Definiție convergență și divergentă

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$.

1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este convergent dacă $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

2) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este divergent dacă nu este convergent sau nu are limită sau limita lui este $\pm\infty$

Șiruri cu numere reale
- cu limită
  - cu limită finita - conv
  - $\pm\infty$ - div
- fără limită - div

* Criteriul lui Weierstrass - Teoremă

Orice șir de numere reale monoton și mărginit este convergent.

Recipoca teoremei este falsă: $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ → nu este monoton

$a_n = \dfrac{1}{n}$; $b_n = (-1)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$|b_n| = |(-1)^n| = 1 < 2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b_n$ mărginit

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$ ("mărginit $\cdot$ 0") $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Deci $(x_n)_n$ convergent

* Fie $(x_n)_n \in \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ (adică 2 șiruri convergente)

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$; $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$; $\lim\limits_{n\to\infty} (a \cdot x_n) = a \cdot x$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{x}{y}$

Șiruri Cauchy:

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem $(x_n)_n$ șir Cauchy dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$ și $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Șir Cauchy $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ este șir Cauchy $\Leftrightarrow$ $(x_n)_n$ este conv

Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Arătați că $(x_n)_n$ nu este convergent.

Soluție:

$(x_n)_n$ este șir Cauchy $\Leftrightarrow$ $(\forall)\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $m, n \in \mathbb{N}^*$ $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(x_n)_n$ nu este șir Cauchy $\Leftrightarrow$ $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, $(\forall)\, k \in \mathbb{N}^*$ a.î. $m_k, n_k \in \mathbb{N}^*$ $m_k \geq k$, $n_k \geq k$ cu proprietatea că avem $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$

$$x_m - x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m}(m-n) = 1 - \frac{n}{m}$$

Alegem $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$

Fie $k \in \mathbb{N}$; Alegem $m_k = 2(k+1)$, $n_k = k+1$

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = \frac{1}{n_k+1} + \dots + \frac{1}{2n_k} \geq \frac{1}{2n_k}(2n_k - n_k) = \frac{1}{2}$$

Deci $(x_n)_n$ nu este șir Cauchy.

* Lema lui Cesaro

Orice șir de numere reale mărginit admite măcar un subșir convergent $\Leftrightarrow$ $(\forall)\, (x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(x_n)_n$ mărginit $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists\, (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. x_{n_k} convergent

Limite extreme ale unui șir de numere reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Def: Fie $x \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Spunem că x este punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă $\exists\, (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

Propoziție: $\exists$ un cel mai mare punct limită al șirului $(x_n)_n$ și un cel mai mic punct limită al acestuia, fie el finit sau infinit.

1) Cel mai mare punct limită al șirului $(x_n)_n$ se numește limită superioară a sa.

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \text{ sau } \overline{\lim}\, x_n$$

2) Cel mai mic punct limită al șirului $(x_n)_n$ se numește limită inferioară a sa.

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \text{ sau } \underline{\lim}\, x_n$$

Observații: 1) $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$

2) $(x_n)_n$ are limită $\Leftrightarrow$ $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

Exercițiu:

Fie $x_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2+3n+1} \sin\dfrac{(-1)^n \pi}{2} + \dfrac{n^3+2}{3n^3+3n+4} \cos\dfrac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}$

Calculați $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$. Determinați dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Distingem 6 cazuri de paritate ale lui n:

$$n: \begin{cases} 6k \\ 6k+1 \\ \dots \\ 6k+5 \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}$$

I $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(6k)^2+1}{2(6k)^2+3\cdot 6k+1} \sin\dfrac{(-1)^{6k}\pi}{2} + \dfrac{(6k)^3+2}{3(6k)^3+3\cdot 6k+4} \cos\dfrac{6k\pi}{3} =$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{36k^2+1}{2\cdot 36k^2+18k+1} + \dfrac{216k^3+2}{3\cdot 216k^3+18k+4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$

II $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(6k+1)^2+1}{2(6k+1)^2+3(6k+1)+1} \sin\dfrac{(-1)^{6k+1}\pi}{2} + \cancel{\dfrac{(6k+1)^3+2}{3(6k+1)^3+3(6k+1)}}$

$+ \dfrac{(6k+1)^3+2}{3(6k+1)^3+3(6k+1)+4} \cos\dfrac{(6k+1)\pi}{3} =$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(6k+1)^2+1}{2(6k+1)^2+3(6k+1)+1}\cdot(-1) + \dfrac{(6k+1)^3+2}{3(6k+1)^3+3(6k+1)+4}\cdot\dfrac{1}{2}$

$= -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

III. $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(6k+2)^2+1}{2(6k+2)^2+3(6k+2)+1} \sin\dfrac{(-1)^{6k+2}\pi}{2} +$

$+ \dfrac{(6k+2)^3+2}{3(6k+2)^3+3(6k+2)+4} \cos\dfrac{(6k+2)\pi}{3} =$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(6k+2)^2+1}{2(6k+2)^2+3(6k+2)+1} + \dfrac{(6k+2)^3+2}{3(6k+2)^3+3(6k+2)+4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

IV $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(6k+3)^2+1}{2(6k+3)^2+3(6k+3)+1} \sin\dfrac{(-1)^{6k+3}}{2} +$

$+ \dfrac{(6k+3)^3+2}{3(6k+3)^3+3(6k+3)+4} \cos\dfrac{(6k+3)\pi}{3} =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot(-1) + \dfrac{1}{3}\cdot(-1) = -\dfrac{5}{6}$

V $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(6k+4)^2+1}{2(6k+4)^2+3(6k+4)+1} \sin\dfrac{(-1)^{6k+4}}{2} +$

$+ \dfrac{(6k+4)^3+2}{3(6k+4)^3+3(6k+4)+4} \cos\dfrac{(6k+4)\pi}{3}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(6k+5)^2+1}{2(6k+5)^2+3(6k+5)+1} \sin\frac{(-1)^{6k+5}\pi}{2} +$$

$$+ \frac{(6k+5)^3+2}{3(6k+5)^3+3(6k+5)+4} \cos\frac{(6k+5)\pi}{3} = \frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{VI} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{(6k+5)^2+1}{4(6k+5)^2+3(6k+5)+1}\,\sin\frac{(-1)^{6k+5}\pi}{2} +$$

$$+\frac{(6k+5)^3+2}{3(6k+5)^3+3(6k+5)+4}\,\cos\frac{(6k+5)\pi}{3} = \frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Deci $\underline{\lim}\, x_n = -\frac{5}{6}$, $\overline{\lim} = \frac{5}{6} \Rightarrow \underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow$ +4

$\Rightarrow$ nu există $\lim_{n\to\infty} x_n$

Topologie

Def. Fie $X \neq \emptyset$. O mulțime $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ (i.e. mulțimea părților lui X, adică mulțimea submulțimilor mulțimii X) se numește <u>topologie</u> pe X, dacă:

(„τ" se citește „tau")

1) $\emptyset, X \in \tau$
2) $\forall D_1, D_2 \in \tau \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \tau$
3) $\forall (D_i)_{i\in I}$ $\mathcal{F} = \{D_i \mid i \in I\} \subseteq \tau$ avem $\bigcup_{i\in I} D_i \in \tau$.
(Chestia asta se numește familie de mulțimi)

Perechea (X, τ) se numește <u>spațiu topologic</u>.

Def. Fie (X, τ) un sp. top.
1) O mulțime $D \subseteq X$ se numește mulțime <u>deschisă</u> dacă $D \in \tau$.
2) O mulțime $F \subseteq X$ se numește mulțime <u>închisă</u> dacă $X \setminus F \in \tau$.
3) Fie $x \in X$. O mulțime $V \subseteq X$ se numește <u>vecinătate</u> a lui x dacă $\exists D \in \tau$ a.î. $x \in D \subseteq V$, D deschisă. Se notează cu $\mathcal{V}_x = \{V \subseteq X \mid V$-vecinătate a lui $x\}$.

Def. Fie (X, τ) sp. top. O mulțime $K \subseteq X$ se numește mulțime <u>compactă</u> dacă $[\forall (D_i)_{i\in I} \subseteq \tau$ a.î. $K \subseteq \bigcup_{i\in I} D_i] \Rightarrow [\exists J \subseteq I$, J finită astfel încât avem incluziunea $K \subseteq \bigcup_{j\in J} D_j]$.

(sau o mulțime compactă e închisă și mărginită)

Gata cu chineza, acum revenim la chestii mai normale (cred)

Def. Fie $X \neq \emptyset$. O funcție $d: X \times X \to \mathbb{R}$ se numește metrică (sau distanță) pe X dacă:

1) $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X$
2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x,y \in X$
3) $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x,y,z \in X$ (inegalitatea triunghiulară)

Perechea (X,d) se numește spațiu metric.

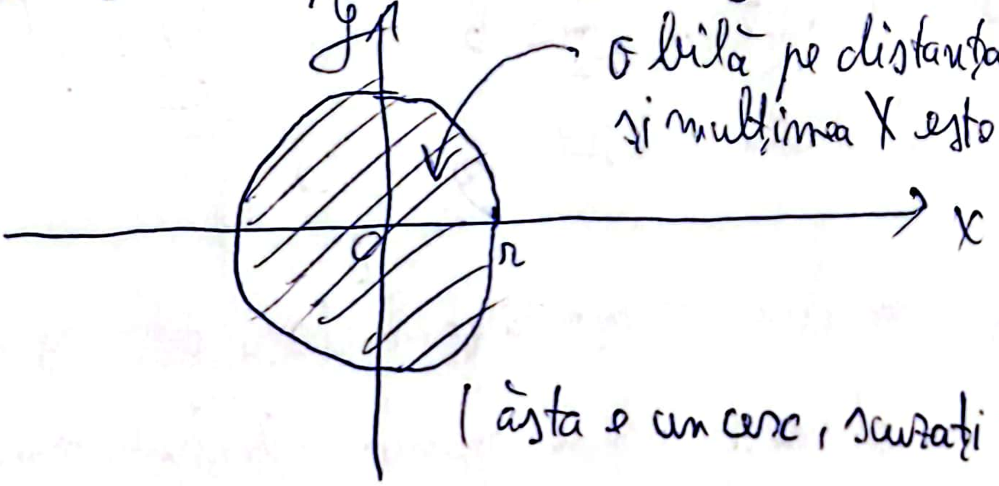
Exemple:

1) $X = \mathbb{R}$ și $d(x,y) = |x-y|$; (X,d) sp. met.
(Cum măsurăm distanța dintre ~~...~~ 2 și 5? Facem $5-2=3$.)

2) $X = \mathbb{R}^2$ și $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ (distanța euclidiană)
(Gândiți-vă la formula distanței pe care ați învățat-o pentru BAC, adică așa ar fi trebuit; nu degeaba se mai ~~...~~ numește și distanță).

Def. Fie (X,d) sp. metric, $x \in X$ și $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1) $B(x,r) = \{y \in X / d(x,y) < r\}$ (bila deschisă)
2) $B[x,r] = \overline{B}(x,r) = \{y \in X / d(x,y) \leq r\}$ (bila închisă)



o bilă pe distanța euclidiană și mulțimea X este $\mathbb{R}^2$.

(asta e un cerc, scuzați talentul)

Scanned with CamScanner

Def. Fie (X,d) un sp. metric, $(x_n)_n \subseteq X$ și $x \in X$. Spunem că $(x_n)_n$ are limita x în raport cu metrica d și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$ sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ (i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $d(x_n, x) < \varepsilon$).

Obs. În orice sp. metric, limita oricărui șir este unică.

Acest lucru nu se întâmplă mereu în spații topologice, dar nu vorbim despre asta.

Apropo, un spațiu metric este și topologic, dar nu și invers.

De acum vom lucra DOAR CU SPAȚII METRICE!

Analiza topologică a unei mulțimi.

Def. Fie (X,d) sp. metric, $A \subseteq X$ și $x_0 \in X$.

1) x_0 este punct interior a lui A (i.e. $x_0 \in \mathring{A}$) $\Leftrightarrow$ ~~∃~~
$\Leftrightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \subseteq A$

2) x_0 este punct aderent a lui A (i.e. $x_0 \in \overline{A}$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall r > 0$, avem $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

3) x_0 este punct de acumulare a lui A (i.e. $x_0 \in A'$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall r > 0$, avem $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

4) x_0 este punct frontieră a lui A (i.e. $x_0 \in Fr(A) = \partial A$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_0 \in \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

5) x_0 este <u>punct izolat</u> al lui A (i.e. $x_0 \in Izo(A) = {}'A$) $\iff$
$\iff x_0 \in \overline{A} \setminus A'$.

Putem defini aceste puncte și pe spații topologice. Dacă vreți acele definiții, mesaj în privat lui Teo (Alex v-arde block).

<u>Proprietăți</u>:

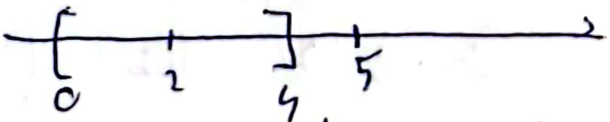
1) $\mathring{A} \subseteq A$ (dacă A e deschisă, atunci $\mathring{A} = A$).
2) $\mathring{A} = \bigcup_{D \subseteq A} D$ (reuniune de deschise, așadar $\mathring{A}$ e deschisă)
3) $A \subseteq \overline{A}$ (dacă A e închisă, atunci $A = \overline{A}$)
4) $\overline{A} = \bigcap_{A \subseteq F} F$ (intersecție de închise, așadar $\overline{A}$ e închisă).
5) $A' \subseteq \overline{A}$
6) $\overline{A} = A \cup A'$
7) $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$
8) $Izo(A) = \overline{A} \setminus A'$.

<u>Exerciții</u>:

1) Faceți analiza topologică a mulțimii $A = ([0,4] \setminus \{2\}) \cup \{5\}$.

<u>Soluție</u>:

Interiorul lui A:



$x \in \mathring{A} \iff \exists r > 0$ a.î. $(x-r, x+r) \subseteq A$ (bila aici e dată de $d(x,y) = |y-x|$).
$2 \notin A$, deci orice interval care îl conține pe 2 nu este inclus în A.
$\{0,4,5\} \subseteq A$, dar $\exists$ intervale care nu sunt incluse complet în A (de forma $(x-r, x+r)$, evident). Deci $\mathring{A} = (0,2) \cup (2,4)$.

Punctele de acumulare ale lui A:

$x_0 \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Observăm că dacă $x \in [0,4]$, putem alege, de exemplu, $r = 4$ și $B(x,4) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Deci $[0,4] \subseteq A'$.

Dacă $x = 5$, alegem $r = \frac{1}{2}$ și avem că $B(5, \frac{1}{2}) = (\frac{9}{2}, \frac{11}{2}) \cap (A \setminus \{5\}) = \emptyset$, deci $5 \notin A'$.

Așadar $A' = [0,4]$.

$\overline{A} = A \cup A' = ([0,4] \setminus \{2\}) \cup \{5\} \cup [0,4] = [0,4] \cup \{5\}$.

$Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = ([0,4] \cup \{5\}) \setminus ((0,2) \cup (2,4)) = \{0, 2, 4, 5\}$.

$Izo(A) = \overline{A} \setminus A' = ([0,4] \cup \{5\}) \setminus [0,4] = \{5\}$ $\square$

DISCLAIMER! Nu vă speriați de următoarea problemă!

2) Fie $X = C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$,

$d_1 : X \times X \to \mathbb{R},\ d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ și

$d_\infty : X \times X \to \mathbb{R},\ d_\infty(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\}$.

a) Arătați că d_1 și d_∞ sunt distanțe pe X.

b) Fie $(f_n)_n \subseteq X$ și $f \in X$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{d_\infty}{=} f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{d_1}{=} f$

Soluție:

a) Demonstrăm că d_1 este distanță. $d_1(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$.

$|f(x)-g(x)|\geq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \geq 0$. (1)

$d_1(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx = \int_0^1 |g(x)-f(x)|\,dx = d_1(g,f)$ (2)

$|f(x)-g(x)|\geq 0$, iar semnul „=" are loc doar dacă $f(x)=g(x)$.

Deci $d_1(f,g)=0 \Leftrightarrow f=g$ (3)

Fie $h\in X$.

Avem că $|f(x)-h(x)|\leq |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)| \;/\int_0^1$.

$\int_0^1 |f(x)-h(x)|\,dx \leq \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x)-h(x)|\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d_1(f,h)\leq d_1(f,g)+d_1(g,h)$ (4)

Din (1), (2), (3), (4) avem că d_1 e distanță pe X.

Demonstrăm că d_∞ este distanță pe X. $d_\infty(f,g)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$

$|f(x)-g(x)|\geq 0 \Leftrightarrow \max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|\geq 0$ (5)

$d_\infty(f,g)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]}|g(x)-f(x)| = d_\infty(g,f)$ (6)

$|f(x)-g(x)|\geq 0$, iar „=" are loc pt $f=g$. ~~Deci~~

Deci $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|=0 \Leftrightarrow f=g$ (7)

Avem, din nou, $|f(x)-h(x)| \le |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|$.

Luând maximul pe $[0,1]$ obținem că:

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)-h(x)| \le \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| + \max_{x\in[0,1]} |g(x)-h(x)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d_\infty(f,h) \le d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h) \quad (8).$$

Din (5), (6), (7), (8) va rezulta că și d_∞ e distanță.

b) Avem echivalență, deci trebuie să demonstrăm și directa, dar și reciproca. Demonstrăm, deci, că $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_1(f_n, f) = 0$

"$\Rightarrow$"

Avem că $\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} \{|f_n(x)-f(x)|\} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$\max_{x\in[0,1]} \{|f_n(x)-f(x)|\} < \varepsilon$. Deci $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$.

Integrând ultima relație de la 0 la 1 obținem că:

$$\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx < \int_0^1 \varepsilon\,dx = \varepsilon \cdot x\Big|_0^1 = \varepsilon.$$

Deci $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx = 0$.

"$\Leftarrow$" Dacă vi se pare ceva suspect în demonstrația de mai jos, mesaj în privat lui Teo (el e nebunul care s-ar băga vreodată în așa ceva).

Presupunem prin reducere la absurd că $\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} \{|f_n(x) - f(x)|\} \neq 0$. Atunci $\exists \varepsilon > 0$ și $\exists (f_{n})_k \subseteq (f_n)_n$ un subșir a.î. $\max_{x\in[0,1]} \{|f_{n_k}(x) - f(x)|\} \geq \varepsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Așadar, $\exists x_k \in [0,1]$ a.î. $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$.

Considerăm funcția $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = |f_{n_k}(x) - f(x)|$. Cum f, f_{n_k} și f_n sunt continue, vom avea că g este continuă, deci își atinge maximul. Fie $x_k \in [0,1]$ un punct în care $g(x_k) \geq \varepsilon$. Atunci $\exists$ o vecinătate a lui x_k inclusă în $[0,1]$ (fie aceea $(x_k - \delta, x_k + \delta)$ cu $\delta \in [0,1]$) în care $g(x) \geq \varepsilon$, $\forall x \in (x_k - \delta, x_k + \delta)$.

Așadar vom avea că:

$$\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} g(x)\,dx \geq \int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} \varepsilon\,dx = \varepsilon \cdot 2\delta .$$

Fie $c \in \mathbb{N}$. Însumând c astfel de integrale pe intervale ce reunite dau $[0,1]$ și pe un număr mare de elemente ale șirului $(f_{n_k})_k$ obținem că $\int_0^1 g(x)\,dx \geq c \cdot \varepsilon \cdot 2\delta$, rezultând astfel că $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \neq 0$. Am obținut o contradicție deci presupunerea făcută este falsă. Așadar are loc echivalența dată. $\square$