

BAREM RERE 02SEPT2025

Exercițiu 2: (a) Studiați injectivitatea și surjectivitatea funcțiilor: (1.5 puncte)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x + y, xy), \\ g : \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), \quad g(A, B) = A^2 \cdot B, \\ h : \mathbb{Z} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{N}, \quad h(n) = |n| \cdot \left(3 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

(b) Precizați o retractă/sectiune pentru funcțiile injective/surjective. (1 punct)

Soluție și barem:

- (a) $f(1, 0) = f(0, 1) \implies f$ nu este injectivă (0.25 puncte)
- $(0, 1) \notin \text{Im}(f) \implies f$ nu este surjectivă (0.25 puncte)
- $g(A, 0) = 0 \ (\forall) A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \implies g$ nu este injectivă (0.25 puncte)
- $g(I_2, B) = B \ (\forall) B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \implies g$ este surjectivă (0.25 puncte)
- $0 \notin \text{Im}(h) \implies h$ nu este surjectivă (0.25 puncte)

$$h(n) = \begin{cases} 3n - 1 & , \quad n > 0 \\ -3n + 1 & , \quad n < 0 \end{cases}$$

h este injectivă (0.25 puncte)

(b) O retractă pentru g este: (0.5 puncte)

$$r : \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), \quad r(B) = (I_2, B).$$

O sectiune pentru h este: (0.5 puncte)

$$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad s(n) = \begin{cases} 1 & , \quad n \equiv 0 \pmod{3} \\ -(n-1)/3 & , \quad n \equiv 1 \pmod{3} \\ (n+1)/3 & , \quad n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Exercițiu 4: Fie permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 9 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in S_9.$$

- (a) Descompuneți σ în produs de cicli disjuncți și determinați $\text{ord}(\sigma)$. (0.5 puncte)
- (b) Rezolvați ecuația $\tau^3 = \sigma$. (0.5 puncte)
- (c) Demonstrați că ecuația $\tau^n = \sigma$ are soluții dacă și numai dacă n impar. (0.5 puncte)
- (d) Demonstrați că σ se poate scrie ca produs de cicli (nu neapărat disjuncți) de ordin 3 și decideți dacă acest produs este unic. (1 punct)

Soluție și barem:

- (a) • Descompunere în cicli disjuncti: $\sigma = (1596)(23)$. **(0.3 puncte)**
 • Ordinul este *l.c.m.* al ciclilor care apar în descompunere, deci $\text{ord}(\sigma) = 4$. **(0.2 puncte)**
- (b) Găsirea soluțiilor $\tau = (1695)(23)$, $\tau = (1695)(23)(478)$ și $\tau = (1695)(23)(487)$. **(0.5 puncte)**
- În general, dacă η este un ciclu de lungime k , atunci η^3 este un ciclu de lungime k , dacă $3 \nmid k$, sau produs de 3 cicli de lungime $\frac{k}{3}$ dacă $3 \mid k$. Gândindu-ne atunci la descompunerea în cicli disjuncti a unei soluții τ , cum τ^3 conține un ciclu de lungime 4 și un ciclu de lungime 2, este clar că τ trebuie să conțină tot un ciclu de lungime 4 (care ridicat la puterea 3 este (1695)) și un ciclu de lungime 2 (care ridicat la puterea 3 este (23)). Așadar τ este determinat ca mai sus.
- (c) $\tau^n = \sigma$ are soluții dacă și numai dacă n impar. **(0.5 puncte)**

Din motive identice cu cele explicate la punctul anterior. De fapt, pentru n impar putem scrie și o soluție: $\tau = (1596)(23) = \sigma$ dacă $n = 4k + 1$ și $\tau = (1695)(23)$ dacă $n = 4k + 3$.

- (d) • σ scris ca produs de cicli de ordin 3. **(0.7 puncte)**
- Ca fapt general, o permutare σ se poate scrie ca produs de cicli de lungime 3 dacă și numai dacă $\epsilon(\sigma) = 1$.
- Fără a invoca acest rezultat general, pentru cazul particular în discuție:
- $$\sigma = (1596)(23) = (159)(96)(23) = (159)(96)(62)(62)(23) = (159)(962)(623).$$
- Descompunerea nu este unică. **(0.3 puncte)**
- Evident, cea mai simplă explicație este că se pot adăuga oricărți cicli al căror produs este e , de exemplu $(123)(123)(123)$.