

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{(n+3)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} \frac{a(a+1)\dots(a+n+1)}{(n+4)!}}{x^n \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{(n+3)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{a+n+1}{n+4} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + \frac{a+1}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})} = x$$

Discuție:

$$l_1 < 1 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ este convergentă}$$

$$l_1 > 1 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ este divergentă}$$

$$l_1 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \text{nu cunoaștem natura lui } \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

$$\text{pt. } x = 1, x_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{(n+3)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} + 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n+4}{a+n+1} + 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n+4-a-n-1}{n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{3-a}{n(1 + \frac{4}{n})} = 3-a$$

Discuție:

$$l_2 < 1 \Leftrightarrow 3-a < 1 \Leftrightarrow -a < -2 \Leftrightarrow a > 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ este divergentă}$$

$$l_2 > 1 \Leftrightarrow 3-a > 1 \Leftrightarrow -a > -2 \Leftrightarrow a < 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ este convergentă}$$

$$l_2 = 1 \Leftrightarrow 3-a = 1 \Leftrightarrow -a = -2 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow \text{natura nu este determinată}$$

$$\text{pt. } a = 2, x_n = \frac{2 * (2+1) * \dots * (2+n)}{(n+3)!} = \frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{1}{(n+3)} \text{ serie armonică cu } \alpha \leq 1 \text{ deci } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ este divergentă}$$

Deci:

$$\text{pt. } x < 1, s_n \text{ este convergentă}$$

$$\text{pt. } x > 1, s_n \text{ este divergentă}$$

$$\text{pt. } x = 1, \text{ avem:}$$

$$\text{pt. } a \geq 2, s_n \text{ este divergentă}$$

$$\text{pt. } a < 2, s_n \text{ este convergentă}$$