Funcții implicite.

$x^2+y^2=1$, $y_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\quad y_1(0)=1$

$y_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$ $\quad y_2(0)=-1$

$x^3+xy+\cos(xy)-1=0$

? există $y=y(x)$ a.î. $y(0)=0$

$x+xyz+e^z-\cos(x+z)=0$? există $z=z(x,y)$

$$\begin{cases} x+y+e^{xz}-\cos xz=0 \\ xy+\ln(x^2z^2+1)=0. \end{cases}$$

? $z=z(x)$

$y=y(x)$.

Fie $F : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$, $F(x_0, y_0) = 0$

Spunem că ecuatia $F(x,y) = 0$ defineste implicit pe y în functie de x dacă există $U \in \mathcal{V}(x_0)$ există $V \in \mathcal{V}(y_0)$ a.î $\forall x \in U$, $\exists!\, y \in V$ a.î. $F(x,y) = 0$. Definim $f(x)$ ca fiind acest unic y si obtinem o functie $f : U \to V$ a.î.

$F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in U$. si $f(x_0) = y_0$

Se spune că f este definită implicit de ecuatia $F(x,y) = 0$ în jurul (sau intr-o vecinătate a) lui (x_0, y_0)

Teoremă 1 Fie $F : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$ a.î.

i) F este de clasă C^1 pe D.

ii) $F(x_0, y_0) = 0$

iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Atunci există o vecinătate deschisă U a lui x_0, o vecinătate deschisă V a lui y_0 și o unică funcție $f : U \to V$ a.î.

1) $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in U$ și $f(x_0) = y_0$. În plus.

2) f este de clasă C^1 și
$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

3) dacă F este de clasă C^k atunci f este de clasă C^k

Dem. Pp. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.

$\frac{\partial F}{\partial y}$ continuă pe $D \Longrightarrow \exists A \in \mathcal{V}(x_0), \exists B \in \mathcal{V}(y_0)$ cu $A \times B \subset D$

și a.î. $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0, \forall (x,y) \in A \times B$.

Funcția

$B \ni y \longrightarrow F(x_0, y)$ este strict crescătoare pt că $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) > 0$.

Avem. $F(x_0, y_0) = 0$,

Fie $\alpha, \beta \in B$ a.i. $\alpha < y_0 < \beta$ și $[\alpha, \beta] \subset B$.

Atunci $F(x_0, \alpha) < 0$ și $F(x_0, \beta) > 0$. Fie $V_0 = (\alpha, \beta)$.

Fie U_0 o vecinătate deschisă a lui x_0 a.î.

$F(x,\alpha)<0$ și $F(x,\beta)>0$, pt. orice $x\in U_0$

Pt $x\in U_0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)>0$, $\forall\, y\in(\alpha,\beta)=V_0$

$\Longrightarrow$ $V_0\ni y\longmapsto F(x,y)$ strict crescatoare. cont.

$F(x,\alpha)<0$, $F(x,\beta)>0$. $\Big|\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists!\ y\in\underset{V_0}{\underset{\parallel}{(\alpha,\beta)}}$ a.î. $F(x,y)=0$.

obtinem o functie $f:U_0\to V_0$ care asociaza lui $x_0\in U_0$ unicul y_0 de mai sus

Obs ca $f(U_0)\subset V_0$.

Din cele de mai sus, rezultă că dacă V este o vecinătate oarecare a lui y_0 există $U \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(U) \subset V$ și deci f este continuă în x_0.

Fie $a \in U_0$ și $b = f(a) \in V_0$. Funcția $F(x,y)$ verifică cond. teoremei pt (a,b) în loc (x_0,y_0). Atunci există $U_1 \subset U_0$ și $V_1 \subset V_0$, $U_1 \in \mathcal{V}(a)$, $V_1 \in \mathcal{V}(b)$ și $g: U_1 \to V_1$ a.î. $g(a) = b$, $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in U_1$ și g este cont. în a. Din unicitatea lui g rezultă că $f(x) = g(x)$, $\forall x \in U_1$. Deci f este continuă în a. Cum a a fost ales arbitrar rezultă că f este cont pe U_0.

Lemă Fie $F : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 și $a = (x_0, y_0)$, $b = (x_1, y_1)$ din D a.î. $[a,b] \subset D$. Atunci există $(\xi, \eta) \in [a,b]$ a.î.

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta)(x_1 - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta)(y_1 - y_0)$$

$[a,b] = \{ tb + (1-t)a \mid t \in [0,1] \}$ - segmentul determ. de a și b.

Dem. $c : [0,1] \to D$, $c(t) = tb + (1-t)a = (tx_1 + (1-t)x_0, \; ty_1 + (1-t)y_0)$

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = F(c(t))$ Aplicam T. Lagrange și atunci există $\theta \in (0,1)$ a.î. $g(1) - g(0) = g'(\theta) \cdot (1 - 0) = g'(\theta)$

$$g'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(c(t)) \cdot (x_1 - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(c(t)) \cdot (y_1 - y_0).$$

Fie $(\xi, \eta) = c(\theta)$. Atunci avem:

$$g(1) - g(0) = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta) \cdot (x_1 - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta)(y_1 - y_0).$$

Revenim la dem. Teoremei:

2) $f: U_0 \to V_0$ cont.: $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in U_0$, $f(x_0) = y_0$.

Fie $x \in U_0$. Pt t suficient de mic, $x+t \in U_0$ și $f(x+t) \in V_0$

Din Lemă, rezultă că există (ξ_t, η_t) între $(x, f(x))$ și $(x+t, f(x+t))$

a.î.

$$\underbrace{F(x+t, f(x+t))}_{=0} - \underbrace{F(x, f(x))}_{=0} = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi_t, \eta_t) \cdot t + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi_t, \eta_t)(f(x+t) - f(x))$$

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi_t, \eta_t)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi_t, \eta_t)}.$$

Dacă $t \to 0$ atunci $(\xi_t, \eta_t) \to (x, f(x))$ (pt că f continuă

și deci există

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

$$\parallel$$

Așadar f este deriv. în x și $f'(x)$

3) prin inducție

<u>Exercițiu</u> Arătați că ecuația $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$ definește implicit funcția $y=y(x)$ într-o vecinătate a lui $(1,1)$ și calculați $y'(1)$ și $y''(1)$.

<u>Rezolvare</u>. $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x,y)=x^2-2xy+y^2+x+y-2$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x-2y+1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=-2x+2y+1$$

i) F este de clasă C^2

ii) $F(1,1)=0$

iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=1\neq 0$.

Atunci există o vecinătate deschisă U a lui 1, există o vecinătate deschisă V a lui 1 și o unică funcție $y = y(x)$, $y: U \to V$ de clasă C^2

$y(1) = 1$ și $F(x, y(x)) = 0 \iff x^2 - 2xy(x) + y(x)^2 + x + y(x) - 2 = 0$
$\forall x \in U$

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = -\frac{2x - 2y(x) + 1}{-2x + 2y(x) + 1}$$

Pt $x = 1 \xRightarrow{y(1)=1} y'(1) = -\frac{2 - 2y(1) + 1}{-2 + 2y(1) + 1} = -1$

Sau (fără formulă), derivăm în raport cu x relația:

$$x^2 - 2xy(x) + y(x)^2 + x + y(x) - 2 = 0, \quad \forall x \in U$$

Obținem:

$$2x - 2y(x) - 2xy'(x) + 2y(x)y'(x) + 1 + y'(x) = 0, \quad \forall x \in U.$$

$$2x - 2y(x) + 1 + y'(x)\left(-2x + 2y(x) + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{2x - 2y(x) + 1}{-2x + 2y(x) + 1}, \quad \forall x \in U$$

$$y''(x) = -\frac{\left(2 - 2y'(x)\right)\left(-2x + 2y(x) + 1\right) - \left(2x - 2y(x) + 1\right)\left(-2 + 2y'(x)\right)}{\left(-2x + 2y(x) + 1\right)^2}$$

$$y(1) = 1, \; y'(1) = -1 \Rightarrow y''(1) = -8$$

Teorema 2 Fie $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ și $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n, y_0) \in D$.

i) F de clasă C^1

ii) $F(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n, y_0) = 0$

iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n, y_0) \neq 0$

Atunci există o vecinătate deschisă U a lui $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, există o vecinătate deschisă V a lui y_0 și o unică funcție $f : U \to V$ a.î.

1) $f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) = y_0$ și $F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$, pt orice $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$

2) f este de clasă C^1 și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots x_n, f(x_1, \dots x_n))} \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$$

3) dacă F este de clasă C^k atunci f este de clasă C^k

Teorema 3 (teorema funcțiilor implicite, caz general)

Fie $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ deschisă și $(x_0, y_0) \in D$ unde

$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, $y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^m)$ și

$F = (F_1, F_2, \dots, F_m) : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a.î.

i) F de clasă C^1

ii) $F(x_0, y_0) = 0$

iii) $\dfrac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0$

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

Atunci există U o vecinătate deschisă a lui x_0, există V o vecinătate deschisă a lui y_0 și o unică funcție vectorială $f=(f_1, f_2, \dots, f_m): U \longrightarrow V$ a.î.

1) $f(x_0)=y_0$. și $F(x, f(x))=0$, $\forall x \in U$

$\left(F_j(x_1, \dots x_n, f(x_1, \dots, x_n))=0, \quad j=1,2,\dots,m\right)$

$f_j(x_0^1, \dots, x_0^n)=y_0^j$

2) f este de clasă C^1 și

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(x_i, y_2, \dots, y_m)}}{\dfrac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1, x_i, y_3, \dots, y_m)}}{\dfrac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}}$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = - \frac{\dfrac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_{m-1}, x_i)}}{\dfrac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}}$$

3) dacă F este de clasă C^k atunci $f_1, f_2, \dots, f_m$ sunt de clasă C^k.

Demonstrația se face prin inducție după m.

Să vedem cum se demonstrează teorema dacă $m=n=2$.

$$\begin{cases} F(x,y,z,w)=0 \\ G(x,y,z,w)=0 \end{cases}.$$

Propoziție.

Fie $D\subset\mathbb{R}^{2+2}$ deschisă $(x_0,y_0,z_0,w_0)\in D$, $F,G:D\to\mathbb{R}$ a.î.

(i) F și G sunt de clasă C^1

(ii) $F(x_0,y_0,z_0,w_0)=0$ și $G(x_0,y_0,z_0,w_0)=0$

(iii) $\dfrac{D(F,G)}{D(z,w)}(x_0,y_0,z_0,w_0)\neq 0.$ $\left(\dfrac{D(F,G)}{D(z,w)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial w}\\ \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial w}\end{vmatrix}\right)$

Atunci există o vecinătate deschisă U_0 a lui (x_0,y_0), există o vecinătate deschisă V_0 a lui (z_0,w_0) și o unică funcție vectorială $(z,w):U_0\to V_0$ $z=z(x,y)$, $w=w(x,y)$

(1) $z(x_0, y_0) = z_0$, $w(x_0, y_0) = w_0$ și pt orice $(x,y) \in U_0$ avem

$$F(x, y, z(x,y), w(x,y)) = 0, \quad G(x, y, z(x,y), w(x,y)) = 0$$

(2) funcțiile f și g sunt de clasă C^1 și

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{D(F,G)}{D(x,w)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}} ; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{D(F,G)}{D(y,w)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}} ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{\frac{D(F,G)}{D(z,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}$$

(3) Dacă F și G sunt de clasă C^k atunci f și g sunt de clasă C^k

Demonstrație. Deoarece

$$\frac{D(F,G)}{D(z,w)}(x_0,y_0,z_0,w_0)=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0,w_0) & \frac{\partial F}{\partial w}(x_0,y_0,z_0,w_0) \\ \frac{\partial G}{\partial z}(x_0,y_0,z_0,w_0) & \frac{\partial G}{\partial w}(x_0,y_0,z_0,w_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1)$$

rezultă că $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0,w_0)\neq 0$ sau $\frac{\partial F}{\partial w}(x_0,y_0,z_0,w_0)\neq 0$.

Să presupunem că $\frac{\partial F}{\partial w}(x_0,y_0,z_0,w_0)\neq 0$.

Din Teorema 2, rezultă că există o vecinătate deschisă $U\times Z$ a lui (x_0,y_0,z_0) o vecinătate deschisă W_0 a lui w_0 și o unică funcție

$$\varphi: U\times Z \longrightarrow W_0,$$ de clasă C^1

a. î $\varphi(x_0, y_0, z_0) = w_0$,

$F(x, y, z, \varphi(x,y,z)) = 0$, $\forall (x,y,z) \in U \times Z$ și în plus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\varphi(x,y,z))}{\frac{\partial F}{\partial w}(x,y,z,\varphi(x,y,z))}, \quad \forall (x,y,z) \in U \times Z$$

Fie $H : U \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$H(x,y,z) = G(x,y,z,\varphi(x,y,z))$$

Atunci H este de clasă C^1 și $H(x_0, y_0, z_0) = 0$. Cum

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial w} \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial w}}$$

din (1) rezultă că $\frac{\partial H}{\partial w}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Atunci există $U_0 \subset U$ vecinătate deschisă a lui (x_0, y_0), există $Z_0 \subset Z$ o vecinătate deschisă a lui z_0 și o unică funcție $z : U_0 \to Z_0$ de clasă C^1 a.î.

$$H(x, y, z(x,y), \varphi(x, y, z(x,y))) = 0, \forall (x,y) \in U_0$$

și $z(x_0, y_0) = z_0$.

Fie $w : U_0 \to W_0$, $w(x,y) = \varphi(x, y, z(x,y))$

Așadar există o unică pereche de funcții

$$(z, w) : U_0 \to V_0 := Z_0 \times W_0 \text{ de clasă } C^1 \text{ a.î.}$$

$$\begin{cases} F(x,y,z(x,y),w(x,y))=0 \\ G(x,y,z(x,y),w(x,y))=0 \end{cases}, \ \forall (x,y)\in U_0$$

și $z(x_0,y_0)=z_0$, $w(x_0,y_0)=w_0$. Deoarece z și w sunt de clasă C^1, derivând în raport cu x obținem

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

Cu regula lui Cramer

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,w)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}.$$

Derivând în raport cu y obținem

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

de unde,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(y,w)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,w)}}.$$

Ex. Arătați că sistemul $\begin{cases} u+v-x-y=0 \\ ux+vy-1=0 \end{cases}$

definește într-o vecinătate a pct. $(1,0,1,0)$ funcțiile implicite $u(x,y)$ și $v(x,y)$ și calc. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ în $(1,0)$

Soluție. $F, G: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(F,G): \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$F(x,y,u,v) = u+v-x-y$, $G(x,y,u,v) = ux+vy-1$

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y-x$$

i) F, G de clasă C^1

ii) $F(1,0,1,0)=0$, $G(1,0,1,0)=0$

iii) $$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}(1,0,1,0) = 0-1=-1 \neq 0.$$

Atunci există U o vecinătate deschisă a lui $(1,0)$ există V o vecinătate deschisă a lui $(1,0)$ și o unică pereche de funcții $(u(x,y), v(x,y))$ cu $(u,v): U \longrightarrow V$ de clasă C^1, a.î.

$u(1,0)=1$, $v(1,0)=0$, și pt orice $(x,y) \in U$

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases} \iff \begin{cases} u(x,y)+v(x,y)-x-y=0 \\ x\cdot u(x,y)+y\,v(x,y)-1=0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(x,v)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ u & y \end{vmatrix}}{y-x} = \frac{y+u}{y-x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{y+u(x,y)}{y-x}, \forall (x,y) \in D$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(y,v)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ v & y \end{vmatrix}}{y-x} = \frac{y+v}{y-x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{y+v(x,y)}{y-x}, \forall (x,y) \in D$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(u,x)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & u \end{vmatrix}}{y-x} = -\frac{u+x}{y-x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{u(x,y)+x}{y-x}, \forall (x,y) \in D$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(u,y)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & v \end{vmatrix}}{y-x} = -\frac{v+x}{y-x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{v(x,y)+x}{y-x}, \ \forall (x,y) \in D$$

Altfel în loc să folosim formulele, derivăm în raport cu x și y relațiile

$$\begin{cases} u(x,y)+v(x,y)-x-y=0 \\ x\,u(x,y)+y\,v(x,y)-1=0 \end{cases} \quad \forall (x,y) \in U$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)-1=0. \\ u(x,y)+x\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)=0. \end{cases} \quad \forall (x,y) \in U$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{u(x,y)+y}{y-x} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= -\frac{u(x,y)+y}{y-x} \end{aligned}\right. , \forall (x,y) \in D .$$

Dacă derivăm în raport cu y obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - 1 = 0 \\ x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + v(x,y) + y\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} , \forall (x,y) \in U$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{v(x,y)+y}{y-x} , \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -\frac{x+v(x,y)}{y-x} , \quad \forall (x,y) \in D .$$

Deci $\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = \frac{u(1,0)+0}{-1} = \frac{1+0}{-1} = -1$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) = 1$$

Dacă trebuie să calculăm derivatele de ordin 2 procedăm astfel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+u(x,y)}{y-x}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot(y-x) - (y+u(x,y))\cdot(-1)}{(y-x)^2} = \frac{\frac{y+u(x,y)}{y-x}\cancel{(y-x)}+u(x,y)+y}{(y-x)^2}$$

$$= \frac{2(y+u(x,y))}{(y-x)^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,0) = \frac{2(0+1)}{(-1)^2} = 2.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+v(x,y)}{y-x}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\cdot(y-x) - (y+v(x,y))\cdot(-1)}{(y-x)^2} = \frac{-\frac{u(x,y)+x}{\cancel{y-x}}\cdot \cancel{(y-x)} + y + v(x,y)}{(y-x)^2}$$

$$= \frac{-u(x,y)-x+v(x,y)+y}{(y-x)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}(1,0) = -2$$

Analog se calculează $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$.

Exerciții

1) Arătați că sistemul

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2=0 \end{cases}$$

definește implicit funcțiile $x=x(z)$ și $y=y(z)$, într-o vecinătate a punctului $(1,0,-1)$ și calculați $x'(-1)$, $y'(-1)$, $x''(-1)$, $y''(-1)$.

2) Arătați că ecuația $xy+yz+z^3x=1$ definește implicit funcția $z=z(x,y)$ într-o vecinătate a pct. $(1,1,0)$ și calculați $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$.

3) Determinați punctele de extrem local ale funcției $y=y(x)$ definite implicit de ecuația

$$x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1=0.$$

4) Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x^2u^2+xzv+y^2=0 \\ yzu+xyv^2-3x=0 \end{cases}$$

definește implicit funcțiile $u=u(x,y,z)$ și $v=v(x,y,z)$ într-o vecinătate a pct $(u,v,x,y,z)=(0,1,3,3,-3)$ și calculați derivatele parțiale de ordinul unu și ordinul doi ale funcțiilor $u(x,y,z)$ și $v(x,y,z)$ în $(3,3,-3)$