14.3. **De capătul unui resort vertical de constantă elastică *k* este fixat un corp de masă *m*. Cu ce distanță maximă coboară corpul lăsat liber, dacă în momentul inițial viteza lui este zero şi resortul nu este întins ?**

Rezolvare. Punctul de echilibru al corpului suspendat este la distanța $x_o = mg / k$. În momentul inițial, corpul este deviat de la această poziție cu x_o şi este în repaus. El va porni către poziția de echilibru, o va depăşi cu x_o şi va oscila în jurul poziției de echilibru x_o cu amplitudinea egală chiar cu x_o, deci distanța maximă cu care coboară este $2x_o = 2mg / k$.

* *

14.4. Un corp de masă *m* este suspendat de un *fir* perfect flexibil şi perfect elastic de constantă elastică *k*. Corpul este deplasat în jos şi lăsat apoi liber să oscileze pe verticală . Care este deplasarea maximă admisibilă pentru ca oscilațiile să fie armonice ?

Rezolvare. Oscilațiile armonice sunt produse de o forță **elastică** $F = - kx$. În cazul ***firului elastic***, la *întindere* el va da o forță elastică, dar la comprimare nu dă nimic, "se scofâlceşte" (cu un **fir** nu poți *împinge* un cărucior).

Alegem axa Ox vertical în jos cu originea în capătul inferior al firului nedeformat . Poziția de echilibru va fi la distanța $x_o = mg / k$. Din poziția inițială, deplasat în jos cu x şi fără viteză inițială, corpul va urca şi va depăşi poziția de echilibru în sus . Dacă deplasarea inițială $| x - x_o | < x_o$, corpul va oscila armonic pe verticală cu amplitudinea $| x - x_o |$. Dacă însă $x > 2x_o$, la întoarcere corpul va urca peste poziția de echilibru cu mai mult decât $x - x_o$, deci la un moment dat firul va fi "comprimat" , se va "scofâlci" şi nu vom avea o forță *elastică* la comprimare.

Prin urmare, pentru a avea oscilații armonice firul nu trebuie întins în jos cu mai mult decât $2mg / k$, deci $A_{max} = mg / k$.

* *

14.5. Un *areometru* (sau *densimetru*) de masă *m* şi cu diametrul tubului cilindric vertical *d* efectuează mici oscilații verticale cu perioada *T* într-un lichid. Care este *densitatea* lichidului ?

Rezolvare. Prin deplasarea areometrului din poziția de echilibru (de plutire) cu x în **jos**, apare o forță arhimedică *suplimentară* în **sus** :

$$F_A = - \rho (\pi d^2 / 4) x g = - k x , \quad k = (\pi d^2 / 4) \rho g , \qquad (1)$$

deci echivalentă cu o forță elastică cu constanta k . Perioada oscilațiilor

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}} , \qquad (2)$$

de unde densitatea cerută :

$16\pi m$

14.6. **Un corp de masă *m* este suspendat de un resort. O particulă de masă *m'* cade cu viteza *v* pe corpul *m* de care se lipeşte. Alungirea statică produsă de particula *m'* este x_o. Aflați amplitudinea oscilațiilor sistemului format $(m + m')$.**

Rezolvare. Alegem axa Ox vertical în jos cu originea în capătul inferior al resortului nedeformat. Poziția de echilibru a sistemului $m + m'$ este deplasată în jos cu $x_e = (m + m')g / k$ față de resortul nedeformat . În momentul inițial, imediat după alipirea corpului m', sistemul se găseşte într-o poziție deviată în sus cu :

$$x_e - mg / k = m'g / k = x_o \qquad (1)$$

față de poziția sa de echilibru şi are viteza (după ciocnirea plastică) :

$$v' = v \frac{m'}{m+m'} . \qquad (2)$$

Legea de conservare a energiei ne dă :

$$(1/2)(m + m')v'^2 + (1/2) kx^2 = E = (1/2) kA^2 , \quad k = m'g / x_o . \qquad (3)$$

Introducând aici (1) şi (2), găsim :

$$\frac{m'g}{2x_o} A^2 = \frac{1}{2} \frac{m'^2 v^2}{m+m'} + \frac{1}{2} m'gx_o ,$$

$$A = x_o \sqrt{1 + \frac{v^2 m'}{x_o g(m+m')}} . \qquad (4)$$

Putem rezolva problema şi astfel :

$$x = A\cos(\omega t + \alpha), \quad v = - \omega A\sin(\omega t + \alpha) , \qquad (5)$$

$$x_o = m'g / k , \quad \omega^2 = \frac{k}{m+m'} = \frac{m'g}{(m+m')x_o} , \qquad (6)$$

cu condițiile **inițiale** la $t = t_o$ (imediat după alipirea masei m'):

$$- x_o = A\cos(\omega t_o + \alpha) , \quad v \frac{m'}{m+m'} = - \sqrt{\frac{m'g}{(m+m')x_o}} A\sin(\omega_o t + \alpha) .$$

Eliminând de aici sin şi cos găsim amplitudinea :

$$x_o^2 + \left[-v \frac{m'}{m+m'} \sqrt{\frac{(m+m')x_o}{m'g}} \right]^2 = A^2 . \qquad (7)$$

* *

14.7. Pe un platan de masă neglijabilă, atârnat de un resort, cade fără viteză inițială un corp de la înălțimea *h* deasupra platanului. Considerând că ciocnirea corpului cu platanul este plastică, aflați amplitudinea oscilațiilor platanului. La echilibru acelaşi corp alungeşte resortul cu x_o.

Rezolvare. Imediat după ciocnire energia cinetică a platanului şi corpului

Legea *conservării energiei* :

$$(1/2)\, mv^2 + (1/2)\, kx_o^2 = E = (1/2)\, kA^2 , \quad (2)$$

$$mgh + (1/2)\, mgx_o = (1/2)\,(mg / x_o)\, A^2 ,$$

$$A = x_o \sqrt{1+2h/x_o} . \quad (3)$$

Putem rezolva problema şi cu ajutorul ecuaţiilor mişcării :

$$x = A\cos(\omega t + \alpha), \quad v_o = -\,\omega\, A\sin(\omega t + \alpha), \quad (4)$$

$$k = mg / x_o , \quad \omega^2 = k / m = g / x_o , \quad (5)$$

cu condiţiile *iniţiale* la $t = t_o$ (imediat după alipirea masei m):

$$-\,x_o = A\cos(\omega t_o + \alpha), \qquad \sqrt{2gh} = -\sqrt{g/x_o}\; A\sin(\omega_o t + \alpha), \quad (6)$$

de unde, prin eliminarea lui sin şi cos, găsim amplitudinea :

$$x_o^2 + \left(\sqrt{2gh}\ \sqrt{x_o/g}\ \right)^2 = A^2 . \quad (7)$$

* *

14.8. În mijlocul unei corzi elastice orizontale de lungime ℓ , întinsă cu forţa constantă F, este suspendat un corp de masă m . Aflaţi perioada micilor sale oscilaţii. (Se neglijează gravitaţia.)

Rezolvare. Forţa de revenire, de tip elastic, este (fig.14.1) :

$$F_e = -\,2F \sin\alpha , \qquad \mathrm{tg}\alpha = x : (\ell / 2) . \quad (1)$$

Pentru amplitudini **mici** de oscilaţie $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha$:

$$F_e = -\,2F\, \frac{x}{\ell/2} = -\,\frac{4F}{\ell}\, x = -\,k\,x . \quad (2)$$

Perioada micilor oscilaţii :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi \sqrt{\frac{m\ell}{F}} . \quad (3)$$

(Dacă ambele capete ale corzii sunt fixate, alungirea corzii este de ordin superior $\sim 2x^2 / \ell$.)

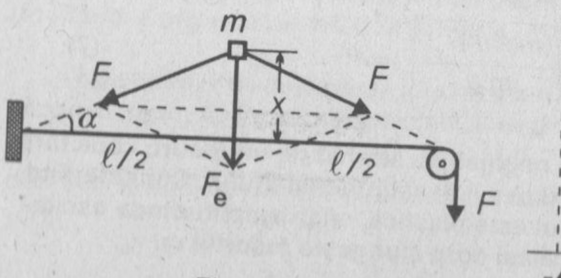


Fig.14.1

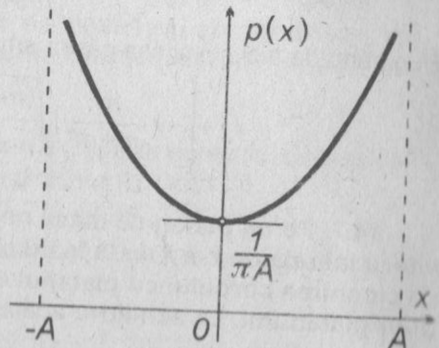


Fig.14.2

14.9. O particulă oscilează sinusoidal de-alungul axei Ox : $x = A\cos(\omega t + \alpha)$. Fie $dP(x) = = p(x)dx$ *probabilitatea* de a găsi particula pe intervalul $(x , x + dx)$. Calculaţi *densitatea* de probabilitate $p(x)$.

Rezolvare. Probabilitatea de a găsi particula pe intervalul $(x, x + dx)$ este *proporţională* cu timpul dt cât se găseşte particula în acest interval : $dP(x) = = p(x)dx = Cdt$,

$$p(x) = C : (dx / dt) = C : v(x) , \quad (1)$$

$$v = \dot{x} = dx / dt = -\,\omega A \sin(\omega t + \alpha) =$$

$$= \pm\,\omega A \sqrt{1 - x^2/A^2} = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2} ,$$

$$p(x) = C : (\omega \sqrt{A^2 - x^2}\ ). \quad (3)$$

Constanta C se obţine din *condiţia de **normare*** : probabilitatea de a găsi particula ***oriunde*** pe intervalul $(-A , +A)$ este 1 (certitudine !) :

$$1 = \int dP = \int_{-A}^{A} p(x)\, dx = \int_{-A}^{A} \frac{C\, dx}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{C}{\omega}\ \arcsin \frac{x}{A}\bigg|_{-A}^{A} = \frac{C}{\omega}\ 2\ \frac{\pi}{2} , \quad \text{de unde } C = \frac{\omega}{\pi} ,$$

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} . \quad (4)$$

Probabilitatea de a găsi particula la extremităţile $x = \pm A$ este foarte mare fiindcă acolo particula zăboveşte mai mult : viteza scade către zero, particula se opreşte şi se întoarce, pe când prin centrul $x = 0$ particula trece cu viteză maximă (v. fig.14.2).

* *

14.10. O scândură omogenă este aşezată orizontal şi transversal pe doi cilindri în rotaţie, ca în fig.14.3. Distanţa dintre axele cilindrilor este ℓ, iar coeficientul de frecare la lunecare este μ . Arătaţi că scândura va oscila sinusoidal şi aflaţi perioada.

Rezolvare. Dacă scândura se deplasează cu x, reacţiunile $N_{1,2}$ se obţin din condiţiile :

$$N_1 + N_2 = mg , \quad N_1(\ell / 2 + x) = N_2(\ell / 2 - x) , \quad (1)$$

$$N_{1,2} = mg\,(1 / 2 \mp x / \ell) . \quad (2)$$

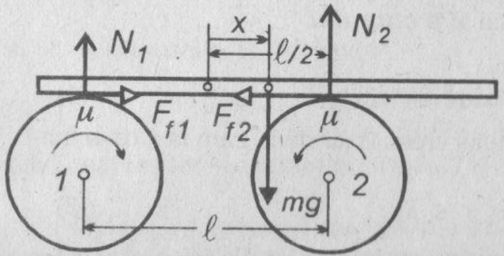


Fig.14.3

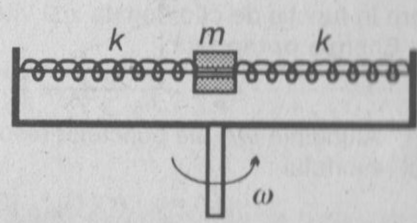


Fig.14.4

Forţele de frecare la lunecare :

$$F_{f\,1,2} = \mu\, mg\,(1 / 2 \mp x / \ell) , \quad (3)$$

$$F = F_{f\,1} - F_{f\,2} = -\,\frac{2\mu mg}{\ell}\, x = -\,k\,x , \quad (4)$$

deci apare o forță de revenire de tip **elastic** care produce oscilații cu perioada :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2\mu g}} \,. \qquad (5)$$

* *

14.11. Un manșon de masă *m* poate culisa fără frecare pe o tijă orizontală, fiind prins cu două resorturi identice, fiecare de constantă *k*, de pereții vasului din fig.14.4. Calculați perioada micilor oscilații ale manșonului, dacă vasul este rotit cu viteza unghiulară ω .

Rezolvare. Dacă corpul *m* se află la distanța *x* de centru, atunci pentru mișcarea circulară uniformă avem :

$$2kx = m\omega^2 x \quad \text{sau} \quad (2k - m\omega^2)\, x = 0 \ \rightarrow \ x = 0\,. \qquad (1)$$

Poziția de echilibru este în centru (sau oriunde dacă $2k = m\omega^2$) .

În SR legat de vas apare forța complementară de *transport* :

$$\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr}\,, \quad F_{tr} = m\omega^2 x \quad \textit{centrifug}. \qquad (2)$$

(Forța Coriolis face ca manșonul să apese spre dreapta tija de ghidaj.)

Rezultă o forță de *revenire* de tip *elastic* :

$$-2kx + m\omega^2 x = -(2k - m\omega^2)\, x, \qquad (3)$$

atunci *perioada* oscilațiilor :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k - m\omega^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2k/m - \omega^2}} \,. \quad (2k > m\omega^2)\,. \qquad (4)$$

Dacă $\omega^2 = 2k$, forța de revenire se anulează și corpul stă în echilibru oriunde. Dacă $\omega^2 > 2k$ corpul este azvârlit de forța centrifugă de transport spre periferia vasului.

* *

14.12. Un corp de masă m , așezat pe o masă orizontală fără frecări , este legat printr-un resort orizontal de masă m' și constantă elastică k de un perete . Aflați frecvența oscilațiilor corpului (se consideră că toate punctele resortului oscilează în fază)(acesta este un *model* de *resort real*).

Rezolvare. Vom calcula energia potențială și cinetică a sistemului resort-corp în funcție de coordonata *x* și viteza $\dot{x}$ a ***corpului***.

Energia **potențială**:

$$E_p = -\int_0^x F\,dx = \int_0^x kx\,dx = (1/2)\,kx^2. \qquad (1)$$

Alungirile *u(r)* ale punctelor resortului cresc *liniar* de la zero la *x* de-a lungul resortului :

$$u(r) = x \cdot (r/\ell)\,, \quad (0 \le r \le \ell)\,, \qquad (2)$$

de unde viteza punctelor resortului :

$$v(r) = \dot{u}(r) = \dot{x} \cdot r/\ell\,. \qquad (3)$$

Energia **cinetică** a unui ***element*** de masă $dm' = (m'/\ell)\,dr$ va fi atunci

$$(1/2)\,dm'\,v^2 = (1/2)\,(m'/\ell)\,dr\,\dot{x}^2 r^2/\ell^2 \qquad (4)$$

și energia cinetică totală:

$$E_c = (1/2)\,m\dot{x}^2 + [m'\dot{x}^2/(2\ell^3)]\int_0^\ell r^2\,dr =$$

$$= (1/2)\,(m + m'/3)\,\dot{x}^2 = (1/2)\,\mu\dot{x}^2. \qquad (5)$$

Frecvența unghiulară și perioada oscilațiilor rezultă acum imediat:

$$\omega = \sqrt{k/\mu} = \sqrt{k : (m + m'/3)}\,, \quad T = 2\pi\sqrt{(m + m'/3) : k}\,, \qquad (6)$$

ca și cum o ***treime*** din masa resortului se adaugă la masa corpului.

* *

14.13. De capetele unui resort cu constanta elastică *k* sunt prinse două bile de mase $m_{1,2}$. Neglijând forțele gravitaționale, aflați frecvența de oscilație a resortului inițial întins (sau comprimat) și apoi lăsat liber.

Rezolvare. Reamintim "**problema a două corpuri**" :

Studiul mișcării a două corpuri se reduce la studiul mișcării relative a unei particule fictive de masă egală cu masa redusă (relativă) $\mu = m_1 m_2 : (m_1 + m_2)$ în SCM al particulei 2 , supusă la forța de interacțiune dintre particule.

În cazul nostru forța de interacție este **elastică** $-kx$, deci rezultă o mișcare oscilatorie armonică cu frecvența:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \,. \qquad (1)$$

Putem rezolva problema și direct, astfel : Sistemul celor două bile cu resort este **izolat**, deci CM al sistemului este în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă. Față de CM al sistemului particulele oscilează diametral opus, sub acțiunea resorturilor de lungimi ;

$$\ell_{1,2} = \ell\,\frac{m_{2,1}}{m_1 + m_2} \,. \qquad (2)$$

Dacă un resort îl tăiem în *n* părți egale cu $\ell^* = \ell/n$ și legăm resorturile obținute înapoi în serie, avem :

$$\frac{1}{k} = \frac{n}{\ell^*} = \frac{\ell}{k^*\ell^*} \quad \text{sau} \quad k\,\ell = k^*\ell^* = k_1\ell_1 = k_2\ell_2 = \ldots \qquad (3)$$

Constantele elastice ale resorturilor (2) vor fi deci

$$k_{1,2} = k\,\frac{\ell}{\ell_{1,2}} = k\,\frac{m_1 + m_2}{m_{2,1}} \qquad (4)$$

și bilele vor oscila cu frecvența :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k_{1,2}}{m_{1,2}} = k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,, \qquad (5)$$

adică am regăsit rezultatul precedent (1) .

* *

14.14. La capetele unei tije fine orizontale cu constanta de torsiune *C* sunt fixate două discuri cu momentele de inerție $I_{1,2}$. Sistemul este așezat pe o masă fără frecări. Care este perioada oscilațiilor de torsiune ale tijei ?

Rezolvare. Această problemă este analogul **unghiular** al problemei **liniare** precedente **4.13**. Mărimile care se corespund :

$$A_{max} = |f| = \frac{P\ell^3}{48EJ} . \qquad (3)$$

* *

14.23. Aflați amplitudinea inițială A_o și faza inițială α a oscilațiilor amortizate, știind constantele m, k, r, precum și condițiile inițiale : poziția x_o și viteza v_o la $t = 0$.

Rezolvare. Ecuațiile mișcării amortizate pseudoperiodice :

$$x = A_o e^{-bt}\cos(\omega' t + \alpha) ,$$

$$v = \dot{x} = A_o e^{-bt}[-b\cos(\omega' t + \alpha) - \omega'\sin(\omega' t + \alpha)] , \qquad (1)$$

unde b este *coeficientul de amortizare*, ω' - *pseudofrecvența* ,

$$b = r/(2m) , \quad r \text{ - coeficientul de } \textit{rezistență} , \qquad (2)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_o^2 - b^2} , \quad \omega_o = \sqrt{k/m} . \qquad (3)$$

Impunem condițiile inițiale : la $t = 0$ avem $x = x_o$ și $v = v_o$:

$$x_o = A_o \cos\alpha , \quad v_o = A_o[-b\cos\alpha - \omega'\sin\alpha] = -bx_o - \omega' A_o \sin\alpha . \qquad (4)$$

Eliminăm de aici cos și sin și obținem amplitudinea inițială :

$$x_o^2 + (v_o + bx_o)^2/\omega'^2 = A_o^2 ,$$

$$A_o = \sqrt{x_o^2 + (v_o + bx_o)^2/\omega'^2} , \quad \alpha = \arccos\frac{x_o}{A_o} . \qquad (5)$$

* *

14.24. Un pendul simplu gravitațional are lungimea ℓ . Știind timpul de relaxare τ a oscilațiilor amortizate, aflați *decrementul* logaritmic .

Rezolvare. Timpul de relaxare și decrementul logaritmic:

$$\tau = 1/b = 2m/r , \quad D = b\,T' , \qquad (1)$$

unde T' este *pseudoperioada* :

$$\omega' = \sqrt{\omega_o^2 - b^2} , \quad \omega_o = \sqrt{k/m} . \qquad (2)$$

$$D = b\,T' = \frac{1}{\tau}\frac{2\pi}{\omega'} = \frac{1}{\tau}\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\tau\omega_o}\frac{1}{\sqrt{1-1/(\tau\omega_o)^2}} . \qquad (3)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}} , \quad D = \frac{2\pi}{\tau}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\frac{1}{\sqrt{1-\ell/(\tau^2 g)}} . \qquad (4)$$

* *

14.25. Un pendul simplu gravitațional oscilează amortizat, decrementul logaritmic fiind D. Știind că după un timp τ_E *energia* mecanică a pendulului a scăzut de e ori, aflați lungimea pendulului.

Rezolvare. Energia este **pătratică** în amplitudine, de aceea coeficientul de amortizare al **energiei** este dublu, $2b$, și timpul după care energia scade de e ori este $\tau_E = 1/(2b)$.

$$D = b\,T' = \frac{1}{2\tau_E}\frac{2\pi}{\omega'} = \frac{\pi}{\tau_E}\frac{1}{\sqrt{\omega_o^2 - b^2}} = \frac{\pi}{\tau_E\sqrt{g/\ell - 1/(4\tau^2)}} \rightarrow \qquad (1)$$

$$\ell = \frac{4g\tau_E^2}{1+4\pi^2/D^2} . \qquad (2)$$

* *

14.26. Un corp de masă m , suspendat la capătul unui resort de constantă elastică k, efectuează oscilații verticale amortizate. Știind că după N_o oscilații, amplitudinea oscilațiilor scade de e ori, aflați decrementul logaritmic, perioada oscilațiilor amortizate și coeficientul de amortizare.

Rezolvare. $\quad N_o = \frac{\tau}{T'} = \frac{1}{bT'} = \frac{1}{D} , \quad D = \frac{1}{N_o} .$ (1)

$$\frac{4\pi^2}{T'^2} = \frac{4\pi^2}{T_o^2} - b^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{N_o^2 T'^2} ,$$

$$\frac{4\pi^2}{T'^2}\left(1+\frac{1}{4\pi^2 N_o^2}\right) = \frac{k}{m} ;$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2 N_o^2}} . \qquad (2)$$

$$b = \frac{1}{N_o T'} = \frac{1}{N_o}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{4\pi^2 N_o^2}{1+4\pi^2 N_o^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2 N_o^2}} . \qquad (3)$$

* *

14.27. De câte ori trebuie să crească coeficientul de amortizare pentru ca oscilațiile pseudoperiodice cu decrementul D să treacă în mișcarea amortizată *aperiodică* ?

Rezolvare. Avem succesiv :

$$D = bT' , \quad b^2 = \frac{D^2}{T'^2} = \frac{D^2\omega'^2}{4\pi^2} = \frac{D^2}{4\pi^2}\left(\omega_o^2 - b^2\right) \rightarrow \qquad (1)$$

$$b^2 = \frac{D^2\omega_o^2}{4\pi^2 + D^2} . \qquad (2)$$

Regimul pseudoperiodic dispare și trece în regim *aperiodic* atunci când b devine $b' = \omega_o$. Atunci din (2) rezultă:

$$\frac{b'}{b} = \sqrt{1+\frac{4\pi^2}{D^2}} . \qquad (3)$$

* *

14.28. **Scrieți expresia *vitezei* oscilațiilor amortizate. De câte ori se micșorează, după o pseudoperioadă, viteza unui corp ce execută oscilații amortizate cu decrementul logaritmic *D* ?**

Rezolvare. $x = A_0 e^{-bt}\cos(\omega' t + \alpha)$,

$$v = \dot{x} = A_0 e^{-bt}[-b\cos(\omega' t + \alpha) - \omega'\sin(\omega' t + \alpha)] =$$

$$= \omega_0 A_0 e^{-bt}\left[-\frac{b}{\omega_0}\sin(\omega' t + \alpha + \pi/2) + \frac{\omega'}{\omega_0}\cos(\omega' t + \alpha + \pi/2)\right] . \quad (1)$$

Introducem un unghi suplimentar de defazaj :

$$\mathrm{tg}\delta = b/\omega' \quad \to \quad \sin\delta = b/\omega_0 , \quad \cos\delta = \omega'/\omega_0 . \quad (2)$$

$$v = \omega_0 A_0 e^{-bt}\cos(\omega' t + \alpha + \pi/2 + \delta) , \quad \delta = \mathrm{arctg}(b/\omega') . \quad (3)$$

$$\frac{v(t)}{v(t+T')} = \frac{e^{-bt}}{e^{-b(t+T')}} = e^{bT'} = e^{D} . \quad (4)$$

* *

14.29. **O particulă, deplasată din poziția sa de echilibru cu x_0 , este lăsată liberă. Ce distanță parcurge particula până la oprirea sa completă, știind decrementul logaritmic *D* ?**

Rezolvare. Raportul elongațiilor și al vitezelor (v. ecuația (3) de la problema precedentă **14.28**), la un interval de timp egal cu o semiperioadă $T'/2$, este

$$\frac{x(t)}{x(t+T'/2)} = \frac{A_0 e^{-bt}\cos(\omega' t+\alpha)}{A_0 e^{-bt-bT'/2}\cos(\omega' t+\alpha+\omega' T'/2)} = -e^{-D/2} , \quad (1)$$

$$\frac{v(t)}{v(t+T'/2)} = -e^{-D/2} . \quad (2)$$

Impunând condițiile inițiale ca la $t = 0$ să avem $x = x_0$ și $v = 0$, găsim constantele A_0 și α:

$$A_0 = \frac{x_0}{\cos\delta} = \frac{\omega_0}{\omega'}x_0 , \quad \alpha = -\delta = -\mathrm{arctg}(b/\omega') . \quad (3)$$

Prin urmare, ecuațiile mișcării și vitezei sunt

$$x = A_0 e^{-bt}\cos(\omega' t + \alpha) = \frac{\omega_0}{\omega'}x_0 e^{-bt}\cos(\omega' t - \delta) , \quad (4)$$

$$v = -\omega_0 A_0 e^{-bt}\sin\omega' t = -\frac{\omega_0^2}{\omega'}x_0 e^{-bt}\sin\omega' t . \quad (5)$$

Punctele de **anulare** a vitezei

$$t = 0,\ T'/2,\ T',\ 3T'/2, ... \quad (6)$$

corespund maximelor elongației :

$$x_m = x_0,\ x_0 e^{-D/2},\ x_0 e^{-D},\ x_0 e^{-3D/2}, ... , \quad (7)$$

astfel încât distanța parcursă până la oprire este

$$s = x_0 + 2x_0 e^{-D/2} + 2x_0 e^{-D} + ... = x_0 + 2x_0 e^{-D/2}\frac{1}{1-e^{-D/2}} =$$

$$= x_0\frac{1+e^{-D/2}}{1-e^{-D/2}} , \quad (8)$$

unde am însumat seria geometrică .

Dacă amortizarea este *mică*, avem aproximativ :

$$s \approx 4x_0/D , \quad D \ll 1 . \quad (9)$$

* *

14.30. Pe o masă orizontală este legată de un resort orizontal de constantă $k = 98$ N/m (având celălalt capăt fixat) o bilă de masă $m = 0{,}200$ kg , având coeficientul de frecare la lunecare cu masa $\mu = 0{,}10$. Resortul cu bila este întins cu o distanță $A = 8{,}1$ cm (< lungimea resortului nedeformat) și lăsat liber. Aflați lungimea totală parcursă de bilă până la oprire și timpul total respectiv .

Rezolvare. *Dacă unui oscilator armonic i se aplică o forță constantă, perioada oscilațiilor nu se schimbă, dar se deplasează cu F/k poziția de echilibru în jurul căreia se efectuează oscilațiile sinusoidale.*

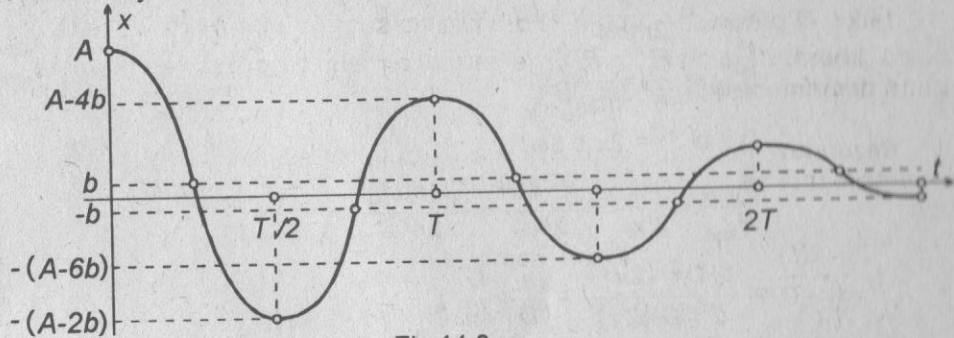


Fig.14.8

Forța de frecare la lunecare solid-solid fiind *constantă* în modul și schimbându-și doar semnul odată cu viteza corpului, înseamnă că perioada oscilațiilor ***nu*** se schimbă $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, dar la fiecare ducere și la fiecare întoarcere corpul efectuează o jumătate de oscilație sinusoidală (o semiperioadă) în jurul unei poziții *deplasate* , respectiv cu $\pm\ \mu mg/k = \pm\ b = \pm\ 2{,}0$ mm . Elongațiile extreme succesive scad deci în modul cu $2b = 4{,}0$ mm, până când corpul se oprește când elongația sa extremă devine mai mică în modul decât b (zonă de echilibru). Numărul de semioscilații n se obține deci din condițiile :

$$A = n\cdot 2b + r , \quad |r| < b \quad \text{sau}$$

$$(2n-1)\,b < A < (2n+1)\,b. \quad (1)$$

În cazul nostru $n = 20$.

Distanța parcursă se compune din n semioscilații (semicosinusoide) succesive, de amplitudini $A - b,\ A - 3b,\ ...\ ,\ A - (2n-1)b$:

$$s = 2(A - b) + 2(A - 3b) + ... + 2[A - (2n - 1)b] =$$

$$= 2nA - 2n^2 b = 2n\,(A - nb). \quad (2)$$

Rezultatul se poate scrie și pe baza *bilanțului energetic* . Inițial resortul are energia potențială elastică $kA^2/2$, iar final, după efectuarea celor n semioscilații, resortul rămâne cu deformația reziduală $A - n\cdot 2b$, deci cu energia elastică potențială $(1/2)\,k\,(A - 2nb)^2$ și în afară de aceasta se cheltuiește lucru mecanic împotriva forței de frecare (transformat în căldură) $\mu\, mg \cdot s$:

$$kA^2/2 - (1/2)\,k\,(A - 2nb)^2 = \mu\, mg \cdot s\,, \qquad (3)$$

de unde se obține rezultatul (2) ($b = \mu\, mg / k$) :

$$s = 2n\,(A - nb) = [kA^2/2 - (1/2)\,k\,(A - 2nb)^2] : (\mu\, mg) = 1{,}64 \text{ m}\,. \qquad (4)$$

Timpul total până la oprire (durata oscilațiilor) este

$$t = n \cdot T/2 = n\,\pi\,\sqrt{m/k} = 2{,}84 \text{ s}\,. \qquad (5)$$

* *

14.31 Calculați raportul B_{max}/B_{stat} cunoscând decrementul logaritmic D.

Rezolvare. Din teoria oscilațiilor forțate (v. de exemplu, cartea autorului: **Mecanică și Acustică**, Ed.III, Editura APH, București 1999) avem amplitudinea oscilațiilor forțate la "*rezonanța elongațiilor*" și elongația statică produsă de forța maximă:

$$B_{max} = \frac{F_o}{2mb\omega'}\,, \quad \omega'^2 = \omega_o^2 - b^2\,, \qquad (1)$$

$$B_{stat} = \frac{F_o}{k} = \frac{F_o}{m\omega_o^2}\,. \qquad (2)$$

$$D = b\,T' = 2\pi\, b : \omega'\,. \qquad (3)$$

$$\frac{B_{max}}{B_{stat}} = \frac{\omega_o^2}{2b\omega'} = \frac{\omega'^2 + b^2}{2b\omega'} = \frac{1+(b/\omega')^2}{2b/\omega'} =$$

$$= \frac{1+D^2/(2\pi)^2}{2 \cdot D/(2\pi)} = \frac{\pi}{D} + \frac{D}{4\pi}\,. \qquad (4)$$

Pentru amortizări *mici* :

$$\frac{B_{max}}{B_{stat}} \approx \frac{\pi}{D} \gg 1\,, \text{ pentru } D \ll 1\,. \qquad (5)$$

* *

14.32 Amplitudinea oscilațiilor forțate este aceeași pentru două frecvențe $\omega_{1,2}$. Aflați frecvența de rezonanță a elongațiilor.

Rezolvare. Amplitudinea oscilațiilor forțate și frecvența de rezonanță a elongațiilor sunt

$$B = \frac{F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2 b^2}}\,, \quad \omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2 - 2b^2}\,. \qquad (1)$$

Prin urmare, condiția din enunț :

$$(\omega_o^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2 b^2 = (\omega_o^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_2^2 b^2\,, \qquad (2)$$

$$\omega_o^4 - 2\omega_o^2\omega_1^2 + \omega_1^4 + 4\omega_1^2 b^2 = \omega_o^4 - 2\omega_o^2\omega_2^2 + \omega_2^4 + 4\omega_2^2 b^2\,,$$

$$-\,2\omega_o^2\,(\omega_1^2 - \omega_2^2) + \omega_1^4 - \omega_2^4 + 4\,b^2(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 0\,,$$

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2 - 2b^2} = \sqrt{\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) : 2}\,. \qquad (3)$$

* *

14.33. O bilă de masă m alungește static un resort cu x_o. Știind că la efectuează oscilații verticale forțate pe un resort, sub acțiunea unei forțe sinusoidale periodice de amplitudine F_o, cu decrementul logarit[mic] D, aflați frecvența de rezonanță și amplitudinea la rezonanță (rezonanț[a] elongațiilor).

Rezolvare. Decrementul logaritmic :

$$D = bT' = \frac{2\pi b}{\omega'}\,, \quad D^2 = \frac{4\pi^2 b^2}{\omega_o^2 - b^2} \rightarrow \frac{b^2}{\omega_o^2} = \frac{D^2}{D^2 + 4\pi^2}\,. \qquad (1)$$

Frecvența de rezonanță a elongațiilor :

$$\omega_{rez}^2 = \omega_o^2 - 2b^2 = \omega_o^2\,(1 - 2b^2/\omega_o^2) = \omega_o^2\,\frac{-D^2 + 4\pi^2}{D^2 + 4\pi^2}\,,$$

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m} = \frac{mg/x_o}{m} = \frac{g}{x_o}\,, \qquad (2)$$

$$\omega_{rez} = \sqrt{\frac{g}{x_o}\,\frac{1 - D^2/(4\pi)^2}{1 + D^2/(4\pi)^2}}\,.. \qquad (3)$$

Amplitudinea la rezonanța elongațiilor :

$$B_{max} = \frac{F_o}{2mb\omega'} = \frac{F_o}{2mb\,\sqrt{\omega_o^2 - b^2}}\,, \qquad (4)$$

unde înlocuim pe b dat de (1):

$$B_{max} = \frac{F_o}{2m\omega_o^2 D}\,\frac{D^2 + 4\pi^2}{2\pi} = \frac{F_o D x_o}{4\pi mg}\left(1 + \frac{4\pi^2}{D^2}\right). \qquad (5)$$

* *

14.34. Un pendul elastic are perioada oscilațiilor neamortizate T_o. Asupra corpului acționează o forță sinusoidală de amplitudine F_o și o forță de frecare proporțională cu viteza . La rezonanța vitezelor ampli[tu]dinea oscilațiilor este B_o . Aflați coeficientul de rezistență și puterea medie disipată la rezonanța vitezelor.

Rezolvare. Rezonanța vitezelor are loc la frecvența forței exterioare $= \omega_o$. Atunci la rezonanța vitezelor amplitudinea elongațiilor va fi :

$$B = \frac{F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2 b^2}} \rightarrow B_o = \frac{F_o}{2mb\omega_o}\,. \qquad (1)$$

Dar coeficientul de amortizare b este definit prin coeficientul de rezi[sten]ță r prin relația :

$$b = r/(2m), \qquad r = 2mb. \qquad (2)$$

Atunci din (1) rezultă

$$r = \frac{F_o}{B_o\omega_o} = \frac{F_o T_o}{2\pi B_o}\,. \qquad (3)$$

Elongația și viteza oscilațiilor întreținute (forțate) sunt :

$$x = \frac{F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2 b^2}}\cos(\omega t+\beta)\,, \tag{3}$$

$$v = \dot{x} = \frac{\omega F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2 b^2}}\cos(\omega t+\beta+\pi/2)\,. \tag{4}$$

Puterea *medie* (pe o perioadă) disipată :

$$P(\omega) = \langle f\,v\rangle = \frac{\omega F_o^2\langle\cos\omega t\,\cos(\omega t+\beta+\pi/2)\rangle}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2 b^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\omega F_o^2\cos(\beta+\pi/2)}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2 b^2}}\,, \tag{5}$$

dar

$$\cos(\beta+\pi/2) = -\sin\beta = \frac{2\omega b}{\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2 b^2}}\,, \tag{6}$$

$\omega_o{}^2 = k/m\ ,\quad r = 2mb\ ,$

$$(\omega_o{}^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2 b^2 = \frac{\omega^2}{m^2}\left[r^2+(\omega m - k/\omega)^2\right],$$

rezultă (7)

$$P(\omega) = \langle f\,v\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{r F_o^2}{r^2+(\omega m-k/\omega)^2} = \langle r\,v^2\rangle\,. \tag{8}$$

Energia care intră în sistem prin lucrul mecanic al forței aplicate f este disipată (în regim staționar de oscilații forțate) prin lucrul mecanic al forței de frecare rv.

La rezonanța vitezelor $\omega = \omega_o = \sqrt{k/m}$:

$$P(\omega_o) = P_{max} = \frac{F_o^2}{2r} = \frac{\pi F_o B_o}{T_o}\,. \tag{9}$$

* *

14.35. Pentru două frecvențe $\omega_{1,2}$ ale forței sinusoidale perturbatoa-e, amplitudinea vitezei se reduce la jumătate din valoarea maximă. Aflați ecvența de rezonanță a vitezelor și coeficientul de amortizare.

Rezolvare. Amplitudinea vitezei este (v. ecuația (4) de la problema pre-dentă **14.34**):

$$v_o = \frac{\omega F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2 b^2}} \tag{1}$$

ste maximă la rezonanța vitezelor ($\omega = \omega_o$) :

$$v_{o\,max} = \frac{F_o}{2mb} = \frac{F_o}{r}\,. \tag{2}$$

Conform enunțului :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{ht}{T}\cos n\omega t\,dt = \frac{2h}{T^2 n\omega}\int_0^T t\,d(\sin n\omega t) =$$

$$= \frac{2h}{T^2 n\omega}\,t\sin n\omega t\,\Big|_0^T - \frac{2h}{T^2 n\omega}\int_0^T \sin n\omega t\,dt = 0\ ,\quad (n \neq 0). \quad (2$$

$$b_n = \frac{2h}{T^2}\int_0^T t\sin n\omega t\,dt = \frac{2h}{T^2 n\omega}\int_0^T -t\,d\cos n\omega t =$$

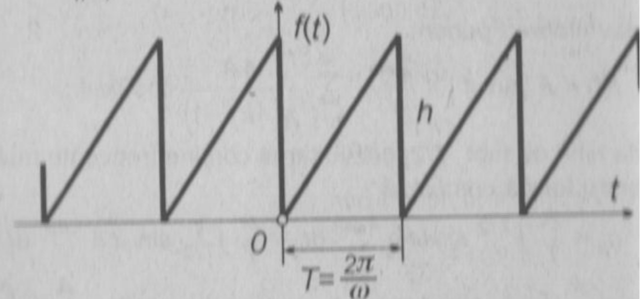
$$= -\frac{2h}{T^2 n\omega}\,t\cos\omega t\,\Big|_0^T + \frac{2h}{T^2 n\omega}\int_0^T \cos n\omega t\,dt =$$

$$= -\frac{2h}{T^2 n\omega}\,T = -\frac{h}{\pi n}\,,\quad (n \neq 0)\,. \quad (3$$

Dezvoltarea în serie *Fourier* :

$$f(t) = \frac{h}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h}{\pi n}\sin n\omega t\,. \quad (4$$

Fig.14.10



Pentru forma *complexă* :

$$c_n = (1/2)\,(-\,i\,b_n)\ ,\quad (a_n = 0)\ ,\quad (n \neq 0)$$

sau prin integrare ($n \neq 0$) :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{h}{T}\,t\,e^{-i\,n\omega t}\,dt = \frac{h}{T^2(-in\omega)}\int_0^T t\,de^{-i\,n\omega t} = \frac{i\,h}{2\pi n} = \frac{h}{2\pi n}\,e^{\,i\,\pi/2}$$

Dezvoltarea în serie *Fourier*:

$$f(t) = \frac{h}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{h}{2\pi n}\,e^{\,i\,(n\omega t+\pi/2)}\,,$$

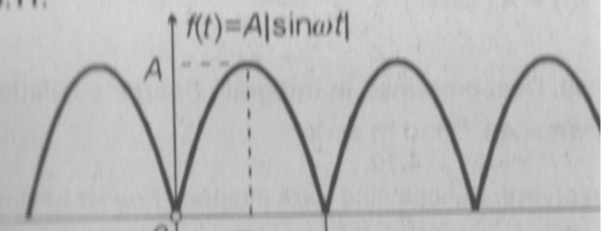
unde accentul la Σ înseamnă excluderea lui $n = 0$.

Funcția are în punctul (0, $h/2$) un *centru de simetrie*, de aceea conți-nutul sinusuri.

* *

14.39. Dezvoltați în serie trigonometrică sinusoida "redresată" $= A\,|\sin\omega t\,|$ din fig.14.11.

Fig.14.11



Rezolvare. Funcţia fiind simetrică, dezvoltarea conţine numai cosinusuri .

$$a_o = \langle f \rangle = \frac{1}{T/2} \int_o^{T/2} A\sin\omega t \, dt = \frac{2}{\pi} A \, , \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{A}{T} \int_o^{T/2} \left[\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t\right] dt \, -$$

$$- \frac{A}{T} \int_{T/2}^{T} \left[\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t\right] dt \, . \qquad (2)$$

Pentru n **impar** : $a_n = 0$, deoarece perioada funcţiei este $T/2$. Pentru n par, $n = 2k$:

$$a_{2k} = \frac{A}{T\omega}\left[-\frac{1}{2k+1}\cos(2k+1)\omega t + \frac{1}{2k-1}\cos(2k-1)\omega t\right]_o^{T/2} -$$

$$-\frac{A}{T\omega}\left[\,\ldots\,\right]_{T/2}^{T} = -\frac{4A}{\pi\left(4k^2-1\right)} . \qquad (3)$$

Dezvoltarea *Fourier* :

$$f(t) = A\,|\sin\omega t\,| = \frac{2A}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi\left(4k^2-1\right)} \cos 2k\omega t \, ; \qquad (4)$$

perioada fiind de fapt $T/2$, dezvoltarea conţine frecvenţe multiple lui 2ω .

Pentru forma complexă :

$$c_n = \frac{A}{T}\int_o^{T/2} \sin\omega t \, e^{-i\,n\omega t} dt - \frac{A}{T}\int_{T/2}^{T} \sin\omega t \, e^{-i\,n\omega t} dt = \qquad (5)$$

$$= \frac{A}{T}\int_o^{T/2}\left[\sin\omega t \cos n\omega t - i \sin\omega t \sin n\omega t\right] dt - \frac{A}{T}\int_{T/2}^{T}\left[\,\ldots\,\right] dt \, . \qquad (6)$$

Pentru n **impar**, c_n se anulează, fiindcă perioada este $T/2$.

Pentru n **par**, $n = 2k$:

$$c_n = \frac{A}{2T}\int_o^{T/2}\left[\sin(1+2k)\omega t - \sin(2k-1)\omega t\right] dt \, +$$

$$+ \, i \, \frac{A}{2\pi}\int_o^{T/2}\left[\cos(2k+1)\omega t - \cos(2k-1)\omega t\right] dt - \left\{\,\ldots\,\right\}_{T/2}^{T} =$$

$$= \frac{A}{2T}\left[\frac{2}{(2k+1)\omega} - \frac{2}{(2k-1)\omega}\right] - \frac{A}{2T}\left[\frac{-2}{(2k+1)\omega} - \frac{-2}{(2k-1)\omega}\right] =$$

$$= \frac{2A}{T\omega}\,\frac{-2}{4k^2-1} = -\frac{4A}{2\pi\left(4k^2-1\right)} = \frac{2A}{\pi\left(1-4k^2\right)} . \qquad (7)$$

Dezvoltarea *Fourier* :

$$f(t) = A\,|\,\sin\omega t\,| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2A}{\pi}\,\frac{1}{1-4k^2}\, e^{i\,2k\omega t} . \qquad (8)$$

* *

14.40. Descompuneţi în integrală *Fourier* oscilaţia amortizată aperiodică : $f(t) = Ae^{-b|t|}$.

Rezolvare. Funcţia fiind **pară** integrala *Fourier* devine :

$$f(t) = \int_o^{\infty} a(\omega)\cos\omega t \, d\omega \, , a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_o^{\infty} f(t)\cos\omega t \, dt \, , \qquad (1)$$

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_o^{\infty} A\,e^{-bt}\cos\omega t \, dt =$$

$$= \frac{2A}{\pi}\left[\frac{e^{-bt}}{b^2+\omega^2}\left(-b\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right)\right]_o^{\infty} =$$

$$= \frac{2Ab}{\pi\left(b^2+\omega^2\right)} . \qquad (2)$$

Prin urmare integrala *Fourier* :

$$Ae^{-b\,|\,t\,|} = \frac{2}{\pi} Ab\int_o^{\infty} \frac{\cos\omega t}{b^2+\omega^2} d\omega \, . \qquad (3)$$

* *
*

$$x = \frac{F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2b^2}}\cos(\omega t+\beta)\,, \qquad (3)$$

$$v = \dot{x} = \frac{\omega F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2b^2}}\cos(\omega t+\beta+\pi/2)\,. \qquad (4)$$

Puterea *medie* (pe o perioadă) disipată :

$$P(\omega) = \langle f v\rangle = \frac{\omega F_o^2\langle\cos\omega t\cos(\omega t+\beta+\pi/2)\rangle}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2b^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\omega F_o^2\cos(\beta+\pi/2)}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2b^2}}\,, \qquad (5)$$

dar

$$\cos(\beta+\pi/2) = -\sin\beta = \frac{2\omega b}{\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2b^2}}\,, \qquad (6)$$

$\omega_o^2 = k/m\ ,\quad r = 2mb\,,$

$$(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\omega^2b^2 = \frac{\omega^2}{m^2}\left[r^2+(\omega m-k/\omega)^2\right], \qquad (7)$$

rezultă

$$P(\omega) = \langle f v\rangle = \frac{1}{2}\frac{rF_o^2}{r^2+(\omega m-k/\omega)^2} = \langle r v^2\rangle\,. \qquad (8)$$

Energia care intră în sistem prin lucrul mecanic al forței aplicate f este disipată (în regim staționar de oscilații forțate) prin lucrul mecanic al forței de frecare rv.

La rezonanța vitezelor $\omega = \omega_o = \sqrt{k/m}$:

$$P(\omega_o) = P_{max} = \frac{F_o^2}{2r} = \frac{\pi F_o B_o}{T_o}\,. \qquad (9)$$

* *

14.35. Pentru două frecvențe $\omega_{1,2}$ ale forței sinusoidale perturbatoare, amplitudinea vitezei se reduce la jumătate din valoarea maximă. Aflați frecvența de rezonanță a vitezelor și coeficientul de amortizare.

Rezolvare. Amplitudinea vitezei este (v. ecuația (4) de la problema precedentă **14.34**):

$$v_o = \frac{\omega F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2b^2}} \qquad (1)$$

și este maximă la rezonanța vitezelor ($\omega = \omega_o$) :

$$v_{o\,max} = \frac{F_o}{2mb} = \frac{F_o}{r}\,.$$

Conform enunțului : (2)

$$\frac{1}{2}\frac{F_o}{2mb} = \frac{\omega_{1,2}F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega_{1,2}^2\right)^2+4\omega_{1,2}^2b^2}}\,, \qquad (3)$$

deci $\omega_{1,2}$ sunt rădăcinile ecuației *bipătratice* :

$$\left(\omega_o^2+\omega_{1,2}^2\right)^2+4\omega_{1,2}^2b^2 = 16\omega_{1,2}^2b^2$$

sau

$$\omega^4-2(\omega_o^2+6b^2)\,\omega^2+\omega_o^4 = 0. \qquad (4)$$

Termenul liber este egal cu produsul rădăcinilor :

$$\omega_o^4 = \omega_1^2\,\omega_2^2 \ \rightarrow\ \omega_o = \sqrt{\omega_1\omega_2}\,. \qquad (5)$$

Suma rădăcinilor este egală cu coeficientul lui ω^2, cu semn schimbat,

$$\omega_1^2+\omega_2^2 = 2(\omega_o^2+6b^2) \ \rightarrow\ b = \frac{\omega_2-\omega_1}{2\sqrt{3}}\,. \qquad (6)$$

* *

14.36. Determinați raportul $P(\omega) : P_{max}$ **la rezonanța elongațiilor, știind raportul** ω_o/b **.**

Rezolvare. Puterea medie disipată (v.ecuația (8) de la problema **14.34**)

$$P(\omega) = \frac{1}{2}\frac{rF_o^2}{r^2+(\omega m-k/\omega)^2}\,,\qquad P_{max} = P(\omega_o) = \frac{F_o^2}{2r}\,. \qquad (1)$$

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2-2b^2} = \sqrt{k/m-r^2/\left(2m^2\right)}\,. \qquad (2)$$

$$P(\omega_{rez}) = \frac{F_o^2}{2r}\,\frac{k/m-r^2/\left(2m^2\right)}{k/m-r^2/\left(4m^2\right)}\,, \qquad (3)$$

$$\frac{P(\omega_{rez})}{P_{max}} = \frac{k/m-2r^2/\left(4m^2\right)}{k/m-r^2/\left(4m^2\right)} = \frac{\omega_o^2-2b^2}{\omega_o^2-b^2}\,. \qquad (4)$$

* *

14.37. Dezvoltați în serie trigonometrică oscilațiile triunghiulare di[n] fig.14.9.

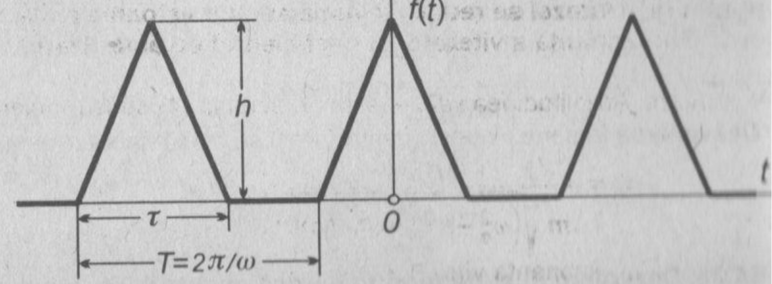


Fig.14.9

Rezolvare. Deoarece oscilația este **simetrică**, deci descrisă de o func[ție] *pară*, în dezvoltarea sa vor apare numai *cosinusurile*:

$$a_o = \langle f \rangle = \frac{1}{2}\tau h : T = \frac{h\tau}{2T}, \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_o^T f(t)\cos n\omega t\,dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_o^T f(t)\sin n\omega t\,dt = 0, \quad (n \neq 0)$$

sau pentru dezvoltarea *complexă* :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_o^T f(t)\,e^{-i\,n\omega t}\,dt, \qquad c_n = \frac{1}{2}\,(a_n - i\,b_n), \quad (n \neq 0) \qquad (2)$$

Funcția f este descrisă de ecuațiile :

$$f = h + 2ht/\tau, \quad t \in (-\tau/2, 0) \text{ și } f = h - 2ht/\tau, \quad t \in (0, \tau/2). \qquad (3)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\pi/2}^{o}\left(h+\frac{2h}{\pi}t\right)\cos n\omega t\,dt + \frac{2}{T}\int_o^{\tau/2}\left(h-\frac{2h}{\pi}t\right)\cos n\omega t\,dt =$$

$$= \frac{4h}{T}\int_o^{\tau/2}\cos n\omega t\,dt - \frac{8h}{T\tau}\int_o^{\tau/2} t\cos n\omega t\,dt = \frac{4h}{Tn\omega}\sin n\omega\tau/2 -$$

$$- \frac{8h}{T\tau n\omega}\int_o^{\tau/2} t\,d(\sin n\omega t) = \frac{4h}{Tn\omega}\sin n\omega\tau/2 - \frac{8h}{T\tau n\omega}\,\frac{\tau}{2}\sin n\omega\tau/2 +$$

$$+ \frac{8h}{T\tau n\omega}\int_o^{\tau/2}\sin n\omega t\,dt = \frac{8h}{T\tau n^2\omega^2}\,(-\cos n\omega\tau/2+1) =$$

$$= \frac{4hT}{\pi^2\tau n^2}\sin^2\frac{\pi n\tau}{2T}, \quad (n \neq 0). \qquad (4)$$

Dezvoltarea în serie *Fourier* :

$$f(t) = \frac{h\tau}{2T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4hT}{\pi^2\tau n^2}\sin^2\frac{\pi n\tau}{2T}\cdot\cos n\omega t. \qquad (5)$$

Pentru forma complexă :

$$c_n = (1/2)\,a_n, \quad (b_n = 0), \quad (n \neq 0) \qquad (6)$$

sau prin integrare :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{o}\left(h+\frac{2h}{\tau}t\right)e^{-i\,n\omega t}\,dt + \frac{1}{T}\int_o^{\tau/2}\left(h-\frac{2h}{\tau}t\right)e^{-i\,n\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{2h}{T}\int_o^{\tau/2}\cos n\omega t\,dt - \frac{2h}{T\tau}\int_o^{\tau/2} t\,2\cos n\omega t\,dt = \frac{2h}{T\omega n}\sin n\omega\tau/2 -$$

$$- \frac{4h}{T\tau\omega n}\int_o^{\tau/2} t\,d(\sin n\omega t) = \frac{2h}{T\omega n}\sin n\omega\tau/2 - \frac{4h}{T\tau\omega n}\,\frac{\tau}{2}\sin n\omega\tau/2 +$$

$$+ \frac{4h}{T\tau\omega n}\int_o^{\tau/2}\sin n\omega t\,dt = \frac{2h}{\pi\tau n^2\omega}\,[1-\cos n\omega\tau/2] =$$

$$= \frac{4h}{\pi\tau\omega n^2}\sin^2 n\omega\tau/4. \qquad (7)$$

Dezvoltarea în serie *Fourier* (pentru $n = 0$ se ridică nedeterminarea) :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4h}{\pi\tau\omega n^2}\sin^2(n\omega\tau/4)\cdot e^{i\,n\omega t}. \qquad (8)$$

* *

14.38. Dezvoltați în serie trigonometrică oscilațiile în "dinți de fierăstrău" din fig.14.10.

Rezolvare. $f(t) = h\,t/T$, $\quad a_o = \langle f \rangle = h/2$, $\qquad (1)$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_o^T \frac{ht}{T}\cos n\omega t\,dt = \frac{2h}{T^2 n\omega}\int_o^T t\,d\,(\sin n\omega t) =$$

$$= \frac{2h}{T^2 n\omega}\,t\sin n\omega t\,\Big|_o^T - \frac{2h}{T^2 n\omega}\int_o^T \sin n\omega t\,dt = 0, \quad (n \neq 0). \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{2h}{T^2}\int_o^T t\sin n\omega t\,dt = \frac{2h}{T^2 n\omega}\int_o^T -t\,d\cos n\omega t =$$

$$= -\frac{2h}{T^2 n\omega}\,t\cos\omega t\,\Big|_o^T + \frac{2h}{T^2 n\omega}\int_o^T \cos n\omega t\,dt =$$

$$= -\frac{2h}{T^2 n\omega}\,T = -\frac{h}{\pi n}, \quad (n \neq 0). \qquad (3)$$

Dezvoltarea în serie *Fourier* :

$$f(t) = \frac{h}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h}{\pi n}\sin n\omega t. \qquad (4)$$

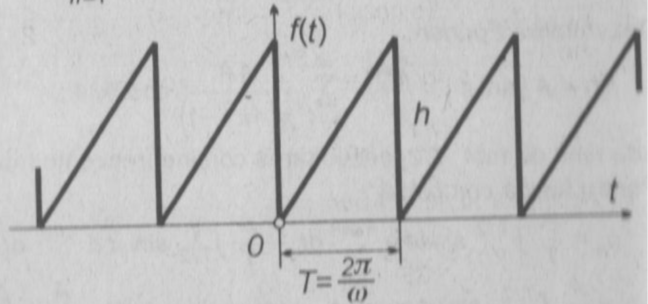


Fig.14.10

Pentru forma *complexă* :

$$c_n = (1/2)\,(-i\,b_n), \quad (a_n = 0), \quad (n \neq 0)$$

sau prin integrare ($n \neq 0$) :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_o^T \frac{h}{T}\,t\,e^{-i\,n\omega t}\,dt = \frac{h}{T^2(-in\omega)}\int_o^T t\,de^{-i\,n\omega t} = \frac{i\,h}{2\pi n} = \frac{h}{2\pi n}\,e^{i\,\pi/2},$$

Dezvoltarea în serie *Fourier*.

$$f(t) = \frac{h}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{h}{2\pi n}\,e^{i\,(n\omega t+\pi/2)},$$

unde accentul la Σ înseamnă excluderea lui $n = 0$.

Funcția are în punctul $(0, h/2)$ un *centru de simetrie*, de aceea conține numai sinusuri.

* *

14.39. Dezvoltați în serie trigonometrică sinusoida "redresată" $= A\,|\sin\omega t\,|$ din fig.14.11.

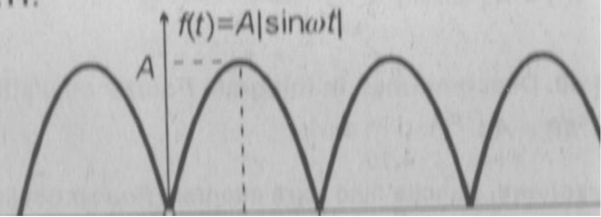


Fig.14.11

16. *SISTEME ACUSTICE*

16.1. O coardă întinsă cu forța F_1 = 160 N dă bătăi de frecvență ν_b = = 20 Hz cu un diapazon. Întinsă fiind cu forța F_2 = 250 N, ea vibrează la *unison* cu diapazonul. Aflați frecvența diapazonului.

Rezolvare. Frecvențele sunetului emis de coardă sunt :

$$\nu_1 = c/(2\ell) = [1/(2\ell)]\sqrt{F_1/(S\rho)} < \nu_2 = [1/(2\ell)]\sqrt{F_2/(S\rho)} \quad . \qquad (1)$$

Conform problemei:

$$\nu_b = \nu_d - \nu_1 , \qquad \nu_2 = \nu_d , \qquad (2)$$

de unde rezultă :

$$\nu_1/\nu_2 = \nu_1/\nu_d = \sqrt{F_1/F_2} ,$$

$$\nu_b = \nu_d - \nu_1 = \nu_d - \nu_d\sqrt{F_1/F_2} = \nu_d(1 - \sqrt{F_1/F_2}) ,$$

$$\nu_d = \nu_b : (1 - \sqrt{F_1/F_2}) = 100 \text{ Hz} . \qquad (3)$$

* *

16.2. Sunetul fundamental emis de o coardă produce ν_b = 10 Hz, bătăi pe secundă, cu sunetul emis de un diapazon . Dacă se scurtează coarda cu fracțiunea f = 0,010 =1,0 % din lungimea ei, ea intră în rezonanță cu diapazonul. Aflați frecvența diapazonului.

Rezolvare. Frecvențele sunetului emis de coardă sunt :

$$\nu_1 = c/(2\ell) < \nu_2 = c/[2(\ell - f\ell)] = c/[2\ell(1-f)] . \qquad (1)$$

Conform enunțului problemei:

$$\nu_b = \nu_d - \nu_1 , \qquad \nu_2 = \nu_d , \qquad (2)$$

de unde rezultă :

$$\nu_1/\nu_2 = \nu_1/\nu_d =$$

$$= [c/(2\ell)] : \{ c/[2\ell(1-f)] \} = 1 - f ,$$

$$\nu_b = \nu_d - \nu_1 = \nu_d - \nu_d(1-f) ,$$

$$\nu_d = \nu_b / f = 1000 \text{ Hz} . \qquad (3)$$

* *

16.3. O coardă de masă m este fixată la capete. Ea vibrează pe frecvența sa fundamentală ω cu amplitudinea maximă (în ventru) A_m . Calculați energia cinetică maximă a coardei și energia cinetică medie.

Rezolvare. Pentru frecvența *fundamentală* avem condiția :

$$\ell = \lambda/2 \rightarrow k = 2\pi/\lambda = \pi/\ell . \qquad (1)$$

Ecuația undei *staționare* pe coardă este

$$u(x, t) = A_m \sin(2\pi x/\lambda) \cdot \sin\omega t = A_m \sin(\pi x/\ell) \sin\omega t , \qquad (2)$$

care satisface *condițiile la **margine*** : pentru $x = 0$ și $x = \ell$, avem $u = 0$ (coardă fixată la capete), $u(\ell/2, t) = A_m$.

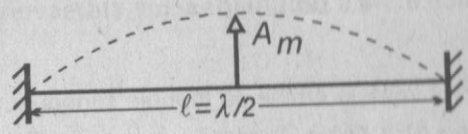


Fig.16.1

Reamintim de la oscilatorul armonic legătura dintre elongație și viteză

$$y = A\sin\omega t \rightarrow v = \omega A\cos\omega t \qquad (3)$$

(viteza este derivata în raport cu timpul a coordonatei : $v = \dot{y}$).
Atunci și în cazul nostru

$$v(x, t) = \omega A_m \sin(\pi x/\ell) \cos\omega t . \qquad (4)$$

Energia *cinetică* a corzii se compune din energia cinetică a particulelor sale. Împărțim coarda într-un număr foarte mare de particule identice Δm, vor avea energia cinetică :

$$\Delta E_c = (1/2)\,\Delta m v^2 = (1/2)\,\Delta m\,\omega^2 A_m^2 \sin^2(\pi x/\ell) \cos^2\omega t . \qquad (5)$$

Pentru un moment dat să însumăm energiile cinetice ale particulelor corzii, au energii cinetice diferite după coordonata x . Dar este foarte ușor să aflăm energia cinetică ***medie*** a unei particule. Aceasta revine la a lua valoarea m a lui sinus pătrat :

$$\langle \sin^2(\pi x/\ell) \rangle = 1/2 - (1/2)\langle \cos(2\pi x/\ell) \rangle = 1/2 , \qquad (6)$$

unde valoarea medie a cosinusului pe o *perioadă* este zero .

$$\langle \Delta E_c \rangle = (1/4)\,\Delta m\,\omega^2 A_m^2 \cos^2\omega t \rightarrow$$

$$\rightarrow E_c = (1/4)\, m\,\omega^2 A_m^2 \cos^2\omega t . \qquad (7)$$

În momentul când $\cos\omega t = \pm 1$, E_c va fi maximă :

$$E_{c\,max} = (1/4)\, m\,\omega^2 A_m^2 . \qquad (8)$$

Energia cinetică a corzii mediată în *timp* se obține imediat din (7), știi media pătratului cosinusului (sau sinusului) este 1/2 .

$$\langle E_c \rangle = (1/8) m\,\omega^2 A_m^2 . \qquad (9)$$

* *

16.4. Un tub sonor închis emite tonul fundamental de frecvență = 250 Hz. Cunoscând viteza sunetului în aer c = 340 m/s , aflați lungim tubului și frecvența tonului fundamental emis de același tub dacă îl

deschidem

Rezolvare. Frecvențele emise de tuburi sonore *închise*, respectiv *deschise* , sunt :

$$\nu = (2n-1)\cdot c/(4\ell) \text{ (închise)} ,$$

$$\nu = 2n\cdot c/(4\ell) = n\cdot c/(2\ell) \text{ (deschise)} , \quad n \in \mathbf{N} .$$

În cazul nostru :

$$\nu = c/(4\ell)\ , \qquad \ell = c/(4\nu) = 0{,}34\ \text{m}\ . \qquad (2)$$

Deschizând tubul frecvența devine :

$$\nu\,' = c/(2l) = 2\nu = 500\ \text{Hz}\ . \qquad (3)$$

* *

16.5. Două tuburi sonore, unul închis şi altul deschis, au aceeaşi lungime. Tubul deschis are frecvența fundamentală ν = 440 Hz . Calculați frecvența armonicii a 3-a a tubului deschis şi frecvența armonicii a 3-a a tubului închis .

Rezolvare. Frecvențele emise de tuburile sonore sunt :

$$\nu_{2n-1} = (2n-1)\cdot c/(4\ell)\ (\text{închise})\ ,\ \ \nu_n = n\cdot c/(2\ell)\ (\text{deschise}). \qquad (1)$$

Conform problemei: $\nu = c/(2\ell)$ = frecvența fundamentală a tubului deschis, atunci

$$\nu_{2n-1} = (2n-1)\ c/(4\ell) = (1/2)(2n-1)\ \nu\ (\text{închis})\ ,\ \nu_n = n\nu\ \ (\text{deschis})\ ;$$

$$\nu_2{}' = (3/2)\nu = 660\ \text{Hz}\ ;\ \ \nu_3 = 3\nu = 1320\ \text{Hz}\ . \qquad (2)$$

* *

16.6. În timpul vorbirii normale presiunea sonoră este p_s = 0,20 Pa la frecvența ν = 400 Hz. Calculați viteza efectivă a particulelor, amplitudinea oscilațiilor şi intensitatea sunetului, cunoscând rezistența acustică a aerului R_a = 400 N · s/m^3. Care este nivelul sonor ?

Rezolvare.

$$v_{ef} = \frac{p_s}{R_a} = 0{,}50\cdot 10^{-3}\ \text{m/s}\ , \qquad (1)$$

$$v_m = \omega A = \sqrt{2}\ v_{ef} = \frac{\sqrt{2}\ p_s}{R_a} \ \rightarrow$$

$$A = \frac{\sqrt{2}\ p_s}{\omega R_a} = 0{,}28\cdot 10^{-6}\ \text{m}\ . \qquad (2)$$

$$I = \frac{p_s^2}{R_a} = 0{,}10\cdot 10^{-3}\ \text{W/m}^2, \qquad (3)$$

$$L = 20\ \lg\frac{p_s}{p_o} = 80\ \text{dB}\ , \qquad (p_o = 2\cdot 10^{-5}\ \text{N/m}^2)\ . \qquad (4)$$

* *

16.7. Câte surse sonore identice trebuie reunite pentu ca nivelul auditiv să crească cu ΔS = 10 phon față de nivelul dat de o singură sursă ?

Rezolvare. *Nivelul* sonor al unui sunet de *intensitate I* este definit prin

$$L = 10\ \lg(I/I_o)\ ,\ \ \text{dB}\ , \qquad (1)$$

unde I_o este intensitatea sunetului de referință (la *pragul* auditiv *inferior*, la 1 kHz, avem $I_o = 10^{-12}$ W/m^2).

$$L_2 = L_1 + \Delta L = 10\ \lg(I_2/I_o) = 10\ \lg(NI_1/I_o)\ . \qquad (1)$$

De aici rezultă :

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10\ [\ \lg(NI_1/I_o) - \lg(I_1/I_o)\ ] = 10^{\lg N}\ ,$$

$$N = 10^{\Delta L/10} = 100\ . \qquad (2)$$

* *

16.8. La distanța r = 20 m de o sursă sonoră punctiformă de frecvenț[ă] ν = 1,0 kHz nivelul auditiv este S = 20 phon . La ce distanță sunetul nu se mai aude ? (Se neglijează absorbția în aer.)

Rezolvare. În cazul undei sonore *sferice*, intensitatea sunetului variază invers proporțonal cu pătratul distanței până la sursă ;

$$I = \frac{I_o}{r^2}\ , \qquad \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 . \qquad (1)$$

La ν = 1,00 kHz nivelul de intensitate sonoră L coincide cu nivelul intensității auditive S (tăria sunetului) :

$$S = 10\ \lg\frac{I}{I_m} = 10\ \lg\frac{I_o}{r^2 I_m}\ , \qquad 0 = 10\ \lg\frac{I_o}{r'^2 I_m}\ , \qquad (2)$$

unde I_m este pragul auditiv inferior ,

$$S = 10\ \lg\frac{r'^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad r' = r\sqrt{10^{S/10}} = 200\ \text{m}\ . \qquad (3)$$

* *

16.9. Un observator, situat la distanța r_1 = 1,00 m de un mic diapazon măsoară un timp t_1 = 33 s de la momentul când aude sunetul emis de diapazonul lovit până în momentul când nu-l mai percepe. Situându-se la distanța r_2 = 10,0 m de diapazon, observatorul măsoară acum un timp t_2 = 10 s, diapazonul fiind lovit identic. Calculați coeficientul de amortizare b a vibrațiilor diapazonului (se neglijează absorbția sunetului în aer).

Rezolvare. Energia oscilațiilor fiind **pătratică** în amplitudine scade exponențial cu timpul, cu coeficientul de amortizare *dublu*, $2b$, față de coeficientul de amortizare b al amplitudinii. Ținând seama că în cazul undei *sferice* intensitatea sunetului scade invers proporțional cu pătratul distanței, putem scrie pentru cele două distanțe :

$$\frac{I_o}{r_{1,2}^2}\ e^{-2bt_{1,2}} = I_m\ , \quad I_m \text{ - intensitatea la pragul auditiv inferior,} \qquad (1)$$

$$\frac{r_2^2}{r_1^2}\ e^{-2b(t_1-t_2)} = 1 \quad \rightarrow \quad b = \frac{2{,}3\ \lg\left(r_2/r_1\right)}{t_1 - t_2} = 0{,}10\ \text{s}^{-1}\ . \qquad (2)$$

* *

16.10. Un oscilator elastic oscilează aproape sinusoidal, fiind slab amortizat datorită unei forțe proporționale cu viteza. Pentru a întreține