Tutoriat 1 - Problem Set

Algebra I team

October 2025

1 Probleme

Exercițiul 1 (Test seminar 2020)**.** *Fie $f : A \to B$ o funcţie bijectivă. Arătaţi că există o bijecţie*

$$\mathrm{Hom}(A, A) \cong \mathrm{Hom}(B, B).$$

Exercițiul 2 (Examen 2021)**.** *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Arătaţi că f nu este surjectivă şi calculaţi $f^{-1}\big((1, 3)\big)$ şi $f\big((1, 3)\big)$, unde $(1, 3)$ este intervalul deschis din $\mathbb{R}$.*

Exercițiul 3 (Restanta 2025)**.** *Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$f(x) = |x^2 - 8x + 8|.$$

a. Arătaţi că funcţia f nu este injectivă.

b. Determinaţi $f([0, 5])$ şi $f^{-1}([1, 8])$.

Exercițiul 4. *Daţi exemplu de două funcţii $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât*

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Exercițiul 5. *Pentru fiecare dintre mulţimile $M = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, daţi exemplu de funcţie $f : M \to M$ care este*

a. injectivă, dar nu surjectivă;

b. surjectivă, dar nu injectivă.

Exercițiul 6. *Pentru fiecare din funcțiile de mai jos, determinați dacă sunt injective, surjective sau bijective. Pentru cele injective (respectiv surjective) calculați și o retractă (respectiv secțiune), iar pentru cele bijective calculați și inversa:*

a. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \big(2x + 1,\ 2y + x^2\big).$

b. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(m) = \begin{cases} 0, & \textit{dacă } m \leq 5, \\ m - 5, & \textit{dacă } m \geq 6. \end{cases}$

c. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$

d. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(n) = 3n + 2.$

e. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \textit{dacă } n \textit{ este par}, \\ -\dfrac{n-1}{2}, & \textit{dacă } n \textit{ este impar}. \end{cases}$

Exercițiul 7. *Fie* $f : A \to B$ *o funcție și definim*

$$f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), \qquad f_*(X) := f(X),$$
$$f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), \qquad f^*(Y) := f^{-1}(Y).$$

Sunt echivalente afirmațiile:

a. f *este injectivă;*

b. f_* *este injectivă;*

c. $f^* \circ f_* = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A)}$*;*

d. f^* *este surjectivă;*

e. $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$, *pentru orice* $X_1, X_2 \subseteq A$*;*

f. $f(A \setminus X) \subseteq B \setminus f(X)$, *pentru orice* $X \subseteq A$.

Exercițiul 8. *În ipotezele și cu notațiile de la exercițiul precedent, sunt echivalente afirmațiile:*

a. f *este surjectivă;*

b. f_* *este surjectivă;*

c. $f_* \circ f^* = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(B)}$*;*

d. f^* *este injectivă;*

e. $B \setminus f(X) = f(A \setminus X)$, *pentru orice* $X \subseteq A$.

Exercițiul 9. * *Fie* X, Y, Z *trei mulțimi. Atunci funcția*

$$\alpha : \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y, Z)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X \times Y, Z),$$

definită prin

$$\alpha(f)(x, y) := f(x)(y),$$

este bijectivă.

Exercițiul 10. * *Fie* X *o mulțime. Atunci funcția*

$$\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, \{0, 1\}),$$

definită prin

$$\varphi(A)(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A, \\ 0, & \text{dacă } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

este bijectivă.

Pentru orice $A \subseteq X$, $\varphi(A)$ *este funcția caracteristică a lui* $A \subseteq X$.