27.02.2024

# C1
# ALGEBRĂ LINIARĂ

dumitru.stamate@fmi.unibuc.ro

$$\text{Nota} = \frac{\text{Nota algebră} + \text{Nota geometrie}}{2}$$

$\boxed{\text{minim } 4{,}5}$

$$\text{Notă algebră} = \min\{10, \underbrace{\text{examen}}_{\text{Alg. } \in[1,10]} + \underbrace{\text{seminar}}_{\in[0,1)}\}$$

## CUPRINS

Algebră liniară

- Sisteme liniare. Metoda eliminării
- Spații vectoriale: SLI, SG; aplicații liniare
- Vectori și valori proprii


1. L. Ornea, A. Turtoi: O introducere în geometrie, Ed. Theta, 2000
2. Dercu, Daüș, Vlădoiu: Algebră liniară
3. T. Dumitrescu – Algebră
4. Oliver, Shakiban. Applied Linear Algebra Sprunger, 2018


## Rezolvarea sistemelor liniare cu metoda eliminării Gauss-Jordan

Un sistem liniar de m ecuații liniare cu n necunoscute:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}$ → coeficienții sistemului

$b_1 \dots b_n \in \mathbb{R}$ → termenii liberi ($\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{C}, K$; p prim, corpuri comut.)

$x_1, x_2 \dots x_n$ → necunoscutele sistemului

} presupun cunoscute

Spunem că $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ este soluție pentru sistemul (*) dacă $x_1 \dots x_n$ satisfac toate ecuațiile sistemului simultan.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$ matricea sistemului

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$ coloana termenilor liberi

↳ Forma matriceală a sistemului (*) $\boxed{Ax = b}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ vectorul necunoscutelor

↳ Matricea extinsă a sistemului (*)

$$\bar{A} = (A|b) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$$

Terminologie:

↳ Sistemul se numește incompatibil dacă nu are soluții. ($S = \emptyset$)

↳ — — — // — — — — compatibil dacă are soluții. ($S \neq \emptyset$)

$|S|=1$ ↳ Sistemul se numește compatibil determinat dacă soluția este unică.

$|S|>1$ ↳ — — — // — — — — compatibil nedeterminat dacă soluția nu este unică.

$S$ = mulțimea soluțiilor sistemului ($\mathcal{S}$)

① Rezolvați în $\mathbb{Z}$: $2x+3y=1$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soluție în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Temă: toate soluțiile ($\mathcal{S}$)

② Rezolvați în $\mathbb{Z}$: $2x+4y=1$ nu are soluții în $\mathbb{Z}$, dar are o infinitate de soluții în $\mathbb{Q}$

**Scop**: Rezolvarea cât mai „rapidă" a sistemelor liniare cu coeficienți într-un corp comutativ.

**Exemplu**: Rezolvați în $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ \quad\quad\quad x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases}$$

practic, am scos $x_1, x_3$ și $x_4$ în funcție de $x_2$ și $x_5$, pe care le-am redenumit

Dacă aleg $x_2 = s$, $x_5 = t$, determinăm restul $(x_4, x_3, x_1)$ unic

$x_4 = 2 + 3x_5 = 2 + 3t$

$x_3 = 1 - x_5 + 2x_4 = 1 - t + 2(2+3t) = 1 - t + 4 + 6t = 5 + 5t$

$x_1 = x_5 - x_4 + x_3 - 2x_2 = t - 2 - 3t + 5 + 5t - 2s = 3t + 3 - 2s$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - 2s + 3t \\ s \\ 5 + 5t \\ 2 + 3t \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

este o soluție particulară a sistemului

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \text{PIVOȚI}$$

$\downarrow$

Rezolvarea este rapidă deoarece matricea extinsă este „în scară", în formă eșalon.

**Ideea de bază**: Dat un sistem liniar $\boxed{Ax = b}$, aducem matricea extinsă a sistemului $\bar{A}$ la o formă eșalon (în scară) a.î. noul sistem are exact aceleași soluții cu primul.

**DEFINIȚIE**: O matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este în formă eșalon dacă

- Liniile nule se află în partea de jos, sub liniile nenule
- Numim pivot cea mai din stânga intrare nenulă (pe o linie nenulă). Pivotul de pe linia (nenulă) $i$ se află la dreapta pivotului de pe linia $i-1$.

Dacă, în plus, avem și că
- toți pivoții sunt egali cu 1
- pe orice (coloană) cu pivot, acesta este singurul element nenul

Atunci spunem că matricea este în formă eșalon redusă.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nu e în formă eșalon

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e în formă eșalon, nu e în formă eșalon redusă

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e în formă eșalon redusă

## Transformări elementare pe linii (într-o matrice / pe ecuațiile unui sistem liniar)

① $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$ schimbăm între ele linia i cu linia j (respectiv ecuația i cu ecuația j din sistem)

② $\boxed{L_i \leftarrow aL_i}$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ înmulțesc linia i cu $a \in \mathbb{R}$

③ $\boxed{L_i \leftarrow L_i + aL_j}$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ înmulțesc linia j cu a și adun rezultatul la linia i $(i \neq j)$

<u>Obs</u>: Aceste transformări efectuate asupra liniilor matricei extinse a unui sistem liniar conduc la un sistem echivalent (adică cu aceleași soluții)

<u>Teoremă</u>: Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ poate fi adusă prin transformări elementare pe linii la forma eșalon redusă.

<u>Exemplu</u>: Aducem la F.E. matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$

$$\xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{formă eșalon}}$$

Pentru F.E. redusă

$$A \xrightarrow[L_2 = L_2 \cdot (-1)]{L_3 = L_3 \cdot -\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \text{forma eșalon redusă pentru } A$$

## Demonstrație (Algoritm)

- Dacă $A = O_{m,n} \rightarrow$ e deja FE
- Altfel:
  - ↳ pornim cu coloana $i=1$ și iterăm
    - căutăm o intrare nenulă pe coloana $i$ sub linia pivotului anterior
    - aducem sub linia cu pivotul anterior noua linie. Acest element nenul devine noul pivot
    - facem zerouri pe coloana $i$ folosind linia cu noul pivot
  - ↳ până când am ajuns la ultima coloană sau la ultima linie nenulă din matrice
- Pentru F.E.R:
  - ↳ prin transformări de tipul (2) facem pivoții să devină 1
  - ↳ — — — // — — — — — (3) facem zerouri și deasupra pivoților

## Rezolvarea sistemelor liniare prin metoda eliminării

Dat sistemul $\boxed{Ax=b}$ construim matricea extinsă $\bar{A} = (A|b)$, pe care o aducem prin transformări elementare pe linii la o formă eșalon $\bar{E}$.

Rezolvăm sistemul cu matricea extinsă $\bar{E}$, care are aceleași soluții cu sistemul inițial.

Exemplu: Rezolvați în $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\underbrace{\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{forma eșalon}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) = \bar{E}}_{\text{sisteme cu aceeași soluție}}$$

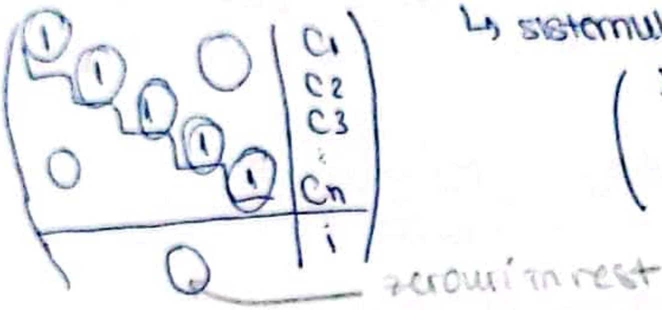
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{sistemul nu are soluție}$$

$\Leftrightarrow \boxed{0=-3}$ $\Rightarrow$ sistem incompatibil, $S = \emptyset$

**Obs:** Sistemul $Ax=b$ este incompatibil dacă în forma eșalonată pentru matricea extinsă $\exists$ găsim pivot pe ultima coloană.
Dacă $\nexists$ pivot pe ultima coloană din $\bar{E}$ ↳ adică coloana termenilor liberi
↳ necunoscutele de pe coloanele fără pivot sunt necunoscutele secundare, care pot fi alese ca parametri, în funcție de acești parametri determinăm unic restul, adică necunoscutele principale

(exemplul de la începutul cursului, cu $x_1, x_2, x_3$)

Caz particular de sistem



adică avem n pivoți = n necunoscute
↳ sistemul are soluție unică

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

**Aplicație:** Calculul inversei unei matrici pătratice

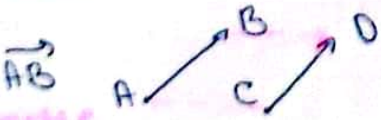
Input: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Construim matricea "dublă" $(A|I) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$, pentru care construim forma eșalonată redusă $(B|C) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$.
Atunci, matricea $A$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ $B = I_n$
În acest caz, $C = A^{-1}$ $\quad (A|I) \to (I_n | A^{-1})$

C2 — 5.03.2024

ALGEBRĂ LINIARĂ

# Spații vectoriale

Vectori din plan: segmente orientate

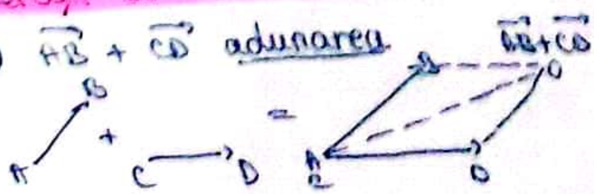


$\vec{AB}$ direcție, lungime, sens

dacă: $AB \parallel CD$ (au aceeași direcție)
$AB = CD$ (au aceeași lungime)
[ ABDC în această ordine sunt vârfurile unui paralelogram (au același sens)
sau
[ AD și BC au același mijloc (au același sens)

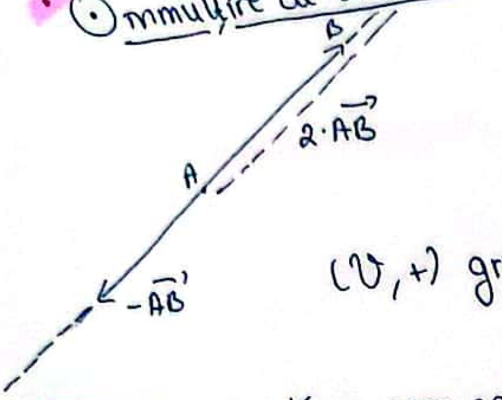
Operații cu vectori din plan:

• ⊕ $\vec{AB} + \vec{CD}$ adunarea



Suma celor 2 vectori se află cu regula paralelogramului după ce aplic cei 2 vectori într-un același punct.

• ⊙ Înmulțire cu un scalar




$(\mathcal{V},+)$ grup abelian

**Definiție:** Fie $K$ un corp comutativ $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \ldots)$.
p-prim

Un $\boxed{K\text{-spațiu vectorial}}$ este o mulțime nevidă $\emptyset \neq V$ împreună cu 2 operații:

$$\begin{cases} + : V \times V \to V \text{ adunare, a.î. } (V,+) \text{ grup abelian} \\ \cdot : K \times V \to V \text{ înmulțire cu scalari} \end{cases}$$

a.î.
1. $a(x+y) = ax + ay, \ \forall a \in K, \forall x, y \in V$
2. $(a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x, \ \forall a,b \in K, \forall x \in V$
3. $(ab)\cdot x = a(b\cdot x), \ \forall a,b \in K, \forall x \in V$
4. $1\cdot x = x$

Elementele din $V$ s.n. vectori, iar elementele din $K$ s.n. scalari.

**Obs:** Dacă mulțimea de scalari $K$ este subînțeleasă din context, atunci spunem "$V$ este spațiu vectorial".

**Exemple**

1. $(\mathcal{V},+,\cdot)$ vectori din plan au o structură de $\mathbb{R}$-spațiu vectorial
2. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ este un $\mathbb{R}$-sp. vectorial cu operațiile pe componente !!!

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$

$a \in \mathbb{R}, \ a\cdot(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$

3. $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ $\quad A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{ij}$
$\quad a\cdot A = a(a_{ij})_{ij}$
→ este un $K$-sp. vectorial

4. $K[X]$ → un $K$-sp. vectorial

$K$-spații
→ grupurile $(\mathcal{V},+,\cdot)$
→ matricile
→ polinoamele
→ mulțimea funcțiilor continue

⑤ $\mathcal{C}([a,b]) = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă} \}$ este un $\mathbb{R}$-sp. vectorial
$a<b$

Reguli de calcul într-un spațiu vectorial:

Fie $V$ un $K$-sp. vectorial. Atunci

1) $a(x-y) = ax - ay, \forall a \in K, \forall x,y \in V$
2) $(a-b)x = ax - bx, \forall a,b \in K, \forall x \in V$
3) $0_K \cdot x = 0_V, \forall x \in V$ scalar vector
4) $0_V \cdot a = 0_V, \forall a \in K$ vector vector
5) Regula semnelor:
$a\cdot(-v) = (-a)\cdot v = -av, \forall a \in K$
$\forall v \in V$
6) Fie $a \in K$ și $x \in V$. a.î. $a \cdot x = 0_V \Rightarrow a = 0_K$ sau $x = 0_V$

Demonstrație 3)
Fie $x \in V$. $0_K = 0_K + 0_K \Rightarrow 0_K \cdot x = (0_K + 0_K)x = \underbrace{0_K \cdot x} + \underbrace{0_K \cdot x} \Rightarrow 0_V = 0_K \cdot x$

——//—— 4)
Fie $a \in K$. $0_V = 0_V + 0_V \Rightarrow a \cdot 0_V = a(0_V + 0_V) = a0_V + a0_V \Rightarrow 0_V = a0_V$

——//—— 5)
$a|v + (-v) = 0_V \Rightarrow a(v + (-v)) = \underbrace{a \cdot 0_V = 0_V}_{4} \Rightarrow a \cdot v + a(-v) = 0_V \Rightarrow$
$\Rightarrow a \cdot (-v) = -a \cdot v$

——//—— 6)
Fie $a \in K$ și $x \in V$ cu $a \cdot x = 0$.
Dacă $a = 0_K \Rightarrow$ ✓
Altfel, să pp. că $a \neq 0_K \Rightarrow \exists \frac{1}{a} \in K$.
$\frac{1}{a} \cdot a \cdot x = \frac{1}{a} \cdot 0_V = 0_V \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)x = 1 \cdot x = x = 0_V \Rightarrow x = 0_V$

$\boxed{\text{Definiție}}$: Fie $V$ un $K$-spațiu vectorial. O submulțime nevidă $W \subseteq V$ se numește **subspațiu vectorial** în $V$ dacă **restricțiile la $W$** ale **operațiilor de pe $V$** dau o structură de **$K$-sp. vectorial**.

Prop: $\emptyset \neq W \subseteq V$. AUASE:
- $W$ este $K$- subspațiu vectorial în $V$
- $\left( \begin{array}{l} \forall x,y \in W,\ \underline{x+y} \in W \text{ vectori} \\ \forall a \in K, \forall x \in W,\ \underline{a \cdot x} \in W \text{ const}\cdot\text{vector} \end{array} \right.$ (W este închis la combinații (K)-liniare.)
- $\forall x,y \in W, \forall a,b \in K,\ \underline{ax+by} \in W$ const · vectori

Exemple ① $\{0\} \leq V$ subspațiu vectorial

$V \leq V$

② $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\right\} \leq$ subspațiu vectorial în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Matr. superior triunghiulare formează întotdeauna un sp. vect.

③ Fie $n \in \mathbb{N}^*$

$\mathbb{R}[x]_{\leq n} = \{ P(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grad } P \leq n \} \cup \{0\}$ este un subspațiu vectorial în $\mathbb{R}[x]$.

④ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 5x - 3y = 0 \right\}$ este un subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^2$

Soluțiile unor ecuații liniare

⑤ Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Notăm $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n : A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\ker A$ ↓ nucleul lui A

Atunci $\ker A$ este un subspațiu vectorial în $K^n$.

soluțiile unui sistem linear omogen a cărui matrice este A.

Dem: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A \Rightarrow \ker A \neq \emptyset$

Fie $a, b \in K$, $x, y \in \ker A$ (deci $Ax = 0$ și $Ay = 0$)

$A(ax + by) = A \cdot a \cdot x + A \cdot b \cdot y = a(Ax) + b(Ay) = 0$

$\Rightarrow ax + by \in \ker A \Rightarrow \ker A$ e subsp. vectorial în $K^n$

Definiție: Fie V un K-sp. vectorial, iar $V_1$ și $V_2$ subspații vectoriale în V. Notăm $V_1 + V_2 = \{ x + y : x \in V_1, y \in V_2 \}$

Prop: $V_1 + V_2$ este un subspațiu vectorial în V, numit suma subspațiilor $V_1$ și $V_2$.

Demonstrație:

Fie $a, b \in K$.

Fie $v, w \in V_1 + V_2 \Rightarrow \begin{matrix} v = x_1 + y_1 \\ w = x_2 + y_2 \end{matrix}$ cu $\begin{matrix} x_1, x_2 \in V_1 \\ y_1, y_2 \in V_2 \end{matrix}$

$av + bw = a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2)$

$\cancel{= (ax_1 + ay_1)}$

$= \underbrace{(ax_1 + bx_2)}_{\in V_1} + \underbrace{(ay_1 + by_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$

Deci, $V_1 + V_2$ este subsp. vectorial în V

Prop: $V_1 \cap V_2$ este subsp. vectorial în V

Dem: exercițiu

**Obs:** $V_1 \cup V_2$ este subsp. în $V \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$

**Obs:** Dacă $V_1 + V_2 = V \Rightarrow \forall v \in V, \exists x \in V_1$ și $y \in V_2$ cu $v = x + y$
(acești $x, y$ nu sunt neapărat unici)

**Obs:** Dacă $V_1, \dots, V_n \leq V$, suma lor este $V_1 + V_2 + \dots + V_n = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n : x_i \in V_i, \forall i \in \overline{1,n}\} \leq V$

**Propoziție:** Fie $V_1, V_2, \dots, V_n$ subspații vectoriale în ${}_K V$ a.î. $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$
Atunci, $\forall x \in V, \exists! \, x_1 \in V_1, \dots, x_n \in V_n$ cu $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$\Longleftrightarrow$

∩ oricăror 2 mulțimi $V = \{0\}$

$$\boxed{V_i \cap \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} V_j\Big) = 0 \quad \forall i \in \overline{1,n}}$$

**Demonstrație:**

„$\Rightarrow$" Fie $i \in \overline{1,n}$ și $x \in V_i \cap \Big(\sum_{j \neq i} V_j\Big)$

$x \in V_i$ și $x = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j$, unde $x_j \in V_j, \forall j$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = x - x = \Big(\sum_{j=1} x_j\Big) - x \\ \text{Dar } = \underset{V_1}{0} + \underset{V_2}{0} + \dots + \underset{V_n}{0} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{descompunerii}]{\text{unicitatea}} x = 0 \Rightarrow V_i \cap \Big(\sum_{j \neq i} V_j\Big) = \{0\}$$

c.c.t.d.

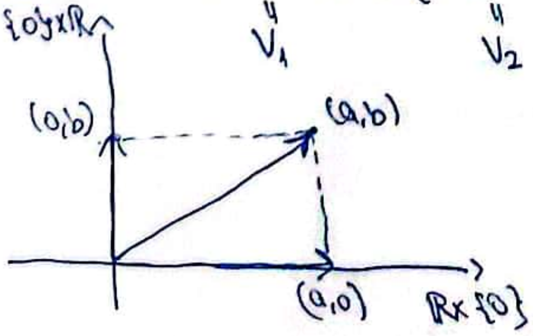
„$\Leftarrow$" Exercițiu

**Definiție:** În situația din prop. anterioară, spunem că „$V$ este **suma directă** a subspațiilor $V_1, \dots, V_n$. Scriem $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$

Caz $n = 2$: $V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \forall x \in V, \exists x_1 \in V_1$ și $x_2 \in V_2$ cu $x = x_1 + x_2$
$\Leftrightarrow V = V_1 + V_2$ și $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

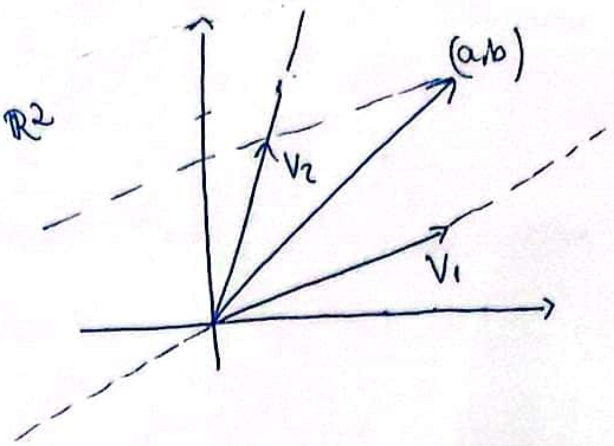
Spunem, atunci, că $V_1$ și $V_2$ sunt **subspații complementare**.

Exemplu: $\mathbb{R}^2 = \underset{V_1}{(\mathbb{R} \times \{0\})} \oplus \underset{V_2}{(\{0\} \times \mathbb{R})}$ → punctele din plan




pentru $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
$= (a,0) + (0,b)$

Daţi $v_1, v_2$ vectori necoliniari din $\mathbb{R}^2$
→ aceştia induc o descompunere a lui $\mathbb{R}^2$




# Combinaţii liniare. Sisteme de generatori

Fie $V$ un $K$-spaţiu vectorial.

**Def:** Pentru $x_1, x_2, \dots, x_n$, o combinaţie liniară a lor este un vector de forma $\boxed{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n}$, unde $a_1, \dots, a_n \in K$.

Notăm $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n : a_i \in K, \forall i = \overline{1,n}\}$

Pentru $\emptyset \neq S \subseteq V$, notăm $\langle S \rangle = \mathrm{span}_K(S)$ = mulţimea combinaţiilor liniare de elemente din $S$

$S = \emptyset$, notăm $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

**Prop:** $\forall S \subseteq V$, avem $\langle S \rangle$ este un subspaţiu vectorial în $V$. Mai mult, $\forall W \subseteq V$, subspaţiu vectorial cu $S \subseteq W$, are loc $\langle S \rangle \subseteq W$.

**Dem** x x x

$$\boxed{\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{W \text{ subspaţiu vectorial în } V \\ S \subseteq W}} W}$$

**Def:** Numim $\langle S \rangle$ subspaţiul vectorial generat de mulţimea $S$.

**Def:** O submulţime $S$ a lui $V$ s.n. sistem de generatori pentru $V$ dacă $\langle S \rangle = V$, adică $\forall x \in V$, $\exists n \in \mathbb{N}$ şi $\exists x_1, x_2, \dots x_n \in S$ a.î. $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, $a_i \in K$, $\forall i \in \overline{1,n}$

Dacă $V$ are un sistem de generatori finit, spunem că $V$ este finit generat.

Exemple: $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} a_2 + \dots + a_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n}$$

Deci, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^n$.

② $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{11}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{12}} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{21}} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_{22}}$$

Deci, $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ este S.G. pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

**Obs:** $V_1, V_2 \leq V_n \to \langle V_1 \cup V_2 \rangle = V_1 + V_2$

12.03.2024

## C3

## ALGEBRĂ LINIARĂ

## Sisteme liniar independente. Bază. Dimensiune.

Fie ${}_K V$ : V este un K-spațiu vectorial (K corp comutativ: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$...)

**Def:** Spunem că vectorii $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ formează un sistem liniar independent dacă $\forall a_1, a_2, \dots a_n \in K$ cu $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ $\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$.

În general, o submulțime $S \subset V$ s.n. SLI dacă $\forall S_1 \subset S$, $S_1$ finită este SLI. Dacă S nu este SLI, spunem că este un sistem liniar dependent.

Ex: $v_1, \dots v_n$ sunt liniar dependenți dacă $\exists a_1, a_2, \dots a_n \in K$, nu toți zero a.î. $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$.

Să pp. că $a_3 \neq 0 \Rightarrow a_1 v_1 = -a_2 v_2 - a_3 v_3 - \dots - a_n v_n$

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} v_n$$

$$v_1 \in \langle v_2, v_3, \dots v_n \rangle$$

$\Rightarrow$ unul din ei este combinație liniară a celorlalți

$\exists i$, $v_i \in \langle v_1, \dots \hat{v_i}, \dots v_n \rangle$



CamScanner

!! **Obs:** Fie $S$ un SLI în $V$ și $x \in V$. Atunci, $S \cup \{x\}$ este SLI $\Leftrightarrow x \notin \langle S \rangle$

**Exemple:** 1) $\{0_V\}$ este S.L.dependent . $1 \cdot 0_V = 0_V$ cu $1_K \neq 0_K$

2) $S = \{v\}$ este SLI $\Leftrightarrow v \neq 0$

3) Fie $v_1 \neq v_2 \in V$ nenuli:

$S = \{v_1, v_2\}$ este SLI $\Leftrightarrow v_1$ și $v_2$ nu sunt proporționali

4) $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \mid i \in \overline{1,n} \right\}$. Notăm $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ - linia lui $i$, $\forall i \in \overline{1,n}$

$\{e_1, \dots e_n\}$ este SLI. Fie $a_1, \dots a_n \in K$ cu

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_i = 0, \forall i \in \overline{1,n}$

5) $\mathbb{R}[X]$.

$\{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ este SLI

Fie $a_1 X^{i_1} + a_2 X^{i_2} + \dots + a_n X^{i_n} = 0$ cu $i_1, i_2, \dots i_n \in \mathbb{N}$ distincte

și $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$

6) $M_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \{e_{11}, e_{22}, e_{12}, e_{21}\}$ sunt SLI $\to$ de demonstrat

$e_{ij} \rightsquigarrow$ cu 1 pe poziția $ij$ și 0 în rest

**Prop.** Fie $v_1, v_2, \dots v_m$ vectori $\in \mathbb{R}^n$. Atunci $\{v_1, \dots v_m\}$ este un SLI $\Leftrightarrow$ matricea $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{n \times m}$ în forma eșalon are pivot pe fiecare coloană.

**Dem:** $\{v_1, \dots v_m\}$ este SLI $\Leftrightarrow$ sistemul $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$ are doar soluția nulă.

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & 0 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & 0 \\ | & | & & | & 0 \end{array}\right)$ în forma eșalon pt. avem pivot pe fiecare din ~~punctele~~ primele $m$ coloane.

$\Leftrightarrow$ în forma eșalon (a matricei $A$), avem pivot pe fiecare coloană. $\boxtimes$

**Prop:** 1) Dacă $0 \in S \Rightarrow S$ nu este SLI

2) Dacă $S \leq_K V$ este SLI și $S_1 \subseteq S \Rightarrow S_1$ este SLI

3) Dacă $S \subseteq V$ este S.G. pentru $V$ și $S_2 \supseteq S \Rightarrow S_2$ este S.G. pentru $V$.

**Def:** O submulțime a lui $V$ care este SLI + SG pentru $V$ s.n. **bază pentru $V$**. Numărul de elemente dintr-o bază oarecare a lui $V$ s.n. **dimensiunea lui $V$**: $\underbrace{\dim_K V,\ \dim V}_{\text{notații}}$.

!!! Orice spațiu vectorial admite măcar o bază și orice două baze au același număr de elemente.

**Teoremă:** Fie $V$ un $K$-sp. vectorial și $S$ o submulțime a sa. AUASE:
1) $S$ este bază în $V$
2) $S$ este un SLI maximal în $V$ ($\Leftrightarrow \forall x \in V \setminus S$, $S \cup \{x\}$ nu e SLI; $\forall x \in V \setminus S$, $x \in \langle S \rangle$)
3) $S$ este un SG minimal pentru $V$ ($\Leftrightarrow \forall x \in S$, $\langle S \setminus \{x\} \rangle \subsetneq V$)

**Demonstrație** $(1) \Rightarrow (2)$

$S$ este SLI + SG pt. $V$
Fie $x \in V \setminus S$. Știm $\langle S \rangle = V$. Atunci $x \in \langle S \rangle \Rightarrow S$ este SLI maximal în $V$.

— // — $(2) \Rightarrow (1)$

Știm că $S$ este SLI. Vrem $S$ este S.G. pentru $V \Leftrightarrow \langle S \rangle = V$. Dacă
R.A. $\exists x \in V \setminus \langle S \rangle \Rightarrow S \cup \{x\}$ este SLI $\xrightarrow[\text{maximal}]{\text{S SLI}}$ $\langle S \rangle = V$

**Teorema schimbului (Steinitz)**

Fie $V$ un $K$-spațiu vectorial, $S = \{u_1, \dots u_s\}$ un SLI în $V$ și $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ un sistem de generatori pentru $V$. Atunci:

1) $s \leq m$
2) După o eventuală renumerotare a vectorilor din $S'$, $\{u_1, u_2, \dots u_s, v_{s+1}, v_{s+2}, \dots v_m\}$ este tot un SG pentru $V$.

Demonstrația se face prin inducție.

**Corolar:** Orice două baze dintr-un spațiu vectorial au același număr de elemente. În particular, $\dim V$ este corect definită.

**Dem (schiță):** Fie $B_1, B_2$ baze în $V$. Dacă $|B_1| = |B_2| = \infty$
Dacă $|B_1| < \infty$, deoarece $B_1$ este S.G. $\Rightarrow \forall$ SLI din $V$ este finit $\Rightarrow$ $\underbrace{|B_2|}_{\leq |B_1|} \leq |B_1| < \infty$ (Th. schimbului)

Aplicăm Th. pentru $B_2$ drept SG pentru V și $B_1$ drept SLI $\Rightarrow |B_1| \leq |B_2|$

$\Rightarrow |B_1| = |B_2|$ $\boxtimes$

Teoremă: Orice spațiu vectorial admite măcar o bază.

Demonstrație: Să pp. că V are un SG finit. $\langle u_1, u_2, \ldots u_t \rangle = V$

Caut un SLI maximal în V.

- $\emptyset$ este SLI în V
- Dacă $\exists v_1 \in V, v_1 \neq 0 \rightarrow \{v_1\}$ s. liniar independent. Dacă cu $\langle v_1 \rangle = V \Rightarrow$ $\Rightarrow \{v_1\}$ este bază, STOP. Altfel, dacă $\exists v_2 \in V \setminus \langle v_1 \rangle \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ SLI

Dacă $\langle v_1, v_2 \rangle = V \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ bază în V, STOP. Altfel, dacă $\exists v_3 \in V \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ SLI ....

După cel mult t pași, am găsit o bază în V.

Sau: Pornim cu S.G. $\{u_1, u_2, \ldots u_t\}$, renunțăm la vectorii care sunt combinații liniare de ceilalți vectori și, la final rămânem cu un degenerator minimal pt V, deci cu o bază pentru V.

Exemple:

1) pentru $K^n$: $\{e_1, \ldots e_n\}$ sunt baza canonică pentru $K^n$. $\dim_K(K^n) = n$

2) $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$: $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ — baza canonică pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$

3) Pentru $\{0_V\}$, $\emptyset$ este SLI
$\langle \emptyset \rangle = \cap$ tuturor subspațiilor $= \{0_V\}$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\emptyset$ este bază pentru $\{0_V\}$. $\dim\{0_V\} = 0$

4) $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$

Prop: (Lema de completare): Fie V un K-sp. vectorial

1) $\forall$ SLI se poate extinde la o bază în V.
2) Din $\forall$ S.G. pt. V se poate extrage o bază.

Prop: Fie $V_1 \subseteq V_2 \subseteq V$ sp. vectoriale.

1) $\dim V_1 \leq \dim V_2$
2) dacă $\dim V_1 = \dim V_2 < \infty \Rightarrow V_1 = V_2$

Corolar: ~~Dacă $V_1 \subseteq V_2$ și $\dim V_2 = \dim V_1$~~ Fie V un K-sp. vectorial cu $\dim V = n$ și $B \subseteq V$. Atunci,

1) Dacă B este SLI cu $|B| = n \Rightarrow$ B este bază
2) Dacă B este SG pt V cu $|B| = n \Rightarrow$ B bază în V

## Cum găsim o bază pornind de la un SG (vectori în $\mathbb{R}^n$)?

Căutăm o bază pt. subsp. vectorial $V = \langle v_1, v_2, \dots v_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$.

Notăm $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{n \times m}$ pentru care calculăm o formă eșalon $E$. Atunci, coloanele din $A$ pe care se află pivoți în $E$ sunt o bază pentru $V$. În particular,

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} V = \#\text{de pivoți din } E}$$

Dem: Pe coloana $i$ din $E$ nu găsim pivot $\Leftrightarrow v_i \in \langle v_1, \dots v_{i-1} \rangle$.

— // — găsim pivot $\Leftrightarrow v_i \notin \langle v_2, \dots v_{i-1} \rangle$.

$v_i \in \langle v_1, v_2, \dots v_{i-1} \rangle \Leftrightarrow$ sistemul $\left(\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & \dots & v_{i-1} & v_i \\ \vdots & \vdots & & | & \end{array}\right)$ e completat $\Leftrightarrow$

în F.E. nu găsim pivot pe ultima coloană

## Coordonatele unui vector într-o bază

Pp. $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bază pentru ${}_K V$ cu $\dim V = n$.

Fie $x \in V \Rightarrow B$ SG, $\exists a_1, a_2, \dots a_n \in K$ cu $x = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

Atunci, acești $(a_1, \dots a_n)$ sunt unici

~~Dacă~~ RA scriem $x = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$ cu $b_i \in K \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 = (a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_n - b_n) v_n$, $\{v_1, \dots v_n\}$ SLI $\Big| \Rightarrow a_i = b_i \ \forall i$

Notăm $[x] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ vectorul coordonatelor lui $x$ în baza $B$

**Obs:** $B = \{v_1, \dots v_n\}$ e bază în $V \Leftrightarrow \forall x \in B$, $\exists! a_1, a_2, \dots a_n \in K$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

Reformulare: $B = \{v_1, \dots v_n\}$ e bază în $V \Leftrightarrow V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$

**Obs:** $\mathbb{R}^n$ baza canonică $\{e_1, e_2, \dots e_n\} = B_{can}$

pt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n \Rightarrow [x]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$

# C4

19.03.2024

## ALGEBRĂ LINIARĂ

(R) V este un K-spațiu vectorial.
O bază în V = o mulțime care este SLI + SG pentru V

Să presupunem că $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ este o bază pentru V
Atunci, $\forall x \in V$ se scrie în mod unic ca o combinație liniară de vectori din B.

$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, cu $a_1, \dots a_n \in K$ unici

$[x]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n \longrightarrow$ vectorul coordonatelor lui x în baza B

## Matricea de trecere de la o bază la alta

Fie $_K V$ cu $B = \{v_1, \dots v_n\}$ și $B' = \{v_1', \dots v_n'\}$ baze în V. $\Rightarrow \dim_K V = n$

Pentru fiecare $j = \overline{1,n}$ scriem $v_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, $a_{ij} \in K$, $\forall i,j = \overline{1,n}$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$
$\quad [v_1']_B \quad [v_2']_B \quad \dots \quad [v_n']_B$

$\rightarrow$ se numește matricea de trecere de la baza B la baza B'
ori matricea de schimbare de bază

Notăm $B \xrightarrow{S} B'$

**Obs:** Matricea S de trecere este o matrice inversabilă.
Pentru $x \in V \rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j' v_j' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j' \left( \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right) =$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j' \right) v_i \Rightarrow \boxed{[x]_B = S \cdot [x]_{B'}, \forall x \in V}$$

$$\Rightarrow \boxed{[x]_{B'} = S^{-1} [x]_B, \forall x \in V}$$

$\Rightarrow$ **Obs:** Dacă S este matricea de trecere de la B la B', înseamnă că $S^{-1}$ este matricea de trecere de la B' la B.

**Exercițiu:** Fie $A_1, A_2 \in M_{m,n}(K)$ a.î. $A_1 \cdot X = A_2 \cdot X$, $\forall x \in K^n$
Atunci, $A_1 = A_2$.

Soluție: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$ , observăm că $A_1 \cdot e_i = A_2 \cdot e_i$

$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{col_i(A_1) \quad col_i(A_2)}_{\Downarrow \; A_1 = A_2}$

$col_i(A_1)$

## Aplicații liniare

**Definiție:** Fie $V, W$ două $K$-spații vectoriale. O funcție $f: V \to W$ se numește aplicație liniară (sau morfism de spații vectoriale) dacă:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in V$

și $f(ax) = a \cdot f(x)$, $\forall a \in K$, $\forall x \in V$

Dacă, în plus, $f$ este bijecție, spunem că $f$ este izomorfism de spații vectoriale, i.e. $V$ și $W$ sunt spații vectoriale izomorfe.

**Obs:** $f: V \to W$ este aplicație liniară $\Leftrightarrow f(ax+by) = af(x) + bf(y)$ $\forall a, b \in K$ și $\forall x, y \in V$. $\to$ $f$ duce combinații liniare în combinații liniare

**Exemple:**

① Funcția $f: V \to W$, $x \mapsto 0_W$ este aplicație liniară = „morfismul nul"

② Funcția $Id: V \to W$, $x \mapsto x$ este izomorfism liniar.

③ Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Definim funcția $f: K^n \to K^m$, $v \mapsto Av$

$v$ coloană $n \times 1$; $(m \times n)(n \times 1) \to m \times 1$; $Av$ coloană cu $m$ linii

Atunci, $f$ este aplicație liniară.

Demonstrație:

Fie $x, y \in K^n$, $a, b \in K$

$f(ax+by) = \cancel{af(x) + bf(y)} = A(ax+by) = A(ax) + A(by) =$

$= a(Ax) + b(Ay) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y)$

$\Rightarrow f$ aplicație liniară

**Obs:** Orice aplicație liniară între 2 spații vectoriale finit dimensionale este dată în coordonate de înmulțirea cu o matrice.

(4) Dacă $f$ este aplicație liniară bijectivă, $f^{-1}$ este de asemenea o aplicație liniară bijectivă.

## Matricea unei aplicații liniare într-o pereche de baze

Fie $f: V \to W$ o aplicație liniară, unde $\dim V = n$, $\dim W = m$;

$B_V$ = bază $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ în $V$

$B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ bază în $W$

Pentru fiecare vector din $B_V$, calculez imaginea și o exprim în baza $B_W$, spunând coordonatele obținute drept coloane într-o matrice.

Pentru $j = \overline{1,n}$, $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ cu $a_{ij} \in K$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} [f(v_1)]_{B_W} & [f(v_2)]_{B_W} & [f(v_n)]_{B_W} \end{array} \end{array} \overset{not}{=} [f]_{B_V, B_W} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

$\updownarrow$

matricea aplicației liniare a lui $f$ în perechea de baze $B_V, B_W$

• Fie $x \in V$, $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, $\alpha_j \in K$

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j\right) w_i \Rightarrow [f(x)]_{B_W} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

coordonatele lui $f(x)$ din baza din domeniu

$$\boxed{\Rightarrow [f(x)]_{B_W} = [f]_{B_V, B_W} \cdot [x]_{B_V}, \ \forall x \in V}$$

La schimbarea bazelor, se modifică și matricea lui $f$ $[f]_{-,-}$ în domeniu și codomeniu,

Avem $f: V \to W$ apl. liniară. $B_V$, $B'_V$ baze finite în $V \to n$
$B_W$, $B'_W$ baze finite în $W \to m$

$B_V \xrightarrow{S} B'_V$ S matrice inversabilă
$B_W \xrightarrow{T} B'_W$ T —— || ——

Pentru $x \in V$: $[f(x)]_{B_W} = [f]_{B_V,B_W} \cdot [x]_{B_V}$

$$T^{-1} \,\Big|\, T \cdot [f(x)]_{B'_W} = [f]_{B_V,B_W} \cdot S \cdot [x]_{B'_V}$$

$$[f(x)]_{B'_W} = T^{-1} [f]_{B_V,B_W} \cdot S \, [x]_{B'_V}$$

Dar $[f(x)]_{B'_W} = [f]_{B'_V,B'_W} \cdot [x]_{B_V}$

$$\Rightarrow [f]_{B'_V,B'_W} = T^{-1} \cdot [f]_{B_V,B_W}$$

$m \times n$ $\quad$ $m \times m$, $m \times n$, $n \times n$

## Operații cu aplicații liniare

Fie $f, g: V \to W$ aplicații liniare
Definim $f+g: V \to W$
**suma** $x \longmapsto f(x)+g(x)$

Exerciții: $f+g$ este o aplicație liniară
Dacă $B_V$, $B_W$ sunt baze finite în $V$, respectiv $W$,

$$\boxed{[f+g]_{B_V,B_W} = [f]_{B_V,B_W} + [g]_{B_V,B_W}}$$

Înmulțirea cu scalari: pentru $a \in \mathbb{R}$ și $f: V \to W$ apl. liniară, definim $a \cdot f: V \to W$
Exercițiu: $af$ este aplicație liniară, iar $\boxed{[af]_{B_V,B_W} = a \cdot [f]_{B_V,B_W}}$

Compunerea aplicațiilor liniare:
Fie $f: V \to W$ și $g: W \to L$ aplicații liniare
Atunci $g \circ f: V \to L$ este aplicație liniară
Dem: Fie $x, y \in V$, $a, b \in K$. ~~Atunci, $(g \circ f)(ax+by) = g(f$~~

Atunci, $(g\circ f)(ax+by) = g(f(ax+by)) \underset{f \text{ liniară}}{=} g(af(x)+bf(y)) =$

$\underset{g \text{ liniară}}{=} a\cdot g(f(x)) + b\cdot g(f(y))$

$= a\cdot(g\circ f)(x) + b\cdot(g\circ f)(y) \Rightarrow g\circ f$ este aplicație liniară

Să pp. că $V, W, L$ sunt finit dimensionale, cu bazele $B_V, B_W, B_L$.

Pentru $x\in V$ $\quad x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$ ($g\circ f$)

$[x]_{B_V} \xrightarrow{A} [f(x)]_{B_W} \xrightarrow{B} [g(f(x))]_{B_L} = [(g\circ f)(x)]_{B_L}$ ($[g\circ f]_{B_V,B_L}$)

$A = [f]_{B_V,B_W}$ $\quad [g\circ f]_{B_V,B_L}$ $\quad [g(f(x))]_{B_L} = B\cdot A[x]_{B_V}$ $\quad [(g\circ f)(x)]_{B_L} = [g\circ f]_{B_V,B_L}\cdot[x]_{B_V}$

$\forall x\in V$

$$\Rightarrow \boxed{[g\circ f]_{B_V,B_L} = [g]_{B_W,B_L}\cdot[f]_{B_V,B_W}}$$

## Subspații asociate unei aplicații liniare

Fie $f: V\to W$ o aplicație liniară.

**Definiție**: Numim nucleul lui $f$ ($\mathrm{Ker}(f)$) $= \{x\in V : f(x)=0\}$ (Kernel)

Imaginea lui $f = \mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x\in V\}$

**Prop:**
1. $\mathrm{Ker} f$ este subspațiu vectorial în $V$.
2. $\mathrm{Ker} f = \{0\} \Rightarrow f$ este injectivă.
3. $\mathrm{Im} f$ este subspațiu vectorial în $W$
4. $\mathrm{Im} f = \{0\} \Rightarrow f$ este ~~surjectivă~~ surjecție.

**Dem:**
1. Fie $x,y\in \mathrm{Ker} f$, $a,b\in K$. Atunci
$f(ax+by) = a\cdot \underbrace{f(x)}_{0} + b\cdot \underbrace{f(y)}_{0} = 0 \Rightarrow ax+by\in \mathrm{Ker} f$

Ker f subsp. vectorial în V

2. Fie $x,y\in \mathrm{Im} f$ și $a,b\in K$.
$\Rightarrow \exists x_1,y_1\in V$ cu $x=f(x_1)$ și $y=f(y_1)$
$ax+by = a\cdot f(x_1) + b\cdot f(y_1) = f(\underbrace{ax_1+by_1}_{\in V}) \in \mathrm{Im} f$

**Teorema rang-defect:**

Dacă $f: V \to W$ aplicație liniară și $\dim_K V < \infty$, atunci:

$$\boxed{\underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\text{rangul lui } f} + \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\text{defectul lui } f} = \dim V}$$

**Propoziție:** Fie $f: V \to W$ o aplicație liniară cu $\dim_K V < \infty$.

AUASE: (1) $f$ injecție
(2) $f$ surjecție
(3) $f$ bijecție

**Demonstrație:** Este suficient $(1) \Leftrightarrow (2)$

$f$ injectivă $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$

$\overset{\text{Th. rang-defect}}{\Longleftrightarrow} \dim \operatorname{Im} f = \dim V < \infty \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = V$
$\Leftrightarrow f$ surjecție

$\operatorname{Im} f \leq V$

**Obs:** Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ și $f: K^n \to K^n$ aplicație liniară, $v \mapsto Av$

Avem $\operatorname{Ker} f \overset{\text{def}}{=} \{v \in K^n \mid Av = 0\}$ = soluțiile sistemului liniar omogen cu matricea $A$ $=: \operatorname{Ker} A$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Teoremă:**

Dacă $V$ este un $K$-sp. vectorial finit dimensional, $\dim_K V = n$, atunci $V \underset{\text{izomorf}}{\simeq} K^n$

**Dem:** Fie $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bază în $V$

Definim $f: V \to K^n$, $x \mapsto [x]_B$, care este o bijecție + aplicație liniară

## Produsul de spații vectoriale

Dacă $V_1, V_2$ sunt două K-sp. vectoriale, pe produsul cartezian $V_1 \times V_2 = \{(x,y) : x \in V_1, y \in V_2\}$, avem o structură naturală de K-sp vectorial

$(x,y)+(x_1,y_1)=(x+x_1, y+y_1)$, $\forall x_1, x \in V_1$
$y_1, y \in V_2$
$a \in K$

$a(x,y) = (ax, ay)$

Dem: Dacă $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ bază în $V_1$ și $\{f_j\}_{j=\overline{1,m}}$ bază în $V_2$

$\{(e_i,0) \mid i=\overline{1,n}\} \cup \{(0,f_j) : j=\overline{1,m}\}$ este o bază în $V_1 \times V_2$

n + m elemente

26.03.2024

C5

ALGEBRĂ LINIARĂ

## Spațiul vectorial factor

Fie $W \subseteq V$ un subspațiu vectorial în V. Induce o relație de echivalență „modulo W": $\forall x,y \in V$: $x \sim y \bmod W \Leftrightarrow x-y \in W$.

Clasa de echivalență $\hat{x} = \{y \in V : x \sim y \bmod W\} = x + W$

Spațiul cât (mulțimea factor) se notează $V/W = \{\hat{x} \mid x \in V\}$ și are o structură de K-spațiu vectorial cu operațiile canonice

$$\begin{cases} \text{„+"}: \forall \hat{x}, \hat{y} \in V/W, \ \hat{x}+\hat{y} = \widehat{x+y} \\ \text{„}\cdot\text{"}: \forall a \in K, \forall \hat{x} \in V/W, \ a \cdot \hat{x} = \widehat{ax} \end{cases}$$

Numim $V/W$ cu aceste operații „spațiul vectorial factor"

$(V/W, +)$ grup abelian: grupul factor corespunzător subgrupului normal W în V.

Înmulțirea cu scalari este corect definită:

Fie $a \in K$, $x,y \in V$ cu $\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow \widehat{ax} \overset{?}{=} \widehat{ay}$

$\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow x \sim y \bmod W \Rightarrow x-y \in W$ (W subsp. liniar în V)

$\Rightarrow a(x-y) \in W \Rightarrow ax-ay \in W \Rightarrow ax \sim ay \bmod W \Rightarrow \widehat{ax} = \widehat{ay}$

**Obs**: Proiecția canonică $\pi : V \to V/W$, $x \longmapsto \hat{x}$ este aplicație liniară surjectivă cu $\operatorname{Ker}\pi = \{x \in V \mid \pi(x) = 0\} = W$
$(\hat{x} = 0 \Leftrightarrow x \sim 0 \Leftrightarrow x \in W)$

**Teoremă**: Fie $W \subseteq V$ subsp. vectorial cu $\dim_K V < \infty$. Atunci:

$\dim V/_W = \dim V - \dim W$

**Demonstrație**: Aplicăm th. rang - defect pt. $\pi : V \to V/W$:
$\dim V = \dim \operatorname{Im}\pi + \dim \operatorname{Ker}\pi = \dim(V/_W) + \dim W$

**Aplicație / Teorema Grossman**: Fie $V_1, V_2$ subsp. vectoriale în $V$, cu $\dim V < \infty$. Atunci, $\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) =$
$= \dim V_1 + \dim V_2$

$V_1 + V_2 = \{x + y : x \in V \text{ și } y \in V_2\} = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$

**Dem**: Fie funcția $f : V_1 \times V_2 \to V$
$(x, y) \longmapsto x - y$

↳ această funcție $f$ este o aplicație liniară $f(a(x,y) + b(x',y')) = a f((x,y)) + b f((x',y'))$, $\forall a,b \in K$, $\forall (x,y), (x',y') \in V_1 \times V_2$.

↳ $\operatorname{Im} f \overset{?}{=} V_1 + V_2$

Pentru $x \in V_1$, $y \in V_2$ $\Rightarrow$ $\underbrace{x - y}_{= f((x,y))} = x + \underbrace{(-y)}_{-y \in V_2} \in V_1 + V_2 \Rightarrow \operatorname{Im} f \subseteq V_1 + V_2$

Reciproc, pentru $x \in V_1$, $y \in V_2$ scriem $x + y = x - (-y) = f((x,-y)) \in \operatorname{Im} f$
$\Rightarrow V_1 + V_2 \subseteq \operatorname{Im} f$

$(x,y) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f((x,y)) = 0 \Leftrightarrow x \in V_1$, $\cancel{y \in V_2}$ $x \in V_2$ $\Rightarrow$ ~~Ker f ⊂ x ∈ V₁, y ∈ V₂~~
$x \in V_1, y \in V_2$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f \subset \{(x,x) \mid x \in V_1 \cap V_2\} \overset{izo}{\simeq} V_1 \cap V_2$
$(x,x) \longmapsto x$

Din th. rang defect pentru $f$: $\underset{(*)}{\dim(V_1 \times V_2)} = \underset{(**)}{\dim \operatorname{Im} f} + \underset{(***)}{\dim \operatorname{Ker} f}$

$(*) = \dim V_1 + \dim V_2$

$(**) = \dim(V_1 + V_2)$

$(***) = \dim(V_1 \cap V_2)$

## Teorema fundamentală de izomorfism la spații vectoriale:

Fie $f: V \to W$ un morfism de spații vectoriale. Acesta induce un izomorfism de spații vectoriale $\bar{f}: V/_{K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im} f$, unde $\bar{f}(\hat{x}) := f(x)$, $\forall \hat{x} \in V/W$.

Demonstrație: $f$ este și morfism de grupuri $\Rightarrow$ acest $\bar{f}$ este izomorfism de grupuri. Rămâne de verificat că $\bar{f}$ păstrează înmulțirea cu scalari.

$$a\bar{f}(\hat{x}) = a \cdot f(x) = f(ax) = \bar{f}(\widehat{ax}), \forall a \in K, \forall \hat{x} \in V/W$$

↳ $f$ liniar

## Determinanți

Pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \det(A) \in \mathbb{R}$

$n=1$: $\det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$

$n=2$: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n=3$: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 6$ termeni

$n=4$: $4!$ termeni $= 24$ termeni

### MOTIVAȚIE GEOMETRICĂ:

$V$ = $\mathbb{R}$-sp. vectorial al vectorilor din plan fixați într-un punct $v$; Reper $\{0, e_1, e_2\}$ în plan.


aria$(v_1, v_2)$ = aria cu semn a paralelogramului cu vârful în 0 și laturile $v_1, v_2$.


aria $V \times V \to \mathbb{R}$

↳ este liniară în fiecare

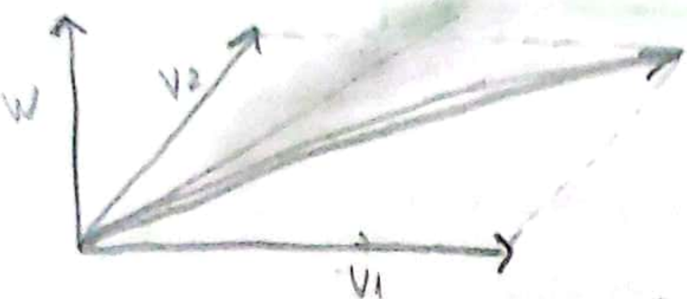
↳ aria$(a\vec{v_1} + b\vec{v_2}, \vec{w}) = a \cdot$ aria$(\vec{v_1}, \vec{w}) +$ $+ b \cdot$ aria$(\vec{v_2}, \vec{w})$

↳ aria$(\vec{v}, a\vec{w_1} + b\vec{w_2}) = a \cdot$ aria$(\vec{v}, \vec{w_1})$ $+ b \cdot$ aria$(\vec{v}, \vec{w_2})$

↳ aria$(\vec{v}, \vec{v}) = 0$

↳ aria$(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 1$


(mai sus – pag. anterioară)




$\text{aria}(v_1+v_2, w) = \text{aria}(v_1, w) + \text{aria}(v_2, w)$

Să exprimăm $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$ în bază $\{e_1, e_2\}$.

$\vec{v_1} = a_{11} \cdot e_1 + a_{12} \cdot e_2$

$\vec{v_2} = a_{21} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2$

$\text{aria}(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \text{aria}(a_{11} \cdot e_1 + a_{12} \cdot e_2, a_{21} e_1 + a_{22} e_2) \xrightarrow[\text{1}]{\text{liniaritate}}$

$= a_{11} \cdot \text{aria}(e_1, a_{21} e_1 + a_{22} e_2) + a_{12}\, \text{aria}(e_2, a_{21} e_1 + a_{22} e_2) =$

$= a_{11} a_{21} \cdot \text{aria}\cancel{(e_1, e_1)} + a_{11} a_{21}\, \text{aria}(e_1 + e_2) + a_{12} a_{21}\, \text{aria}(e_2, e_1)$

$+ a_{12} \cdot a_{22} \cdot \text{aria}\cancel{(e_2, e_2)} = a_{11} \cdot a_{21} - a_{12} a_{21}$

Ne gândim la lucrări cu aplicații:

$f: V \times V \times \ldots \times V \to K$ cu proprietatea că

(1) $f$ este liniară în fiecare argument

(2) $f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$ dacă $\exists i<j$ cu $v_i = v_j$

$\Rightarrow$ (1) & (2) $\Leftrightarrow$ 1 & (2'): $f(v_1, \ldots \underset{\text{poz } i}{v_i} \ldots v_j \ldots v_n) = -f(v_1 \ldots \underset{\text{poz } i}{v_j} \ldots \underset{\text{poz } j}{v_i} \ldots v_n)$

$\Leftrightarrow$ (1) & (2''): $f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)} \ldots v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)$

$f(v_1, \ldots v_n)$, $\forall \sigma \in S_n$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\#\text{inversiuni din } S_n}$

$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2)$, $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n$

Fixăm $e_1, e_2, \ldots e_n$ o bază în $V$

Exprimăm $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot e_j$, $\forall i \in \overline{1,n}$

$\downarrow$

$$f(v_1, \ldots v_n) = \underbrace{\left( \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right)}_{(*)} \cdot f(e_1 \ldots e_n)$$

(*) def $\det A \to$ determinantul matricei $A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \vdots \\ \to v_n \end{array} \in \mathcal{M}_n(K)$$

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$

Notăm $T_\sigma(A) = \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \Rightarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma(A) =$

$= \sum_{\sigma \in S_n} T_{\sigma^{-1}}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma(B) = \det B = \det(A^t)$

Proprietăți:

① $\det A = \det A^t$

Dem: $A^t = (b_{ij})$, $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i,j$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma(A) = \sum_{\sigma \in S_n} T_{\sigma^{-1}}(A)$$

$T_{\sigma^{-1}}(A) = \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)} \cancel{= \varepsilon(\sigma)} =$

$= \varepsilon(\sigma) \cdot b_{\sigma^{-1}(1)1} \cdot b_{\sigma^{-1}(2)2} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma^{-1}(n)n} = \varepsilon(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot$

$\cdot b_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)} = T_\sigma(B)$

② Dacă $A$ are o linie nulă $\Rightarrow \det A = 0$

Dem: $L_i(A) = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0$, $\forall j = \overline{1,n} \Rightarrow T_\sigma(A) = 0$, $\forall \sigma \in S_n \Rightarrow \det A = 0$

③ Dacă $B$ se obține din $A$ prin înmulțirea unei linii cu $\lambda \in K \Rightarrow \det B = \lambda \cdot \det A$

Dem. $L_i(B) = \lambda L_i(A)$

$T_\sigma(B) = \lambda T_\sigma(A)$, $\forall \sigma \in S_n \Rightarrow \det B = \lambda \det A$

④ Dacă putem descompune elementele unei linii din $A$ drept $(b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots, b_n + c_n)$ și notăm cu $B$, respectiv $C$ matricele obținute din $A$ înlocuind linia respectivă cu $(b_1, \ldots, b_n)$, respectiv cu $(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A = \det B + \det C$

$$L_i(A) \quad \det\begin{pmatrix} \cdots & & & b_n \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cdots & & \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & & \\ \cdots & & \end{pmatrix}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} \cdots & & \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & & \\ \cdots & & \end{pmatrix}$$

$T_\sigma(A) = T_\sigma(B) + T_\sigma(C), \ \forall \sigma$

(5) Dacă $A$ are 2 linii proporționale $\Rightarrow \det A = 0$

Dem: Să pp. $L_j = \lambda L_j$, cu $i \neq j$ și $\lambda \in K$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda L_i \\ L_j \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \lambda \det\begin{pmatrix} \cdots L_j \cdots \\ \cdots L_i \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

este suficient să considerăm cazul $\lambda = 1$

$T_\sigma(A) = \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$

$= - T_{\sigma(i,j)}(A)$

$$\det A = \sum_{\sigma \text{ par}} T_\sigma(A) + \sum_{\substack{\sigma \in (i,j) \\ \sigma \text{ par}}} T_\sigma(A) = 0$$

(6) Dacă $B$ se obține din $A$ permutând 2 linii $\Rightarrow$

$\Rightarrow \det B = -\det A$

$L_i \longleftrightarrow L_j$

Dem:

$$0 = \det\begin{pmatrix} L_i(A) + L_j(A) \\ L_i(A) + L_j(A) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix} \ \underline{\underline{\text{liniaritate}}} \ \overset{=0}{\det\begin{pmatrix} \cdots L_i \cdots \\ \cdots L_j \cdots \end{pmatrix}} +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} \cdots L_j \cdots \\ \cdots L_i \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cdots L_i \cdots \\ \cdots L_j \cdots \end{pmatrix} + \underset{0}{\det\begin{pmatrix} L_j \cdots \\ \cdots L_i \cdots \end{pmatrix}}$$

(7) Dacă $B$ se obține din $A$ adunând la linia $i$ linia $j$ înmulțită cu $\lambda \in K \Rightarrow \det B = \det A$

(8) Prop 2-7 au loc și dacă înlocuim liniile cu coloanele

# Dezvoltarea determinanților

$p \in \mathbb{N}$

$[p] = \{1, 2, \dots, p\}$

$A = M_{p,q}(K)$

$I \subset [p]$

$J \subset [q]$

$I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$

$J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$

$A_{I,J} \to$ matricea obținută din intersecția dintre $I$ cu coloanele $J$

~~$A_{I,J}$~~ $|I| = m$, $|J| = m$

$\det(A_{I,J})$ se numește minor de ordin $m$ a lui $A$

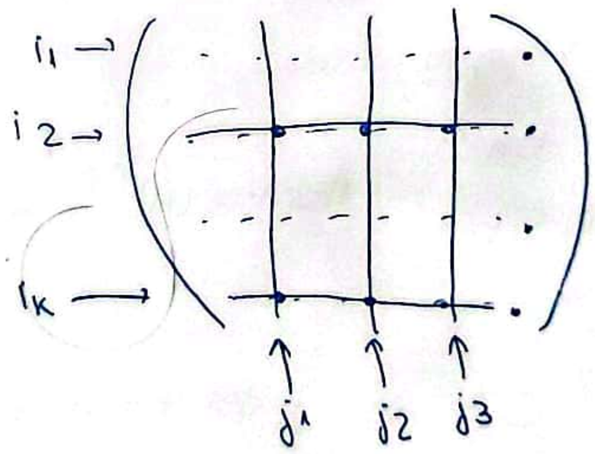
$A \in M_n(K)$

$I \subset [n]$ $m \leq n$ $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_m\}$

$J \subset [n]$ $|I| = |J| = m$, $J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$

$\overline{I} = [n] \setminus I$

$\overline{J} = [n] \setminus J$




$M = \det(A_{I,J})$

$M' = (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_n} \cdot \det(A_{\overline{I},\overline{J}})$

Regula lui Laplace: $A \in M_n(K)$ $m \leq n$, $\det A = \sum\limits_{\substack{M \text{ minor} \\ \text{de ord } m \\ \text{cu liniile } I}} M \cdot M'$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad I = \{1,3\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \pm$$

$$\pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \pm \dots$$

La fel facem și dacă fixăm coloanele $J = \{j_1, \dots, j_m\}$

Vom avea $C_n^m$ termeni

Exerciții

$$A = \begin{pmatrix} M_n & N_{n \times p} \\ 0 & P_p \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det M_n \cdot \det P_p$$

$\to$ p linii, m coloane

$$A = \begin{pmatrix} 0 & M_n \\ P_p & N_{p \times m} \end{pmatrix} \qquad \det A = (-1)^{np} \cdot \det M_n \cdot \det P_p$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & \\ 0 & a_{22} & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \\ & & \ddots & \\ \dots & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11} - a_{nn}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots 0 & \text{---} & 0 \\ 0 & a_{22} & \text{---} & 0 \\ \text{---} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Caz particular: $m=1$, $I = \{i\}$, coloanele $J = \{j\}$, $j \in [n]$
variabile

$A_{I,J} = a_{ij}$ , $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{\bar{I},\bar{J}}) \to$ complementul algebric al lui $a_{ij}$

~~dezv. det. după linia i~~

Ex 4 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $i=j=1$ $A_{1,1}=(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ dezvoltarea determinantului după linia i

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ — — — // — — — — — — coloana j

$A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Fixăm un i și fie $p \neq i$. B se obține din A înlocuind linia p cu linia i.

$\det B = 0$. Dezvoltăm $\det B$ după linia p:

$a_{i1}A_{p1} + \dots + a_{in}A_{pn} = 0, \ \forall p \in [n], p \neq i$

$(a_{i1}, \dots a_{in}) \begin{pmatrix} A_{p1} \\ \vdots \\ A_{pn} \end{pmatrix} = 0, \ \forall p \in [n], p \neq i$

↳ numere (complemenți algebrici)

$(a_{i1}, \dots a_{in}) \begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix} = \det A$

$(a_{i1}, \dots a_{in}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{A^*} = (0, 0, \dots \det A, 0, \dots 0)$

$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + A_{in}a_{in} = \det A$

$A \cdot A^* = ?$

$A = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ $l_i = (a_{i1}, \dots a_{in})$

$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} l_1 \cdot A^* \\ \vdots \\ l_n \cdot A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I_n$

$A^* \cdot A = \det A \cdot I_n$ folosim dezvoltarea după coloană

A inversabilă $\Leftrightarrow \exists B$ a.î. $A \cdot B = B \cdot A = I_n$

T: $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ și atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$

"$\Leftarrow$" evidentă $A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^*\right) = \frac{1}{\det A}(A \cdot A^*) = \frac{\det A}{\det A} I_n = I_n$

"$\Rightarrow$" $B = A^{-1} \Rightarrow B = A \cdot A^* = (B \cdot A) \cdot A^* = A^*$

$B \mid A \cdot A^* = \det A \, I_n \Rightarrow B(A \cdot A^*) = \det(A) \cdot B$

$\Rightarrow A^* = \det A \cdot B \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \\ \det A \neq 0 \end{cases}$ B diferit de 0

$A, B \in M_n(K)$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

<u>Regula lui Cramer</u>: $\Delta = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ inversabilă.

Atunci sistemul $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ are soluție unică, $\forall \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\Delta_i$ – determinantul matricei obținută prin înlocuirea coloanei $i$ a lui $A$ cu $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

<u>Dem</u>:

A inversabilă $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ & \vdots & \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{11} + \dots + b_n A_{1n}) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$

$\vdots$

$x_j = \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{1j} + \dots + b_n A_{jn}) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \forall j = \overline{1,n}$

<u>Definiție</u>: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Rangul lui A este ordinul maxim al unui minor nenul al lui A.

T: Rang(A) nu se schimbă la transformări elementare

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ $\quad A \xrightarrow[\text{element.}]{\text{tr.}} \begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? & - & - \\ 0 & 1 & ? & ? & - & - \\ 0 & 0 & 1 & ? & ? & - \\ 0 & 0 & 0 & \emptyset & ? & - \\ - & - & - & - & - & 0 \end{pmatrix} = B \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = C$$

Rang $A$ = Rang $C$ = nr. de 1-uri de pe diagonală

Rang $A$ = Rang $B$ = $\dim_K < c_1(A), \dots c_n(A) > = c_1 A, \dots c_n A$,

coloanele lui $A$ = $\dim_K < \ell_1(A), \dots \ell_n(A) >$

Th. Kronecker

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ are un minor de ordin $r$ ($< \min(m,n)$) și toți minorii nenuli obținuți prin bordarea sa sunt 0. Atunci, rang $A = r$

Aplicații la sisteme liniare:

$A \cdot x = b$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

Sistemul are soluție $\Leftrightarrow$ nr. de pivoți din forma eșalon pentru $A$ = nr. de pivoți din forma eșalon a lui $\bar{A} = (A|b)$

Th. Kronecker Capelli: $Ax = b$ compatibil $\Leftrightarrow$ rang $A$ = rang $\bar{A}$

Th. lui Rouché: Un sistem liniar este compatibil $\Leftrightarrow$ toți determinanții caracteristici sunt 0.

$A \cdot x = b$, rang $A = r$. Calculăm rang $\bar{A}$

Alegem $A_{I,J}$ a.î. $|I| = |J| = r$, $\det A_{I,J} \neq 0$.

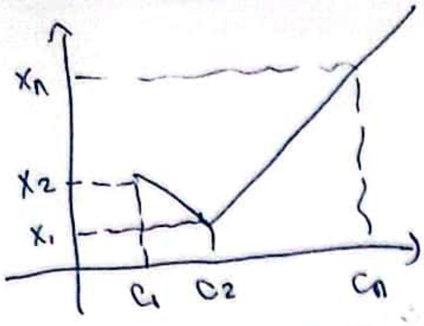
Bordăm $A_{I,J}$ cu coloana termenilor liberi $b_I$ și orice altă linie din $A \Rightarrow$ Determinanți caracteristici

Rang $\bar{A}$ = Rang $A \Leftrightarrow$ toți aceștia sunt nuli

Sistemul = nul $\Leftrightarrow$ sistemul cu matricea $A_{I,J}$ și termenul liber $b_I$. Necunoscutele $x_J$ sunt pp, celelalte secundare, adică $x_{\bar{J}}$ și trec în dreapta egalului.

Se obține un sistem cu $r$ ecuații și $r$ necunoscute $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Putem aplica regula lui Cramer.




Să se determine $f$ a.î. $f(c_j)=x_j$, $\forall j$

Pp. $f$ polinomială

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

$$f(c_i)=k \Rightarrow \begin{cases} c_1^n+a_{n-1}c_1^{n-1}+\ldots+a_n c_1=k_1-a_0 \\ \vdots \\ c_n^n+a_{n-1}c_n^{n-1}+\ldots+a_n c_n+a_0=k_n \end{cases}$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^{n-1} \\ 1 & & & & \\ 1 & & & & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \cdots & c_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & & \\ c_1^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \text{det. sist.}$$

$n=2$ $\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=c_2-c_1$

$$\Delta_n=\prod_{i<j}(a_i-a_j)$$

## C7

9.04.2024

## ALGEBRĂ LINIARĂ

### Vectori + valori proprii. Diagonalizare

Fie $V$ un $K$-sp. vectorial cu $\dim_K V=n<\infty$ și $f:V\to V$ o aplicație liniară.

Fie o bază în V, B ⇒ $[f(v)]_B = A[v]_B$, $\forall v \in V$, unde $A = [f]_B$

Caz particular, $A = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ este o matrice diagonalizată.

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\lambda_1 \\ x_2\lambda_2 \\ \vdots \\ x_n\lambda_n \end{pmatrix}$$

$B \overset{S}{\leadsto} B'$

$[f]_{B'} = S^{-1}[f]_B \cdot S$

Def: $f: V \to V$ este o aplicație liniară diagonalizată peste $K$ dacă $\exists B$ o bază în $V$ cu $[f]_B = \Delta_0$ (matr. diagonală)

2) Matricea $A \in \mathcal{M}_2(K)$ spunem că este diagonalizabilă (peste $K$) dacă $\exists S \in \mathcal{M}(n)$ inversabilă a.î. $S^{-1}AS = \Delta$ o matrice diag.

Spunem că $B$ este o bază de diagonalizare pt $f$, respectiv $S$ este o matrice diagonalizată pt. matr. $A$

Obs: Pornind cu $A \in \mathcal{M}_m(K)$, notăm $f: K^n \to K^n$, $v \mapsto Av$, care e o aplicație liniară: $[f]_{can} = A$

Def! Această funcție $f$ este o aplicație liniară diagonalizată ⇔ $\exists B_1$ bază în $K^n$ cu $[f]_{B_1} = \Delta$ o matr. diagonalizată.

Notăm $S$ = matr. de trecere de la baza canonică din $K^n \overset{S}{\leadsto} B_1$, avem $\Delta = S^{-1}AS$ ⇔ matricea $A$ e diag. $f: V \to V$

$B_1, B_2$, $[f]_{B_1, B_2}$

$[f]_{B_1} \xrightarrow{\text{de fapt}} [f]_{B_2}$ în $B_2$

Revenim la $S^{-1}AS = \Delta$ ⇔ $AS = SD$

$$A\begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_n = \lambda_n v_n \end{cases}$$

Așadar, matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă ⇔ $\exists$ o bază $\{v_1 \dots v_n\}$ pt $K$ care $\lambda v_1 \dots v_n \in K$ a.î. $\boxed{Av_j = \lambda v_j}$

Def:

① Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Spunem că $\lambda \in K$ este valoare proprie pt. matricea $A$ dacă $\exists v \in K^n$ a.î. $A \cdot v = \lambda$

→ Notăm spec(A) = val. proprie. pentru matricea A

② Pt. $x \in Spec(A)$ un vector $v \in K^n$ s.n. vector propriu pt $\lambda$ dacă $A \cdot v = \lambda v$.

Notăm $V_\lambda(A) = \lambda$, $V \in K^n$

$Av = \lambda v$ - $\gamma \leq K^n$

Spunem că $\lambda \in K$ este o matrice proprie pentru aplicația liniară $f$ dacă $\exists v \in V$ a.î. $f(v) = \lambda v$

③ Fie $x \in Spec(f)$. Spunem că $v \in V$ este un vector propriu pentru $f$ dacă $f(v) = \lambda v$

→ Notăm $V_\lambda(f)$ este vector propriu pt. $\lambda$ (v - eigenvector)

Cum găsim vectorii și valorile proprii pt. $A \in \mathcal{M}(n)$?

Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$

$v \in V_\lambda(A) \Leftrightarrow Av = \lambda v \Leftrightarrow \lambda v = Av = 0 \Leftrightarrow (AI_n - A)v = 0$

$\Leftrightarrow (xI_n - A)v = 0$

$\left(xI_n - A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right)$

$\Leftrightarrow$ v este sol. pt. sist. liniar omogen

Deci, $\boxed{V_\lambda(A) = Ker(xI_n - A)}$

Știm $\lambda$ (val propr) → aflăm ușor $V_\lambda(A)$

$K \in \lambda \in Spect(A) \Leftrightarrow K \in x \in Spec(A)$

$\Leftrightarrow V_\lambda(A) \neq \{0\} \Leftrightarrow \dim V_\lambda(A) > 0 \Leftrightarrow \det(xI_n - A) = 0$

$\det(xI_n - A)$

$= \det \begin{pmatrix} xa_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_n \\ -a_{21} & \lambda a_{22} & & \vdots \\ & \cdots & & x - a_n \end{pmatrix} = x^n + \ldots x^{n-1} + \ldots +$

↳ exprimare polinomială de gr K m $\lambda$

Definiție: Polinomul caracteristic al matricei $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este val $A = [f]_B$ · polinomul caracteristic al lui $f$

se formează că:

$p_f(x) = P_A(x) \in K[X]$

Proprietate: $P_f(x)$ nu depinde de baza aleasă/considerată

Th: $x \in K$ este val. propr. pentru $A \in \mathcal{M}_n(K) \Leftrightarrow \lambda$ e ... pt $P_A(x)$

Din unele cărți: $\det(A - X I_n]_n = \det(-X I_n - A])$

$(X-x)^{m_a(x)} / p_tA(x)$

Respectiv: pt $x \in Spec(A)$, $r \leq mg(A) \leq m_0(\lambda)$

↳ Prop: Fie $V_1, V_2 \dots V_n$ vect proprii nenuli pt val. proprii distincte $\lambda_1, \dots \lambda_n \in K$

$V_1 \dots V_r$ încât SLI

Pp. R.A. că $V_1 \dots V_n$ nu sunt SLI, iar $r$ e val. cea mai mică cu această propr: $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ pt $a_{11} \dots a_{1n} \in K$ pt toți vectorii $A \cdot a_1 v_1 + A a_2 v_2 + \dots + A a_n v_n = Av = 0$

$a_1 \lambda_1 \cdot v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_n \lambda_n = 0$

$x_1 a_1 v_1 + x_1 a_2 v_2 + \dots + x_1 a_n v_n = 0$

$+ a_n (x_1 - x_2) v_2 + a_3 (x_1 - x_2) v_3 + \dots + a_r (x_1 - x_2) v_r = 0$

Avem $\Rightarrow \{v_{r1} \dots v_r\}$ e SLI

$$\begin{cases} a_2(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \\ a_3(X_1 - X_3) = 0 \\ \vdots \\ a_r \underbrace{(x_1 - x_r)}_{\neq 0} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_r = \dots = a_r = 0$

$\Downarrow$

$a_1 v_1 = 0$

$\Downarrow \quad v_1 \neq 0$

$v_1 = 0$

$\rightarrow \{v_1 \dots v_r\}$ SLI

Consecință:

Presupunem că $\sum_{x \in Spect(A)} V_x(A)$ este o sumă directă de subspații în $K^n$. Subsp. lui $K^n$ generat de toți vectorii proprii

Th:

CRITERIUL DE DIAGONALIZARE

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este diagonalizabilă peste $K \iff$

① $P_{C_A}(x)$ se calculează ca și produs de funcții liniare în $K[x]$

② $\forall x \in Spec(A)$
$mg(x) = ma(x)$

Dem: $A$ e diagonalizabilă $\overset{}{\underset{def}{\iff}} \exists S$ inv. cu $S^{-1}AS = \Delta$ diagonalizabilă

$\Rightarrow \exists \{v_1 \ldots v_n\}$ bază în $K^n$ cu $Av_i = \lambda_i \lambda_{ij}$, $i=\overline{1,n}$

$\boxed{\iff \exists \text{ o bază în } K^n \text{ form. din vectorii proprii}}$

$\iff \sum_{x \in Spec(A)} V_x = K^n \iff \bigoplus_{x \in Spec(A)} V_x(A) = K^n$

$\iff \dim\left(\bigoplus_{x \in Spec(A)} V_x(A)\right) = n \iff \boxed{\sum_{x \in Spec(A)} V_x(A)} \iff$

$\iff \boxed{\sum_{x \in Spec(A)} mg(x) = n}$

În general, $1 \leq mg(x) \leq ma(x)$, $\forall x \in Spect(A)$

$\sum_{x} mg(x) \leq \sum_{x \in Spect(A)} ma(x)$

$\rightarrow$ sumă de funcții liniare din descompunerea lui $f$ în $K\lambda$ fiecărei valori din a

Deci, A este diagonalizabilă peste K.

$\Leftrightarrow$ $mg(x) = ma(x)$, $\forall x \in Spect(A)$ și $p_A(x)$ se scrie ca produs de n factori liniari în $K[x]$.

~~Deci, A este diagonalizabilă peste K~~

~~$\Leftrightarrow$ $mg(x) = ma(x)$, $\forall x \in Spec(A)$ și $p_A(x)$ se scrie ca prod~~

Corolar: Dacă pt $A \in M_n(K)$ polinom caracteristic, $p_A(x)$ ~~care~~ ~~o răd. distinctă~~ ~~e redestinsă~~ o răd. distinctă atunci A este diagonalizabilă (peste K)

Dem: $p_A(x) = (x-x_1) \ldots (x-x_n)$ cu $x_1, \ldots x_n$ rădăcini distincte

$\Rightarrow ma(x_i) = 1, \forall x_i$

Dar $1 \le ma(x_i) \le ma(x_r)$

$\sum ma(x_i) = n$

$\Rightarrow$ A e diagonalizabilă peste K

Th: $\forall$ matrice simetrică cu dim $M_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă peste $\mathbb{R}$.

~~Th. Orice~~

Ex:

1) Arătăm ca $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ nu e diagonaliz. peste $\mathbb{R}$

2) ——— // —— $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ este ——— // ———

Spunem că A) e diagonalizabilă

$x_1 \ldots x_n$ val propr

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$mg(x_1) \qquad mg(x_n)$

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & - & - & - \\ - & x_2 & - & - \\ - & - & x_3 & - \\ - & - & - & \ddots \\ - & - & - & x_n \end{pmatrix}$$

$$S = \Big( \underbrace{- - }_{\text{o bază în } V_{x}(A)} \Big| \underbrace{- \quad -}_{\text{o bază în } V_2(A)} \Big| - - \Big) \Rightarrow S^{-1}PS = D$$