(C4) (AG) (16). 24.10.2024.

Repere. Coordonate în raport cu un reper. Operații cu subspații vectoriale

OBS

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect, $S \subset V$ subm. nevidă

1) S este SLI $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\forall x_1,..,x_n \in S \\ \forall a_1,..,a_n \in \mathbb{K}\end{array}\right.$ aî $a_1x_1+\ldots+a_nx_n = 0_V \Rightarrow a_1=\ldots=a_n=0_{\mathbb{K}}\Big]$

2) S este SLD $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\exists x_1,..,x_n \in S \\ \exists a_1,..,a_n \in \mathbb{K}, \text{ nu toți nuli}\end{array}\right.$ aî $a_1x_1+\ldots+a_nx_n = 0_V\Big]$

3) S este SG $\Leftrightarrow$ $V = \langle S \rangle \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\forall x \in V, \ \exists x_1,..,x_n \in S \\ \qquad\quad \exists a_1,..,a_n \in \mathbb{K}\end{array}\right.$ aî $x = a_1x_1+\ldots+a_nx_n\Big]$

Dc S m. finită, at V s.n. sp. vect. finit generat

4) B este bază $\Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ este SLI} \\ B \text{ este SG.}\end{cases}$

$\dim_{\mathbb{K}} V = \text{card}(B)$

OBS a) $\left.\begin{array}{l} S \text{ SLI} \\ S' \subset S\end{array}\right| \Rightarrow S'$ este SLI

b) S SLD $\Rightarrow S \cup \{x_{n+1}\}$ SLD $\quad x_{n+1} \notin S$

c) S SG $\Rightarrow S \cup \{x_{n+1}\}$ SG $\quad x_{n+1} \notin S$.

Ex. $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$, $S = \{\underset{u}{(1,2,3)}, \underset{v}{(-1,1,1)}, \underset{w}{(0,3,4)}\}$

Să se extragă din S un SLI maximal S' și apoi să se extindă S' la o bază în $\mathbb{R}^3$.

SOL $w = u + v \Rightarrow u + v - w = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow S$ este SLD.

$S' = S \setminus \{w\} = \{(1,2,3), (-1,1,1)\}$

$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1\end{pmatrix} = 2 \ (\max) \Rightarrow S'$ este SLI maximal în S

$\mathcal{B}_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$

Extingem S' la o bază în $\mathbb{R}^3$

($\forall$ SLI se poate extinde la o bază în V)

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & \boxed{0} \\ 3 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix} = 3 \ (\max)$$

$S' \cup \{(1,0,0)\}$ bază în $\mathbb{R}^3$

Ex. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$

a) $V' \subset \mathbb{R}^2$ subsp. vect

b) Precizați o bază în V'

Sol

a) $V' \subset \mathbb{R}^2$ subsp $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall (x,y) \in V', \ \forall a,b \in \mathbb{R} \\ (x',y') \in V' \end{array}\right.$ $\Rightarrow \underbrace{a(x,y) + b(x',y')}_{\parallel}$

$(ax+bx', ay+by')$
$\quad\ \ \parallel$
$\ \ (x'', y'')$

$2x - y = 0$

$2x' - y' = 0$

$$2x'' - y'' = 2(\underline{ax} + \underline{\underline{bx'}}) - (\underline{ay} + \underline{\underline{by'}}) = a(\underset{0}{\underbrace{2x-y}}) + b(\underset{0}{\underbrace{2x'-y'}}) = 0$$

$\Rightarrow (x'', y'') \in V' \Rightarrow V' \subset \mathbb{R}$ subsp vect

b) $(x,y) \in V'$, $2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$

$V' = \{\underset{x(1,2)}{(x, 2x)} \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1,2)\} \rangle \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \{(1,2)\} \text{ e SG} \\ \text{dar } \{(1,2)\} \text{ SLI} \end{array}\right| \Rightarrow$

$\{(1,2)\}$ bază în V', $\dim_{\mathbb{R}} V' = 1$.

Ex $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 2z = 0\}$

a) $V' \subset \mathbb{R}^3$ subsp vect

b) Precizați o bază în V'

SOL

a) $\left.\begin{array}{l}\forall (x,y,z),\ (x',y',z') \in V' \\ \forall a,b \in \mathbb{R}\end{array}\right| \Rightarrow a(x,y,z) + b(x',y',z') \in V'$

$a(x,y,z) + b(x',y',z') = (ax+bx', ay+by', az+bz') = (x'', y'', z'')$

$3x'' - y'' + 2z'' = 3(ax+bx') - (ay+by') + 2(az+bz') =$

$= a(\underbrace{3x-y+2z}_{=0}) + b(\underbrace{3x'-y'+2z'}_{=0}) = 0 \Rightarrow (x'',y'',z'') \in V'$

b) $(x,y,z) \in V' \Rightarrow 3x - y + 2z = 0 \Rightarrow y = 3x + 2z$

$(x,y,z) = (x, 3x+2z, z) = (x, 3x, 0) + (0, 2z, z)$

$= x\underbrace{(1,3,0)}_{=u} + z\underbrace{(0,2,1)}_{=v}$

$\left.\begin{array}{l} V' = \langle\{u,v\}\rangle \quad \{u,v\} \text{ SG pt } V' \\ \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 2\ (\max) \Rightarrow \{u,v\} \text{ SLI}\end{array}\right| \Rightarrow \{u,v\}$ e bază în V'.

Def $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect. finit generat, $\mathcal{R} = \{e_1, .., e_n\}$ bază

$\mathcal{R}$ s.n. reper $\Leftrightarrow$ este o bază ordonată.

Prop $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $\mathcal{R} = \{e_1,..,e_n\}$ reper.

$\Rightarrow \forall x \in V,\ \exists!\ (x_1,..,x_n) \in \mathbb{K}^n$ a.î. $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

($(x_1,..,x_n)$ s.n. coordonatele sau componentele lui x în raport cu reperul $\mathcal{R}$)

Dem $V = \langle \mathcal{R} \rangle \Rightarrow \exists x_1,..,x_n \in \mathbb{K}$ a.î. $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$

($\mathcal{R}$ este SG)

Dem. unicitatea componentelor.

Ip. $\exists x_1', \dots, x_n' \in \mathbb{K}$ a.î. $x = x_1' e_1 + \dots + x_n' e_n$.

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x_1' e_1 + \dots + x_n' e_n \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_1') e_1 + \dots + (x_n - x_n') e_n = 0_V \xRightarrow{ReSLI} \begin{matrix} x_1 - x_1' = 0 \\ \vdots \\ x_n - x_n' = 0 \end{matrix}$$

<u>Modificarea componentelor unui vector la schimbarea reperului</u>

$$\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{A} \mathcal{R}' = \{e_1', \dots, e_n'\} \quad \text{repere în } V$$

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \ \forall i = \overline{1,n} \qquad A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \text{ matricea de trecere.}$$

- $x = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \right) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i' \right) e_j$$

- $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$

$$\Rightarrow x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i', \forall j = \overline{1,n}$$

$$X = A X'$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

<u>Prop</u> $A \in GL(n, \mathbb{K})$ (A = inversabilă)

<u>Dem</u>

<u>OBS</u>

$$\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{A} \mathcal{R}' = \{e_1', \dots, e_n'\} \xrightarrow{B} \mathcal{R}'' = \{e_1'', \dots, e_n''\}.$$

$$\mathcal{R} \xrightarrow{C} \mathcal{R}'' \qquad C = AB$$

$$\mathcal{R} \xrightarrow{A} \mathcal{R}' \xrightarrow{B} \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} \xrightarrow{I_n} \mathcal{R} \qquad A \cdot B = BA = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$$

$$\mathcal{R}' \xrightarrow{B} \mathcal{R} \xrightarrow{A} \mathcal{R}', \quad \mathcal{R}' \xrightarrow{I_n} \mathcal{R}'$$

Def a) $\mathcal{R}$ și $\mathcal{R}'$ s.n. repere la fel orientate $\Leftrightarrow \det A > 0$, $\mathcal{R} \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$

b) —\|— opus orientate $\Leftrightarrow \det A < 0$, $\mathcal{R} \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$

OBS Relația „a fi orientate" este o relație de echivalență (i.e. reflexivă, simetrică, tranzitivă)

Criteriu de liniar independență

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect. finit generat, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

$S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ $(m \le n)$

S este SLI $\Longleftrightarrow$ rang matricei componentelor vectorilor din S, în raport cu $\forall$ reper, este maxim.

Dem

Fie $\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V.

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ji} e_j, \ \forall i = \overline{1,m}$$

S este SLI $\Leftrightarrow [\forall a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ a.î. $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0_V \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0]$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0_V \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} v_{ji} e_j\right) = 0_V$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} v_{ji} a_i\right) e_j = 0_V \xRightarrow{\mathcal{R} \text{ e SLI}}$$

(*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} v_{ji} a_i = 0, \ \forall j = \overline{1,n}$

(*) SLO de n ecuații cu m necunoscute $(a_1, \dots, a_m)$ $(m \le n)$

(*) sol. unică nulă $\Leftrightarrow \operatorname{rg} C = m$ (maxim) $\quad \operatorname{rg} C = \operatorname{rg} AC' = \operatorname{rg} C'$

$$C = (v_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}}$$

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \ \forall i = \overline{1,n}$$

OBS $\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{A} \mathcal{R}' = \{e_1', \dots, e_n'\}$

$$v_k = \sum_{r=1}^{n} v_{rk}' e_r', \ \forall k = \overline{1,m} \qquad C' = (v_{rk}')_{\substack{r=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,m}}} \qquad \boxed{C = AC'}$$

Scanat cu CamScanner

Ex. $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $R_0=\{\overset{e_1}{\overset{\parallel}{(1,0)}},\overset{e_2}{\overset{\parallel}{(0,1)}}\}$ reperul canonic.

$R'=\{e_1'=(2,1),\ e_2'=(3,0)\}$.

a) R' e reper în $\mathbb{R}^2$

b) $R_0 \xrightarrow{A} R'$, $R' \xrightarrow{B} R_0$

Sunt R_0 și R' la fel orientate?

c) Fie $x=(1,2)$. Să se afle coord. lui x în rap cu R_0, resp R'

Sol

a) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2=2$

$e_1'=(2,1)=2(1,0)+1\cdot(0,1)=\boxed{2}e_1+\boxed{1}e_2$

$R_0 \xrightarrow{A} R'$

$e_2'=(3,0)=3(1,0)+0(0,1)=\boxed{3}e_1+\boxed{0}e_2$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l}\operatorname{rg}A=2=\max \Rightarrow R' \text{ e SLI}\\ \dim \mathbb{R}^2=|R'|\end{array}\right| \Rightarrow R'$ reper.

b) $R' \xrightarrow{A^{-1}} R_0$

$\det A=-3<0$, $A^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

R_0, R' sunt opus orientate.

c) $x=(1,2)=1(1,0)+2(0,1)=1e_1+2e_2$ $\qquad \overset{(x_1,x_2)}{\overset{\parallel}{(1,2)}}$ coord în rap. cu R_0

M1 $(1,2)=x_1'\overset{e_1'}{\overset{\parallel}{(2,1)}}+x_2'\overset{e_2'}{\overset{\parallel}{(3,0)}}$

$(1,2)=(2x_1'+3x_2',\ x_1')$

$\begin{cases}2x_1'+3x_2'=1 \\ x_1'=2\end{cases}$ $\Rightarrow 3x_2'=1-4$, $x_2=-1$

$(x_1',x_2')=(2,-1)$ coord. în rap cu R'

M2 $X=AX' \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix} \Big| \cdot A^{-1}$

$$A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

Ex $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $S = \{(1,2,3), (-1,1,0)\}$ SLI

b) $S' = \{(1,2,3), (-1,1,0), (1,5,6)\}$ SLD.

$R_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^3$

a) $rg\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2$ (max) $\Rightarrow S$ e SLI

b) $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow S'$ este SLD (rg nu e maxim, rg = 2)

Operații cu subspații vect

$(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect finit generat

$V_1, V_2 \subset V$ subsp vect $\Rightarrow V_1 \cap V_2$ subsp. vect.

$\Rightarrow$ În general, $V_1 \cup V_2$ nu e subsp vect

Considerăm $\underset{\overset{\|\text{not}}{V_1+V_2}}{\langle V_1 \cup V_2 \rangle} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \ a_i \in \mathbb{K}, \ x_i \in V_1 \cup V_2, \ i=\overline{1,n}, \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Prop $\underset{\overset{\|}{\langle V_1 \cup V_2 \rangle}}{V_1+V_2} = \{v_1 + v_2, \ v_1 \in V_1, \ v_2 \in V_2\}$

Dem "$\subseteq$" $x = \underbrace{\overset{v_1}{\sum_{i=1}^{m} a_i x_i}}_{\in V_1} + \underbrace{\overset{v_2}{\sum_{j=m+1}^{n} a_j x_j}}_{\in V_2}$, $x_1, \dots, x_m \in V_1$, $x_{m+1}, \dots, x_n \in V_2$

"$\supseteq$" $\underset{\in V_1}{v_1} + \underset{\in V_2}{v_2}$ este comb. liniară $\in \langle V_1 \cup V_2 \rangle$

Def $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $V_1, V_2 \subseteq V$ subsp. vect.

Spunem că $V_1 + V_2$ este <u>sumă directă</u> și notăm $\underline{V_1 \oplus V_2}$

$\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

Prop $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $V_1, V_2 \subseteq V$ subsp. vect.

$V_1 + V_2$ e sumă directă $\Leftrightarrow \forall\, x \in V_1 + V_2$, $\exists!\, x_1 \in V_1$, $\exists!\, x_2 \in V_2$ a.î. $x = x_1 + x_2$

Dem

"$\Rightarrow$" $V_1 \oplus V_2$, $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

Pp. prin abs $x = \underset{V_1}{x_1} + \underset{V_2}{x_2} = \underset{V_1}{x_1'} + \underset{V_2}{x_2'} \Rightarrow \underbrace{x_1 - x_1'}_{\in V_1} = \underbrace{x_2' - x_2}_{\in V_2} \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

$\Rightarrow x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$

Deci scrierea $x = x_1 + x_2$ este unică

"$\Leftarrow$" Pp. prin abs $\exists\, u \in V_1 \cap V_2$, $u \neq 0_V$

$x = x_1 + x_2 = \underset{V_1}{(x_1 + u)} + \underset{V_2}{(x_2 - u)}$ $\lightning$ (scrierea era unică)

Pp. este falsă $\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

<u>Exemplu</u> $(V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid Tr(A) = 0\}$

$V_2 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = \alpha I_n, \alpha \in \mathbb{R}\}$

a) $V_1, V_2 \subset V$ subsp. vect

b) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$

$\forall A = \alpha I_n, B = \beta I_n \in V_2$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

$aA + bB = (a\alpha + b\beta) I_n \in V_2$

a) $\forall A, B \in V_1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$Tr(aA + bB) = a\underset{0}{Tr(A)} + b\underset{0}{Tr(B)} = 0 \Rightarrow aA + bB \in V_1$

$A = A_1 + A_2$, $A_1 \in V_1$, $Tr A_1 = 0$.

$A_2 \in V_2$, $A_2 = \alpha I_n$.

$A_1 = A - \underbrace{\frac{1}{n} Tr(A) I_n}_{A_2}$. $\alpha = \frac{1}{n} Tr(A)$

$Tr A_1 = Tr A - \frac{1}{\cancel{n}} Tr(A) \cancel{n} = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 \supseteq M_n(\mathbb{R})$

$M_n(\mathbb{R}) \supseteq V_1 + V_2$ (din constr)

$V_1 \cap V_2$ A a.î. $\left.\begin{array}{l} Tr A = 0 \\ A = \alpha I_n \Rightarrow Tr A = n\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \alpha = 0$, $A = O_n$.

Deci $M_n(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$.

$\dim V_1 = n^2 - 1$, $\dim V_2 = 1$.

<u>Teoremă</u> $(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect , $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, $\mathcal{R} = \{e_1, .., e_n\}$ reper.

$x \in V$, $x = x_1 e_1 + .. + x_n e_n$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$S(A) = \{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \underset{(m,n)}{A} \underset{(n,1)}{X} = \underset{(m,1)}{0}\}$

a) $S(A) \subset \mathbb{K}^n$ subsp. vect

b) $\dim S(A) = n - rg(A)$

<u>Exemplu</u> $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$ $V' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}\} = S(A)$

$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$

Precizați o bază în V'

<u>SOL</u> $V' \subset \mathbb{R}^3$ subsp vect , $\dim V' = 3 - rg A = 3 - 2 = 1$

$z = \alpha$ $\begin{cases} x - y = -\alpha \\ 2x + y = \alpha \end{cases} \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$, $y = \alpha$ $S(A) = \{(0, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ $\alpha(0,1,1)$

$\mathcal{R}' = \{(0,1,1)\}$ ... $S(A)$, $\dim V' = |\mathcal{R}'| = 1 \Rightarrow \mathcal{R}'$ este reper în V'

Def $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect finit generat, $V_1, V_2 \subseteq V$ subsp vect.

Dacă $V = V_1 \oplus V_2$, at V_2 s.n. subsp. complementar lui V_1

V_1 — // — V_2.

OBS Subsp. complementar NU e unic.

OBS
a) $V = V_1 \oplus V_2$ și $\mathcal{R}_1$ reper în V_1, $\mathcal{R}_2$ reper în V_2 $\Rightarrow \mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ reper în V

b) $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect $\mathcal{R}$ reper în V
Partiționăm $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$
$V = V_1 \oplus V_2$, unde $V_1 = \langle \mathcal{R}_1 \rangle$ și $V_2 = \langle \mathcal{R}_2 \rangle$.

c) $V_1 \subset V$
Det V_2 = subsp. complementar i.e $V = V_1 \oplus V_2$.
Det un reper $\mathcal{R}_1$ în V_1 (este SLI) pe care îl extindem la un reper în V $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ reper în V
$V_2 = \langle \mathcal{R}_2 \rangle$

EX $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$.

$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}\}$

$V_2' = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

a) $V = V_1 \oplus V_2$; b) $V = V_1 \oplus V_2'$; c) $V = V_1 \oplus W$, $W = ?$
$W \neq V_2$, $W \neq V_2'$

SOL
a) $V_1 = \{(\overset{x(1,0,0)+y(0,1,0)}{\overset{\shortparallel}{(x,y,0)}}) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1,0,0),(0,1,0)\} \rangle \Rightarrow \mathcal{R}_1$ e SG

$\mathcal{R}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \subset$ reperul canonic $\Rightarrow \mathcal{R}_1$ e SLI

$\Rightarrow \mathcal{R}_1$ este reper pt V_1

$V_2 = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = <\{(0,0,1)\}> \quad \mathcal{R}_2 = \{(0,0,1)\}$

$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ (obs b) $\Rightarrow \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

b) $V_2' = \{(x,x,x) = x(1,1,1) \mid x \in \mathbb{R}\} = <\{(1,1,1)\}> \quad \mathcal{R}_2' = \{(1,1,1)\}$ reper în V_2'

$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2' = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$

$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \mathcal{R}$ e SLI

$\dim \mathbb{R}^3 = |\mathcal{R}| = 3$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ reper în $\mathbb{R}^3 \xRightarrow{\text{OBS b)}} \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2'$

M2) Teorema Grassmann

$(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $V_1, V_2 \subseteq V$ subsp vect

$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

Mai mult, $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

$V_1 \oplus V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$, $\dim(\{0_V\}) = 0$

$V_1 = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$V_2' = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$V_1 \cap V_2' = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$V_1 \oplus V_2' \subseteq \mathbb{R}^3$

$\dim(V_1 \oplus V_2') = \dim V_1 + \dim V_2' = 2+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2'$

OBS $V' \subset V$ subsp vect

Dacă $\dim V' = \dim V = n$, at. $V' = V$

c) $V = V_1 \oplus W$, $W = ?$ (subsp. complementar lui V_1)

$\mathcal{R}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ reper în V_1. Extindem $\mathcal{R}_1$ la un reper în $\mathbb{R}^3$

$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3 \qquad W = <\{(0,1,1)\}>$