• $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z,t) = (3x+2y,\ x+z-2t,\ 5x+2y+2z-4t)$

a) f este aplicație liniară? Scrieți matricea lui f în baza canonică $[M_f^{BC}]$

b) Găsiți bază în $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$.

c) f bijectivă?

a) f aplicație liniară $\Leftrightarrow f = AX$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$BC = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

$$\left.\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= (3,1,5) \\ f(0,1,0,0) &= (2,0,2) \\ f(0,0,1,0) &= (0,1,2) \\ f(0,0,0,1) &= (0,-2,-4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_f^{BC} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

b) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} A$

calculăm rangul lui A

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 2 \\ &\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$$

$\Rightarrow$ bază în $\operatorname{Im} f = \{(3,1,5), (2,0,2)\} = \{f(1,0,0,0), f(0,1,0,0)\}$

T rang-defect: $\dim \operatorname{Ker} f + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{2} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{4}$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 2$ (nu e de ajuns să știm dimensiunea, noi trebuie să găsim baza)

$\operatorname{Ker} f = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid f(a,b,c,d) = (0,0,0)\}$

$f(a,b,c,d) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+2b=0 \\ a+c-2d=0 \\ 5a+2b+2c-4d=0 \end{cases}$$ (trb să găsim pe a, b, c, d)

Cum $rg A = 2$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ a, b nec principale

c, d nec secundare

$c = \alpha,\ d = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$a+c-2d=0 \Rightarrow a = 2d-c$

$a = 2\beta - \alpha$

$3a+2b=0 \Rightarrow b = \frac{-3a}{2} = \frac{-6\beta+3\alpha}{2} = \frac{3\alpha-6\beta}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(2\beta-\alpha, \frac{3\alpha-6\beta}{2}, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$S = \{ \alpha(-1, \frac{3}{2}, 1, 0) + \beta(2, -3, 0, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

bază în $\operatorname{Ker} f = \{(-1, \frac{3}{2}, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}$

are $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ deci e bine

c) f bij $\Leftrightarrow$ f inj și f surj

f inj $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$ fals la noi $\dim \operatorname{Ker} f = 2 \Rightarrow$ f nu e inject (1)

f surj $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ fals pt că la noi $\dim \operatorname{Im} f = 2 \Rightarrow$ f nu e surject (2)

Din (1), (2) $\Rightarrow$ f nu e bijectivă

TEMĂ: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (3x-z, 2y, 0)$

a) f apl liniară?, $M_f^{Bc} = ?$

b) Ker f, Im f cu tot și dim

c) f e inj/surj?