test seminar - 20%

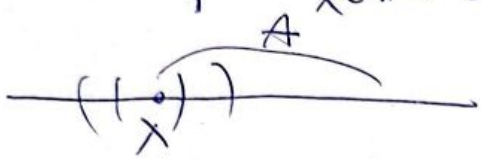
ANALIZĂ I - seminar

Din test

pct de acumulare → în orice vecinătate a sa găsesc cel puțin un elem. al mulțimii

(1.) $A' = [-2, 2]$ (mulțimea pct de acumulare)

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ este pct de acumulare dacă $\forall V \in \mathcal{V}(x)$,



(2.) $x_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \dots + \frac{1}{1+2^n}$ marg?

$\alpha \le x_n \le \beta, \forall n$

$0 \le x_n \le \beta$ ← sir cu termeni poz

$x_n \le \boxed{?}$ ~~$x_n \le 1$~~

mărginim cu sume telescopice sau pr. geom.

Pr geom de $q = \frac{1}{2}$

$$x_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \dots + \frac{1}{1+2^n} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \le 1$$

$\Rightarrow x_n \le 1 \Rightarrow 0 < x_n \le 1$

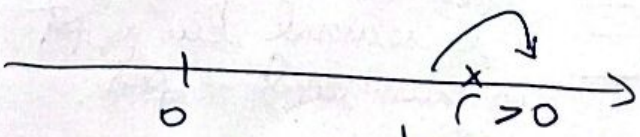
(3.) $x_n = \sqrt{n+1} - 1, n \in \mathbb{N}$. Dem $\boxed{\text{cu def}}$ de șirul x_n are limită

Dacă fac cu def nu am voie cu Weierstrass

ex. $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ este convergent dar nu este monoton

$\lim_{x \to \infty} x_n = \infty$

$x_n \ne 0$ → rong



$\lim_{x \to \infty} x_n = \infty$ dacă $\forall c > 0 \ \exists N_c \in \mathbb{N}$ a.î.

$x_n \ge c, \forall n \ge N_c$

fie $c > 0$ a.î. ~~$x_n \ge$~~ $x_n \ge c$

$N_c = ?$

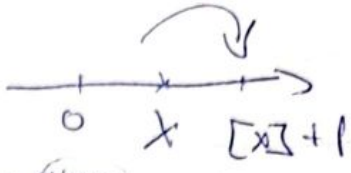
$N_c \in \mathbb{N}$

$\Updownarrow$

$\sqrt{n+1} - 1 \ge c \Leftrightarrow \sqrt{n+1} \ge c+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n+1 \geq (\sqrt{c+1})^2 \Rightarrow n = (\sqrt{c+1})^2 - 1$

$N_c = [\ ] + 1$



$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{mărg}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\sin x}{1+\cos x}$ $\nexists$

sin și cos nu au limită la ∞, deci nu avem voie să pun =, trebuia să le ia pe rând să verific că $\exists$ lim.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} = 1$

(4.) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ la derivare facem cu def!! ptcă va da $\frac{1}{2}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$ nu egalez cu 0 pt că nu am cum să scot pex luăm o fct. g

$f'(x) = 0 \Rightarrow x - 1 - x\ln x = 0$

fie $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 1 - x\ln x$

$g'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0		1		∞
$g'(x)$		+ + +	0	− − −	
$g(x)$		↗	0	↘	

$\Rightarrow$ ec. $g(x) = 0$ are sol unică $\boxed{x=1}$!! trebuia demonstrat

$\Rightarrow f'(x) = 0$, $x = 1$

x	0		1		∞
$f'(x)$		− − −	$\frac{1}{2}$	− − −	
$f(x)$					

semnul se raportează la semnul lui g pt că numitorul e poz.

(6.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x$

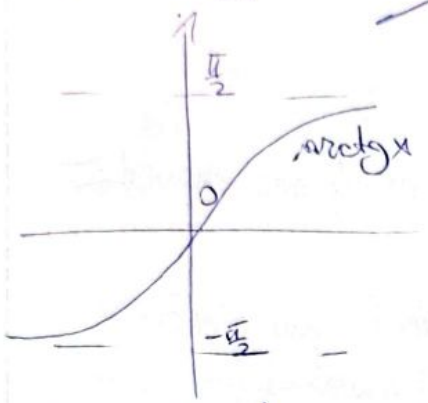
$x_1 = 0$ se face cu weierstrass

$x_{n+1} = f(x_n), \forall n$ $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ str $\uparrow$ pe $\mathbb{R}$ (*) De văzut ce am făcut la seminar cu fct

x	$-\infty$								∞
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	$-\frac{3\pi}{2}$								$\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$



$\lim_{x\to-\infty}(\text{arctg}\,x - \text{arctg}\,x) = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}$

f cont $\quad f$ str $\uparrow \quad \text{Im} f = \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x_n) = x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (mărginirea)

$x_1 = 0 \qquad x_2 = \text{arctg}\,0 - \text{arctg}\,0 = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

Arăt că (x_n) s↓ $\qquad$ Arătăm prin inducție

$P(n): x_{n+1} < x_n \qquad$ Presupun $P(n)$ ⓐ și demonstrez $P(n+1)$ ⓐ

$P(n+1)$: Aplic f inegalității

$f(x_{n+1}) < f(x_n)$

$\mapsto P(n+1)$ ⓐ $\Rightarrow P(n)$ ⓐ

$f(x_{n+1}) = x_{n+2} \qquad f(x_n) = x_{n+1} \Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1}$

$\Rightarrow (x_n)$ monoton și mărg $\xrightarrow{\text{Weierstrass}}$ (x_n) convergent

---

Seminar 2 mult. marg. Majoranți, minoranți, sup, inf, max, min.

$(X, \leq)$

$A \subseteq X, A \neq \emptyset$

$(\mathbb{R}, \leq)$

$A = (0, 4] \cup \{5\}$

max

majoranți ai mult.: $[5, \infty)$

minoranți $\longrightarrow (-\infty, 0]$

mult. A nu are minim.

supremum = cel mai mic majorant $\Rightarrow \sup A = 5$

inf = cel mai mare ~~majorant~~ minorant

inf $A = 0$

$A =$ mult. marg

$B = (2, \infty) \Rightarrow \nexists \sup B$ (pe $\mathbb{R}$)

în $\overline{\mathbb{R}}$ $\exists$ $\Rightarrow \sup B = \infty$

O mulțime complet ordonată $\rightarrow$ orice mulțime nevidă să aibă un prim elem.

<u>Obs</u> $\nexists \max A \Rightarrow \sup A$ numere nu e neap-
$\min A \Rightarrow \inf A$ valabil

<u>Obs</u> $\exists x = \sup A \in X \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \cdot\ a \le x, \forall a \in A, \ x = \text{majorant al lui } A \\ \cdot\ \forall x' \in X \text{ a.î. } a \le x', \forall a \in A \Rightarrow \\ \Rightarrow x \le x' \end{cases}$ orice alt majorant este $> x$

$x =$ cel mai mic majorant

$\exists\, y = \inf A \in X \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \cdot\ y \le a, \forall a \in A \ (y \text{ minorant al mult. } A) \\ \cdot\ \forall y' \in X \text{ cu } y' \le a, \forall a \in A \Rightarrow \\ \Rightarrow y' \le y, \ y = \text{cel mai mare minorant} \end{cases}$

$(X, \le)$ <u>bine</u> ordonată de $\forall A \subseteq X, A \ne \emptyset \Rightarrow$

X cu relația de ordine

$\Rightarrow \exists \min A$

Demonstrăm că $\exists \min A$

Ex: $(\mathbb{N}, \le)$ bine ordonată

Dacă $0 \in A$ <u>0 este min</u>

<u>Sol</u>: fie $A \subset \mathbb{N}$, ~~$A \not\subset$~~ $A \ne \emptyset$

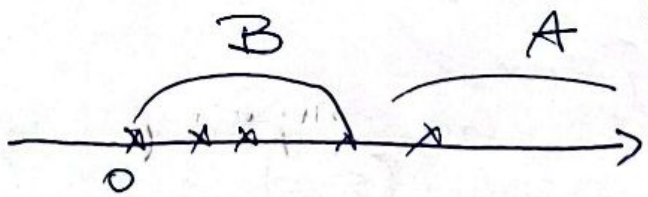
· Dc $0 \in A \Rightarrow 0 = \min A \Rightarrow$ ✓

· Dc $0 \notin A$

Fie $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x < a, \forall a \in A \}$

Evid $0 \in B \Rightarrow B \ne \emptyset$

evident



Arăt că $\exists\, b \in B$ a.î. $b+1 \notin B$:

Dacă $\forall b \in B \Rightarrow b+1 \in B$

cum $0 \in B \Rightarrow B = \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$ ↯

Deci $\exists\, b \in B$ a.î. $b+1 \notin B$

$\left.\begin{array}{l} b = a, a \in A \\ a, b \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow b+1 \leq a, \forall a \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $b+1$ este minorant al mult. A

$\boxed{b+1 \notin B}$ $\exists\, a_0 \in A$ a.î. $b+1 \geq a_0$ mărginirea din B pe dos

$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} b+1 \leq a_0 \\ b+1 \geq a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow b+1 = a_0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \boxed{b+1 \in A} \\ b+1 \text{ este minorant al lui } A \end{array}\right\} \Rightarrow$

$b+1$ este $\min A$

$\Rightarrow$

(☆) tip de ex pt test la seminar

(☆) Determinați (dacă $\exists$) inf, sup: $\boxed{\text{cu DEF}}$

1) $A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$ $\mathbb{N}$ la ea prin convenție și dacă ia cu 0 face $\mathbb{N} \cup \{0\}$ $\{1, 2, \dots\}$ deci $\mathbb{N}^*$

$A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^*, m < 2n \right\} \subseteq \mathbb{R}$

2) $B = \left\{ \frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$

3) $C = \left\{ \frac{m}{n} + n - \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\} \subseteq \mathbb{R}$

4) $D = \left\{ \frac{m}{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\} \subseteq \mathbb{R}$

5) $E = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{2n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

6) $F = \left\{ \frac{m}{|m|+n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \subseteq \mathbb{R}$

---

rezolvări EX1: intuim pe axă cine e inf și sup

$\inf A = 0$ $\sup A = 2$

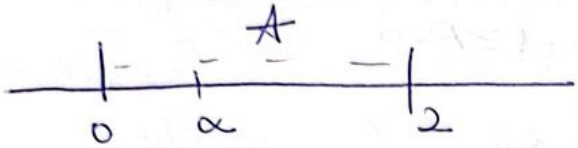
arătăm $\mid m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$

a arăt că 0 este minorant $\rightarrow$ toate elem. mult. sunt > 0

cum $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow$ 0 minorant

dacă minorantul $\in A \Rightarrow$ este minim $\Rightarrow$ este infimum
Sau arătăm că ~~fiind parte~~ este cel mai mare minorant
$0 \notin A \Rightarrow 0$ este cel mai mare minorant

redactare:



Aici vrem să găsim

$n \le k$ de (Alg n_0)

$n_0 = [k]+1$

$k \ge 0 \Rightarrow n_0 = [k]+1$

$k < 0 \Rightarrow n_0 = 0$

RA Pp. că $\exists\, \alpha > 0$ minorant al mult. $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{m}{n} \ge \alpha \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*,\ m < 2n$

trb să particularizez pe m

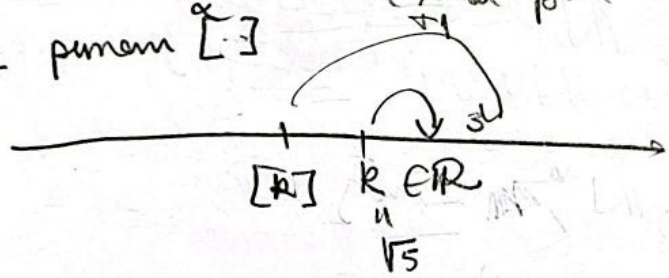
nu contă ce m iau,

pt $m=1 \Rightarrow \frac{1}{n} \ge \alpha \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \le \frac{1}{\alpha} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

de (Alg $n_0 = [\frac{1}{\alpha}]+1$)

$\alpha > 0 \quad \frac{1}{\alpha} > 0$ nu mai pun modul

Dc punem $[\cdot]$



trb să numesti un nr din dr $\in \mathbb{N}$

Arăt că $\sup A = 2 \Rightarrow$ arăt că e majorant

$m < 2n \mid : n,\ m, n \in \mathbb{N}^*$

$\frac{m}{n} < 2 \Rightarrow 2$ majorant al mult. A

pt că e valabil doar la $m = 2n$ și am $m < 2n$

$\hookrightarrow 2 \notin A \Rightarrow$ arăt că 2 este cel mai mic majorant

Reducere la absurd

RA Pp. că $\exists\, \alpha < 2$, maj al mult. $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{m}{2n} \le \alpha,\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*,\ \boxed{m < 2n}$

aș putea să iau $m = 2n-1$

Alg $n_0 \in \mathbb{N}^*$

$m_0 = \underbrace{2n_0 - 1}_{\in \mathbb{N}^*} < 2n_0$

$\Rightarrow \frac{m_0}{n_0} \in A \Rightarrow \frac{m_0}{n_0} \le \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2n_0 - 1}{n_0} \le \alpha \Rightarrow 2 - \frac{1}{n_0} \le \alpha \Rightarrow \frac{1}{n_0} \ge 2 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow n_0 < \frac{1}{2-\alpha}$ ↯

(Alg $n_0 = \left[\frac{1}{2-\alpha}\right]+1$) $\Rightarrow 2$ cel mai mic majorant

$\Rightarrow 2 = \sup A$

2) $B = \left\{ \frac{m}{1+m+n} \,\middle|\, m,n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$

$\inf B = 0$ demonstrăm. arăt o minorant

$\frac{m}{1+m+n} \geq 0$ pt $m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0$ este minorant pt B

pt $m=0$ $\Rightarrow 0 \in B$ $\Rightarrow$ 0 este min $B \Rightarrow 0 = \inf B$

$\sup B = 1$ Arăt că 1 este ~~mag~~ maj

$m < m+1 \ \forall m \in \mathbb{N}$

$m < m+n+1 \ \forall m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{m}{m+n+1} \leq 1 \ \forall m,n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 1$ este majorant al mulțimii

$1 \notin B \Rightarrow$ trb să arăt că este cel mai mic majorant

Presupunem $\exists\, \alpha \leq 1$ majorant al lui $B \Rightarrow \frac{m}{1+m+n} \leq \alpha$

$\forall m,n \in \mathbb{N}$, dacă luăm pt m nu merge

pt $n=1 \Rightarrow \frac{m}{2+m} \leq \alpha \ \forall m \in \mathbb{N}$

$m \leq \alpha(2+m) \Rightarrow m(1-\alpha) \leq 2\alpha \Rightarrow m \leq \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ ↯ $\alpha > 1$, >0

(pt a putem lua pe $n_0 = \left[\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right]+1$

$\Rightarrow 1$ este cel mai mic majorant) Pp falsă

$\Rightarrow \sup A = 1$

3) $C = \left\{ \frac{m}{n} + 4\frac{n}{m} \,\middle|\, m,n \in \mathbb{N}^* \right\} \subseteq \mathbb{R}$ dam valori pe acolo și vedem care e cel mai mic

$\inf C = 4$ Arăt că e minorant

inegalitatea mediilor $M_a \geq M_g$

$\frac{m}{n} + 4\frac{n}{m} \geq 2\sqrt{\frac{m}{n} \cdot 4\frac{n}{m}} = 4$

(sau) $\frac{m}{n} + 4\frac{n}{m} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{m^2+4n^2}{mn} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \frac{(m-2n)^2}{nm} = 0$ (A)

pt $m=2,\ n=1 \Rightarrow u \in C \Rightarrow u = \min C \Rightarrow u = \inf C$

Arăt arătăm

$\sup C = ?$ $\nexists \sup C$ în $\mathbb{R}$ (merge spre la infinit)

arăt că nu are minim majorant

Pp că $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $\frac{m}{n} + u\frac{m}{n} \le \alpha\ \forall m,n \in \mathbb{N}^*$

facem oricât de mare, luăm ~~m~~ $n=1$

pt $m = [\alpha]+1$, $n=1 \Rightarrow \frac{[\alpha]+1}{1} + \frac{u}{[\alpha]+1} \le \alpha$ absurd

$\Rightarrow \nexists \sup C$

5) $E = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{2n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

dacă $n=1 \Rightarrow \boxed{\inf E = \frac{1}{2}}$ Demonstrez

pt $n=1 \Rightarrow \frac{1}{2} \in E$

pt $n=2 \Rightarrow 2+\frac{1}{4} \ge 2 > \frac{1}{2}$

pt $n \ge 3 \Rightarrow \underbrace{n}_{\ge 3} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{2n}}_{\in(-1,1)} \ge 2 > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2} \in E$, $\frac{1}{2}$ este și minorant și minim $\Rightarrow \inf E = \frac{1}{2}$

$\sup E = \infty$ Arăt că E nu are nicăieri maj

$\frac{(-1)^n}{2n} \in (-1,1)$, n poate fi oricât de mare

Pp. că $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, α maj. al mult. E $\Rightarrow$

$\Rightarrow n + \frac{(-1)^n}{2n} \le \alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

pt că Alg $n_0 = [\alpha]+2$ (pt a scad ceva cel mult 1) să contrabalanseze fr

$\Rightarrow \nexists$ maj $E \Rightarrow \sup E = \infty$

Ex2 Fie $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ mărginite nevide De arătat

Atunci $\inf B \overset{1}{\le} \inf A \overset{2}{\le} \sup A \overset{3}{\le} \sup B$

(A) B

Sol: $A, B \subseteq \mathbb{R}$ marg $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \sup, \inf \in \mathbb{R}$

(2) evidentă $\inf A \le \sup A$

(1) fie $x = \inf B \Rightarrow x \le b, \forall b \in B$ | $\Rightarrow x \le a \ \forall a \in A$

dar $A \subseteq B$ (ip) $\Rightarrow x =$ minorant al mult. $A \Rightarrow$

$\Rightarrow x \le \inf A$ (1) demonstrată $\Rightarrow \inf B \le \inf A$

(3)

Ex3 Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ mărg nevidă $\quad -A = \{-a \mid a \in A\}$

Atunci: 1) $\inf(-A) = -\sup A$

2) $\sup(-A) = -\inf A$

1) ~~Not~~ fie $x = \sup A \ /\cdot(-1) \Rightarrow x \ge a, \forall a \in A$ $/\cdot(-1)$

$-x \le -a, \forall a \in A$

$\alpha = \inf(-A)$

~~$\Rightarrow -x = -\sup A$~~ $\Rightarrow -x$ este minorant al $-A$

$\Rightarrow -x \le \alpha$ (i)

$\alpha = \inf(-A) \Rightarrow \alpha \le -a \ |\cdot(-1), \forall a \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow -\alpha \ge a, \forall a \in A \Rightarrow -\alpha$ majorant al mult. A

$\Rightarrow -\alpha \ge x \ |\cdot(-1) \Rightarrow \alpha \le -x$ (ii)

(i) și (ii) $\Rightarrow -x = \alpha \Rightarrow \inf(-A) = -\sup A$

2) Aplic relația de la 1) pt $(-A)$:

$\inf(A) = -\sup(-A) \ |\cdot(-1) \Rightarrow -\inf(A) = \sup(-A)$

T: Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mărg.

Atunci $\min\{\underbrace{\inf A}_{x}, \underbrace{\inf B}_{m}\} = \inf\{A \cup B\} \le \sup(A \cup B) =$

$= \max\{\underbrace{\sup A}_{y}, \sup B\} = n$

$x \le m$ sau $x \ge m$

pp $x \le m \Rightarrow \min\{x, m\} = x \rightarrow$ Arăt că $x = \inf(A \cup B)$

Obs Principiul intervalelor nevide închise, incluse $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ax. Cantor

Principiul

$\left((I_n)_n \text{ șir de intervale nevide cu } I_n = [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n, \forall n \Rightarrow \bigcap_{n \ge 1} I_n \ne \emptyset \right)$

Ax. Cantor

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$, nevidă, mărg. ~~mag~~ superior, are supremum.

Sol

Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A mărg. superior. Vrem $\exists \sup A \in \mathbb{R}$

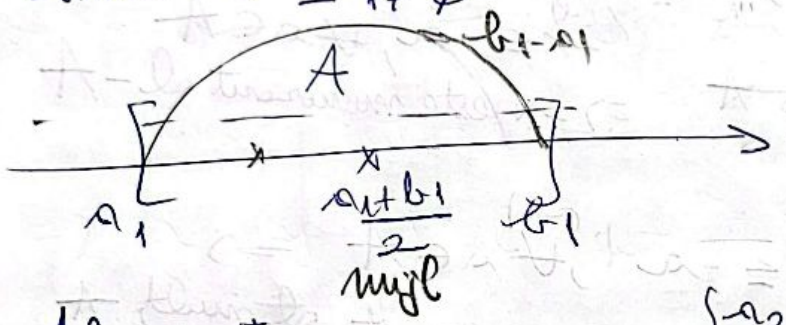
$\Rightarrow$ fie b_1 = majorant al mult. A

Fie $I_1 = [a_1, b_1]$, unde a_1 nu este majorant al mult. A

(desigur pot găsi a_1 astfel: $A = \{x\}$, $a_1 = x-1$ se duce pe ultima

dacă $\exists\, x < y$, $x, y \in A$ pot alege $a_1 = x$)

Evident că $I_1 \neq \emptyset$



Aleg $I_2 = [a_2, b_2]$ unde
$$\begin{cases} a_2 = a_1 \\ b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \text{ dacă } \frac{a_1+b_1}{2} \text{ mag.} \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \text{ dacă } \frac{a_1+b_1}{2} \text{ nu e majorant} \\ b_2 = b_1 \end{cases}$$

$I_2 \neq \emptyset$, $I_2 \subset I_1$

$b_2 - a_2$

$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_2}{2}$

Construim astfel inductiv un șir $(I_n)_n$ cu prop.

$I_n = [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a_n nu e maj. al lui A

b_n este majorant al lui A

- $I_n \neq \emptyset$
- $I_{n+1} \subseteq I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$

- Demonstrez că $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{\alpha\}$ se reduce la un pct

Principiul intervalelor $\Longrightarrow$ $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$

(RA) TT. că $\exists \underbrace{x<y}_{y-x>0}$ a.î. $x, y \in \bigcap_{n\geq 1} I_n$

Ax. lui Arhimede $\forall a, b \in \mathbb{R}, b>0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $nb > a$

(**)

$\xrightarrow{(*)} \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $(b_1-a_1) < n_0(y-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y-x > \frac{b_1-a_1}{n_0} \geq \frac{b_1-a_1}{2^{n_0-1}} = b_{n_0}-a_{n_0}$

Arăt că $n \leq 2^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(**) $P(n): n \leq 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$P(1): 1 \leq 2^0 \quad 1 \leq 1$ (A)

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Presupun $P(n)$ (A) și demonstrez $P(n+1)$

Arăt $n+1 \leq 2^n$

$n \leq 2^{n-1} \mid +1 \Rightarrow n+1 \leq 2^{n-1}+1 \leq 2^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

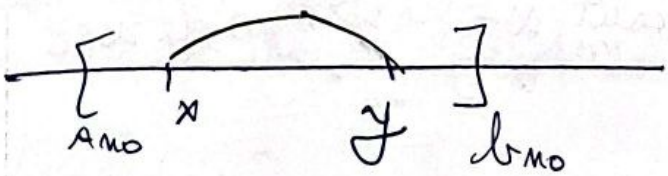
$n+1 \leq 2^{n-1}+1 \leq 2^{n-1}+2^{n-1} \Rightarrow n+1 \leq 2^{n-1}\cdot 2 \Rightarrow n+1 \leq 2^n \Rightarrow$

$\Rightarrow P(n+1)$ (A) $\Longrightarrow P(n)$ (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow y-x > b_{n_0}-a_{n_0}$ (i)

dar $y, x \in \bigcap_{n\geq 1} I_n \Rightarrow y, x \in I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$

$\Rightarrow y-x \leq b_{n_0}-a_{n_0}$ (ii)



$\xrightarrow{(i) \text{ și } (ii)}$ $y-x > b_{n_0}-a_{n_0}$ și $y-x \leq b_{n_0}-a_{n_0}$

$\Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} I_n = \{\alpha\} \Rightarrow \bigcap$ se reduce la un punct

• Dem că $\sup A = \alpha$

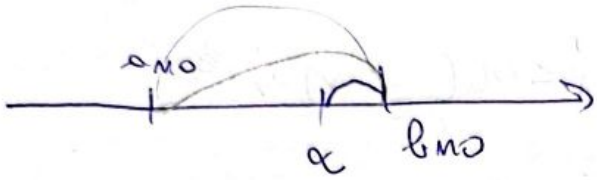
• arăt că α e maj și cel mai mic dintre maj

Arăt că α = majorant al mult. A :

Pp că α nu e majorant al mult. A $\Rightarrow \exists\, a_0 \in A$ a.î.

$a_0 > \alpha \Rightarrow a_0 - \alpha > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $b_1 - a_1 < (a_0 - \alpha)\cdot n_0$

$\Rightarrow a_0 - \alpha > \dfrac{b_1 - a_1}{n_0} \underset{(*)}{\geq} \cancel{\dfrac{b_1 - a_1}{2^{n_0}-1}}\ \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n_0-1}} = b_{n_0} - a_{n_0}$



$\boxed{b_{n_0} - a_{n_0} \geq b_{n_0} - \alpha}$

$\alpha \in I_{n_0}$

$a_0 - \alpha > b_{n_0} - a_{n_0} \geq b_{n_0} - \alpha \Rightarrow a_0 > b_{n_0} \Rightarrow \underline{b_{n_0} < a_0}$

Dar b_{n_0} majorant al mult. A $\Rightarrow$

$\Rightarrow b_{n_0} \geq a, \forall a \in A \Rightarrow b_{n_0} \geq a_0$, $a_0 \in A$ $\Rightarrow \dfrac{b_{n_0} \geq a_0}{b_{n_0} < a_0}$ ↯

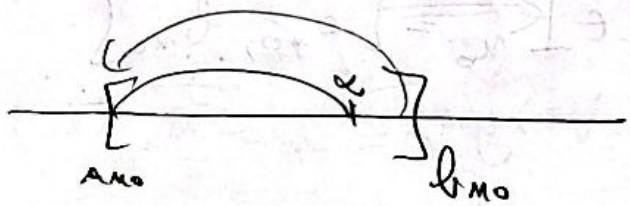
$\Rightarrow \alpha$ majorant al mult. A

• Arăt că α este cel mai mic majorant al lui A

RA Pp. că $\exists\, \alpha' \in \mathbb{R}$ a.î. α' majorant al mulțimii A cu $\alpha' < \alpha \Rightarrow \alpha - \alpha' > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î.

a.î. $b_1 - a_1 < n_0(\alpha - \alpha') \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha - \alpha' > \dfrac{b_1 - a_1}{n_0} \underset{(**)}{\geq} \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n_0-1}} = b_{n_0} - a_{n_0}$



caut $\alpha -$ ca să scap de α

$b_{n_0} - a_{n_0} \geq \alpha - a_{n_0}$

$\alpha - \alpha' > \alpha - a_{n_0} \Rightarrow -\alpha' > -a_{n_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\alpha' < a_{n_0}}$ majorant al mulțimii A

$\Rightarrow a_{n_0}$ este cel maj. al mult. A ↯ din construcție, a_{n_0} nu e majorant) $\rightarrow \alpha$ este cel mai mic majorant al lui A

Deci $\alpha = \sup A \Rightarrow$ gata

Seminar 3 Mulțimi finite, numărabile. Fct. bij. bijectivă $f: \mathbb{N} \to M$

1) Fie $M = \left\{ \frac{n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ Dem că M e numărabilă

fie $f: \mathbb{N} \to M$ $f(n) = \frac{n}{n^2+1}$. Arăt că f bijectivă

f inj: dacă ~~pt $\forall x_1, x_2 \in$~~ pt $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

Fie $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ cu $f(n_1) = f(n_2)$

$\Rightarrow \frac{n_1}{n_1^2+1} = \frac{n_2}{n_2^2+1} \Rightarrow n_1(n_2^2+1) = n_2(n_1^2+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow n_1 n_2^2 + n_1 = n_2 \cdot n_1^2 + n_2 \Rightarrow n_1 n_2^2 + n_1 - n_2 \cdot n_1^2 - n_2 = 0$

~~$n_1(n_2^2+1) - n_2(n_1^2+1)$~~ $n_1 n_2 (n_2 - n_1) + n_1 - n_2 = 0$

$\Rightarrow (n_1 - n_2)(1 - n_1 \cdot n_2) = 0 \Rightarrow n_1 = n_2$

$1 - n_1 \cdot n_2 = 0 \Rightarrow n_1 \cdot n_2 = 1$ $\Rightarrow$
$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n_1 = n_2 = 1$

$n_1 = n_2 \Rightarrow f$ injectivă (1)

surj: $\forall y \in M$, $\exists x \in \mathbb{N}$ a.î. $f(x) = y$ (De dem)

Fie $y \in M \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. ~~$f(n_0) =$~~ $y = \frac{n_0}{n_0^2+1}$

Alg pe $x = n_0 \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow f$ surjectivă (2) (1) și (2) $\Rightarrow$

f bijectivă $\Rightarrow M$ este numărabilă

2) Fie $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m, n \text{ impare} \right\}$ și

$G = Q_0 \times \mathbb{Z}$

$f: G \to \mathbb{Q}^*$, $f((q,k)) = q \cdot 2^k$, $\forall (q,k) \in G$

Dem că f bijectivă

f inj: dacă: ~~$\forall x_1, x_2 \in G$, cu $f(x_1) = f$~~

$\forall (q_1, k_1), (q_2, k_2) \in G$, cu $f((q_1, k_1)) = f((q_2, k_2)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (q_1, k_1) = (q_2, k_2)$ → de demonstrat

Fie $(q_1, k_1), (q_2, k_2) \in G$ cu $f(q_1, k_1) = f(q_2, k_2)$

$\Rightarrow q_1 \cdot 2^{k_1} = q_2 \cdot 2^{k_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} \cdot 2^{k_2 - k_1}$ → par sau 1

$\frac{q_1}{q_2}$ impar / impar ⇒ se. pot reduce doar la 1

$\Rightarrow \begin{cases} 2^{k_2-k_1} = 1 \\ \frac{q_1}{q_2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ q_1 = q_2 \end{cases} \Rightarrow (q_1, k_1) = (q_2, k_2) \Rightarrow f$ inj (1)

$q \cdot 2$

f surj dacă $\forall y \in \mathbb{Q}^*$, $\exists (q, k) \in G$ a.î. $f((q, k)) = y$

Fie $y \in \mathbb{Q}^*$, $\Rightarrow y = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $(a, b) = 1$

↳ a și b sunt impare sau a și b de paritate dif

1) a, b = impare

Alg $q = \frac{a}{b}$; $k = 0 \Rightarrow f((q, k)) = y$

$q \cdot 2^k = \frac{a}{b}$

$\frac{i}{i}$

2) Dacă a = par, b = impar $\quad q = \frac{\text{impar}}{\text{impar}}$

$\Rightarrow a = 2^{n_0} \cdot a'$ → impar $\quad n_0 \in \mathbb{N}^*$, a' impar

$\Rightarrow$ Alg $q = \frac{a'}{b}$ și $k = n_0 \Rightarrow f((q, k)) = y$

3) Dacă a = impar și b = par

↳ $b = 2^{n_0} \cdot b'$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$

b' impar $\Longrightarrow q = \frac{a}{b'}$, $k = -n_0 \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow$

$f((q, k)) = y$ $\quad \frac{a}{2^{n_0} \cdot b'}$

$\frac{i}{i} \leftarrow q \cdot 2^{k'}$

$\Rightarrow f((q, k)) = y \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ surjectivă (2)

și (2) $\Longrightarrow f$ este bijectivă

3.) Fie $f: \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

Atunci f bij (card $\mathbb{R}$ = card $(-1, 1)$)

Sol I $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1}, & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x}{-x+1} = 0$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x+1} = 0$

$f(0) = 0$

→ f cont în $x = 0$

f cont pt $(-\infty,0)$ și pe $(0,\infty)$ din op. cu fct. elem.

$\Rightarrow f$ derivabilă pe ramuri

$$f'_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x}{(-x+1)x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{-x+1}=1$$

$$f'_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{(x+1)\cdot x}=1$$

$f'_s(0)=f'_d(0)=1$

$\Rightarrow f$ deriv în 0

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2}, & x>0\\[2ex] \dfrac{1}{(1-x)^2}, & x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Evident $f'(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ str $\uparrow \Rightarrow f$ injectivă

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x+1}=-1$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$, f cont pe $\mathbb{R}$

$\operatorname{Im} f=(-1,1)=$ codom $\Rightarrow f$ surjectivă $\Longrightarrow f$ bijectivă

Sol2 cu def: f inj dacă $\forall x_1,x_2 \in\mathbb{R}$, cu $f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow x_1=x_2$

Fie $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ cu $f(x_1)=f(x_2)$ luăm pe cazuri pt că sunt ramuri

pt $x_1,x_2\geq 0\Rightarrow \dfrac{x_1}{x_1+1}=\dfrac{x_2}{x_2+1}\Rightarrow x_1x_2+x_1=x_1x_2+x_2\Rightarrow x_1=x_2$

$x_1,x_2<0\Rightarrow \dfrac{x_1}{1-x_1}=\dfrac{x_2}{1-x_2}\Rightarrow x_1=x_2$

$x_1\geq 0,\ x_2<0\Rightarrow \dfrac{\overset{\geq 0}{x_1}}{\underset{\geq 0}{x_1+1}}=\dfrac{\overset{<0}{x_2}}{\underset{>0}{1-x_2}}<0$ ↯ nu se potrivește ipoteza

f surjectivă dacă $\forall\ y\in(-1,1)\ \exists x\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x)=y$

Fie $y\in(-1,1)$

$x\geq 0$: $\dfrac{x}{x+1}=y\Leftrightarrow x=xy+y\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{1-y}\geq 0$

y	-1		0		1
y	$-$	$-$	0	$+$	
$1-y$	$+$	$+$		$+$	0
$\frac{y}{1-y}$		$-$	0	$+$	

~~pt $y\in(-1,0]$~~ pt $y\in[0,1)$, $\exists x=\dfrac{y}{1-y}$

pt $y \in [0,1) \Rightarrow \exists\, x = \frac{y}{1-y}$, $x \geq 0$ cu $f(x) = y$

pt $y \in (-1,0)$ am găsit $x = \frac{y}{1+y} < 0$ a.î. $f(x) = y$

$x < 0$: $\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = y - xy \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$

y	-1				0					1
y		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$1+y$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$
$\frac{y}{1+y}$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$ $+$

• $\mathbb{N}$ numerabilă pt că $\exists\, f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijectivă, $f(n) = n$

• $\mathbb{Z}$ numerabilă: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ par} \\ \frac{-(n+1)}{2}, & n = \text{impar} \end{cases}$

$0 \to 0$
$1 \to -1$
$2 \to 1$
$3 \to -2$
$4 \to 2$
$5 \to -3$
$6 \to 3$
$\vdots$

f inj dacă: $\forall\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ cu $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ //

Fie $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ cu $f(n_1) = f(n_2)$

$n_1, n_2 = \text{pare} \Rightarrow \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$

$n_1, n_2 = \text{impare} \Rightarrow \frac{-(n_1+1)}{2} = \frac{-(n_2+1)}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$

n_1 par, n_2 impar: $\underbrace{\frac{n_1}{2}}_{\geq 0} = \underbrace{-\frac{(n+1)}{2}}_{<0}$ ↯

Analog invers

$\Rightarrow$ f injectivă

f surjectivă dacă $\forall\, y \in \mathbb{Z}$, $\exists\, x \in \mathbb{N}$ a.î. $f(x) = y$

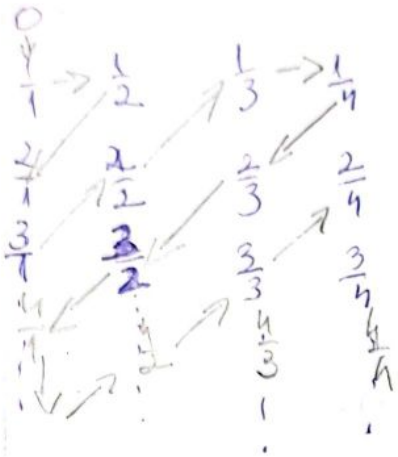
Fie $y \in \mathbb{Z}$: $y \geq 0 \Rightarrow y \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Alg $x = 2y \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) = y$

$\left.\begin{array}{l} y \in \mathbb{Z} \\ y < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{-(n+1)}{2} = y \Rightarrow -n - 1 = 2y \Rightarrow \cancel{n = 2y-1}$ $n = -2y - 1$

$\Rightarrow$ Alg $x = -2y - 1 \in \mathbb{N}$ $y < 0$

$\Rightarrow$ $f(x)=y$, f surjectivă $\longrightarrow$ f bijectivă

• $\mathbb{Q}$ numărabilă //



$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$

Fie $A_n = \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\hookrightarrow A_1 = \{ m \mid m \in \mathbb{Z} \}$

$A_2 = \{ \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z} \}$

$A_3 = \{ \frac{m}{3} \mid m \in \mathbb{Z} \}$

$\vdots$

Fie $f: \mathbb{Z} \to A_n$

$f(m) = \frac{m}{n}$ bij $\Rightarrow A_n$ numărabilă, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ numărabilă

Dem că $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$

„$\supseteq$" evident

„$\subseteq$" Fie $y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

Dacă $\left.\begin{array}{l} q > 0 \\ q \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow y \in A_q$

Dacă $q < 0 \Rightarrow y \in A_{-q}$

$\Rightarrow$ „$\subseteq$"

(★) $\exists f: \underset{\substack{\downarrow \\ \text{numărabilă}}}{A} \to \mathbb{R}$ bijectivă? nu

presupunem că $\exists f: A \to \mathbb{R}$ bijectivă

A numărabilă $\Rightarrow \exists g: \mathbb{N} \to A$ bijectivă

$g(n) = a_n$ $\Rightarrow A = \{a_0, a_1, a_2, \dots a_n\}$

Cum f bijectivă $\Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

$\{ f(a_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$

Cum fct. $h: \mathbb{N} \to \{f(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$

$h(n) = f(a_n)$ bij. $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ este numerabilă ↯

(☆) $\exists$ $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ bijectivă?

Da

$(0,\infty) \xrightarrow{\ln x} \mathbb{R}$

$(0,1) \xrightarrow{\frac{1}{x}} (1,\infty)$

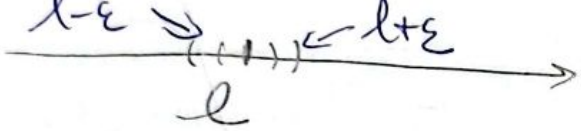
$(0,1) \xrightarrow{\frac{1}{x}} (1,\infty) \xrightarrow{\frac{1}{x}-1} (0,\infty) \xrightarrow{\ln x} \mathbb{R}$,

$f: (0,1) \to \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ Dem că e bij.

Șiruri din $\mathbb{R}$

Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ un șir

Spunem că $(x_n)_n$ convergent dacă $\exists$ $l \in \mathbb{R}$ a.î. (limita)



n ↓ rangul poziției lui în șir

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - l| < \varepsilon$,

$\Updownarrow \forall n \geq n_\varepsilon$

$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$

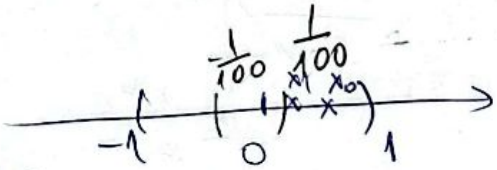
Scriem $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = l$ ($x_n \xrightarrow{n} l$)

Ex: $x_n = \frac{1}{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$, Demonstrăm cu def

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

$x_0 = \frac{1}{3}$

$x_1 = \frac{1}{5}$



$\varepsilon = 1 \Rightarrow n_{\varepsilon_1} = 0$

$\varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow n_{\varepsilon_{\frac{1}{100}}} = 50 \Rightarrow \frac{1}{103} \in \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - 0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat

$n_\varepsilon \Rightarrow$ a.î. $\left|\frac{1}{2n+3}\right| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{2n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n+3 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 3\right)$

Alg $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 3\right)\right|\right] + 1 \Rightarrow$ convergent? $\forall n \geq n_\varepsilon$

- Fie $(x_n)_{n \subseteq \mathbb{R}}$ un șir.
Spunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ dacă $\forall c > 0, \exists\, n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \geq c, \forall n \geq n_c$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă $\forall c > 0, \exists\, n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq -c$ $\forall n > n_c$

Studiați cu definiția, existența limitelor șirurilor urm.

1) $x_n = \frac{2n-1}{3n+2}, n \in \mathbb{N}$

2) $x_n = \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} - 2n, n \in \mathbb{N}$

3) $x_n = 3^n - \frac{n}{2n+5}, n \in \mathbb{N}$

4) $n - 5^n, n \in \mathbb{N}$

LA LUCRARE

(Definiția cu vecinătăți) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l)$ $\exists\, n_V \in \mathbb{N}$ cu $x_n \in V, \forall n \geq n_V$

Rezolvări 1) $x_n = \frac{2n-1}{3n+2}, n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$

avem $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat, $n_\varepsilon = ?$ a.î. $\left|\frac{2n-1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~ $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\frac{\cancel{6n} - 3 - \cancel{6n} - 4}{9n+6}\right| = \left|\frac{-7}{\underbrace{9n+6}_{>0\ \forall n}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\frac{7}{3(3n+2)} < \varepsilon \Leftrightarrow 3(3n+2) > \frac{7}{\varepsilon} \quad |:3$

$3n + 2 > \frac{7}{3\cdot\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{3}\left(\frac{7}{3\cdot\varepsilon} - 2\right)$

Alg $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{1}{3}\left(\frac{7}{3\varepsilon} - 2\right)\right|\right] + 1 \Rightarrow$ Def

2) $x_n = \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} - 2n$

$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) + (\sqrt{n^2+2} - n) = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} \to 0$

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - 0| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$

Fie $\varepsilon>0$ fixat

$n_\varepsilon = ?$ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} - 2n| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$

$\Updownarrow$

$\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} - 2n < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ Dar $\overset{<n+1}{\sqrt{n^2+1}} + \sqrt{n^2+2} - 2n \leq n+1+n+2-2n \leq 3$

$= (\sqrt{n^2+1} - n) + (\sqrt{n^2+2} - n) =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + \dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} = \dfrac{3}{n}$

Dim $\dfrac{3}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{3}{\varepsilon}$

Alg pe $\cancel{n_\varepsilon = \left[\frac{3}{\varepsilon}+1\right]}$ $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{3}{\varepsilon}\right|+1\right]$

$\Rightarrow$ pt $n \geq n_\varepsilon$ Adevărat

3) $x_n = 3^n - \dfrac{n}{2n+5}$, $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall c>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \geq c$, $\forall n \geq n_c$

Fie $c>0$ fixat. $n_c = ?$ a.î. $3^n - \dfrac{n}{2n+5} \geq c, \forall n \geq n_c$

Dar $3^n - \underbrace{\dfrac{n}{2n+5}}_{\in(0,1)} \geq 3^n - \dfrac{n}{2n} = 3^n - \dfrac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$3^n - \dfrac{1}{2} \geq c \Rightarrow 3^n \geq c + \dfrac{1}{2} \Rightarrow n \geq \log_3\left(c+\dfrac{1}{2}\right)$

Alg $n_c := \left[\log_3\left(c+\dfrac{1}{2}\right)\right] + 1 \Longrightarrow$ inegalitatea (*) pt $n > n_c$

4) $x_n = n - 5^n$, $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty}(n-5^n) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall c>0, \exists n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq -c, \forall n \geq n_c$

Fie $c>0$ fixat

$n_c = ?$

$n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $n - 5^n \leq -c$, $\forall n \geq n_c$

am. $5^n \geq 5n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$5^n - n \geq 4n \Rightarrow$ $n - 5^n \leq -4n \Rightarrow$

Din $n - 4n \le c \Rightarrow n \ge \frac{c}{4} \Rightarrow$ Alg $n_c = \left[\frac{c}{4}\right] + 1$

$x_n = 3^n - 5^n, n \in \mathbb{N}$

$3^n - 5^n \le -c, \forall n \ge n_c \quad /\cdot(-1)$

$5^n - 3^n \ge c, \forall n \ge n_c$

Din $5^n - 3^n \ge 5^n\left(1 - \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^n}_{\in\left(0,\frac{3}{5}\right)}\right) \ge 5^n \cdot \frac{2}{5} = 2 \cdot 5^{n-1}$

$\in\left(\frac{2}{5}, 1\right)$

$2 \cdot 5^{n-1} \ge c \Leftrightarrow 5^{n-1} \ge \frac{c}{2} \Rightarrow n-1 \ge \log_5 \frac{c}{2}$

$n \ge \log_5 \frac{c}{2} + 1$. Alg $n_c = \left[\left|\log_5 \frac{c}{2}\right|\right] + 2$

$x_n = \frac{n}{3n-1} - n^2 \xrightarrow{n} -\infty$

$\frac{n}{3n-1} - n^2 \le -c \mid \cdot(-1) \qquad \overbrace{n^2 - \frac{n}{3n-1}}^{\ge n^2-1} \ge c$

$x_n = 5^{n+2} - 4n^3 \ge c$

$= 5^{n+2}\left(1 - \frac{4n^3}{5^{n+2}}\right) \ge c \qquad \in\left(\frac{1}{2}, 1\right), \ \in\left(0, \frac{1}{2}\right) \qquad \ge 5^{n+2} \cdot \frac{1}{2}$

Din astea o să punem)

Seminar 4 Șiruri 1. Studiați monotonia șirurilor

a) $x_n = \frac{1\cdot2 + 2\cdot3 + \dots + n(n+1)}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}, n \in \mathbb{N}$

b) $x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

c) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}, n \in \mathbb{N}^*$

2. studiați marg. șirurilor

a) $x_n = \frac{1\cdot3 + 3\cdot5 + \dots + (2n-1)(2n+1)}{2\cdot4 + 4\cdot6 + \dots + (2n-2)(2n)}$

b) $x_n = \frac{1}{2+3^1} + \frac{1}{2+3^2} + \dots + \frac{1}{2+3^n}$

c) $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

monotonie: $x_{n+1} - x_n$ sau raport, dacă șirul va termeni poz

Rezolvari

a) $x_n = \dfrac{\sum k(k+1)}{\sum k^2} = \dfrac{\sum k^2 + \sum k}{\sum k^2} =$

$= 1 + \dfrac{\sum k}{\sum k^2} = \dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} =$ convergent $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ strict mărg

$= \dfrac{2n+1+3}{2n+1} = \dfrac{2n+4}{2n+1} \Rightarrow x_{n+1} - x_n = \cancel{\dfrac{2(n+1)+4}{}} \ldots$

se compară cu zero și vedem cresc. descresc.

b) $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n$ - strict cresc.

c) $x_{n+1} - x_n = \cancel{\dfrac{1}{n+2}} + \cancel{\dfrac{1}{n+3}} + \ldots + \dfrac{1}{3n+3} - \dfrac{1}{n+1} - \cancel{\dfrac{1}{n+2}} \ldots$

$- \dfrac{1}{3n} = \dfrac{1}{3n+1} + \dfrac{1}{3n+2} + \dfrac{1}{3n+3} - \dfrac{1}{n+1} =$

$= \underbrace{\left(\dfrac{1}{3n+1} - \dfrac{1}{3n+3}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\dfrac{1}{3n+2} - \dfrac{1}{3n+3}\right)}_{>0} + \left(\cancel{\dfrac{1}{3n+3}} - \cancel{\dfrac{1}{3n+3}}\right)$

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n > 0 \Rightarrow$ șir strict crescător

a) MARGINIRE $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (mărginit inferior, cant marginea sup)

$x_n = \dfrac{\sum (2k-1)(2k+1)}{\sum (2k-2)(2k)} = \ldots \to l$ $\quad l \in \mathbb{R} \Rightarrow (x_n)$ conv (x_n) mărg

$l = \infty \Rightarrow (x_n)$ nemărg

b) $x_n = \dfrac{1}{2+3^1} + \ldots + \dfrac{1}{2+3^n}$ Încerc să majorez cu sume telescopice sau pr. geom

$\dfrac{1}{2+3^k} < \dfrac{1}{3^k} \Rightarrow x_n \leq \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1 - \frac{1}{3}^n}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3}^n\right) \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow (x_n)$ n mărginit

$\frac{2}{3}$

$\dfrac{1}{1\cdot 2}$ $\quad \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ $\quad \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)n}$

c) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$

$$x_n \le 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} \overset{\text{suma telescopica}}{=} 1+\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\dots+\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n} =$$

$$= 2-\frac{1}{n} \le 2 \Rightarrow (x_n)_n \text{ mărg.}$$

Ex2 caracterizarea șirurilor convergente din $\mathbb{Z}$

Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z}$, converg.. Atunci

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{Z}$

2) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n = l$, $\forall n \ge n_0$

↳ șirul devine șir constant de la un rang oarecare cu valoarea

Demonstrație Știm că (x_n) e convergent, $\Rightarrow$

1) $\Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

Pp. că $l \notin \mathbb{Z}$

fie $V = ([l], [l]+1) \in \mathcal{V}_l$ o vecinătate a lui l

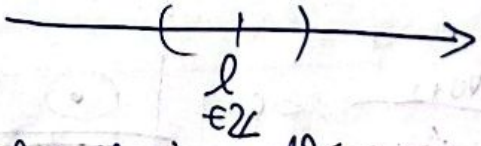
$\Rightarrow \exists\, N_V$ rang $\in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \in V$, $\forall n \ge N_V$.

Dar $x_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$V \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ $\Rightarrow$ ↯

Prin urmare $l \in \mathbb{Z}$

2)



Fie $V = (\underset{\in\mathbb{Z}}{l-1}, \underset{\in\mathbb{Z}}{l+1}) \in \mathcal{V}_l$ și $V \cap \mathbb{Z} = \{l\}$

dar $\exists\, N_V \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \in V$, $\forall n \ge N_V$

$\Rightarrow x_n = l$ $\forall n \ge N_V$

~~VA~~ $x_n \in \mathbb{Z}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

criteriul raportului la șiruri

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 (n+2)!}{(n!)^2 \cdot 2^n}$ facem $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ pt șiruri cu termeni pot

(Ex3) Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}_+^*$ și $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ Atunci

1) Dacă $l \in (0,1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

2) Dacă $l > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

3) Dacă $l = 1 \to$ nu putem afirma nimic

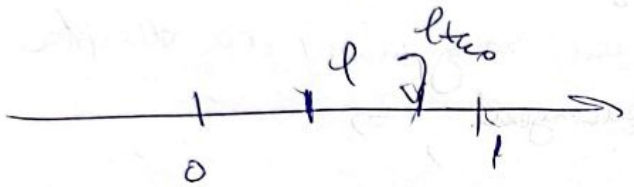
Demonstrație. 1) Fie $\varepsilon > 0$ fixat

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\underbrace{\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - l\right| < \varepsilon}$

$\forall n \geq N_\varepsilon$

$\Updownarrow$

$l - \varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < l + \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon$



Aleg $\varepsilon_0 > 0$ a.î. $\underbrace{l + \varepsilon_0}_{} < 1$. $\Rightarrow \exists N_{\varepsilon_0} := N_0 \in \mathbb{N}$ a.î.

→ pt că șirul notez cu c are termeni poz $c = l + \varepsilon_0$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} < c, \forall n \geq N_0 \Rightarrow$

Cum $x_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

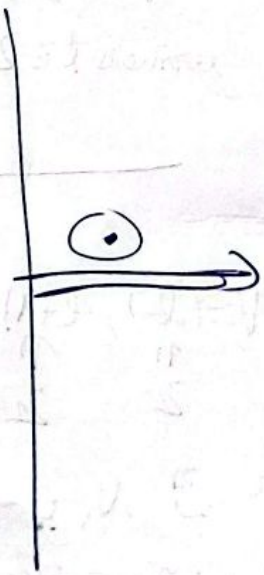
pt $n = N_0$: $0 < \frac{x_{N_0+1}}{x_{N_0}} < 0$

vrem să ajg. la este

$n = N_0 + 1$: $0 < \frac{x_{N_0+2}}{x_{N_0+1}} < c$

$\vdots$

$n \to n-1$: $0 < \frac{x_n}{x_{n-1}} < c$



$\Rightarrow 0 < \frac{x_n}{x_{N_0}} < c^{n-N_0}, \forall n \geq N_0 \;/ \cdot x_{N_0}$

$x_{N_0} > 0$ facem este

$\Rightarrow 0 < x_n < c^{n-N_0} \cdot x_{N_0}, \forall n \geq N_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} c^{n-N_0} \cdot x_{N_0} = 0$

$0 < x_n < 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

pt. 2) :

alegem ε_0 suficient de mic a.î. $l-\varepsilon_0 > 1$

facem ~~...~~ analogi lucru ca la 0 și dacă $> c$ în loc de $< c$

Ex3 Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, cu $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 1$ și $\exists\ \alpha > 0$ a.î.

$\alpha \le |x_n + x_m|$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Aflați $\lim_{n\to\infty} x_n = ?$

Sol: Fie $\varepsilon > 0$ fixat

$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 1 \Rightarrow \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\big||x_n| - 1\big| < \varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 1 \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$\Leftrightarrow 1-\varepsilon < |x_n| < 1+\varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon \Leftrightarrow$

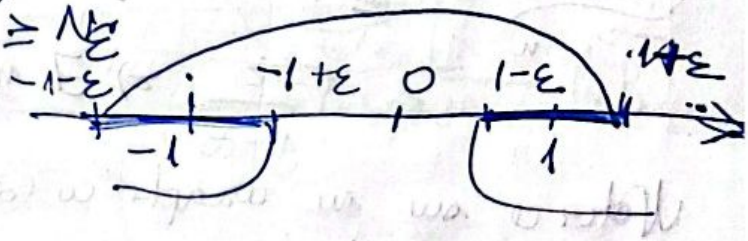
$\Leftrightarrow \begin{cases} |x_n| > 1-\varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (-\infty, -1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, \infty) \Leftrightarrow \\ |x_n| < 1+\varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (-1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \end{cases}$ și

$\Leftrightarrow x_n \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\forall n \ge N_\varepsilon$

Pp. prin RA că $\exists\ m, n \ge N_\varepsilon$

a.î. $x_n \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ și

$x_m \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \Rightarrow$



$\Rightarrow -1-\varepsilon < x_n < -1+\varepsilon$

$1-\varepsilon < x_m < 1+\varepsilon$

$\overset{(+)}{\overline{\qquad\qquad}}$

$-2\varepsilon < x_n + x_m < 2\varepsilon \Rightarrow |x_n + x_m| < 2\varepsilon$

Aleg ε a.î. $2\varepsilon < \alpha \Rightarrow |x_n + x_m| < \alpha$ ~~ab~~ (ip) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ deci $x_n \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ $\forall n \ge N_\varepsilon$ sau $x_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$\forall n \ge N_\varepsilon$. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -1$ sau $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

EX MEDIU DE EXAMEN

- Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$ a.î. $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - \alpha x_n) = 0$

Dem că $(x_n)_n$ convergent și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Demonstrație: Fie $\varepsilon > 0$ fixat $\Rightarrow \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$|x_{n+1} - \alpha x_n| < \varepsilon$ $\forall n \ge N_\varepsilon$

$(2)\ -\varepsilon < x_{n+1} - \alpha x_n < \varepsilon, \ \forall n \geq N_\varepsilon \quad | \cdot \alpha^{n-N_\varepsilon-1}$

pt $n = N_\varepsilon$: $-\varepsilon < x_{N_\varepsilon+1} - \alpha x_{N_\varepsilon} < \varepsilon \quad | \cdot \alpha^{n-N_\varepsilon-2}$

$n = N_\varepsilon + 1$: $-\varepsilon < x_{N_\varepsilon+2} - \alpha x_{N_\varepsilon+1} < \varepsilon$

$n \leftrightarrow n-3$: $-\varepsilon < x_{n-2} - \alpha x_{n-3} < \varepsilon \quad | \cdot \alpha^2$

$n \leftrightarrow n-2$: $-\varepsilon < x_{n-1} - \alpha x_{n-2} < \varepsilon \quad | \cdot \alpha$

$n \leftrightarrow n-1$: $-\varepsilon < x_n - \alpha x_{n-1} < \varepsilon$

adică este în raport cu n (la putere)

$$-\varepsilon(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{n-N_\varepsilon-1}) < \cancel{x_n - \alpha x_{N_\varepsilon}} < \varepsilon(1+\alpha+\dots+\alpha^{n-N_\varepsilon-1})$$

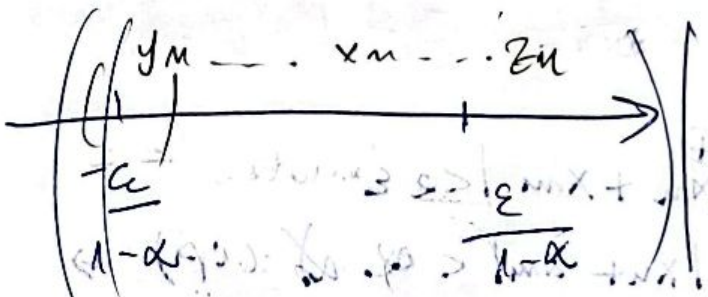
$$< x_n - \alpha^{n-N_\varepsilon} \cdot x_{N_\varepsilon} <$$

$$\underbrace{-\varepsilon \cdot \frac{1-\alpha^{n-N_\varepsilon}}{1-\alpha} + \alpha^{n-N_\varepsilon} \cdot x_{N_\varepsilon}}_{\text{notez } (y_n)} < x_n < \underbrace{\varepsilon \cdot \frac{1-\alpha^{n-N_\varepsilon}}{1-\alpha} + \alpha^{n-N_\varepsilon} \cdot x_{N_\varepsilon}}_{z_n}, \ \forall n \geq N_\varepsilon$$

$\alpha^{n-N_\varepsilon} \to 0$, $\alpha^{n-N_\varepsilon} \to 0$

$(y_n) \xrightarrow{z_n} -\frac{\varepsilon}{1-\alpha} \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon' \in \mathbb{N}$ a.î. $y_n \geq -\frac{\varepsilon}{1-\alpha} - \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon'$

Văzut ca un drapta cu (z_n) $\quad (z_n) \xrightarrow{} \frac{\varepsilon}{1-\alpha} \Rightarrow$



$\Rightarrow \exists\, n_\varepsilon'' \in \mathbb{N}$ a.î. $z_n \leq \frac{\varepsilon}{1-\alpha} + \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon''$

$N_\varepsilon, N_\varepsilon'', N_\varepsilon'$ depind toate de scalar fixat (ε) dar n se schimbă

$$\cancel{\text{la } y_n}: \quad -\varepsilon\underbrace{\left(\frac{1}{1-\alpha}+1\right)}_{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \leq x_n \leq \varepsilon\underbrace{\left(\frac{1}{1-\alpha}+1\right)}_{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}},$$

$\forall n \geq \max\{N_\varepsilon, N_\varepsilon', N_\varepsilon''\} \Rightarrow$

$\varepsilon \le \left(\frac{1-x}{2-x}\right) x_n < \varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

~~$\forall n \ge n_\varepsilon \in \mathbb{N}$~~

șiruri Cauchy $\to$ SIGUR LA LUCRARE cu def pt convergent / Cauchy

---

Ex) $\lim_{n\to\infty} \{(2+\sqrt{3})^n\} = ?$ $\quad 2+\sqrt{3} > 1$, $2-\sqrt{3} \in (0,1)$

$(2+\sqrt{3})^n = C_n^0 \cdot 2^n + C_n^1 2^{n-1}\sqrt{3} + \dots + C_n^n (\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}\, b_n$ notez ca

$a_n, b_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

$(2-\sqrt{3})^n = C_n^0 \cdot 2^n - C_n^1 2^{n-1}\sqrt{3} + \dots + C_n^n (-\sqrt{3})^n =$

$= a_n - b_n\sqrt{3}$, scădeți a_n și b_n

(+)

$\Rightarrow (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2a_n \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^n = 2a_n - (2-\sqrt{3})^n$, $\forall n$

$[(2+\sqrt{3})^n] = [\underbrace{2a_n}_{\in \mathbb{N} \supset \mathbb{Z}} - (2-\sqrt{3})^n] = 2a_n + [-\underbrace{(2-\sqrt{3})^n}_{\in (0,1)}]$

$\in (-1,0)$

$\Rightarrow \{(2+\sqrt{3})^n\} = (2+\sqrt{3})^n - [(2+\sqrt{3})^n] = \quad = 2a_n - 1 \Rightarrow$

$= a_n + \sqrt{3}\cdot b_n - (2a_n - 1) = -a_n + \sqrt{3}\, b_n + 1 =$

$= -\underbrace{(a_n - \sqrt{3} b_n)}_{(2-\sqrt{3})^n} + 1$

$\frac{\infty}{\infty}$ (subunitar) $= 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \{(2+\sqrt{3})^n\} = \lim_{n\to\infty} -\underbrace{(2-\sqrt{3})^n}_{\in(0,1)} + 1 = \boxed{1}$

$\downarrow 0$

Șir Cauchy ($\mathbb{R}$)

fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ un șir

Spunem că $(x_n)_n$ șir Cauchy dacă: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

a.î. $\forall n, m > n_\varepsilon$, avem $|x_n - x_m| < \varepsilon$

Dc. la orice rang mare, oricare 2 termeni sunt oricât de apropiați

Sol $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}$

avem $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

se scrie pe cel mai mare din faț. de cel mai mic

$\boxed{\text{Ex 1}}$ a) Fie $x_n = \frac{\operatorname{arctg} 1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2^2} + \dots + \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Dem că $(x_n)_n$ șir Cauchy (cu def)

b) Fie $x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dem că (x_n) nu e șir Cauchy

c) Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $\exists \lambda \in (0,1)$ a.î. $|x_{n+1} - x_{n+2}| < \lambda |x_n - x_{n+1}|$

$\forall n \in \mathbb{N}$, Atunci $(x_n)_n$ este șir Cauchy

Rezolvare: a) fie $\varepsilon > 0$ fixat

$n_\varepsilon = ?$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}$, $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{\overbrace{\operatorname{arctg}(n+1)}^{<\frac{\pi}{2}}}{2^{n+1}} + \frac{\overbrace{\operatorname{arctg}(n+2)}^{<\frac{\pi}{2}}}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\overbrace{\operatorname{arctg}(n+p)}^{<\frac{\pi}{2}}}{2^{n+p}}$$

$x \in (0, \infty)$, $\operatorname{arctg} x > 0$

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{\pi}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} \right)}_{\text{pr. geom cu } q \text{ subunitară funcționează bine la majorări}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = \underbrace{\pi}_{<4} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)}_{\leq 1} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Dem $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow 2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n-1 > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$ Alg $n_\varepsilon > n$

$$\text{Alg } n_\varepsilon = \left[\left|\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right| + 1\right] + 1$$

$\Rightarrow$ se respectă def $\Rightarrow$ șir Cauchy.

b) Pp. că $(x_n)_n$ șir Cauchy $\Rightarrow \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n, m \geq n_\varepsilon$

fie $\varepsilon > 0$ fixat $\Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$

presupunem că $n > m \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x_n - x_m| = \frac{m+1}{(m+2)^2} + \frac{m+2}{(m+3)^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2} \geq \dots$$

$\geq \dots \geq$ $\frac{1}{2}/\frac{1}{5}$ ...

cel mai mare numitor

$$\geq \frac{m+1}{(n+1)^2} + \frac{m+2}{(n+1)^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \left(\underbrace{(m+1) + (m+2) + \dots + n}_{\text{pr. aritm. cu } r=1} \right) =$$

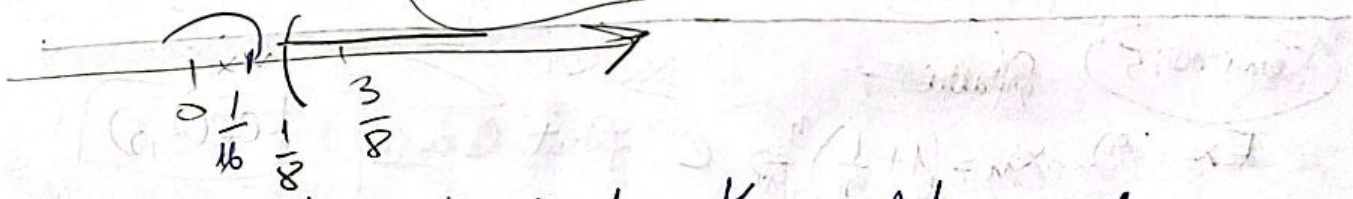
particularizez suma în sum

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(m+n+1) \cdot (n-m)}{2}$$

$n > m \rightarrow$ Alg $n = 2m \Rightarrow$ ~~$|x_{2m} - x_m| \Rightarrow$~~

$$\Rightarrow x_{2m} - x_m \geq \underbrace{\frac{(3m+1)(\cdot m)}{2(2m+1)^2}}_{y_m} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{3}{8} > 0$$

funcționează



$\Rightarrow \exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $y_m > \frac{1}{8}$ $\forall$ ~~$m \in \mathbb{N}$~~ $m \geq N_0$

$\Rightarrow x_{2m} - x_m > \frac{1}{8}$, $m \geq N_0$

Alg $\varepsilon = \frac{1}{16} \Longrightarrow \exists\, N_0' \in \mathbb{N}$ a.î. ...

$x_{2m} - x_m < \frac{1}{16}$, $\forall\, m \geq N_0'$ $\Rightarrow$ absurd

c) $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $\exists\, \lambda \in (0,1)$ a.î. $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_n - x_{n+1}|$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Dem că $(x_n)_n$ șir Cauchy

Dem Pp $\Rightarrow |x_{n+2} - x_{n+1}| \overset{(1)}{\leq} \lambda |x_{n+1} - x_n| \overset{(2)}{\leq} \lambda \cdot |x_{n-1} - x_n| \leq$

$\leq \lambda^3 |x_{n-2} - x_{n-1}| \leq \dots \leq \lambda^{(n)} |x_2 - x_1|$ cont regula $n+1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$|x_{n+2}-x_{n+1}| \le \lambda^n \cdot a, \forall n \in \mathbb{N}$

Avem $m > n$

$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \dots + x_{n+1} - x_n| \le$

$\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-2} - x_{m-3}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \le$

$\le \lambda^{m-2} a + \lambda^{m-3} \cdot a + \dots + \lambda^n a =$

$= a\lambda^{n-1}(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots \lambda^{m-n-1}) =$ progresie de λ

$= a \cdot \lambda^{n-1} \cdot \dfrac{1-\lambda^{m-n}}{1-\lambda} = a \cdot \lambda^{n-1} \cdot \dfrac{1}{1-\lambda} \cdot \underbrace{(1-\lambda^{m-n})}_{\le} =$

$= a \cdot \lambda^{n-1} \cdot \dfrac{1}{1-\lambda} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Ca să arăt că e Cauchy caut să găsesc la curs

$\Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $a \cdot \lambda^{n-1} \cdot \dfrac{1}{1-\lambda} < \varepsilon, \forall n \ge N_\varepsilon$

Seminar 5 Șiruri

Ex A) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n]{} e$ facut la curs $\boxed{e \in (2,3)}$ scris în fișă

b) $y = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \xrightarrow{n} e$

c) $e \notin \mathbb{Q}$

d) $z_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \xrightarrow{n} \gamma \in (0,1)$ constanta lui Euler

e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = ?$

b) $(y_n)_n$ monoton mărginit $\Rightarrow$ convergent și

a) $x_n \le y_n, \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow[\lim n]{} e \le \lim_{n\to\infty} y_n$

Arăt că $\lim_{n\to\infty} y_n \ge e$

Avem $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \overset{\text{presupun } m>n}{=} C_m^0 + C_m^1 \frac{1}{m} + C_m^2 \frac{1}{m^2} + \dots + C_m^n$

Dezvolt cu Binomul lui Newton

21 [illegible] MDV [illegible] — [illegible]

SALA 10

$$+ \underbrace{C_m^{m-1}\left(\frac{1}{m}\right)^{m-1} + \dots + C_m^{m}\left(\frac{1}{m}\right)^{m}}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow C_m^0 + C_m^1 \frac{1}{m} + C_m^2 \frac{1}{m^2} + \dots + C_m^n \frac{1}{m^n} \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}, m > n$

$$\Rightarrow \frac{m!}{m!\cdot 0!} + \frac{m!}{(m-1)!\cdot 1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m!}{(m-2)!\,2!}\,\frac{1}{m^2} + \dots +$$

$$+ \frac{m!}{(m-n)!\,n!}\cdot\frac{1}{m^n} \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n$$

$$1 + \frac{m}{1!}\,\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\cdot\frac{1}{m^2} + \dots \frac{+(m-n+1)\dots m}{n!}\cdot\frac{1}{m^n} \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \xrightarrow[m\to\infty]{\lim}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}}_{y_n} \leq e \xrightarrow{\lim_n} \lim_{n\to\infty} y_n = e$$

c) Dem că $e \notin \mathbb{Q}$

Demonstrăm că: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) \leq$

$\leq \frac{1}{q!\,q}$, $\forall q \in \mathbb{N}^*$

Dem factor com și rămânem la ăici

$$\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\dots+\frac{1}{n!} = \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\right.$$

$$\leq \frac{1}{(q+1)^2}$$

$$\left.+\dots+\frac{1}{(q+1)(q+2)\dots n}\right) \leq$$

majorez cu o pr. geom $\leq \frac{1}{(q+1)^{n-q}}$ câte sunt

$$\leq \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\dots+\frac{1}{(q+1)^{n-q}}\right) =$$

$$= \frac{1}{q!}\cdot\frac{1}{q+1}\left(1+\frac{1}{q+1}+\dots+\frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{q!}\cdot\frac{1}{q+1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{q+1}\right)^{n-q}}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q!}\cdot\frac{1}{q}\left(1-\left(\frac{1}{q+1}\right)^{n-q}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{q!\cdot q}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(q+1)!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{q!\cdot q}$$

Dem că $e \notin \mathbb{Q}$

Pp că $e \in \mathbb{Q} \Rightarrow e = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ (p,q)=1$ $\Big|\Rightarrow$

$e \in (2,3)$

$\Rightarrow p,q \in \mathbb{N}$ $\boxed{q>1}$

Avem: $\overset{(b)}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\dots\frac{1}{n!}\right) =$

$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{q!}+\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(q+1)!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)}_{\le \frac{1}{q!\cdot q}}$$

$$\Rightarrow 0 < \underset{\frac{p}{q}}{e} - \left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{q!}\right) \le \frac{1}{q!\cdot q} \quad \Big|\cdot q!$$

$$0 < q!\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\dots-\frac{1}{q!}\right) \le \frac{1}{q} < 1 \quad q>1$$

rezultatul de aici e în $\mathbb{Z}$

pt că ăsta se va simplifica cu toate numitoarele

d) Demonstrăm că $\boxed{\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Aplicăm Lagrange pt fct. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x) = \ln x$, pe interval $[n, n+1]$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ fixat

$\Rightarrow \exists\, c \in (n, n+1)$ a.î. $f'(c) = f(n+1) - f(n)$

$n < c < n+1$ | aplic funcția f'

$f'(x) \boxed{\geq} f'(c) \boxed{\geq} f(n+1) \overset{\frac{1}{n+1}}{} \longrightarrow f(n+1) - f(n)$

$\frac{1}{n}$ din monotonia f' ca să pot stabili ordinea

$= \ln(n+1) - \ln n$

$f' \downarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in (0, \infty)$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad , f' \downarrow$

din (*) $\quad n = 1: \frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}$

$n = 2: \quad \frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$

$\vdots$

$n \to n-1 \quad \frac{1}{n} < \ln n - \ln(n-1) < \frac{1}{n-1}$

$\oplus$

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}_{\substack{\| \\ z_n - 1 + \ln n}} < \ln n < \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}}_{\substack{\| \\ z_n - \frac{1}{n} + \ln n}} \quad \Big| - \ln n$$

$$\Rightarrow \underbrace{z_n - 1 < 0}_{\substack{\Rightarrow z_n < 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}}} < \underbrace{z_n - \frac{1}{n}}_{z_n > \frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}} \quad , \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow z_n \in (0, 1) \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (z_n)$ mărginit

$z_{n+1} - z_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \ln n < 0$ (*) stânga

Mă uit în (*) și folosesc prima jumătate

$\Rightarrow (z_n) \downarrow \xrightarrow{\text{Weierstrass}} (z_n)$ convergent

$\Rightarrow \exists \ \gamma := \lim_{n \to \infty} z_n \in [0, 1]$

Se arată că $\gamma \in (0, 1)$

e) Ne folosim pe d) la e) dacă subșir al șirului va tende tot către γ

$z_n \to \gamma \Rightarrow z_{2n} \to \gamma$

$\alpha_{2n} - \alpha_n \xrightarrow{\ } 0$

$\alpha_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln(2n)$

$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

$\alpha_{2n} - \alpha_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}}_{\ln 2} - \ln 2 \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \boxed{\ln 2}$

Ex2 Calculați:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}+1}$, $p \in \mathbb{N}$ fixat

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \to 0$ AM

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \to 0$

$\lim_{n\to\infty} b_n = ?$

$b_n = n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

nr determen $\longrightarrow \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

(b_n) nemărg

cel mai mic dintre termeni

$\parallel$

Lema Stolz-Cesaro

a) $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$

c) $x_1 \in [1,2]$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $n \in \mathbb{N}$

calculați limita de șiruri

Rezolvare

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ?$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow (b_n)_n$ nemărginit

$b_{n+1} - b_n = (n+1)^{p+1} + 1 - n^{p+1} - 1 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow (b_n)_n$ s↑

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + (n+1)^p - 1^p - \dots - n^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{C_p^0 n^p + C_p^1 n^{p-1} + \dots + C_p^p}{C_{p+1}^0 n^{p+1} + C_{p+1}^1 n^p + \dots + C_{p+1}^{p+1} n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

Stolz-Cesaro $\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{p+1}$

---

a) pe viitor:

$x_0 = 1$ șirul crește

$x_1 = 2$

cînd ajunge la limita din rel. de recurență, e

$l = \frac{1}{2} l + \frac{3}{2}$

$x_0 = 1$

$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{3}{2}, \ n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{2} l = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{l = 3}$

I) Demonstrez că $(x_n)\uparrow$ $\quad P(n): (x_n \le x_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N}$

$P(0): x_0 \le x_1$ (A)

Presupun $P(n)$ (A) și demonstrez $P(n+1)$ (A) (Arăt că $x_{n+1} \le x_{n+2}$)

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$x_{n+1} = \frac{1}{2} \underbrace{x_n}_{\le x_{n+1}} + \frac{3}{2} \le \frac{1}{2} x_{n+1} + \frac{3}{2} = x_{n+2} \Rightarrow P(n+1)$ (A)

$\rightarrow$ din presupunere

$\Rightarrow P(n)$ (A) $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

II) Demonstrez că $P(n): x_n \le 3, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(1) $P(0): \underset{1}{x_0} \le 3$ (A)

(2) Pp. $P(n)$ (A) și demonstrez $P(n+1) \rightarrow$ arăt $x_{n+1} \le 3$

$x_{n+1} = \frac{1}{2} \underbrace{x_n}_{\le 3} + \frac{3}{2} \le 3 \Rightarrow P(n+1)$ (A) $\Rightarrow P(n)$ (A) $\forall n \in \mathbb{N}$

Din I) și II) $\xrightarrow{\text{Weierstrass}} (x_n)$ convergent $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \ l \in \mathbb{R}, \ l = \lim_{n\to\infty} x_n$

$l = ?$ trecem la limită în rel. de recurență

$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2}\right) = l \Rightarrow l = \frac{1}{2}l + \frac{3}{2} \Rightarrow l = 3$ 1) numai când șirul e convergent

d) $x_1 = 1$

$x_2 = 3$ $\qquad x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1,\ n \in \mathbb{N}$

$x_3 = 13$

$\vdots$

Demonstrez că $(x_n) \uparrow$

$P(n):\ x_n \le x_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$P(1):\ x_1 \le x_2$ ✓

$1 \le 3$ @

$P(n) \to P(n+1)$ Presupun $P(n)$ @ și demonstrez $P(n+1)$ @

$x_{n+1} \le x_{n+2}$ (Arăt că)

$x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1 \le$ $\qquad x_n \le x_{n+1}$

$\le (x_{n+1})^2 \le x_{n+1}$ $\qquad$ Șirul are toți termenii poz. pt că $\Delta < 0$ și șirul ~~este pozit~~

Dacă știu că am termeni poz.

$\Rightarrow x_{n+1} \le x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1 = x_{n+2}$ $\qquad \Rightarrow x_n \le x_{n+1} \uparrow^2$

@ $\qquad x_n^2 \le (x_{n+1})^2$

$\longrightarrow (x_n) \uparrow$

II) P.p. că (x_n) mărginit $\Big\}$ Weierstrass $\Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{R},\ l = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow$

știind că șirul e conv, trecem la lim rel. de recurență $\qquad x_n$ nemărginit

$l = l^2 + l + 1 \Rightarrow l^2 = -1$ ✗ $\Rightarrow$

c) P_1 ✓ $\Rightarrow$

$P_n \to P_{n+1}$ $\qquad x_{n+1} \in [1, 2]$ (?)

$\Leftrightarrow 1 \le x_n \le 2 \Leftrightarrow 1 \le \underbrace{x_n^2 - 2x_n + 2}_{(x_n-1)^2+1} \le 2$

$\in [0, 1]$

monotonie $\qquad x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 3x_n + 2 = \underbrace{(x_n - 1)}_{\ge 0}\underbrace{(x_n - 2)}_{\le 0} \le 0 \Rightarrow (x_n) \downarrow$

$\xrightarrow{\text{Weierstrass}}$ $\exists\, l \in \mathbb{R}$, $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $\xrightarrow[\text{fel de rec}]{\text{trec la}}$ $l = l^2 - 2l + 2$
(x_n) crescând

$\Rightarrow l = 1$ sau $l = 2$

se fol. de cum plecăm cu primul termen, limita poate să fie și 1 și 2

pt $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ $\Rightarrow x_n = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \lim$ este 2

$\lim x_n = ?$ $\overline{\lim}\, x_n = ?$

A) $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} \cdot \boxed{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

$\to y_n \to e^{\frac{3}{2}}$ $\qquad z_n \to 0$

b) $x_n = \frac{n}{2n+3} \cdot \boxed{\sin \frac{n\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$

$\to \frac{1}{2}$

c) $x_n = 2\sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}$

P. $\overline{\lim}\, x_n = \max \mathcal{L}((x_n)_n) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, (x_{n_k})_k$ subșir al șirului $(x_n)_n$ cu $x_{n_k} \xrightarrow{k} x\}$
mult. punctelor limită

$\underline{\lim}\, x_n = \min \mathcal{L}((x_n)_n)$

la $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ depinde de paritate

$n = 2k \to (-1)^{\frac{2k(2k+1)}{2}}$ $\to i$

- k par, $k = 2h$
- k impar, $k = 2h-1$

$n = 2k+1$

observ că trb să separ în 4 cazuri

$\to x_{4k} = y_{4k} \cdot \underbrace{(-1)^{\frac{(4k)(4k+1)}{2}}}_{i} + z_{4k} \xrightarrow{k} e^{\frac{3}{2}}$

$x_{4k+1} = y_{4k+1} \cdot \underbrace{(-1)^{\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}}}_{i} + z_{4k+1} \xrightarrow{k} e^{\frac{3}{2}}$

$x_{4k+2} = y_{4k+2} = y_{4k+2} \cdot (-1)^{\frac{(4k+2)(4k+3)}{2}} + z_{4k+2} \xrightarrow{k} -e^{\frac{3}{2}}$

$x_{4k+3} \to e^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \overline{\lim} x_n = e^{\frac{3}{2}}$

$\underline{\lim} x_n = -e^{\frac{3}{2}}$

b)

$n=1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$n=2 \Rightarrow \sin\pi = 0$

$n=3 \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$n=4 \Rightarrow \sin 2\pi = 0$

$n=5 = \sin\frac{5\pi}{2} = 1$

secvența se repetă din 4 în 4 → suport în 4 subșiruri

$x_{4k}, x_{4k+1}, x_{4k+2}, x_{4k+3}$

c) $x_n = 2\sin\frac{n\pi}{3} + \cos n\frac{\pi}{3}$

suport în 6 subșiruri

$n=1 \to \frac{\pi}{3}$

$n=2 \to \frac{2\pi}{3}$

$x_{6k}, x_{6k+1}, x_{6k+2} \dots x_{6k+5}$

$$x_{6k+4} = \underbrace{2\sin\underbrace{\frac{(6k+4)\pi}{3}}_{\left(2k\pi + 4\frac{\pi}{3}\right)}}_{= -\frac{\sqrt{3}}{2}} + \underbrace{\cos\frac{(6k+4)\pi}{3}}_{-\frac{1}{2}}$$

Serii

Serii numerice | $\sum_{n\geq 1} x_n$ / $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ / $\sum_n x_n$

Un ex — suma și natura seriei pe definiție

natura seriei

- $S_n = x_1 + x_2 + \dots x_n$
- $\lim_{n\to\infty} S_n$ — $l \in \mathbb{R} \to$ seria conv cu suma l
  - $\pm\infty$ sau $\nexists$ seria div

→ Criterii de convergență

P) $\sum x_n$ convergentă $\Rightarrow x_n \to 0$

↳ folosit la negație

$\boxed{\text{Dacă } x_n \not\to 0 \ \sum x_n \text{ divergentă}}$

* criteriul suficient de divergență

$\sum x_n \sim \sum_{10} k x_n$ / $\underbrace{\sum_{n\geq 1} x_n \sim \sum_{n\geq n_0} x_n}_{\text{suma diferă, dar natura e aceeași}}$

echivalentă cu natura

s. conv ± s. conv ⇒ s conv

s conv ± s. div ⇒ s. div

s. div ± s. div ⇒ nu știm

nu pot să duc în serie geom

Studiați natura și suma:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+5^{n+2}+1}{3^{n+1}}$ / $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n+5^{n+2}}{3^{n+1}+5}$ ↗ ↗ ∞ când văd exponențiala mă gândesc la seria geometrică

încercăm să duc într-o sumă de forma q^n

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$ / $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{9n^2+3n-2}$

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ / $\sum_{n\geq 0} (\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+3})$ diverge

d) $\sum_{n\geq 1} \ln\frac{n+2}{n}$ / $\sum (\ln n - \ln(n+3))$

Sn

e) $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{(n+2)!}$ / $\sum_{n\geq 2} \frac{n+5}{(n+6)!}$

Seria geometrică

$$\sum_{n\geq 1} q^n = \begin{cases} \text{convergentă, cu suma } \frac{q}{1-q}, & q\in(-1,1) \\ \text{divergentă dacă } q\notin(-1,1) \end{cases}$$

Seria armonică

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{convergentă, pt } \alpha>1 \\ \text{divergentă pt } \alpha\leq 1 \end{cases}$$

Rezolvări

a) $\sum (A\pm B) = \sum A \pm \sum B$

$\frac{1}{3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{9}\right)^n + \frac{5}{3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{9}\right)^n$,

$q \in (-1,1) \to$ convergente toate deci pot să calculez și suma

$$S = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}} + \frac{25}{3}\cdot\frac{\frac{25}{9}}{1-\frac{25}{9}} + \dots + \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} \dots$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{4^{n+2}+5}{3^{n+1}+5} \to \text{serie divergentă}$$

$\downarrow n\to\infty$

∞

nu se calculează suma

b) scriu numitorul sub formă de produs, cât fac S_n din ultr-o telescopică

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{9n^2+3n-2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \dots + \frac{1}{\ }$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{8}} + - \frac{1}{\ }\right) \cdots \frac{1}{3}$$

$\downarrow 0$

$\to \frac{1}{6}$

O șă mi dea limită finită $\Rightarrow$ serie convergentă cu suma $\frac{1}{6}$

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ raționalizez la numărător

fac S_n

d) $\sum \ln \frac{n+2}{n}$

$$S_n = x_1 + \dots + x_n =$$

$$= \ln\frac{3}{1} + \ln\frac{4}{2} + \ln\frac{5}{3} + \dots + \ln\frac{n+2}{n}$$

$$\to \infty \qquad = \ln\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+2)}{1\cdot 2\cdots n}$$

Seminar 6 Cum abordăm o criteriu trb să folosim

$$\sum n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) = -\sum n \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \to \text{am transformat în termeni poz}$$

$\downarrow$ subunitar, log neg, serie cu termeni neg

Pas 1 Sat văd dacă folosesc criteriu pt termeni poz sau pt termeni alternanți

↳ dacă crit. Leibniz

$\sum_{n=1} \frac{2^n (3)}{5^n n+1} \sim \sum \frac{(-1)^n ((-2)^n + 3^n)}{5^n \cdot n+1} \Rightarrow$ (-1)^n cv pt alternate

termen alternat

$\sum \frac{\ln n}{n} \sim \sum 2^n \cdot \frac{\ln 2^n}{2^n} = \sum n \ln 2 \sim \sum n \to \infty \Rightarrow$ div

(cu cât mergi mai bine în ex, dar trb arătat că

[illegible] exerciții (din ale ne dă și la lucrare)

23) comparației

23) comparației

41) log sau condensare

(21) → crit comparației completând la lim rem cu lr

132) GRUP

146) radical e puțin complicat a iese cv cu $[0^0]$ lu ... → e

mai bine raportul

154) comp?

189) Leibniz

de lucrat măcar 30 de serii

195) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}\right)^n \cdot a^n$, $a>0$ m-a lăsat să aplic radicalul

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}} \cdot a = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right)}{4^{n+1}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+1\right)} \cdot a$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^n \cdot 4} \cdot a = \frac{a}{4} =$ Serie convergentă dacă $\frac{a}{4} < 1 \Leftrightarrow a < 4$

S. div pt $\frac{a}{4} > 1 \Rightarrow a > 4$

pt $a=4$ $\xrightarrow{\text{suf. div}}$ $\sum \left(\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}\right)^n \cdot 4^n$? $a=4$

$\sum \left(\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}\right)^n \cdot 4^n$ rel duc să dască $[1^\infty]$

$\to [0, \infty]$

$\|$

a_n

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\cdot 3^n+4^{n+1}}{4^{n+1}+3^{n+1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{3^n}{4^{n+1}+3^{n+1}}\right)^{\frac{4^{n+1}+3^{n+1}}{3^n}}}_{e}\right]^{\frac{3^n}{4^{n+1}+3^{n+1}}\cdot n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{3^n\cdot n}{4^{n+1}+3^{n+1}}}$$

se merge L'H

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot n}{3^{n+1}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}+1\right)} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n+3} \to 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^0 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ S. divergentă din crit. de suficient divergență

194) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}$, $a>0$ $\quad x_n$ termeni poz. crescători

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{a(a+1)\cdots(a+n)} : \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{\cancel{a(a+1)}\cdots\cancel{(a+n-1)}(a+n)}\cdot\frac{\cancel{a(a+1)}\cdots\cancel{(a+n-1)}}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}(n+1)}{(a+n)\cancel{(n!)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a+n} = 1 \quad \underline{\text{nu}}\ ?$$

Folosim Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \cancel{n\left(\frac{n+1}{a+n}-1\right)}\ n\left(\frac{a+n}{n+1}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a-1}{a+n}\right) = a-1 \Rightarrow \begin{cases} \text{S. conv. } a-1>1 \Leftrightarrow a>2 \\ \text{S. divergentă } a-1<1 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow a<2 \\ ?\ a=2 \Rightarrow \text{mai sus nu enunț} \end{cases}$$

pt $a=2 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{2\cdot 3\cdots(n+1)} =$

$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} \sim \sum \frac{1}{n}$

$\hookrightarrow$ S armonică divergentă termeni pozit

• $\sum \frac{(-2)^n + 3^n}{(-3)^n + 5^{n+1}} \cdot \sin\frac{\pi}{2n}$ AM

$a_n = \sqrt{n} \cdot \frac{3^n\left(\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 1\right)}{5^{n+1}\left(\frac{(-3)^n}{5^{n+1}} + 1\right)} \cdot \sin\frac{\pi}{2n}$

raportul sin bază nu nr

$\sqrt{n} \cdot \frac{3^n}{5^{n+1}} \cdot \frac{\pi}{2n}$

$\hookrightarrow$ la puterile cele mai mari

$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1 \in (0,\infty) \Rightarrow \sum_n a_n \sim \sum b_n =$

$= \sum \sqrt{n} \cdot \frac{3^n}{5^{n+1}} \cdot \frac{\pi}{2n} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ echiv cu not.

cu constantele

lim și în fac crit raport

$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow$ S. convergentă

$\to 1$

• $\sum_{n\geq 1} \underbrace{n^2\left(\frac{a}{e}\right)^n}_{x_n}, a>0$ raport $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2\left(\frac{a}{e}\right)}{(n)^2\left(\frac{a}{e}\right)}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot \frac{a}{e}}{(n)^2} = \frac{a}{e} \Rightarrow$

S. conv, $\frac{a}{e} < 1 \Rightarrow a <$

S. div, $\frac{a}{e} > 1$, a

?, $\boxed{a = e}$

Facem R.D pt $a = e$

$\cancel{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n} \text{ dar } l=1}$ Nu putem ne ajunge pt cu

pt $n=e \Rightarrow \sum_{n\geq 1} n^2 \Rightarrow$ S. divergentă

$\hookrightarrow a \neq 0$

$$\sum n!\left(\frac{a}{n}\right)^n, a>0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}\cdot\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{a}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot a$$

$$= a\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{-1}{n+1}\cdot n}}$$

$$= a e^{-1} = \frac{a}{e} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{e}-1\right) = \begin{cases} \text{S convergentă } e, \frac{a}{e}<1 \Leftrightarrow a<e \\ \text{S. divergentă}, \frac{a}{e}>1 \Leftrightarrow a>e \\ \text{? pt } a=e \text{ fac R.D} \end{cases}$$

$$\cancel{= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n - e n^n}{e n^{n-1}}}$$

$$\frac{1}{n}\to x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{e}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{e}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{e}-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x} =$$

$$(f^g)' = \left(e^{g\ln f}\right)' = \dots$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}\cdot\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} \to$$

completăm cu

$\to \frac{\frac{1}{1+x} \cdot 1}{2x} \cdot \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \xrightarrow[L'H]{\left[\frac{0}{0}\right]} \frac{-x}{2x(1+x)} \longrightarrow -\frac{1}{2}$

$(*) = -\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Serie divergentă

Dacă fac cu rap mai dă 1 nu ajută

ex de examen

- $\sum_{n\geq 1} a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ (apelez $a>0$) $= \sum_{n\geq 1} a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ $\times n$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = \gamma \in (0,1)}$$

comparăm cu asta. $a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n}$

Fie $y_n = a^{\ln n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}$

$= \cancel{\lim_{n\to\infty}} a^{\gamma} \in (0,\infty) \Rightarrow \sum x_n \sim \sum y_n = \sum a^{\ln n} =$

$= \sum n^{\ln a} = \sum \frac{1}{n^{-\ln a}} =$ o fac armonică

$\begin{cases} \text{S. conv, pt } -\ln a \\ \Leftrightarrow \ln a < 1 \Leftrightarrow a < e \\ \text{Soluție pt } a \geq \frac{1}{e} \end{cases}$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n} \geq \frac{1}{n}$ criteriul comparației

$\sum \frac{1}{n}$ este armonică divergentă

$\Rightarrow \sum x_n$ divergentă

- Leibniz $\to$ trb să arăt că $a_n \to 0$ și $(a_n)\downarrow$

a) convergentă?

b) absolut convergentă?

$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$ a_n

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ nu este monotona mai cu rap mici cu scadere, folosesc o fct. ajutătoare

fie $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x>0$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = e$

x	0		e	$3 \in \mathbb{N}$	∞
$f'(x)$	$+ + + + + +$		0	$- - - - - -$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(e) = \frac{1}{e}$	$\searrow$	

mă pot opri la o poziție cu ∞ să fie $\downarrow$

$f \downarrow$ pe $[3, \infty)$

$(a_n)_{n \geq 3} = (f(n))$ este $\downarrow$ tratez cu Leibniz de la 3.

$\xRightarrow{\text{Leibniz}}$ $\sum_{n \geq 3} (-1)^n \cdot a_n$ este convergentă dar

$\sum_{n \geq 3} (-1)^n a_n \sim \sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ este convergentă

Acum pt absolut convergentă studiez natura seriei $\sum_{n \geq 1} \left| (-1)^n \frac{\ln n}{n} \right|$

Scap de -1 prin modul

$= \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n} \to \infty \rightarrow$ logaritm sau condensare

am arătat că $(a_n) \downarrow \Rightarrow$ pot să merg ușor cu condensare

$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n} \sim \sum_{n \geq 3} \frac{\ln n}{n}$ descrescător din (a)

seria divergentă

crit. condensării $\sim$ $\sum_{n \geq 3} \frac{2^n \cdot \ln 2^n}{2^n} = \sum_{n \geq 3} n \ln 2$ $\sim \sum_{n \geq 3} n$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \left| (-1)^n \frac{\ln n}{n} \right|$ este ~~diverg~~ divergentă

$\Rightarrow$ Seria nu este absolut convergentă

- $\sum_{n \geq 1} \sin(\pi \sqrt{n^2+1})$ are termeni alternanți $\Rightarrow$ printr-un $\to \infty$ artificiu de calcul

$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(\underbrace{\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi}_{\text{folosim } \sin(a+b)} + n\pi) =$

$= \sin(\pi(\sqrt{n^2+1} - n))\underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n} + \cos(\pi(\sqrt{n^2+1} - n))\underbrace{\sin n\pi}_{0} =$

$= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{\underbrace{\sqrt{n^2+1}+n}_{\to\infty}}\right) \xrightarrow{\text{Leibniz}} S \text{ conv}$

$\to 0$

Dacă mai cere absolut convergența mă aștept la $\sum (-1)^n$

(*) Natura seriilor?

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^\lambda}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ | Se fac cu Abel-Dirichlet

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n \cdot \cos\frac{1}{n}}{n}$

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{\sqrt{n}}$

a) încercăm să aducem la primele condiții

$\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{1}{n^\lambda}}_{x_n} \cdot \overbrace{\cos nx}^{y_n}$

$x_n = \frac{1}{n^\lambda} \searrow 0 \xrightarrow{AD} (a) \checkmark$

$M = ?$ $M \in \mathbb{R}$ a.î. $|\underset{\cos x}{y_1} + \underset{\cos 2x}{y_2} + \dots + \underset{\cos nx}{y_n}| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

se pleacă de la forma trig a unui nr complex și se aplică Moivre $x \neq 2k\pi$

Fie $z = \cos x + i\sin x \in \mathbb{C} \xrightarrow{\text{Moivre}} z^2 = \cos 2x + i\sin 2x$

$z^3 = \cos 3x + i\sin 3x$

$\dots$ z^n

Și acum și mai interesează suma cos

$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \mathrm{Re}\,(\underbrace{z + z^2 + \dots + z^n}_{\text{Suma pr. geom}}) =$

$= \mathrm{Re}\left(z \cdot \frac{z^n - 1}{z - 1}\right)$ $\quad x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z \neq 1$

$z \neq 1$

$= \mathrm{Re}\left(\frac{\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x - \cos x - i\sin x}{\cos x + i\sin x - 1}\right) =$

$= \mathrm{Re}\left[\frac{\cos(n+1)x - \cos x + i(\sin(n+1)x - \sin x)}{\cos x - 1 + i\sin x}\right]$ Amplific cu conjugata

$\cos x - 1 - i\sin x$

$= \mathrm{Re}\left[\frac{(\cos(n+1)x - \cos x + i(\sin(n+1)x - \sin x))(\cos x - 1 - i\sin x)}{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x}\right] =$

produs $(a + ib)(c + id)$ Re $\to ac - bd$

$\Rightarrow \frac{(\cos(n+1)x - \cos x)(\cos x - 1) + (\sin(n+1)x - \sin x) \cdot \sin x}{2 - 2\cos x} \Rightarrow$

$\Rightarrow |y_1 + y_2 + \dots + y_n| = \quad \Big| \leq$

$\leq \frac{6}{2(1 - \cos x)} = \frac{3}{1 - \cos x} = M$

$\Rightarrow$ a) ✓

$\xrightarrow{A\ D} \sum x_n y_n$ convergentă $\forall\, x \neq 2k\pi$

pt $x = 2k\pi$ mă ajutăc cu enunț

pt $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{enunț}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\lambda} \underbrace{\cos(2nk\pi)}_{1} =$

$= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\lambda}$ armonică $\begin{cases} \text{conv}, & \lambda > 1 \\ \text{div}, & \lambda \leq 1 \end{cases}$

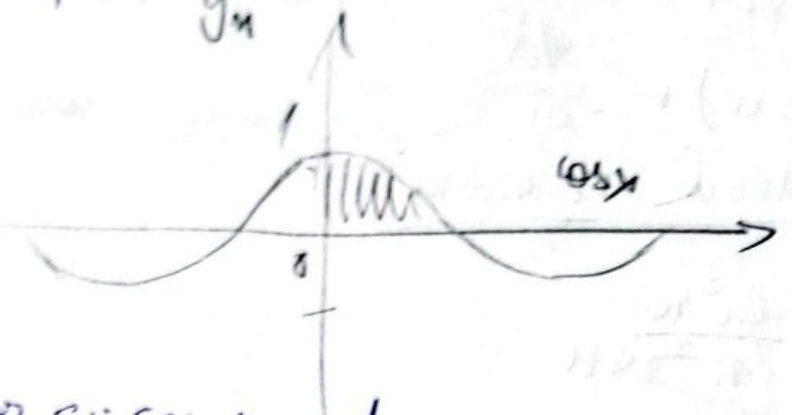
1.) Folosim a folosim setul 2 de condiții din 403

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n \cdot \cos\frac{1}{n}}{n} = \sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{\cos n}{n}}_{y_n} \cdot \underbrace{\cos\frac{1}{n}}_{x_n}$$

$x_n = \cos\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

$n \xrightarrow{\infty} \Rightarrow \frac{1}{n} \xrightarrow{\infty} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n$ crește la 1



$\Rightarrow (x_n)$ este crescător și convergent $\longrightarrow (x_n)$ mărginit

Orice șir convergent e mărginit

$\Rightarrow$ b) i) ✓

Arăt că $\sum_n y_n$ convergentă

fie $y_n = \frac{\cos n}{n} \Rightarrow \sum \frac{\cos n}{n} = \underbrace{n^{(1)}}_{=\lambda} = x \neq 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ și λ din a)

conform a) $\Rightarrow \sum y_n$ convergentă $\Rightarrow$ b) ii) ✓

A.D. b) $\Rightarrow \sum x_n y_n$ este convergentă

c) $$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{\sqrt{n}} = \sum \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{x_n} \cdot \underbrace{(\sin n \sin n^2)}_{y_n}$$

$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$ a), i) ✓

$y_n = \sin n \cdot \sin n^2 = \frac{1}{2}\left(\cos(n^2 - n) - \cos(n^2+n)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos(n(n-1)) - \cos(n(n+1))\right) \Longrightarrow$

$$\boxed{\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)}$$

$\Rightarrow \left|y_1 + \dots + y_n\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\cos(1\cdot 0) - \cos(1\cdot 2) + \cos(2\cdot 1) - \cos(2\cdot 3) + \dots\right.$

$\left. + \dots + \cos(n(n-1)) - \cos(n(n+1))\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\underbrace{\cos 0}_{1} - \cos(n(n+1))\right|$

$= \frac{1}{2}\left|1 - \cos(n(n+1))\right| \le \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 = M \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a ii) ✓ $\xrightarrow[A)]{AD} \sum_{n\ge 1} x_n y_n$ convergentă

• <u>criteriul logaritmic</u>

$\sum_{n\ge 1} \underbrace{\frac{\ln^3 n}{n^2}}_{\to 0}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n^2}{\ln^3 n}\right)}{\ln n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^2 - \ln(\ln^3 n)}{\ln n} = \cancel{2\ln}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n - \ln(3\ln n)}{\ln n} = 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln^3 n)}{\ln n}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3\ln x)}{\ln x} \underset{L'H}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3\ln x} \cdot \frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\ln x} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(2 - \cancel{\lim} \frac{(\ln^3 n)}{\ln n}\right) = 2 > 1 \Rightarrow$ serie convergentă

Seminar 4 **Șiruri de funcții** **Convergență simplă, uniformă**

Fie $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Spunem că $f_n \xrightarrow[\text{converg}]{(S)} f$ dacă: $\forall x \in A$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (adică $\forall x \in A$, șirul numeric $(f_n(x))$ are limita nr. $f(x)$)

Spunem că $f_n \xrightarrow{s} f$ dacă: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in A$

→ ar să fie în această bandă în o copie a lui f din banda

P1 $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{s} f$

Dacă f_n converge uniform la $f \Rightarrow f_n$ converge simplu la f

P2 $f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Teoremă Teorema de transport a continuității prin convergență uniformă:

Fie $f_n, f : A \to \mathbb{R}$
$f_n \xrightarrow{u} f$
f_n cont pe A, $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f$ cont pe A

$\neg T$

negația teoremei:

Dacă: $f_n \xrightarrow[A]{s} f$
f_n cont pe A, $\forall n \in \mathbb{N}$
f nu e cont pe A
$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow[A]{u} f$

În exercițiu: $f_n : A \to \mathbb{R}$ date

C.S., C.U.? (conv. simplă / uniformă)

CS Fie $x \in A$ fixat

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \underbrace{____}_{\text{not}}$

$f(x)$ o definesc pe oricare mult.

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{s} f$

C.U

Dacă f nu e continuă (f_n e mereu continuă) $\overset{TT}{\Longrightarrow} f_n \xrightarrow{u} f$

f este continuă $\to$ P_2

P_2 $f_n \xrightarrow{u} f \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

x

$(\ )'$

tabel ca la n la n-a derivat în rap cu x

$\sup$ (poate să rămână în $n = ct$) trec la lim. după n

$0 \le \sup\limits_{x\in A} |\quad| \le \boxed{\cdots n}$ prin clește se duce la zero

$\downarrow 0$ $\quad \leftarrow 0$ în care condiție n

găsesc $x_0 \in A$

$\sup\limits_{x\in A} |\cdot\cdot| \ge \boxed{n} \longrightarrow (+) \Rightarrow$

Ambarcesc avem pe x_0 cu x_0 ar. să fundă la CU strict poz

$\Rightarrow \lim \neq 0$ mă interesează să știu dacă e sau nu zero pt P_2

~~Dacă am f~~

Dacă mi se are pe 2 mulțimi înseamnă că la una am CU și la cealaltă nu, $\Rightarrow$ la ea mai mică avem și la cealaltă nu $\to$ logic

1) Fie $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in (0,1)$ $\subset$ S, C. U?

Sol $\boxed{\text{C. S.}}$ Fie $x \in (0,1)$ fixat

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0$ prevăzut ca o funcție

Fie $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ $\forall x \in (0,1)$

$\to f_n \xrightarrow[(0,1)]{S} f$

$\boxed{C.U.}$ f cont pe $(0,1)$ $\Rightarrow$ nu aplic teorema

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = ?$ (este sau nu zero)

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$x>0, n\in\mathbb{N}$ $\qquad g(x)$

Sol 1 $\quad g'(x) = \dfrac{(nx)'(1+n^2x^2) - nx(1+n^2x^2)'}{(1+n^2x^2)^2} =$

$$= \frac{n(1+n^2x^2) - nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n+n^3x^2-2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} =$$

$$= \frac{-n^3x^2+n}{(1+n^2x^2)^2} \Rightarrow g'(x)=0 \quad n-n^3x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2n^3 = n \Rightarrow x^2n^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{n}$$

x	0				$\frac{1}{n}$				1
$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)'$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{nx}{1+n^2x^2}$		$\nearrow$			$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$		$\searrow$		

$$\Rightarrow \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u} f$ $\quad$ f_n nu converge uniform la f

Sol 2 $\quad \sup\limits_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in(0,1)} \left(\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right) \geq \dfrac{1}{2} > 0$

$x_0 = \frac{1}{n}$

$\Downarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,1)} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right) \neq 0 \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u} f$$

Ex2 $\quad f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$,

$\forall x\in[0,1]$. $\quad$ C.S = ? $\quad$ e. U ?

$\boxed{C.S.}$ fie $x \in [0,1]$ fixat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} =$$

funcția se supe cu 1
∇ cond cu interval suchis trb să se vadă cum
se schimbă în capete.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ \frac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$$

fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ \frac{1}{2}, & x=1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$$

$\boxed{C.U.}$ Dacă fct. nu e cont $\to$ folosesc teorema

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0$ | $\Rightarrow$ f nu e continuă în $x_0=1$ $\Rightarrow$

$f(1) = \frac{1}{2}$ | $\Rightarrow$ f nu e cont pe $[0,1]$

(sol 1 cu teorema)

Observăm că f_n cont pe $[0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\xrightarrow{TT}$

$$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u} f$$

Sol 2 - fără teoremă

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = ?$$

$x_0 = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

mere să arăt că:

$$\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| > \dots > (+)$$

$$= \sup_{x\in[0,1)} \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| = \sup_{x\in[0,1)} \left(\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) \geq \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} \to 0$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \dots \neq 0 \Rightarrow$ nu e convergentă uniform

Mărți ora 8 sala 10

(3) fie $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}$, $\forall x$, $\forall n \in \mathbb{N}$

c.s. c.u. pt $[0,2]$ și $[2,\infty)$

Sol: $[0,2] \Rightarrow$ $\boxed{\text{c.s.}}$ fie $x \in [0,2]$ fixat

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+1}{nx+1}$

Dacă intervalul e închis $\Rightarrow$ capetele!

pt $x=0$ lim $\to 1$ pt $x=0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$

pt $x=2 \Rightarrow$ lim $\to 2$

$x \in (0,2) \Rightarrow$ lim este x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+1}{nx+1} = \begin{cases} 1, & x=0 \\ x, & x\in(0,2] \\ 2, & x=2 \end{cases} \to \begin{cases} 1, & x=0 \\ x, & x\in(0,2] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ fie $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ \cancel{x\in} x, & x\in(0,2] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[[0,2]]{s} f$

C.U

Sol 1

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$

$\lim f(0) = 1$

$\to$ f nu e cont în $x=0$

$\Rightarrow f$ nu e cont pe $[0,2]$

$\xrightarrow{TT}$ $f_n \not\xrightarrow{u} f$

Observ că f_n cont pe $[0,2]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$f_n \not\xrightarrow[[0,2]]{u} f$

Sol 2

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| = ?$

$\frac{1-x}{nx+1}$ $\frac{1}{n} \in (0,1)$

$$\sup_{x\in(0,2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,2]} \left| \frac{nx^2+1}{nx+1} - x \right| \geq \frac{1-\frac{1}{n}}{1+1} \xrightarrow{n} \frac{1}{2} > 0$$

$x_0 = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| \neq 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[[0,2]]{\text{C.U}} f$

$[2,\infty)$ C.S: Fie $x\in[2,\infty)$ fixat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+1}{nx+1} = x$$

Fie $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}$, $\cancel{f(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}}$ $f(x)=x$

Ch. $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{s} f$

C.U. $\lim_{n\to\infty} \sup_{[2,\infty)} \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{} = ?$

$$\left|\frac{1-x}{nx+1}\right| = \frac{x-1}{nx+1}$$

Sol 1

$$0 \le \sup_{x\in[2,\infty)} \left(\frac{x-1}{nx+1}\right) \le \frac{x+\frac{1}{n}}{n(x+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} \to 0$$

Supremum dum 1n pot ore mereu un stânga pe zero

$\lim_n \sup_x |\,| = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

Sol 2 dovit

x	2							∞
$\left(\frac{x-1}{nx+1}\right)'$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{nx+1}$								$\frac{1}{n}$

$$\left(\frac{x-1}{nx+1}\right)' = \frac{(x-1)'(nx+1)-(x-1)(nx+1)'}{(nx+1)^2} = \frac{nx+1-(x-1)n}{(nx+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{nx}+1-\cancel{nx}+n}{(nx+1)^2} = \frac{n+1}{(nx+1)^2} > 0 \Rightarrow \cancel{\lim_{x\to\infty}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{nx+1} = \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sup = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$$

(4.) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{[n\cdot f(x)]}{n}$, $\forall x\in[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$

$f_n : [a,b]\to\mathbb{R}$ $\boxed{C.S.}$, $\boxed{C.U.}$?

$\boxed{C.S.}$ Fie $x\in[a,b]$ fixat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{[n\cdot f(x)]}{n}$$

Știm că $t-1<[t]\le t$, $\forall t\in\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$

partea întreagă e întregul din stânga

$$\Rightarrow n f(x) - 1 < [n f(x)] \le n\cdot f(x) \quad \Big| \cdot \frac{1}{n} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n f(x)-1}{n} < \frac{[n f(x)]}{n} \le f(x) \xrightarrow{\text{deci}}$$

$$\frac{n f(x)-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} f(x), \quad \frac{[n f(x)]}{n} \xrightarrow{n\to\infty} f(x), \quad f(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ deoarece

sol 2 $$\lim_{n\to\infty} \frac{n f(x) - \{n f(x)\}}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - \frac{\{n f(x)\}}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{S} f$$

nu mă bazez pe teoremă pt că nu știu nimic de continuitate

$\boxed{C.U.}$ $$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|} =$$

$$= \sup_x \left| \frac{[n f(x)]}{n} - f(x)\right| = \sup_{[a,b]} \left| \frac{[n f(x)] - n f(x)}{n}\right| =$$

$$= \sup_{[a,b]} \left| \frac{\cancel{n f(x)} - \{n f(x)\} - \cancel{n f(x)}}{n}\right| = \cancel{\lim} \sup_{[a,b]} \left| \frac{\{n f(x)\}}{n}\right| \le \frac{1}{n}$$

$$0 \le \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \le \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$$

5. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx^2} \cdot \sin nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

C.S = ? C.U.?

<u>C.S</u> fie $x \in \mathbb{R}$ fixat

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{e^{-nx^2}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin nx}_{\text{mărginit}} = 0$$

fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ $\Rightarrow f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{s} f$

$\boxed{\text{C.U}}$ f continuă

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = ?$$

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| e^{-nx^2} \cdot \sin nx \right| = \sup_{\mathbb{R}} e^{-nx^2} \cdot |\sin nx| \ge e^{-n \cdot \frac{\pi^2}{4n^2}} \cdot 1 = e^{-\frac{\pi^2}{4n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| > 0 \Rightarrow$$

$x = \frac{\pi}{2n}$

am succesat să iau o val a sin scop de sinus

$$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f$$

merge și $x_0 = \frac{1}{n}$ că avem $\sin 1$

6. $f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$, $\forall x \in [0, \pi]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

C.S., C.U = ? și pt șirul derivatelor $(f_n')_n$ → derivăm cu x

pt f_n: $\boxed{\text{C.S}}$ fie $x \in [0, \pi]$ fixat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\cos nx}^{\text{mărg.}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(\cos nx)}_{\to 0} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}^{\to 0} = 0$$

fie $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{S} f$

$\boxed{C.U.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{[0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| \cancel{= \lim} = ?$

$0 \le \sup\limits_{[0,\pi]} \left|\frac{\cos nx}{n}\right| \le \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{[0,\pi]} \left|\frac{\cos nx}{n}\right| = 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

$f'_n(x) = \frac{(\cos nx)' \cdot n - \cos nx \cdot n'}{n^2} = \frac{-n \sin nx \cdot n}{n^2} =$

POZE CU EX REZOLVATE - de citit pe ele.

$= \frac{-n^2 \sin nx}{n^2} = -\sin nx$

$f'_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\quad f'_n(x) = -\sin nx$

$\boxed{C.S.}$ fie $x \in [0,\pi]$ fixat, $\lim\limits_{n\to\infty} (-\sin nx) \nexists$

$\Rightarrow \exists f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ a.î. $f'_n \xrightarrow[{[0,\pi]}]{S} f$

$\Rightarrow$ nu sunt unif. conv. uniformă.

Serii de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ rază de conv? mulț. de conv? ~~suma seriei~~?

$\hookrightarrow$ trb să avem forma asta

calculez $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ $\Rightarrow R = \frac{1}{l}$ $\Rightarrow$

$\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ $\left(\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty\right)$

T $\Rightarrow$
- S. absolut convergentă pt $x \in (-R, R)$
- S div, $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$
- S. uniform conv, $x \in [-a, a] \subset (-R, R)$

pt $x = -R$, $x = R$ $\longrightarrow$ se locuim se emite și res 2 serii numerice

Inlocuim cu enunt $\rightarrow$ $\sum_n (b_n)$ $\in \mathbb{R}_+$ ①

$\sum_n (-1)^n b_n$ ② aceste cu Leibniz

$\lim_{n\to\infty} b_n \rightarrow \neq 0 \Rightarrow$ ①, ② div

$\rightarrow = 0 \Rightarrow ?$ criterii pt serii numerice

trb stabilita natura ale lor $\Rightarrow A_x = (-R, R)$ sau $[-R, R]$ sau $(-R, R]$ sau $[-R, R)$

Mulțimea conv pe

① $\sum (-1)^n \left(\frac{2n+1}{6n-5}\right)^n \left(\frac{x-3}{x}\right)^n$ $x \neq 0$

a_n y

② $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n + (-4)^n}{n} (x+2)^n$, $x \in \mathbb{R}$

sau y

③ $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(-1)^n + 4^n}$, $x \in \mathbb{R}$

Rezolvari ① $\sum a_n y^n$ luăm cu radical

$l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \frac{2n+1}{6n-5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{R = 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S. abs. conv pt $y \in (-3, 3)$

S. div pt $y \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

S. unif conv. $y \in [-a, a] \subset (-3, 3)$

pt $y = 3 \Rightarrow \sum_n (-1)^n \left(\frac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot 3^n = \sum_n (-1)^n \cdot \left(\frac{6n+3}{6n-5}\right)^n$ ①

b_n

$y = -3 \Rightarrow \sum_n \left(\frac{6n+5}{6n-5}\right)^n$ ①

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n+3}{6n-5}\right)^n = \left[\frac{1}{a}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{8}{6n-5}\right)^{\frac{6n-5}{8}}\right]$

$\lim e^{\frac{8n}{6n-5}} = e^{\frac{8}{6}} = e^{\frac{4}{3}} \neq 0$

$\Rightarrow A_y = (-3,3) \Rightarrow \begin{cases} y > -3 \\ y < 3 \end{cases}$

$y = \frac{x-3}{x}$ dim restatie $\quad \frac{x-3}{x} > -3 \quad \frac{x-3}{x} < 3$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4x-3}{x} > 0 \\ \frac{12x+3}{x} > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		∞
$4x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4x-3}{x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\frac{4x-3}{x} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{3}{4}, \infty)$

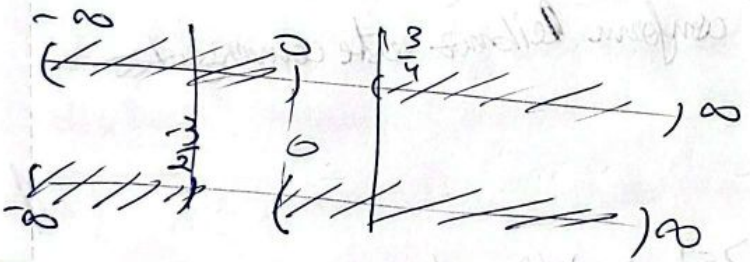
$\frac{2x+3}{x} > 0$

$2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3$
$x = -\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		∞
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$\frac{2x+3}{5} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (0, \infty)$

$\Rightarrow \cancel{A_x \in} A_x = \cap = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{4}, \infty)$



Ex2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}+(-4)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n+(-4)^n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-4)^{n+1}}\left(\left(\frac{3}{-4}\right)^{n+1}+1\right)}{\cancel{-4^n}\left(\left(\frac{3}{-4}\right)^n+1\right)} \right| \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{\underbrace{\left(\frac{3}{-4}\right)^{n+1}}_{\to 0}+1}{\underbrace{\left(\frac{3}{-4}\right)^n}_{\to 0}+1} \cdot \frac{n}{n+1} < 4 \Rightarrow \underline{\underline{R = \frac{1}{4}}}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{s abs conv pt } y \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \\ \text{S. div pt } y \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \infty) \\ \text{S. unif conv pt } y \in [-a, a] \subset (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \end{cases}$

$y = \frac{1}{4} \Rightarrow \sum (-1)^n \frac{\left[\left(\frac{3}{-4}\right)^n + 1\right]}{n} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n =$

$= \sum (-1)^n \frac{\left[\left(\frac{3}{-4}\right)^n + 1\right]}{n} > 0$ ①

pt $y = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sum \frac{\left(\frac{3}{-4}\right)^n + 1}{n}$ ② b_n

limita o să fie zero trb să îl calculez

② crit. comparației

fie $c_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1 \in (0, \infty) \Rightarrow$

al mai mare de sus și cel mai mare de jos

$\Rightarrow S_2 \sim \sum \frac{1}{n}$ seria armonică $\Rightarrow$ S divergentă

① termeni alternanți dar nu merge Leibniz $\rightarrow$ spre sus

$\sum \frac{\left(\frac{3}{-4}\right)^n}{n}$ conv $+ \sum (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$ conv $=$ convergentă

crit raportului, ser. t. poz

conform Leibniz este convergentă

$\Rightarrow$ convergentă

$A_y = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow$

$y > -\frac{1}{4} \Rightarrow x+2 > -\frac{1}{4} \Rightarrow x > -\frac{9}{4}$

$y \le \frac{1}{4} \Rightarrow x+2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow x \le -\frac{7}{4}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_x = \left(-\frac{9}{4}, -\frac{7}{4}\right]$

Ex3 $a_n = \frac{1}{\left((-1)^n + 4\right)^n}$ $\Rightarrow$ radical

șirul asta nu e conv pt că are ori 5 ori 3 la numărator

$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{1}{(-1)^n + 4}\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{(-1)^n + 4}$

$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{1}{5}$ (ci pari) $\quad \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\lim} x_n = \max(\underbrace{\alpha}_{\text{Lrond}}((x_n)_n)) = \max\{\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow l = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{R = 3}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{S. Abs. conv}, & x \in (-3,3) \\ \text{S. div pt} & x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty) \\ \text{S. unif conv}, & x \in [-a,a] \subset (-3,3) \end{cases}$

$x = 3 \Rightarrow \sum \frac{1}{((-1)^n+4)^n} \cdot 3^n = \sum \left(\frac{3}{4+(-1)^n}\right)^n \to b_n$

$x = -3 \Rightarrow \sum (-1)^n \cdot \left(\frac{3}{4+(-1)^n}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} = 0$ nu suferă numărul

$\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 1^{2n+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow b_n \underset{n}{\not\to} 0 \Rightarrow$ ① și ② div

$\Rightarrow A_x = (-3,3)$

Seminar 8 — Topologie

Fie mulțimile: a) $A = (0,4] \cup \{5,6\}$

b) $B = (3,\infty) \cap \mathbb{Q}$

c) $C = \{\frac{1}{\sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$\mathring{A}$ = interiorul => mult. pct de acumulare? mult. închisă? deschisă? compactă? convexă? A', $\bar{A}$ => $Fr A$ (frontiera)?

a) $\mathring{A}$ = interiorul → ? → cea mai mare mult. deschisă $\subset A$

$A = (0,4)$ Arăt că nu e alta deschisă mai mare

$\bar{A} = A \cup A'$ mult. pct de acumulare →

$Fr A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

A mult. deschisă ⟺ $A = \mathring{A}$

A mult. închisă ⟺ $A = \bar{A}$

A compactă ⟺ A marg & închisă

A convexă ⟺ A = interval

pct de acumulare dacă în orice vecinătate a lui găsești o inf de elem ale mult.

(P) $x \in A' \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_x$, $V \cap A = \infty$ de elem.

$A' = [0,4]$

$\bar{A} = A \cup A' = [0,4] \cup \{5,6\}$

$Fr A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{0,4,5,6\}$

A deschisă nu

A închisă nu

A compactă $\left[\begin{array}{l}\text{mărginită} \\ \text{nu e închisă}\end{array}\right\} \Rightarrow$ nu e compactă

A nu e interval $\Rightarrow$ A nu e conexă

b) $\mathring{B} = \emptyset$ presupun că se nu are fi int

Unica mult. cu punct izolate o să aibă int $= \emptyset$

$B' = [3,\infty)$ aptele sunt și ele

$\bar{B} = B \cup B' = [3,\infty)$

$Fr B = [3,\infty)$

B deschisă nu

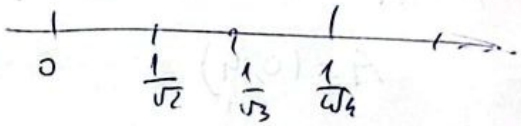
B închisă nu

B conexă nu pt că nu e interval

B compactă nu pt că nu e închisă și mărg

c) $\mathring{C} = \emptyset$ are punct, extreme

$C' = \{0\}$



$\bar{C} = A \cup A' = C \cup \{0\}$

$Fr C = C \cup \{0\}$

C deschisă nu (nu e = cu interiorul)

C închisă nu

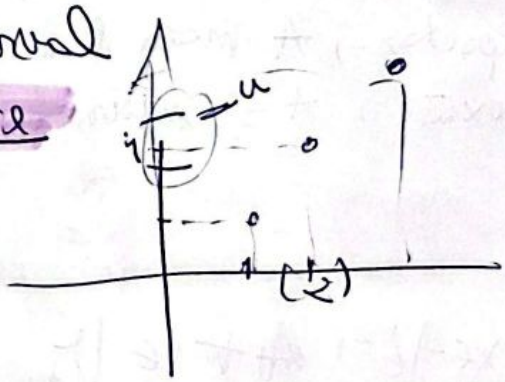
C compactă nu

C conexă nu pt că nu e interval

Continuitate. Uniform continuitate

$f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$. $f(x) = x^2$

f continuă în $\{1,2,3\}$



Studiați continuitatea funcțiilor

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ Lucrăm cu limi laterale

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x \sin \frac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \sin \frac{1}{x} = 0$ $f(0) = 0 \Rightarrow f$ cont în $x_0 = 0$

mărg $\cdot$ 0 = zero

~~$\lim\limits_{x \to 0}$~~ evident f cont pe $\mathbb{R}^*$ din op. cu fct. elem.

$\Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{|x|} = ?$

f cont pe $\mathbb{R}^*$ din op. cu fct. elem.

$\nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\frac{\sin x}{|x|} \begin{cases} \frac{\sin x}{-x}, & x < 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{-x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{\Longrightarrow}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\cos x}{-1} = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\cos x}{1} = 1$ $f(0) = 0$ f nu e cont în $x_0 = 0$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{|x| + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ continuitatea

~~$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty}$~~ e^{nx} $\to \infty$ pt $x > 0$

$\to 1$ pt $x = 0$

$\to 0$ pt $x < 0$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & \text{pt } x = 0 \\ |x|, & \text{pt } x < 0 \Rightarrow -x, \text{ pt } x < 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

$f(0) = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ e cont în $x_0 = 0$

f cont pe $\mathbb{R}^*$ din op. cu fct. elem. $\Big\} \Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}$

<u>Continuitatea fct. Dirichlet</u>

Fie $h, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 funcții cont

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{pt } x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & \text{pt } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Atunci f cont în $x_0 \iff h(x_0) = g(x_0)$, ~~$x_0 \in \mathbb{R}$~~

Demonstrație: "$\Rightarrow$"

nu pot calcula limitele laterale, pt că x_0 se ia și din $\mathbb{Q}$ și din $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și nu pot se lucrez pe ambele ramuri simultan

Pp. f cont în $x_0 \Rightarrow \forall\, x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n} f(x_0)$ (*)

Alg $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}$ cu $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \underbrace{f(x_n)}_{h(x_n)} \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$

$h(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(x_0)$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sunt egale pt că limita e unică

$f(x_0) = h(x_0)$ (1)

Alg nu alt șir $(y_n)_{n\geq 1}$ în $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ cu $y_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$

$\xrightarrow{(*)} f(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$

$g(y_n) \longrightarrow g(x_0)$ $\Big\} \Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$ (2)

$\xrightarrow{(1)\ \text{și}\ (2)} g(x_0) = h(x_0)$

$f(x) = \begin{cases} h(x), & x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ f cont în $x_0 \iff h(x_0) = g(x_0)$

"$\Leftarrow$" pp $h(x_0) = g(x_0) = f(x_0)$

Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ $x_n \xrightarrow{n} x_0$

$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$ asta trb să arătăm pt orice valori, nu tot șirul

$0 \leq |f(x_n) - f(x_0)| = \begin{cases} |h(x_n) - \overset{\overset{\parallel}{h(x_0)}}{f(x_0)}|, & x_n \in \mathbb{Q} \\ |g(x_n) - \underset{\underset{\parallel}{g(x_0)}}{f(x_0)}|, & x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \leq$

$\leq |h(x_n) - f(x_0)| + |g(x_n) - f(x_0)| =$

$= |h(x_n) - h(x_0)| + |g(x_n) - g(x_0)| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n} f(x_0)$

Ex fie $f: [0,2] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 5x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ Continuitatea funcției?

$x_0 \in \mathbb{R}$, f cont în $x_0 \Leftrightarrow x_0^2 = 5x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 5x_0 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0(x_0 - 5) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$, $x_0 = 5 \notin [0,2]$ $\Rightarrow$ fct. e cont în un singur pct și discontinuă în rest

$\{0\}$ este unic punct de continuitate.

(★) Fie $f: [a,b] \to [a,b]$ continuă. Atunci $\exists x_0 \in [a,b]$ a.î. $f(x_0) = 0$ (x_0 s.n. pct. fix pt f) de demonstrat

---

O fct cont duce interval în interval

fie $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$

$g(a) = f(a) - a \geq 0$?

$g(b) = f(b) - b \leq 0$

f cont pe $[a,b] \Rightarrow g$ cont pe $[a,b]$ $\Rightarrow g([a,b]) =$ interval

$[a,b]$ interval

p sigur trece și prin zero

$\Longrightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ a.î. $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$

(★) Arat că $\nexists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă a.î.

$f(x) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(x+1) \notin \mathbb{Q}$

Pp. că $\exists$ o astfel de funcție

fie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(x+1)$

luăm un $x \in \mathbb{R}$ $\to$ a) $f(x) \in \mathbb{Q} \to f(x+1) \notin \mathbb{Q}$

$f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to f(x+1) \in \mathbb{Q}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

scad ceva $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cu ceva $\mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

f cont (ip) $\Rightarrow g$ cont, $\mathbb{R}$ interval $\Big| \to g(\mathbb{R}) =$ interval $\Big| \to$

$\Rightarrow g(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Analog luăm fct. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + f(x+1) \to$

$\to h(x) = l$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$(g+h \Rightarrow 2f(x))$

Cum $2f(x) = g(x)+h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)+h(x)}{2} =$

$= \frac{k+l}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

Dacă $\frac{k+l}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x+1) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ Absurd

Dacă $\frac{k+l}{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow f(x+1) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ Absurd cu primul

$\Rightarrow P_p$ falsă $\Rightarrow \nexists$ o astfel de funcție

Uniform continuitate. Funcții uniform continue

Fie $f: H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Spunem că f uniform continuă pe H dacă:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x, y \in H$ cu $|x-y| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

P1 Orice funcție cont pe un interval compact este uniform continuă

P2 O funcție uniform continuă „duce" un șir Cauchy într-un șir Cauchy

$\neg$ (negația) $\rightarrow$ fie $f: H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}$

$(x_n)_n \subseteq H$, $(x_n)_n$ Cauchy (adică $(x_n)_n$ convergent)

$f(x_n)$ nu este Cauchy

$\Rightarrow f$ nu este uniform continuă pe H

se păstrează la lim-uri

P3 ! Pt lemă

Fie $f: H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție. Sunt echivalente urm. afirmații: 1) f uniform continuă pe H

2) $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \subseteq H$ cu $x_n - y_n \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n} 0$

e bună și negativă

$\Rightarrow$ Dacă găsim $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq H$ cu $x_n - y_n \xrightarrow{n} 0$, dar $f(x_n) - f(y_n) \not\xrightarrow{n} 0$, atunci f nu e unif. continuă

P_4 Orice funcție Lipschitz este uniform continuă

Corolar ($\mathcal{L}$)

consecință

Orice fct. derivabilă cu derivata mărginită este lipschitz, deci unif. cont.

P_5 Fie $f: I \cup J \to \mathbb{R}$

$I \cap J \neq \emptyset$

f unif cont pe I și pe J

$\Rightarrow f$ unif cont pe $I \cup J$

P_6 (prelungirea fct. prin continuitate?)

Fie $f: (a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci f uniform continuă pe $(a, b] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \tilde{f}: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă a.î. $\tilde{f}|_{(a,b]}$

$\hookrightarrow f$ se poate prelungi prin continuitate

A) Studiați uniform continuitatea fct.:

1) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Dar pe $[1, \infty)$?

2) $f: (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

3) $f: (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

5) $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $h(x) = x \sin x$

6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

7) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$

P6 marge la 2, prelungim pe pr. prin continuitate
rezultat interzicând prin continuitate

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ pt nu-a existat limita

$\Rightarrow$ fie $\tilde{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pt } x=0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x\in(0,1] \end{cases}$

$\tilde{f}$ continuă pe $[0,1]$

$\tilde{f}|_{(0,1]} = f \Longrightarrow$ $\Rightarrow$ evident P6 f e uniform continuă pe $(0,1]$

restricționată

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin\frac{1}{x}$ $\nexists$

∞

$\hookrightarrow$ nu pot să o prelungesc prin continuitate pt ca trb ca limita să fie finită $\Rightarrow \nexists\ \tilde{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă a.î.

$\tilde{f}/_{(0,1]} = f \overset{f}{\Longrightarrow}$ nu e uniform continuă (pt ca sin $\Rightarrow$) pe $(0,1]$

P6

4) f este deriv pe $(0,\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x\in(0,\infty)$ (nu e mărg pe $(0,\infty)$)

fie $(x_n)_n \subseteq (0,\infty)$; $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow$

x_n convergent $\Rightarrow$ șir Cauchy

Dar $(f(x_n))_n = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_n = \left(\ln\frac{1}{n}\right)_n$ nu e convergent, $\ln\frac{1}{n} \xrightarrow{n} -\infty$ care nu este șir Cauchy

$\Rightarrow$

$\xrightarrow{P2} f$ nu e unif cont. pe $(0,\infty)$

4) $f(x) = e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Fie $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$ (se ca dif lor se duce la zero)

$\Rightarrow x_n - y_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Dar $f(x_n) - f(y_n) = e^{n+\frac{1}{n}} - e^n = e^n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = [\infty\cdot 0]$ se completează la o lim. semnificativă

$= e^n \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \right) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \neq 0 \xrightarrow{P_3} f$ nu e unif cont pe $\mathbb{R}$

$\to \ln e = 1$

(7) ca să aj un derivabilitate studiez continuitatea

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \underset{\text{mărg}}{\sin \frac{1}{x}} = 0 = f(0) \Rightarrow f$ cont în $x_0 = 0$

f cont pe $\mathbb{R}^*$ din op. cu fct. elementare

$\Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} \nexists, \text{ pt } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} + x\left(\cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right), x \neq 0 \end{cases}$$

cu definiția

$\left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right)' = x' \sin \frac{1}{x} + x\left(\sin \frac{1}{x}\right)' = \sin \frac{1}{x} + x\left(\cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)\right)$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{\frac{1}{x}} \nexists$

$$f'(x) = \begin{cases} \nexists \text{ pt } x = 0 \\ \underset{\text{mărg}}{\sin \frac{1}{x}} - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{mărg la unif.}}}{\frac{1}{x}} \cdot \underset{\text{mărg}}{\cos \frac{1}{x}}, x \neq 0 \end{cases}$$

f nu e deriv peste tot

mărg pe părțile cu infinitari, <u>sparg</u> domeniul în 2 bucăți

$\underbrace{\left((-\infty, -1] \cup [1, \infty)\right)}_{I} \cup \underbrace{[-1, 1]}_{J \text{ compact}}$

f derivabilă cu f' mărginită

J compact + f cont pe $J \xrightarrow{P_5?} f$ unif cont pe I $\left(|f'(x)| \leq 2 \ \forall x \in I\right)$

$I \cap J \neq \emptyset \xrightarrow{P_4} f$ unif. cont pe $I \cup J$

Seminar 9

(*) fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ cont unif?

$f(x) = x^{\alpha}, \alpha > 0$

I) Dacă $\alpha \le 1$

pot ~~se~~ rup în 2 intervalele pt că $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ e mărg la ∞

$[0,\infty) = \underbrace{[0,1]}_{\text{compact}} \cup [1,\infty)$ se putea și $[0,300]$, și orice

$= \underbrace{[0,1]}_{I} \cup \underbrace{[1,\infty)}_{J}$

I = interval compact, f cont pe I $\Rightarrow$ f unif cont pe I (1)

la J derivata e mărginită

f derivabilă pe J

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in J$ $\quad |f'(x)| \le 1, \forall x \in J$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f derivabilă cu derivata mărginită pe J $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f unif cont pe J (2) $\quad I \cap J \ne \emptyset$ (3)

(1) și (2) și (3) $\Longrightarrow$ f uniform continuă pe $[0,\infty)$

din examene

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

a) cont și unif cont

b) fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mărginite și uniform continue

Dem că $f \circ g$ unif cont

este A? afirmația dacă f și g continue dar nu mărginite

derivabilitate cu definiție

nu mai dacă derivata e mărg pe partea cu unif $\to$ rup în 2 intervale, unul compact și celălalt

f cont pe $\mathbb{R}^*$ din op. cu fct. elementare

$\lim_{x \to 0, x<0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0, x>0} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

pt $\alpha > 1 \Rightarrow f$ nu e unif cont

fd. era deriv dar nu era mărg pe partea cu ∞

găsesc 2 șiruri ...

Asta vreau ☑

fie $x_n = (n+1)^{\frac{1}{\alpha}}$ (x_n și y_n trb să ducă la zero)

$y_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$

$x_n - y_n = (n+1)^{\frac{1}{\alpha}} - n^{\frac{1}{\alpha}} = ([\infty - \infty]) \xrightarrow{\text{factor com. forțat}}$

$= n^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) = ([\infty \cdot 0]) \xrightarrow{\text{facem fracție}}$

$= \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$ $\boxed{\frac{1}{n} = y} \to 0$

$\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \dfrac{(1+y)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{y^{\frac{1}{\alpha}}} \overset{LH}{\underset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\frac{1}{\alpha}(1+y)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1}} =$

$= \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{(1+y)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{y^{\frac{1}{\alpha}-1}} = \lim\limits_{y \to 0} \left(\frac{1+y}{y}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$ putere negativă pt $\alpha > 1$

$\frac{1+y}{y} \to \infty$

se inversează fracția

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\infty}\right) \to 0$

$x_n - y_n \to 0$ descrescă

Dar $f(x_n) - f(y_n) = \left((n+1)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} - (n)^{\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha} = n+1-n = 1 \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} f(x_n) - f(y_n) \to 1 \neq 0 \\ x_n - y_n \to 0 \end{array}\right\} \overset{P_2}{\Rightarrow} f$ nu e unif cont pe $[0, \infty)$

---

continuare

$f(0) = 0 \longrightarrow f$ cont în $x_0 = 0 \Longrightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}$

derivabilitate: f deriv pe $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = \begin{cases} \cancel{\frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x^2}}} \; \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Studiem derivabilitatea în zero → mergem pe def

↳ Dacă ∃ limita în punctul fără asa, nu înseamnă neapărat că nu am fct. deriv

$f'_s(0)=0$

$f'_d(0) =$ → Def lim $f'(x)$
→ Def ⇒ merem la fi cât de nedef $[\frac{0}{0}]$

Dacă aplic L'H la def ajung la prima variantă și mă uit mai mare, trb făcut fără L'H

$f'_d(a)$ → $\lim_{x \searrow a} f'(x)$, dacă ∃ — ajungi aici
→ Def : $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Fără L'H

$f'_d(0)$ → $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \right) =$ dacă asta ∃ și mai departe

→ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ $\quad \frac{1}{x} \to t$, $x \to \infty$

$\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ (polinom mai mic pe exponențială)

⇒ $f'_s(0) = f'_d(0)$ ⇒ f deriv în $x_0 = 0$ ⇒

⇒ f deriv pe $\mathbb{R}$

• uniform cont la a?

rămâne I $\quad \frac{1}{x^2}$ marg

Dacă și ambii de mărginire fac lim la ∞ fac cumva să am fct. marg la ∞

$\mathbb{R} = [-1,1] \cup ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$

i compact, $\mathcal{J}$

f cont pe i ⇒ f unif cont pe i

pe $\mathcal{J}$ $\quad$ pe $(-\infty, -1]$ fct. marg

pe $[1, \infty)$ și marg

$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

$\left|\frac{1}{x^2}\right| \le 1, \forall x \in \mathcal{J}$ $\Big\}$ $\Rightarrow f$ este derivabilă cu f' mărg pe $\mathcal{J}$ $\Rightarrow f$ unif cont pe $\mathcal{J}$

$I \cap \mathcal{J} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{J}$ unif cont pe $\mathbb{R}$

b) f și g mărginite $\Rightarrow \exists M>0$ a.î. $\cancel{|f(x)-g(x)|\le M}$

$|f(x)| \le M, \quad |g(x)| \le M, \forall x \in \mathbb{R}$

fie $\varepsilon > 0$ fixat $\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2M, \forall |x-y| < \delta_\varepsilon$

$|g(x)-g(y)| < \varepsilon/2M, \forall |x-y| < \delta_\varepsilon$

Atunci: $|f(x)\cdot g(x) - f(y)\cdot g(y)| = |f(x)\cdot g(x) - f(y)\cdot g(x) + f(y)\cdot g(x) - f(y)\cdot g(y)| \le |g(x)(f(x)-f(y))| + |f(y)(g(x)-g(y))| = \underbrace{|g(x)|}_{\le M}\cdot\underbrace{|f(x)-f(y)|}_{<\varepsilon/2M} + \underbrace{|f(y)|}_{\le M}\cdot \underbrace{|g(x)-g(y)|}_{<\varepsilon/2M} \le 2M\varepsilon/2M = \varepsilon$

$\Rightarrow f\cdot g$ unif cont pe $\mathbb{R}$

- Dacă f și g sunt doar cont. dar nu mărg.

NU ex: $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

funcții unif cont dar $f\cdot g$ nu e unif cont (cu șiruri, dar și ex. interioare)

$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x-1) + \dfrac{e^{(1-x)}-1}{x-1}, & x \in (1,\infty) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

a) cont și deriv funcției?

b) uniform continuitatea?

a) continuitatea: f cont pe $(1,\infty)$ din op cu fct.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\cos(x-1) + \frac{e^{1-x}-1}{x-1}\right) = \underset{\downarrow 1}{\cos 0} + \left(\frac{e^0-1}{0}\right) \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} -\frac{(e^{1-x}-1)}{1-x} \to -\ln e = -1$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 1-1=0 = f(1) \Longrightarrow f \text{ cont in } x_0=1$$

$\Rightarrow f$ cont pe $[1,\infty)$.

derivabilitatea: f deriv pe $(1,\infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x-1) - \dfrac{xe^{1-x}+1}{(x-1)^2}, & x\in(1,\infty) \\ \cancel{0, \ x=1} \end{cases}$$

$$\left(\frac{e^{1-x}-1}{x-1}\right)' = \frac{(-e^{1-x}-1)\cdot(x-1) - (e^{1-x}-1)}{(x-1)^2} = \frac{xe^{1-x} + \cancel{e^{1-x}} - x + 1 - \cancel{e^{1-x}} + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{xe^{1-x} - x + 2}{(x-1)^2} \quad \text{pe}$$

$$xe^{1-x} + \cancel{e^{1-x}} - \cancel{e^{1-x}} + 1$$

derivata în $x=1$: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\left(\cos(1-x) + \frac{e^{1-x}-1}{x-1}\right)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-1)\cos(1-x) + e^{1-x} - 1}{x-1} \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-1)\cos(1-x) + e^{1-x} - 1}{(x-1)^2} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\cos(1-x) + (x-1)\sin(1-x) - e^{1-x}}{2(x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow{L'H}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{+\sin(1-x) + (x-1)'\sin(1-x) + (x-1)\sin(1-x)' + e^{1-x}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-x) + \sin(1-x) + (x-1)\cdot(-1)(\cos(1-x)) + e^{1-x}}{2}$$

$= \frac{1}{2} \Rightarrow f$ derivabilă în $x = 1$

$f'(1) = \frac{1}{2}$

mărginită?

Derivata e mărginită?

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\sin(x-1) - \boxed{\dfrac{xe^{1-x} - 1}{(x-1)^2}}, & x > 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

$\xrightarrow{x \to \infty} 0$ mărg pe partea cu ∞

este mărg derivata pe partea cu ∞?

$$-\sin(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2} \cdot (xe^{1-x} - 1)$$

mărg

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xe^{1-x} - 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{\infty} \to 0$$

$xe^{1-x} \to 0$, $(x-1)^2 \to \infty$

rup $[1, \infty)$ în $[1, 2] \cup [2, \infty)$ — poate fi oricine

fie $[1, \infty) = \underbrace{[1, 2]}_{I} \cup \underbrace{[2, \infty)}_{J}$

I compact, f cont pe I $\Rightarrow f$ unif cont pe I

f derivabilă pe J cu derivata mărginită

considerând $g : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ $\hookrightarrow f$ unif cont pe J

$g(x) = \dfrac{xe^{1-x} - 1}{(x-1)^2}$ e cont

$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ $\Rightarrow g$ mărg pe $[2, \infty)$

$I \cap J \neq \emptyset \Rightarrow f$ unif cont pe $[1, \infty)$

(A) fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + \sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

a) cont și deriv?

b) unif. cont?

f cont pe $(0, \infty)$ ca op cu fct. elem.

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + \sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow{L'H} \lim_{x \to 0} (2x + 2\cos 2x) =$

$= 0 + 2 \cdot \cos 0 = 2$

$\Rightarrow f$ cont pe $x=0$ $\Rightarrow f$ cont pe $[0,\infty)$

derivabilitatea

$$\left(\frac{x^2+\sin 2x}{x}\right)' = \frac{(x^2+\sin 2x)'x-(x^2+\sin 2x)}{x^2} = \frac{2x^2+2x\cos 2x-x^2-\sin 2x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2+2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2} \text{ pt } x\neq 0$$

$$\left(x^2+\frac{\sin 2x}{x}\right)' = 2x+\frac{(\sin 2x)'x-\sin 2x\cdot x'}{x^2} =$$

$$= 2x+\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2} = 2x+\frac{2}{x}\cos 2x-\frac{\sin 2x}{x^2},\ x\neq 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2+\sin 2x}{x}\left(\frac{x^3+\sin 2x-2x}{2x^2}\right) = \left\{\frac{0}{0}\right\}$$

$$\xrightarrow{LH} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3x^2+2\cos 2x-2}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow{LH}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{6x-4\sin 2x}{4} = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow f \text{ derivabilă în } 0 \text{ și } f'(0)=0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x+\frac{2}{x}\cos 2x-\frac{\sin 2x}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & \text{pt } x=0 \end{cases}$$

• uniform continuitate

$$\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{2x}_{\infty}+\underbrace{\frac{2}{x}\cos 2x}_{\text{mărg}}-\underbrace{\frac{\sin 2x}{x^2}}_{\text{mărg}}\right)$$

în ∞ mărg derivata pe partea cu ∞ → găsesc 2 șiruri a căror dif. să se ducă la zero și el o fiecare la ∞

Fie $x_n = n\pi+\frac{1}{n}$ și $y_n = n\pi$ $\Rightarrow$ $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$

$x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$

$$\lim f(x_n)-f(y_n) = \frac{\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)^2+\sin\left(2n\pi+\frac{2}{n}\right)}{n\pi+\frac{1}{n}} -$$

$$-(n\pi)^2 - \frac{\sin 2n\pi}{2n\pi} \to 0$$

$$\Rightarrow 2\pi + \frac{1}{n^2} + \frac{\sin\frac{2}{n}}{n\pi + \frac{1}{n}} = 2\pi + \frac{1}{n} + \frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} \cdot \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{1}{n}}\right)$$

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} \to 1$, $\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n\pi+\frac{1}{n}}\right) \to 0$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow f$ nu e unif continuă pe $[0,\infty)$

☆ $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x+1) - \frac{2\sin x}{x}, & x\in(0,\infty) \\ -2+\sin 1, & x=0 \end{cases}$$

a) cont, deriv?
b) unif. cont?

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin(x+1) - 2\frac{\sin x}{x}\right) = \sin 1 - 2 = -2+\sin 1$

$f(0) = -2+\sin 1$

f cont pe $(0,\infty)$ din compunere din fct. elem. $\Rightarrow f$ cont pe $[0,\infty)$

$\Rightarrow f$ cont în $x_0 = 0$

derivabilitate:

$$\left(\sin(x+1) - 2\frac{\sin x}{x}\right)' = \cos(x+1) - 2\left(\frac{(\sin x)'\cdot x - \sin x\cdot x'}{x^2}\right)$$

$$= \cos(x+1) - 2\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right) = \cos(x+1) - 2\frac{(x\cos x - \sin x)}{x^2}$$

$$= \cos(x+1) - \frac{2x\cos x}{x^2} + \frac{2\sin x}{x^2} = \underbrace{\cos(x+1)}_{\text{mărg}} - \underbrace{\frac{2\cos x}{x}}_{\text{mărg}} + \underbrace{\frac{2\sin x}{x^2}}_{\text{mărg}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \cancel{-2+\sin 1}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+1) - 2\frac{\sin x}{x} + 2 - \sin 1}{} =$$

$$\frac{(\sin x)'x - \sin x\cdot x'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{\sin(1+x) - \sin 1}{x}\right) - 2\left(\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}\right)$$

$\left[\frac{0}{0}\right]$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

LH $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos(1+x) = \cos 1$

$\xrightarrow{LH} 2\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)$

$\xrightarrow{\left[\frac{0}{0}\right]} 2\left(\frac{\cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}}{2x}\right) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \cos 1 - 0 = \cos 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ e derivabilă în $x_0 = 0 \Rightarrow f'(0) = \cos 1$

$\Rightarrow f$ derivabilă pe $[0,\infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} \underbrace{\cos(x+1)}_{\text{mărg}} - \frac{2}{x}\cdot\cos x + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\text{mărg}}\cdot \sin x, & x\in(0,\infty) \\ \cos 1, & x=0 \end{cases}$$

mărg

b) unif. cont. derив mărg spre?

spre ∞ da der la zero $\to \infty$ deci nu

sup în 2 bucăți, una compactă

$[0,\infty) = \underbrace{[0,1]}_{I \text{ compact}} \cup \underbrace{[1,\infty)}_{J}$

f continuă pe I $\Rightarrow$ f uniform continuă pe I

mărginit f' pe J

evident f derivabilă pe J (pt că e deriv pe $[0,\infty)$)

$|f'(x)| \le 5, \forall x\in J$ un nr. > 1

$I \cap J \neq \emptyset$

$\Rightarrow f$ unif cont pe $[0,\infty)$

☆ $\boxed{\text{cu Th. Bonni}}$

$f_n : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\ln^n(x)}{1+\ln^n(x)}, \forall n\in\mathbb{N}$

~~a~~ convergență simplă? conv. unif?

CS: fie $x\in[1,2]$ fixat

nr. subunitar la $\infty \to 0$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^n(x)}{1+\ln^n(x)} = 0$

$\ln^n(x) \to 0$

logaritmul păstrează creșterea

$\forall x\in[1,2] \Rightarrow \ln x \in [0,1)$

$\ln x \in [0, \ln 2] \subset [0,1)$ (*)

1138

$\Rightarrow$ fie $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

$f_n \xrightarrow[{[1,2]}]{s} f$ (t. versiunea cealaltă)

C.U. facem cu Dini

$[1,2]$ = ~~interv~~ interval compact

f_n, f – continue pe $[1,2]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$f_n \xrightarrow[{[1,2]}]{s} f$

De arătat că $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln^{n+1} x}{1+\ln^{n+1} x} - \frac{\ln^n x}{1+\ln^n x} =$$

$$= \frac{\ln^{n+1} x(1+\ln^n x) - \ln^n x(1+\ln^{n+1} x)}{(1+\ln^{n+1} x)(1+\ln^n x)} =$$

$$= \frac{\ln^{n+1} x + \ln^{n+1} x - \ln^n x - \ln^{n+2} x}{(1+\ln^{n+1} x)(1+\ln^n x)} =$$

(am grăș(?))

$$= \frac{2\ln^{n+1} x - \ln^n x - \ln^{n+2} x}{(1+\ln^{n+1} x)(1+\ln^n x)} = \frac{\ln^n x(2\ln x - 1 - \ln^2 x)}{(1+\ln^{n+1} x)(1+\ln^n x)}$$

$$= \ln^n x\left(\frac{\ln x - 1}{(1+\ln^{n+1} x)(1+\ln^n x)}\right) \le 0 \ (*), \quad \forall x \in [1,2], \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Th. Dini $\Longrightarrow f_n \xrightarrow[{[1,2]}]{u} f$

LUCRARE

sup inf şir / şiruri – definiția !!!!

conv

limită

Cauchy

orice e în seminar

$\boxed{\text{Serii}}$ cu toate – numerică

– de puteri

CA ÎN SEMINAR

conv. simplă unif, lim sup, lim inf

Seminar 10 (4) monotonia funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

continuitate: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\xrightarrow{L'H}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1}=1$

$f(1)=1$

$\Rightarrow f$ cont în $x_0=1$

f cont pe $(0,1)\cup(1,\infty)$ din op cu fct. elem $\Rightarrow f$ cont pe $(0,\infty)$

derivabilitate: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{L'H}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-x}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{2x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

pt $x\neq 1$: $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}\Rightarrow f$ deriv pe $(0,\infty)\setminus\{1\}$

$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}, & x\neq 1\\ -\dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}=0$

$\Leftrightarrow x-1-x\ln x=0$

Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-1-x\ln x$

Avem $g'(x)=1-(x'\ln x+x\cdot(\ln x)')=1-\ln x-\dfrac{x}{x}=1-\ln x-1=-\ln x$

$g'(x)=0\Rightarrow -\ln x=0\Rightarrow\boxed{x=1}$

$\Rightarrow g'(x)\geq 0$ pt $x\leq 1$, și $g'(x)\leq 0$ pt $x\geq 1\Rightarrow$

$\Rightarrow g$ e cresc pe $(0,1]$ și

x	0		1		∞
$g'(x)$		$+\ +\ +\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	
$g(x)$		$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

f str $\uparrow$ pe $(0,1)$, f str $\downarrow$ pe $(1,\infty)$

$\Rightarrow x=1$ sol unică pt $f'(x)=0$ ↯

semnul lui f' e dat de g (ce am la numărator e pozitiv)

x	0		1		∞
$f'(x)$	+ + + +		$-\frac{1}{2}$	− − − −	
$f(x)$		↘		↘	

$\Rightarrow f'<0 \Rightarrow f$ s.v. pe $(0,\infty)$

Dem: a) $\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x=\pi$, $\forall x\in[-1,0]$

b) ~~arctg x~~ $\arcsin x+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=?$, ~~$x\in$~~ $x\in[-1,1]\setminus\{0\}=$ $=[-1,0)\cup(0,1]$

a) fie $f:[-1,0]\to\mathbb{R}$

$f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x=\pi$ mai dă o cst

trb să fac ca derivata să dea zero!!

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot(\sqrt{1-x^2})'+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=$$

$x\to\sqrt{1-x^2}\to\arcsin\sqrt{1-x^2}$

$u\to\arcsin u$ $\quad(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

$|x|\to -x$

$\forall x\in(-1,0)\Rightarrow f(x)=k$, $\forall x\in(-1,0)$

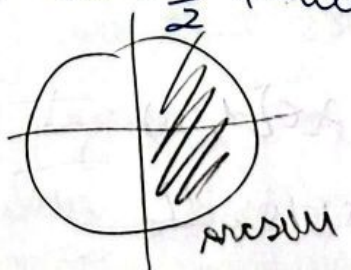
$k=?$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}$

pt $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ → $f\left(-\frac{1}{2}\right)=k$ (ea e cst pe tot intervalul)

↘ $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\arcsin\sqrt{1-\frac{1}{4}}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{\pi}{3}=\pi$ $\quad\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



arcsin

arccos

$\Longrightarrow k=\pi \Rightarrow f(x)=\pi,\ \forall x\in(-1,0)$

$x=-1:\ \arcsin 0+\arccos(-1)=0+\pi=\pi$ ✓ (verificarea completă)

pt $x=0:\ \arcsin 1+\arccos 0=\pi$

$\Rightarrow$ rel se verifică

b) $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$

fie $f:[-1,1]\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin x+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$x\to\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\to\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\qquad (\operatorname{arctg}u)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

$u\longrightarrow\operatorname{arctg}u$

$$\Rightarrow\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'=\frac{1}{1+\frac{1-x^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'=\frac{1}{\frac{x^2+1-x^2}{x^2}}\cdot\frac{(-1)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'=\frac{(\sqrt{1-x^2})'\cdot x-\sqrt{1-x^2}\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot x-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=$$

$$=\frac{-x^2-1+x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\qquad\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow f'(x)=0,\ \forall x\in(-1,1)\setminus\{0\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}k, & x\in(-1,0)\\ h, & x\in(0,1)\end{cases}\qquad k,h=?$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi-2\pi}{6}=-\frac{3\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow k=-\frac{\pi}{2}$

~~pt $x=-1$~~ pt $x=-1\Rightarrow \arcsin(-1)+\operatorname{arctg}0=-\frac{\pi}{2}$

pt h: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\arcsin\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{2}$

pt $x=1\Rightarrow f(1)=\frac{\pi}{2}\qquad\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & x\in[-1,0)\\ \frac{\pi}{2}, & x\in(0,1]\end{cases}$

Th. Rolle $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(a)=f(b)$, f cont pe $[a,b]$, f deriv pe (a,b)

$\Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-11)(x-7)(x+3)(x+10)$

a) $f'(7)=?$

b) Dem că ec. $f'(x)=0$ are exact 3 soluții reale? trb aplicat Rolle pe 3 bucăți

o fct. polinomială de gr 3 are 3 sol în $\mathbb{C}$

a) $f'(7)=?$ merg pe definiție dacă e fct. mult

$$\lim_{x\to 7}\frac{f(x)-f(7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-11)\cancel{(x-7)}(x+3)(x+10)}{\cancel{x-7}}=-4\cdot 10\cdot 17$$

~~$f(7)=(7-11)$~~ $f(7)=0$

b) aplic Rolle pe 3 bucăți.

$f(11)=f(7)=f(-3)=f(-10)=0$

$[7,11]$ pe toate merge Rolle ($f(a)=f(b)$)

$[-10,7]$ trb să alg niște intervale care nu se suprapun

$[-10,11]$ trb să iau intervale disjuncte

aplicăm Rolle pe $[-10,-3]$, $[-3,7]$, $[7,11]$

f cont pe $\mathbb{R}$, f deriv pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f cont și deriv pe (deschise la deriv)

$\Rightarrow \exists\, c_1\in(-10,-3)$, $c_2\in(-3,7)$, $c_3\in(7,11)$ a.î. $f'(c_1)=f'(c_2)=f'(c_3)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1, c_2, c_3$ sol ale ecuației $f'(x)=0$

$\Rightarrow$ ec. $f'(x)=0$ are cel puțin 3 soluții reale.

Dar f polinomială de gr 4, f' polinomială de gr 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'$ are cel mult 3 sol reale

$\Rightarrow f'$ are exact 3 sol reale

Lagrange Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\ln x)$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}=?$

Aplic. Lagrange pe $[x, x+1]$, $x>$

f cont, deriv pe $(\ ,\infty)$

$\exists\, c \in (x, x+1)$ a.î. $f'(c) = 0$

$$f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = \cancel{\ln(\ln(x+}$$

$$\Rightarrow f'(c) = f(x+1) - f(x)$$

$$x < c < x+1 \quad \Big| \; f'$$

$$f'(x) < f'(c) < f'(x+1)$$

$$\parallel$$

$$f(x+1) - f(x) \quad \Big| : f'(x)$$

$$\parallel$$

$$1 \quad \boxed{} \quad \frac{f(x+1) - f(x)}{f'(x)} \quad \boxed{}$$

$$f'(x) = \left(\ln(\ln(x))\right)'$$

$x \to \ln x \to \ln(\ln x)$ $\quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$

$u \to \ln u$

$$f''(x) = \frac{1'(x \ln x) - (x \ln x)'}{x^2 \ln^2 x} = \frac{-(x' \ln x + x(\ln x)')}{x^2 \ln^2 x} =$$

$$= \frac{-(\ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}})}{x^2 \ln^2 x} = \frac{-\ln x - 1}{x^2 \ln^2 x}$$

$f''(x) = 0$ $\quad f'' \quad -\ln x - 1 = 0 \Rightarrow -\ln x = 1 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{e}$

x				$\frac{1}{e}$		1	∞
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$		$\nearrow$		$f'(\frac{1}{e})$		$\searrow$	

importante

se fie mai mic

fol spre ∞

$$f''\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{+2-1}{\frac{1}{e^2} \cdot \ln^2 \frac{1}{e}} > 0$$

$f'(x) < 0$ $\forall\, x \in (1, \infty) \Rightarrow$ se scrubs

$$1 \quad \boxed{>} \quad \frac{f(x+1) - f(x)}{f'(x)} \quad \boxed{>} \quad \frac{f'(x+1)}{f'(x)}$$

trb se vom semnal

în clipte cond:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x+1)}{f'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} : \frac{1}{x\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{(x+1)\ln(x+1)} = 1$$

$$1 > \frac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)} > \frac{f'(x+1)}{f'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}$$

$$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow \; x\nearrow\infty$$

$$1$$

★

x		
$f'(x)$	0	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

asta spune Fermat

$A = ?$ a.î. $\ln x \geq a\cdot\frac{x-1}{x}$, $\forall x>0$

$\Updownarrow$

$\ln x - a\cdot\frac{x-1}{x} \geq 0$, $\forall x>0$

fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \; \forall x>0$

$\Downarrow$

$f(1)$ b. am gasit un sir fie 2 cro

$f(x) \geq f(1) \; \forall x_0>0 \Rightarrow$ $1\in(0,\infty)$ (interior) $\Rightarrow x_0=1$ pct de extrem pt f

f → derv pe $(0,\infty)$ (fct. elem).

$\Rightarrow$

$f'(1)=0$.

Th. Fermat

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \left(\frac{(a x - a)'\cdot x - a x + a}{x^2}\right) = \frac{1}{x} - \left(\frac{\cancel{a x} - \cancel{a x} + a}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} - a\cdot\frac{1}{1} = 1-a,$$

$f'(1)=0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow \boxed{A=1}$ → în inegalitate

la final trb să verificăm că pt $a=1$

$f: x=1,\ f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ $\quad f$ st↑ pe $(1,\infty)$

f st↓ pe $(0,1)$

$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0,\ \forall x \in (0,1) \\ f'(x) > 0,\ \forall x \in (1,\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow$ punct de minim $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ are sens

A derivata funcției inverse într-un punct

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + \ln(x^2+x+1)$

a) Dem că f bij:

b) $(f^{-1})'(-2) = ?$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = ?$

a) $f'(x) = 2 + \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{2x^2+2x+2+2x+1}{x^2+x+1} = \frac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2+4x+3 = 0 \quad \Delta = b^2-4ac = 16-24 < 0 \Rightarrow (+)$ pe tot

x	$-\infty$		∞
$f'(x)$		$+ + + + + + + + + + + +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	∞

f str↑ pe $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ injectivă

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x + \ln(x^2+x+1)) = \left(\begin{array}{l} f \text{ cont pe } \mathbb{R} \\ -\infty \end{array}\right) \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(2 + \frac{\ln(x^2+x+1)}{x}\right) = -\infty$ $\quad \to 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} (2x + \ln(x^2+x+1)) = \infty \Rightarrow f$ are P.D.

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ codom $\Rightarrow f$ surjectivă $\Longrightarrow f$ bijectivă

b) $(f^{-1})'(-2) = ?$

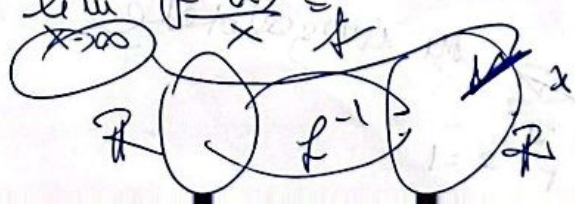
$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(-1)} = 1$

$\frac{1}{f'(y)}$ $\quad (f^{-1})'(-2) = f(-1)$

cont pe urmă sat dea -2

$f'(-1) = \frac{2-4+3}{1-1+1} = \frac{1}{1} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = ?$



$x \to \infty$ e în codomeniu

Notăm $y = f^{-1}(x)$ | f aplic f)

$f(y) = x$

x	$-\infty$			$\boxed{\infty}$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		∞

x e ∞ este după ∞

$\infty \to$ e ∞ de la $x \to \infty$

$x \to \infty \Rightarrow y \to \boxed{\infty}$

Dacă vrem spre $-\infty$

x	$-\infty$			$\boxed{\infty}$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	∞	$\searrow$		$-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f^{-1}(x)$

$y \Rightarrow \boxed{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{f(y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{2y + \ln(y^2+y+1)} = \frac{1}{2}$$

★ Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

Aflați domeniul de derivabilitate

Obs $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$, f bine definită: $-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -1 - x^2 \le 2x \le 1 + x^2 \ | -2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 - x^2 - 2x \le 0 \le 1 + x^2 + 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(x+1)^2 \le 0 \le (x+1)^2$ (A) $\Rightarrow$ este ok

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\frac{|x^2-1|}{x^2+1}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{|x^2-1|} =$$

>0

$$= \frac{2(1-x^2)}{x^2-1} = -2,\ x^2-1>0 \Rightarrow x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$$

$$\frac{2(1-x^2)}{1-x^2} = 2,\ x-1<0 \Rightarrow x \in [-1,1]$$

intervalele era de mai rămâne de văzut cu semn

Facem lim. laterale și o să avem $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

Seminar 11

Recapitulare integr

1. $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = i$
2. $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\, dx$
3. $\int_0^1 x \operatorname{arctg}^2 x\, dx$
4. $\int_0^1 \ln(x^2+1)\, dx$
5. $\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$
6. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1} dx$
7. $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+2)} dx$
8. $\int \frac{1}{x^4-1} dx$
9. $\int \sin^2 x\, dx$

Rezolvări

1) ~~$t = \ln x$~~ ~~pt $x=1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0$~~

~~$dt = \frac{1}{x} dx$~~ ~~pt $x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$~~

~~$\Rightarrow i = \int_0^1 t^2 dt =$~~

$x \to \ln x \to \ln^2 x$

$u \to u^2$

$(\ln^2 x)' = \frac{2\ln x}{x}$

$\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$

$$\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = i$$

$f(x) = \ln^2 x \qquad f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$

$g'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad g(x) = -\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow i = -\frac{1}{x}\ln^2 x\Big|_1^e + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + 1 + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$f_1(x) = \ln x \qquad f_1'(x) = \frac{1}{x}$

$g_1'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad g_1(x) = -\frac{1}{x}$

$$k = 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 2\left(-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{e}\ln e + 1\cdot\ln 1 - \frac{1}{x}\Big|_1^e\right) = 2\left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1\right)$$

$$= 2\cdot -\frac{2}{e} + 2 = \frac{-4}{e} + 2$$

(*) $\int_0^1 \sin^2 x\,dx = \int_0^1 \sin x \cdot \sin x\,dx = i$

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x \qquad \Rightarrow i = -\sin x\cos x\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos^2 x\,dx$

$g'(x) = \sin x \qquad g(x) = -\cos x$

$$= -\sin 1\cos 1 + \underbrace{\int_0^1 \cos^2 x\,dx}_{\cancel{1-\cos^2 x\,d}\ \int(1-\sin^2 x)\,dx} = -\sin 1\cos 1 + 1 - i$$

$2i = -\sin 1\cos 1 + 1 \Rightarrow i = \frac{-\sin 1\cos 1 + 1}{2}$

(3.) $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx = i$

$f(x) = \mathrm{arctg}^2 x \qquad f'(x) = \frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}$

$g'(x) = x \qquad g(x) = \frac{x^2}{2}$

$$i = \frac{x^2}{2}\cdot\mathrm{arctg}^2 x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{arctg}\,x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{arctg}\,x =$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$\frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\cdot\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\,dx -$$

$$+ \int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}}_{\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 \to \frac{1}{2} \ln 2}$$

Seminar 12

Derivate de ordin superior

$f^{(n)}(x) = ?$

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^{3x}$
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$
3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos 2x$
4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$
5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$

---

1. $f'(x) = 6e^{3x} = 2 \cdot 3 \cdot e^{3x}$

$f''(x) = 2 \cdot 3^2 \cdot e^{3x}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = 2 \cdot 3^n \cdot e^{3x}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ se arată prin inducție

2. $f(x) = \sin x$ se repetă din 4 în 4

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{IV}(x) = \sin x$ $\Rightarrow$

se verifică $(-1)^k$

Dacă nu merge, pun $(-1)^{k+1}$ și le scoat alternanța.

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & n = 4k \\ \cos x, & n = 4k+1 \\ -\sin x, & n = 4k+2 \\ -\cos x, & n = 4k+3 \end{cases} \overset{\text{pare}}{=} \begin{cases} (-1)^k \sin x, & n = 2k \\ (-1)^k \cdot \cos x, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$P(n)$:

I) $P(0)$. $f(x) = (-1)^0 \cdot \sin x \Leftrightarrow f(x) = \sin x \Rightarrow P(0)$ ✓

$n = 0 = 2 \cdot 0$

II) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Presupunem $P(n)$ ✓, demonstrăm $P(n+1)$ ✓

$P(n+1)$: $f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cdot \sin x, & n+1 = 2k \\ \boxed{(-1)^k \cdot \cos x, \ n+1 = 2k+1} \end{cases}$ (De demonstrat)

$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} ((-1)^k \cdot \sin x)', & n = 2k \\ ((-1)^k \cdot \cos x)', & n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cdot \cos x, & n = 2k \\ -(-1)^k \cdot \sin x, & n = 2k+1 \end{cases}$ 1+1

$= \begin{cases} \boxed{(-1)^k \cdot \cos x, \ n+1 = 2k+1} \ \checkmark \text{ demonstrat} \\ -(-1)^k \cdot \sin x, \ n+1 = 2k+2 \Rightarrow \text{modific asta} \\ (-1)^{k+1} \cdot \sin x, \ n+1 = 2(k+1) \Rightarrow \end{cases}$ 1+1

$\Rightarrow P(n+1)$ ✓ $\Rightarrow P(n)$ ✓ $\forall n \in \mathbb{N}$

3. La fel (am luat ex)

$f(x) = \cos 2x$ se repetă din 4 în 4

$f'(x) = -2 \sin 2x$

$f''(x) = -2^2 \cos 2x$

$f'''(x) = 2^3 \cdot \sin 2x$

$f^{IV}(x) = +2^4 \cdot \cos 2x$

$f^{n}(x) = \begin{cases} 2^n \cdot \cos 2x, & n = 4k \\ -2^n \cdot \sin 2x, & n = 4k+1 \\ -2^n \cos 2x, & n = 4k+2 \\ 2^n \sin 2x, & n = 4k+3 \end{cases}$

$= \begin{cases} (-1)^k \cdot 2^n \cdot \cos 2x, & n = 2k \\ (-1)^{k+1} \cdot 2^n \cdot \sin 2x, & n = 2k+1 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ inductie

↳ nu s-a verificat pt $(-1)^k$

4. fie $g_a : \mathbb{R} \setminus \{-a\} \to \mathbb{R}$

$g_a(x) = \dfrac{1}{x+a}$ $\qquad g'_a(x) = \dfrac{-1}{(x+a)^2}$

$g''_a(x) = \dfrac{2}{(x+a)^3}$ $\qquad g'''_a(x) = \dfrac{-2 \cdot 3}{(x+a)^4}$

$g_a^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}}$ → inductie, $\forall n \in \mathbb{N}$

↳ verific pt $n=1$ $(-1)^1 = -1$ pt $n=1 \Rightarrow g_a'(x)$ are $-$

→ $(-1)^n$ ✓

4) $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2} = \frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

$x = A(x+2) + B(x-1) \Rightarrow x = Ax + 2A + Bx - B \Rightarrow$

$\Rightarrow x = x(A+B) + 2A - B$

$\begin{cases} A+B = 1 \\ 2A - B = 0 \end{cases}$ ⊕

$3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$B = 1 - A \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$

$f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2}$

$= \frac{2}{3} g_2(x) + \frac{1}{3} g_{-1}(x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{1}{3}\left(2 g_2^{(n)}(x) + g_{-1}^{(n)}(x)\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{2 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}\right) =$

$g_a^{(n)}(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+a)^n}$ $= \frac{(-1)^n \cdot n!}{3}\left(\frac{2}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$g_a^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ e convenabil să iau $g \to x^2$

$(h(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$

fie $h(x) = e^{-x}$

$g(x) = x^2$

$h'(x) = -e^{-x}$

$h''(x) = e^{-x}$ $\Rightarrow h^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}, \forall n \in \mathbb{N}$

$g'(x) = 2x$

$g''(x) = 2$

$g'''(x) = 0$

$(h \cdot g)^{(n)}(x)$

$\Rightarrow g^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 3$

$$(h\cdot g)^{(n)}(x) = C_n^0 h^{(n)}(x)\cdot g(x) + C_n^1 h^{(n-1)}\cdot g'(x) + C_n^2 h^{(n-2)}(x)\, g''(x) +$$

$$\underbrace{+ C_n^3 h^{(n-3)}(x)\cdot g'''(x) + \dots + C_n^n h(x)\, g^{(n)}(x)}_{\text{zero}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (h\cdot g)^{(n)}(x) = 1\cdot(-1)^n\cdot e^{-x}\cdot x^2 + n\cdot(-1)^{n-1} e^{-x}\cdot 2x + \frac{(n-1)n}{2}(-1)^{n-2} e^{-x}\cdot 2$$

$$= (-1)^{n-2}\cdot e^{-x}\left(x^2 - n\cdot 2x + n(n-1)\right) \forall n\in\mathbb{N}^*$$

(*) Polinom Taylor. Rest Taylor. Formula lui Taylor. Serie Taylor

Fie $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in I$, f derivabilă de n ori în a

Def Polinom Taylor de rang n, asociat fct. f și pct. a, pol:

$$T_{n,f,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Sau $T_{f,a,n}$, e o notație

Exp: a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2+x+1$

$T_{3,f,1}(x) = ?$ $\quad T_{4,f,0}(x) = ?$

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $T_{3,f,0}(x) = ?$

a) $T_{f,1,3}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$

$f(1) = 3$

$f'(x) = 2x+1 \Rightarrow f'(1) = 3$

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(1) = 2$

$f'''(x) = 0 \Rightarrow f'''(1) = 0$

$T_{f,1,3}(x) = 3 + 3(x-1) + \frac{2}{2}\cdot(x-1)^2 = \cancel{3+3x-3+x^2-2x+1}$

x^2+x+1 polinomul meu

$T_{f,0,4}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3$

$= 1+x+x^2+0 = f(x)$

↳ dacă fct. e polinomială de grad $p \Rightarrow T_{f,a,q}(x) = f(x)$

$\forall q \in \mathbb{N}, \boxed{q \geq p}$

b) $f(0)=1$
$f'(0)=1$
$f''(0)=1$

$$T_{f,0,3}(x) = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0)\cdot x^3}{3!} = 1 - 1\cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

Def Restul Taylor: $R_{f,a,n}(x) = f(x) - \text{polinomul}$
$f(x) - T_{f,a,n}(x)$

Formula Taylor: $f(x) = T_{f,a,n}(x) + R_{f,a,n}(x)$

Forma Lagrange a restului:

$R_{f,a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, unde x^* se află situat între a și x

Def Seria Taylor asociată fct. f și pct a

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Obs pt $a=0 \Rightarrow$ obținem o serie de puteri

Fie A_x = mulțimea de convergență a seriei Taylor

Avem $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, $\forall x \in A_x \cap M$ ↳ $\in D_f$ și

și $\lim_{n\to\infty} R_{f,a,n}(x) = 0, \forall x \in M$

Ex 1 a) Demo $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$

b) Dezv în serie de puteri funcția $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$g(x) = e^{x^3}$

c) Calc. cu 3 zecimale exacte val nr. $\frac{1}{\sqrt{e}}$

d) Calc. suma seriilor $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$; $\sum_{n\geq 0} \frac{e^n}{n!}$

a) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$

Scrie seria Taylor asoc. lui f și $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k$

pt $a=0$: $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \cdot x^n$ $= a_n$

$A_x = ?$ (mult. de conv. a acestei serii Taylor)

$l = \overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \infty$ $\quad \frac{1}{0} = \infty$ prin conv. cond. afin A_x

$\Rightarrow \boxed{A_x = \mathbb{R}}$

$x = ?$, $x \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} R_{f,0,n}(x) = 0$

Avem $\left| R_{f,0,n}(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| =$

$= \frac{e^{x^*}}{(n+1)!} \cdot |x^{n+1}| \xrightarrow[\text{crit. rap.}]{n} 0 \Rightarrow$ pt $x \in \mathbb{R}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $n \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Din a) $\Rightarrow e^{x^3} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$

$n = ?$

$n \in \mathbb{N}$ cel mai mic cu proprietatea a.î. $\left| R_{f,0,n}\left(-\frac{1}{2}\right) \right| < 10^{-3}$

Avem $\left| R_{f,0,n}\left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right| =$

$= \frac{e^{x^*}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}$ $\quad e^{x^*} \leq 1$

$x^* \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow e^{x^*} = 1$

$n = ?$ $\quad \dfrac{1}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}} < \dfrac{1}{1000}$ ca să fie 3 zecimale

$n=3: \quad \dfrac{1}{4!\cdot 16} = \dfrac{1}{24\cdot 16} > \dfrac{1}{1000} \rightarrow$ crește pe n

$n=4: \quad \dfrac{1}{5!\cdot 32} = \dfrac{1}{120\cdot 32} < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow$ primul n pe care îl găsesc este 4

$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}} \simeq T_{f,0,\underset{n}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \dfrac{f''(0)}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 +$

$+ \dfrac{f'''(0)}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{2} + 8 - \dfrac{1}{24\cdot 2} + \dfrac{1}{24\cdot 32}$

$= \dfrac{\cdots}{24\cdot 32} \rightarrow$ se împarte $\rightarrow 0,\ldots$

$\boxed{0,606}$ aprox.

$e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,606$

e)

$\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!} \overset{a)}{\underset{x=1}{=}} e$

$\sum_{n\geq 1} \dfrac{2n^2-n+5}{n!} = 2\sum \dfrac{n^2}{n!} - \sum \dfrac{n}{n!} + 5\sum \dfrac{1}{n!}$ $\quad e$

$\dfrac{2\cdot 0}{0!} + \sum \dfrac{n^2}{n!} = \dfrac{0}{0!} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{n}{n!} = 0 + \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(n-1)!}$

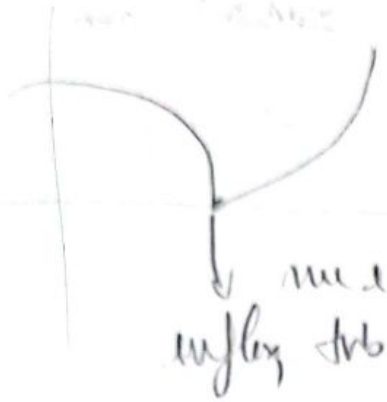
$= \sum_{n\geq 1} \dfrac{n}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{n+1}{n!} = \quad = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!} = e$

$= \sum_{n\geq 0} \dfrac{n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!} = 2e$

$= 4e - e + 5e = 8e$

Intervale, monotonie, concavitate, pct de inflex

x		x_0	
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$f(x_0)$	$\cup$



nu e pct de inflex trb să aibă tangentă

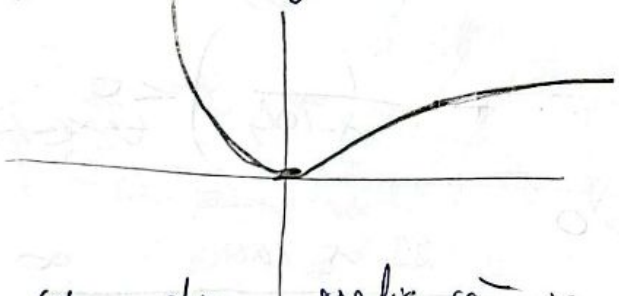
x		x_0	
$f''(x)$	$-$ $-$ $-$		$+$ $+$ $+$ $+$
$f(x)$		$f(x_0)$	

x_0 pct de inflex dacă f are deriv în x_0 ($\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$)

nu e pct de inflex dacă f nu are deriv în x_0 ($\nexists f'(x_0) \in \mathbb{R}$)

(*) fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ \operatorname{arctg} x, & x > 0 \end{cases}$

I) pct de inflex?



Obs din grafic că $x_0 = 0$ nu este pct de inflex

II) f cont pe $\mathbb{R}^*$ din op cu fct. elem.

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^2 = 0$ $\quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \operatorname{arctg} x = 0$ $\quad f(0) = 0 \Rightarrow f$ cont în $x_0 = 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f cont pe $\mathbb{R}$

f deriv pe $\mathbb{R}^*$ $\longrightarrow$ $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ \frac{1}{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}$

$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 0$

$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ din lim rem.

f nu e deriv în 0

x	$-\infty$		0		∞
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\cup$		$f(0)$		$\cap$

$\Rightarrow$ f convexă pe $(-\infty, 0]$

f concavă pe $[0, \infty)$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x<0 \\ \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}, & x>0 \end{cases}$$

f nu e derivabilă în 0

pt că nu e derivabilă $\Rightarrow$ în 0

f nu are derivată în $x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ nu e pct de inflex

(*) fie $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, \dots, 100\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-100}$$

nr. pct de inflexiune?

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \dots - \frac{1}{(x-100)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-2)^3} + \dots + \frac{2}{(x-100)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4} - \frac{6}{(x-2)^4} - \dots - \frac{6}{(x-100)^4} =$$

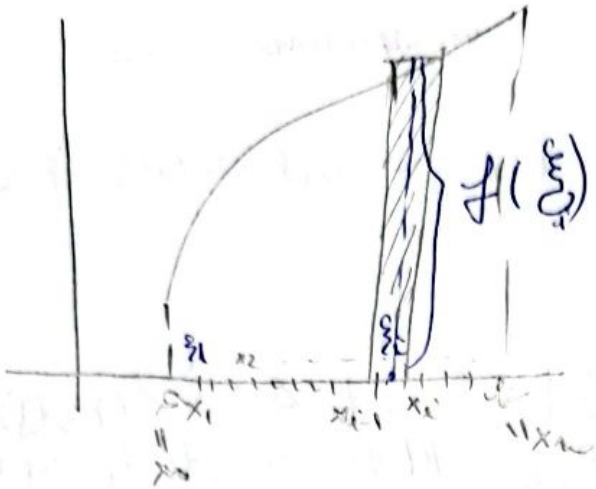
$$= -6\underbrace{\left(\frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x-2)^4} + \dots + \frac{1}{(x-100)^4}\right)}_{>0} < 0 \quad \forall x \in D$$

x	$-\infty$		1	x_1	2	x_2	$\dots$	99	x_{99}	100		∞
$f'''(x)$	$-$	$-$		$-$		$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	0
$f(x)$		$\cap$		$\cup$ $\cap$		$\cup$	$\cap$	$\cup$ $\cap$			$\cap$	

x are 99 pct de inflex

Seminar 13 S13 notițele nu sunt la curs!

Integrabilitate Riemann



Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

diviziune a lui $[a,b]$

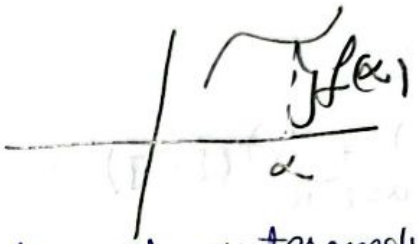
$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ $\in \mathcal{D}([a,b])$ $(x_i)_{i=\overline{0,n}}$

curs

↳ mulțimea diviziunilor

norma diviziunii

$$\|\Delta\| = \max_{i=\overline{1,n}} \{x_i - x_{i-1}\}$$



Fie $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}} \in \xi(\Delta)$ ↳ sist de pct intermediare s.p.i asoc. lui Δ

$\forall\, [x_{i-1}, x_i]$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i) = \sigma_\Delta(f, \xi)}$$ ⟶ suma Riemann asoc. lui f, Δ, ξ_Δ merge și fără indice

Spunem că f integrabilă Riemann dacă:

$\exists\, I \in \mathbb{R}$ un nr. și $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î.

eroarea bunicului

integrala, realizarea grafului

$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < \varepsilon$, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$

a lui Rez - realitate se propie de ε

$\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ $\forall\, \xi \in \xi(\Delta)$ s.p.i

Not $I = \int_a^b f(x)\,dx$

Consecință: f int$(\mathbb{R}) \iff \forall\, (\Delta_n)_n \subset \mathcal{D}([a,b])$ șir de diviziuni

șir de diviziuni cu $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n} 0$? $\forall\, \xi_n$ s.p.i avem că

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) \xrightarrow{n} I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ex 1 Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & x = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{rest} \end{cases}$

Dem cu def că f integrabilă Riemann și că $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

$\mathcal{R}int(\mathbb{R})$ = integrabilă Riemann

<u>Sol</u>: Fie $\varepsilon > 0$ fixat

$\delta_\varepsilon = ?$ a.î. $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < \varepsilon$, $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, $\forall \xi$ spi

$I = \int_a^b f(x) = 0$ (din ipoteză)

$\Delta = (x_i)_{i=\overline{0,n}} \in \mathcal{D}([a,b])$

$\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ sp. $i \in \xi(\Delta)$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{mereu} > 0} f(\xi_i) < \dots < (7) \cdot \|\Delta\| \text{ din ex}$$

trebuie făcut

$\Rightarrow$ aleg $\delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{7}$

Vreau să dovedesc $< \|\Delta\|$ cum

$$\Rightarrow \leq \|\Delta\| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \leq \|\Delta\| \cdot \sum_{n=0} \frac{1}{2^n}$$

Convergentă, serie geom cu $q \in (-1, 1)$

$\Rightarrow$ serie conv (geom) cu suma $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i) \leq 2 \cdot \|\Delta\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Aleg $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$ def. $\Rightarrow$ gata

2. integrabilă Riemann [mărginită
cont pe prospe peste tot

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

f nu e cont nicăieri

Dem (cu def) că f nu e int(R)

Sol Pp că f int(R) $\Rightarrow \exists\, I\in\mathbb{R}$ cu pr. a.î.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists\, \delta_\varepsilon>0$ și $|\underbrace{\sigma_\Delta(f,\xi)}_{\sum (x_i-x_{i-1})f(\xi_i)}-I|<\varepsilon$, $\forall \Delta\in\mathcal{D}([a,b])$, $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$, $\forall \xi\in\xi(\Delta)$, $\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$

Fie $\varepsilon>0$ fixat

Fie $\Delta=(x_i)_{i=\overline{0,n}}\in\mathcal{D}([0,1])$

Aleg $\xi^1=(\xi_i^1)_{i=\overline{1,n}}\in\xi(\Delta)$ cu $\xi_i^1\in\mathbb{Q}$, $\forall i=\overline{1,n}\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_\Delta(f,\xi^1)=0\Rightarrow$ pt că $f(\xi_i^1)=0$

$\Rightarrow |-I|<\varepsilon\Rightarrow -\varepsilon<-I<\varepsilon\Rightarrow -\varepsilon<I<\varepsilon$ (1)

$\xi^2=(\xi_i^2)_{i=\overline{1,n}}\in\xi(\Delta)$ cu $\xi_i^2\notin\mathbb{Q}$, $\forall i=\overline{1,n}\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_\Delta(f,\xi^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})1=x_1-x_0+x_2-x_1+\dots+x_n-x_{n-1}$

$=\underset{1}{x_n}-\underset{0}{x_0}=1\Rightarrow |1-I|<\varepsilon\Rightarrow$

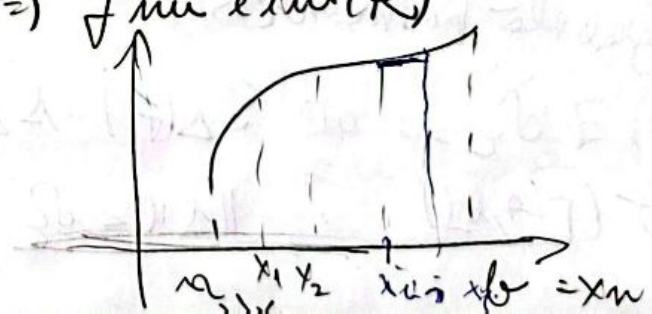
$\Rightarrow -\varepsilon<1-I<\varepsilon\Rightarrow$ (2)

(1)+(2) $\Longrightarrow \underbrace{-2\varepsilon<1<2\varepsilon}_{\text{Adev. pt } \forall\varepsilon>0}$ Aleg să fie contradicție

Aleg $\varepsilon=\frac{1}{10}$

$\Rightarrow$ Pp. falsă $\Rightarrow f$ nu e int(R)

Sume Darboux



Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

f mărginită

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b) = (x_i)_{i=\overline{0,n}} \in \mathcal{D}([a,b])$

Se va $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

$M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

$s_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\cdot m_i$ → suma Darboux inferioară

$S_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i$ → suma Darboux superioară

$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\limits_{\Delta} s_\Delta f$ integrala Darboux inferioară

sup pe toate diviziunile

$\overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\limits_{\Delta} S_\Delta f$ integrala Darboux superioară

Spunem că f integrabilă Riemann dacă

$\underline{I} = \overline{I}$ (în acest caz, notăm cu I integrala)

$\underline{I} = \overline{I} = I$

(T) f integrabilă Riemann $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$,

$\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$

Consecinţă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită

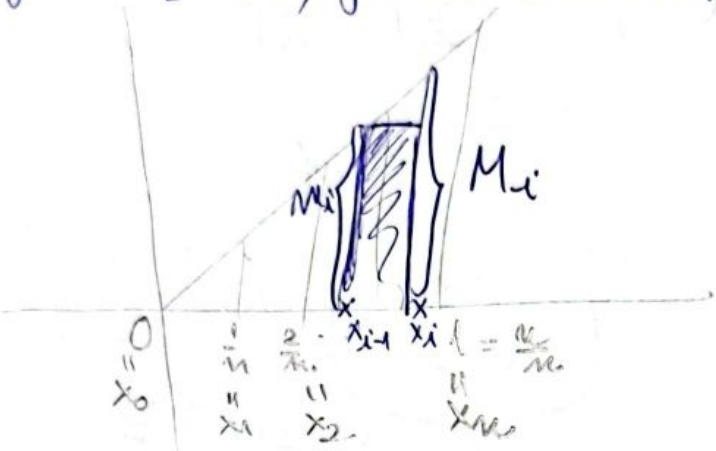
$A \in \mathcal{F}\,int(R) \Leftrightarrow \forall\, (\Delta_n)_n \subseteq \mathcal{D}([a,b])$

cu $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f) \xrightarrow{n} 0$

În acest caz, $I = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\Delta_n}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} s_{\Delta_n}(f)$

Ex Demo cu sume Darboux) că $\mathcal{F}$ cl.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ int(R) și calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$



fie $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1\right) \in \mathcal{D}([0,1])$

$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ x_n = 1$

$m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}) = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$

f ↑pe $[0,1]$ deci pe orice $[x_{i-1},x_i]$ f cont

$M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) = x_i = \frac{i}{n}$

$\Rightarrow s_{\Delta_n}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{m_i}_{=\frac{i-1}{n}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n^2} =$

asta e constanta pt că suma e după i

$= \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2}(0+1+2+\dots+(n-1))$

$= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)(n)}{2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$\cancel{S_{\Delta_n}(f)} \quad S_{\Delta_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{1}{n}} \underbrace{M_i}_{\frac{i}{n}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n)$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$\underline{I} < \overline{I}$ din def

$$\underline{I} = \sup_{\Delta} s_{\Delta}(f)$$

$$\overline{I} = \inf_{\Delta} S_{\Delta}(f)$$

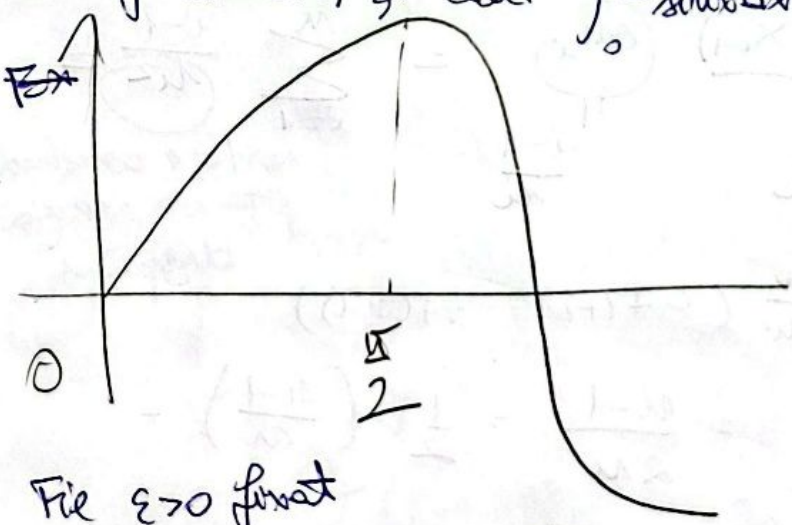
$$\sup_n s_{\Delta_n}(f) \le \cancel{\sup_{\Delta} s(f)} \quad \sup_{\Delta} s_{\Delta}(f) = \underline{I} \le \overline{I} \le \inf_{\Delta} S_{\Delta}(f)$$

$$\le \inf_n S_{\Delta_n}(f) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \underline{I} = \overline{I} = \frac{1}{2} \Rightarrow f$ int(R) și $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \Rightarrow$ q.e.d

Ex din examen:

Fie $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Dem (cu sume Darboux) că f int(R) și calc. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$



Fie $\varepsilon > 0$ fixat

$\Delta = (x_i)_{i=\overline{0,n}} \in \mathcal{D}([0, \frac{\pi}{2}])$

$\delta_\varepsilon = ?$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$, $\forall \|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, $\Delta \in \mathcal{D}$

$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ $\quad f \uparrow$ pe $[0, \frac{\pi}{2}]$, continuă

$\Rightarrow \inf = \text{minim} = f(x_{i-1}) = \sin x_{i-1}$

$\| $

$f(x_i) = \sin x_i$

$$\longrightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \overset{\sin x_i}{M_i} - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \overset{\sin x_{i-1}}{m_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\leq \|\Delta\|} (\sin x_i - \sin x_{i-1}) \leq \dots \leq ? \cdot \|\Delta\|$$

$$\leq \|\Delta\| \cdot \sum_{i=1}^{n} (\sin x_i - \sin x_{i-1}) = \|\Delta\| (\underset{\sin \frac{\pi}{2} = 1}{\sin x_n} - \underset{0}{\sin x_0}) =$$

$= \|\Delta\|$. Aleg $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ $\xrightarrow{\text{Criteriul (4) Darboux}}$

$\Rightarrow f$ int(R)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = ?$

Aleg un mod fericit $(\Delta_n)_n \subseteq \mathcal{D}([0, \frac{\pi}{2}])$ a.î.

a.î. $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n} 0$ a.î. pot calcula $\lim_{n \to \infty} S_{\Delta_n}(f)$

$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \dots < \frac{n}{n} \in \mathcal{D}([0,1])$

$0 < \frac{a}{n} < \frac{2a}{n} < \dots < \frac{na}{n} \in \mathcal{D}([0,a])$

Fie $\Delta_n = 0 < \frac{\pi}{2n} < \frac{2\pi}{2n} < \dots < \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}) \in \mathcal{D}([0, \frac{\pi}{2}])$

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2n}$, $x_2 = \frac{2\pi}{2n}$, $x_n = \frac{n\pi}{2n}$

$\|\Delta_n\| = \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n} 0$

$$\lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

Avem $S_{\Delta_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i =$ $\quad \sin x_i \quad x_i = \frac{\pi \cdot i}{2n}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{i\cdot\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sin \frac{i\pi}{2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\left(\sin \underbrace{\frac{\pi}{2n}}_{x} + \sin \frac{2\pi}{2n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{2n}\right) =$$

$\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n} = k$ $\quad \frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{2n}$

$$\boxed{\sin(x) + \sin(x+k) + \sin(x+2k) + \dots + \sin(x+nk)} =$$

$$= \boxed{\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}k\right)\sin\left(x + \frac{n}{2}\cdot k\right)}{\sin\frac{k}{2}}}$$

$$= \cancel{\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin \frac{n-2}{2}}{}}$$

$$= \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$= \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{\pi}{4}$ $\quad \sin\frac{\pi}{4n} \to 0$ $\quad \to 0$

completez cunoscut.

$$\cancel{2\cdot\frac{\pi}{4n}}\ \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} \xrightarrow{n} \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$\to 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$$

(P) Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă

(Orice fct cont e int (R)

Orice fct. monotonă e int (R))

Atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$

Sol f cont pe $[0,1] \Rightarrow f$ int (R) pe $[0,1]$.

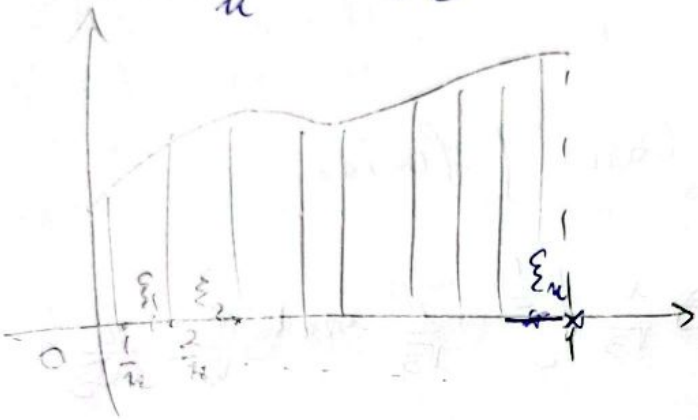
$\Rightarrow \forall (\Delta_n)_n \subseteq \mathcal{D}([0,1])$ şir de diviziuni cu

$\|\Delta_n\| \xrightarrow{n} 0$, $\forall \xi_n \in \xi(\Delta_n)$ avem că

$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) \xrightarrow{n} \int_0^1 f(x)\,dx$

Fie $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n}\right) \in \mathcal{D}([0,1])$

$\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$



Alg $\xi = \left(\frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n}\right) \in \xi(\Delta_n)$

$\frac{1}{n} = \xi_1$, $\frac{2}{n} = \xi_2$, $\frac{n}{n} = \xi_n$

$$\Rightarrow \sigma_{\Delta_n}(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{1}{n}} \underbrace{f(\xi_i)}_{f\left(\frac{i}{n}\right)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Se găsesc un manuelul de 0 a 11-a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+n^2}\right) = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n \cdot a_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\left[\frac{n^2}{3n^2+1^2} + \frac{n^2}{3n^2+2^2} + \dots + \frac{n^2}{3n^2+n^2}\right]}_{\text{o partiziune}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{3n^2+k^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{n^2}\, 1}{\cancel{n^2}\left(3+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \quad (*)$$

fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3+x^2}$ continuă $\Rightarrow$ (P)

trebuie enunțată și demonstrată

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx \overset{(*)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

Seminar 11

Lebesgue

(T) Crit Lebesgue de integrabilitate Riemann

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o fct.

At f int (R) $\Leftrightarrow$ f mărg & continuă (apt) aproape peste tot

$\hookrightarrow$ cu excepția unei mult. cel mult numărabile (finită sau numărabilă)

(*) Studiați integrabilitatea Riemann pt urm fct:

1) $f:\{1,2,3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

2) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q} \\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

3) $f:[-1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

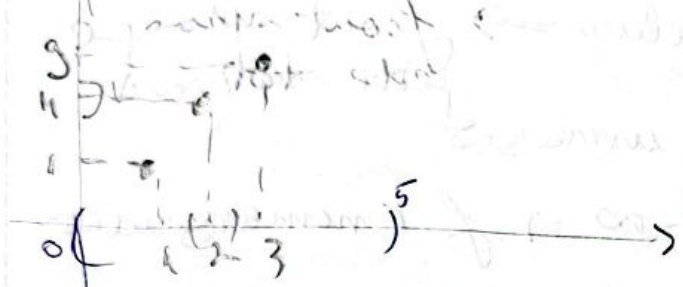
4) $f:[-1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x\le 2 \\ \text{[illegible]} \end{cases}$

5) $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\sqrt{x+2}}}{x^2+1}, & x<1 \\ \dfrac{e^{-\sqrt{x+3}}}{x+5}, & x\geq 1 \end{cases}$

6) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$

Rezolvare: 1) def cu vecinătăți

Demonstrăm că f continuă



Fie $V\in \mathcal{V}_{(f(2))}=\mathcal{V}_{(4)}$ $\qquad$ $U=?$ $U\in\mathcal{V}_{(2)}$ a.î. $f(U\cap A)\subseteq V$

Alg $U=(2-\varepsilon,2+\varepsilon)\in\mathcal{V}_{(2)}$, cu $\varepsilon\leq 1$ $\Rightarrow f(U\cap A)=f(\{2\})=$
$=4\in V$

f cont în $x_0=2$

Analog f continuă în $x=1$ și $x=3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ continuă

e int Riemann? nu

! f int(R) dacă f e definită pe un interval compact $\to$ nu putem vorbi de int(R) a fct. f

2) $\operatorname{Im} f=\{0,1\}$ $\Rightarrow$ f mărginită de 1

(fie f cont în pct de forma $0=1$ absurd $\Rightarrow f$ nu e cont)

Evident, f nu e cont în niciun pct din $[0,1]$

↳ conform (?)

$\operatorname{Im} f = \{0,1\} \Rightarrow f$ mărg

(P) Fie $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue și

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

dem semnificarea trecute

Atunci f cont în $x_0 \Leftrightarrow f_1(x_0) = f_2(x_0) \Rightarrow$ Sem...

(3) f cont pe $[-1,4] \setminus \{0\}$. Verific în 0

↳ op. cu fct. elem $\Rightarrow f$ cont oprcape peste tot

Fac lim în 0 ca să văd ce urmează

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow f \text{ e nemărginită}$$

$\Rightarrow f$ nu e int(R)

(4) f cont pe $[-1,5] \setminus \{2\}$ din op cu fct. elem $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ cont opt

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (x^2+x+1) = 4+2+1 = 7 \qquad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (4x+3) = 8+3 = 11$$

f discont în 2

pe $[-1,2] \Rightarrow \quad |x^2+x+1| \le |x^2| + |x| + 1 \le$

$\le 4+2+1 = 7$

pe $(2,5] \Rightarrow \quad |4x+3| \le 4|x| + 3 \le 23$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)| \le 23 \ \forall x \in [-1,5] \Rightarrow f$ mărg

f cont opt & mărginită $\Rightarrow f$ int(R)

(5) $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x \sqrt{x+2}}{x^2+1}, & x<1 \quad f_1(x) \\ \dfrac{e^{-\sqrt{x+3}}}{x+3}, & x \ge 1 \quad f_2(x) \end{cases}$

○ fct. cont pe un int compact e mărg

f cont pe $[0,4] \setminus \{1\}$ din opcu fct. elem $\Rightarrow f$ contopt

Nu foarte neparcurs cu sept exemplu

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} e^{x}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = \frac{e\cdot\sqrt{3}}{2}$

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{6} = \frac{\frac{1}{e^{x}}}{6} = \frac{1}{e^{x}}:6 = \frac{1}{e^{x}\cdot 6}$

f nu e cont în $x_0 = 1$

Fie $f_1 : \underbrace{[0,1]}_{\text{compact}} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^{x}\frac{\sqrt{x+2}}{x+1}$ continuă

$\Rightarrow f_1$ mărginită $\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \le f_1(x) \le \beta$ $\forall x \in [0,1]$

$f_2 : \underbrace{[1,4]}_{\text{compact}} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{e^{-\sqrt{x+7}}}{x+5}$ continuă

$\Rightarrow f_2$ mărginită $\Rightarrow \exists\, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, $\alpha' \le f_2(x) \le \beta'$ $\forall x \in [1,4]$

$\Rightarrow$ ~~$f(x) \in \min\{\alpha, \beta\}$, max~~

$\min\{\alpha, \beta\} \le f(x) \le \max\{\alpha', \beta'\} \Rightarrow f$ marg

$\Longrightarrow f$ int(R)

c) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right], & x \ne 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

$\left[\frac{1}{x}\right]$ cont în toate pct mai puțin când $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

f discont când $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

f discont în $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ f discont pe o mulțime numărabilă

în 0, nu știm continuitatea funcției

adică pe $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\}$ sau pe $\{0\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\}$

~~pt x ne~~ pt $x \in (0,1] \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x} - \left\{\frac{1}{x}\right\}$ $\mid \cdot x > 0$

f marg pt $(0,1]$ $\Rightarrow x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 - x\left\{\frac{1}{x}\right\}$

$f(x) = 1 - x\left\{\frac{1}{x}\right\} \in [0,1) \in [0,1] \Longrightarrow f$ int(R)

$[0,1] \in [0,1]$

$\Rightarrow |f(x)| \le 3$ ...

sai prunds
calculat capat

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0\end{cases}$

a) f derivabil?

b) int(R) a fct f'?

a) f cont pe $(0,1]$ ca op cu fct. elem.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 \underbrace{\sin\frac{1}{x^2}}_{\text{marg}} = 0\cdot \text{marg} = 0 = f(0)$

$\Rightarrow f$ cont în 0

$\Rightarrow f$ cont pe $[0,1]$

derivabilitate: $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\in(0,1] \\ 0, \text{ pt } x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\Rightarrow f$ deriv pe $[0,1]$

b) int(R) f cont apt, f' cont în $(0,1]$

Fie trb să ar un şir a.î. f' nemărg

$\frac{2}{x}\cos\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{2n\pi}$

$x_n^2=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$

Demonstrăm că f' nu e mărginită

Fie $(x_n)_n\subset\mathbb{R}$, $x_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{2x_n\sin\frac{1}{x_n^2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2}{x_n}}_{\sqrt{2n\pi}}\cos\frac{1}{x_n^2} = -$

1

Fie f_n, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ int (R) $\Rightarrow$

$f_n \xrightarrow[[a,b]]{u} f$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

$\cancel{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ Dacă limita (nu) permută cu integrala $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow[{[a,b]}]{C.U.}} f$

(☆) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x \sin nx}{n^2+nx^2+x}\,dx = ?$

fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \frac{x \sin nx}{n^2+nx^2+x}$

$\boxed{C.S.}$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x \sin nx}{n^2+nx^2+x} \overset{\text{sharg}}{=} 0$

$\Rightarrow$ fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \Longrightarrow f_n \xrightarrow{s} f$

$\boxed{C.U}$: f cont

$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{x \sin nx}{n^2+nx^2+x} \right| =$

$0 \le \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{[0,1]} \left| \frac{x \sin nx}{n^2+nx^2+x} \right| \le \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ cu cleşte, $\sup = 0$ $\quad \sup \left| \underbrace{\frac{1}{n^2+nx^2+x}}_{\le \frac{1}{n^2}} \cdot \underbrace{\frac{x \sin nx}{1}}_{\le 1} \right|$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{C.U.} f \Rightarrow$ limita permută cu integrala

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_0^1 f(x)\,dx$

(☆) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = ?$

Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx \cdot (1-x^2)^n$

$\boxed{C.S}$ fie $x \in [0,1]$ fixat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{nx}_{\to\infty}\underbrace{(1-x^2)^n}_{\text{subunitar}\ \to 0} = 0$$

exponențiala e mai puternică decât polinomiala

fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 0 \quad \to f_n \xrightarrow{S} f$

$\boxed{C.U}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |nx(1-x^2)^n|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left(\underbrace{nx}_{\leq n} \cdot |(1-x^2)^n|\right) = \lim_{n\to\infty} \sup\left(nx\left((1-x^2)^n\right)\right)$$

$$\geq n \cdot \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \to e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n^2}} = 1 > 0$$

$x_0 = \frac{1}{n} \in [0,1]$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| \neq 0 \Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow{u} f}$$

$\Rightarrow$ nu se poate permuta limita cu integrala

mai trebe la ds 112-a

$$\int_0^1 nx(1-x^2)^n = \cancel{-\frac{1}{2}\int_0^1} -\frac{1}{2}\int_1^0 nt^n\,dt =$$

$t = 1-x^2$ $\qquad$ pt $x=0 \Rightarrow t = 1-0 = 1$

$dt = -2x\,dx$ $\qquad$ pt $x=1 \Rightarrow t = 1-1 = 0$

$$= \frac{1}{2}\frac{n}{n+1} t^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

(A) fie $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = n \cdot \sin^n x \cos x$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $n \in \mathbb{N}^*$

C.S? C.U?

fie $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixat

$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin^n x \cdot \cos x = 0$

(exponențiala e mai puternică decât polinomială)

fie $f:[0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x)=0$ $\qquad f_n \xrightarrow{\wedge} f$

$\boxed{C.U.}$ $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |n \sin^n x \cdot \cos x|$

$= \lim_{n\to\infty} \sup(n \sin^n x \cdot \cos x)$

integrez, văd ce iese, și văd dacă lim. permută cu $\int$

dacă DA $\to$ nu mă ajută

dacă NU $\to$ fac cu negarea teoremei

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} n \sin^n x \cos x \, dx \to n\int_0^1 t^n dt = \frac{n \cdot t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 \to \frac{n}{n+1}$

$t = \sin x$ $\qquad$ pt $x=0 \Rightarrow t=0$

$dt = \cos x \, dx$ $\qquad$ pt $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

DAR $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ limita nu permută cu integrala

$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{\wedge} f$

(*) fie $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x) = \ln(1+x^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x\in[0,1]$

~~$\lim_{n\to\infty} \ln(1+x^n) =$~~ $\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = ?$

$\boxed{C.S}$ ~~lim~~ fie $x\in[0,1]$ fixat

~~fie~~ $\lim_{n\to\infty} \ln(1+x^n) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ \ln 2, & x=1 \end{cases}$

fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ \ln 2, & x=1 \end{cases}$

$f_n \xrightarrow{s} f$ Th de transfer a cont. prin convergență uniformă

Dem $\boxed{CU}$ f_n continue din op. cu fct. elem. $\Rightarrow f$

f nu e continuă în 1

$f_n \not\xrightarrow{u} f$

ne mutăm în limite

$0 \le x \le 1$

$0 \le x^n \le 1$

$0 \le \ln(x^n+1) \le \ln 2$

$\boxed{\ln(1+x) \le x \ \forall x \in (-1,\infty)}$ e bine de cunoștință pentru

Dem $g:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1+x) - x$ se face cu deriv.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-x-1}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

x	-1		0		∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	

$g(0) = 0$ - maxim

$\Rightarrow g(x) \le 0, \forall x \in (-1,\infty)$

$$0 \le \ln(\underbrace{1+x^n}_{\ge 1}) \le x^n \quad \Big| \int_0^1 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \le \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \le \frac{1}{n+1}$$

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = 0$$