Seminarul 7

Wednesday, March 31, 2021 8:57 AM

Inele de polinoame (cont.)

2.3. a) $2X_1^2+3X_1X_2X_3-2X_1^2X_2^2+X_3^2+1+X_1^2X_3^2+X_2^4 \in \mathbb{R}[X_1,X_2,X_3]$

$= -2X_1^2X_2^2+X_1^2X_3^2+2X_1^2+3X_1X_2X_3+X_2^4+X_3^2+1.$

$X_1^{a_1}X_2^{a_2}\dots X_n^{a_n} >_{lex} X_1^{b_1}X_2^{b_2}\dots X_n^{b_n}$

$\Leftrightarrow (a_1-b_1, a_2-b_2, \dots, a_n-b_n)$ are primul termen nenul pozitiv

2.7. a) D domeniu de integritate, $a\in D$ și $P, Q \in D[X]$ a.î. a este răd. de ordin n pentru P și $Q(a)\neq 0$.

$\Rightarrow a$ este răd. de ordin n și pentru PQ.

$\Rightarrow (X-a)^n \mid P$ și $(X-a)^{n+1} \nmid P$.

Dem. $(X-a)^n \mid P \Rightarrow (X-a)^n \mid PQ.$

Pp. că $(X-a)^{n+1} \mid PQ \Leftrightarrow \exists\, L$ a.î. $PQ = L(X-a)^{n+1}$

$(X-a)^{n+1} \nmid P$

$(X-a)^n \mid P \Rightarrow P = R\cdot(X-a)^n$ și $(X-a)\nmid R$

$RQ(X-a)^n = L(X-a)^{n+1}$

$\Rightarrow (X-a)^n \underbrace{\left(RQ - L(X-a)\right)} = 0$

$\xRightarrow{D[X]} RQ = L(X-a) \Rightarrow (X-a) \mid Q$ ...

$$\left.\begin{array}{l} RQ = h(X-a) \\ (X-a) \nmid R \end{array}\right\} \overset{D[X]\text{ domeniu}}{\Longrightarrow} \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} (X-a) \mid Q$$

$$\left.\begin{array}{l} (X-a) \mid f_1 \cdot f_2 \\ (X-a) \nmid f_1 \end{array}\right\} \stackrel{?}{\Rightarrow} (X-a) \mid f_2$$

Bezout $\Leftrightarrow$ D domeniu

$$\left(\left.\begin{array}{l} f_1(a) \cdot f_2(a) = 0 \\ f_1(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_2(a) = 0. \right)$$

b) Contraexemplu dacă inelul R nu e domeniu.

$$\mathbb{Z}_6 : \quad \underset{Q}{(\hat{2}X)} \cdot \underset{P}{(\hat{3}X + \hat{3})} = 0$$

-1 rad. "de ordin 1"

dar $PQ = 0 \Rightarrow -1$ e rad. "de ordin ∞" pt PQ.

2.9. (Derivata formală a unui polinom)

K corp comutativ.

$D : K[X] \to K[X]$, • D K-liniară

• $D(1) = 0$

• $D(X^n) = nX^{n-1}, \ \forall n \geq 1$.

Sm derivata formală a unui polinom.

$$D(a_nX^n+\dots+a_1X+a_0)= na_nX^{n-1}+(n-1)a_{n-1}X^{n-2}+\dots$$
$$\dots+a_1.$$

Not $f^{(k)}=D(D(\dots(D(f))\dots))$ de k ori

Prop $f\in K[X]$, $a\in K$. Atunci

a este rad de ordin n pentru $f \iff f^{(k)}(a)=0,\ \forall k=\overline{0,n-1}$

și $f^{(n)}(a)\neq 0$.

---

a) Fie $n\geq 2$ $f_1,\dots f_n\in K[X]$. Dem că

$$D(f_1\cdot\dots\cdot f_n)=D(f_1)\cdot f_2\dots f_n+f_1D(f_2)f_3\dots f_n+\dots+f_1f_2\dots f_{n-1}D(f_n)$$

Începeți pentru f_1 și f_2! + inducție

b) Dacă $f=(X-a)^n$, $k\geq 1$, dem că

$$f^{(1)}=n(X-a)^{n-1}$$
$$f^{(2)}=n(n-1)(X-a)^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}=n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{n-k}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}=n!\,1_K$$
$$f^{(n+1)}=f^{(n+2)}=\dots=0$$

c) În particular, dacă $\operatorname{char} K = p$ (cu p prim), atunci $\forall f \in K[X]$, $f^{(p)} = 0$.

d) $f, g \in K[X] \Rightarrow (fg)^{(n)} = \sum_{l=0}^{n} C_n^l f^{(l)} \cdot g^{(n-l)}$.

Temă!

<u>Polinoame simetrice</u>

$f = (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3) \in K[X_1, X_2, X_3]$ e simetric?

$\Leftrightarrow \operatorname{char} K = 2$

$\in K[X_1, X_2, X_3, X_4]$ NU e simetric!

$f = (X_1 - X_2)^2 (X_1 - X_3)^2 (X_2 - X_3)^2 \in K[X_1, X_2, X_3]$ e simetric!

<u>Th</u> (a polinoamelor simetrice fundamentale)

Fie $f \in R[X_1, \ldots X_n]$ simetric. Atunci "f se poate scrie în mod unic ca polinom în polinoamele simetrice fundamentale"

$\Leftrightarrow \exists!\, g \in R[X_1, \ldots X_n]$ a.î. $f = g(s_1, s_2, \ldots s_n)$, unde polinoamele simetrice fundamentale

$$\begin{cases} s_1 = X_1 + \dots + X_n = \sum_{sym} X_1 \\ s_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + \dots + X_{n-1}X_n \\ \quad = \sum_{sym} X_1X_2 \\ s_3 = \sum_{sym} X_1X_2X_3 \\ \vdots \\ s_n = X_1X_2\dots X_n. \end{cases}$$

<u>Ideea demonstrației</u> f simetric. Pp că f este omogen.

(adică fac aceeași procedura pentru toate componentele omogene)

<u>Ideea principală</u> f are un termen principal: $LT_<(f)$

$LT_{<_{lex}}(f) = aX_1^{k_1}X_2^{k_2}\dots X_n^{k_n}$. <u>Obs</u> $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$

$$\left(X_1^4X_2^6X_3 \underset{si}{\overset{at\ ceeași}{\rightsquigarrow}} X_1^6X_2^4X_3 \right)$$

Aș vrea să scad din f un monom în $s_1, s_2, \dots s_n$

$f_1 = f - a s_1^{d_1}s_2^{d_2}\dots s_n^{d_n}$ a.î. $LT_{<_{lex}}(a s_1^{d_1}\dots s_n^{d_n}) = aX_1^{k_1}X_2^{k_2}\dots X_n^{k_n}$

$\Rightarrow LT_{<_{lex}}(f_1) < LT_{<_{lex}}(f)$.

$LT(f)$
$\vee$
$LT(f_1)$

$$\Rightarrow \operatorname{LT}_{<_{lex}}(f_1) < \operatorname{LT}_{<_{lex}}(f).$$

$$\vdots$$
$$\vee$$
$$\operatorname{LT}(f_1)$$
$$\vee$$
$$\operatorname{LT}(f_2)$$
$$\vdots$$
$$0$$

+ Orice șir descendent de monoame este staționar:

$d_1, \dots, d_n = ?$ a.î. $\operatorname{LT}(s_1^{d_1}\dots s_n^{d_n}) = X_1^{k_1}X_2^{k_2}\dots X_n^{k_n}$?

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{LT}(s_1^{d_1}) &= x_1^{d_1}\\
\operatorname{LT}(s_2^{d_2}) &= x_1^{d_2}x_2^{d_2}\\
&\vdots\\
\operatorname{LT}(s_l^{d_l}) &= x_1^{d_l}x_2^{d_l}\dots x_l^{d_l}
\end{aligned}\right| \Rightarrow \operatorname{LT}(s_1^{d_1}\dots s_n^{d_n}) = X_1^{d_1+\dots+d_n}X_2^{d_2+d_3+\dots+d_n}\dots X_n^{d_n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = d_1+\dots+d_n\\ k_2 = d_2+\dots+d_n\\ \vdots\\ k_n = d_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_1 = k_1 - k_2,\ d_2 = k_2 - k_3,\ \dots,\ d_n = k_n.}$$

<u>Exc 3.1.a)</u> $f = \sum_{sym} x_1^3 x_2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3].$

$$= x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 + x_3^3x_2 + x_2^3x_1.$$

<u>Metoda 1</u> (direct cu algoritmul)

$$\operatorname{LT}_{<_{lex}}(f) = x_1^3x_2, \quad \operatorname{LT}_{<_{lex}}(s_1^2 s_2) = x_1^3x_2$$

$$x_1^3 x_2 \longrightarrow s_1^{3-1} s_2^{1-0} s_3^{3} = s_1^2 s_2$$

$$f_1 = f - 1 \cdot s_1^2 s_2 = \sum_{sym} x_1^3 x_2 - \underbrace{\left(\sum_{sym} x_1\right)^2}\cdot\left(\sum_{sym} x_1 x_2\right)$$

$$= \sum_{sym} x_1^3 x_2 - \left(\sum_{sym} x_1^2 + 2\sum_{sym} x_1 x_2\right)\cdot\left(\sum_{sym} x_1 x_2\right)$$

$$= \cancel{\sum_{sym} x_1^3 x_2} - \cancel{\sum_{sym} x_1^3 x_2} - \sum_{sym} x_1^2 x_2 x_3$$

$$\boxed{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\cdot(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}$$

$$-2\left(\sum_{sym} x_1 x_2\right)^2 = -\sum_{sym} x_1^2 x_2 x_3 - 2\left(\sum_{sym} x_1^2 x_2^2 + 2\sum_{sym} x_1 x_2^2 x_3\right)$$

$$= -2\sum_{sym} x_1^2 x_2^2 - 5\sum_{sym} x_1^2 x_2 x_3 .$$

$$LT_{<_{lex}}(f_1) = \underline{-2}\, x_1^2 x_2^2 \,, \quad x_1^2 x_2^2 \longrightarrow s_1^{2-2} s_2^{2-0} s_3^{0}$$

$$= s_2^2$$

$$f_2 = f_1 + 2 s_2^2 = -2\sum_{sym} x_1^2 x_2^2 - 5\sum_{sym} x_1^2 x_2 x_3$$

$$f_2 = f_1 + 2s_2 = -2\sum_{sym} x_1 x_2 - 5\sum_{sym} x_1 x_2 x_3$$

$$+2\Big(\sum_{sym} x_1x_2\Big)^2 = -2\cancel{\sum_{sym} x_1^2x_2^2} - 5\sum_{sym} x_1^2x_2x_3 + \cancel{2\sum_{sym} x_1^2x_2^2}$$

$$+4\sum_{sym} x_1^2x_2x_3 = -\sum_{sym} x_1^2x_2x_3$$

$$f_2 = -s_1s_3$$

$$\Rightarrow f - s_1^2s_2 + 2s_2^2 = -s_1s_3 \Rightarrow \boxed{f = s_1^2s_2 - 2s_2^2 - s_1s_3.}$$

i.e. $g = x_1^2x_2 - 2x_2^2 - x_1x_3$

din Teoremă $\quad$ şi $f = g(s_1, s_2, s_3)$.

Metoda II (metoda coeficienţilor nedeterminaţi)

Idee f simetric, $LT_<(f) = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$.

În $f, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\ell = 0$, ce monoame principale pot apărea?

- $<_{lex} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$
- d... (pentru că f omogen)

• de grad $k_1+k_2+\dots+k_n$ (pentru că f omogen)

• cu puterile în ordine descrescătoare!

De exemplu, $f = \sum_{sym} x_1^3 x_2$.

Care sunt monoamele: • $<_{lex} x_1^3 x_2$

• de grad 4

• cu puterile în ordine descrescătoare?

$$x_1^3 x_2 \rightsquigarrow s_1^2 s_2$$

$$x_1^2 x_2^2 \rightsquigarrow s_2^2$$

$$x_1^2 x_2 x_3 \rightsquigarrow s_1 s_3$$

coeficienți nedeterminați

$$\Rightarrow f = \underset{\substack{\| \\ 1}}{a}\, s_1^2 s_2 + b\, s_2^2 + c\, s_1 s_3$$

1 pt că este coef. principal al lui f

Îi aflăm evaluând egalitatea în elemente ale lui R!

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$s_1^2 s_2 + b s_2^2 + c s_1 s_3$	f
1	1	0	2	1	0	$4 + b$	2 $\Rightarrow b=-2$
1	1	1	3	3	1	$27 + 9b + 3c$	6

$$f = \sum_{sym} x_1^3 x_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ 27 + 9b + 3c = 6 \end{cases} \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{f = s_1^2 s_2 - 2 s_2^2 - s_1 s_3.}$$

b) $f = \sum_{sym} x_1^2 x_2^2 \in R[x_1, x_2, x_3]$, $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$

$$LT_{<_{lex}}(f) = x_1^2 x_2^2$$

Scriem toate monoamele în x_1, x_2, x_3 a.î.:

- $<_{lex} x_1^2 x_2^2$
- de grad 4
- puterile în ordine descrescătoare:

$$x_1^2 x_2^2 \longrightarrow s_1^{2-2} s_2^{2-0} s_3^{0} = s_2^2$$

$$x_1^2 x_2^1 x_3^1 \longrightarrow s_1^{2-1} s_2^{1-1} s_3^{1} = s_1 s_3$$

$$\Rightarrow f = s_2^2 + a s_1 s_3$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$s_2^2 + a s_1 s_3$	f
1	1	1	3	3	1	$9 + 3a$	3

$\Rightarrow a = -2$

1	1	1	3	3	1	$9+3a$	3

$\Rightarrow a=-2$

$$\Rightarrow \boxed{f = s_2^2 - 2 s_1 s_3}$$

c) $f = \sum_{sym} X_2^2 X_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$

6 termeni :

$LT_{<_{lex}}(f) = x_1^3 x_2^2$

$$X_1^3 X_2^2 \longrightarrow s_1 s_2^2$$

$$X_1^3 X_2 X_3 \longrightarrow s_1^2 s_3$$

$$X_1^2 X_2^2 X_3 \longrightarrow s_2 s_3$$

$$\Rightarrow f = s_1 s_2^2 + a s_1^2 s_3 + b s_2 s_3$$

X_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$s_1 s_2^2 + a s_1^2 s_3 + b s_2 s_3$	f
1	-1	1	1	-1	-1	$1 - a + b$	2 $\Rightarrow a=-2$
-2	1	1	0	-3	-2	$6b$	-6 $\Rightarrow b=-1$

$f(1,1,-1) =$

$f = x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_3^2 + x_2^3 x_3^2 +$

$f(1,1,-1) =$

$f = x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_3^2 + x_2^3 x_3^2 +$

$+ x_2^3 x_1^2 + x_3^3 x_1^2 + x_3^3 x_2^2$

$1 \qquad -1 \qquad -1$

$f(-2,1,1) = -6$

$\Rightarrow \boxed{f = x_1 x_2^2 - 2 x_1^2 x_3 - x_2 x_3}$

3.4. $\left(\mathbb{C}[X] = \left(\mathbb{R}[Y] / (Y^2+1) \right)[X]\right)$