Diferențiabilitatea funcțiilor compuse

Teoremă: Fie $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}^q$, $g: A \to B$, $g = (g_1, \dots, g_q)$, $a \in \mathring{A}$ a.î. $g(a) \in \mathring{B}$, $\varphi: B \to \mathbb{R}^r$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ și $f: A \to \mathbb{R}^r$, $f = \varphi \circ g = (f_1, \dots, f_r) = ((\varphi \circ g)_1, \dots, (\varphi \circ g)_r)$.

Dacă g este diferențiabilă în a și φ este diferențiabilă în $g(a)$, atunci:

1) $f = \varphi \circ g$ este diferențiabilă în a și

$$df(a) = d(\varphi \circ g)(a) = d\varphi(g(a)) \circ dg(a).$$

2) $$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(g(a)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(a),$$

$(\forall)\ i = \overline{1, r}$, $(\forall)\ k = \overline{1, p}$.

Explicații teoremă

1) $$\begin{tikzcd} A \subset \mathbb{R}^p \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f = \varphi \circ g"'] & B \subset \mathbb{R}^q \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

$$f = \varphi \circ g$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \arrow[r, "dg(a)"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{R}^q \arrow[r, "d\varphi(g(a))"] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

$$df(a) = d\varphi(g(a)) \circ dg(a)$$

2)

$$\begin{tikzcd} A \subset \mathbb{R}^p \arrow[r, "g=(g_1,\dots,g_q)"] \arrow[rr, bend right] & B \subset \mathbb{R}^q \arrow[r, "\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_r)"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$(x_1,\dots,x_p)$

$f=\varphi\circ g=(f_1,\dots,f_r)$

$(y_1,\dots,y_q)$

Se dau: $\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)$, $(\forall)\ k=\overline{1,p}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $(\forall)\ k=\overline{1,p}$

şi $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_l}(g(a))$, $(\forall)\ l=\overline{1,q}$.

Nu se dau: $\dfrac{\partial g}{\partial y_l}(a)$, $(\forall)\ l=\overline{1,q}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y_l}(a)$, $(\forall)\ l=\overline{1,q}$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k}(g(a))$, $(\forall)\ k=\overline{1,p}$.

Exerciţiu: Fie $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă şi $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\varphi(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz)$. Arătaţi că f este diferenţiabilă şi determinaţi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Sol.:

Fie $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $g(x,y,z)=(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz)$.

Avem $g=(g_1,g_2,g_3)$, unde $g_1,g_2,g_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$g_1(x,y,z)=xyz$, $g_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,

$g_3(x,y,z)=x^2+yz$

Avem $f = \varphi \circ g$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = (yz,\ 2x,\ 2x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = (xz,\ 2y,\ z) \qquad (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = (xy,\ 2z,\ y)$$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x},\ \dfrac{\partial g}{\partial y},\ \dfrac{\partial g}{\partial z} \text{ continue pe } \mathbb{R}^3 \text{ (operații cu funcții elementare)} \\ \mathbb{R}^3 \text{ deschisă} \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow g$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^3 \\ g \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^3 \end{array}\right| \Rightarrow f = \varphi \circ g$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "g=(g_1,g_2,g_3)"] \arrow[rr, bend right, "f=\varphi\circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \\
(x,y,z) \arrow[u] & (u,v,w) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial x}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) +$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) +$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz) \cdot yz +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz) \cdot 2x +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz) \cdot 2x,$$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial (\varphi \circ g)}{\partial y}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz) \cdot xz +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz) \cdot 2y +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz) \cdot z,\ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial (\varphi \circ g)}{\partial z}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial z}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz) \cdot xy +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz) \cdot 2z, \ (\forall)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \square$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz) \cdot y$$

Observație! În exercițiul anterior putem nota $g=(u,v,w)$, unde $u,v,w:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u(x,y,z)=xyz$, $v(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $w(x,y,z)=x^2+yz$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "g=(u,v,w)"] \arrow[rr, bend right, "f=\varphi\circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \\
(x,y,z) \arrow[u] & (u,v,w) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz)\cdot yz +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz)\cdot 2x +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x^2+yz)\cdot 2x,\ (\forall)(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dots$$

Scriere mai scurtă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \dots$$

Derivate parțiale de ordin superior

Diferențiale de ordin superior

Def. Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in \mathring{A}$ și $f: A \to \mathbb{R}^q$. Se presupune că $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset \mathring{A}$ a.î. **f admite derivata parțială** $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pe V (i.e. $(\exists)\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(c), (\forall)\ c \in V$). Dacă

$\frac{\partial f}{\partial x_j} : V \to \mathbb{R}^q$ admite derivată parțială în raport cu variabila x_i în punctul a, această derivată parțială s.n. **derivata parțială de ordinul doi a lui f în raport cu variabilele x_i și x_j, în punctul a** și se notează:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$, dacă $i \neq j$;
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, dacă $i = j$.

Similar se definesc derivatele parțiale de ordinul $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.

Notații corecte: $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a)$ etc.

Notații greșite: $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2}(a)$ etc.

Lema lui Schwarz:

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in \mathring{A}$, $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$ și $f : A \to \mathbb{R}^q$. Presupunem că $(\exists)\, V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset \mathring{A}$ a.î. f admite derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ pe V.

Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : V \to \mathbb{R}^q$ este continuă în a, atunci f admite derivata parțială $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) =$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

Fie $n, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathring{A}$, $f : A \to \mathbb{R}^q$.

Def.: Presupunem că $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset \mathring{A}$ a.î. f admite toate derivatele parțiale de ordinul doi pe V și acestea sunt continue în a.
Definim diferențiala de ordinul doi a lui f în a prin $d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$,

$$d^2 f(a)(\underbrace{u}_{=(u_1,\dots,u_n)}, \underbrace{v}_{=(v_1,\dots,v_n)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i\, v_j.$$

Def.: Presupunem că $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset \mathring{A}$ a.î. f admite toate derivatele parțiale de ordinul trei pe V și acestea sunt continue în a.
Definim diferențiala de ordinul trei a lui f în a prin $d^3 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$,

$$d^3 f(a)(\underbrace{u}_{=(u_1,\dots,u_n)}, \underbrace{v}_{=(v_1,\dots,v_n)}, \underbrace{w}_{=(w_1,\dots,w_n)}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) \cdot u_i\, v_j\, w_k.$$

Similar se definesc diferențialele de ordin k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$.

Notații: În contextul de mai sus, notăm:

- $d^2 f(a)(u)^2 = d^2 f(a)(u,u)$, $(\forall)\, u \in \mathbb{R}^p$
- $d^2 f(a)(u)^3 = d^3 f(a)(u,u,u)$, $(\forall)\, u \in \mathbb{R}^p$

etc.

Observație! În contextul de mai sus, dacă $p=2$ și $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$, atunci:

- $$d^2 f(a)(u)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\, u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\cdot u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\, u_2^2$$

- $$d^3 f(a)(u)^3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)\, u_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a)\cdot u_1^2 u_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a)\cdot u_1 u_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)\, u_2^3$$

$\vdots$

- $$d^k f(a)(u)^k = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a)\, u_1^k + \ldots + C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(a)\cdot u_1^{k-i} u_2^i + \ldots + \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a)\, u_2^k.$$

etc.

Formula lui Taylor cu rest Lagrange

Fie $r, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq \Delta \subset \mathbb{R}^r$ o mulțime deschisă și convexă (i.e. $(\forall)\ x, y \in \Delta$, $(\forall)\ t \in [0,1]$, avem $(1-t)x + ty \in \Delta$), $m \in \mathbb{N}$, $a \in \Delta$ și $f : \Delta \to \mathbb{R}^q$ o funcție care admite toate derivatele parțiale de ordinul $m+1$ pe Δ și acestea sunt continue pe Δ.

Atunci $(\forall)\ x \in \Delta$, $x \neq a$, $(\exists)\ c \in (a, x) \overset{def.}{=\!=}$
$= \{(1-t)a + tx \mid t \in (0,1)\}$ a.î.

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2 f(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{m!}d^m f(a)(x-a)^m}_{T_m(x)} + \underbrace{\frac{1}{(m+1)!}d^{m+1} f(c)(x-a)^{m+1}}_{R_m(x)}$$

$T_m(x)$ (polinomul Taylor de ordinul m) $\qquad R_m(x)$ (restul de ordinul m)

Exercițiu: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$.

a) Determinați derivatele parțiale de ordinul doi ale lui f.

Sol.:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 6y \quad (\forall)\ x,y \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Lema lui Schwarz

b) Determinați $df(1,2)$ și $d^2 f(1,2)$.

Sol.:

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ continue pe } \mathbb{R}^3 \\ \text{(operații cu funcții elementare)} \\ \mathbb{R}^2 \text{ deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$

$df(1,2): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df(1,2)(u,v) =$

$$= {}^t\left[\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)}_{\substack{2\cdot 1+2 \\ \| \\ 4}} \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)}_{\substack{\| \\ 1+3\cdot 2^2 \\ \| \\ 13}}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] = 4u + 13v, \text{ i.e.}$$

$df(1,2) = 4dx + 13dy$

Observăm că toate derivatele parțiale de ordinul doi sunt continue pe mulțimea deschisă $\mathbb{R}^2$.

$d^2 f(1,2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$d^2 f(1,2)(\underset{(t_1,t_2)}{t},\underset{(u_1,u_2)}{u}) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)}_{2} \cdot t_1 u_1 +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}_{1}(1,2)\, t_1 u_2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{1}(1,2)\, t_2 u_1 +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}_{6\cdot 2 = 12}(1,2)\, t_2 u_2 =$$

$$= 2 t_1 u_1 + t_1 u_2 + t_2 u_1 + 12 t_2 u_2$$

c) Determinați polinomul Taylor al lui f în $(1,2)$ (i.e. $T_2(x,y)$).

Sol.: $$T_2(x,y) = f(1,2) + \frac{1}{1!} df(1,2)((x,y)-(1,2)) +$$

$$+ \frac{1}{2!} d^2 f(1,2)((x,y)-(1,2))^2 =$$

$$= (1 + 1\cdot 2 + 2^3) + df(1,2)(x-1, y-2) +$$

$$\frac{1}{2} d^2 f(1,2)(x-1, y-2)^2 =$$

$$= 11 + 4(x-1) + 13(y-2) + \frac{1}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)(x-1)(y-2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2\right)$$

$$= 11 + 4(x-1) + 13(y-2) + \frac{1}{2}\cdot\left(2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) + 12(y-2)^2\right) \quad \square$$

Puncte de extrem local

Def.: Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}^n$, $f: A\to\mathbb{R}$ și $a\in A$. Spunem că a este punct de:

1) minim local al lui f dacă $(\exists)\ V\in\mathcal{V}_a$ a.î. $f(a)\leq f(x), (\forall)\ x\in V\cap A$

2) maxim local al lui f dacă $(\exists)\ V\in\mathcal{V}_a$ a.î. $f(a)\geq f(x), (\forall)\ x\in V\cap A$

3) extrem local al lui f dacă a este punct de minim local al lui f sau a este punct de maxim local al lui f.

Def.: Fie $n, q\in\mathbb{N}^*$, $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}^n$, $f: A\to\mathbb{R}^q$ și $a\in\mathring{A}$. Spunem că a este punct critic al lui f dacă f este diferențiabilă în a și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\underbrace{0,\dots,0}_{q \text{ componente}})\in\mathbb{R}^q, (\forall)\ i=\overline{1,n}.$$

Teorema lui Fermat:

Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}^n$, $a\in A$ și $f: A\to\mathbb{R}$ a.î.:

1) $a\in\mathring{A}$

2) a este punct de extrem local al lui f

3) f este diferențiabilă în a

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, $(\forall)\ i = \overline{1,p}$.

Def.: Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, D deschisă, $k \in \mathbb{N}$ și $f : D \to \mathbb{R}^q$. Spunem că f este de clasă C^k (pe D) dacă f admite toate derivatele parțiale de ordinul k pe D și acestea sunt continue pe D.