31.10.2024.

Seminar 5 – Repere. Coordonate. Operații pe subspații

① $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)|_{\mathbb{R}}$

$R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper canonic

$R' = \{e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3,\ e_2' = e_1 + 7e_2 + e_3,\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3\}$

a) R' reper în $\mathbb{R}^3$, $R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$ matricea de trecere

b) $X = (3, 2, 1)$ coord lui X, în rap cu R'

CRITERIUL DE LINIAR INDEPENDENȚĂ

R' SLI $\Leftrightarrow$ rg $A = 3$ (maxim)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{matrix} L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(6-16) \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 3$$

$\Rightarrow R'$ e SLI ①

$(R') = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

②

Din ①, ② $\Rightarrow$ reper.

Obs. $R=\{e_1,\dots,e_n\} \to R'=\{e_1',\dots,e_n'\}$

$$e_i'=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j, \ (\forall) i=\overline{1,n}$$

$X=(3,\ 2,\ 1) \to$ coordonatele cin nop

$\quad\ \ \overset{\shortparallel}{3e_1+2e_2+e_3}$

b) $x=(3,2,1)=x_1'e_1'+x_2'e_2'+x_3'e_3'=$

$=x_1'(1,2,1)+x_2'(1,7,1)+x_3'(-1,1,1)=$

$=(x_1'+x_2'-x_3',\ 2x_1'+7x_2'+x_3',\ x_1'+x_2'+x_3')=(3,2,1)$

$$\begin{cases} x_1'+x_2'-x_3'=3 \\ 2x_1'+7x_2'+x_3'=2 \\ x_1'+x_2'+x_3'=1 \end{cases}$$

$E_3-E_1 \Rightarrow 2x_3'=-2 \Rightarrow x_3'=-1$

$E_3+E_1 \Rightarrow \begin{cases} x_1'+x_2'=2 \ |\cdot(-2) \\ 2x_1'+7x_2'=3 \end{cases}$ $\oplus$

$5x_2'=-1 \Rightarrow x_2'=-\frac{1}{5}$

$\Rightarrow x_1'=2+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$

$(x_1',\ x_2',\ x_3')=\left(\frac{11}{5},\ -\frac{1}{5},\ -1\right)$

Obs: $X = AX'$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

matricea de trecere

(2) $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ $R_0 = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$ reper canonic

$R' = \{e_1' = -1 + 2x + 3x^2, e_2' = x - x^2, e_3' = x - 2x^2\}$

a) R' reper, $R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$

b) $P = 3 - x + x^2$ în R'

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $\det A = -2 + 1 = -1 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$ (max) $\Rightarrow$ SLI

$|R'| = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow R'$ reper

b) $3 - x + x^2 = a_1' e_1' + a_2' e_2' + a_3' e_3'$

$3 - x + x^2 = a_1'(-1 + 2x + 3x^2) + a_2'(x - x^2) + a_3'(x - 2x^2)$

$3 - x + x^2 = -a_1' + x \cdot (2a_1' + a_2' + a_3') + x^2 (3a_1' -$

$$\begin{cases} 3 = -a_1' \Rightarrow a_1' = -3 \\ -1 = a_1' + a_2' + a_3' \Rightarrow a_2' + a_3' = 5 \\ 1 = 3a_1' - a_2' - 2a_3' \Rightarrow -a_2' - 2a_3' = 10 \end{cases}$$

$\oplus$

$-a_3' = 15 \Rightarrow a_3' = -15$

$\Rightarrow a_2' = 10$

$(3, 10, -15)$ coordonatele lui P în R'

③ $(V,+,\cdot)$ 3-dimensional

$R=\{v_1, v_2, v_3\}$ reper din V

a) $R'=\{v_1'=v_1,\ v_2'=v_1+v_2,\ v_3'=v_1+v_2+v_3\}$

R' reper din V, $R \xrightarrow{A} R'$, $A=?$

b) Dacă v are coord. din rap cu R, atunci aflați tripletul (x_1', x_2', x_3') coord din rap cu R'

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $rg A=3$ (max) $\Rightarrow R'$ SLI $\Bigg| \Rightarrow$

$\dim V=$ coord din R' $=3$

$\Rightarrow R'$ reper

$x = x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3 = x_1'v_1'+x_2'v_2'+x_3'v_3'$

$= x_1'(v_1')+x_2'(v_1+v_2)+x_3'(v_1+v_2+v_3)$

$= v_1(x_1'+x_2'+x_3')+v_2(x_2'+x_3')+v_3(x_3')$

$\begin{cases} x_1'+x_2'+x_3'=x_1 \\ x_2'+x_3'=x_2 \\ x_3'=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3'=x_3 \\ x_2'=x_2-x_3 \\ x_1'=x_1-x_2 \end{cases}$

$(x_1', x_2', x_3')\ (x_1-x_2,\ x_2-x_3,\ x_3)$

Listă pb.: Seminar 5

Obs. Dacă vect nul nu există $\Rightarrow$ nu e subsp. vect

PROBLEMA IMPORTANTĂ

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\} = S(A_1)$; $A = (2\ -1\ ,\ 1)$

$V_2 = \langle\{(1, -1, 2)', (3, 1, 0)'\}\rangle$

a) Să se descrie V_2 printr-un sist de ec liniare

b) Precizați câte un reper în $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$

c) Este sumă directă $V_1 + V_2$? $(V_1 \oplus V_2)$

a) Fie $x \in V_2 \Rightarrow (\exists)\ a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $x = (x_1, x_2, x_3) = a(1, -1, 2) + b(3, 1, 0)$

$\Leftrightarrow (a + 3b, -a + b, 2a) = (x_1, x_2, x_3)$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 2 & 0 & x_3 \end{array}\right)$$

$$(*) \begin{cases} a + 3b = x_1 \\ -a + b = x_2 \\ 2a = x_3 \end{cases}$$

$(*)$ SCD $\Leftrightarrow \text{rg} A = \text{rg} \bar{A}$

$\Delta_c = 0$

$\Delta p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$

$\Delta c = \begin{vmatrix} 1 & 3 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 2 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x_1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}$

b) $V_1 : \ y = 2x + z$

$V_1 = \{(x, 2x+z, z) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$\quad = x(1,2,0) + z(0,1,1)$

$R_1 = \{(1,2,0), (0,1,1)\}$ SG pt V_1 (1)

$\dim V_1 = 3 - 1 = 2 = \text{rg} A$ (2)

Din (1), (2) $\Rightarrow R_1$ reper în V_1

$R_2 = \{(1,-1,2), (3,1,0)\}$ reper în V_2

$V_1 \cap V_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$

$$\begin{cases} 2x - y = -z \\ x - 3y = 2z \mid (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -z \\ -2x + 6y = -4z \end{cases} \; (+)$$

$$5y = 5z \Rightarrow y = -z$$

$$x = z - 3z = -z$$

$$V_1 \cap V_2 = \{(-z, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$\underbrace{\langle\{(-1, -1, 1)\}\rangle}_{\mathcal{R}_3}$$

$= 0$

$-3x_2 - 2x_3 = 0\}$

c) Răspuns: <u>**NU**</u>.

$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

$V_1 + V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$\dim(V_1 + V_2) = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$

• $(\mathbb{R}^4_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

a) $V' \subset \mathbb{R}^4$ a.î. $\mathbb{R}^4 = V \oplus V'$

b) $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \cup \mathcal{R}''$ reper în $\mathbb{R}^4$ a.î. $\mathcal{R}'$ reper în $V \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{R}''$ în V'

c) $x = (1, 2, -1, 3)$ să se descompună în rap cu $\mathbb{R}^4 = V \oplus V'$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$rg\, A = 2 \Rightarrow \dim V = 4 - 2 = 2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_1 = -x_4 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -x_3$$

$V = \{ (-x_4, -x_3, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$

$\quad\quad = x_4(-1, 0, 0, 1) + x_3(0, -1, 1, 0)$

$R' = \{(-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\}$

reper în V

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

!

$V = \langle \underbrace{\{(0,0,1,0), (1,0,0,0)\}}_{R'' \text{ reper în } V'} \rangle$

c) $x = v + v'$ $\quad$ $R = R' \cup R''$ reper în $\mathbb{R}^4$

$\;\;\;\; \Updownarrow \;\; \Updownarrow$

$\;\;\;\; V \;\;\; V'$

$X = (1, 2, -1, 3) = \overbrace{a(-1, 0, 0, 1) + b(0, -1, 1, 0)}^{v} +$

$+ \underbrace{c(0, 0, 1, 0) + d(1, 0, 0, 0)}_{v'}$

$$\begin{cases} -a+d=+1 \Rightarrow d=+4 \\ -b=2 \Rightarrow b=-2 \\ b+c=-1 \Rightarrow \\ a=3 \end{cases}$$

$v=(-3,0,0,3)+(0,2,-2,0)=(-3,2,-2,3)$

$v'=(0,0,1,0)+(4,0,0,0)=(4,0,1,0)$

$x=(1,2,-1,3)=(-3,2,-2,3)+(4,0,1,0)$

31.10.2024.

Curs 5 - AG

- sp. vectoriale
- SLI | SLD | SG | bază | reper

$(V,+,\cdot)_{/\mathbb{K}}$ $\quad S=\{e_1,\dots,e_n\}$

$\rightarrow S$ este SLI $\Leftrightarrow [(\forall)\ a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ a.î. $a_1e_1+\dots+a_ne_n=0_V$