

# TUTORIAL TREI

## exercitiul 1

Decideți dacă următoarele aplicații sunt liniare:

a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $f(x, y) = (2x - y, y)$

b)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x, y) = 5xy$

c)  $f: \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$   $f(p(x)) = p'(x)$

d)  $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$   $f(A) = A + A^2$

## exercitiu 2

Fie  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z, t) = (3x + 2y, x + z - 2t, 5x + 2y + 2z - 4t)$$

a) Demonstrați că  $f$  este aplicație liniară și

scrieți matricea lui  $f$  în raport cu baza canonică.

b) Găsiți baze pentru  $\text{Ker } f$  și  $\text{Im } f$ . Decideți

dacă  $f$  este injectivă sau surjectivă.

### exercitiu 3

$$\text{Fie } U = \left\{ (2x - z, y + 2z, z, x + y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V = \left\{ (3x - y + 2z, x + y - 2z, 6y - 12z, x) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Determinați  $\dim_{\mathbb{R}} U$ ,  $\dim_{\mathbb{R}} V$  și găsiți o bază pentru acestea.

b) Determinați  $\dim_{\mathbb{R}} (U + V)$ .

Indicație:  $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$

### exercitiu 4

$$\text{Fie } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (3z - x + 9y, x - y, 2x + y + z)$$

Demonstrați că  $f$  este izomorfism liniar și calculați  $f^{-1}$ .

### exercitiu 5

- a) Demonstrați că aplicația  $T_n : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
suma unei matrici este aplicație liniară.
- b) Demonstrați că  $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid T_n(A) = 0\}$   
este subspațiu vectorial al lui  $M_n(\mathbb{R})$ .
- c) Găsiți o bază pentru  $V$ .

### exercitiu 6

Fie  $V, W$   $K$ -spații vectoriale.

Fie  $\mathcal{L}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ apl. liniară}\}$

Arătați că  $\mathcal{L}(V, W)$  este  $K$ -spațiu vectorial și  
determinați o bază pentru acesta.