Curs 3

Topologie

TOPOLOGIE

Def Fie $X \neq \emptyset$ (oarecare, mulțime)

O mulțime τ (tau) $\subset \mathcal{P}(X)$ (τ conține mulțimi : $x \in X$, $\{x\} \in \tau$) se numește **topologie pe X** dacă:

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $\forall D_1, D_2 \in \tau$ avem $D_1 \cap D_2 \in \tau$

3) $\forall (D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ avem $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}$

$\{D_i \mid i \in I\}$

fam. de mulț.

Def Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe X.

Perechea $(X, \mathcal{T})$ s.n. spațiu topologic

Ex:

1) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ → topol. FINĂ

Perechea $(X, \mathcal{T})$ e spațiu topologic

2) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ e spațiu topologic → topol. GROSIERĂ

3) Fie $X = \mathbb{R}$ și $\mathcal{T} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

Perechea $(X, \mathcal{T})$ e spaț. topologic.

Justif

1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ (evident din ipoteză)

2) Fie $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$. Arăt că $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$

- Dacă $D_1 = \emptyset$ sau $D_2 = \emptyset$, atunci $D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \mathcal{T}$
- Dacă $D_1 = \mathbb{R}$ sau $D_2 = \mathbb{R}$ atunci $D_1 \cap D_2 = \begin{cases} D_2 \in \mathcal{T} \\ \text{sau} \\ D_1 \in \mathcal{T} \end{cases}$
- Fie $D_1 = (-\infty, a_1)$, $D_2 = (-\infty, a_2)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$D_1 \cap D_2 = (-\infty, \min(a_1, a_2)) \in \mathcal{T}$

3) Fie $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$. Ar. că $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}$

- Dacă $\exists\, i_0 \in I$ a.î. $D_{i_0} = \mathbb{R}$ atunci

$\bigcup_{i\in I} D_i = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$

- Dacă $\forall\, i \in I$ $D_i = \emptyset$, atunci $\bigcup_{i\in I} D_i = \emptyset \in \mathcal{T}$
- Fără a restrânge generalitatea pp că $D_i = (-\infty, a_i)$, $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall\, i \in I$

$\bigcup_{i\in I} D_i = (-\infty, \sup_{i\in I} a_i)$

$\sup_{i\in I} a_i = \sup \{a_i \mid i \in I\} \in \mathcal{T}$

$\sup (0,2) = 2$ $\qquad$ sup = cel mai mic majorant

$\sup (0,\infty) = \infty$

Deci, $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic

Def: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic

1) O mult. $D \subset X$ s.n **mulțime deschisă** dacă $D \in \mathcal{T}$

2) O mult. $F \subset X$ s.n **mulțime închisă** dacă $X \setminus F = C_X F \in \mathcal{T}$

3) Fie $x \in X$. O mult. $V \subset X$ se num. **vecinătate a lui x** dacă $\exists$ $D \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D \subset V$

Notație: În contextul definiției precedente, pentru orice $x \in X$, notăm

$$\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid V \text{ vecinăt. a lui } x\}$$

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic

Def Fie $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita x (sau că șirul în rap. cu topolog $\mathcal{T}$

Mai e doar al mulțimii: supremum = „maxim pe mult. infinite" (nu e neapărat să fie atins)

$(x_n)_n$ converge către x (în raport cu topologia τ) și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\tau}{=} x$ (sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} x$)

dacă $\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_V$, avem $x_n \in V$

Obs Sintagma „în raport cu topologia τ" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul topologic (X, τ)"

X e mereu vecinătate pt $x \in X$

Obs Fie (X, τ) un spațiu topologic, $\tau = \{\emptyset, X\}$

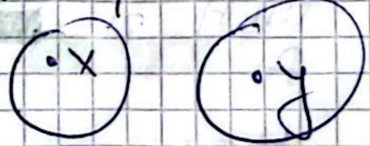
$\forall x \in X$ avem $\mathcal{V}_x = \{X\}$

Fie $(x_n)_n \subset X$. Considerăm $x, y \in X$, $x \neq y$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$

Deci, într-un spațiu topologic, limita unui șir nu este neapărat unică

Def: Fie (X, τ) un sp. topologic. Spunem că (X, τ) e spațiu topologic separat (sau HAUSDORFF) dacă $\forall x, y \in X$ $\exists V \in \mathcal{V}_x$, $\exists W \in \mathcal{V}_y$ a.î. $V \cap W = \emptyset$



Prop Într-un spațiu topol. separat limita oricărui șir este unică

Def: Fie (X, τ) un spaț. topologic. O mult $K \subset X$ s.n. mult compactă dacă $\forall (D_i)_{i\in I} \subset \tau$ a.î. $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} D_i$, $\exists J \subset I$, J finită cu propriet că avem incluziunea $K \subset \bigcup_{j\in J} D_j$ („Din orice acoperire deschisă a lui K se poate extrage o acoperire deschisă și finită a lui K")

Analiza topologică a unei mulțimi

Fie (X, τ) un sp. topologic, $A \subset X$ și $x_0 \in X$

Def Spunem că x_0 este:

1) pct interior al lui A dacă $A \in \mathcal{V}_{x_0}$ ($\exists\, D \in \tau$ a.î. $x_0 \in D \subset A$)

2) pct aderent (sau de aderență) al lui A dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}_{x_0}$ avem $V \cap A \neq \emptyset$

3) pct de acumulare al lui A dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}_{x_0}$ avem $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

(Dacă e pct de acum, e și pct aderent)

4) punct frontieră al lui A dacă este punct aderent al lui A și nu este punct interior al lui A

5) pct izolat, dacă este pct aderent al lui A și nu este pct de acumulare al lui A

Notații

1) $\mathring{A} = \{x \in X \mid x$ pct interior al lui $A\}$
(interiorul lui A sau mult. pct interioare ale lui A)

2) $\bar{A} = \{x \in X \mid x$ pct aderent al lui $A\}$
(închiderea (aderența) lui A sau mult. pct. aderente ale lui A)

Orice mulț deschisă + nevidă e vecinătate pt toate pct. ei

3) $A' = \{x \in X \mid x$ pct de acumulare al lui $A\}$ (mulțimea derivată a lui A sau mult. punctelor de acumulare ale lui A)

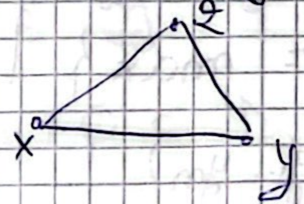
4) $Fr(A) = \partial A = \{x \in X \mid x$ pct. frontieră al lui $A\}$ (frontiera lui A sau mult. pct frontieră ale lui A)

5) $Izo(A) = {}'A = \{x \in X \mid x$ pct izolat al lui $A\}$ (mult pct. izolate ale lui A)

Def: Fie $X \neq \emptyset$ METRICĂ

O funcție $d: X \times X \to \mathbb{R}$ se numește METRICĂ (sau distanță) pe X dacă:

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$
2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y \in X$
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in X$ (ineg. triunghiului)



Def: Fie $X \neq \emptyset$ și $d: X \times X \to \mathbb{R}$ o metrică pe X. Perechea (X,d) s.n. spațiu metric

Ex

1) Fie $X \neq 0$ și $d: X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0; & x = y \\ 1; & x \neq y \end{cases}$$

Perechea (X,d) e sp. metric

2) Fie $X = \mathbb{R}$, $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$

metrica uzuală pe $\mathbb{R}$ → $d_1(x,y) = |x-y|$

Perechea (X, d_1) este sp. metric?

3) Fie $X = \mathbb{R}^n$ și $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$

$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$

$x = (x_1, x_2 \dots x_n)$, $y = (y_1, y_2 \dots y_n)$

?? !

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

CMS

4) Fie $X = \mathbb{R}^n$ $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ ← se poate gen pt $\forall p$, $p = 2$ aici

dist. uz. pe $\mathbb{R}^n$ → $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ (dist. euclidiană pe $\mathbb{R}^n$)

$x = (x_1 \dots x_n)$, $y = (y_1 \dots y_n)$

5) Fie $X = \mathbb{R}^n$ și $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$

$d_\infty(x,y) = \max\{ |x_i - y_i| \; i \in \overline{1,n} \}$

$x = (x_1 \dots x_n)$, $y = (y_1 \dots y_n)$

Def. Fie (X, d) un spațiu metric

$x \in X$ și $r > 0$

1) $B(x, r) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$

(bila deschisă de centru x și rază r)

2) $B[x, r] = \{ y \in X \mid d(x,y) \leq r \}$

$\overline{B}(x, r)$ (bila închisă de centru x și rază r)

<u>Teoremă</u> Fie (X, d) un sp. metric și

$$\tau_d = \{ A \subset X \mid \forall x \in A, \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subset A \} \cup \{\emptyset\}$$

Perechea (X, τ_d) e un sp. topologic

<u>Dem</u> 1) $\emptyset \in \tau_d$ (evident)

$\underline{X \in \tau_d}$ sp topologic / metric → def

Fie $x \in X$

(Orice bilă trăiește în X)

Fie $r > 0$. Avem $B(x, r) \subset X$

Deci $X \in \tau_d$

2) Fie $D_1, D_2 \in \tau_d$

$\underline{D_1 \cap D_2 \in \tau_d}$

- Dacă $D_1 = \emptyset$ sau $D_2 = \emptyset$ atunci $D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \tau_d$
- Pp că $D_1 \neq \emptyset$ și $D_2 \neq \emptyset$

Dacă $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ atunci $D_1 \cap D_2 \in \tau_d$

Pp că $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$

Fie $x \in D_1 \cap D_2$

Avem $x \in D_1$ și $x \in D_2$

$D_1 \in \tau_d \Rightarrow \exists r_1 > 0$ a.î. $B(x, r_1) \subset D_1$

$D_2 \in \tau_d \Rightarrow \exists r_2 > 0$ a.î. $B(x, r_2) \subset D_2$

Alegem $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$

Avem $B(x, r) \subset B(x, r_1) \cap$

$B(x, r_2) \subset D_1 \cap D_2$

3) Fie $(D_i)_{i \in I} \subset \tau_d$

$\underline{\bigcup_{i \in I} D_i \in \tau_d}$

Dacă $\bigcup_{i \in I} D_i = \emptyset$ atunci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \tau_d$

Pp că $\bigcup_{i \in I} D_i \neq \emptyset$

(Deci $\exists\, i_0 \in I$ a.î. $D_{i_0} \neq \emptyset$)

Fie $x \in \bigcup_{i \in I} D_i$. Deci $\exists\, j_0 \in I$ a.î. $x \in D_{j_0}$

$D_{j_0} \in \tau_d \Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $B(x, r) \subset D_{j_0}$

Avem $B(x, r) \subset D_{j_0} \subset \bigcup_{i \in I} D_i$

Așadar, $\bigcup_{i \in I} D_i \in \tau_d$

Prin urmare, (X, τ_d) e un sp. top $\square$

Def: Topologia τ_d din teorema precedentă se numește topologia indusă de metrica d

Obs: Dându-se un spațiu metric (X, d) putem construi sp. topol. (X, τ_d). Ca atare, are sens să vorbim despre mulț. deschise, mulț. închise, vecinătăți, mulț. compacte etc. într-un spaț. metric (referindu-ne la topologia indusă de acea metrică)

Obs Fie (X, d) un spațiu metric.
Sp. topol. (X, τ_d) este separat (Hausdorff)

Def: Fie (X, d) un sp. metric, $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că $(x_n)_n$ are limita x în raport cu metrica d (sau că $(x_n)_n$ converge către x în raport cu metrica d) și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \overset{d}{=} x$ sau

$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} x$ dacă $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$

(i.e $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$ avem $d(x_n, x) < \varepsilon$)

Obs 1) Sintagma „în rap cu metrica d" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul metric (X, d)"

2) În orice spațiu metric limita oricărui șir este unică (sp top. indus de o metrică e separat)

Spunem c...