Pt. $n=1$ aceasta e clar din structura inelului de polinoame într-o nedeterminată.
Presupunem adevărat pt. $n-1$ și demonstrăm pt. n (unde $n \geq 2$). Fie $f \in A[X_1,\dots,X_n] = A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$.

Atunci $f = f_0 + f_1 X_n + \dots + f_p X_n^p$ pt. un $p \in \mathbb{N}$ și niște $f_0, f_1, \dots, f_p \in A[X_1,\dots,X_{n-1}]$. Pt. fiecare $0 \leq i \leq p$, f_i este o sumă de monoame în $A[X_1,\dots,X_{n-1}]$ din ipoteza de inducție. Fie $f_i = M_1 + \dots + M_r$ cu M_j monoame. Atunci $f_i X_n^i = M_1 X_n^i + \dots + M_r X_n^i$ și e clar că fiecare $M_j X_n^i$ este monom în $A[X_1,\dots,X_n]$ (într-adevăr $M_j X_n^i$ e de forma $(a X_1^{i_1} \dots X_{n-1}^{i_{n-1}}) X_n^i$).
Rezultă că $f_i X_n^i$ e sumă de monoame, și atunci la fel este și $f = \sum_{i=\overline{0,p}} f_i X_n^i$.

Fie acum $f \in A[X_1,\dots,X_n]$, $f \neq 0$. Am arătat că f e sumă de monoame (nu știm deocamdată că f se scrie unic în acest fel). Luăm o astfel de sumă și fie p_1 cel mai mare exponent cu care apare X_1 în vreunul dintre monoamele din sumă, ..., p_n cel mai mare exponent cu care apare X_n în vreunul dintre aceste monoame. Atunci orice monom din sumă este de forma $a X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ cu $i_1 \leq p_1, \dots, i_n \leq p_n$.
Obținem că f e de forma $f = \sum_{i_1=\overline{0,p_1}} \dots \sum_{i_n=\overline{0,p_n}} a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$

(dacă ~~∄~~ un $X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}$ cu $i_1\le p_1,\dots,i_n\le p_n$, nu apare în reprezentarea respectivă a lui f ca sumă de monoame, considerăm că $a_{i_1\dots i_n}=0$).
E clar că și polinomul nul se reprezintă astfel (cu orice $p_1,\dots,p_n$ și toți $a_{i_1\dots i_n}=0$).
Demonstrăm acum că reprezentarea unui polinom ca sumă de monoame este unică. Mai precis, fie $f\in A[X_1,\dots,X_n]$ și

$$(*)\qquad f=\sum_{i_1=\overline{0,p_1}}\dots\sum_{i_n=\overline{0,p_n}} a_{i_1\dots i_n}X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}=\sum_{j_1=\overline{0,q_1}}\dots\sum_{j_n=\overline{0,q_n}} b_{j_1\dots j_n}X_1^{j_1}\dots X_n^{j_n}$$

În primul rând observăm că putem "modifica" cele două reprezentări astfel încât $p_1=q_1,\dots,p_n=q_n$. Mai precis, fie $m_1=\max\{p_1,q_1\},\dots,m_n=\max\{p_n,q_n\}$.
Pt. orice $0\le i_1\le m_1,\dots,0\le i_n\le m_n$ pt. care există un $1\le r\le n$ cu $i_r>p_r$, definim $a_{i_1\dots i_n}=0$ (observăm că acești coeficienți sunt noi, nu apar în prima dintre cele două reprezentări ale lui f).
La fel, pt. orice $0\le j_1\le m_1,\dots,0\le j_n\le m_n$ pt. care există $1\le r\le n$ cu $j_r>q_r$, definim $b_{j_1\dots j_n}=0$.
Atunci $(*)$ se rescrie

$$f=\sum_{i_1=\overline{0,m_1}}\dots\sum_{i_n=\overline{0,m_n}} a_{i_1\dots i_n}X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}=\sum_{j_1=\overline{0,m_1}}\dots\sum_{j_n=\overline{0,m_n}} b_{j_1\dots j_n}X_1^{j_1}\dots X_n^{j_n},$$

de unde $\displaystyle\sum_{i_1=\overline{0,m_1}}\dots\sum_{i_n=\overline{0,m_n}}(a_{i_1\dots i_n}-b_{i_1\dots i_n})X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}=0.$

Vom demonstra că $a_{i_1\dots i_n}=b_{i_1\dots i_n}$ pt. orice $i_1,\dots,i_n$, ceea ce va însemna exact unicitatea reprezentării lui f ca sumă de monoame. Acest fapt rezultă din următoarea.

<u>Lemă</u>. Dacă $\sum_{0\le i_1\le m_1} \dots \sum_{0\le i_n\le m_n} c_{i_1\dots i_n} X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n} = 0$,

atunci $c_{i_1\dots i_n}=0$ pt. orice $0\le i_1\le m_1, \dots, 0\le i_n\le m_n$.

(aici coeficienții $c_{i_1\dots i_n}$ sunt presupuși a fi din A).

<u>Dem</u>. Inducție după n.

Pt. $n=1$: $c_0 + c_1 X_1 + \dots + c_{m_1} X_1^{m_1} = 0 \Rightarrow c_0 = c_1 = \dots = c_{m_1} = 0$

din construcția lui $A[X_1]$.

<u>$n-1 \to n$</u>. Presupunem $\sum_{0\le i_1\le m_1} \dots \sum_{0\le i_n\le m_n} c_{i_1\dots i_n} X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n} = 0$.
<u>(unde $n\ge 2$)</u>.

Atunci $0 = \sum_{0\le i_1\le m_1} \dots \sum_{0\le i_n\le m_n} c_{i_1\dots i_n} X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n} =$

$$= \sum_{0\le i_n\le m_n} \underbrace{\left(\sum_{0\le i_1\le m_1} \dots \sum_{0\le i_{n-1}\le m_{n-1}} c_{i_1\dots i_{n-1} i_n} X_1^{i_1}\dots X_{n-1}^{i_{n-1}} \right)}_{\overset{\text{notăm}}{=}\ g_{i_n}} X_n^{i_n}$$

deci $\sum_{0\le i_n\le m_n} g_{i_n} X_n^{i_n} = 0$, iar $g_{i_n} \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$

pt. orice $0\le i_n\le m_n$. Privind această relație în $(A[X_1, \dots, X_{n-1}])[X_n]$ și aplicând cazul $n=1$ (pt. nedeterminata X_n și inelul de coeficienți $A[X_1, \dots, X_{n-1}]$) obținem $g_0 = g_1 = \dots = g_{m_n} = 0$. Din ipoteza de inducție (aplicată pt. $g_0,\dots,g_{m_n}$) rezultă acum că $c_{i_1\dots i_n}=0$ pt. orice i_n și orice $i_1,\dots,i_{n-1}$. În concluzie

$$c_{i_1\dots i_n}=0 \text{ pt. orice } 0\le i_1\le m_1,\dots,0\le i_n\le m_n.$$

Următorul rezultat extinde proprietatea de universalitate a inelelor de polinoame de la cazul unei nedeterminate la acela al unui număr finit de nedeterminate.

<u>Teoremă</u>. Fie A un inel comutativ, $n\in\mathbb{N}^*$ și $A[X_1,\dots,X_n]$ inelul de polinoame în n nedeterminate cu coeficienți în A. Atunci pentru orice inel comutativ B, orice morfism de inele $f:A\to B$ și orice elemente $b_1,\dots,b_n\in B$, există un unic morfism de inele $\bar{f}:A[X_1,\dots,X_n]\to B$ care-l extinde pe f (adică $\bar{f}(a)=f(a)$ pt. orice $a\in A$) și pt. care $f(X_1)=b_1,\dots,f(X_n)=b_n$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & A[X_1,\dots,X_n] \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>. Inducție după n. Pt. $n=1$ am demonstrat deja. Presupunem adevărat pt. $n-1$ și arătăm pt. n, unde $n\ge 2$.

Fie așadar $f:A\to B$ morfism de inele și $b_1,\dots,b_n\in B$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & A[X_1,\dots,X_{n-1}] \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] & A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]=A[X_1,\dots,X_n] \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Din ipoteza de inducție există un unic morfism de inele $\tilde{f}:A[X_1,\dots,X_{n-1}]\to B$ cu $\tilde{f}(a)=f(a)$ pt. orice $a\in A$ și

$\tilde{f}(X_1)=b_1,\dots,\tilde{f}(X_{n-1})=b_{n-1}$.

Aplicăm acum proprietatea de universalitate a inelelor de polinoame pt. inelul de polinoame $A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$ într-o nedeterminată X_n cu coeficienți în inelul comutativ $A[X_1,\dots,X_{n-1}]$, pentru morfismul de inele $\tilde{f}: A[X_1,\dots,X_{n-1}]\to B$ și elementul $b_n\in B$. Obținem că există un unic morfism de inele $\bar{f}: A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]\to B$ cu $\bar{f}(u)=\tilde{f}(u)$ pt. orice $u\in A[X_1,\dots,X_{n-1}]$ și $\bar{f}(X_n)=b_n$.

Atunci dacă $a\in A$ avem $\bar{f}(a)=\tilde{f}(a)=f(a)$, $\bar{f}(X_i)=\tilde{f}(X_i)=b_i$ pt. $1\le i\le n-1$ și $\bar{f}(X_n)=b_n$, deci $\bar{f}$ este un morfism așa cum căutam (ținând cont desigur de faptul că $A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]=A[X_1,\dots,X_n]$).

Arătăm acum că $\bar{f}$ e unic cu aceste proprietăți. Într-adevăr, dacă $F: A[X_1,\dots,X_n]\to B$ ar fi un alt morfism de inele cu $F(a)=a$ pt. orice $a\in A$ și $F(X_1)=b_1,\dots,F(X_n)=b_n$, atunci restricția lui F la $A[X_1,\dots,X_{n-1}]$, $F_{|A[X_1,\dots,X_{n-1}]}$, este un morfism de inele care extinde f și care trimite X_1 în $b_1,\dots,X_{n-1}$ în b_{n-1}. Dar unicul astfel de morfism este $\tilde{f}$ (de mai sus), deci $F_{|A[X_1,\dots,X_{n-1}]}=\tilde{f}$.

Atunci F este un morfism de inele care extinde $\tilde{f}$ și care trimite X_n în b_n. Din unicitatea lui $\bar{f}$ de mai sus rezultă că $F = \overline{f}$, ceea ce încheie demonstrația.

Dacă $a X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ este un monom din $A[X_1, \dots, X_n]$, cu $a \neq 0$, definim gradul său ca fiind $i_1 + \dots + i_n$.

Dacă $0 \neq f \in A[X_1, \dots, X_n]$, definim gradul lui f ca fiind cel mai mare grad al unui monom nenul care apare în reprezentarea lui f ca sumă de monoame.
Dacă $f = 0$, convenim ca gradul lui f să fie $-\infty$.

Un polinom se numește omogen de grad d dacă este sumă de monoame ~~...~~ de grad d.
Orice polinom f se scrie unic ca sumă de polinoame omogene. Într-adevăr, pt. fiecare $d \leq$ gradul lui f notăm f_d = suma monoamelor de grad d din reprezentarea lui f ca sumă de monoame. Atunci f_d e polinom omogen de grad d și

$$f = \sum_{d \leq \text{grad} f} f_d \quad \left[\text{dacă, pt. un } d \text{ nu există monoame de grad } d\text{, considerăm } f_d = 0\right].$$

<u>Exemplu</u>. Fie $f = 2X_1^2 + 3X_1X_2X_3 - X_1X_2^2 + X_3^3 + 1 + X_1^2X_3^2 + X_2^4 \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$.

Atunci gradul lui f este 4,

$f_0 = 1$, $f_2 = 2X_1^2$, $f_3 = 3X_1X_2X_3 - X_1X_2^2 + X_3^3$, $f_4 = X_1^2X_3^2 + X_2^4$

și $f = f_0 + f_2 + f_3 + f_4$. [considerăm $f_1 = 0$].

---

f_d se numesc componentele omogene ale polinomului f.

Exercițiu. Fie $d, n \in \mathbb{N}^*$. Câte monoame de forma $X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ de grad d există în $A[X_1, \dots, X_n]$?

[Reformulare: dacă A e corp comutativ, de exemplu $A = \mathbb{R}$, care este dimensiunea $\mathbb{R}$-spațiului vectorial constând din toate polinoamele omogene de grad d din $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$?].

Polinoame simetrice

Fie A un inel comutativ, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $A[X_1, \dots, X_n]$ inelul de polinoame în n nedeterminate cu coeficienți în A.

~~Definiție Un polinom $f \in A[X_1, \dots, X_n]$~~

Vom considera polinoamele din $A[X_1, \dots, X_n]$ în care toate nedeterminatele "se comportă la fel".

Dacă $\sigma \in S_n$, aplicăm proprietatea de universalitate a inelului de polinoame $A[X_1, \dots, X_n]$ pt. inelul comutativ $B = A[X_1, \dots, X_n]$, morfismul incluziune $A \hookrightarrow B$ și

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, bend right] & A[X_1, \dots, X_n] \arrow[d, dotted, "\sigma^*"] \\ & A[X_1, \dots, X_n] \end{tikzcd}$$

elementele $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)} \in B$. Obținem că există un unic morfism de inele, pe care-l notăm $\sigma^* : A[X_1, \dots, X_n] \to A[X_1, \dots, X_n]$ cu $\sigma^*(a) = a$ pt. orice $a \in A$ și $\sigma^*(X_1) = X_{\sigma(1)}, \dots, \sigma^*(X_n) = X_{\sigma(n)}$.

σ^* acționează asupra unui polinom $f \in A[X_1,\dots,X_n]$ prin înlocuirea (peste tot) a lui X_1 cu $X_{\sigma(1)}, \dots,$ a lui X_n cu $X_{\sigma(n)}$. Scris formal:

$$\sigma^*(f) = f(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}).$$

Exemplu. Dacă $n=3$, $f = X_1^2 + X_1X_3 + X_2^2X_3 \in A[X_1,X_2,X_3]$ și $\sigma = (1\ 2\ 3) \in S_3$, atunci

$$\sigma^*(f) = X_2^2 + X_2X_1 + X_3^2X_1.$$

Definiție. Un polinom $f \in A[X_1,\dots,X_n]$ se numește polinom simetric dacă $\sigma^*(f) = f$ pt. orice $\sigma \in S_n$.

Observație. f este simetric dacă $f(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}) = f(X_1,\dots,X_n)$ pt. orice $\sigma \in S_n$, adică dacă permutăm între ele nedeterminatele în orice mod, polinomul nu se schimbă. Altfel spus, nedeterminatele au un rol simetric în f; de aici numele de polinom simetric.

Propoziție. Mulțimea $\mathcal{S}$ a polinoamelor simetrice formează un subinel al lui $A[X_1,\dots,X_n]$.

Dem. Evident $f = a$ e pol. simetric pt. orice $a \in A$, deci $A \subset \mathcal{S}$, în particular $1 \in \mathcal{S}$.

Dacă $f,g \in \mathcal{S}$, atunci pt. orice $\sigma \in S_n$ avem

$\sigma^*(f-g)=\sigma^*(f)-\sigma^*(g)=f-g$ și

$$\sigma^*(fg)=\sigma^*(f)\,\sigma^*(g)=fg,$$

(am folosit că $f,g\in\mathcal{S}$ și σ^* e morfism de inele), de unde $f-g,\ fg\in\mathcal{S}$.

Propoziție. Fie $f\in A[X_1,\dots,X_n]$ un polinom nenul și $f=f_0+\dots+f_m$ reprezentarea lui ca sumă de polinoame omogene (adică f_d e componenta omogenă de grad d a lui f pt. fiecare $0\le d\le m$). Atunci f e simetric $\Leftrightarrow$ $f_0,\dots,f_d$ sunt simetrice.

Dem. Dacă $aX_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}$ e un monom de grad d (adică $i_1+\dots+i_n=d$) și $\sigma\in S_n$, atunci

$\sigma^*(aX_1^{i_1}\dots X_n^{i_n})=aX_{\sigma(1)}^{i_1}\dots X_{\sigma(n)}^{i_n}$ are tot grad $i_1+\dots+i_n=d$. Prin urmare $\sigma^*(f_d)$ e tot polinom omogen de grad d. Atunci

$$\sigma^*(f)=f\Leftrightarrow\sigma^*(f_0)+\dots+\sigma^*(f_d)=f_0+\dots+f_d$$

$$\Leftrightarrow\sigma^*(f_0)=f_0,\dots,\sigma^*(f_d)=f_d$$ (deoarece reprezentarea unui polinom ca sumă de polinoame omogene e unică).

și de aici obținem că

$$f \text{ simetric}\Leftrightarrow\forall\sigma\in S_n\ \sigma^*(f)=f$$

$$\Leftrightarrow\forall\sigma\in S_n\ \sigma^*(f_0)=f_0,\dots,\sigma^*(f_d)=f_d$$

$$\Leftrightarrow f_0,\dots,f_d \text{ simetrice}.$$

<u>Propoziție</u>. În $A[X_1,\dots,X_n]$ considerăm polinoamele

$$s_1 = X_1 + \dots + X_n = \sum_{1\le i\le n} X_i$$

$$s_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + \dots + X_1X_n + X_2X_3 + \dots + X_{n-1}X_n = \sum_{1\le i<j\le n} X_iX_j$$

— — — — — — — — —

$$s_k = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} X_{i_1}\dots X_{i_k} \quad \text{pt. } 1\le k\le n$$

— — — — — — — —

$$s_n = X_1\dots X_n .$$

Atunci $s_1, s_2, \dots, s_n$ sunt polinoame simetrice.

<u>Dem</u>. Pentru orice submulțime nevidă $F=\{i_1,\dots,i_k\}$ a lui $\{1,\dots,n\}$ notăm $X_F = X_{i_1}\dots X_{i_k}$. Avem atunci pt. orice $1\le k\le n$

$$s_k = \sum_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\}\\ |F|=k}} X_F .$$

Dacă $\sigma\in S_n$, avem $\sigma^*(X_F) = X_{\sigma(i_1)}\dots X_{\sigma(i_k)} = X_{\sigma(F)}$, deci $\sigma^*(s_k) = \sum_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\}\\ |F|=k}} X_{\sigma(F)}$.

Dar $\{\sigma(F) \mid F\subset\{1,\dots,n\}, |F|=k\} = \{F \mid F\subset\{1,\dots,n\}, |F|=k\}$.

Într-adevăr: pt. "$\subset$" dacă $F\subset\{1,\dots,n\}$ și $|F|=k$, atunci $\sigma(F)\subset\{1,\dots,n\}$ și $|\sigma(F)|=k$, deoarece σ e injectivă, deci $\sigma(F)$ se găsește în mulțimea din dreapta.

pt. "$\supset$" dacă $F\subset\{1,\dots,n\}$, $|F|=k$, atunci $\sigma^{-1}(F)\subset\{1,\dots,n\}$ și $|\sigma^{-1}(F)|=k$, iar $F=\sigma(\sigma^{-1}(F))$, deci F se găsește în mulțimea din stânga.

Atunci $\sigma^*(s_k) = \sum_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\}\\ |F|=k}} X_{\sigma(F)} = \sum_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\}\\ |F|=k}} X_F = s_k$ pt. orice σ, deci s_k e simetric.