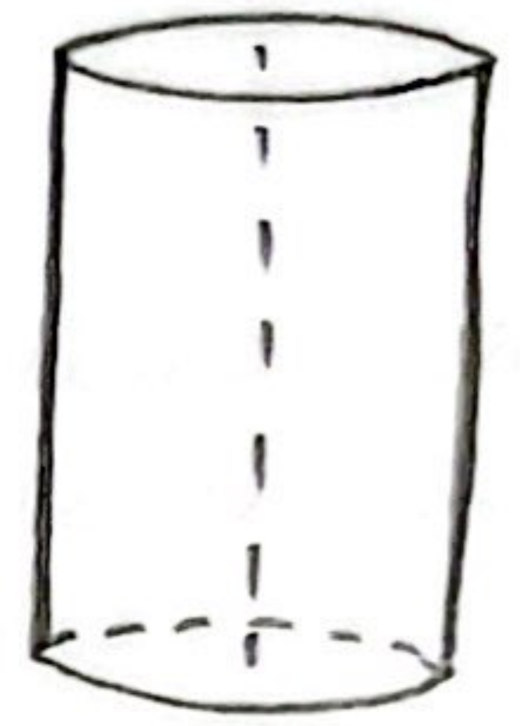
CUADRICE DEGENERATE

Con $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



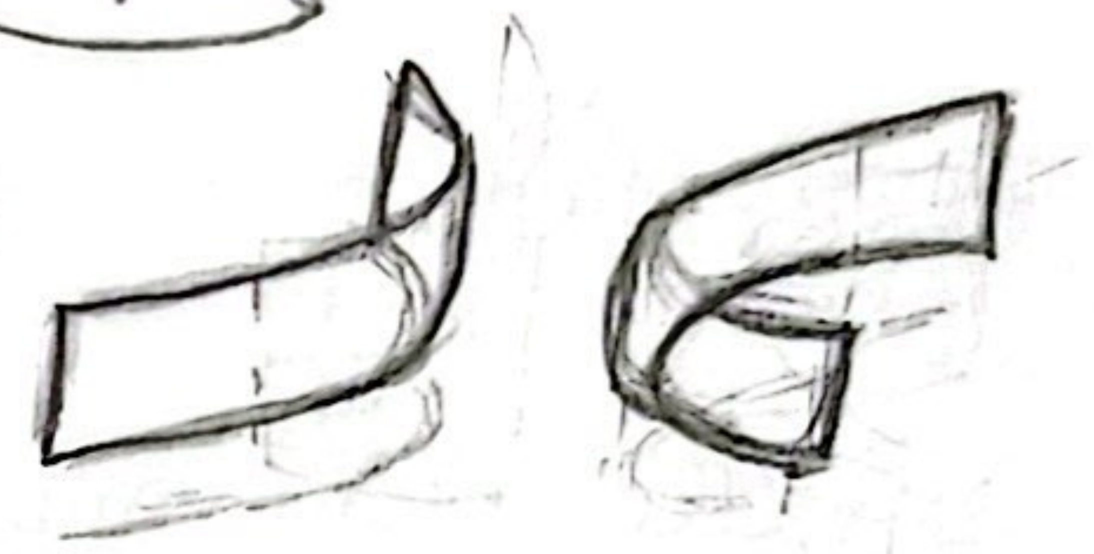
Con de rotație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

Cilindru eliptic $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

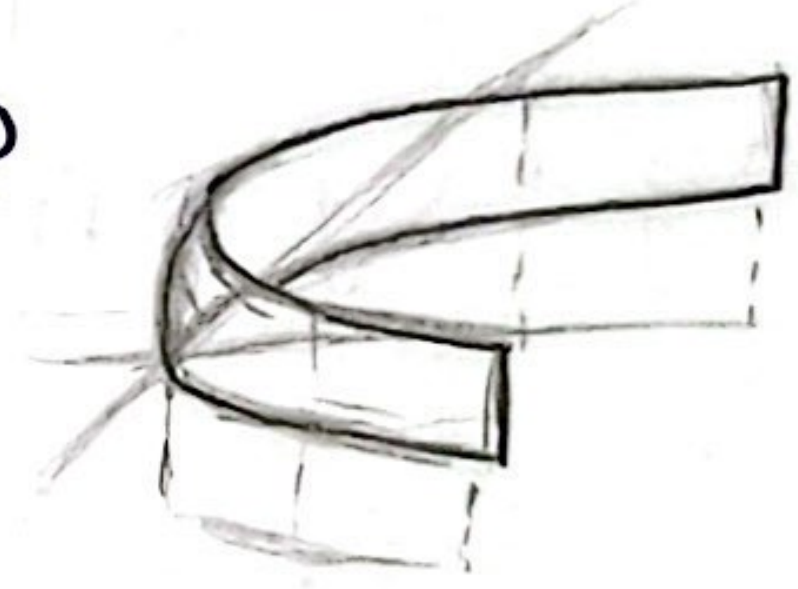


Cilindru de rotație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Cilindru hiperbolic $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



Cilindru parabolic $x^2+2ay=0$



Cuadrice

grupa 133

	δ	Δ	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	$\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}, \frac{\Delta}{\lambda_2\delta}, \frac{\Delta}{\lambda_3\delta}$	K	L	Cuadrice
1)	>0	$\neq 0$		$+ \; + \; +$			elipsoid
2)	<0	$\neq 0$		$+ \; + \; -$			hiperboloid cu o pânză
3)	>0	$\neq 0$		$- \; - \; +$			hiperboloid cu două pânze
4)	<0	$\neq 0$		$- \; - \; -$			cuadrică vidă
5)	$\neq 0$	0	același semn				punct dublu
6)	$\neq 0$	0	$+ \; + \; -$				con pătratic
7)	0	$\neq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$				paraboloid eliptic
8)	0	$\neq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$				paraboloid hiperbolic
9)	0	0	$+ \; + \; 0$		>0		cuadrică vidă
10)	0	0	$\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$		0		dreapta dublă
11)	0	0	$+ \; + \; 0$		<0		cilindru eliptic
12)	0	0	$- \; - \; 0$		>0		cilindru eliptic
13)	0	0	$- \; - \; 0$		<0		cuadrica vidă
14)	0	0	$\lambda_1, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$		$\neq 0$		cilindru hiperbolic
15)	0	0	$\lambda_1, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$		0		plane secante
16)	0	0	$\lambda_1 \neq 0 \; \lambda_2 \lambda_3 = 0$		0	>0	cuadrică vidă
17)	0	0	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$		0	0	plan dublu
18)	0	0	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$		0	<0	plane paralele

Scanned with CamScanner

VII CONICE

O conică este curba care se obține prin intersectarea unui plan și a unui con.

REPREZENTAREA ÎN COORDONATE CARTEZIENE

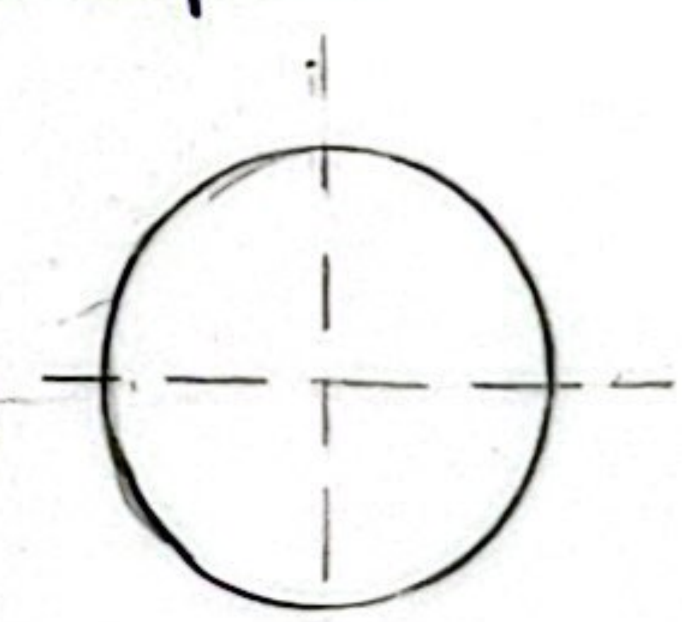
Conicele sunt mulț. pct. care satisfac:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Atunci:

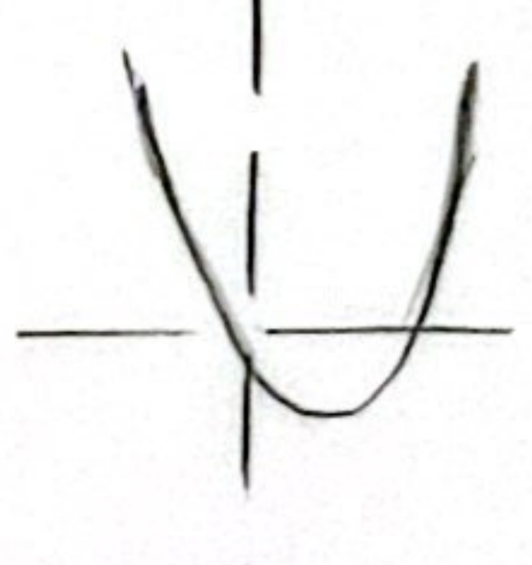
- $B^2 - 4AC < 0$, ec. reprezintă o elipsă
- $A = C$; $B = 0$, ec. reprezintă un cerc
- $B^2 - 4AC = 0$, ec. reprezintă o parabolă
- $B^2 - 4AC > 0$, ec. reprezintă o hiperbolă
- $A + B = 0$, ec. reprezintă o hiperbolă dreaptă

Cerc: $x^2 + y^2 = a^2$ $\qquad a\cos\theta, a\sin\theta$



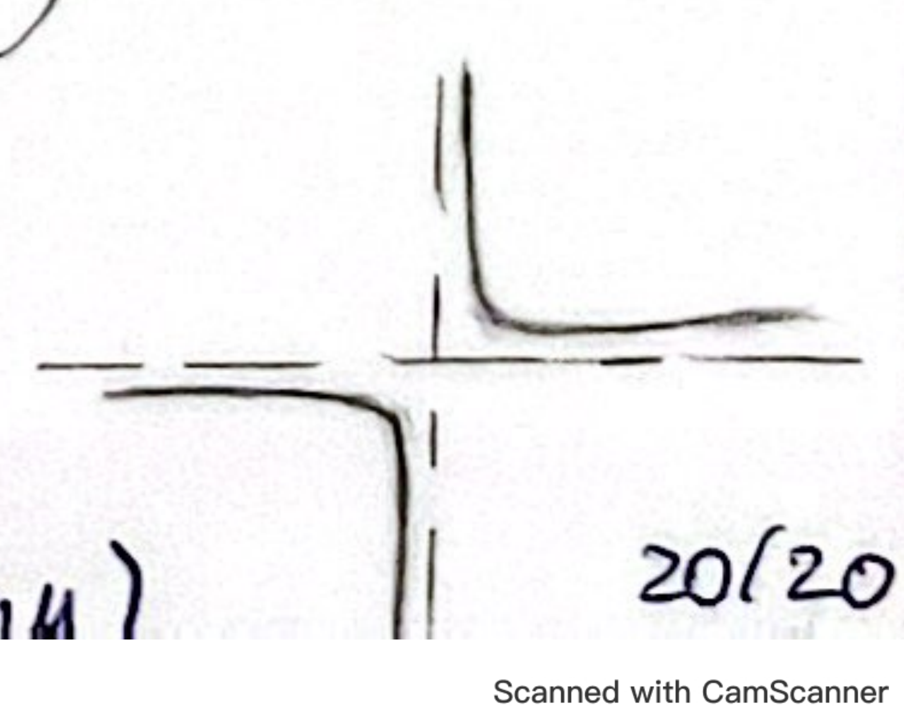
Elipsă: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad \cos\theta, b\sin\theta$

Parabolă: $y^2 = 4ax$ $\qquad at^2, 2at$



Hiperbolă: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad a\sec\theta, b\tg\theta$

$(\pm a\cosh u, b\sinh u)$



10)	0	0	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$	$\neq 0$		cilindru parabolic

Conice

	δ	Δ	$I\Delta$	Δ_1	Semnul conicii	Tipul conicii	Den. con.
1)	>0	$\neq 0$	<0		eliptic	nedegenerat	elipsa
2)	>0	$\neq 0$	>0		eliptic	nedegenerat	elipsă imaginară
3)	>0	0			eliptic	degenerat	punct dublu
4)	<0	$\neq 0$			hiperbolic	nedegenerat	hiperbolă
5)	<0	0			hiperbolic	degenerat	drepte concurente
6)	0	$\neq 0$			parabolic	nedegenerat	parabolă
7)	0	$\neq 0$		<0	parabolic	degenerat	drepte paralele
8)	0	0		0	parabolic	degenerat	dreaptă dublă
9)	0	0		>0	parabolic	degenerat	dr. imag. paralele

BIBLIOGRAFIE

1) Matematică - manual pentru clasa a IX-a
Geometrie și trigonometrie - Kostake Teleman

2) Matematică - manual pentru clasa a X-a
Geometrie și trigonometrie - Kostake Teleman

3) Algebră liniară, Geometrie Analitică - Universitatea Alexandru Ioan Cuza - Oana Constantinescu

4) Algebră liniară și geometrie analitică și diferențială - Codruța Cris

Scanned with CamScanner