Seminar 1

Structuri algebrice în informatică

1. Fie A, B mulțimi ~~in~~finite

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

! Fie $A_1, A_2, \dots, A_m$ mulțimi finite $(m \geq 2)$, atunci: $\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} (A_i \cap A_j) +$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{m+1} \left|\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right|$$

Principiul includerii și excluderii. (P.I.E)

$P(m)$: " $\forall A_1 \dots A_m : \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \dots\dots$ "

Dem $P(m)$ este adev $\forall m \geq 2$

I. verificare: $P(2)$ $\forall A_1, A_2$ mulțimi finite:

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ (A)

II Presupunem $P(k)$ (A) $(\forall)$ $k \geq 2$ și demonstrăm că și $P(k+1)$ (A).

$P(k)$ (A) $\Leftrightarrow$ ... (A)

Fie $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$ mulțimi finite.

$|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}|$

$- |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$

$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}|$

$- (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1}) =$

$= M - \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}|$

$- \ldots + (-1)^{n+2} |\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i| =$

$= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n+1} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n+2} |\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i|$

$\Rightarrow P(n+1)$ (A) $(\forall)\, n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$

Din I și II $\Rightarrow P(n)$ (A) $(\forall)\, n \ge 2$

Funcția $f: A \to B$ este <u>injectivă</u>

↳ dacă $\forall\, x_1, x_2 \in A: x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$

$\Leftrightarrow (\forall)\, x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow (\forall)$ // la axa $Ox \cap G_f$ în cel mult 1 pct.

Funcția $f: A \to B$ este ~~injectivă~~ <u>surjectivă</u>

↳ $(\forall)\, y \in B\ (\exists)\, x \in A$ cu $f(x) = y$

↳ $\operatorname{Im} f = B$

↳ $(\forall)$ // la axa $Ox \cap G_f$ în cel puțin 1 punct

Funcția $f:A\to B$ este bijectivă $\Leftrightarrow$
f - injectivă și surjectivă

• Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$
Este f injectivă? surjectivă? bijectivă?

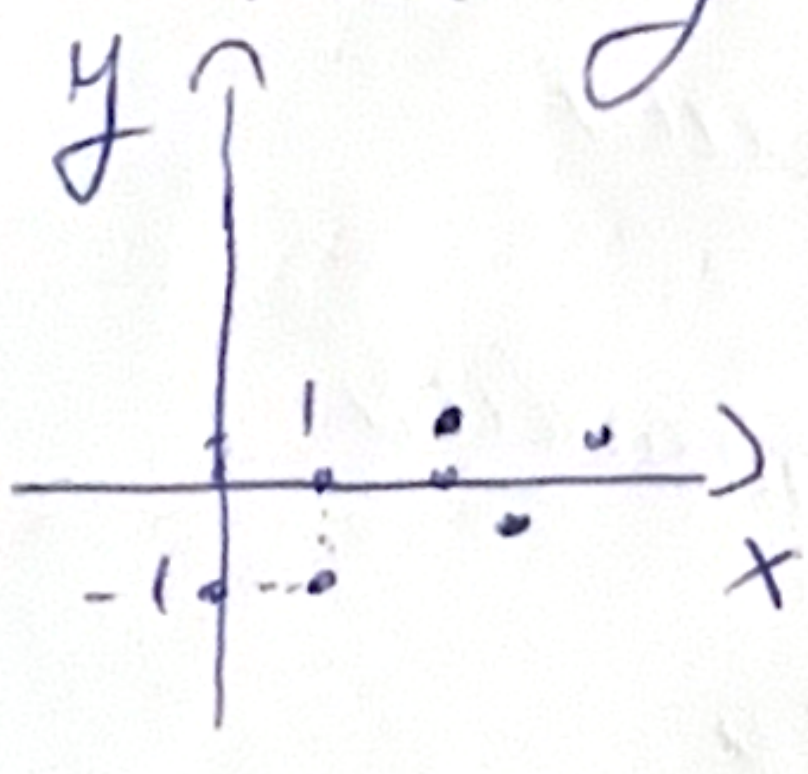
1) $f:A\to B$ nu este injectivă dacă $(\exists)\, x_1\neq x_2\in A$,
a.î. $f(x_1)=f(x_2)$ (nu este injectivă)
↳ $f(1)=f(-1)=3$

Obs! $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strict monotonă $\Rightarrow$ f este injectivă
(nu e valabilă și reciproca)

2) $\operatorname{Im} f=[2,\infty)\neq\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f nu este surjectivă

Exemplu de funcție injectivă care nu este strict monotonă

Fie $g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{(-1)^x}{x}$



Fct. g nu e strict monotonă

$$\begin{matrix} x_1 & < & x_2 & < & x_3 \\ \| & & \| & & \| \\ 1 & & 2 & & 3 \end{matrix}$$

$$g(1)=-1 < g(2)=\frac{1}{2} > g(3)=-\frac{1}{3}$$

Fct. g este injectivă
↳ Fie $x_1, x_2\in\mathbb{N}^*$ cu $g(x_1)=g(x_2)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{\dfrac{(-1)^{x_1}}{x_1}=\dfrac{(-1)^{x_2}}{x_2}}_{\text{au același semn}}$ $\Rightarrow$ x_1, x_2 au aceeași paritate

$\Rightarrow (-1)^{x_1} = (-1)^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g$ - injectiv

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$

$\hookrightarrow f_1$ - injectivă, $f_1: (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ este inj.

$\hookrightarrow f_2$ - surjectivă, $f_2: \mathbb{R} \to \mathrm{Im} f$

Fie A cu n elemente

B cu m elemente

Determinați $\to$ nr fct $f: A \to B \to \boxed{m^n}$

$\to$ nr fct. surjective $f: A \to B \to$

$\to$ nr fct. injective $f: A \to B$

$\to$ nr fct. bijective $f: A \to B$

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$

<u>injectivitate</u> $a_1 \to f(a_1) \in \{b_1, \dots, b_m\}$

m moduri

$a_2 \to m-1$ moduri

$\vdots$

$a_i \to m-i+1$ moduri

$\vdots$

$a_n \to m-n+1$ moduri

nr funcții injective $\to m(m-1) \dots (m-i+1)(m-n+1) =$

$= \frac{m!}{(m-n)!} = A_m^n$, pentru $m \geq n$

! Pentru $m < n$, f - nu e injectivă, $(\forall)$ A, B

<u>bijectivitate</u> $\rightarrow m = n$ (card A = card B)

nr fct. bijective $- n!$

$\rightarrow 0, \ m \neq n$

<u>surjectivitate</u> $\rightarrow 0, \ m > n$

$\rightarrow \underline{m \leq n}$

nr fct surjective $= m^n -$ nr fct. nesurjective

$f: A \rightarrow B$ $\qquad\qquad$ $f: A \rightarrow B$

$(b_1 \notin Imf)$ sau $(b_2 \notin Imf)$ sau ... $(b_m \notin Imf)$

$f': A \rightarrow B \setminus \{b_1\} \rightarrow (m-1)^n$ funcții

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |F_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |F_i \cap F_j| + \ldots\ldots$$

$|F_i| = (m-1)^n \ \forall i$

$i < j \quad |F_i \cap F_j| = |\{f: A \rightarrow B \setminus \{b_i, b_j\}\}| =$

$= (m-2)^n$

nr funcții surjective $= m^n - m(m-1)^n + C_m^2 (m-2)^n$