Integrala multiplă

Observație! Toate intervalele din $\mathbb{R}$ de forma $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) și $[a,b]$ sunt considerate cu $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Vom lucra cu spațiul metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|\text{not.}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad d$

Def.:

1) O mulțime de forma $[a_1,b_1) \times \ldots \times [a_n,b_n) \subset \mathbb{R}^n$ s.n. **dreptunghi**. Notăm $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{\Delta \subset \mathbb{R}^n \mid \Delta$ dreptunghi$\}$.

2) Fie $\Delta = [a_1,b_1) \times \ldots \times [a_n,b_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Numărul real $(b_1-a_1)\ldots(b_n-a_n)$ s.n. **volumul lui Δ** și se notează cu $\mathrm{vol}(\Delta)$.

3) O mulțime de forma $E = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $(\forall)\ i=\overline{1,m}$ s.n. **mulțime elementară**. Notăm $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \{E \subset \mathbb{R}^n \mid E$ mulțime elementară$\}$.

4) Fie $E = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $(\forall)\ i=\overline{1,m}$ a.î. $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, $(\forall)\ i,j \in \{1,\ldots,m\}$, $i \neq j$. Definim $\mathrm{vol}(E) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}(\Delta_i)$.

Propoziție: Orice mulțime elementară poate fi scrisă ca reuniune finită de dreptunghiuri disjuncte două câte două.

Propoziție: Fie $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $E = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, $(\forall)\ i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$.

Presupunem că $(\exists)\ k \in \mathbb{N}^*$, $(\exists)\ (\Delta_j')_{j=\overline{1,k}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\Delta_j' \cap \Delta_l' = \emptyset$, $(\forall)\ j, l \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq l$ a.î. $E = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_j'$. Atunci $\sum_{i=1}^{m} vol(\Delta_i) = \sum_{j=1}^{k} vol(\Delta_j')$.

Observație! Din cele de mai sus deducem că putem defini volumul oricărei mulțimi elementare E (notat $vol(E)$).

Def.: Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită.

1) $\mu^*(A) = \inf \{ vol(F) \mid F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), A \subset F \}$

(măsura Jordan exterioară a lui A)

2) $\mu_*(A) = \sup \{ vol(E) \mid E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), E \subset A \}$

(măsura Jordan interioară a lui A)

Propoziție: Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită și $B \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Atunci:

1) $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$

2) Dacă, în plus, $A \subset B$, avem:

i) $\mu_*(A) \leq \mu_*(B)$

ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

Def.: O mulțime $A \subset \mathbb{R}^p$ s.n. **măsurabilă Jordan** dacă A este mărginită și $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

Notație: $\mathcal{J}(\mathbb{R}^p) = \{A \subset \mathbb{R}^p \mid A \text{ măsurabilă Jordan}\}$

Def.: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$. Valoarea comună $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ s.n. **măsura Jordan a lui A** și se notează cu $\mu(A)$.

Propoziție: Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ mărginită și convexă. Atunci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$.

Propoziție: Fie $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ a.î. $A \subset B$. Atunci $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Propoziție: Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ mărginită. Atunci:

1) $\mu^*(A) \leq \mu^*(\operatorname{Fr}(A)) + \mu_*(\mathring{A})$
2) $\mu^*(\bar{A}) = \mu^*(A)$
3) $\mu_*(\mathring{A}) = \mu_*(A)$

Propoziție: Fie $A \in \mathbb{R}^p$, A mărginită. Sunt echiv.:

1) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$
2) $\bar{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$, $\mathring{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ și $\mu(\bar{A}) = \mu(\mathring{A})$
3) $\operatorname{Fr}(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ și $\mu(\operatorname{Fr}(A)) = 0$

Propoziție: Fie $q \in \mathbb{N}^*$, $A \subset \mathbb{R}^p$ mărginită, $B \in \mathbb{R}^q$ mărginită. Atunci $A \times B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ este mărginită și:

1) $\mu^*(A \times B) \leq \mu^*(A) \cdot \mu^*(B)$

2) $\mu_*(A\times B)=\mu_*(A)\cdot\mu_*(B)$

Propoziție: Fie $q\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$, $B\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^q)$. Atunci $A\times B\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^{p+q})$ și
$\mu(A\times B)=\mu(A)\cdot\mu(B)$.

Exemple de mulțimi măsurabile / nemăsurabile Jordan:

1) $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ nu este măsurabilă Jordan ($A\notin\mathcal{J}(\mathbb{R})$)

Sol.: $A\subset[0,1]\Rightarrow A$ mărginită

$$\mu^*(A)=\mu^*(\underset{=[0,1]}{\bar{A}})=\mu^*([0,1])=\mu^*(\overline{[0,1)})=$$

$$=\mu^*(\underbrace{[0,1)}_{\in\mathcal{D}(\mathbb{R})})=\mu([0,1))=\text{vol}([0,1))=1-0=1$$

$$\mu_*(A)=\mu_*(\underset{=\emptyset}{\mathring{A}})=\mu(\emptyset)=\text{vol}(\emptyset)=0$$

$\mu_*(A)<\mu^*(A)\Rightarrow A\notin\mathcal{J}(\mathbb{R})$ $\square$

2) $A=\{(x,0)\mid x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\}=([0,1]\cap\mathbb{Q})\times\{0\}$ este măsurabilă Jordan ($A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$)

Sol.:

$A\subset[0,1]\times[0,1]\Rightarrow A$ mărginită

$$\mu^*(A)=\mu^*(([0,1]\cap\mathbb{Q})\times\{0\})\le\mu^*([0,1]\cap\mathbb{Q})\cdot\mu^*(\{0\})$$

$\leq \mu^*([0,1])\cdot\mu^*(\{0\}) = 1\cdot\mu^*(\{0\}) = \mu^*(\{0\})$.

$[0,1]\cap\mathbb{Q}\subset[0,1]$

$\mu^*([0,1]) = 1$ (vezi mai sus)

Fie $\varepsilon>0$. Avem $\{0\}\subset[0,\varepsilon)$. Deci $\mu^*(\{0\}) \leq$
$\leq \mu^*([0,\varepsilon)) = \mu([0,\varepsilon)) = \varepsilon - 0 = \varepsilon$

Făcând $\varepsilon \longrightarrow 0$ avem $\mu^*(\{0\}) \leq 0$

Deci $\mu^*(\{0\}) = 0$

Așadar, $\mu^*(A) \leq \mu^*(\{0\}) = 0$, deci $\mu^*(A) = 0$

Cum $0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A)$, avem că $\mu_*(A) = \mu^*(A)$
$= 0 \Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ $\square$

Propoziție:

1) Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile R a.î. $f(x)\leq g(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b]$ și $\Gamma_{f,g} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b], f(x)\leq y\leq g(x)\}$, atunci $\Gamma_{f,g} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(\Gamma_{f,g}) =$
$$= \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx.$$

2) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă R și $G_f = \{(x,f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b]\}$, atunci $G_f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(G_f) = 0$.

Exercițiu:

Fie $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\leq 1,\ |y|\leq x^2\}$. Arătați că $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și determinați $\mu(A)$.

Sol.:

$|x|\leq 1 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$

$|y| \leq x^2 \iff -x^2 \leq y \leq x^2$

Fie $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2$

f, g continue pe $[-1,1] \Rightarrow f, g$ integrabile R pe $[-1,1]$

Avem $f(x) \leq g(x)$, $(\forall)\ x \in [-1,1]$ și $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ \underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq y \leq \underbrace{x^2}_{g(x)}\} = \Gamma_{f,g}$

Atunci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(A) = \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\,dx =$

$= \int_{-1}^{1} (x^2 + x^2)\,dx = 2\, \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$ $\square$

Def.: Fie $X \neq \emptyset$, $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ și $\lambda : \mathcal{A} \to [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Tripletul $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ s.n. **spațiu cu măsură aditivă** dacă:

1) $(\forall)\ A, B \in \mathcal{A}$, avem $A \cup B \in \mathcal{A}$ și $A \setminus B \in \mathcal{A}$ (nu rezultă că $A \cap B \in \mathcal{A}$).

2) $(\forall)\ A, B \in \mathcal{A}$ a.î. $A \cap B = \emptyset$, avem $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$

Observație! $(\mathbb{R}^p, \mathcal{E}(\mathbb{R}^p), \text{vol})$ și $(\mathbb{R}^p, \mathcal{J}(\mathbb{R}^p), \mu)$ sunt spații cu măsură aditivă și $\mathcal{E}(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$.

Def.: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$. O familie finită $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, s.n. **descompunere Jordan a lui A** dacă:

1) $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$

2) $\mu(A_i \cap A_j) = 0$, $(\forall)\ i,j \in \{1,\dots,m\}$, $(\forall)\ i \neq j$

Def.: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ o descompunere Jordan a lui A.

1) $\|\mathcal{A}\| = \max\{\operatorname{diam}(A_i) \mid i = \overline{1,m}\}$, unde $\operatorname{diam}(A_i) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A_i\}$, $(\forall)\ i = \overline{1,m}$ (diametrul lui A_i)

2) O familie $\alpha = (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}} \subset A$ s.n. sistem de puncte intermediare asoc. lui $\mathcal{A}$ dacă $\alpha_i \in A_i$, $(\forall)\ i = \overline{1,m}$

Observație!

1) $(\forall)\ A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \mathcal{A}_\varepsilon$ descompunere Jordan a lui A a.î. $\|\mathcal{A}_\varepsilon\| < \varepsilon$.

2) Dacă $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ este o descompunere Jordan a lui A, atunci $\mu(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$

Exemplu: Fie $A = [a,b] \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ și $\Delta: a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b$ o diviziune a lui A. Familia $\mathcal{A} = \{[x_{i-1}, x_i] \mid i = \overline{1,m}\}$ este o descompunere Jordan a lui A.

Def.: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ o descompunere Jordan a lui A, $\alpha = (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}$ un s.p.i. asoc. lui $\mathcal{A}$ și $f: A \to \mathbb{R}$. Suma $\sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i)\mu(A_i)$ s.n.

Suma Riemann asociată lui f, $\mathcal{F}$ și α și se notează $\sigma_{\mathcal{F}}(f,\alpha)$.

Def.: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ și $f: A \to \mathbb{R}$. Spunem că f este integrabilă R (pe A) dacă $(\exists)\ I \in \mathbb{R}$ a.î. $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $(\forall)\ \mathcal{F} = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ descompunere Jordan a lui A cu $\|\mathcal{F}\| < \delta_\varepsilon$ și $(\forall)\ \alpha = (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}$ s.p.i. asoc. lui $\mathcal{F}$, avem $|I - \sigma_{\mathcal{F}}(f,\alpha)| < \varepsilon$.

Observație! $I \in \mathbb{R}$ din definiția precedentă, dacă există, este unic.

Notație: În contextul de mai sus,

$$I = \int_A f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 \ldots dx_p = \int_A f(x)\, dx$$

Notații: În contextul de mai sus,

1) Dacă $p=2$, notăm $I = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy$

2) Dacă $p=3$, notăm

$$I = \iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Observație! În contextul de mai sus,

$$I = \int_A f(x)\, dx = \lim_{\|\mathcal{F}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{F}}(f,\alpha)$$

Exercițiu: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\mu(A)=0$ și $f: A \to \mathbb{R}$. Arătați că f este integrabilă R (pe A) și $\int_A f(x)\,dx = 0$.

Sol.:

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ o descompunere Jordan a lui A și $\alpha = (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}$ un s.p.i. asoc. lui $\mathcal{A}$.

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f,\alpha) = \sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i)\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cdot 0 = 0$$

$(\forall)\, i=\overline{1,m},\ A_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i = A \Rightarrow \mu(A_i) \le \mu(A) = 0,\ (\forall)\, i=\overline{1,m}$

Deci $\lim_{\|\mathcal{A}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f,\alpha) = 0$.

Prin urmare, f este integrabilă R (pe A) și $\int_A f(x)\,dx = 0$ $\square$

Exercițiu: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathbb{R}$ și $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \beta$. Arătați că f este integrabilă R (pe A) și $\int_A f(x)\,dx = \beta\mu(A)$.

Sol.:

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ o descompunere Jordan a lui A și $\alpha = (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}$ un s.p.i. asoc. lui A.

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f,\alpha) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{f(\alpha_i)}_{=\beta}\mu(A_i) = \beta \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) = \beta\mu(A)$$

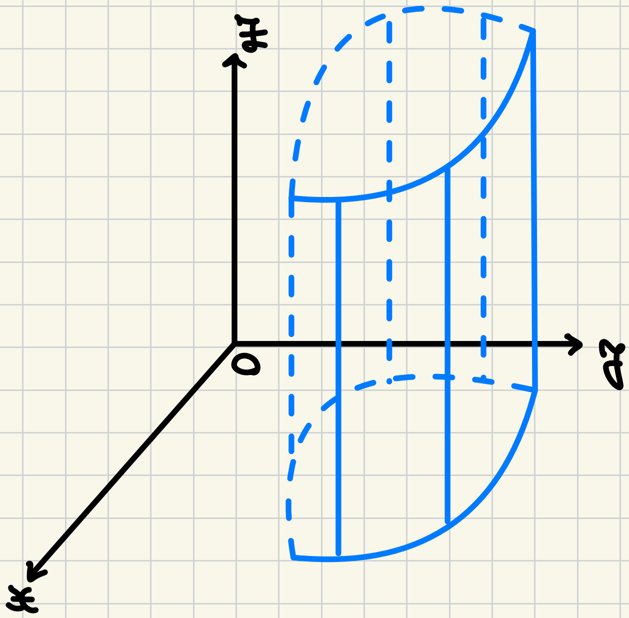
Deci $\lim\limits_{\|\mathcal{T}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{T}}(f, \alpha) = \beta \mu(A)$

Așadar, f este integrabilă R (pe A) și $\int_A f(x)\,dx = \beta \mu(A)$ $\square$

Interpretarea geometrică a integralei multiple

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integrabilă R (pe A)

1) Dacă $p = 2$ și $f(x,y) \geq 0$, $(\forall)\ (x,y) \in A$, atunci $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ reprezintă volumul corpului cuprins între graficul funcției și planul xOy



2) Dacă $p = 2$ și $f(x,y) = 1$, $(\forall)\ (x,y) \in A$, atunci $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A 1\,dx\,dy$ reprezintă aria lui A.

3) Dacă $p = 3$ și $f(x,y,z) = 1$, $(\forall)\ (x,y,z) \in A$, atunci $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A 1\,dx\,dy\,dz$ repre-

Fie μ volumul Iui A.

Propoziție: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : A \to \mathbb{R}$.

1) Dacă f este continuă și mărginită (i.e. $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|f(x)| \le M$, $(\forall)\ x \in A$), atunci f este integrabilă R (pe A).

2) Dacă A este compactă și f continuă, atunci f este integrabilă R (pe A).

Propoziție: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ și $g : A \to \mathbb{R}$. Dacă f și g sunt integrabile R (pe A), atunci $f+g$ și γf sunt integrabile R (pe A) și $\int_A (f+g)(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx$, $\int_A (\gamma f)(x)\,dx = \gamma \int_A f(x)\,dx$, unde $f+g : A \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ și $\gamma f : A \to \mathbb{R}$, $(\gamma f)(x) = \gamma f(x)$.

Dacă, în plus, $f(x) \le g(x)$, $(\forall)\ x \in A$, atunci $\int_A f(x)\,dx \le \int_A g(x)\,dx$.

Propoziție: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ integrabilă R (pe $A \cup B$). Atunci f este integrabilă R pe A (i.e. $f|_A$ este integrabilă R) și f este integrabilă R pe B (i.e. $f|_B$ este integrabilă R).

Dacă, în plus, $\mu(A \cap B) = 0$, atunci $\int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$.

Propoziție: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \cup B$ mărginită. Dacă f este integrabilă R pe A și f este integrabilă R pe B, atunci f este integrabilă R pe $A \cup B$.
Dacă, în plus, $\mu(A \cap B) = 0$, atunci $\int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$.

Teorema lui Fubini

Fie $B \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan și compactă și $\alpha, \beta: B \to \mathbb{R}$ continue a.î. $\alpha(x) \leq \beta(x)$, $(\forall)\, x \in B$.
Fie $A = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) \in B,$
$\alpha(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) \leq x_j \leq \beta(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) \}$,
unde $(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_{n+1})$.
Fie $f: A \to \mathbb{R}$ continuă.
Atunci $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ este măsurabilă Jordan și compactă, f este integrabilă R pe A și $\int_A f(x_1, \dots, x_{n+1})\,dx_1 \dots dx_{n+1} =$

$$= \int_B \left(\int_{\alpha(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1})}^{\beta(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1})} f(x_1, \dots, x_{n+1})\,dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1}\,dx_{j+1} \dots dx_{n+1}$$

Observație! Atunci când considerăm mulțimi $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și definim funcții $f: A \to \mathbb{R}$, se presupune că aceste mulțimi sunt nevide.

Cazuri particulare ale Teoremei lui Fubini

1. Integrala dublă

i) Dacă $A=[a,b]\times[c,d]$ și $f: A\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=$

$$=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

ii) Dacă $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ \alpha(x)\le y\le\beta(x)\}$, unde $\alpha,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue și $f: A\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=$

$$=\int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

iii) Dacă $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[c,d],\ \varphi(y)\le x\le\psi(y)\}$, unde $\varphi,\psi:[c,d]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue și $f: A\to$ $\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

2. <u>Integrala triplă</u>

i) Dacă $A = [a,b] \times [c,d] \times [k,t]$ și $f: A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_k^t f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_k^t \left(\int_c^d f(x,y,z)\,dy \right) dz \right) dx = \ldots$$

ii) Dacă $B \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B,\ \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$, unde $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue și $f: A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

$$= \iint_B \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

etc.

<u>Exercițiu</u>. Determinați:

a) $\iint_A (2x+y)\,dx\,dy$, unde $A = [0,1]\times[0,2]$.

<u>Soluție</u>. $A = [0,1]\times[0,2] \Rightarrow A$ compactă și $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x+y$.

f continuă.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A (2x+y)\,dx\,dy =$$

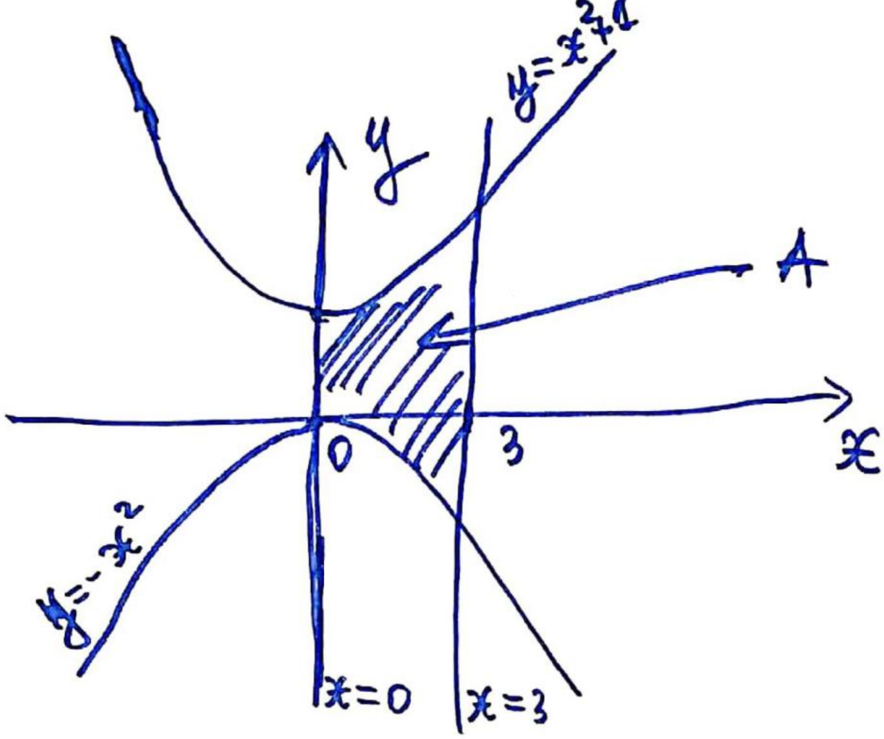
$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 (2x+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[2x(2-0) + \frac{1}{2}(4-0) \right] dx = \int_0^1 (4x+2)\,dx =$$

$$= \cancel{4}^{\,2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_{x=0}^{x=1} + 2x\Big|_{x=0}^{x=1} = 2+2 = 4. \quad \square$$

b) $\iint_A (3x+y)\,dx\,dy$, unde A este mulțimea plană mărginită de $y=x^2+1$, $y=-x^2$, $x=0$ și $x=3$.

<u>Soluție.</u>



$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,3],\ -x^2\le y\le x^2+1\}$.

Fie $\alpha,\beta:[0,3]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=-x^2$, $\beta(x)=x^2+1$.

α,β continue

A compactă și $A\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=3x+y$.

f continuă

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\iint_A (3x+y)\,dx\,dy=$

$$= \int_0^3 \left(\int_{-x^2}^{x^2+1} (3x+y)\,dy \right) dx = \int_0^3 \left(3xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=-x^2}^{y=x^2+1} dx =$$

$$= \int_0^3 \left\{ 3x\left(x^2+1+x^2\right) + \frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)^2 - \left(-x^2\right)^2\right] \right\} dx =$$

$$= \int_0^3 \left[6x^3 + 3x + \frac{1}{2}\left(\cancel{x^4} + 2x^2 + 1 - \cancel{x^4}\right) \right] dx =$$

$$= \int_0^3 \left(6x^3 + x^2 + 3x + \frac{1}{2}\right) dx = \overset{3}{\cancel{6}}\,\frac{x^4}{\underset{2}{\cancel{4}}}\Bigg|_{x=0}^{x=3} + \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=3} +$$

$$+ 3\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=3} + \frac{1}{2}x\Bigg|_{x=0}^{x=3} = \frac{3}{2}(81-0) + \frac{1}{3}(27-0) +$$

$$+ \frac{3}{2}(9-0) + \frac{1}{2}(3-0) = \frac{243}{2} + 9 + \frac{27}{2} + \frac{3}{2} = \frac{273}{2} + 9 =$$

$$= \frac{273+18}{2} = \frac{291}{2}. \ \square$$

c) $\iiint_A x\,dx\,dy\,dz$, unde $A = [0,1]\times[1,2]\times[2,3]$.

<u>Soluție</u>. $A = [0,1]\times[1,2]\times[2,3] \Rightarrow A$ compactă și $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x$.

f continuă.

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_2^3 x\,dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 xz \Big|_{z=2}^{z=3} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 x(3-2)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 x\,dy \right) dz =$$

$$= \int_0^1 xy \Big|_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^1 x(2-1)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{2}. \ \square$$