EXAMEN - ALGEBRĂ, AN I, 31.01.2025

Exerciţiul 1: (a) Enunţaţi teorema de caracterizare a funcţiilor injective. (0.75 puncte)

(b) Enunţaţi proprietatea de universalitate a grupului factor. (0.75 puncte)

(c) Determinaţi elementele inversabile si idealele pentru inelele urmatoare (1 punct):

$$\mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 2: Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|x^2 - 8x + 8\right|$.
(a) Arătați că funcția f nu este injectivă. (0.5 puncte)
(b) Determinați $f([0, 5])$ și $f^{-1}([1, 8])$. (1 punct)
(c) Este imaginea funcției f numărabilă? Justificați. (1 punct)

Soluţie: Observăm că $f(x) = \left|(x - 4)^2 - 8\right|$.
(a) De exemplu, $f(2) = f(6) = 4$, deci f nu este injectivă. (0.5 puncte)
(b) Dacă $0 \leq x \leq 4$, atunci $-8 \leq (x - 4)^2 - 8 \leq 8$, deci $0 \leq f(x) \leq 8$. Dacă $4 \leq x \leq 5$, atunci $-8 \leq (x - 4)^2 - 8 \leq -7$, deci $7 \leq f(x) \leq 8$. De asemenea, dacă $y \in [0, 8]$, atunci $-\sqrt{8 + y} + 4 \in [0, 5]$ și $f(-\sqrt{8 + y} + 4) = y$. Așadar $f([0, 5]) = [0, 8]$. (0.5 puncte)
$f^{-1}([1, 8]) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq (x - 4)^2 - 8 \leq 8\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -8 \leq (x - 4)^2 - 8 \leq -1\}$.
Obținem că $f^{-1}([1, 8]) = [7, 8] \cup [0, 1] \cup [4 - \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7}]$. (0.5 puncte)
(c) $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty) \simeq \mathbb{R}$ ca mulțimi, iar $\mathbb{R}$ nu este numărabilă. (1 punct)

Exerciţiul 3: Fie G un grup și mulțimea $S := \{\, (g, h) \in G \times G \,|\, gh = e \,\}$, unde e este elementul neutru al lui G. Pe S definim relația binară: $(g,\, h) \sim (g',\, h')$ dacă și numai dacă $(g,\, h) = (g',\, h')$ sau $(g,\, h) = (h',\, g')$.
(a) Arătați că S e mulțime nevidă și $\sim$ este o relație de echivalență. (0.5 puncte)
(b) Determinați un sistem de reprezentanți pentru $\sim$. (1 punct)
(c) Presupunem că G este un grup finit de ordin par. Arătați că G are cel puțin un element de ordin 2. (1 punct)

Soluție: (a) Se observă că $(e, e) \in S$, deci mulțimea este nevidă. (0.2 puncte)
Verificarea faptului că $\sim$ este relație de echivalență. (0.3 puncte)
(b) Observăm că dacă $(g, h) \in S$, atunci $h = g^{-1}$. Deci clasa de echivaletă a lui (g, h) conține (g, g^{-1}) și (g^{-1}, g), însă există posibilitatea ca aceste două elemente să fie egale (spre exemplu, cazul lui (e, e)). Această egalitate a perechilor are loc pentru elementele din G cu proprietatea că $g^2 = e$, adică cele de ordin *cel mult* 2 (atenție, nimic nu ne poate garanta că grupul arbitrar G are elemente de ordin *fix* 2). Astfel, un sistem de reprezentanți ar fi dat de elementele (g, g) cu $g^2 = e$ (există cel puțin o astfel de pereche datorită lui e) și câte un element de tipul (g, g^{-1}) pentru fiecare submulțime $\{g, g^{-1}\}$ a lui G, unde $g^2 \neq e$. (1 punct)
(c) Știm că orice relație de echivalență ne dă o partiție a mulțimii pe baza claselor de echivalență. La punctul anterior am văzut că orice clasă de echivalență are cardinal 1 (pentru cele cu reprezentanți de primul tip) sau 2 (pentru cele cu reprezentanți de al

doilea tip). Astfel, pentru G grup finit, avem că $|G| = m + 2n$, unde m este numărul claselor de primul tip (adică al elementelor de ordin cel mult 2), iar n este numărul claselor de tipul al doilea. Din ipoteză, $|G|$ este număr par, deci m este de asemenea par, adică avem un număr par de elemente de ordin cel mult 2. Cum singurul element de ordin 1 este e, rezultă că $m \geq 2$, deci G trebuie să aibă măcar un element de ordin exact 2. (1 punct)

Exerciţiul 4: (a) Daţi exemplu de permutare $\sigma \in S_6$ care **nu** se poate scrie ca produs de cicli de lungime 3. Justificaţi răspunsul. (0.5 puncte)
(b) Fie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 9 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in S_9.$$

Calculaţi ordinul permutarii σ și σ^{2025}. (1 punct)

(c) Pentru orice $n \geq 9$, considerăm $\sigma_n \in S_n$, $\sigma_n(k) = \sigma(k)$ pentru $1 \leq k \leq 9$ şi $\sigma_n(k) = k$ pentru $9 < k \leq n$. Determinaţi numărul de soluţii în S_n ale ecuaţiei $\tau^4 = \sigma_n$ pentru $n = 9$ şi $n = 10$. (1 punct)

Barem şi soluţii: (a) Exemplu de permutare de ordin impar ....0,5 puncte

(b) Determinarea corectă a ord(σ) ....0,5 puncte

Determinarea corectă a σ^{2025} ....0,5 puncte

Observăm că $\sigma = (159)(234)$ descompunere în produs de cicli disjuncţi. Ca atare, ord$(\sigma) = lcm(3, 3) = 3$ şi, cum $2025 \equiv 0 \pmod 3$, $\sigma^{2025} = e$.

(c) Determinarea numărului de soluţii pentru $n = 9$ ....0,5 puncte

Avem că $\sigma_9 = \sigma = (1\ 5\ 9)(2\ 3\ 4)$ în S_9, deci un τ pentru care $\tau^4 = \sigma_9$ trebuie să conţină, în descompunerea în cicli disjuncţi, unul sau mai mulţi cicli care la puterea a 4-a devin $(1\ 5\ 9)(2\ 3\ 4)$. În acest caz, cele două posibilităţi sunt ca τ să conţină fie $(1\ 5\ 9)(2\ 3\ 4)$, fie $(1\ 2\ 9\ 4\ 5\ 3)$ în descompunere. În afară de aceştia, τ poate conţine şi alţii, cu suportul în cele 3 numere rămase ($6, 7$ şi 8), care la puterea 4 devin e.

Variantele pentru τ sunt:

- $\tau = (1\ 5\ 9)(2\ 3\ 4)$ - 1 permutare
- $\tau = (1\ 5\ 9)(2\ 3\ 4) \cdot$ (1 transpoziţie) - $C_3^2 = 3$ permutări
- $\tau = (1\ 2\ 9\ 4\ 5\ 3)$ - 1 permutare
- $\tau = (1\ 2\ 9\ 4\ 5\ 3) \cdot$ (1 transpoziţie) - $C_3^2 = 3$ permutări

În total, avem 8 soluţii ale ecuaţiei $\tau^4 = \sigma_9$.

Determinarea numărului de soluţii pentru $n = 10$ ....0,5 puncte

Este exact la fel, în afară de faptul că avem 4 numere rămase pentru suportul celorlalţi eventuali ciclii $(6, 7, 8$ şi $10)$. Variantele pentru τ sunt:

- $\tau = (1\ 5\ 9)(2\ 3\ 4)$ - 1 permutare
- $\tau = (1\ 5\ 9)(2\ 3\ 4) \cdot$ (1 transpoziţie) - $C_4^2 = 6$ permutări
- $\tau = (1\ 5\ 9)(2\ 3\ 4) \cdot$ (2 transpoziţii) - $C_4^2 = 6$ permutări

- $\tau = (1\ 5\ 9)(2\ 3\ 4) \cdot$ (1 ciclu de lungime 4) - 3 permutări
- $\tau = (1\ 2\ 9\ 4\ 5\ 3)$ - 1 permutare
- $\tau = (1\ 2\ 9\ 4\ 5\ 3) \cdot$ (1 transpoziţie) - $C_4^2 = 6$ permutări
- $\tau = (1\ 2\ 9\ 4\ 5\ 3) \cdot$ (2 transpoziţii) - $C_4^2 = 6$ permutări
- $\tau = (1\ 2\ 9\ 4\ 5\ 3) \cdot$ (1 ciclu de lungime 4) - 3 permutări

În total, avem 32 de soluţii ale ecuaţiei $\tau^4 = \sigma_{10}$.