CURS#7

11. Metode de ortogonalizare:
    - (i) matrice ortogonale;
    - (ii) matrice de proiecţie (ortogonală): proprietăţi; teorema de caracterizare;
    - (iii) factorizarea QR: definiţie, motivaţie, algoritm;
    - (iv) metoda Gram-Schimdt clasică/standard;

PROBLEME

1) Fie $\mathbf{Q} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, matrice ortogonală. Atunci:
   - (i) $\big(\mathbf{Qx}\big)^{\mathsf{T}}\big(\mathbf{Qy}\big) = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{y},\ \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;
   - (ii) $\|\mathbf{Qx}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2,\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
   - (iii) dacă $\mathbf{Qx} = \mathbf{0}_m$, atunci $\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$;
   - (iv) $\mathbf{Q}$ este inversabilă la stânga;
   - (v) $\|\mathbf{Q}\|_2 \coloneqq \sup\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}} \dfrac{\|\mathbf{Qx}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = 1$;
   - (vi) dacă $m = n$, atunci $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}$;
   - (vii) dacă $m = n$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie a lui $\mathbf{Q}$, atunci $|\lambda| = 1$.

2) Matricea $\mathbf{P} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ se numeşte *matrice de proiecţie ortogonală* dacă este *idempotentă*, i.e. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, şi *simetrică*, i.e. $\mathbf{P}^{\mathsf{T}} = \mathbf{P}$.
   - (i) Fie $\mathbf{Q} \coloneqq [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \ldots\ \mathbf{q}_n] \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, o matrice ortonormată, unde $\mathbf{q}_k \coloneqq \big(q_{ik}\big)_{i=\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{1,n}$.

     Atunci $\mathbf{QQ}^{\mathsf{T}} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ este o matrice de proiecţie ortogonală pe subspaţiul vectorial $S \coloneqq \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$.
   - (ii) Fie $\mathbf{A} \coloneqq [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n] \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$ şi $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$, unde $\mathbf{a}_k \coloneqq \big(a_{ik}\big)_{i=\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{1,n}$.

     Atunci $\mathbf{A}\big(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\big)^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ este o matrice de proiecţie ortogonală pe subspaţiul vectorial $S \coloneqq \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$.
   - (iii) Dacă $\mathbf{P} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ este o matrice de proiecţie ortogonală pe subspaţiul vectorial $S \subseteq \mathbb{R}^m$, atunci $\mathbf{I}_m - \mathbf{P} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ este o matrice de proiecţie ortogonală pe complementul ortogonal al subspaţiului vectorial S în $\mathbb{R}^m$, i.e. $S^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^m$.

METODE DE ORTOGONALIZARE

1. MATRICE ORTOGONALE

<u>DEFINIȚIE</u>:

Matricea $Q \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, s.n. <u>ortogonală</u> dacă $Q^T Q = I_n$.

<u>OBSERVAȚIE</u>:

În general, pentru $m > n$, $QQ^T \neq I_m$!

<u>PROPOZIȚIE</u> (proprietăți ale matricelor ortogonale):

Fie $Q \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, <u>ortogonală</u>.

Atunci:

(i) $(Q\underline{x})^T (Q\underline{y}) = \underline{x}^T \underline{y}$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

(ie unghiul dintre oricare doi vectori se păstrează prin transformări ortogonale);

(ii) $\|Q\underline{x}\|_2 = \|\underline{x}\|_2, \ \forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

(ie lungimea vectorilor se păstrează prin transformări ortogonale);

(iii) $Q\underline{x} = \underline{0}_m \Longrightarrow \underline{x} = \underline{0}_n \in \mathbb{R}^n$;

(iv) Q inversabilă la stânga;

(v) $\|Q\|_2 := \sup\limits_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}_n\}} \dfrac{\|Q\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} = 1$;

(vi) $m = n \Longrightarrow Q^{-1} = Q^T$;

(vii) $m = n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie a lui $Q \Longrightarrow |\lambda| = 1$.

<u>Dem</u>: EXERCIȚIU!

2. MATRICE DE PROIECȚIE

DEFINIȚII:

$P \in M_m(\mathbb{R})$ sn <u>matrice de proiecție</u> dacă

$$\boxed{P^2 = P}$$

$P \in M_m(\mathbb{R})$ sn <u>matrice de proiecție ortogonală</u> dacă

$$\boxed{P^2 = P \ \ \& \ \ P^T = P}$$

OBS (proprietăți):

1) $P \in M_m(\mathbb{R})$ <u>matrice de proiecție</u> $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} P(\text{range}(P)) = \text{range}(P) \\ \left(P\big|_{\text{range}(P)} = I_m \right) \end{array}}$$

—//—

$\forall \underline{y} \in \text{range}(P)$, $\exists \underline{x} \in \mathbb{R}^m$: $P\underline{x} = \underline{y} \Longrightarrow$

$P\underline{y} = P(P\underline{x}) = P^2\underline{x} = P\underline{x} = \underline{y}$, $\forall \underline{y} \in \text{range}(P)$

$\Longrightarrow P\big|_{\text{range}(P)} = I_m$ $\square$

O matrice de proiecție $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ este, în fapt, asociată cu subspațiul vectorial

$$S := \mathrm{range}(P) \subset \mathbb{R}^m$$

2) $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ <u>matrice de proiecție (ortogonală)</u>

$\Rightarrow I_m - P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ <u>matrice de proiecție (ortogonală)</u>

$$\underline{(I_m-P)^2} = I_m - 2P + P^2 \underset{P^2=P}{=} \underline{I_m - P}$$

$$\underline{(I_m-P)^T} = I_m^T - P^T \underset{P^T=P}{=} \underline{I_m - P}$$

$\square$

3) $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ <u>matrice de proiecție</u> $\Rightarrow$

$$\boxed{(I_m - P)P = O_m}$$

Cf 2),

$$\cancel{I_m} - P = (I_m-P)^2 = (\cancel{I_m} - P) - (I_m - P)P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I_m - P)P = O_m$$

$\square$

DEFINIȚIE:

Dacă $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice de proiecție ortogonală, atunci $I_n - P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s.n. matricea de proiecție ortogonală complementară lui P.

4) $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice de proiecție ortogonală $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{range}(I_n - P) = \operatorname{range}(P)^{\perp}}$$

$\forall\, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$,

$$[(I_n - P)\underline{y}]^T (P\underline{z}) = \underline{y}^T (I_n - P)^T P \underline{z}$$

$$= \underline{y}^T \underbrace{[(I_n - P)P]}_{= O_n \text{ cf } 3)} \underline{z} = 0$$

$\square$

5) $V \subseteq \mathbb{R}^n$ subspațiu $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \exists!\, \underline{y} \in V,\ \exists!\, \underline{z} \in V^{\perp}:$$

$$\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$$

6) $V \subset \mathbb{R}^m$ subspațiu,
$P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ matrice de proiecție ortogonală pe V ($\mathrm{range}(P) = V$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m: \quad \underline{x} = \underbrace{P\underline{x}}_{\in V} + \underbrace{(I_m - P)\underline{x}}_{\in V^{\perp}}}$$

---//---

Evident, $P\underline{x} \in V$ și au loc relațiile

$$\underline{x} = P\underline{x} + (\underline{x} - P\underline{x}) = \underbrace{P\underline{x}}_{\substack{\in \mathrm{range}(P) \\ = V}} + \underbrace{(I_m - P)\underline{x}}_{\substack{\in \mathrm{range}(I_m - P) \\ = \mathrm{range}(P)^{\perp} = V^{\perp}}}$$

$\square$

<u>TEOREMA</u> (caracterizarea matricii de proiecție ortogonală):

$P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ <u>proiecție ortogonală</u> $\Longrightarrow$

$$\boxed{\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m, \quad P\underline{x} := \arg \min_{\underline{z} \in \mathrm{range}(P)} \|\underline{z} - \underline{x}\|_2}$$

Dem:

$\forall \underline{z} \in \text{range}(P)$,

$$\underline{z} - \underline{x} = (\underline{z} - P\underline{x}) + (P\underline{x} - \underline{x}) \implies$$

$$\|\underline{z} - \underline{x}\|_2^2 = \|(\underline{z} - P\underline{x}) + (P\underline{x} - \underline{x})\|_2^2$$

$$= [(\underline{z} - P\underline{x}) + (P\underline{x} - \underline{x})]^T [(\underline{z} - P\underline{x}) + (P\underline{x} - \underline{x})]$$

$$= \|\underline{z} - P\underline{x}\|_2^2 + 2(\underline{z} - P\underline{x})^T (P\underline{x} - \underline{x}) + \|P\underline{x} - \underline{x}\|_2^2$$

$\underline{z} \in \text{range}(P) \implies \exists\, \underline{w} \in \mathbb{R}^m : P\underline{w} = \underline{z}$

$$\implies (\underline{z} - P\underline{x})^T (P\underline{x} - \underline{x}) = (P\underline{w} - P\underline{x})^T (P\underline{x} - \underline{x})$$

$$= (\underline{w} - \underline{x})^T P^T (P\underline{x} - \underline{x}) \underset{P^T = P}{=}$$

$$= (\underline{w} - \underline{x})^T P (P\underline{x} - \underline{x}) = (\underline{w} - \underline{x})^T (P^2\underline{x} - P\underline{x})$$

$$\underset{P^2 = P}{=} (\underline{w} - \underline{x})^T \underline{0}_m = 0$$

Prin urmare, obținem:

$$\|\underline{z} - \underline{x}\|_2^2 = \|\underline{z} - P\underline{x}\|_2^2 + \|P\underline{x} - \underline{x}\|_2^2$$

$$\geq \|\underline{z} - P\underline{x}\|_2^2$$

cu egalitate $\iff P\underline{x} = \underline{x}$

$\square$

Cum construim o matrice de proiecție ortogonală?

① Fie $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{u}^T \underline{u} = 1$ și $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$.

Determină

$$P_{\underline{u}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \quad P_{\underline{u}}^2 = P_{\underline{u}}, \quad P_{\underline{u}}^T = P_{\underline{u}}$$

$$P_{\underline{u}} \underline{x} := \arg \min_{\underline{z} \in \operatorname{span}\{\underline{u}\}} \|\underline{z} - \underline{x}\|_2$$

$$\underline{z} \in \operatorname{span}\{\underline{u}\} \Rightarrow \underline{z} = \alpha \underline{u}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$P_{\underline{u}} x := \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \|\alpha \underline{u} - \underline{x}\|_2$$

$$= \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\alpha \underline{u} - \underline{x}\|_2^2$$

$$= \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} (\alpha \underline{u} - \underline{x})^T (\alpha \underline{u} - \underline{x})$$

$$= \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{2} \Big(\alpha^2 \underbrace{\|\underline{u}\|_2^2}_{=1} - 2 \alpha \underline{u}^T \underline{x} + \|\underline{x}\|_2^2 \Big)}_{=: f(\alpha)}$$

$f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$f(u) = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - 2\alpha \underline{u}^T \underline{x} + \|\underline{x}\|_2^2\right)$$

$$\alpha_{\min} := \underline{u}^T \underline{x}$$

$$P_{\underline{u}} \underline{x} = \alpha_{\min} \underline{u} = \overbrace{(\underline{u}^T \underline{x})\, \underline{u}}^{\text{proiecție vectorială}} = \underline{u}(\underline{u}^T \underline{x})$$

$$= \underbrace{(\underline{u}\, \underline{u}^T)\, \underline{x}}_{\text{proiecție matricială}} \implies \boxed{P_{\underline{u}} = \underline{u}\, \underline{u}^T \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})}$$

Evident, $P_{\underline{u}}^2 = P_{\underline{u}}$ și $P_{\underline{u}}^T = P_{\underline{u}}$. $\square$

② Ideea se poate generaliza pentru $V \subset \mathbb{R}^m$, $\dim V = n < m$, subspațiu vectorial, alegând $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n \in \mathbb{R}^m$ bază ortonormată a lui V, i.e.

$$\begin{cases} \underline{u}_i^T \underline{u}_j = \delta_{ij}, & i,j = \overline{1,n} \\ V = \operatorname{span}\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \end{cases}$$

și

$$\boxed{P_V := [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \dots \underline{u}_n] \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \\ \underline{u}_2^T \\ \vdots \\ \underline{u}_n^T \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})}$$

3. FACTORIZAREA QR

<u>DEFINIȚIE</u> (factorizarea QR):

Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, $\operatorname{rang} A = n$, se poate descompune

$$\boxed{\begin{aligned} &A = QR \qquad (1) \\ &Q = (q_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ ortogonală;} \\ &R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ sup triunghiulară} \\ &\quad r_{ii} > 0,\ i = \overline{1,n}; \end{aligned}}$$

atunci (1) s.n. <u>factorizarea QR</u> a lui A.

OBS: Se pun următoarele <u>probleme</u>:

(i) <u>Există</u> factorizarea QR a lui $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, $\operatorname{rang} A = n$?

(ii) Dacă da, este <u>unică</u>?

(iii) <u>Algoritm</u> pt. factorizarea QR?

OBS (PCMMP):

Considerăm PCMMP

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m > n$, inversabilă la stânga. Cf Teoremei #1, $\operatorname{rang} A = n$ şi PCMMP are soluţie unică dată de, e.g., sistemul de ecuaţii normale:

$$(A^T A)\underline{x} = A^T \underline{b}$$

Admiţând că A se poate factoriza QR

$$A = QR$$

sistemul de ecuaţii normale devine:

$$(QR)^T QR\,\underline{x} = (QR)^T \underline{b}$$

$$R^T \underbrace{Q^T Q}_{= I_n} R\,\underline{x} = R^T Q^T \underline{b}$$

$$R^T R\,\underline{x} = R^T Q^T \underline{b} \Rightarrow \boxed{R\underline{x} = Q^T \underline{b}}$$

$\Rightarrow$ Metoda substituţiei descendente!

ALGORITM (PCMMP: factorizarea QR):

Date: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, rang $A = n$

$\underline{b} \in \mathbb{R}_m$

① Calculează factorizarea QR a lui A:

$A = QR$, $Q \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ortogonală

$R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară

$r_{ii} > 0$, $i = \overline{1,n}$

② Calculează $\underline{d} := Q^T \underline{b}$

③ Rezolvă, folosind metoda substituției descendente, sistemul:

$R\underline{x} = \underline{d}$

OBS:

Rămâne de arătat că $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, inversabilă la stânga, admite factorizarea QR. Algoritm!

3.1. FACTORIZAREA QR: METODA GRAM-SCHMIDT CLASICĂ / STANDARD

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, inversabilă la stânga ($\Leftrightarrow$ rang $A = n$).

Vrem să construim matricele Q și R date de factorizarea QR a lui A folosind <u>metoda Gram-Schmidt standard / clasică</u>.

① $A = [\underline{a}_1\ \underline{a}_2 \cdots \underline{a}_n] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$\underline{a}_k = (a_{ik})_{i=\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m \equiv \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $k=\overline{1,n}$

② $Q = [\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_n] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$\underline{q}_k = (q_{ik})_{i=\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m \equiv \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $k=\overline{1,n}$

$$\underline{q}_i^T \underline{q}_j = \delta_{ij}, \quad i,j=\overline{1,n}$$

③ $$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$r_{kk} > 0, \quad k = \overline{1,n}$$

④ Folosind partiționările de la ①-③, vrem să rezolvăm $A = QR$ pentru a obține matricele Q și R:

$$[\underline{a}_1\ \underline{a}_2 \dots \underline{a}_n] =$$

$$= [\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \dots \underline{q}_n] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{a}_1 = \underline{q}_1 r_{11} \\ \underline{a}_2 = \underline{q}_1 r_{12} + \underline{q}_2 r_{22} \\ \vdots \\ \underline{a}_n = \underline{q}_1 r_{1n} + \underline{q}_2 r_{2n} + \dots + \underline{q}_n r_{nn} \end{cases}$$

Metoda Gram-Schmidt clasică /standard constă în rezolvarea sistemului de mai sus ecuație cu ecuație, de la prima la ultima:

- Ecuația #1: $\boxed{\underline{a}_1 = \underline{q}_1 r_{11}}$

$$\underline{a}_1^T \underline{a}_1 = (\underline{q}_1 r_{11})^T (\underline{q}_1 r_{11}) = r_{11} \underline{q}_1^T \underline{q}_1 r_{11}$$
$$= r_{11}^2 \Longrightarrow$$
$$r_{11}^2 = \|\underline{a}_1\|_2^2 \Longrightarrow r_{11} = \pm \|\underline{a}_1\|$$

Cum $r_{kk} > 0$, $k = \overline{1,n}$, rezultă:

$$\boxed{r_{11} = \|\underline{a}_1\|_2}$$

OBS: $\|\underline{a}_1\|_2 = 0 \Longleftrightarrow \underline{a}_1 = \underline{0}_m \in \mathbb{R}^m$ și în acest caz $\operatorname{rang} A \le n-1$ ✗

$$\underline{q}_1 = \frac{1}{r_{11}} \underline{a}_1 \Longrightarrow \boxed{\underline{q}_1 = \underline{a}_1 / \|\underline{a}_1\|}$$

• <u>Ecuația #2</u>: $\boxed{\underline{a}_2 = \underline{q}_1 r_{12} + \underline{q}_2 r_{22}}$

$$\underline{q}_1^T \underline{a}_2 = \underline{q}_1^T (\underline{q}_1 r_{12} + \underline{q}_2 r_{22}) = r_{12} \Longrightarrow$$

$$\boxed{r_{12} = \underline{q}_1^T \underline{a}_2}$$

Ecuația #2 devine:

$$\underline{a}_2 - \underline{q}_1 r_{12} = \underline{q}_2 r_{22}$$

și are necunoscutele $\underline{q}_2$ și r_{22}.

$$\|\underline{a}_2 - \underline{q}_1 r_{12}\|_2^2 = \|\underline{q}_2\|_2^2 \; r_{22}^2 = r_{22}^2 \Longrightarrow$$

$$r_{22} = \pm \|\underline{a}_2 - \underline{q}_1 r_{12}\|_2$$

Cum $r_{kk} > 0$, $k = \overline{1,n}$, rezultă:

$$\boxed{r_{22} = \|\underline{a}_2 - \underline{q}_1 r_{12}\|_2}$$

$$\underline{q}_2 = \frac{1}{r_{22}} (\underline{a}_2 - \underline{q}_1 r_{12}) \Longrightarrow \boxed{\underline{q}_2 = \frac{\underline{a}_2 - \underline{q}_1 r_{12}}{\|\underline{a}_2 - \underline{q}_1 r_{12}\|_2}}$$

<u>OBS</u>: $r_{22} \neq 0$ pt că, în caz contrar, $\underline{a}_2$ și $\underline{q}_1$ (deci $\underline{a}_1$) ar fi lin. dep. <u>Abs</u>

• Ecuația #n :

$$\boxed{\underline{a}_n = \underline{q}_1 r_{1n} + \underline{q}_2 r_{2n} + \dots + \underline{q}_n r_{nn}}$$

unde $\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ cunoscute

$\forall j = \overline{1, n-1}$:

$$\underline{q}_j^T \underline{a}_n = \underline{q}_j^T (\underline{q}_1 r_{1n} + \underline{q}_2 r_{2n} + \dots + \underline{q}_n r_{nn})$$

$$= \underline{q}_j^T \underline{q}_j r_{jn} = r_{jn} \implies$$

$$\boxed{r_{jn} = \underline{q}_j^T \underline{a}_n, \quad j = \overline{1, n-1}}$$

Ecuația #n se reduce la :

$$\underline{a}_n - \underline{q}_1 r_{1n} - \dots - \underline{q}_{n-1} r_{n-1,n} = \underline{q}_n r_{nn} \implies$$

$$r_{nn} = \pm \| \underline{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \underline{q}_j r_{jn} \|_2$$

Cum $r_{kk} > 0$, $k = \overline{1, n}$, rezultă

$$\boxed{r_{nn} = \| \underline{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \underline{q}_j r_{jn} \|_2}$$

OBS: Dacă $r_{nn} = 0$, atunci rezultă:

$$\underline{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \underline{q}_j r_{jn} = \underline{0}_m \implies$$

$$r_{jn} = 0, \quad j = \overline{1, n-1} \implies$$

$\underline{a}_n, \underline{q}_1, \dots, \underline{q}_{n-1}$ liniar independenți $\implies$

$\underline{a}_n, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}$ liniar independenți $\underline{\underline{Abs}}$

Deci $\underline{r_{nn} \neq 0}$.

În cele din urmă, obținem:

$$\underline{q}_n = \frac{1}{r_{nn}} \left(\underline{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \underline{q}_j r_{jn} \right)$$

adică

$$\boxed{\underline{q}_n = \frac{\underline{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \underline{q}_j r_{jn}}{\left\| \underline{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \underline{q}_j r_{jn} \right\|_2}}$$

ALGORITM (Metoda Gram-Schmidt clasică / standard)

Date: $A = [\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \dots\ \underline{a}_n] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$m \geq n$, rang $A = n$

$\underline{a}_k = (a_{ik})_{i=\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{1,n}$

for $j = \overline{1,n}$

$\quad \underline{q}_j := \underline{a}_j$

$\quad$ for $i = \overline{1,j-1}$

$\quad\quad r_{ij} := \underline{q}_i^T \underline{a}_j$

$\quad\quad \underline{q}_j := \underline{q}_j - \underline{q}_i r_{ij}$

$\quad$ end

$\quad r_{jj} := \|\underline{q}_j\|_2$

$\quad \underline{q}_j := \underline{q}_j / r_{jj}$

end

Output: $Q = [\underline{q}_1\ \underline{q}_2\ \dots\ \underline{q}_n] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$