Mulțimi elementare

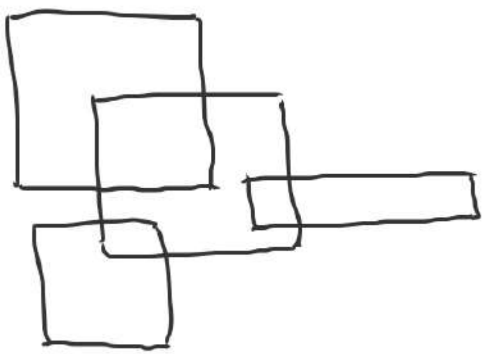
<u>Definiție</u> O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ s.n. elementară dacă se poate scrie ca o reuniune finită de intervale mărginite din $\mathbb{R}^n$

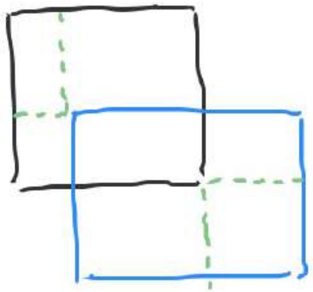
$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \{ A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ elementară} \}$$

Mulțimea vidă $\emptyset$ este interval din $\mathbb{R}^n$ și deci $\emptyset \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

($I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, I_j intervale din $\mathbb{R}$, I - interval din $\mathbb{R}^n$)

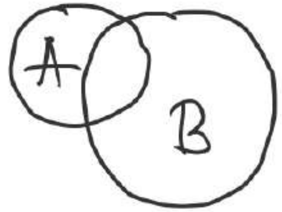
$\mathbb{R}^2$





Definiție. Dacă X este o mulțime nevidă, o familie $\mathcal{A}$ de submulțimi ale lui X s.n. **inel** dacă pt $\forall A, B \in \mathcal{A}$

$A \cup B \in \mathcal{A}$ și $A \setminus B \in \mathcal{A}$.



Obs. Dacă $\mathcal{A}$ este inel și $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

$$A \cap B = A \cup B \setminus \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A) \big)$$

Propoziție. 1) Dacă $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ atunci E se poate scrie ca o reuniune finită de intervale din $\mathbb{R}^n$ disjuncte două câte două, adică există $I_1, I_2, \ldots, I_p$ interv. din $\mathbb{R}^n$ a.î.

$E = \bigcup_{j=1}^{p} I_j$ și $I_j \cap I_k = \emptyset$, $\forall j \neq k$.

2) $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ este inel

Definiție Fie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un inel. O aplicație $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ s.n. măsură finit aditivă dacă

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ cu } A \cap B = \emptyset.$$

Definiție Fie $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Dacă $E = \bigcup_{j=1}^{p} I_j$, I_j intervale cu $I_j \cap I_k = \emptyset$, $\forall j \neq k$, definim

$$\lambda(E) := \sum_{j=1}^{p} vol(I_j)$$

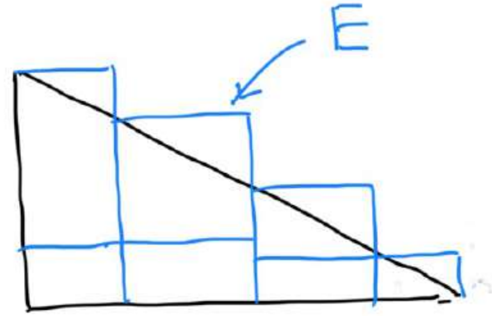
Se poate arăta că definiția de mai sus este corectă, adică dacă

$$E = \bigcup_{j=1}^{p} I_j \quad I_j \text{ intervale}, \ I_j \cap I_k = \emptyset \ j \neq k$$

$$E = \bigcup_{l=1}^{m} Y_l, \ Y_l \text{ intervale } Y_l \cap Y_s = \emptyset, \ l \neq s$$

atunci $$\sum_j vol(I_j) = \sum_l vol(Y_l).$$

<u>Propoziție</u>. $\lambda : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty)$ definită mai sus este o măsură finit aditivă pe $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.



<u>Mulțimi măsurabile Jordan</u>

$A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(E) \mid E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),\ A \subset E\}$$

$$\lambda_*(A) = \sup\{\lambda(E) \mid E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),\ E \subset A\}$$

$\lambda^*(A)$ – măsura Jordan exterioară a lui A

$\lambda_*(A)$ – măsura Jordan interioară a lui A.

Evident

$$\lambda_*(A) \leq \lambda^*(A)$$

Definiție O mulțime mărginită $A \subset \mathbb{R}^n$ se numește măsurabilă Jordan dacă $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$. Numărul

$$\lambda(A) := \lambda_*(A) = \lambda^*(A)$$

se numește măsura Jordan a mulțimii A.

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \{ A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ măsurabilă Jordan} \}$$

Obs. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ pt că $\lambda_*(E) = \lambda^*(E) = \lambda(E)$

Exerciții 1) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2) $B = \{ (x,y) \mid 0 \le x, y \le 1,\ x, y \in \mathbb{Q} \} \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. $\lambda_*(B) = 0$

$\lambda^*(B) = 1$

Propoziție. Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mărginite. Atunci

1) $\lambda^*(A\cup B) + \lambda^*(A\cap B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$

2) $\lambda_*(A\cup B) + \lambda_*(A\cap B) \geq \lambda_*(A) + \lambda_*(B)$

3) $A\subset B$, $\lambda^*(B\setminus A) \leq \lambda^*(B) - \lambda_*(A)$, $\lambda_*(B\setminus A) \geq \lambda_*(B) - \lambda^*(A)$

Dem. 1) Fie $E, F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A\subset E$, $B\subset F \Rightarrow A\cup B\subset E\cup F$

$A\cap B \subset E\cap F$

$E\cup F, E\cap F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \lambda^*(A\cup B) + \lambda^*(A\cap B) \leq \lambda(E\cup F) + \lambda(E\cap F) = \lambda(E) + \lambda(F)$

$$\lambda^*(A\cup B) + \lambda^*(A\cap B) \leq \inf\{\lambda(E)+\lambda(F) \mid E,F\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n), A\subset E, B\subset F\}$$

$$\| $$

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Propoziție. $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ este un inel și $\lambda : \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty)$ este o măsură finit aditivă.

dem. $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^*(A\cup B)+\lambda^*(A\cap B) \le \lambda^*(A)+\lambda^*(B) = \lambda(A)+\lambda(B) \\ \lambda_*(A\cup B)+\lambda_*(A\cap B) \ge \lambda_*(A)+\lambda_*(B) = \lambda(A)+\lambda(B) \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda_*(A\cup B)+\lambda_*(A\cap B) = \lambda^*(A\cup B)+\lambda^*(A\cap B) = \lambda(A)+\lambda(B)$$

$$\Longrightarrow \lambda_*(A\cup B) = \lambda^*(A\cup B) \text{ și } \lambda_*(A\cap B) = \lambda^*(A\cap B) \Longrightarrow A\cup B, A\cap B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$$

$A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Trem $B\setminus A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ $\quad B\setminus A = B\setminus(A\cap B)$

Este suf. să arătăm că dacă $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), A\subset B \Longrightarrow B\setminus A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda^*(B\setminus A) \le \lambda^*(B) - \lambda_*(A) = \lambda(B) - \lambda(A) \\ \lambda_*(B\setminus A) \ge \lambda_*(B) - \lambda^*(A) = \lambda(B) - \lambda(A)\end{array}\right| \Longrightarrow \lambda_*(B\setminus A) = \lambda^*(B\setminus A)$$

$$\Downarrow$$

$$B - A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$$

Așadar $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ este inel.

În prima parte am văzut că dacă $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ atunci $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și

$$\lambda(A \cap B) + \lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

Dacă $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

Se poate arăta că λ este numărabil aditivă (adică λ este o măsură pe $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$):

dacă $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\bigcup_n A_n \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $A_n \cap A_m = \emptyset$, $m \neq n$

atunci $\lambda(\bigcup_n A_n) = \sum_n \lambda(A_n)$

Propoziție. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită UASE:

1) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists E, F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ a.i. $E \subset A \subset F$ și $\lambda(F \setminus E) < \varepsilon$

„$1 \Rightarrow 2$". Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ $\lambda_*(A) = \lambda^*(A) = \lambda(A)$. Fie $\varepsilon > 0$

Există $E \subset A$ a.i. $\lambda(E) > \lambda(A) - \frac{\varepsilon}{2}$
$F \supset A$ a.i. $\lambda(F) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}$
$\Longrightarrow$ $E \subset A \subset F$

$\lambda(F \setminus E) = \lambda(F) - \lambda(E) < \varepsilon$

„$2 \Rightarrow 1$" $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists E, F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ $E \subset A \subset F$, $\lambda(F) - \lambda(E) < \varepsilon$.

$$\lambda(E) = \lambda_*(E) \le \lambda_*(A) \le \lambda^*(A) \le \lambda^*(F) = \lambda(F) \Longrightarrow \lambda^*(A) - \lambda_*(A) < \varepsilon.$$

Deci $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$

<u>Teorema 1</u>. $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. UASE:

1) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2) $Fr(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\lambda(Fr(A)) = 0$.

3) $\overline{A}, \mathring{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\lambda(\overline{A}) = \lambda(\mathring{A})$

$\left(Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{CA} \right)$

<u>Propoziție 2.</u> Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ compactă și neglijabilă Lebesgue.
Atunci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\lambda(A) = 0$. (exercițiu!)

<u>Observație</u> - $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. UASE.

(1) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\lambda(A) = 0$.

(2) $\lambda^*(A) = 0$.

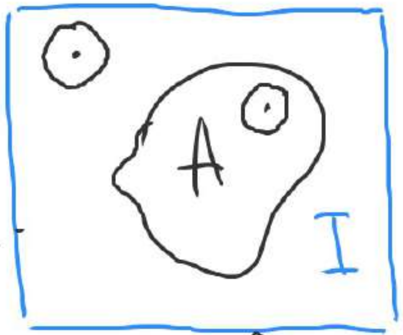
<u>Definiție</u> - O mulțime mărginită din $\mathbb{R}^n$ cu $\lambda^*(A) = 0$ s.n neglijabilă Jordan.

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită și I interv. inchis. $\subset \mathbb{R}^n$ a.î. $\overline{A} \subset \mathring{I}$

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad . \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A . \end{cases}$$

<u>Propoziție</u>- χ_A integrabilă Riemann pe $I \Longleftrightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

<u>Dem.</u> $\operatorname{disc}(\chi_A) = \operatorname{Fr}(A)$



χ_A int. R. $\Longleftrightarrow \operatorname{disc}(\chi_A) = \operatorname{Fr}(A)$ neglij Lebesgue

$\Big\Updownarrow \leftarrow \operatorname{Fr}(A)$ compactă (vezi Prop 2)

$\operatorname{Fr}(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\lambda(\operatorname{Fr}(A)) = 0$

$\Updownarrow$ Teorema 1

$A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

Exercițiu. Cu notațiile de mai sus, avem:

$$\lambda_*(A) = \underline{\int_I} \chi_A \ ; \ \lambda^*(A) = \overline{\int_I} \chi_A$$

Definiție Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și I interval închis a.î. $A \subset I$

$\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, $\quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0 & x \in I \setminus A. \end{cases}$

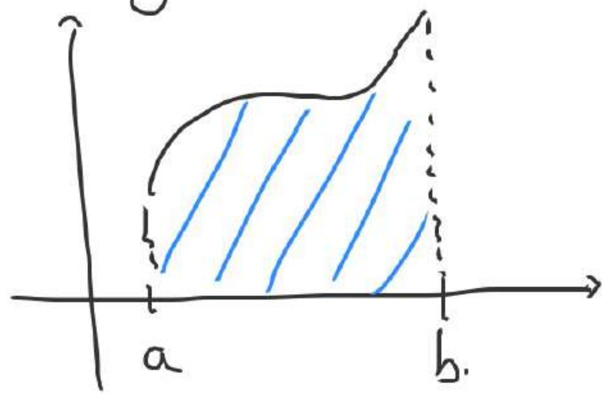
Spunem că f este integrabilă Riemann dacă $\tilde{f}$ este int. R.
Se poate arăta că definiția este corectă adică nu depinde de interv. I. Not:

$$\int_A f(x)\,dx := \int_I \tilde{f}(x)\,dx.$$

Teoremă Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : A \to [0, \infty)$ integrabilă Riemann

Atunci

$$\Gamma_f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in A,\ 0 \le t \le f(x)\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+1}).$$



și

$$\lambda(\Gamma_f) = \int_A f(x)\,dx$$

$A = [a, b]$.

Corolar. $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ $f : A \to \mathbb{R}$ int. Riemann

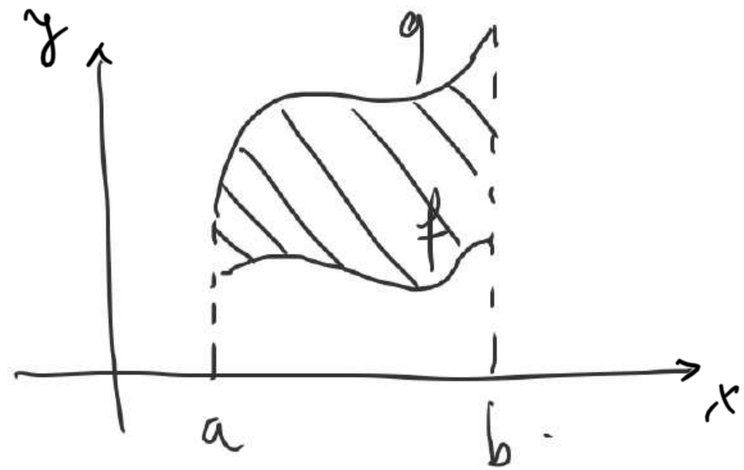
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+1})$$

și $\lambda(G_f) = 0$.

Teorema 3. Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ int. Riemann și a.î.
$f(x) \le g(x)$, $\forall x \in A$. Atunci

$$\Gamma_{f,g} = \{(x,t) \mid x \in A,\ f(x) \le t \le g(x)\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ și}$$

$$\lambda(\Gamma_{f,g}) = \int_A (g(x) - f(x))\,dx.$$

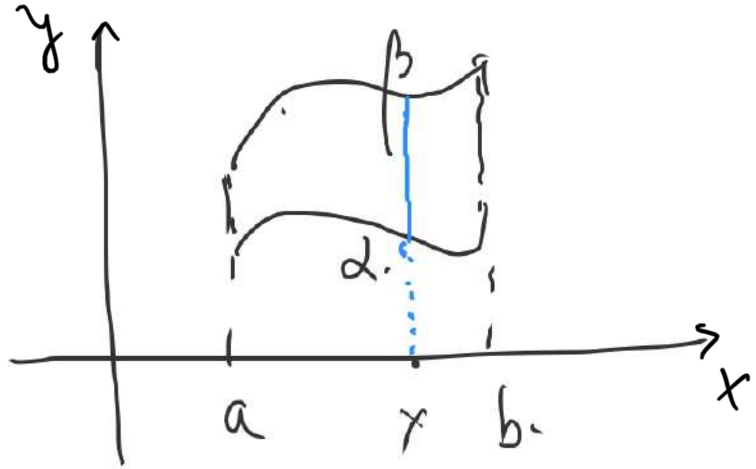


<u>Propoziție 4</u>. Fie $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue a.î. $\forall x \in [a,b]$, $\alpha(x) \le \beta(x)$. Atunci

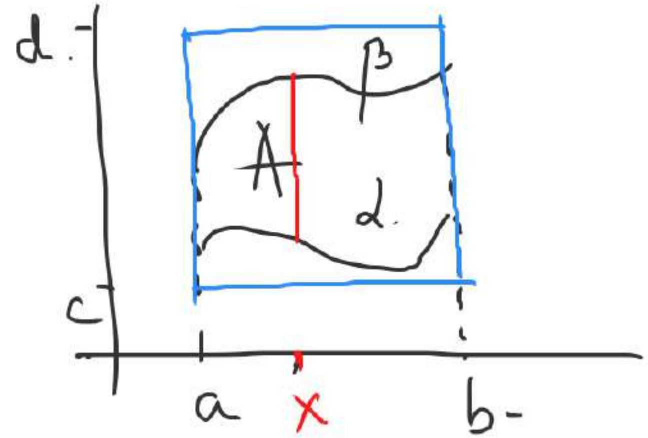
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2).$$

Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f este integrabilă Riemann pe A și

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$



Dem. Fie $[c,d]$ a.î.



$A \subset [a,b]\times[c,d]$, A compactă.

$\tilde{f} : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$.

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

, $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ (din Teorema 2)

f cont pe $A \Longrightarrow f$ mărginită (pt că A compact) $\Longrightarrow \tilde{f}$ mărginită.

disc$(\tilde{f})$ - neglijabilă Lebesgue.

$\xrightarrow{\text{Crit. Lebesgue}}$ $\tilde{f}$ int. Riemann pe $I = [a,b]\times[c,d]$.

Deci f este integrabilă Riemann şi

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_I \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy.$$

$f_x : [\alpha(x), \beta(x)] \to \mathbb{R}$, $f_x(y) := f(x,y)$, - cont şi deci int. Riemann.

$\tilde{f}_x : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}_x(y) = \tilde{f}(x,y)$

f_x - int. Riemann pe $[\alpha(x), \beta(x)]$,

$$\tilde{f}_x(y) = \begin{cases} f_x(y), & y \in [\alpha(x), \beta(x)] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

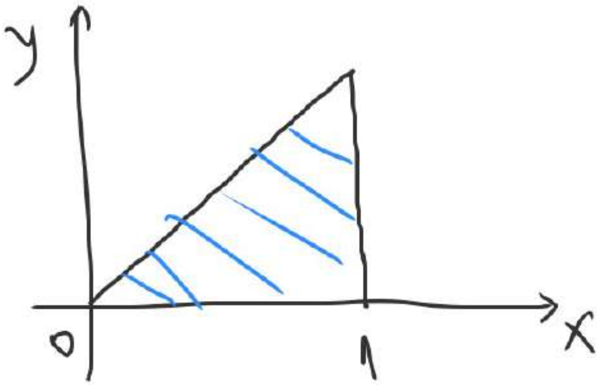
$\Rightarrow$ $\tilde{f}_x$ int. Riemann pe $[c,d]$.

şi $\displaystyle\int_c^d \tilde{f}_x(y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(y)\,dy$

T. Fubini $\Longrightarrow$ $$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{f}\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx .$$

deci
$$\iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

Calculați $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$ $\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$



$D=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$.

$\left.\begin{array}{l}\alpha,\beta:[0,1]\to\mathbb{R}\\ \alpha(x)=0,\ \beta(x)=x\\ \alpha,\beta \text{ continue}\end{array}\right| \xRightarrow{\text{Prop 4}} D\in J(\mathbb{R}^2)$

f continuă pe $D \xRightarrow{\text{Prop 4}} f$ int. Riemann pe D și

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x (x+y)\,dy \right) dx = (*)$$

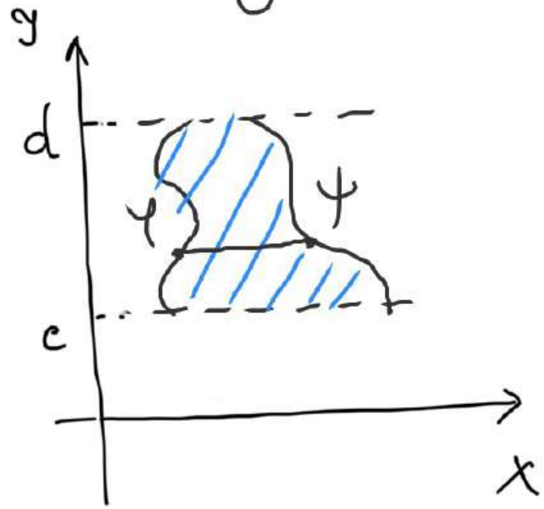
$$\int_0^x (x+y)\,dy = xy + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=x} = \frac{3x^2}{2}$$

$$(*) = \int_0^1 \frac{3x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Propoziție 5. Fie $\varphi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ continue cu $\varphi(y) \leq \psi(y), \forall y \in [c, d]$

Atunci

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c \leq y \leq d, \; \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \right\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2).$$



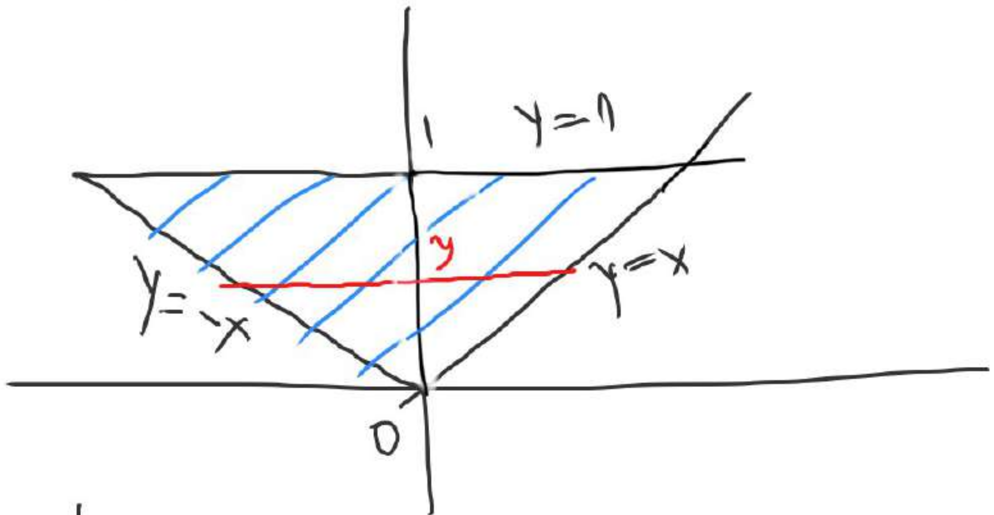
Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci

f este integrabilă Riemann și

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Calculați $\iint\limits_D x\,dx\,dy$

D este mărginită de dreptele $y=x$, $y=-x$ și $y=1$



$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ -y\le x\le y\}\in J(\mathbb{R}^2)$ (Prop 4)

$f: D\to\mathbb{R}$ cont $\Longrightarrow$ f integrabilă Riemann pe D. și

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} x\,dx \right) dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-y}^{x=y} dy = 0 .$$

Exercitii

1) Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime situată în primul cadran mărginită de curbele $y=2x$, $y=3x$, $xy=1$.
Arătați că $D \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și calculați $\lambda(D)$.

2*) $f:[0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} r_1, & x = \frac{p}{2^q},\ p,q \in \mathbb{N}^* \\ r_2, & x = \frac{p}{3^q},\ p,q \in \mathbb{N}^* \\ r_3, & x = \frac{p}{5^q},\ p,q \in \mathbb{N}^* \\ \vdots & \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

unde $(r_n)_{n\geq 1}$ este o enumerare a numerelor raționale din $(0,1)$ și $f(x) = r_n$, dacă $x = \frac{p}{d_n^q}$, unde d_n este al n-lea număr prim. Arătați că $G_f \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

3*) Fie $I \subset \mathbb{R}^2$ interval, $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann și $g : I \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) = g(x)$, cu excepția unui număr finit de puncte. Arătați că g este integrabilă Riemann și $\int_I f = \int_I g$.