TUTORIAT ȘASE

exercițiul 1 (examen 2025)

Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 7 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ 3x_1 + x_3 + 12x_4 + 5x_5 = 15 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = m \end{cases}$$

are soluții $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. Pentru m astfel determinat, să se găsească toate soluțiile sistemului pentru care x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sunt numere naturale.

exercițiul 2 (examen 2022)

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ considerăm $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care are

- -3 pe toate pozițiile (i, j) cu $i \leq j$
- 1 pe toate pozițiile $(i, i-1)$ cu $2 \leq i \leq n$
- 0 pe toate celelalte poziții

a) Să se calculeze $\det(A_3)$ și $\det(A_4)$

b) Să se arate că A_3 este inversabilă și să se calculeze inversa ei

c) Să se calculeze $\det(A_n)$ pentru orice $n \geq 3$

d) Să se arate că pentru orice $n \geq 3$ matricea A_n este inversabilă și inversa ei are cel puțin un element număr întreg

exercițiul 3 (examen 2022)

Fie $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(2x-y, x+3y, x+y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ $v = (1, 1, 1)$ și $u = (1, 4, 2)$. Să se arate că:

a) $v \notin U$, $u \in U$ și mulțimea $\{u, v\}$ este liniar independentă

b) U este subspațiu vectorial al $\mathbb{R}$-spațiului vectorial V. Să se determine o bază a lui U și să se completeze această bază până la o bază a lui V.

c) Există $f \in V^*$ pentru care $U \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ și $f(v) = 1$ (prin V^* am notat spațiul dual al lui V)

d) Există o infinitate de subspații de dimensiune 2 ale lui V care-l conțin pe u, dar nu-l conțin pe v.