Preambul Tutoriat 4

·De ce folosim $|f(x,y)-f(0,0)|$? Ce reprezintă și de ce trebuie să fie 0?

Pe scurt $|f(x,y)-f(0,0)|$ este o adaptare a def. care spune că f este continuă într-un punct dacă limita ei în acel punct este egală cu valoarea funcției în punctul respectiv. Deci:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

$$\downarrow$$

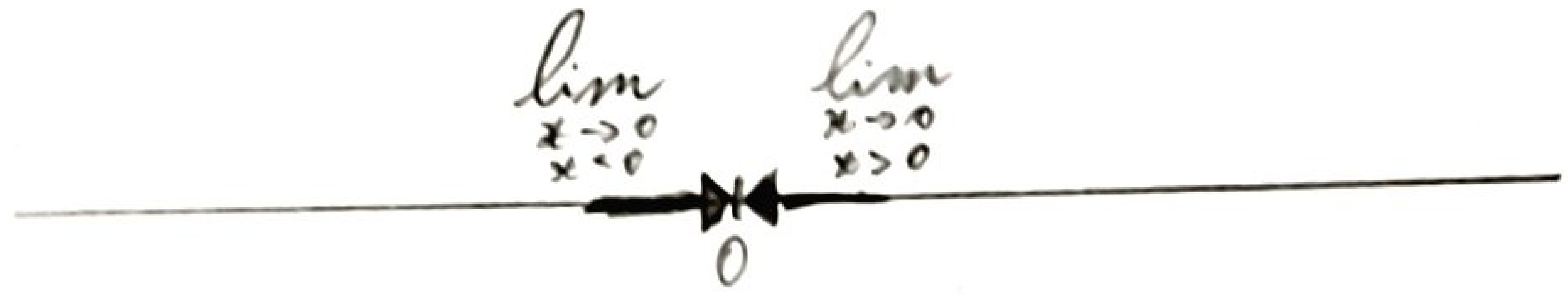
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(f(x,y)-f(0,0)\right) = 0$$

Suntem aproape. De ce modulul? Ce avem aici ar fi fost suficient pentru $\mathbb{R}$. Noi suntem în $\mathbb{R}^2$, adică în plan bidimensional. Deci putem avea situația când x și y se anulează între ele, astfel relația dând 0, chiar dacă nu ne aflăm în origine. Modulul măsoară de fapt distanța dintre punctul curent de pe grafic și origine, în cazul ăsta, adică locul unde ~~ar~~ trebui să se afle funcția.

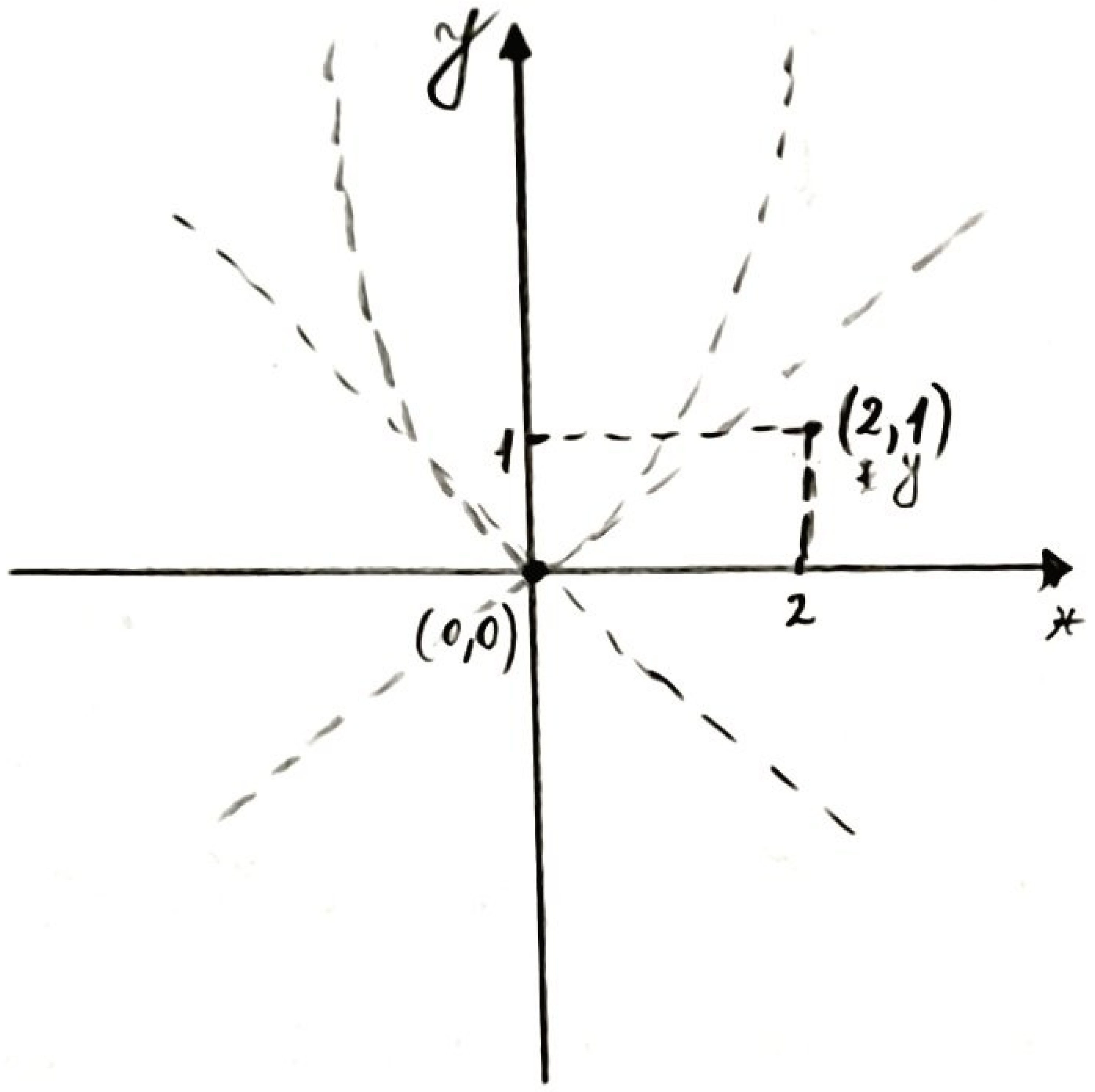
De ce trebuie să fie 0? Păi dacă această distanță tinde la 0 când te apropii de (0, 0), practic înseamnă că nu există nicio rupere a dreptei în punctul (0, 0), deci funcția este continuă.

PT 4 // De asemenea este utilă această formulă cu modul pentru Criteriul Cleștelui. Știm că $|...| \geq 0$. Noi în rezolvări folosim majorări, deci $\square \geq |...|$. Dacă noi dem că $\square$ este 0 obținem practic

$$0 \leq |...| \leq 0 \quad , \text{deci } |...| = 0$$



$\mathbb{R}$ (un singur drum)



$\mathbb{R}^2$ (mai multe drumuri)

Tutoriat 4

1) Rezolvarea seriei date pe grup:

· Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (n!)^3}{(1+1^3)(1+2^3)\cdot \ldots \cdot(1+n^3)}, \text{ unde } a>0.$$

Sol:

Aplic Criteriul Raportului.

Notez seria cu x_n

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}\left((n+1)!\right)^3}{(1+1^3)(1+2^3)\cdot\ldots\cdot(1+n^3)(1+(n+1)^3)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(1+1^3)(1+2^3)\cdot\ldots\cdot(1+n^3)}{a^n\cdot(n!)^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{a^n}\cdot\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^3 \cdot \frac{\cancel{(1+1^3)}\cancel{(1+2^3)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(1+n^3)}}{\cancel{(1+1^3)}\cancel{(1+2^3)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(1+n^3)}\cdot(1+(n+1)^3)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a\cdot(n+1)^3\cdot\frac{1}{1+(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} a\cdot \underbrace{\frac{(n+1)^3}{1+(n+1)^3}}_{\to 1} = a$$

Conform Criteriului Raportului:

- Dacă $a<1$ (i.e. $a\in(0,1)$), seria converge
- Dacă $a>1$ (i.e. $a\in(1,\infty)$), seria diverge
- Dacă $a=1$ crit. nu decide.

Fie $a=1 \Rightarrow x_n = \frac{1^n (n!)^3}{(1+1^3)(1+2^3)\cdot\ldots\cdot(1+n^3)} = \frac{(n!)^3}{(1+1^3)(1+2^3)\cdot\ldots\cdot(1+n^3)}$

Aplic Criteriul Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n!)^3}{(1+1^3)(1+2^3)\cdot\ldots\cdot(1+n^3)}\cdot \frac{(1+1^3)(1+2^3)\cdot\ldots\cdot(1+n^3)(1+(n+1)^3)}{[(n+1)!]^3} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1+(n+1)^3}{(n+1)^3}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1+(n+1)^3-(n+1)^3}{(n+1)^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^3} = 0 < 1 \Rightarrow$$ Conform Crit Raabe-Duhamel

x_n pt $a = 1$ diverge.

Concluzionăm:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \begin{cases} \text{converge pt } a \in (0,1) \\ \text{diverge pt } a \in [1,\infty) \end{cases}$$

2) Studiați continuitatea funcției f

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0;0) \end{cases}$

<u>Sol:</u>

· f continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare)

· studiem continuitatea lui f în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\substack{\leq 1 \text{ pt că} \\ x^2 \leq x^2+y^2}} \cdot |x|$$

$$\leq 1 \cdot |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f$ cont în $(0,0)$ $\square$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 y^5}{x^{10}+y^{10}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol:

- f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu funcții elementare)
- studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^6 y^5}{x^{10}+y^{10}} - 0 \right| = \left| \frac{x^5 y^5}{x^{10}+y^{10}} \right| \cdot |x|$$

Vom folosi ineg. $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$

De unde vine? De la o inegalitate fundamentală: Inegalitatea Mediilor, adică M. Aritm $\geq$ M. geom pt 2 numere non-negative. ~~Dar~~ Aceasta arată astfel:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$$

Dacă înlocuim x cu a^2 și y cu b^2 $\Rightarrow$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2|ab|$$

Deci pentru inegalitatea aflată înlocuim a cu x^5 și b cu y^5:

$$(x^5)^2 + (y^5)^2 \geq 2|x^5 y^5| \Rightarrow x^{10} + y^{10} \geq 2|x^5 y^5|$$

$$\Rightarrow 1 \geq 2 \frac{|x^5 y^5|}{x^{10}+y^{10}} \Rightarrow \frac{|x^5 y^5|}{x^{10}+y^{10}} \leq \frac{1}{2}$$

Revenind la relația noastră, am dem. că:

$$\frac{|x^5 y^5|}{x^{10}+y^{10}} \cdot |x| \leq \frac{1}{2} \cdot |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f$ cont. în $(0,0)$ $\square$