

Topologie

Def: Fie X o multime: se numeste topologie pe X o familie de submultime $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ cu proprietatile

(1) $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ cu $U_i \in \mathcal{D}$, $\forall i \in I$ atunci $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{D}$

(2) $n \in \mathbb{N}$, ($n \geq 2$) $\forall U_1 \in \mathcal{D}, \dots, U_n \in \mathcal{D}$

(3) $\emptyset, X \in \mathcal{D}$

• elementele din \mathcal{D} s.m. **deschise**
complementarele lor s.m. **inchise**

Axiomele se reformulează:

(1) $\bigcap_{i \in I} F_i = \text{inchisă}$ ptr. orice familie de inchise $\{F_i\}_{i \in I}$

(2) $\forall n, \forall \{F_i\}_{i=1}^n$ inchise $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n F_i = \text{inchisă}$

(3) \emptyset, X inchise

~ Topologia uzuală ~

Topologia uzuală pe \mathbb{R} : prin def o submultime $\Delta \subset \mathbb{R}$ s.m. deschisă (în top uz.) dacă $\forall x \in \Delta$, $\exists \varepsilon > 0$ a. x $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \Delta$

$[0, 1]$ - deschis? NU! ptr. că $\nexists \varepsilon > 0$ a. x . $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \subset [0, 1]$

\mathbb{N} - deschisă? NU! ptr. că $\nexists \varepsilon > 0$ a. x . $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \subset \mathbb{N}$

Fie $A \subset X$ submulțime arbitrară. Un punct $x \in A$ s.m. **punct interior** lui A dacă există $\delta \in \mathbb{D}$ a. x. $x \in \delta \subset A$. Notăm $\overset{\circ}{A} = \{ \text{punctele interioare ale lui } A \}$
 Ex. $\cdot \{0,1\}^{\circ} = (0,1)^{\circ}$
 $\cdot \overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset \quad \cdot \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset \quad \cdot \overset{\circ}{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \emptyset$

Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic, $A \subset X$ submulțime. S.m. **închidere** a lui A (în raport cu topologia \mathcal{D}) mulțimea \bar{A} definită prin:

$$\bar{A} = \bigcap \bar{F} \quad (\bar{F} \text{ închis})$$

Prop: 1) \bar{A} este închisă

2) \bar{A} este "cea mai mică" mulțime închisă care conține A i.e. $\forall F \subset X$ închisă, dacă $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset F$

3) $\forall A, B \subset X$ avem că $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic $A \subset X$ submulțime. Familia de submulțimi ale lui A $\mathcal{D}_A = \{ A \cap D \mid D \in \mathcal{D} \}$, $\mathcal{D} = \text{deschis}$ este o topologie pe A numită **topologie indusă**.

Fie (X, \mathcal{D}) sp. topologic. O familie de deschise $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ s.m. **bază** pentru topologia dată dacă intersecția fiecărui nr. finit de elemente din \mathcal{B} este tot elem. al lui \mathcal{B} .

Fie $(X, \mathcal{D}_X), (Y, \mathcal{D}_Y)$ spații topologice. O funcție $f: X \rightarrow Y$ care are proprietatea că $\forall D \in \mathcal{D}_Y$ deschis, atunci $f^{-1}(D)$ deschis în X s.m. **funcție continuă**.

* $f: X \rightarrow Y$ funcție. $A \subset X$ sub $f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f(x) \mid x \in A \}$
 $B \subset Y$ sub $f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$

Subject:

Date:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f e continuă dacă $\forall x \in \mathbb{R}$ și $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.t. $\forall y, |y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Fie (X, Δ) sp. topologic. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir de elem. din X , $l \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la l dacă $\forall \Delta = \text{deschisă în } X \text{ cu } l \in \Delta, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 = m(\Delta)$ a.t. $x_n \in \Delta \forall n \geq m(\Delta)$

Homeomorfisme

Fie X și Y două spații topologice. O funcție $f: X \rightarrow Y$ s.m. homeomorfism dacă este bijectivă, continuu și inversa ei, f^{-1} - continuă.

Dacă între două spații topologice există un homeomorfism, spunem că ele sunt homeomorfe.

! Orice interval de forma (a, b) ; $a, b \in \mathbb{R}$ este homeomorf cu \mathbb{R}

Spații topologice produs

Fie (X, Δ_X) , (Y, Δ_Y) spații topologice. Definim pe $X \times Y$ o topologie numită topologie produs astfel:
o submulțime $U \subset X \times Y$ va fi numită deschisă dacă $\forall P = (x, y) \in U$, există un deschis $\Delta_1 \subset X$ (i.e. $\Delta_1 \in \Delta_X$) și un deschis $\Delta_2 \subset Y$ a.t. $(x, y) \in \Delta_1 \times \Delta_2 \subset U$.

secțiuni arbitrare de deschisă e deschisă

- 1) $p_1: X \times Y \rightarrow X, p_1(x, y) = x$; $p_2: X \times Y \rightarrow Y, p_2(x, y) = y$ continue
- 2) spațiile $X \times Y$ și $Y \times X$ sunt homeomorfe
- 3) fct. $S: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, m. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ def. prin $S(x, y) = x+y, \forall x, y \in \mathbb{R}$
 $m(x, y) = x-y, \forall x, y \in \mathbb{R}$

→ Sunt continue pe $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cu top. produs
 4) Prin inducție după n putem defini pe \mathbb{R}^n o topologie naturală $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ (topologia naturală pe \mathbb{R}^n)
 Funcțiile polinomiale pe \mathbb{R}^n sunt funcții continue

Spații metrice

Fie X o mulțime. S.n. metriza pe X o funcție

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1) "Inegalitatea triunghiului": $\forall x, y, z \in X$

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

2) "Simetrie": $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$

3) "Pozitiv definită": $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$ și $d(x, y) = 0$

$$\Leftrightarrow x = y$$

~ Topologia indusă de o metrică ~

Fie (X, d) spațiu metric, o submulțime $U \subseteq X$ s.m. deschisă dacă $U = \emptyset$ sau, $\forall x \in U, \exists \epsilon > 0$ a.î. $B(x, \epsilon) := \{y \in X / d(y, x) < \epsilon\}$ bila deschisă de centru x și rază ϵ .

Def: O topologie pe o mulțime X s.m. metrizabilă (sau topologie metrică) dacă există o metrică pe X ce o induce.

Def: Fie X un spațiu topologic, X s.m. separat Hausdorff (T_2) dacă $\forall x \neq y, x, y \in X, \exists U_1, U_2$ deschise a.î. $x \in U_1, y \in U_2$, și $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

? Orice topologie metrică e separată Hausdorff.?

Exemple de topologii care nu sunt separate Hausdorff:

- X infinită cu topologia cofinită
- X cu top. grossieră

Def: Fie $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ spații metrice. O funcție $f: X_1 \rightarrow X_2$ s.m. izometrie (pe imagini) dacă $\forall x, y \in X_1$ dacă $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$.

? Orice funcție care este izometrie (pe imagini) este injectivă.?

Def: Fie X submulțime, d_1, d_2 metrice pe X . Spunem că d_1, d_2 sunt echivalente dacă $\exists m > 0, \exists M > 0$ a.î. $\forall x, y \in X$ $m d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq M d_1(x, y)$.

? Dacă două metrice sunt echivalente, atunci topologiile generate de ele coincid.?

Def: Fie (X, d) spațiu metric, $x = \{x_n\}_{n \geq 1}$ s.r. de elemente din X . Spunem că x este convergent la un element $l \in X$ dacă $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$ a.î. $d(x_n, l) < \epsilon, \forall n \geq N(\epsilon)$.

Def: Fie (X, d) spațiu metric, $X = \{x_m\}_{m \geq 1}$ șir de elemente din X . Spunem că $\{x_m\}_{m \geq 1}$ este **șir Cauchy** (șir fundamental) dacă $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \text{ a. i. } \forall m, n \geq N(\varepsilon), d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Def: Un spațiu metric X s.m. **complet** dacă orice șir Cauchy din X este convergent.

Teoremă: Fie (X, d) un spațiu metric, atunci X poate fi completat în sensul că există un sp. metric (\bar{X}, \bar{d}) a. i.:

- 1) (\bar{X}, \bar{d}) este complet
- 2) \exists o fct $i: X \rightarrow \bar{X}$ care este izometrie pe imagine
- 3) $i(X)$ este densă în \bar{X} adică orice element din \bar{X} este egal cu limita unui șir de elemente din $i(X)$

~ Conexitate ~

Def: Un spațiu topologic nevid X s.m. conex dacă nu există doi deschiși $U_1, U_2 \subset X$:

- U_1, U_2 nevide, $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$
- disjuncti $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- $X = U_1 \cup U_2$

Def

Un spațiu topologic X este conex când singurele submulțimi ale lui X care sunt simultan închise, deschise sunt \emptyset și X .

Proprietate: Fie X spațiu topologic, $U_1, U_2 \in X$ deschiși, conecși. Dacă $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ atunci $U_1 \cup U_2$ e conexă.

! X, Y spații topologice, $f: X \rightarrow Y$ funcție continuă. Dacă $U \subset X$ deschis, conex atunci $f(U)$ conex (cu topologia indusă). !

Def: Fie X un spațiu topologic. S.m. **drum** în X o funcție continuă $f: [0, 1] \rightarrow X$ (pe $[0, 1]$ considerăm topologia usuală).

Def: Un spațiu topologic X s.m. conex prin arce dacă orice $x \neq y$ există un drum f a.ș. $f(0)=x, f(1)=y$.

Proprietate: Orice spațiu topologic conex prin arce e conex.

$\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ și orice bilă în \mathbb{R}^n sunt mulțimi conexe.?

Corolar: O submulțime deschisă a lui \mathbb{R} este conexă (=) este interval.

~ Compacitate (în spațiu metric) ~

Def: Fie X un spațiu topologic. X s.m. **quasi-compact** dacă oricare ar fi $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ U_α deschise în X a.ș. $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ există o submulțime finită $J \subset I$ a.ș. $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$.

Terminologie: \mathcal{U} s.m. **acoperire deschisă** a lui X . O subfamilie $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$, $J \subset I$ a.ș. $X = \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$ s.m. **subacoperire** a lui \mathcal{U} .

Deci, un spațiu este quasi-compact dacă din orice acoperire cu deschise a lui X pot extrage o subacoperire finită.

Def: Un spațiu topologic X s.m. **compact** dacă e **quasi-compact** și **separat Hausdorff**.

? Topologia cofinită e quasi-compactă, dar nu și compactă pentru că nu e separată Hausdorff.!

Proprietate: $f: X \rightarrow Y$ fct. cont între spații separate Hausdorff. Dacă X este compact, atunci $f(X)$ este compact.

Rem: În general, funct. continue nu întorc compactii în compacti (o funcție ce întoarce compactii în compacti s.m. funcție proprie).

Proprietate: (X, d) sp. metric; $K \subset X$ compact atunci K este:

- mărginit, adică \exists o bilă $B_x(\mathbb{R})$ ($x \in X, R > 0$) a.ș. $K \subset B_x(\mathbb{R})$
- închis (în top indusă de d)

(X, d) sp. metric, $K \subset X$ închis și mărginit $\Rightarrow K$ compact! **NU!**

- Topologie -

Propoziție: Fie X și Y sp. topologice compacte. Atunci $X \times Y$ (cu topologia produs) e compact.

Fie $V_x = \bigcap_{i \in J_x} p_{Y,1}(U_i)$, atunci $\{V_x\}_{x \in X}$ acoperire a lui X cu deschise. Cum X compact pot alege $x_1, \dots, x_n \in X$ a. i. $\{V_{x_i}\}$ acoperire deschisă pentru X .

Deci $X \times Y$ - reuniunea deschisilor $\{U_i\}_{i \in J_x}$ unde $J = \bigcup_{i=1}^n J_{x_i}$

Teorema: Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval închis și mărginit $I = [a, b]$. atunci I e compact.

Teorema (Heine-Borel) O submulțime a lui \mathbb{R}^n ($n \geq 1$ arbitrar) e compactă (\Rightarrow) este închisă și mărginită.

Teorema ("Criteriul general de compactitate în spații metrice")
Un sp. metric este compact (\Rightarrow) este complet și uniform mărginit
adică pentru orice $\varepsilon > 0$ poate fi acoperit cu un nr. finit de bile de rază ε .

X mulțime. A defini o relație de echivalență pe X este totuna cu a defini o partiție a lui X , adică o descompunere a lui $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ cu $X_i \cap X_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

(Partiție \Rightarrow rel. de echivalență $x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in I$ a. t. $x, y \in X_i$)

Definiție: Fie X un spațiu topologic, " \sim " o relație de echivalență pe X și X/\sim = mulțimea claselor de echivalență modulo \sim .

Fie $p: X \rightarrow X/\sim$ = **proiecția canonică**

Definim pe X/\sim o topologie astfel: $U \subset X/\sim$ deschis ($\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow}$) $p^{-1}(U) \subset X$ e deschis.

Exemple de spații factor:

1) Fie $X = [0, 1]$ (cu top. uzuală). Definem \sim pe X astfel:
Clasele de echivalență sunt:

- submulțimile de forma $\{x\}$, $x \in (0, 1)$
- submulțimea $\{0, 1\}$

2) Colapsarea unui subspațiu: $X = \mathbb{R}^n$ topologie arbitrară,
 $Y \subset X$ submulțime. Definesc o partiție a lui X via o rel. de
echivalență: $x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, & \text{dacă } x, y \notin Y \\ x \sim y, & \text{dacă } x, y \in Y \end{cases}$

Vom nota X/Y sp. top. factor

De pildă, la ex(1), $X = [0, 1]$, $Y = \{0, 1\}$

Fie $X = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, 0) \leq 1\}$ (discul de rază = 1)

$Y = \{P \in X \mid d(P, 0) = 1\}$ (cercul de rază = 1)

$X/Y \cong$ sferă

3) Fie $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Definem \sim astfel $(x, 0) \sim (x, 1)$

$\forall x \in [0, 1]$

$X/\sim \cong$ cilindru

CURS 7

Teorema: ("Teorema Banach de punct fix"): Fie (X, d) spațiu metric complet, $f: X \rightarrow X$ funcție. Dacă $\exists k \in (0, 1)$ a. \bar{x} . $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y) \forall x, y \in X$, atunci f are un punct fix adică $\exists x_0 \in X$ a. \bar{x} . $f(x_0) = x_0$. În plus, punctul fix al lui f este unic.

Remarca: O funcție cu prop. de mai sus (*) s.n. contractivă.