Seminar 6

1. Stud. cont funcțiilor $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

10 neg

Sol: f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ (op cu fct elem)

Studiem cont lui f în $(0;0)$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$

și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\cancel{n^2}} \cdot \dfrac{\cancel{n^2}}{2} = \dfrac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

Atunci f nu e cont. în $(0,0)$ ☐

11\. b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu fct. elem.

grad sus > grad jos ⇒ cont

grad sus ≤ grad jos ⇒ NU e cont

$\dfrac{x^1 \cdot y^1}{x^1 + y^1}$ (înlocuim y cu x și vedem ce știm de mai sus)

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\left| f(x,y) - f(0,0) \right| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right|$$

$$= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \cdot \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1}$$

(Explicație: $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$

$1 \geq \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$)

$$|x| \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Deci, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, i.e

f continuă în $(0,0)$

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$

Studiați continuit. și u.c.

<u>CONTINUIT.</u>

f cont pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (op cu fct elem)

Studiem cont în $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\in[-1;1]} = 0 = f(0)=0$$

$0 * \text{mărg} = 0$

$\Rightarrow$ Deci f cont pe $\mathbb{R}$

<u>U.C</u>

f - derivab pe $\mathbb{R}^*$

f def pe un interv nemărg / f derivab + derivata mărg $\Rightarrow$ f uc

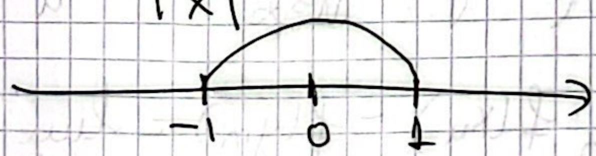
$$f'(x) = \cancel{1}\; x'\sin\frac{1}{x} + x\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \sin\frac{1}{x} + \cancel{x}\cdot\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\right)$$

$$= \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

$$|f'(x)| = \left|\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right| \leq \underbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} + \left|\frac{1}{x}\right|\underbrace{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}_{\leq 1}$$

$$\leq 1 + \left|\frac{1}{x}\right|$$



$$1+\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1+1 = 2 \quad \forall\, x\in(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$$

Deci, f e uc pe $(-\infty;-1]$ și pe $[1;\infty)$ (1)

$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont pe } [-1;1] \\ [-1;1] \text{ compactă} \end{array}\right| \Rightarrow f \text{ e u.c pe } [-1;1]$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ f u.c pe $\mathbb{R}$

3. Fie $A = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ și $B = \{ n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \}$

Considerăm $f: A \cup B \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 2, & x \in B \end{cases}$

A că: a) f u.c pe A, respectiv pe B

b) f nu e u.c pe $A \cup B$

a) Fie $(x_n)_n \subset A$, $(y_n)_n \subset \cancel{B}A$ a.î. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$

Avem $\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n) - f(y_n)\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - 1 = 0$

Deci, f u.c pe A

Analog, se arată că f u.c pe B.

b) Alegem $(x_n)_n, (y_n)_n \subset A \cup B$

$x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Avem $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} n - n - \frac{1}{n} = 0$,

dar $\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - 2 = -1 \neq 0$

Deci, f nu e u.c pe $A \cup B$

4. Stud. u.c funcțiilor:

a) $f: [0;\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$

b) $f: [1,2) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f: (0;\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$

a)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall\, x \in (0;\infty)$$

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{2} \quad \forall\, x \in [1;\infty)$$

$\Rightarrow f$ - u.c pe $[1,\infty)$

$[0;1]$ - compactă
f cont pe $[0;1]$ $\Big| \Rightarrow f$ - u.c pe $[0;1]$

$\Rightarrow f$ - u.c pe $[0;+\infty)$

b)

$$f: [1;2) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall\, x \in [1;2)$$

$$|f'(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| \le 1 \quad \forall\, x \in [1;2) \Rightarrow f \text{ e u.c } \square$$

c)

$$f: (0;\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

~~$\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+2}$~~ Fie $x_n = \frac{1}{n} \in (0;\infty)$, $y_n = \frac{1}{n+1} \in (0;\infty)$

~~$\lim_{n\to\infty}$~~

$$\lim_{n\to\infty} x_n - y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 0$$

DAR

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = \lim_{n\to\infty} n - n - 1 = -1 \ne 0$$

$\Rightarrow f$ nu e uc pe $(0;\infty)$

5. Fie $a \geq 0$ și $f : (a;\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \ln x$

Ar că f este u.c ddacă $a > 0$

Sol

„$\Leftarrow$" $\quad (a>0 \Rightarrow f \text{ u.c})$

Știm că $a>0$. Arătăm că f. u.c

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall \quad x \in (a;\infty)$$

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{a} \quad \forall \quad x \in (a;\infty) \Rightarrow f \text{ u.c}$$

„$\Rightarrow$" Știm că f. u.c Arătăm că $a>0$

Pp prin absurd că $a=0$

$$f : (0;\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \ln x$$

Fie $(x_n)_n \subset (0;\infty)$, $(y_n)_n \subset (0;\infty)$

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n - y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = 0$$

DAR

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{1}{n} - \ln\frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{1}{\cancel{n}} \cdot n^{\cancel{2}} = \infty$$

$\Rightarrow$ f nu e u.c. pt $a=0$

Deci, pp făcută este falsă!

Așadar, $a>0$

6. Fie $f : (0; \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Arătați că f nu e u.c

Sol: Pp prin absurd că f e uc

Atunci $\exists\ \tilde{f}: [0; \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$ cont a.î. $\tilde{f}|_{(0; \frac{2}{\pi}]} = f$

Deci $\tilde{f}(x) = \sin \frac{1}{x}\quad \forall\ x \in (0; \frac{2}{\pi}]$

Avem $\lim_{x \to 0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0)$

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \qquad \text{Deci } \exists \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

Alegem $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

~~Pri...~~ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ nu are limită

De revăzut

7. Fie (X, d_1), (Y, d_2) sp metrice, $(x_n)_n \subset X$ șir Cauchy în rap cu metrica d_1 și $f: X \to Y$ o fct u.c. Arătați $f((x_n)_n) \subset Y$ e șir Cauchy în rap. cu metrica d_2.

Sol: f u.c $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall\ x, y \in X$ cu prop $d_1(x, y) < \delta_\varepsilon$ avem $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$ (și $\delta_\varepsilon > 0$ de mai sus)

$(x_n)_n$ șir Cauchy

$d_1(x_m, x_n) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$d_2(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$

$(x_n)_n$ șir Cauchy $\Rightarrow \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$

$m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$ avem $d_1(x_m, x_n) < \delta_\varepsilon$

Deci, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$ avem

$d_2(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$

Așadar, $f((x_n)_n)$ e șir Cauchy în sp cu metrica d_2. □