Rezolvare suplimentare
Tutoriat 4

1) Studiați continuitatea funcției f:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^4} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol:

- f continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu fct elementare)
- studiem continuitatea lui f în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^3}{x^2+y^4} - 0 \right| = \left| \frac{x^2}{x^2+y^4} \right| \cdot |x|$$

$$= \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^4} \right) \cdot |x| \leq 1 \cdot |x|}_{\text{de ce?}} \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0$$

$y^4 \geq 0, \forall y \in \mathbb{R} \; / + x^2 \Rightarrow x^2 + y^4 \geq x^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$

! Și la examen scrieți explicit acest 'de ce?'

Deci $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f$ cont în $(0,0)$. $\square$

ST4

b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol:

- f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu fct. elem.)
- stud. cont. lui f în (0,0)

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\left| f(x,y) - f(0,0) \right| = \left| (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 0 \right|$$

$$= \underbrace{(x^2+y^2)\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq (x^2+y^2)\cdot 1}_{\text{de ce?}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0+0=0$$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow$ f cont în (0,0). $\square$

c) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5y^2}{\sqrt{x^{16}+y^8}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol:

- f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu fct. elem.)
- stud. cont. lui f în (0,0)

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\left| f(x,y) - f(0,0) \right| = \left| \frac{x^5y^2}{\sqrt{x^{16}+y^8}} - 0 \right| = \underbrace{\left(\frac{x^4y^2}{\sqrt{x^{16}+y^8}}\right)}_{\text{*de ce?}} \cdot |x| \leq$$

$$\underbrace{\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |x|}_{\text{*de ce?}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow$ f cont în (0,0). $\square$

* pe pag urm!

de ce?

Am vorbit la tutoriat de cea mai importantă inegalitate pe care o folosim în astfel de exerciții: Inegalitatea Mediilor. Adică M. A. ≥ M. G.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

Înlocuim a cu x^{16} și b cu y^{8}

$$\Rightarrow \frac{x^{16}+y^{8}}{2} \geq \sqrt{x^{16} \cdot y^{8}} \Rightarrow \frac{x^{16}+y^{8}}{2} \geq x^{8}y^{4} \quad / \cdot \frac{1}{x^{16}+y^{8}}$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{x^{8}y^{4}}{x^{16}+y^{8}} \quad / \text{aplic } \sqrt{} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{x^{8}y^{4}}}{\sqrt{x^{16}+y^{8}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{x^{4}y^{2}}{\sqrt{x^{16}+y^{8}}}$$