Tutoriat 2

19.10.2025 17:21

Obs: $\langle \emptyset \rangle = O_V$ (subspațiul generat de mulțimea vidă este nul).

De data trecută: Fie $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ V K-sp vect

U s.n subspațiu vectorial al lui V dacă

$\forall u, v \in U \Rightarrow u+v \in U$
$\forall k \in K \Rightarrow k \cdot v \in U$ $\Big\} \Leftrightarrow$ $\forall u, v \in U$, $\forall k_1, k_2 \in K$ avem $k_1 u + k_2 v \in U$

Prop. Fie V un K sp vectorial și $U \subseteq V$ subsp $U \neq \emptyset$.

Dacă $O_V \notin U \Rightarrow$ U nu e subspațiu vectorial (condiție necesară, dar nu suficientă)

Sisteme de generatori, mulțimi liniar independente și baze.

Def: O submulțime S a lui V s.n *sistem de generatori* dacă $\langle S \rangle = V$

SAU:

O mulțime $S \subset V$ s.n sistem de generatori dacă pt. orice $v \in V$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \dots a_n \in K$ și $x_1, x_2 \dots x_n \in S$ a.î. $v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$.

Definiție: Sistem liniar independent

O mulțime $\emptyset = S \subset V$ s.n *liniar independentă* dacă pentru $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_1 \dots a_n \in K$, $x_1 \dots x_n \in S$ cu proprietatea că $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$, avem că: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Definiție: Bază

O mulțime $S \subset V$ s.n *bază* dacă este și sistem de generatori și sistem liniar independent.

Obs:

Fie $S \subset V$ bază. Atunci $\forall v \in V$, $\exists!$ $a_1 \dots a_n \in K$, $x_1, \dots x_n \in S$ astfel încât $v = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

Def: Dimensiunea unui spațiu.

Dimensiunea unui spațiu vectorial este cardinalul unei baze.

Proprietăți:

Fie V un K spațiu vectorial de dimensiune n.

- S este S.L.I $\Rightarrow |S| \leq n$
- S este s.g $\Rightarrow |S| \geq n$
- S este bază $\Rightarrow |S| = n$
- S este S.L.I și $|S| = n \Rightarrow S$ bază
- S este sg și $|S| = n \Rightarrow S$ bază.