(ip) (11)

- n se numește gradul lui f, se notează $\deg(f) = n$.
- $a_0, \dots, a_n$ se numesc coeficienții lui f
- a_n se numește coeficientul dominant al lui f
- a_0 se numește coeficientul (sau termenul) liber al lui f.

Dacă $f = 0$, polinomul nul, facem convenția $\deg(f) = -\infty$.

Cu aceste convenții de notație, două polinoame sunt egale dacă și numai dacă au același grad și coeficienții corespunzători (adică ai acelorași X^i) sunt egali.

Dacă $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ și $g = b_0 + b_1 X + \dots + b_p X^p$ (le scriem cu reprezentări de aceeași lungime, eventual completând cu niște coeficienți nuli), atunci $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + \dots + (a_p + b_p) X^p$.

În sfârșit, dacă $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ și $g = b_0 + b_1 X + \dots + b_m X^m$, atunci ip 12

$$fg = \sum_{h=0,m+n} \left(\sum_{i+j=h} a_i b_j \right) X^h .$$

Un polinom de forma $f=a$, cu $a \in R$, se numeste polinom constant (dacă $a \neq 0$, atunci $def(f)=0$, iar dacă $a=0$, atunci $deg(f)=-\infty$).

Am văzut că dacă R este comutativ, atunci $R[X]$ este comutativ.

<u>Propoziție</u>. Fie $f,g \in R[X]$. Atunci:

(i) $deg(f+g) \leq max\{deg(f), deg(g)\}$.

(ii) $deg(fg) \leq deg(f) + deg(g)$.

(iii) Dacă R este inel integru (adică $a,b \in R$, $ab=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a=0$ sau $b=0$), atunci

$$deg(fg) = deg(f) + deg(g).$$

<u>Demonstrație</u>. (i) Dacă $f=g=0$ este evident ($-\infty \leq -\infty$). Altfel, fie $p = max\{deg(f), deg(g)\}$, și atunci putem scrie $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ și $g = b_0 + b_1 X + \dots + b_p X^p$ (eventual completând cu coeficienți nuli dacă unul dintre f și g are grad $< p$).

(ip) (13)

Atunci $f+g=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\dots+(a_p+b_p)X^p$

are evident grad $\leq p$.

Observăm că inegalitatea poate fi strictă,

de exemplu dacă $a_p+b_p=0$.

(ii) Dacă $f=0$ sau $g=0$ este clar.

Altfel, fie $f=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$ cu $a_n\neq 0$ și

$g=b_0+b_1X+\dots+b_mX^m$, cu $b_m\neq 0$ (deci

$\deg(f)=n$ și $\deg(g)=m$). Atunci

$$fg=\sum_{k=\overline{0,m+n}}\Big(\sum_{i+j=k}a_ib_j\Big)X^k$$

$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)X+\dots+a_nb_mX^{n+m},$$

deci e clar că $\deg(fg)\leq n+m=\deg(f)+\deg(g)$.

Observăm că inegalitatea poate fi strictă

(de exemplu dacă $a_nb_m=0$).

(iii) Cu notația de la (ii) avem $a_nb_m\neq 0$,

deoarece $a_n\neq 0$ și $b_m\neq 0$, iar R e integru.

Atunci $\deg(fg)=n+m=\deg(f)+\deg(g)$.

(Asta cu presupunerea $f,g\neq 0$; dacă unul e 0, egalitatea e clară).

<u>Corolar</u> (i) Dacă R este inel integru, atunci R[X] este inel integru.

(ii) Dacă R este domeniu de integritate (adică inel comutativ și integru), atunci R[X] este domeniu de integritate.

Revenim acum la inelul $\mathcal{S}$. Păstrăm convenția făcută la P (polinoame), de a identifica $\varphi(R)$ cu R (deci $\varphi(a)$ cu a, pt. orice $a \in R$).

Dacă $f = (a_0, a_1, \dots) \in \mathcal{S}$, vom nota <u>formal</u>

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots, \text{ sau } f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i .$$

Atenție: aceasta este doar o convenție (o notație formală) și nu o sumă propriu-zisă, deoarece nu are sens să considerăm sume infinite într-un inel arbitrar.

$\mathcal{S}$ va fi renotată R[[X]] și o numim mulțimea seriilor formale în nedeterminata X, cu coeficienți în R.

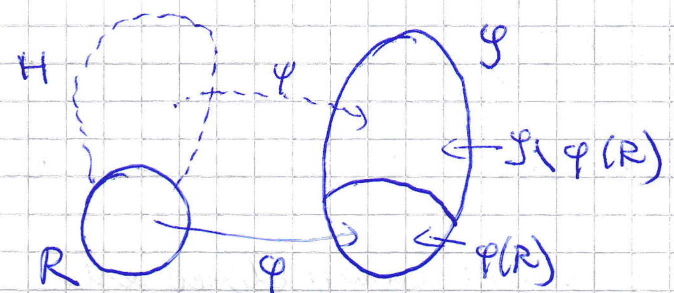
Un element $f=\sum_{i\geq 0} a_i X^i \in R[[X]]$ se numește serie formală, iar $(a_i)_i$ se numesc coeficienții lui f.

Un astfel de f se găsește în $R[X]$ (adică este polinom) dacă și numai dacă există $n\in\mathbb{N}$ pt. care $a_i=0$ pt. orice $i>n$; în acest caz $f=\sum_{0\leq i\leq n} a_i X^i$ (de data aceasta suma nu mai este formală, ci suma a $n+1$ elemente din inelul $R[X]$).

Această notație (formală) pt. elementele lui $R[[X]]$ este avantajoasă, deoarece înmulțirea este ușor de făcut (după același tipar ca la polinoame). Astfel, dacă $f=\sum_{i\geq 0} a_i X^i$, $g=\sum_{i\geq 0} b_i X^i \in R[[X]]$, atunci:

- $f=g \iff a_i=b_i$ pt. orice $i\in\mathbb{N}$
- $f+g=\sum_{i\geq 0}(a_i+b_i)X^i$
- $fg=\sum_{h\geq 0}\left(\sum_{i+j=h} a_i b_j\right)X^h$.

OBSERVAȚIE. Așa cum am explicat în capitolul "Reamintire din și completare la capitolul de inele și corpuri", pag. 9, putem modifica construcția lui $R[[X]]$ și $R[X]$ în așa fel încât scufundarea φ să fie înlocuită chiar de incluziune (adică să nu mai "identificăm" $\varphi(a)$ și a pt. orice $a \in R$). Aceasta se poate face astfel:



considerăm o mulțime H în bijecție cu $S \setminus \varphi(R)$ (fie $\psi : H \to S \setminus \varphi(R)$ o funcție bijectivă), astfel încât $H \cap R = \emptyset$. Atunci

$$f : R \cup H \to S, \quad f(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{dacă } t \in R \\ \psi(t), & \text{dacă } t \in H \end{cases},$$

este bijecție și structura de inel a lui S se transferă via f la o structură de inel pe $R \cup H$, în care R este subinel, iar f devine izomorfism de inele.

(ip) (17)

Avem $X \in S \setminus \varphi(R)$, deci $f^{-1}(X) = \psi^{-1}(X) \in H$.

Dacă notăm $f^{-1}(X) = \overline{X}$, rezultă din descrierea lui $P = R[X]$ și din faptul că f și f^{-1} sunt morfisme de inele, că

$$f^{-1}(R[X]) = \{ a_0 + a_1 \overline{X} + \dots + a_n \overline{X}^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in R \},$$

operațiile sunt în subinelul $f^{-1}(R[X])$ al lui $R \cup H$

iar adunarea și înmulțirea în inelul $f^{-1}(R[X])$ se fac exact la fel ca în $R[X]$, cu diferența că înlocuim peste tot X cu $\overline{X}$.

Putem privi atunci pe $f^{-1}(R[X])$ ca inel de polinoame, iar acum avem chiar $R \subset f^{-1}(R[X])$ (fără vreo identificare).

Similar, putem să privim elementele lui $R \cup H$ ca pe serii formale, scrise formal ca $\sum_{i \geq 0} a_i \overline{X}^i$, cu aceleași reguli de adunare și înmulțire ca în $R[[X]]$.

(ip) (18)

OBSERVAȚIE. Am văzut că în $R[X]$ scrierea unui polinom sub forma $a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$ este o numă obișnuită într-~~un~~ inel, în timp ce scrierea $f=\sum_{i\geq 0} a_iX^i$ a unei serii formale este doar formală (convențională).

Dacă R e inel comutativ, există o anumită topologie pe $R[[X]]$ în care $f=\sum_{i\geq 0} a_iX^i$ este limita șirului convergent

$a_0,\ a_0+a_1X,\ a_0+a_1X+a_2X^2, \dots, a_0+a_1X+\dots+a_nX^n, \dots$

de elemente din $R[[X]]$, în topologia respectivă (observăm că elementele șirului sunt chiar polinoame).

(ip) (19)

În continuare vom lucra cu inele de polinoame cu coeficienți în inele comutative; pt. a distinge mai ușor de cazul general (al unui inel R, nu neapărat comutativ), vom nota de obicei astfel de inele cu $A, B, C, \dots$

Exercițiu. Fie A un inel comutativ și $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in A[X]$. Să se arate că:

(i) f este nilpotent (în $A[X]$) $\Leftrightarrow$ $a_0, \dots, a_n$ sunt nilpotente (în A).

(ii) $f \in U(A[X]) \Leftrightarrow a_0 \in U(A)$ și $a_1, \dots, a_n$ sunt nilpotente.

(iii) f este divizor al lui zero în $A[X]$ (adică există $g \in A[X]$, $g \neq 0$, cu $fg = 0$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ există $a \in A$, $a \neq 0$, cu $af = 0$.

(iv) f este idempotent în $A[X] \Leftrightarrow a_0$ este idempotent în A și $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Exercițiu. Fie A un inel comutativ și

$f = \sum_{i\geq 0} a_i X^i \in A[[X]]$. Să se arate că:

(i) $f \in U(A[[X]]) \iff a_0 \in U(A)$.

(ii) Dacă f este element nilpotent în $A[[X]]$, atunci toate elementele $a_0, a_1, \dots$ sunt nilpotente în A. Este adevărat și reciproc?

(iii) f este idempotent în $A[[X]] \iff a_0$ este idempotent în A și $a_i = 0$ pt. orice $i \geq 1$.

Teoremă (Proprietatea de universalitate a inelelor de polinoame).

Fie A un inel comutativ, $A[X]$ inelul de polinoame în nedeterminata X cu coeficienți în A, și fie B un inel comutativ. Atunci pentru orice morfism de inele $\varphi: A \to B$ și orice element $b \in B$, există un unic morfism de inele $\overline{\varphi}: A[X] \to B$ care-l extinde pe φ (adică $\overline{\varphi}(a) = \varphi(a)$ pt. orice $a \in A$) și pt. care $\overline{\varphi}(X) = b$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & A[X] \arrow[d, dashed, "\overline{\varphi}"] \\ & B \end{tikzcd}$$