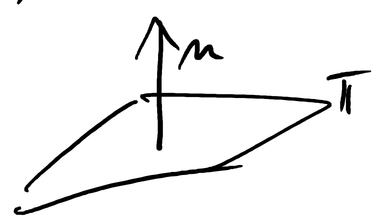
Rezolvari examen 22 iunie

Friday, June 21, 2024 7:45 PM

1 a) Nu este reper afin, M, N, P, Q $\in \pi$ de la punctul b) deci sunt afin dependente.

b) $\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0 \Rightarrow \overset{n}{\overset{\parallel}{(2, -3, 1)}}$ e vect normal



$d \perp \pi \Leftrightarrow \quad \text{Dir}\, d = \langle n \rangle$

De exemplu $d: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{1}$

c) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle$

$= 2\langle v, v\rangle + 2\langle w, w\rangle + 2\cancel{\langle v, w\rangle} - 2\cancel{\langle v, w\rangle}$

$= 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$

d) Fie $v = \overrightarrow{AB}$, $w = \overrightarrow{AD}$

admitere 2023!

$\overset{c)}{\Rightarrow} \|AC\|^2 + \|BD\|^2 = 2\left(\|AB\|^2 + \|AD\|^2\right) \Big|^2$

$\Rightarrow \|AC\|^4 + 2\|AC\|^2 \cdot \|BD\|^2 + \|BD\|^4 = 4\left(\|AB\|^4 + 2\|AB\|^2 \cdot \|AD\|^2 + \|AD\|^4\right)$

$\Rightarrow \underbrace{\|AC\|^4 + \|BD\|^4 - 2\|AC\|^2 \cdot \|BD\|^2}_{\left(\|AC\|^2 - \|BD\|^2\right)^2} = 8\|AB\|^2 \cdot \|AD\|^2$

$\left(\|AC\|^2 - \|BD\|^2\right)^2 = 8\|AB\|^2 \cdot \|AD\|^2$

$$\left(\|AC\|^2 - \|BD\|^2\right)^2 = 8\,\|AB\|^2 \cdot \|AD\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2} = 2\sqrt{2}\,\|AB\| \cdot \|AD\|$$

$$= \langle v+w, v+w\rangle - \langle v-w, v-w\rangle$$

$$= 4\langle v, w\rangle \Rightarrow \cos\sphericalangle A = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle A = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle B = \frac{3\pi}{4}.$$

---

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) f este deja scrisă sub forma $f(X) = AX + b$, $A \in M_3(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ este aplicație afină.

f izomorfism $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Dar $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow f$ este izomorfism afin!

b) Cand dai

$f(d) = \{ (2,0,1) + t(-1,1,1) \mid t \in \mathbb{R} \}$

b) $f(d) = \{(2,0,1)+t(-1,1,1) \mid t\in\mathbb{R}\}$

Evident există o dreaptă d (unică), deoarece f este izomorfism, anume

$$d = f^{-1}\left(\{(2,0,1)+t(-1,1,1) \mid t\in\mathbb{R}\}\right).$$

Var 1 Calculăm f^{-1} ...

Var 2 Scriem ecuații implicite pentru d:

$$d: \begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$\Leftrightarrow d: \begin{cases} x+y-2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

Atunci $f(d)$: $\begin{cases} (2x+y-2z+3)+(-x+z)-2=0 \\ (-x+z)-(2z-3)+1=0 \end{cases}$

c) $A = \{P\in\mathbb{R}^3 \mid f(P)=P\}$ este mulțimea punctelor fixe ale lui f $\Rightarrow$ este neapărat subsp. afin.

Verificăm însă în acest caz:

Verificăm însă în acest caz:

$$f(P)=P \iff \begin{cases} 2x + y - 2z + 3 = x \\ -x + \quad\; + z \;= y \\ \qquad 2z - 3 = z \implies z = 3 \end{cases}$$

$\cancel{\begin{matrix} x+y-3=0 \\ -x-y+3=0 \end{matrix}}$

$$\iff A' = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+y-3=0 \\ z-3=0 \end{cases} \right\}$$ evident subspațiu afin

de dimensiune 1.

d) Observăm că 2 este valoare proprie a lui A (matricea urmei liniare a lui f)

$\implies \forall \langle\, ,\rangle$ produs scalar, chiar $\forall \|\;\|$ normă,

$\|Av\| = 2\|v\|$ pt v vector propriu de v.p. 2

$\implies A$ nu păstrează (orice) normă

$\implies f$ nu poate fi izometrie în raport cu nicio structură euclidiană.

---

3. $f: \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, $f([x:y:z]) = [x+z : y-2z : 2z]$.

[illegible] din matricea

a) f este o proiectivitate care provine din matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

b) <u>Var 1</u> (calcul direct)

$$f([x:y:z]) = [x:y:z] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ a.î. } \begin{cases} x+z = \lambda x \\ y-2z = \lambda y \\ 2z = \lambda z \end{cases}$$

I $z \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1$ și putem considera $z=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 2x \\ y-2 = 2y \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1,-2)$$

$\Rightarrow$ punctul $[1:-2:1]$.

II $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases} \xrightarrow{x^2+y^2 \neq 0} \lambda = 1$ și deci avem punctele $[x:y:0]$.

$$\{[x:y:0] \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{[1:-2:1]\}$$

$H_\infty: \{z=0\}$

$$\underbrace{\{[X:Y:0] \mid X, Y \in \mathbb{R}\}}_{\text{dreapta } Z=0} \cup \{\ldots\} \quad \notin \{Z=0\}$$

NU formează o var liniară (de fapt, generează întreg $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$)

c) Var 1 (calcul direct)

$$d: Y-2Z=0 \Rightarrow d=\{[\alpha : 2\beta : \beta] \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2+\beta^2>0\}$$

$$\Rightarrow f(d) = \{[\alpha+\beta : \underbrace{2\beta-2\beta}_{0} : 2\beta] \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2+\beta^2>0\}$$

$f(d)$ e dreaptă și $f(d) \subset \{Y=0\}$

$$\Rightarrow f(d) = \{Y=0\}$$

$$d \cap f(d): \begin{cases} Y-2Z=0 \\ Y=0 \end{cases} \Rightarrow [1:0:0]$$

Var 2 pentru b) și c)

Gândim $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \simeq \overline{\mathbb{R}^2}$ cu identificarea $(x,y) \longmapsto [x:y:1]$.

Gândim $\mathbb{P}\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$ cu $(x,y) \mapsto [x:y:1]$.

Obs că $f|_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$. Mai precis,

$$f([x:y:1]) = [x+1 : y-2 : 2] = \left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2} : \frac{y}{2}-1 : 1\right].$$

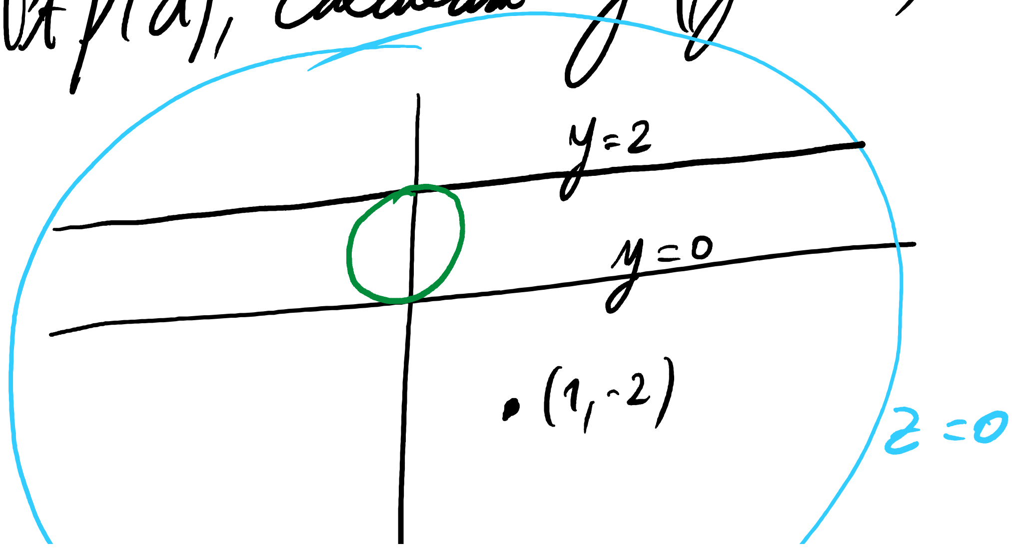
$\Rightarrow$ f provine din aplicația afină

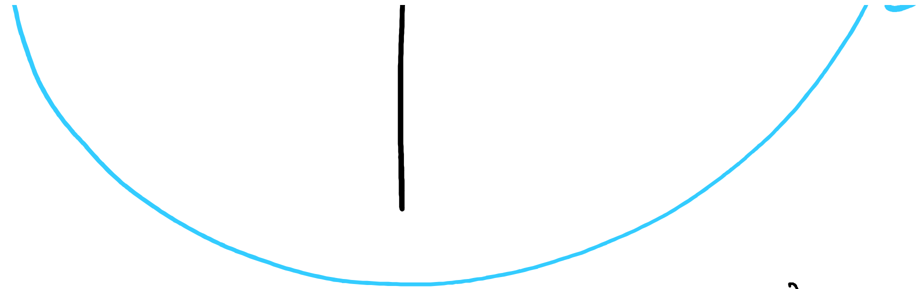
$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = \frac{1}{2}(x,y) + \frac{1}{2}(1,-2)$,

care este <u>omotetia de centru $(1,-2)$ și raport $\frac{1}{2}$</u>.

$\Rightarrow$ b) punctele fixe: $[1:-2:1]$ & $\underbrace{\text{toate punctele de la infinit}}_{\{z=0\}}$

c) Pt $f(d)$, calculăm $g(\{y-2=0\})$





Evident $g(\{y-2=0\}) = \{y=0\}$

$\xRightarrow{\text{Omogenizare}} f(\{Y-Z=0\}) = \{Y=0\} = f(d)$

Evident $\{y=2\} \parallel \{y=0\} \Rightarrow d \cap f(d) = [1:0:0]$ în direcția lui $\{Y=0\}$

d) Este suficient să alegem o conică nedegenerată în $\mathbb{R}^2$ tangentă la $\{y=2\}$ și $\{y=0\}$

De ex, cercul $\mathcal{C}((0,1),1)$: $x^2+(y-1)^2=1$
$\iff x^2+y^2-2y=0$

$\xRightarrow{\text{Omogenizare}} \Gamma = \overline{\mathcal{C}} : X^2+Y^2-2YZ=0$

---

4. a) Dacă $T_v \in G \Rightarrow (T_v)^\ell = T_{\ell v} \in G, \; \forall \ell \geq 1$

și $\underbrace{\{T_{kv} \mid k \geq 1\}}_{\text{mulțime infinită}} \subset G$ ↑ finit abs

Adică pentru că translațiile au ordin infinit.

b) $\forall f \in G$, $f(P_0) = f\left(\sum_{h \in G} \frac{1}{|G|} h(P)\right) \overset{f \text{ afină}}{=}$

$= \sum_{h \in G} \frac{1}{|G|} (f \circ h)(P) \overset{g = f \circ h}{=} \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|} g(P) = P_0.$

P_0 **NU** depinde de alegerea lui P inițială,

rezultă din restul demonstrației că P_0 este singurul pct fix al lui G,

$\boxed{\text{în afară de cazurile } n = 1 \begin{cases} G = \{id\} \\ G = \{id, s\} \end{cases} \text{ simetrie axială}}$

c) Este folosit rezultatul

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrie și $\ldots$ $\Rightarrow$ f este ortogonală, în particular liniară

$f : \mathbb{R}^n \to \dots$ $\quad$ $\Big|$ f particular liniară

și

$f(0)=0$

(sau teorema fundamentală a geometriei euclidiene

$f(x) = Ax+b$, $A \in O(n)$ $\Big|$ $\Rightarrow f$ liniară

$f(0)=0 \Rightarrow b=0$)

d) Afirmația (C): $|G^+| = n \Rightarrow G^+$ conține rotații R pt care $R^n = id$

Dar există exact n astfel de rotații: $R_{\frac{2l\pi}{n}}$, $l \in \overline{0, n-1}$

$\Rightarrow G^+ = \{ R_{\frac{2l\pi}{n}} \mid l \in \{0, 1, \dots, n-1\}\} \simeq (\mathbb{Z}_n, +)$

Afirmația (D): Dacă $s \in G \setminus G^+ \Rightarrow s \in O(2) \setminus SO(2)$

$\Rightarrow s$ este simetrie față de o dreaptă vectorială d.

$G = \langle G^+ \cup \{s\} \rangle$ și $G^+ = \langle R_{\frac{2\pi}{n}} \rangle = \langle r \rangle$

r = rotația de unghi $\frac{2\pi}{n}$

$\Rightarrow G \simeq D_{2n}$ (din definiția grupului diedral).

5. Observăm că, prin definiție, dacă $\Gamma: f=0$,

atunci $T_P\Gamma: \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\cdot(x_i - p_i) = 0$

$\Rightarrow$ Dir $(T_P\Gamma): \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\cdot x_i = 0$

$\Rightarrow$ un vector normal este dat de $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right)$

(la noi, $n=3$)

a) $\Gamma: 2x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 4yz - 2x + 4 = 0$

$P = (1,2,0) \in \Gamma$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2z - 2$

$\Rightarrow v = (2, -4, -6)$ e vector normal la Γ în P.

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 4z$

(sau $(1,-2,-3)$ ...)

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2x - 4y$

b) Dacă Γ e netedă $\Rightarrow \dim(\mathrm{Dir}(T_P\Gamma))^{\perp} = 1$, $\forall P \in \Gamma$

b) Dacă: $\forall P \in \Gamma$

$\Rightarrow \forall v_1, v_2$ vectori normali în P, v_1 și v_2 sunt proporționale

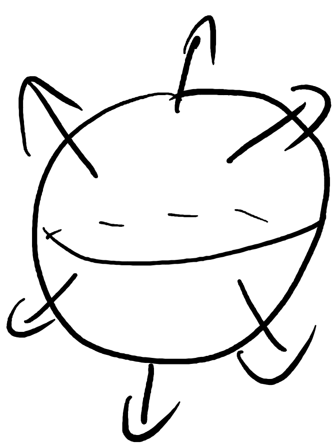
$\Longleftrightarrow [v_1]=[v_2]$ în $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$

$\Rightarrow N_\Gamma : \Gamma \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ e corect definită.

Dacă vrem o formulă și $\Gamma : f=0$

$$\Rightarrow N_\Gamma(P) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(P) : \frac{\partial f}{\partial y}(P) : \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right].$$

c) Dacă Γ e orice elipsoid, N_Γ e surjectivă



are normale în orice direcție.

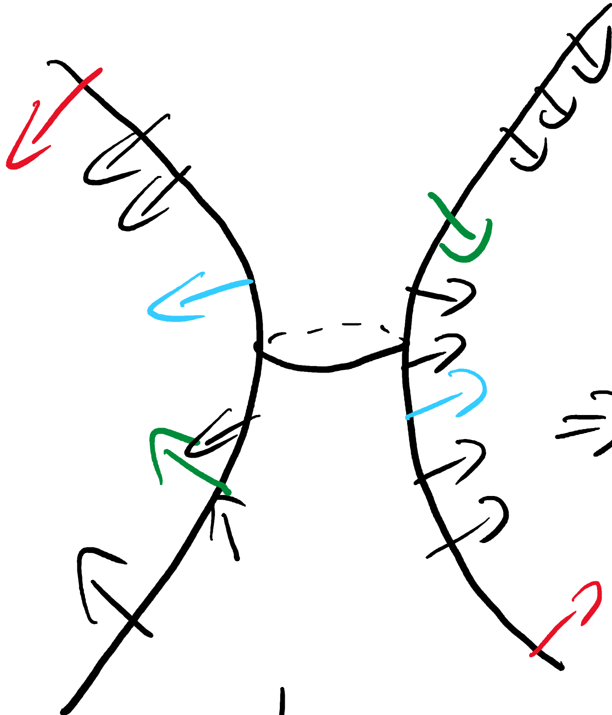
De exemplu, sfera $\Gamma :\ x^2+y^2+z^2-1=0$

$$\Rightarrow N_\Gamma : \Gamma \to \mathbb{P}^2\mathbb{R},\ N_\Gamma\big((x,y,z)\big) = [2x:2y:2z] = [x:y:z]$$

$\Rightarrow N_p : \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, $N_p(\ldots)$
$= [x:y:z]$

Evident surjectivă.

d)



Hiperboloidul are direcții asimptotice $\Rightarrow$ vectorii normali nu pot avea orice direcție

N_p

Im N_p

$\mathbb{P}^2\mathbb{R} = S^2/\pm 1$

este o bandă în jurul ecuatorului + identificarea

$\Downarrow$

Dar

este o bandă Möbius

Dar  este o bandă Möbius.