03.10.2023

# Curs 1

• Șiruri de numere reale

**Def:** Fie $A \subset \mathbb{N}$ o mulțime numărabilă (există o fct $g: A \to \mathbb{N}$, $g$ bijectivă)
O fct $f: A \to \mathbb{R}$ se num șir de nr reale

**Notații**

1) $f(n) \overset{not}{=} x_n \ \forall \ n \in A$

2) Ținând cont de not 1) și de def prec. obținem șirul de numere reale $(x_n)_{n \in A}$

**Obs**

1. Atunci când $A$ se subînțelege vom scrie doar $(x_n)_n$

2. În general, $A = \mathbb{N}$ sau $A = \mathbb{N}^*$, cazuri în care vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sau $(x_n)_{n \geq 0}$ sau $(x_n)_n$), respectiv $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (sau $(x_n)_{n \geq 1}$ sau $(x_n)_n$)

**Def** Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ și $l \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $l$ și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$ dacă $\forall \ \varepsilon > 0$, $\exists \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aî $\forall$ $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - l| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ ai doar un nr finit

**Def**: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

1) Spunem că $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n > \varepsilon$

2) Sp. că $(x_n)$ are lim. $-\infty$ și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n < -\varepsilon$

$\varepsilon$ e număr pozitiv

**Def**: Fie $(x_n) \subset \mathbb{R}$

1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este convergent dacă $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

2) Sp. că șirul $(x_n)_n$ este divergent dacă nu e convergent (i.e sau $(x_n)_n$ nu are limită sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$)

$(-1)^n$ - și diverg.

Șiruri de nr. reale
- cu limită
  - finită (convergente)
  - infinită (divergente)
- fără limită (divergente)

**Def**: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Spunem că șirul $(x_n)_n$ este

1. CRESCĂTOR dacă $x_n \leq x_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

2. DESCRESC dacă $x_n \geq x_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

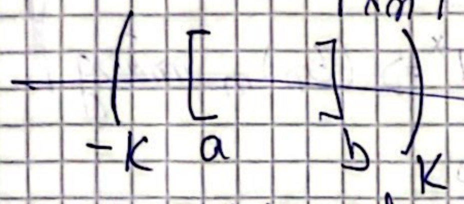
3. ST. CRESC dacă $x_n < x_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

4. ST DESCRESC dacă $x_n > x_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

5. MONOTON dacă $(x_n)_n$ cresc sau $(x_n)_n$ descresc
(şi cresc şi descresc $\Rightarrow$ şirul const)

6. ST. MONOTON dacă $(x_n)_n$ st cresc sau $(x_n)_n$ st descresc

7. MĂRGINIT dacă $\exists M > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$ avem
$|x_n| < M$




$a \le x_n \le b$

<u>Teorema (Crit. lui Weierstrass)</u>

Orice şir de nr. reale <u>monoton</u> şi <u>mărginit</u> este <u>convergent</u>

<u>Obs</u>: Reciproca teoremei precedente este falsă

<u>Ex</u> Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Arătaţi că a) $(x_n)_n$ nu e monoton

b) $(x_n)_n$ e convergent.

<u>Sol</u>

a) Fie $K \in \mathbb{N}^*$

$$x_{2K} = \frac{(-1)^{2K}}{2K} = \frac{1}{2K}$$

$$x_{2K+1} = \frac{(-1)^{2K+1}}{2K+1} = \frac{-1}{2K+1}$$

$$x_{2K+2} = \frac{(-1)^{2K+2}}{2K+2} = \frac{1}{2K+2}$$

Avem $x_{2k} > x_{2k+1}$ şi $x_{2k+1} < x_{2k+2}$

Deci, $(x_n)_n$ nu este monoton

b) Avem $x_n = a_n \cdot b_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ unde

$a_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $b_n = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

$|b_n| = |(-1)^n| = 1 \le 2 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (b_n)_n$ mărg $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} a_n \cdot b_n = 0$$

(„0 · mărginit = 0")

Deci, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ i.e. $(x_n)_n$ e converg. $\square$

Orice şir convergent e mărginit.

<u>Propoziţie</u>: Orice şir de nr reale convergent este mărginit

<u>Prop (Op. cu şiruri converg.)</u>

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$, $a, x, y \in \mathbb{R}$

a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$.

Atunci:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} (a \cdot x_n) = a \cdot x$

4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$ (cu pp. suplim. că $y \neq 0$)

**Prop** Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$

1) $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0\right)$

2) $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|\right)$

3) Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ și $(y_n)_n$ e mărginit atunci $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = 0$ ( $0 \cdot$ mărginit $= 0$ )

**Prop** (Crit. cleștelui)

Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ trei șiruri de nr reale a.î. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ cu prop că $\forall\, n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n \leq z_n$

Pp. că $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = l$

Atunci $\lim_{n\to\infty} y_n = l$.

## Șiruri Cauchy

**Def**: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_n$ e șir Cauchy dacă $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

**Terminologie** Șirurile Cauchy se mai numesc și șiruri fundam.

! Orice șir convergent este Cauchy (în orice spațiu metric)

Teoremă: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Sunt echiv.:

1. $(x_n)_n$ convergent
2. $(x_n)_n$ șir Cauchy

$$\left[\begin{array}{l} p \Leftrightarrow q \\ \neg p \Leftrightarrow \neg q \end{array}\right.$$

Exec:

Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Arătați că $(x_n)_n$ nu este converg.

Sol: Arătăm că $(x_n)_n$ nu este șir Cauchy

$(x_n)_n$ e șir Cauchy $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

a.î. $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$ avem

$|x_m - x_n| < \varepsilon$

Neg: $(x_n)_n$ nu e șir Cauchy $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon_0 > 0$ a.î.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists m_k, n_k \in \mathbb{N}^*$, $m_k \geq k$,

$n_k \geq k$ cu prop că $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$

$x_m - x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m}\right)$

$- \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m}(m-n)$

$= 1 - \frac{n}{m} \geq \varepsilon_0$
ct

iau $m = 2n$ ca să-mi dea $\frac{1}{2}$

$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}(2n - n)$

$= \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

Alegem $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$

Fie $k \in \mathbb{N}$

Alegem $m_k = 2(k+1)$ şi $n_k = k+1$

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = \frac{1}{n_k+1} + \dots + \frac{1}{2n_k} \geq \frac{1}{2n_k}(2n_k - n_k)$$

$$= \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

Deci $(x_n)_n$ nu e şir Cauchy, i.e. $(x_n)_n$ nu e şir convergent.

Lema lui Cesaro: Orice şir de nr reale mărg. admite măcar un subşir convergent (i.e $\forall (x_n)_n \subset \mathbb{R}$ $(x_n)_n$ mărg $\exists (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. $(x_{n_k})_k$ e convergent)

Limitele extreme ale unui şir de nr reale

Fie $(x_n)_n$ un şir de nr. reale.

Def: Fie $x \in \overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Spunem că $x$ e punct limită al şirului $(x_n)_n$ dacă $\exists (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

Notaţie $\mathcal{L}((x_n)_n) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x$ pct limită al lui $(x_n)_n\}$

Prop: Există un cel mai mare punct limită (finit / infinit) al şirului $(x_n)_n$ şi un cel mai mic pct limită (finit / infinit) al șirului $(x_n)_n$

**Def**

1) Cel mai mare pct. limită al șirului $(x_n)_n$ se numește LIMITA SUPERIOARĂ a sa și se notează $\limsup_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim}\, x_n$

2) Cel mai mic pct limită al șirului $(x_n)_n$ se numește LIMITA INFERIOARĂ a sa și se notează $\liminf_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim}\, x_n$

**Prop** 1. $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$

2. Șirul $(x_n)_n$ are limită dacă și numai dacă $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

caz în care avem

$\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

**Exc**: Fie $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Det $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ și precizați dacă $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$

• $x_{2k}$, $x_{2k+1}$