îp 61

Teoremă (Formulele lui Newton)

Fie A inel comutativ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Notăm cu $s_1, \dots, s_n$ polinoamele simetrice fundamentale din $A[X_1, \dots, X_n]$. Pentru fiecare $i \in \mathbb{N}^*$ notăm $p_i = X_1^i + \dots + X_n^i$, de asemenea fie $p_0 = n$. Atunci:

(1) $p_k - s_1 p_{k-1} + \dots + (-1)^n s_n p_{k-n} = 0$ pentru orice $k \geq n$.

(2) $p_k - s_1 p_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} s_{k-1} p_1 + (-1)^k \cdot k s_k = 0$ pt. orice $1 \leq k \leq n-1$.

__Demonstrație.__ (1) Fie $F = (Y - X_1) \dots (Y - X_n) \in A[X_1, \dots, X_n][Y]$, un polinom în nedeterminata Y cu coeficienți în $A[X_1, \dots, X_n]$. E clar că $F = Y^n - s_1 Y^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n$. Cum orice X_j este rădăcină a lui F, rezultă că

$X_j^n - s_1 X_j^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n = 0$ și înmulțind cu X_j^{k-n} (unde $k \geq n$) obținem

$X_j^k - s_1 X_j^{k-1} + \dots + (-1)^n s_n X_j^{k-n} = 0$. Sumăm după $j = \overline{1,n}$ și obținem $p_k - s_1 p_{k-1} + \dots + (-1)^n s_n p_{k-n} = 0$, adică (1).

(2) Fie $k \leq n-1$ și considerăm

$G = G(X_1, \dots, X_n) = p_k - s_1 p_{k-1} + \dots + (-1)^k k s_k \in A[X_1, \dots, X_n]$,

care este polinom simetric (deoarece toate p_j, s_j sunt simetrice). Pentru $X_{k+1} = \dots = X_n = 0$ (adică aplicând un morfism evaluare pt. aceste elemente) obținem

$G(X_1, \dots, X_k, 0, \dots, 0) = p'_k - s'_1 p'_{k-1} + \dots + (-1)^k k s'_k$, unde

s'_i sunt polinoamele simetrice fundamentale din $A[X_1,\dots,X_k]$, iar $p'_i = X_1^i + \dots + X_k^i$. Într-adevăr, aceasta rezultă imediat din

$$s_i(X_1,\dots,X_k,0,\dots,0) = s'_i \text{ și } p_i(X_1,\dots,X_k,0,\dots,0) = p'_i.$$

Din (1), aplicată pentru k nedeterminate $X_1,\dots,X_k$, rezultă că $p'_k - s'_1 p'_{k-1} + \dots + (-1)^k k s'_k = 0$, deci

$$G(X_1,\dots,X_k,0,\dots,0) = 0.$$

Dacă prin absurd am avea $G \neq 0$, atunci termenul lui principal e de forma $aX_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}$ cu $a \neq 0$ și $i_1 \geq \dots \geq i_n$. Dar gradul lui G este k (adică e polinom omogen de grad k), deci $i_1 + \dots + i_n = k$. Atunci $i_{k+1} = \dots = i_n = 0$ (altfel $i_1 \geq \dots \geq i_k \geq i_{k+1} \geq 1$, de unde $i_1 + \dots + i_n \geq i_1 + \dots + i_{k+1} \geq k+1$, contradicție), deci termenul principal al lui G este de forma $aX_1^{i_1}\dots X_k^{i_k}$. Atunci acest termen apare și în $G(X_1,\dots,X_k,0,\dots,0)$, contradicție cu faptul că acest polinom în $X_1,\dots,X_k$ este nul.

Rămâne că $G = 0$, ceea ce încheie demonstrația.

COMPLEMENT: Construcția inelului de polinoame într-o familie infinită de nedeterminate.

Considerăm următoarea situație generală:

- Fie $(\Lambda, \leq)$ o mulțime ordonată cu proprietatea că pt. orice $\alpha, \beta \in \Lambda$ există $\gamma \in \Lambda$ cu $\alpha \leq \gamma$ și $\beta \leq \gamma$.
- Fie $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ o familie de inele cu proprietatea că pt. orice $\alpha, \beta \in \Lambda$ cu $\alpha \leq \beta$, R_α este subinel al lui R_β.

Arătăm că pe mulțimea $R = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ se poate introduce o structură de inel astfel încât R_λ este subinel al lui R pt. orice $\lambda \in \Lambda$.

Vom nota cu $\oplus_\lambda$ și $\odot_\lambda$ adunarea și înmulțirea din R_λ, iar cu 1_λ elementul neutru la înmulțire din R_λ.

Definim $+$ și $\cdot$ pe R astfel:

Fie $x, y \in R$. Atunci există $\gamma \in \Lambda$ cu $x, y \in R_\gamma$.

Într-adevăr, dacă $x \in R_\alpha$ și $y \in R_\beta$, atunci există $\gamma \in \Lambda$ cu $\alpha \leq \gamma$ și $\beta \leq \gamma$. Cum $R_\alpha \subset R_\gamma$ și $R_\beta \subset R_\gamma$ obținem că $x, y \in R_\gamma$. Definim acum

$$x+y \overset{def}{=} x \oplus_\gamma y \text{ și } x\cdot y \overset{def}{=} x \odot_\gamma y.$$

Arătăm că definiția lui $x+y$ și $x\cdot y$ nu depinde de alegerea lui γ. Într-adevăr, dacă μ este un alt element din Λ cu $x, y \in R_\mu$, atunci există $\lambda \in \Lambda$ cu $\gamma \leq \lambda$ și $\mu \leq \lambda$, și atunci cum R_γ și R_μ sunt subinele în R_λ, avem

$$x \oplus_\gamma y = x \oplus_\lambda y = x \oplus_\mu y \text{ și}$$

$$x \odot_\gamma y = x \odot_\lambda y = x \odot_\mu y.$$

Așadar operațiile $+$ și $\cdot$ pe R sunt bine definite.

Observăm că $1_\alpha = 1_\beta$ pt. orice $\alpha, \beta \in \Lambda$; într-adevăr, fie γ cu $\alpha \leq \gamma$ și $\beta \leq \gamma$. Atunci R_α și R_β sunt subinele în R_γ, deci $1_\alpha = 1_\beta$ $(= 1_\gamma)$. Vom nota $1 = 1_\alpha$ (nu depinde de α).

Arătăm acum că $(R, +, \cdot)$ este inel. Verificarea fiecărei axiome a inelului se reduce la faptul că proprietatea respectivă e verificată într-un R_λ. De exemplu, pt. a arăta că $(x+y)+z = x+(y+z)$, pt. $x, y, z \in R$, fie $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ cu $x \in R_\alpha$, $y \in R_\beta$, $z \in R_\gamma$ și fie $\lambda \in \Lambda$ cu $\alpha \leq \lambda$, $\beta \leq \lambda$, $\gamma \leq \lambda$. Atunci $x, y, z \in R_\lambda$, deci și $x+y = x \oplus_\lambda y$, $y+z = y \oplus_\lambda z \in R_\lambda$ și cum R_λ este inel avem $(x+y)+z = (x \oplus_\lambda y) \oplus_\lambda z = x \oplus_\lambda (y \oplus_\lambda z) = x+(y+z)$.

La fel se verifică și celelalte axiome.

Observăm că 1 este element neutru la înmulțire. În concluzie, R este inel și fiecare R_λ e subinel în R.

(ip) (65)

Aplicăm acum construcția precedentă în următorul context particular:

Fie A un inel comutativ, I o mulțime infinită și $(X_i)_{i\in I}$ o familie de nedeterminate indexată de I.

Fie $\Lambda = \{ F \mid F$ submulțime finită nevidă a lui $I \}$.

Atunci Λ este o mulțime ordonată cu incluziunea și pt. orice $F_1, F_2 \in \Lambda$ există $F \in \Lambda$ cu $F_1 \subset F$ și $F_2 \subset F$ (putem lua $F = F_1 \cup F_2$).

Acum pt. fiecare $F \in \Lambda$, $F = \{i_1, \dots, i_p\}$, fie $R_F = A[X_{i_1}, \dots, X_{i_p}]$, inelul de polinoame în nedeterminatele $X_{i_1}, \dots, X_{i_p}$ cu coeficienți în A.

E clar că dacă $F_1 \subset F_2$ sunt din Λ, atunci R_{F_1} e subinel în R_{F_2}.

Construcția generală arată că

$R = \bigcup_{F\in\Lambda} R_F$ este inel a.î. fiecare R_F e subinel în R. Inelul R se notează cu $A[X_i \mid i \in I]$ și se numește inelul de polinoame în familia de nedeterminate $(X_i)_{i\in I}$ cu coeficienți în A.