Test de seminar Algebră I - Grupa 101
26.11.2024

Nume și prenume: ____________________________________

Grupa: ______

1. Pentru fiecare din următoarele obiecte, daţi un exemplu justificat sau explicaţi de ce nu există:

a) Relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R}$ care determină exact 2024 de clase de echivalenţă. **(1p)**

b) Funcţie $f : [24, 2025] \to [0, 1] \cup [2, 3]$ care este surjectivă. **(1p)**

c) Monoid infinit $(M, *)$ cu exact 2 elemente nilpotente (*i.e.* elemente $x \in M$ cu $x^2 = e$). **(1p)**

2. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Determinaţi numărul submulţimilor $B \subseteq A$ pentru care numărul de funcţii de la A la B este egal cu numărul de funcţii de la B la A. **(1p)**

3. Pe mulţimea $\mathbb{R}^2$, considerăm următoarea relaţie: $(x, y) \sim (x', y') \iff (y = y'$ şi există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - x' = ty)$.

a) Demonstraţi că $\sim$ este relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R}^2$. **(1p)**

b) Este adevărat că toate clasele de echivalenţă au acelaşi cardinal? Justificaţi răspunsul. **(1p)**

c) Determinaţi un sistem complet de reprezentanţi. Puteţi descrie (desena) $\mathbb{R}^2/\sim$? **(1p)**

4.

a) Pe mulţimea $G = \mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$, considerăm operaţia $(x, a) * (y, b) = (x + ay, ab)$. Demonstraţi că G este monoid, decideţi dacă este grup şi găsiţi două elemente de ordin finit $u, v \in G$ cu uv de ordin infinit. **(1,5p)**

b) Demonstraţi că $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot), f(x) = e^x$ este un izomorfism de grupuri. **(0,5p)**

c) Demonstraţi că grupurile $(\mathbb{Q}, +)$ şi $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ nu sunt izomorfe. **(1p)**