

$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in [0, \infty)$$

Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$

derivam de $n+1$ ori, unde n este ordinul functiei polynomiale

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

În $x_0=0$ are loc egalitatea

Aplicăm funcția lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange

Pentru orice $x \in [0, \infty)$, $x \neq x_0$, există $c \in [0, \infty)$ situat între x și x_0 astfel încât:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-x_0)^4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(c+1)^4} \quad \forall x \in (0, \infty) \\ &- \frac{x^4}{4(c+1)^4} < 0 \Rightarrow \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in (0, \infty) \end{aligned}$$

$$\ln(x-1) < (x-2) - \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} \quad \forall x \in (2, \infty) \Rightarrow \ln(x-2) \leq (x-2) - \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} \quad \forall x \in [2, \infty)$$

Fie $f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x-1)$

derivam de $n+1$ ori, unde n este ordinul functiei polynomiale

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}$$

În $x_0=0$ are loc egalitatea

Aplicăm funcția lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange

Pentru orice $x \in [2, \infty)$, $x \neq x_0$, există $c \in [2, \infty)$ situat între x și x_0 astfel încât:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-x_0)^4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(x-1) = 0 + (x-2) - \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} - \frac{(x-2)^4}{4(c-1)^4} \quad \forall x \in (2, \infty) \\ &- \frac{(x-2)^4}{4(c-1)^4} < 0 \Rightarrow \ln(x-1) < (x-2) - \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} \quad \forall x \in (2, \infty) \end{aligned}$$

$$4^{-x} < 1 - \frac{\ln 4 x}{1!} + \frac{(\ln 4)^2 x^2}{2!} - \frac{(\ln 4)^3 x^3}{3!} + \frac{(\ln 4)^4 x^4}{4!} \quad \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^{-x} \leq 1 - \frac{\ln 4 x}{1!} + \frac{(\ln 4)^2 x^2}{2!} - \frac{(\ln 4)^3 x^3}{3!} + \frac{(\ln 4)^4 x^4}{4!} \quad \forall x \in [0, \infty)$$

Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4^{-x}$

derivam de $n+1$ ori, unde n este ordinul functiei polynomiale

$$f''(x) = 4^{-x} (\ln 4)^2$$

$$f'''(x) = -4^{-x} (\ln 4)^3$$

$$f^{(4)}(x) = 4^{-x} (\ln 4)^4$$

$$f^{(5)}(x) = -4^{-x} (\ln 4)^5$$

$\hat{I}n x_0 = 0$ are loc egalitatea

Aplicăm funcția lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange

Pentru orice $x \in [0, \infty)$, $x \neq x_0$, există $c \in [0, \infty)$ situat între x și x_0 astfel încât:

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!}(x - x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x - x_0)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^{-x} \leq 1 - \frac{\ln 4 x}{1!} + \frac{(\ln 4)^2 x^2}{2!} - \frac{(\ln 4)^3 x^3}{3!} + \frac{(\ln 4)^4 x^4}{4!} - \frac{(\ln 4)^5 x^5}{4^c 5!} \quad \forall x \in (0, \infty)$$

$$- \frac{(\ln 4)^5 x^5}{4^c 5!} < 0 \Rightarrow 4^{-x} < 1 - \frac{\ln 4 x}{1!} + \frac{(\ln 4)^2 x^2}{2!} - \frac{(\ln 4)^3 x^3}{3!} + \frac{(\ln 4)^4 x^4}{4!} \quad \forall x \in (0, \infty)$$