Probabilități

miercuri

Dau cu banul
X

$$\begin{cases} \text{cap} \to 1 \\ \text{pajură} \to 0 \end{cases}$$

$$P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$$

"expectation" (media variabilei)

ex2. Zar : Y este valoarea zarului

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot P(y=1) + 2 \cdot P(y=2) + 3\, P(y=3) +$$
$$+ 4\, P(y=4) + 5\, P(y=5) + 6\, P(y=6) =$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \ldots + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

ex3: Dau de n ori cu banul

În medie de câte ori avem "cap"?

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad X_i = a\ i\text{-a aruncare},\ i = \overline{1,n}$$

prima aruncare

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \ldots + \mathbb{E}[X_n] =$$
$$= n \cdot \frac{1}{2}$$

Secretary problem

n candidați la un job. Vrem să angajăm cel mai bun candidat. Candidații vin în ord aleatore. Dacă c_i (candidatul i) este mai bun decât cel angajat, îl angajăm pe c_i.

Care este nr. mediu de angajări?

BAU cică BAU BAU

$$X_1 = \begin{cases} 0 & \text{nu angaj} \\ 1 & \text{angajăm} \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$X \leftarrow$ câți candidați angajăm

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_n] =$$

$$= P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1) + \dots + P(X_n = 1)$$

$$P(X_1 = 1) = 1$$

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$$

$$E[X] = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \simeq O(\log n)$$

Birthday paradox

n - studenți

$z = 365$

Câte perechi de studenți cu aceași zi de naștere avem în medie?

X - nr total perechi de studenți cu ac. zi de naștere

$$Y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nu} \\ 1 & \text{std. } i \text{ și } j \text{ au ac. zi de naștere} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Y_{ij}$$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Y_{ij}\right] = \sum \sum E[Y_{ij}] =$$

$$= \sum \sum P(Y_{ij} = 1)$$

$$P(Y_{ij}=1) = \sum_{k=1}^{365} P\left(\begin{array}{l} i \text{ să se fi născut} \\ \text{în ziua } k \end{array} \& \begin{array}{l} j \text{ să fie} \\ n\text{.....} \end{array}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{365} P(i \text{ născ. în ziua } k) \cdot P(j \text{ născ în ziua } k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{365} \frac{1}{365} \cdot \frac{1}{365} = \frac{1}{365}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(Y_{ij}=1) = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}$$

Quicksort (A, l, r)

```
{ if (l < r)
   { p = partition (A, l, r)
     Quicksort (A, l, p)
     Quicksort (A, p+1, r)
   }
  Quicksort (A, 1, n)
}
```

$$T(n) = T(\text{stânga}) + T(\text{dreapta}) + O(n)$$

$$= 2\,T(n/2) + O(n)$$

$$= O(n \log n)$$ cazul favorabil

$$T(n) = T(n-1) + O(n) = O(n^2)$$

cazul defavorabil

numărul mediu de comparații în Quicksort când pivotul e ales aleatoriu

Notăm numerele $z_1 \dots z_n$ unde $z_1 < z_2 \le \dots \le z_n$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & z_i \text{ este comparat cu } z_j \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$$ total de comparații făcut de algoritm

$$E[X] = \sum \sum E[X_{ij}] = \sum \sum P(X_{ij} = 1)$$

$$P(X_{ij} = 1) = \frac{2}{j-i+1}$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1} \frac{2}{j-i+1}$$

$k = j - i$

$$E[X] = \sum \sum \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} = O(n \log n)$$