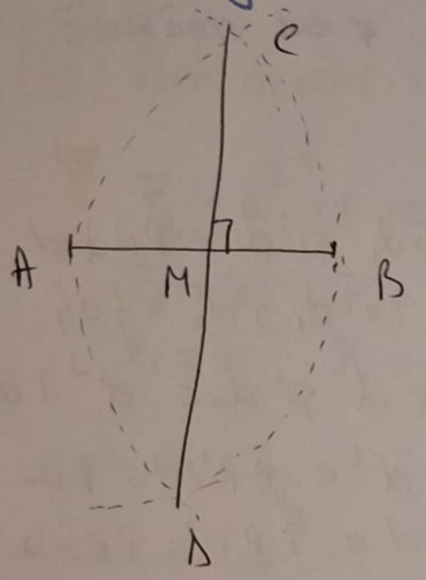
Seminar 1 - Geometrie - 2.10.2023

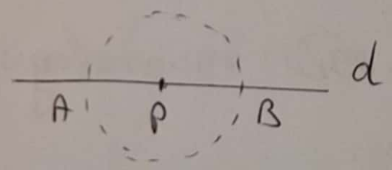
Construcții cu rigla și compasul

Pb1: a) mij segm AB dat



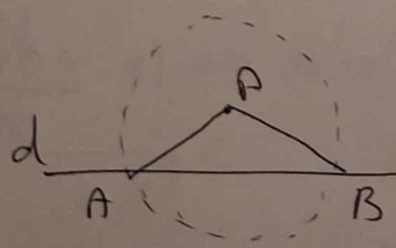
Se duc cercurile $\mathcal{C}(A, AB) \cap \mathcal{C}(B, AB)$ $= \{C, D\} \Rightarrow AC = CB = BD = DA \Rightarrow$ $\Rightarrow ACBD$ romb $\Rightarrow \boxed{CD \perp AB}$
$CD \cap AB = \{M\} \Rightarrow M$ mij AB.

b) perpendiculara pe o dr. d dintr-un pct. $P \in d$.



Iau un cerc $\mathcal{C}(P, r) \cap d = \{A, B\} \Rightarrow P$ mij AB (din a) pot să duc o $\perp$ pe AB prin P).

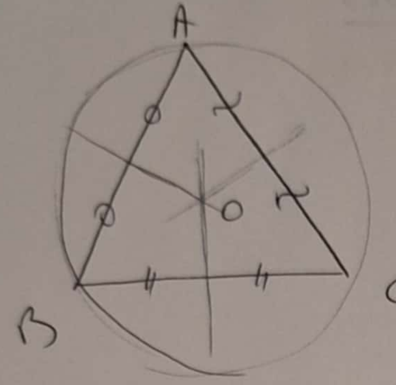
c) perpendiculara pe o dr. d dintr-un pct. P ext ei.



Construiesc un cerc $\mathcal{C}(P, r) \cap d = \{A, B\}$ $\Rightarrow PA = PB \Rightarrow P \in$ med $AB \Rightarrow$ (pot să duc mediatoarea lui AB)

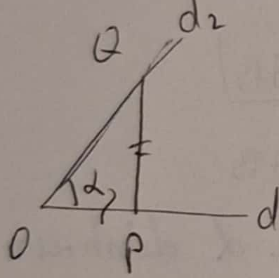
d) paralelă la o dr. d printr-un pct. P ext. ei.
duc $d_1 \perp d$, $P \in d_1$ și $d_2 \perp d_1$, $P \in d_2 \Rightarrow d_2 \parallel d$.

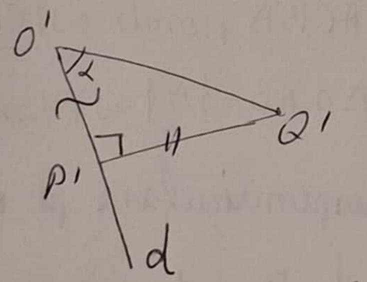
Pb 2: a) dat fiind un cerc, construiți centrul său



Construiesc un $\triangle ABC$ cu $A, B, C \in \mathcal{C}$.
Duc med. segm AB, AC, BC care se intersectează în $O \Rightarrow O$ centru cerc.

b) Dat fiind un $\sphericalangle$ și o dr. constr. un $\sphericalangle$ cu măsură egală având dr. dată ca suport.



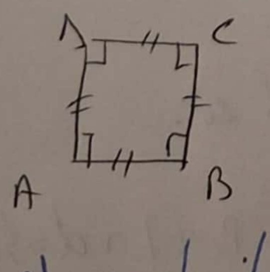


Aleg $P \in d_1$ și duc $PQ \perp d_1$
$Q \in d_2$ și $d_1 \cap d_2 = \{O\}$.
Aleg $P' \in d$ și duc $d^{\perp} \perp d$
Aleg $Q' \in d^{\perp}$ a.î. $P'Q' = PQ$
și aleg $O' \in d$ a.î. $P'O' = PO \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle P'\widehat{O'}Q' = \sphericalangle P\widehat{O}Q \Rightarrow$ analog date 2 $\sphericalangle$ α și β se poate construi $\sphericalangle \alpha + \beta$.

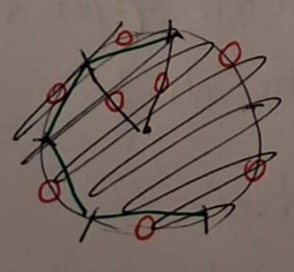
c) un segm $\Rightarrow \triangle$ echilateral (evident din Pb1a))

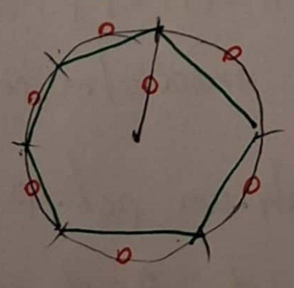
d) un segm $\Rightarrow$ pătrat.



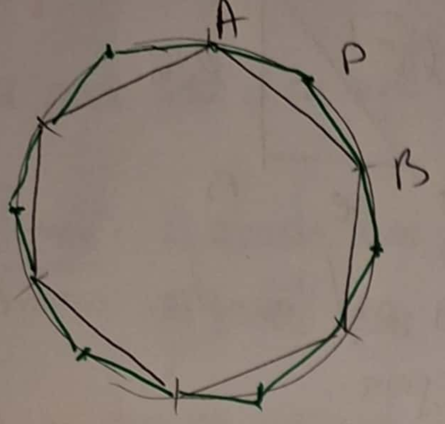
Duc $BC \perp AB$ cu $BC = AB$
$AD \perp AB$ cu $AD = AB$ $\Big\} \Rightarrow ABCD$ pătrat.

e) construiți un hexagon





f) fiind dat un polig. reg => constr. unul cu nr. dublu de lat.



Construiesc cercul circ. polig. Pt. fiecare lat. AB iau $P \in$ cerc. a.î. ΔPAB isoscel => P-urile + vf. polig. inițial => polig. cu nr. dublu de lat.

$\boxed{Q}$ Dat $n \in \mathbb{N}$ se poate construi un polig. cu n lat.?

! $F_k = 2^{2^k} + 1$ nr. Fermat.

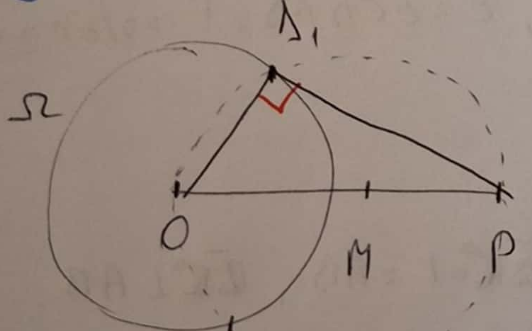
$F_0 = 3$ $\quad F_2 = 17$ $\quad F_4 = 2^{16}+1$ prim

$F_1 = 5$ $\quad F_3 = 257$ $\quad F_5$ nu e prim.

Un polig. cu n lat. e constructibil cu rigla și compasul <=>

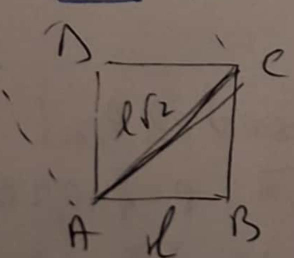
<=> $n = F_{i_1} \cdots F_{i_2} \cdot 2^{\alpha}$ unde F_{i_j} ← nr. Fermat prim.

g) fiind date un cerc + un pct. ext => o tg. prin pct. la cerc.



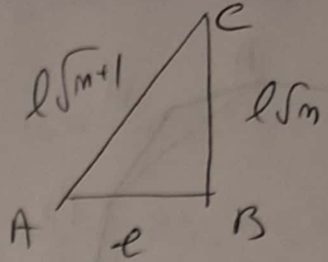
Iau M mij $[OP]$ unde O e centru cerc și construiesc cercul $\mathcal{C}(M, OM) \cap \Omega = \{D_1, D_2\}$ => => ΔOD_1P și ΔOD_2P dr. în $\hat{D}_1$, resp. $\hat{D}_2$ => PD_1, PD_2 tg la cerc.

Pb 3: a) un pătrat => pătrat de arie dublă.



$AB = l$ => $AC = l\sqrt{2}$ => constr. un pătrat de lat $l\sqrt{2}$ => va avea aria $= 2l$.

b) un pătrat => pătrat de arie de n ori mai mare.



Inducție după n:

$\boxed{n=2}$ => Pb 3 a).

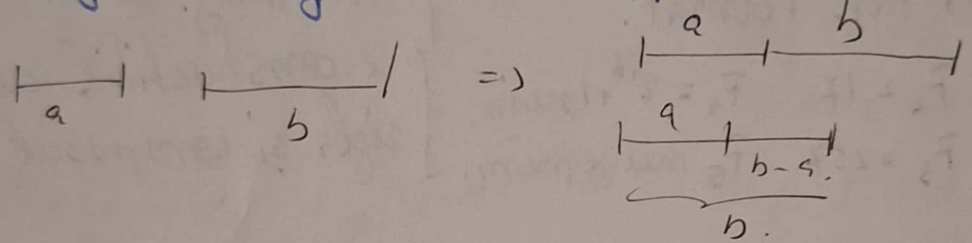
$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ => pot construi ~~un~~

un segm de lg $l\sqrt{n}$, unul de lg l => pot construi unul de lg $l\sqrt{n+1}$.

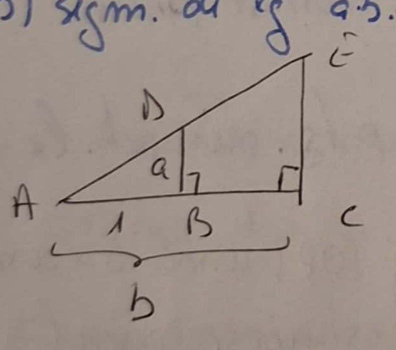
Pitagora

Pb 4: date segm. de lg. a și b.

a) segm. de lg $a+b$, $|a-b|$.



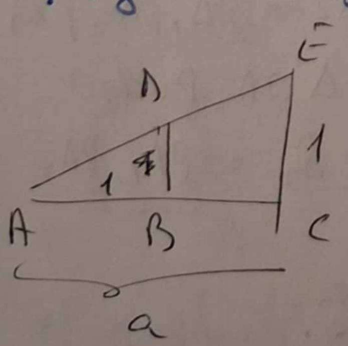
b) segm. de lg ab.



$AB = 1$.
$AC = b$.
$BD \perp AC$, $BD = a$.
$EC \perp AB$, $E = EC \cap AD$.

$\Rightarrow \frac{BD}{EC} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \boxed{EC = ab}$

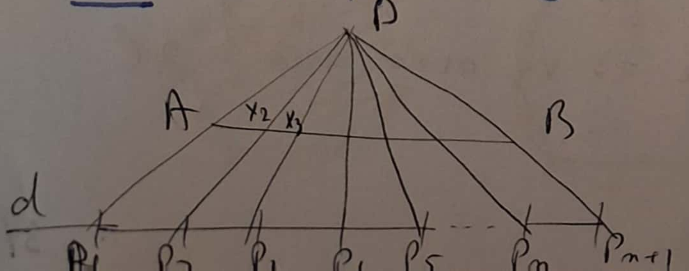
c) segm 1 + segm a => $\frac{1}{a}$.



Analog

$EC = 1 = AB$, $EC \perp AB$.
$AC = a$.
$BD \perp AB$, $D = EA \cap BD$
$\Rightarrow \frac{BD}{EC} = \frac{BD}{EC} \Rightarrow BD = \frac{1}{a}$

Pb 5: împărțiți un segm în n segm congr.



Iau $d \parallel AB$ și constr $[P_i P_{i+1}]$ segm cong $i = \overline{1,n}$. $P = AP_1 \cap BP_{n+1}$ și $X_i = PP_i \cap AB \Rightarrow AX_2 = X_iX_{i+1} = X_nB$

! ∀ construcție care se poate face cu rigla și compasul rigid se poate face și cu rigla și compasul moale.

Temă: 1) constr. un pentagon reg.
2) puteți face asta doar cu compasul? (DA)

(un compas nerigid nu își păstrează deschiderea când e ridicat de pe foaie.)

Seminarul 1 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

1 Construcţii cu rigla şi compasul

Rigla se consideră negradată, infinită în lungime şi fără lăţime. Compasul rigid este infinit extensibil şi îşi păstrează deschiderea când este ridicat de pe foaie.

Exercițiul 1.1: Construiţi:

a) mijlocul unui segment AB dat.

b) perpendiculara pe o dreaptă dată d într-un punct P al ei.

c) perpendiculara pe o dreaptă dată d dintr-un punct P exterior ei.

d) paralela la o dreaptă dată d printr-un punct P exterior ei.

Exercițiul 1.2:

a) Dat fiind un cerc, construiţi centrul său.

b) Dat fiind un unghi şi o dreaptă, construiţi un unghi de măsură egală având dreapta dată ca suport. În particular, date unghiurile de măsuri α şi β, construiţi un unghi de măsură $\alpha + \beta$.

c) Dat fiind un segment, construiţi un triunghi echilateral având-ul drept latură.

d) Dat fiind un segment, construiţi un pătrat având-ul drept latură.

e) Dat fiind un segment, construiţi un hexagon regulat având-ul drept latură.

f) Dat fiind un poligon regulat, construiţi un poligon regulat cu număr dublu de laturi.

g) Dat fiind un cerc şi un punct exterior, construiţi o tangentă din acel punct la cerc.

Exercițiul 1.3: Dat fiind un pătrat:

a) construiţi unul cu arie dublă.

b) şi $n \geq 1$, construiţi unul cu arie de n ori mai mare.

Exercițiul 1.4: Date fiind segmente de lungime a şi b:

a) construiţi segmente de lungime $a + b$ şi $|a - b|$.

b) şi, în plus, un segment unitate, construiţi un segment de lungime $a \cdot b$.

c) şi, în plus, un segment unitate, construiţi un segment de lungime $\frac{1}{a}$.

d) şi, în plus, un segment unitate, construiţi un segment de lungime $\sqrt{a}$.

Exercițiul 1.5: Dat fiind un segment şi $n \geq 1$, împărţiţi-l în n segmente congruente.

Exercițiul 1.6: Date fiind un segment unitate, unul de lungime k şi un poligon, construiţi un poligon asemenea, cu raport de asemănare k.

Exercițiul 1.7:

a) Construiţi bisectoarea unui unghi dat.

b) Construiţi unghiuri de $45°$ şi $30°$.

Definiția 1.8: Un compas nerigid nu îşi păstrează deschiderea atunci când este ridicat de pe foaie.

Demonstraţi următoarea

Teorema 1.9: *Orice construcţie care poate fi făcută cu compasul rigid poate fi făcută cu compasul nerigid.*

Exercițiul 1.10: Construiţi un pentagon regulat având o latură dată. Puteţi da o construcţie care foloseşte doar compasul?

Teorema 1.11: *(Mohr-Mascheroni) Orice construcţie cu rigla şi compasul ale cărei obiecte iniţiale şi finale sunt puncte sau cercuri poate fi făcută doar cu compasul.*

Exerciţiul 1.12: Date fiind punctele A şi B, construiţi folosind doar compasul un punct C coliniar cu ele astfel încât segmentul AC are lungimea dublă faţă de AB.

Teorema 1.13: *(a compasului ruginit) Orice construcţie cu rigla şi compasul ale cărei obiecte iniţiale şi finale sunt puncte sau drepte poate fi făcută doar cu rigla şi un compas imobil, de deschidere fixă.*

Teorema 1.14: *(Poncelet-Steiner) Orice construcţie cu rigla şi compasul ale cărei obiecte iniţiale şi finale sunt puncte sau drepte poate fi făcută doar cu rigla, atât timp cât in plan este desenat un cerc cu centrul marcat.*

Exerciţiul 1.15: Într-un plan în care este desenat un cerc cu centrul marcat, construiţi folosind doar rigla:

a) o paralelă printr-un punct exterior dat la o dreaptă pe care este marcat un segment împărţit în jumătaţi egale.

b) un segment împărţit în jumătăţi egale pe o dreaptă dată.

c) o paralelă la o dreaptă dată printr-un punct exterior ei dat.

Seminar 2 - Geometrie - 9.10.2023

Vectori în plan - Teorie:

1) $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ - planul

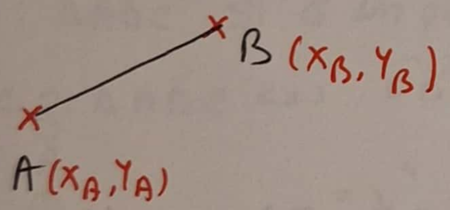
2) vector ← det. de o pereche orientată de pct.

3) 2 vect. $\vec{AB}$ și $\vec{CD}$ sunt egali $\Leftrightarrow$ ABDC pll (dc. A, B, C, D necol)

4) 2 vect. $\vec{AB}$ și $\vec{CD}$ col. sunt egali $\Leftrightarrow$ $\exists \vec{EF}$ necol cu ei a.î.

$$\begin{cases} \vec{AB} = \vec{EF} \\ \vec{CD} = \vec{EF}. \end{cases}$$

5)



$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$= \|\vec{AB}\| \leftarrow \text{norma}$$

6) $\langle \_, \_ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 \in \mathbb{R}$.

$\uparrow$ vectori   s.n. produs scalar

7) $\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v$.

8) $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ ← ineg. Cauchy-Schwarz.

$\Updownarrow$ $v = (x_1, \dots, x_n)$ și $w = (y_1, \dots, y_n)$

$$\left(\sum x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right) \text{ cu eg. pt. } x_i, y_i \text{ d.p.}$$

Dem: $\boxed{M1}$ $\sum_{i=1}^{n} |y_i - x \cdot x_i|^2 = x^2\left(\sum x_i^2\right) - 2x\left(\sum x_i y_i\right) + \left(\sum y_i^2\right) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4\left(\sum x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(\sum x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$

$\boxed{M2}$ $v = (x_1, \dots, x_n)$
$w = (y_1, \dots, y_n)$

$\| w - v \cdot x \|^2 = \langle w - xv, w - xv \rangle \geq 0$.

$\| \langle a+b, c+d \rangle = \langle a, c \rangle + \langle a, d \rangle + \langle b, c \rangle + \langle b, d \rangle$

$\| w \|^2 + x^2 \| v \|^2 - 2x \langle v, w \rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \leq 0$.

$\Delta = 4 \langle v, w \rangle^2 - 4 \| w \|^2 \cdot \| v \|^2 \leq 0$.

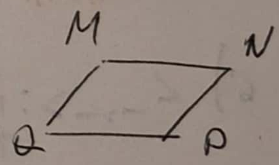
9) $\| v - w \|^2 = \| v \|^2 + \| w \|^2 - 2 \cos \varphi \cdot \| v \| \cdot \| w \|$

$\Rightarrow \cos \varphi = \cos(\sphericalangle v, w) = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\| v \| \cdot \| w \|}$

Exerciții

Pb 3: Fie $ABCD$ pll și $\vec{AM} + \vec{CP} = \vec{BN} + \vec{DQ}$.

$\overline{MNPQ \text{ pll}}$



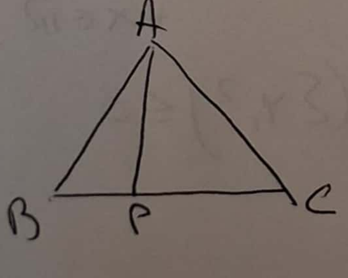
$$\cancel{\vec{AM}} + \underbrace{\vec{AM}}_{\vec{AB} + \cancel{\vec{BM}}} + \underbrace{\vec{CP}}_{\cancel{\vec{CQ}} + \vec{QP}} = \underbrace{\vec{BN}}_{\cancel{\vec{BM}} + \vec{MN}} + \underbrace{\vec{DQ}}_{\vec{DC} + \cancel{\vec{CQ}}}$$

$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{QP} = \vec{MN} \Rightarrow MNPQ$ pll.

Pb 4: ΔABC, $\vec{BP} = k \vec{PC}$

$\vec{AP} = \frac{1}{k+1} \vec{AB} + \frac{k}{k+1} \vec{AC}$



$\frac{1}{k+1} \vec{AB} + \frac{k}{k+1} \vec{AC} =$

$= \frac{1}{k+1} \vec{AP} + \frac{1}{k+1} \vec{PB} + \frac{k}{k+1} \vec{AP} + \frac{k}{k+1} \vec{PC}$

$= \vec{AP} + \frac{1}{k+1} \cdot (-k) \vec{PC} + \frac{k}{k+1} \vec{PC}$

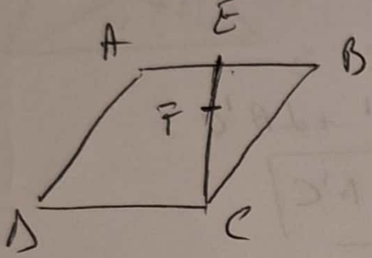
$= \vec{AP}$.

! $\vec{BP} = k\vec{PC}$ => pt. orice pct. A în plan => $\frac{1}{k+1}\vec{AB} + \frac{k}{k+1}\vec{AC} = \vec{AP}$

<=> $P = \frac{1}{k+1}B + \frac{k}{k+1}C$

Pb5: ABCD pll și $\vec{AE} = \vec{EB}$; $\vec{EC} = 3\vec{EF}$ <=> $\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{FC}$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $\vec{BD} = \lambda \vec{BF}$.



$$\vec{BF} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\vec{BE} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\vec{BC}$$

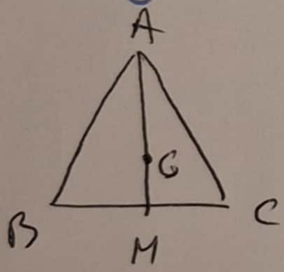
$$\vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{BE} + \frac{1}{3}\vec{BC}$$

$$\vec{BF} = \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{BD}$$

$\Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$

Pb6: ΔABC și G în plan.

G c.g. ΔABC <=> $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$.



"=>" G c.g => $\vec{OG} = \frac{1}{1+2}\vec{OA} + \frac{2}{1+2}\vec{OM}$

$\vec{AG} = 2\vec{GM}$ $\quad \vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OM}$

$\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$.

"<=" fie G a.î. $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$

G' c.g. ΔABC => $\vec{OG'} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC} = \vec{OG}$ => $\boxed{G = G'}$

Pb7: ABCD pll. G c.g ABCD <=> $\vec{OG} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC} + \frac{1}{4}\vec{OD}$

Se dem. analog Pb5.

Pb8: ΔABC cu G c.g.

$\frac{BA'}{BC} = \alpha$, $\frac{CB'}{CA} = \beta$, $\frac{AC'}{AB} = \gamma$.

a) $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$ și $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = 0$

Îm $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$; $(\star)$ iau $O = A$

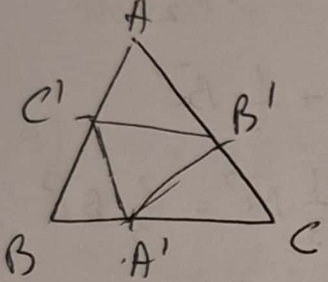
$\Rightarrow \vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

în $(\star)$ iau $O = G \Rightarrow 0 = \frac{1}{3}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$.

b) G' c.g. $\Delta A'B'C'$.

$G' \in$ med. din A a $\Delta ABC \Leftrightarrow 2\alpha = \beta + \gamma$.



$\frac{BA'}{BC} = \alpha \Rightarrow BA' = \alpha BC$

$BA' = \alpha BA' + \alpha A'C$.

$\boxed{BA' = \frac{\alpha}{1-\alpha} A'C}$

Analog $\vec{CB'} = \frac{\beta}{1-\beta} \vec{B'A}$ și $\vec{AC'} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \vec{C'B}$.

$\Rightarrow \vec{OA'} = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}} \vec{OB} + \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}}{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}} \vec{OC} = (1-\alpha)\vec{OB} + \alpha \vec{OC}$

Analog. $\vec{OB'} = (1-\beta)\vec{OC} + \beta \vec{OA}$

$\vec{OC'} = (1-\gamma)\vec{OA} + \gamma \vec{OB}$

G' c.g. $\Delta A'B'C' \Rightarrow \vec{AG'} = \frac{1}{3}(\vec{AA'} + \vec{AB'} + \vec{AC'})$

$\vec{AG'} = \frac{1}{3}((1-\alpha)\vec{AB} + \alpha\vec{AC} + (1-\beta)\vec{AC} + \gamma\vec{AB})$.

$AG' = \frac{1+\gamma-\alpha}{3}\vec{AB} + \frac{1+\alpha-\beta}{3}\vec{AC}$.

$G' \in$ med. din $A \Leftrightarrow \vec{AG'} = a\vec{AB} + a\vec{AC} \Leftrightarrow \frac{1+\gamma-\alpha}{3} = \frac{1+\alpha-\beta}{3}$

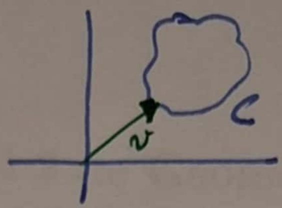
$\Leftrightarrow 2\alpha = \gamma + \beta$.

c) $G = G' \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$.

$\vec{AG'} = \frac{1+\gamma-\alpha}{3}\vec{AB} + \frac{1+\alpha-\beta}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \Leftrightarrow$

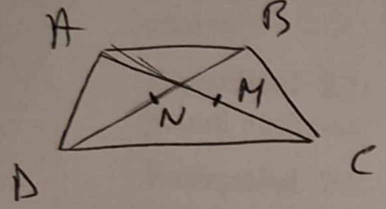
$\Leftrightarrow \gamma - \alpha = \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = \beta$

! Pt. centru de greutate



$\frac{1}{vol(C)} \int_C v \, dv$

Pb 5: a) ABCD trapez, $\left.\begin{array}{l} M \text{ mij } AC \\ N \text{ mij } BD \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD.$



$$\vec{MN} = \frac{\vec{MD} + \vec{MB}}{2} = \frac{\frac{\vec{AD} + \vec{CD}}{2} + \frac{\vec{AB} + \vec{CB}}{2}}{2} =$$

$$= \frac{\vec{AB} + \vec{CD}}{4} + \frac{\vec{AB} + \cancel{\vec{BD}} + \vec{CD} + \cancel{\vec{DB}}}{4} = \frac{\vec{AB} + \vec{CD}}{2}.$$

$\Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD.$

Seminarul 2 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

2 Exerciţii

Chiar dacă nu este explicit menţionat, toate problemele de mai jos sunt plane.

Exerciţiul 2.1: Daţi o alta demonstraţie pentru inegalitatea Cauchy-Schwarz în planul euclidian.

Exerciţiul 2.2: Demonstraţi că are loc inegalitatea triunghiului pentru funcţia distanţă euclidiană.

Exerciţiul 2.3: Fie $ABCD$ un paralelogram şi M, N, P, Q puncte în plan astfel încât

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DQ}.$$

Demonstraţi că şi $MNPQ$ este paralelogram.

Exerciţiul 2.4: Fie $\triangle ABC$, şi punctul P astfel încât $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{PC}$.

Demonstraţi că $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$.

Exerciţiul 2.5: Fie $ABCD$ un paralelogram în plan. Alegem E astfel încât $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$ şi F astfel încât $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EF}$.

Demonstraţi că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{BF}$.

Exerciţiul 2.6: Fie $\triangle ABD$ şi G un punct în plan.

Demonstraţi că G e centrul de greutate al $\triangle ABC$ dacă şi numai dacă pentru orice O punct în plan, avem relaţia

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Exerciţiul 2.7: Fie paralelogramul $ABCD$ şi G un punct în plan.

Demonstraţi că G e intersecţia diagonalelor paralelogramului $ABCD$ dacă şi numai dacă pentru orice O punct în plan, avem relaţia

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OD}.$$

Exerciţiul 2.8: Fie $\triangle ABC$ cu centrul de greutate G şi $A' \in [BC], B' \in [AC], C' \in [AB]$ astfel încât

$$\frac{BA'}{BC} = \alpha,\ \frac{CB'}{CA} = \beta,\ \frac{AC'}{AB} = \gamma.$$

a) Arătaţi că $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ şi $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$.

b) Arătaţi că centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ aparţine medianei din A a triunghiului ABC dacă şi numai dacă $2\alpha = \beta + \gamma$.

c) Arătaţi că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ coincid dacă şi numai dacă $\alpha = \beta = \gamma$.

Exercițiul 2.9:

a) Demonstraţi că, în orice trapez, dreapta care uneşte mijloacele diagonalelor este paralelă cu bazele.

b) Arătaţi că, în orice trapez, următoarele puncte sunt coliniare: mijloacele bazelor, punctul de intersecţie a diagonalelor şi punctul de intersecţie a suporturilor laturilor neparalele.

Exercițiul 2.10:

a) Să se arate că trei puncte A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă există $a, b, c \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât

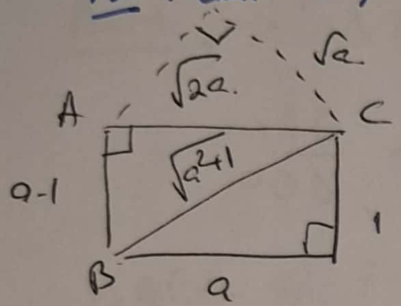
$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0},\ \forall M \in \mathbb{R}^2.$$

b) Fie $D \in (AB), E \in (AC)$ astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EA}$. Demonstraţi că mijloacele segmentelor AB, AC şi DE sunt coliniare.

Seminar 3 - Geometrie - 16.10.2023

Temă seminar 1:

Pb1: date a și 1 $\Rightarrow \sqrt{a}$.



Se construiește un segm de lg $\sqrt{a^2+1}$ din unul de lg a și unul de lg 1.

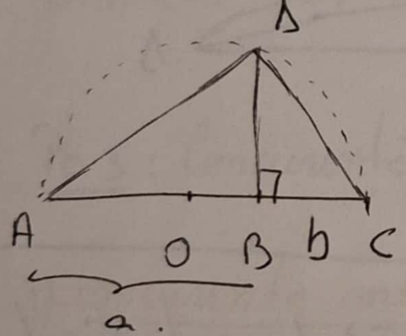
Se consh. ΔABC dr. în A a.î. $\begin{cases} BC = \sqrt{a^2+1} \\ AB = a-1 \end{cases}$

T.P

$\Rightarrow AC = \sqrt{2a}$. Se consh. Δ dr. is cu ip. $= \sqrt{2a}$

$\Rightarrow$ catetă $= \sqrt{a}$.

Pb2: a, b date $\Rightarrow \sqrt{ab}$.



Fie $AB = a$ și $BC = b$, O mij AC.

Se consh. cercul de $\mathcal{C}(O, OA)$.

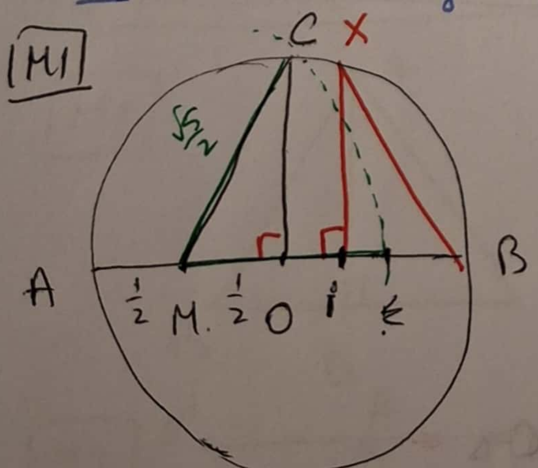
Se duce $h_B \perp AC$, $B \in h_B$. Fie $h_B \cap \mathcal{C} = \{D\}$

$\Rightarrow \Delta DAC$ dr. și DB înălțime $\Rightarrow$

$DB = \sqrt{ab}$.

Pb3 consh. cu rigla și compasul vf. unui pentagon reg.

M1



Iau $\mathcal{C}(O, OA)$ cu $OA = OB = 1$,

M mij OA. Duc $OC \perp AB$, $C \in \mathcal{C}(O, OA)$

$\Rightarrow CM = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Iau $E \in (OB)$ a.î.

$ME = MC = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Iau i mij $OE \Rightarrow Oi = iE = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Duc $iX \perp AB$, $X \in \overset{\frown}{ACB} \Rightarrow XB$ lat pentagon.

$\boxed{M2}$ $x^5-1=0$

$(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4)=0.$

$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}. \Rightarrow \varepsilon+\varepsilon^4=2\cos\frac{2\pi}{5}$

$\varepsilon^2+\varepsilon^4=2\cos\frac{4\pi}{5}$

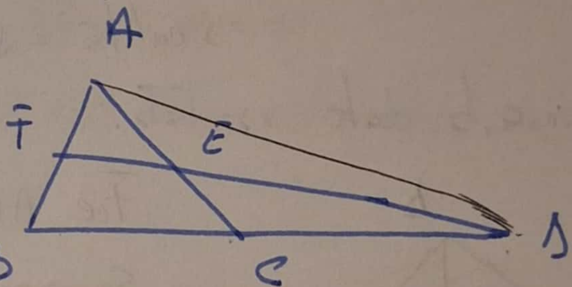
$\Rightarrow 1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0.$

$1+\underbrace{2\cos\frac{2\pi}{5}}_{t}+2\left(2\cos\frac{2\pi}{5}-1\right)=0.$

$4t^2+2t-1=0$

$\Delta=4+16=20 \Rightarrow t=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{8}$

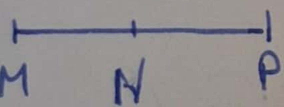
Exerciții:



Pb1: Th Menelaus.

$D-E-F$ col $\Leftrightarrow \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1.$

!



$\frac{MP}{MN}=\alpha \Rightarrow \vec{MP}=\alpha\vec{MN}$ (raport orientat)

Dem: $\frac{AF}{FB}=\frac{S_{AFD}}{S_{DFB}}$

$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{FBD}}{S_{FCD}}$

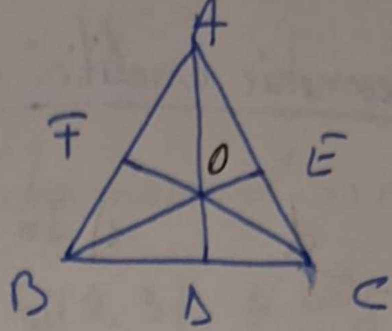
$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{FEC}}{S_{FAE}}=\frac{S_{DEC}}{S_{DEA}}\overset{(-)}{=}\frac{S_{CFD}}{S_{AFD}}$

$\left|\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\right|=1.$

Pb 2: Th. Ceva:

$AD \cap BE \cap CF \neq \emptyset$

$\iff \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$



Dem „$\Rightarrow$" ΔADC și $B-O-E$ col $\Rightarrow$

$$\frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1 \quad (1).$$

ΔABD și $F-O-C$ col. $\Rightarrow$

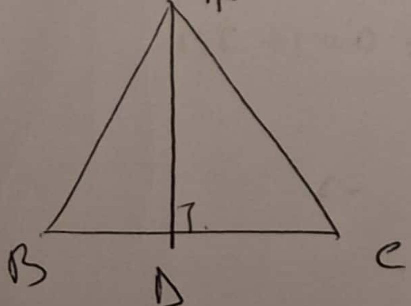
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DO}{OA} = -1 \quad (2).$$

Din (1)·(2) $\Rightarrow \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$

Pb 3: Concurență linii în Δ:

1) concurența medianelor $\Leftarrow$ Ceva.
2) concurența mediatoarelor $\Leftarrow$ Ceva.
3) concurența înălțimi:

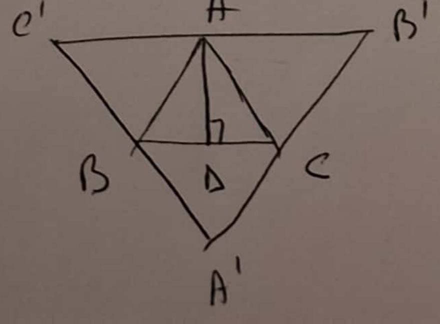
M1



$tg B = \frac{AD}{BD}$; $tg C = \frac{AD}{DC}$

$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{tg C}{tg B} \Rightarrow$ aplic Ceva.

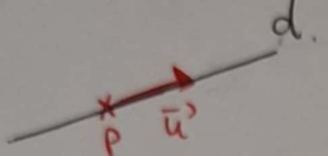
M2



Construiesc $\Delta A'B'C'$ a.î. A mij $B'C'$, B mij $A'C'$ și C mij $A'B'$.

AD înălțime $\Delta ABC \iff$ AD mediatoare $\Delta A'B'C'$ (cum med concurente $\Rightarrow$ înălțimi concurente

Geometrie analitică - Teorie:



1) În $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} P \text{ pct.} \\ \vec{u} \neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ dr. det de P și $\vec{u}$

$\vec{u}$ dă direcția lui d.

2) $d = \{P + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ← ec. parametrică

$P(2,3)$ și $\vec{u}(1,2) \Rightarrow d = \{(2+t,\ 3+2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3) $\begin{matrix} P = (x_P, y_P) \\ \vec{u} = (u_x, u_y) \end{matrix} \Rightarrow d = \begin{cases} x = x_P + t u_x \\ y = y_P + t u_y \end{cases}$ ← ec. parametrică

$\Rightarrow t = \dfrac{x - x_P}{u_x} = \dfrac{y - y_P}{u_y}$ ← ec. dreptei

$u_y(x - x_P) = u_x(y - y_P) \Rightarrow u_y x - u_x y + (u_x y_P - u_y \cdot x_P) = 0.$

4) $d: ax + by + c = 0 \Rightarrow (a,b) \perp d$

↑ o normală la dreaptă

5) $\vec{u}$ dă direcție $\Rightarrow \langle \vec{u}, (a,b) \rangle = 0$.

Exerciții

Pb 4: $M = (1,2)$ și $d_0: 3x - 2y + 2 = 0$.

a) ec. parametrică d_0.

$3x = 2y - 2 = t \Rightarrow d_0: \begin{cases} x = \dfrac{t}{3} \\ y = \dfrac{2+t}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$d_0: (0,1) + t\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

$d_0: (0,1) + t(2,3)$

Sau:

$d_0: 3x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow (3,-2)$ vector normal $\Rightarrow$ caut u a.î.

$\langle u, (3,-2) \rangle = 0 \Rightarrow$ iau $u = (2,3)$ și aleg un $P \in d_0$.

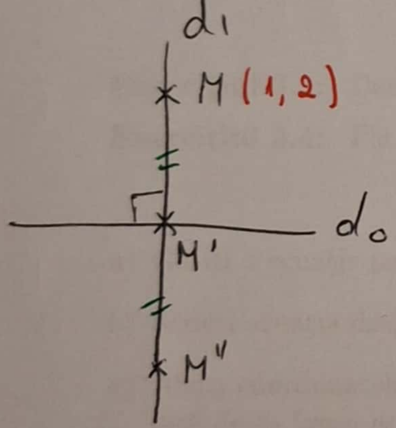
$P = (0,1)$ sau $P = (2,4) \Rightarrow d_0: (2,4) + t(2,3),\ t \in \mathbb{R}$.

b) ec. lui d_1 a.î. $\begin{cases} d_1 \perp d. \\ M \in d_1. \end{cases}$

$d_1 \perp d \Rightarrow (3,-2)$ vector director pt. $d_1 \Rightarrow$

$M \in d_1 \Rightarrow$ ~~$d_1: \frac{x-1}{} = \frac{y-2}{2}$~~ $\boxed{d_1: M + t(3,-2)}$

c) Aflați coord. lui P și Q a.î. $\begin{cases} P = pr_{d_0} M \\ Q = sim_{d_0} M. \end{cases}$



$\boxed{M1}$ $d_1: 2x + 3y - 8 = 0.$

$d_0 = 3x - 2y + 2 = 0.$

$d_1 \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 + 3y_0 - 8 = 0 \\ 3x_0 - 2y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M' = \left(\frac{10}{13}, \frac{28}{13}\right)$

$\boxed{M_2}$ $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t. \end{cases}$

$d_1 \cap d_0 \Rightarrow 3(1+3t) - 2(2-2t) + 2 = 0.$

$13t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1}{13} \Rightarrow M' = \left(1 - \frac{3}{13}, 2 + \frac{2}{13}\right)$

$M' = \left(\frac{10}{13}, \frac{28}{13}\right).$

Seminarul 3 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

Temă din seminarul 1

1. Date a şi 1, construiţi $\sqrt{a}$ cu rigla şi compasul.

2. Construiţi cu rigla şi compasul vărfurile unui pentagon regulat.

3 Exerciţii

Exercițiul 3.1: Demonstraţi **Teorema lui Menelaus:**
Fie $\triangle ABC$ şi $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Atunci D, E, F sunt coliniare dacă şi numai dacă

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1.$$

Exercițiul 3.2: Demonstraţi **Teorema lui Ceva:**
Fie $\triangle ABC$ şi $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Atunci AD, BE, CF sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Exercițiul 3.3: Demonstraţi concurenţa liniilor importante dintr-un triunghi.

Exercițiul 3.4: Fie M punctul de coordonate $(1, 2)$ şi dreapta d_0 de ecuaţie:

$$d_0 : 3x - 2y + 2 = 0.$$

a) Găsiţi o ecuaţie parametrică pentru d_0.

b) Scrieţi ecuaţia dreptei d_1 ce trece prin M şi este perpendiculară pe d_0.

c) Aflaţi coordonatele punctelor P şi Q unde $P := pr_{d_0}M$ şi Q este simetricul lui M faţă de d_0 (vom nota $Q := sym_{d_0}M$).

Exercițiul 3.5: Fie dreptele

$$d_1 : mx + 2y = 8$$
$$d_2 : x + (m-1)y = 4$$

Determinaţi poziţia relativă a celor două drepte în funcţie de parametrul m.

Exercițiul 3.6: Punctele $M_1 = (-2, 1), M_2 = (2, 3), M_3 = (-4, -1)$ sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC. Aflaţi coordonatele vârfurilor.

Exercițiul 3.7: Un pătrat din $\mathbb{R}^2$ are două vârfuri consecutive în $(2, 3)$ şi $(6, 6)$. Aflaţi coordonatele celorlaltor vârfuri.

Exercițiul 3.8: Fie dreptele

$$d_1 : 3x - 2y + 2 = 0$$
$$d_2 : x - 2y + 1 = 0$$

Determinaţi punctele $P \in d_1$ astfel încât $dist(P, d_2) = 1$.

Exercițiul 3.9: Fie punctele A şi B intersecţiile dreptei $ax + (2a + 1)y + a^2 = 0, a \neq -\frac{1}{2}, a \neq 0$, cu axele de coordonate.

a) Scrieţi ecuaţia dreptei d_1 astfel încât $A \in d_1, d_1$ paralelă cu prima bisectoare.

b) Scrieţi ecuaţia dreptei d_2 astfel încât $B \in d_2, d_2$ perpendiculară pe prima bisectoare.

c) Aflaţi a astfel încât $d_1 \cap d_2 = \{M\}$ şi $M \in d : 2x + y = 1$.

Seminar 5 - Geometrie - 30.10.2023

Teorie:

1) **transformare afină**: k - corp și $f: k^2 \to k^2$

$$f(X) = AX + B \; ; \; A \in M_2(k), \; B \in k^2, \quad X = (x, y).$$

2) $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$ pt. $\boxed{\forall\, \alpha + \beta = 1}$

Ex de transf. afine:

1) **translațiile**: $\begin{cases} A = I_2 \\ T_v(X) = X + v \end{cases}$ $\begin{cases} X \text{ - pct.} \\ v \text{ - vector} \end{cases}$

! $(\mathcal{T} = \{T_v \mid v \in k^2\}, \circ) \simeq (k^2, +) \Rightarrow k$ - sp. vect. de dim 2

$T_v \circ T_w = T_{v+w}$

! (Gr. de aplic. afine inv.) $\simeq M_2(k) \times k^2$.

$f_{A,b} \circ f_{C,d} = A(CX + d) + b = ACX + Ad + b = f_{AC,\, Ad+b}$.

2) **omotetii**: $H_{O,\alpha} : k^2 \to k^2$

$H_{O,\alpha}(P) = P'$ a.î. $\overrightarrow{OP'} = \alpha \overrightarrow{OP}$

$$\boxed{H_{O,\alpha}(x, y) = \alpha \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$$

Dem: e apl. afină $\Rightarrow H_{0,\alpha}(x) = \underset{2\times 2}{?}(x) + \underset{\in \mathbb{R}^2}{?}$.

Dc. $O=(0,0) \Rightarrow H_{0,\alpha} = (\alpha x, \alpha y) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dc. $Q = (x_Q, y_Q) \Rightarrow H_{Q,\alpha} = T_{\overline{OQ}} \circ H_{0,\alpha} \circ \underbrace{T_{\overline{QO}}}_{\substack{\parallel \\ T^{-1}_{\overline{OQ}}}}$ conjugate (-zgh-

$H_{Q,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_Q \\ y - y_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}$

$H_{Q,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}$

Obs:

1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$ cu $\alpha \neq 1$ omotetie $H_{\frac{b}{1-\alpha}, \alpha}$.

2) $\left.\begin{array}{l} f \text{ translație} \\ f \text{ omotetie } \alpha \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(d)$ e dreaptă.
$f(d) \parallel d$.

! Convenție: $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_1 \cap d_2 = \emptyset$ sau $d_1 = d_2$.

Exerciții:

Pb1: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (3x-2, 3y+4)$.

a) f omotetie:

$f(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow f = H_{(1,-2),3}$

b) $d: 3x+y-1=0$. Calculați $f(d)$.

$(1,-2) \in d$

$f(1,-2)=(1,-2) \Rightarrow f(d)=d$.

c) $d': x+2y+4=0$. Calculați $f(d')$:

$\boxed{M1}$ $y=t \Rightarrow P_t(-2t-4,\ t) \in d'$

$f(P_t) = (-6t-12-2,\ 3t+4)$

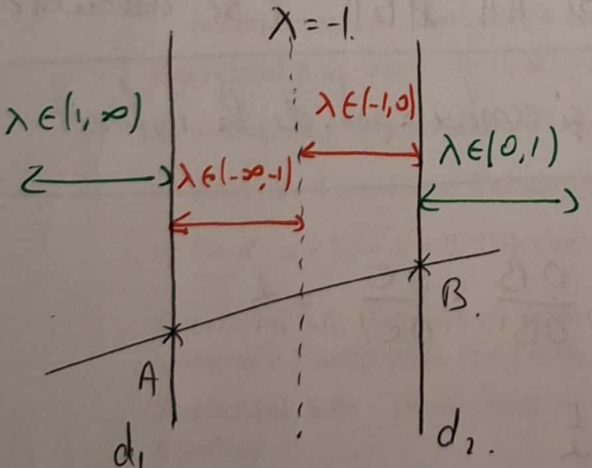
$= (-6t-14,\ 3t+4) \in f(d')$.

$\boxed{M2}$ $f(d') \parallel d' \Rightarrow f(d'): x+2y+c=0$.

$f(0,2)=(-2,-2) \in f(d')$

$\Rightarrow -2-4+c=0 \Rightarrow c=6 \Rightarrow f(d'): x+2y+6=0$.

Pb5: $d_1: 2x-3y+2=0$. $d_2: 2x-3y-1=0$. $\Big\}$ Găsiți o omotetie a.î. $f(d_1)=d_2$.



O a.î. $f(A)=B \Leftrightarrow \vec{OA}=\lambda\vec{OB}$.

Pt. pb. aleg $\lambda=-1 \Leftrightarrow$ iau un pct. P la mij. pe dr.

$d: 2x-3y+\frac{1}{2}=0$.

Pb6: O comp. de omotetii e o omotetie / translație.

! $H_{O,\alpha} \circ H_{O,\beta} = H_{O,\alpha\beta} \Rightarrow (\mathcal{H}_O, \circ) \simeq (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$

$\mathcal{H}_O = \{$omotetii inversabile de centru $O\}$

$H_{O_1,\lambda_1} \circ H_{O_2,\lambda_2} = H_{O_1,\lambda_1}(\lambda_2 x + (1-\lambda_2) O_2)$

$= \lambda_1 \lambda_2 x + (\lambda_1 (1-\lambda_2) O_2 + (1-\lambda_1) O_1)$.

$\Rightarrow$ Dc. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \Rightarrow$ translație.

Dc. $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1 \Rightarrow$ omotetie $\boxed{H_{\frac{\lambda_1(1-\lambda_2)O_2 + (1-\lambda_1)O_1}{1-\lambda_1\lambda_2}, \lambda_1 \lambda_2}}$

! $\frac{\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2} O_2 + \frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1\lambda_2} O_1$ e un pct. bine definit $\Leftrightarrow$

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2} + \frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1\lambda_2} = 1.$$

Pb7: $A = (1,-1)$, $A' = (-2,5)$, $B = (3,0)$, $B' = (10,3)$

$\boxed{2022}$ $d: 2x - 5y + 3 = 0$.

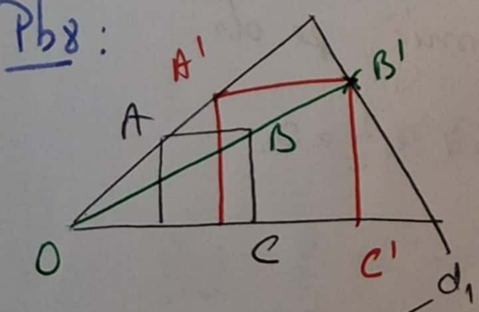
a) $\exists$ f omotetie a.î. $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases}$

Trb. să arăt că $AB \parallel A'B'$ și $AA' \nparallel BB'$ (se calculează.

! Translație = omotetie cu $\lambda = 1$ și centru = pct. de la infinit

---

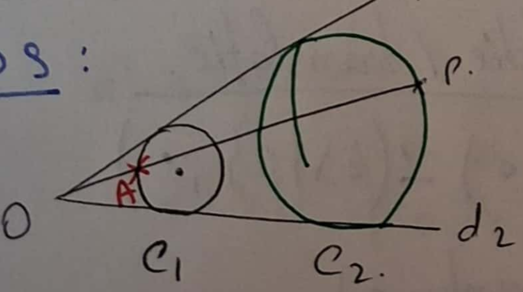
Pb8:



$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \alpha$

$\Rightarrow H_{O, \frac{1}{\alpha}}$.

Pb9:



Iau un cerc C_1 tg. la d_1 și d_2.

$A \in OP \cap C_1$ și fac omotetia

$H_{O, \frac{OP}{OA}} : C_1 \to C_2$.

P.

Seminarul 5 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

5 Exerciţii

Exercițiul 5.1: Fie

$$\mathcal{F} = \{\ \{d_m : (m^2 + 2m + 4)x - (2m^2 + 3m + 5)y - (m + 3) = 0\} \mid m \in \mathbb{R}\}.$$

Reprezintă $\mathcal{F}$ un fascicul de drepte?

Exercițiul 5.2: Fie dreptele

$$d : 2x - 5y - 1 = 0$$
$$d_\alpha : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Este mulţimea $\{d_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ un fascicul de drepte?

b) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$, dacă există, astfel încât $d_\alpha \parallel d$.

c) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$, dacă există, astfel încât $d_\alpha \perp d$.

d) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $(1, 1) \in d_\alpha$. Pentru acest α, calculaţi $\cos \angle(d, d_\alpha)$.

Exercițiul 5.3: Fie dreapta $d : x + 2y + 1 = 0$. Considerăm funcţia

$pr_d : \mathbb{R}^2 \to d \subset \mathbb{R}^2, pr_d(A)$ proiecţia ortogonală a punctului A pe dreapta d.

Scrieţi ecuaţia în coordonate a acestei funcţii: $pr_d(x, y) =?$

Exercițiul 5.4: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x - 2, 3y + 4)$.

a) Arătaţi că f este o omotetie. Determinaţi centrul şi raportul ei.

b) Fie $d : 3x + y - 1 = 0$. Calculaţi $f(d)$.

c) Fie $d' : x + 2y + 4 = 0$. Calculaţi $f(d')$.

Exercițiul 5.5: Considerăm dreptele $d_1 : 2x - 3y + 2 = 0$, $d_2 : 2x - 3y - 1 = 0$. Găsiţi o omotetie f astfel încât $f(d_1) = d_2$.

Exercițiul 5.6: Demonstraţi că o compunere de omotetii este o omotetie sau o translaţie.

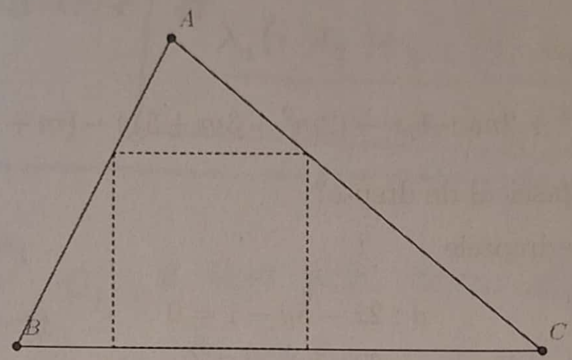
Exercițiul 5.7: (examen ianuarie 2022) În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie punctele $A = (1, -1), A' = (-2, 5), B = (4, 0), B' = (10, 9)$ şi dreapta $d : 2x - 5y + 3 = 0$.

a) Arătaţi că există o omotetie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(A) = A'$ şi $f(B) = B'$. Determinaţi centrul şi raportul lui f.

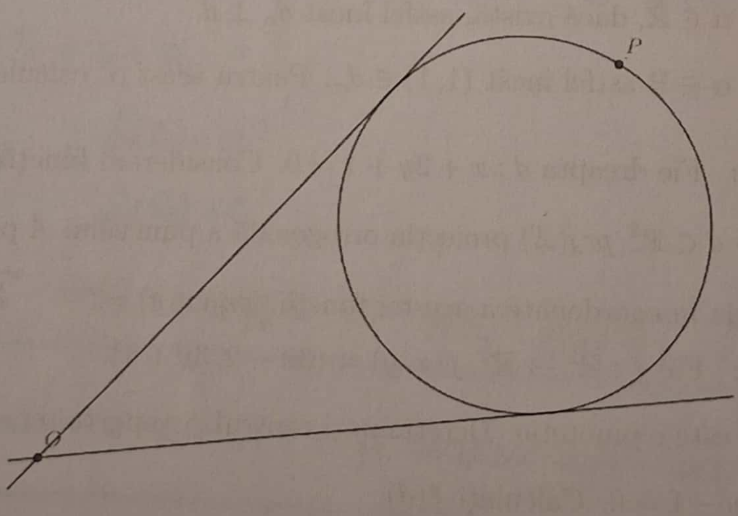
b) Calculaţi $f(d)$.

c) Verificaţi că $f(d)$ nu este paralelă cu dreapta AB dar că $\angle(f(d), AB) < 30°$.

Exercițiul 5.8: Fie un triunghi ascuţitunghic ABC. Folosind omotetii, arătaţi că există un pătrat înscris în acest triunghi *i.e.* cu o latură inclusă în BC şi cu alte două vârfuri pe AB, respectiv AC. Daţi apoi o construcţie cu rigla şi compasul pentru un astfel de pătrat.



Exercițiul 5.9: Fie un unghi şi un punct P în interiorul lui. Propuneţi o construcţie cu rigla şi compasul a unui cerc ce conţine punctul P şi este tangent la dreptele unghiului.



Seminar 6 - Geometrie - 13.11.2023

Izometrii și rotații - Teorie

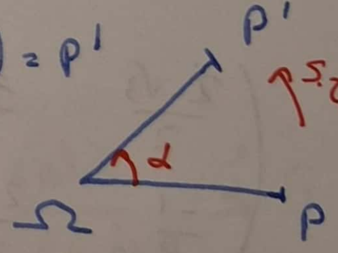
1) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s.n. izometrie dc. $d(x,y) = d(f(x), f(y))$

păstrează dist.

$\boxed{Q}$
- Ex de izometrii
- Ce prop. are o izometrie?
  - inj (ΔA)
  - surj
  - duce dr. în dr?
  - e afină?
- Cum arată toate izometriile?

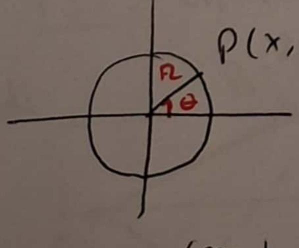
2) ex. de izometrii:
1) translații
2) simetrii ortogonale
3) rotații.

3) $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow R_{\Omega,\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cu $R_{\Omega,\alpha}(P) = P'$ s.n. rotație dc. $|\Omega P| = |\Omega P'|$, $\measuredangle P\Omega P' = \alpha$.



Formule rotație:

Dc. $\Omega = (0,0)$ $P(x,y) \Rightarrow R_{\Omega,\alpha}(P) = (?,?)$



$P(x,y) = r(\cos\theta, \sin\theta)$.

$P' = r(\cos(\theta+\alpha), \sin(\theta+\alpha))$

$P' = r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta, \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)$

$$P' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ← mat. de rotație

La fel ca la omotetii, rotația de centru Ω, α este:

$$\boxed{R_{\Omega,\alpha} = T_{\vec{O\Omega}} \circ R_{O,\alpha} \circ T_{\vec{\Omega O}}}$$

Exerciții

Pb1: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}x - y + 4 - \sqrt{3}}{2}, \frac{x + \sqrt{3}y + 3 - 2\sqrt{3}}{2} \right)$

a) f rotație

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_{\Omega,\frac{\pi}{6}} = T_{\vec{O\Omega}} \circ R_{O,\frac{\pi}{6}} \circ T_{\vec{\Omega O}}$$

$$= A\begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = A \cdot X + (I - A)\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$$

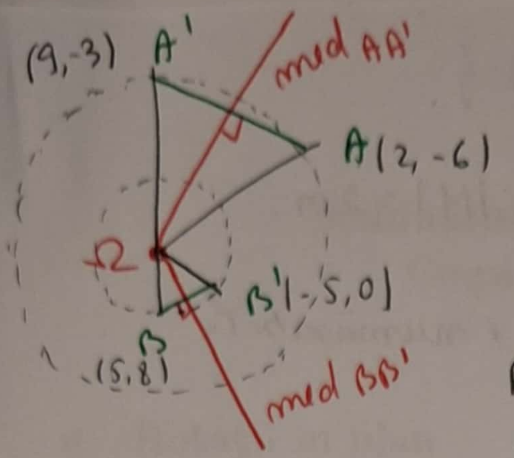
$$\begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_\Omega = 1 \\ y_\Omega = 2 \end{cases}$$ ⇒ rot. de centru (1, 2) $\measuredangle \frac{\pi}{6}$.

! $f = R_{\Omega,\alpha} \Rightarrow \Omega$ e pct. fix pt. $f \Rightarrow f(\Omega) = \Omega$

Pb3: $A = (2,-6)$, $A' = (5,-3)$, $B = (5,8)$, $B' = (-5,0)$

2022 $d: 4x + y - 2 = 0$.

a) $\exists f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotație a.î. $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases}$



$\overrightarrow{AA'} = (7,3) \Rightarrow med_{AA'}: 7X + 3Y + c = 0.$

$M_A\left(\frac{11}{2}, \frac{-9}{2}\right) \in med_{AA'} \Rightarrow$

$med_{AA'}: 7X + 3Y - 25 = 0.$

$\overrightarrow{BB'} = (-10,-8) \Rightarrow med_{BB'}: 10X + 8Y + c' = 0$

$M_B(0,4) \in med_{BB'} \Rightarrow$

$med_{BB'}: 5X + 4Y - 16 = 0$

$\Omega = med_{AA'} \cap med_{BB'} \Rightarrow \Omega = (4,-1)$

$\langle \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'} \rangle = \langle (-2,-5), (5,-2) \rangle = 0 \Rightarrow \widehat{A\Omega A'} = \frac{\pi}{2}.$

b) Calculați f(d)

<u>Obs</u>: $A \in d \Rightarrow f(A) = A' \in d$

! f rotație și $\vec{u} \in \mathrm{Dir}(d) \Rightarrow R_\alpha \cdot \vec{u} \in \mathrm{Dir}(f(d))$

La noi $f(d) \perp d$, $A' \in f(d)$ $\Rightarrow f(d): -X + 4Y - 21 = 0.$

c) $\sphericalangle(f(d), A'B') < 30^\circ$

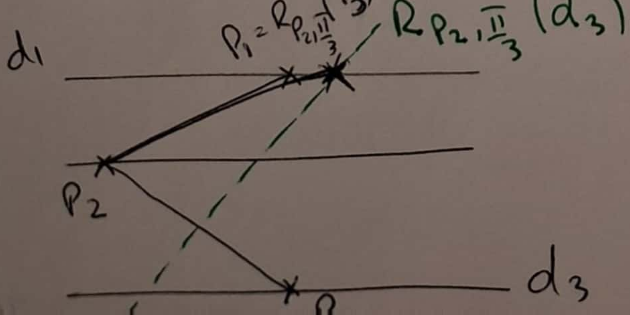
$u = (4,1) \in \mathrm{dir}\, f(d).$

$\overline{A'B'} = (-14, 3)$

$\Rightarrow \cos \sphericalangle(A'B', f(d)) = \frac{\langle u, \overline{A'B'} \rangle}{\|u\| \cdot \|\overline{A'B'}\|} \overset{?}{>} \frac{\sqrt{3}}{2}$

Și se fac calculele.

<u>Pb 5</u>: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \exists\, P_i \in d_i\ ;\ i = \overline{1,3}$ a.î. $\Delta P_1P_2P_3$ echilat.



Obs: $M = \{ R_{O,k\alpha}(P) \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

1) $\alpha = \frac{m}{n}\pi$ cu $(m,n)=1 \Rightarrow |M| = 2n$.

2) $\alpha \notin \mathbb{Q}\pi \Rightarrow M$ densă pe cerc + numărabilă

(~~Pb. pilic ol~~

Seminarul 6 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

6 Rotaţii în plan

Exercițiul 6.1: Fie aplicaţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}x - y + 4 - \sqrt{3}}{2}, \frac{x + \sqrt{3}y + 3 - 2\sqrt{3}}{2}\right)$$

a) Demonstraţi că f este o rotaţie; determinaţi unghiul şi centrul ei.

b) Fie $d : x + y + 3 = 0$. Determinaţi $f(d)$.

Exercițiul 6.2: Fie $P = (1, 2)$ şi $Q = (-2, 3)$. Verificaţi că $R_{P,\frac{\pi}{3}} \circ R_{Q,\frac{\pi}{6}}$ e o rotaţie şi aflaţi-i centrul.

Exercițiul 6.3: (examen ianuarie 2022) În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie punctele $A = (2, -6), A' = (9, -3), B = (5, 8), B' = (-5, 0)$ şi dreapta $d : 4x + y - 2 = 0$.

a) Arătaţi că există o rotaţie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(A) = A'$ şi $f(B) = B'$. Determinaţi centrul şi unghiul de rotaţie al lui f.

b) Calculaţi $f(d)$.

c) Verificaţi că $f(d)$ nu este paralelă cu dreapta $A'B'$ dar că $\angle(f(d), A'B') < 30°$.

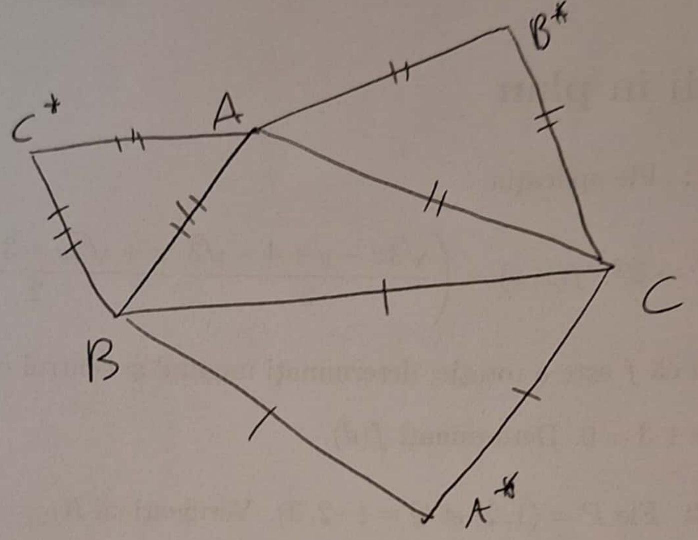
Exercițiul 6.4: Demonstraţi că o izometrie cu exact un punct fix e o rotaţie.

Exercițiul 6.5: Fiind date trei drepte distincte şi paralele în plan, arătaţi că există un triunghi echilateral cu câte un vârf pe fiecare din cele trei drepte.

Exercițiul 6.6: Fie O, P puncte distincte în plan şi $\alpha \in (0, 2\pi)$. Ce este mulţimea

$$\mathcal{P} = \{R_{O,k\alpha}(P) \mid k \in \mathbb{Z}\}?$$

Exercițiul 6.7: (punctul lui Fermat) Fie un triunghi ABC şi A^*, B^*, C^* celelalte vârfuri ale triunghiurilor echilaterale construite pe laturile acestui triunghi, ca în desenul de mai jos:



Demonstraţi, eventual folosind Teorema sinusurilor şi Teorema lui Ceva, că AA^*, BB^* şi CC^* sunt concurente. Acest punct se numeşte punctul lui Fermat.

Exercițiul 6.8: Fie un triunghi ABC. Construiţi un punct P în interiorul triunghiului astfel încât $|PA| + |PB| + |PC|$ este minim. (e pct. Fermat)

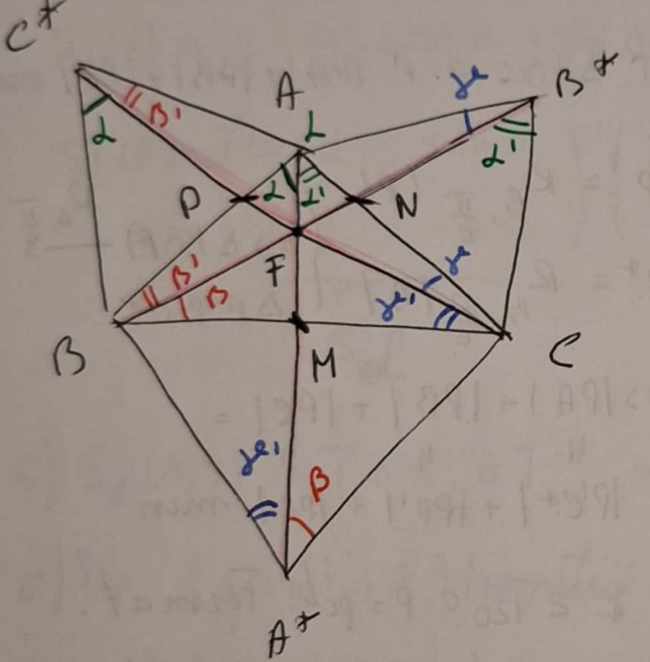
Este acest punct unic?

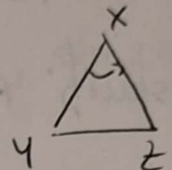
dc e în int Δ.

Seminar 7 - Geometrie - 20.11.2023

Rotații în plan

Pb 1: (Pct. Fermat) ΔABC și A^*, B^*, C^* celelalte vf. Δ echilat pe lat. în ext. $\Rightarrow AA^* \cap BB^* \cap CC^* \neq \emptyset$.





$R_{x, \frac{\pi}{3}}(y) = z$

$$\left.\begin{array}{l} R_{B,\frac{\pi}{3}}(A) = C^* \\ R_{B,\frac{\pi}{3}}(A^*) = C \\ R_{B,\frac{\pi}{3}}(B) = B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \Delta ABA^* \\ \downarrow R_{B,\frac{\pi}{6}} \\ \Delta C^*BC \end{array}$$

$\Downarrow$

$\widehat{BC^*C} = \widehat{BAA^*}$

$\widehat{BA^*A} = \widehat{BCC^*}$

Analog $\Delta B^*CB \xrightarrow{R_{C,\frac{\pi}{3}}} \Delta ACA^*$

$\Delta C^*AC \xrightarrow{R_{A,\frac{\pi}{3}}} \Delta BAB^*$

în $\left|\begin{array}{l} \Delta B^*NC: \dfrac{NC}{\sin \alpha'} = \dfrac{b}{\sin B^*NC} \\ \\ \Delta B^*NA: \dfrac{NA}{\sin \gamma} = \dfrac{b}{\sin \widehat{ANB^*}} = \dfrac{NC}{\sin \alpha'} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\dfrac{NC}{NA} = \dfrac{\sin \alpha'}{\sin \gamma}}$

Analog $\boxed{\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{\sin \beta'}{\sin \alpha}}$ și $\boxed{\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{\sin \gamma'}{\sin \beta}}$

Vrem $\dfrac{\sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = 1$.

în) $\Delta C^*BC \Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma'} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma'}$

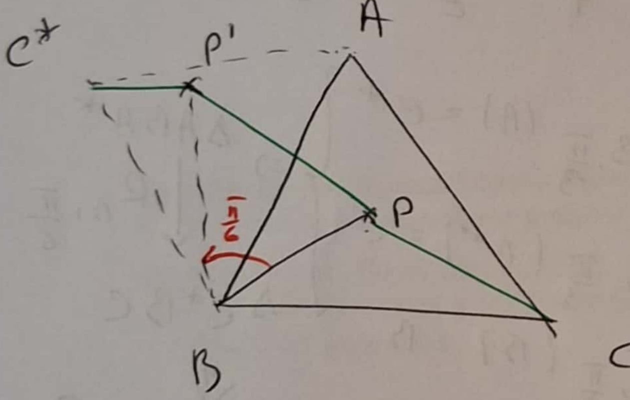
$\Delta BCB^* \Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha'} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha'}$

$\Delta CAC^* \Rightarrow \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta'} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta'}$

(·)

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CP}{PB} = 1 = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'}$$ $\Rightarrow$ concurente.

Pb 2: ΔABC. Construiți $P \in \text{int } \Delta ABC$ a.î. $|PA| + |PB| + |PC|$ min.



$P' = R_{B, \frac{\pi}{6}}(P)$

$C^* = R_{B, \frac{\pi}{6}}(A)$

$\Rightarrow \Delta PBA \xrightarrow{R_{B, \frac{\pi}{3}}} \Delta P'BC^*$

$\Rightarrow |PA| + |PB| + |PC| = |P'C^*| + |PP'| + |PC|$ min

pt. pct. col $\Rightarrow$ pt. ΔABC cu $\measuredangle < 120^\circ$ $P =$ pct. Fermat.

pt. ΔABC cu $\measuredangle A > 120^\circ$ $P = A$ (dem temă)

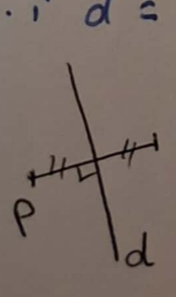
Izometrii și simetrii axiale - Teorie:

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s.n. izometrie dc. $d(x,y) = d(f(x), f(y))$.

2) curs: dc. f afină + izometrie $\Rightarrow f(x) = Ax + B$, cu $A \cdot {}^tA = I_2 \Leftrightarrow \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$

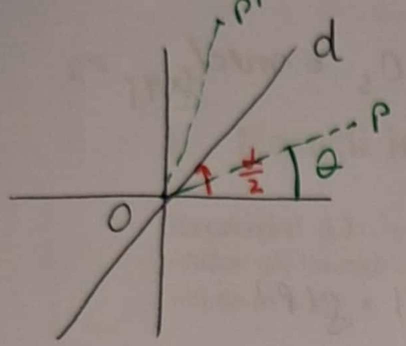
3) $d \subset \mathbb{R}^2$ dr. și $s_d: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $s_d(P) = P'$

a.î. $d =$ mediatoare $[PP']$ s.n. simetrie axială



4) Simetria axială = izometrie

$\boxed{Q}$ Ce formă are simetria axială?



Aleg un sistem xOy a.î. $O \in d$.

$P(x,y) \Rightarrow S_d(P) = r(\cos(\alpha-\theta), \sin(\alpha-\theta$

$\parallel$

$P(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$S_d(P) = r(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta,\ \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta).$$

$$S_d(P) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}}_{S_\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftarrow \text{simetrie față de } d \ni O(0,0)$$

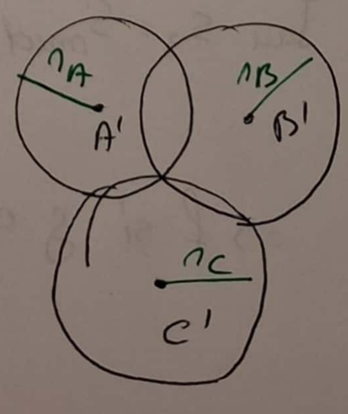
5) $S_d(x,y) = T \circ S_\alpha \circ T^{-1} \Rightarrow$ apl. afină.

6) Dc. $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ izometrii și $\exists\, A, B, C$ necol a.î.

$$\begin{cases} f(A) = g(A) = A' \\ f(B) = g(B) = B' \\ f(C) = g(C) = C' \end{cases} \Rightarrow \boxed{f = g}$$

7) $\forall$ izometrie = o comp. de max 3 simetrii axiale.

Dem 6): $P \in \mathbb{R}^2$.



$d(f(P), A') = d(P, A) = d(g(P), A') = r_A$

$d(f(P), B') = d(P, B) = d(g(P), B') = r_B$.

$d(f(P), C') = d(P, C) = d(g(C), C') = r_C$

$\Rightarrow f(P), g(P) \in \mathcal{C}_{A'} \cap \mathcal{C}_{B'} \cap \mathcal{C}_{C'}$

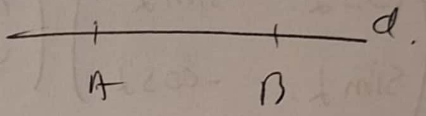
$\Rightarrow f(P) = g(P)$

! $\underset{O_1}{\mathcal{C}_1} \cap \underset{O_2}{\mathcal{C}_2} \cap \underset{O_3}{\mathcal{C}_3} \subset \{x\}$ pt. O_1, O_2, O_3 necol.

Pp. R.A. $\exists\, x \neq y \subset \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \Rightarrow O_1, O_2, O_3 \in med_{\{xy\}} \Rightarrow$ O_1, O_2, O_3 col.

A, B, C necol $\underset{\text{ineg. } \Delta}{\Rightarrow}$ A', B', C' necol. $\Rightarrow f(P) = g(P)$!

Ex de 2 izometrii care coincid în 3 pct. col, dar nu coincid: $\begin{cases} f = id. \\ g = simAB \end{cases}$



Dem 7) Aleg A, B, C necol $\Rightarrow \Delta A'B'C' \equiv \Delta ABC$, $f(A) = A'$ și analoagele

Vreau să construiesc simetrii axiale $g = S_3 \circ S_2 \circ S_1$ a.î. $g(A) = A'$ ...

Iau S_1 - simetria care îl duce pe $A \to A'$ (id pt. $A = A'$)

$S_1 = S_{med\, AA'} \Rightarrow \begin{cases} S_1(A) = A' \\ S_1(B) = B_1 \\ S_1(C) = C_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B_1C_1.$

Iau $S_2 = S_{med\, B_1B'} \Rightarrow$ $S_2(B_1) = B'$

$S_2(A') = A'$ din $A'B_1 = AB = A'B'$

$S_2(C_1) = C_2.$

Iau $S_3 = S_{med\, C_2C'} \Rightarrow$ $S_3(C_2) = C'$

$S_3(A') = A'$

$S_3(B') = B'$

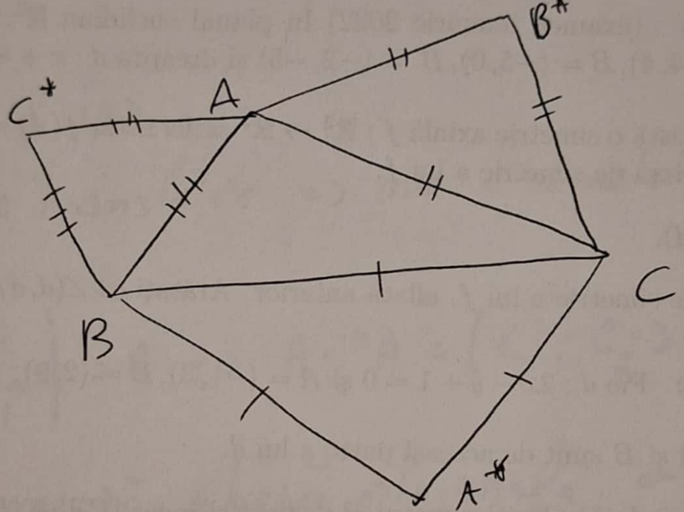
$\Rightarrow f$ și g coincid în A, B, C necol $\Rightarrow \boxed{f = g}$.

Seminarul 7 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

6 Rotaţii în plan

Exerciţiul 6.1: (punctul lui Fermat) Fie un triunghi ABC şi A^*, B^*, C^* celelalte vârfuri ale triunghiurilor echilaterale construite pe laturile acestui triunghi, ca în desenul de mai jos:



Demonstraţi, eventual folosind Teorema sinusurilor şi Teorema lui Ceva, că AA^*, BB^* şi CC^* sunt concurente. Acest punct se numeşte punctul lui Fermat.

Exerciţiul 6.2: Fie un triunghi ABC. Construiţi un punct P în interiorul triunghiului astfel încât $|PA| + |PB| + |PC|$ este minim.

Este acest punct unic?

7 Simetrii axiale. Exerciţii

Exercițiul 7.1: Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=\left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2, \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-5\right)$.
Demonstraţi că f este izometrie. Este f o simetrie axială?

Exercițiul 7.2: Scrieţi ecuaţia simetriei faţă de dreapta $d: 2x+3y-6=0$.

Exercițiul 7.3: Fie dreptele $d_1: x=1,\ d_2: x=4,\ d_3: x=-2,\ d_4: x=5$.
Calculaţi $S_{d_1}\circ S_{d_2}\circ S_{d_3}\circ S_{d_4}$. Comută cele 4 simetrii?

Exercițiul 7.4: Din teoria de curs: compunerea unei simetrii axiale cu o translaţie nu este neapărat tot simetrie axială.
Demonstraţi că, pentru o dreaptă d în plan şi un vector $v\in\mathcal{V}$, $T_v\circ S_d$ este o simetrie axială dacă şi numai dacă $v\perp \mathrm{Dir}(d)$.

Exercițiul 7.5: (examen ianuarie 2022) În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie punctele $A=(2,-6), A'=(-4,4), B=(-5,0), B'=(-2,-5)$ şi dreapta $d: x+4y+5=0$.

a) Arătaţi că există o simetrie axială $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ astfel încât $f(A)=A'$ şi $f(B)=B'$.
Determinaţi axa de simetrie a lui f.

b) Calculaţi $f(d)$.

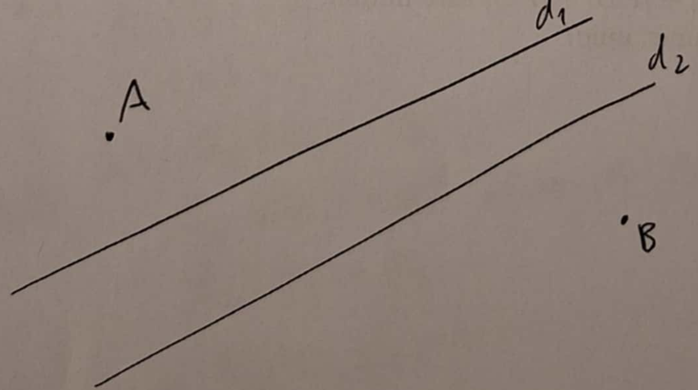
c) Fie d_f axa de simetrie a lui f, aflată anterior. Arătaţi că $\angle(d,d_f)=45°$.

Exercițiul 7.6: Fie $d: 2x-y+1=0$ şi $A=(-1,3), B=(2,9)$.

a) Arătaţi că A şi B sunt de aceeaşi parte a lui d.

b) ("Problema râului") Găsiţi punctul $P\in d$ astfel încât $|PA|+|PB|$ este minimă.

Exercițiul 7.7: ("Problema podului") Fie dreptele distincte $d_1\parallel d_2$ şi A,B puncte aflate pe părţi opuse determinate de cele două drepte (vedeţi figura de mai jos).



Găsiţi punctele $P_1\in d_1, P_2\in d_2$ astfel încât $P_1P_2\perp d_1$ şi $|AP_1|+|P_1P_2|+|P_2B|$ minimă.

Exercițiul 7.8: Fie un triunghi ascuţitunghic ABC. Construiţi punctele P,Q,R, fiecare pe câte o latură, astfel încât perimetrul $\triangle PQR$ este minim.

Seminar 8-9 - Geometrie - 27.11.2023

158 **Pb1**: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2,\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-5\right)$.

f izo + f sim axială?.

$$f(x,y)=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$$

$A\cdot {}^tA=I_2 \Rightarrow f$ izo.

f = rotație + translație $\Rightarrow$ nu e simetrie axială.

! $\begin{pmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}=A \Rightarrow A\cdot {}^tA=(\langle c_i,c_j\rangle)_{i,j=\overline{1,m}}$.

$\Rightarrow$ coloanele formează o bază ortogonală. $\Leftrightarrow \begin{cases}\|c_i\|=1.\\ \langle c_i,c_j\rangle=0 \quad i\neq j\end{cases}$

! o rotație ($\alpha\neq 0$) compusă cu o translație e tot rotație.
$\alpha\neq k\pi$

$T\circ R \Rightarrow f(x,y)=R_\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+v \overset{?}{=} T_\Omega R_\alpha T_{-\Omega}$

$R_\alpha X+v=R_\alpha(X-\Omega)+\Omega \Rightarrow \boxed{v=(I_2-R_\alpha)\,\Omega}$

$$I_2-R_\alpha=\begin{pmatrix}1-\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & 1-\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$\det(I_2-R_\alpha)=1+\cos^2-2\cos\alpha+\sin^2=2(1-\cos\alpha)\neq 0$
$(\alpha\neq 2k\pi)$

Pb1,5: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

$\det A=-1$ și e o simetrie o translație.

! simetrie axială compusă cu translație nu e neapărat simetrie axială.

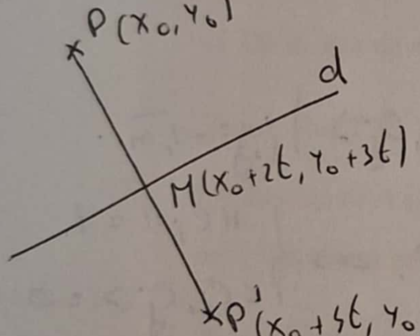
$S_\alpha X + v = \alpha_\alpha(X - \Omega) + \Omega. \Rightarrow v = (I_2 - S_\alpha)\Omega.$

$\det(I_2 - S_\alpha) = \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & +\sin\alpha \\ \sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0.$

$\rightarrow$ este de $\exists\ \Omega$ a.î. $v = (I_2 - S_\alpha)\Omega \Leftrightarrow v \in \mathrm{Im}(I_2 - S_\alpha)$

$\dim(\mathrm{Im}(I_2 - S_\alpha)) = 1.$

<u>Pb2</u>: ec. simetriei față de $d: 2x + 3y - 6 = 0.$



$\mathrm{dir}(P, P') = \langle(2,3)\rangle$

$M \in d. \Rightarrow 2(x_0+2t) + 3(y_0+3t) - 6 = 0$

(x_0+2t, y_0+3t)

$t = \dfrac{6 - 2x_0 - 3y_0}{13}.$

! Comp. a 2 rotații $\begin{cases} \text{rotație } \measuredangle\ \alpha+\beta \neq 2k\pi. = R_{\alpha+\beta}. \\ \text{translație } \measuredangle\ \alpha+\beta = 2k\pi. \end{cases}$

$f(x,y) = R_\alpha R_\beta(x,y) + \ldots$

$R_\alpha R_\beta = I_2 \Rightarrow$ translație $\Leftrightarrow \alpha+\beta = 2k\pi.$

$R_\alpha R_\beta \neq I_2 \Rightarrow$ rotație de $\measuredangle\ \alpha+\beta \neq 2k\pi.$

! Comp. a 2 simetrii axiale $\begin{cases} \text{rotație } \measuredangle\ \alpha-\beta \neq 2k\pi \\ \text{translație } \measuredangle\ \alpha-\beta = 2k\pi. \end{cases}$

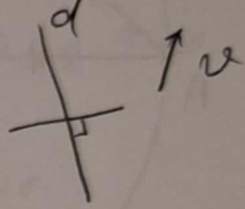
Pb3: $d_1: x=1$, $d_2: x=4$, $d_3: x=-2$, $d_4: x=5$.

$S_{d_1} \circ S_{d_2} \circ S_{d_3} \circ S_{d_4}$.

$S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 = (x-20, y)$

$S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = (x+20, y)$ => nu comută.

Pb4: $T_v \circ S_d$ sim axială $\Leftrightarrow v \perp Dir(d)$.



$\boxed{\Rightarrow}$ $T_v \circ S_d$ sim axială => are pct. fixe.

$\Rightarrow \exists P$ a.î. $S_d(P) + v = P \Rightarrow \overrightarrow{P S_d(P)} \in \langle v \rangle \Rightarrow$

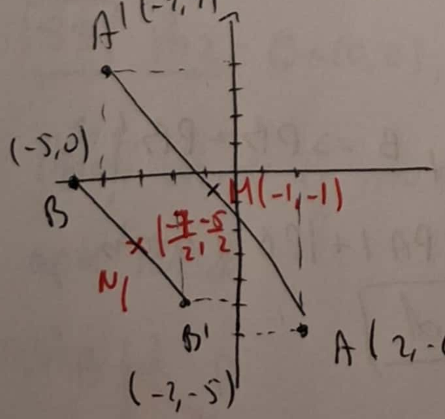
$\Rightarrow v \in \langle \overrightarrow{P S_d(P)} \rangle \perp d$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $T_v \circ S_d = S_{T_{\frac{v}{2}}(d)}$ <- mt. de pct. fixe pt. $T_v \circ S_d$.

Pb5: $A=(2,-6)$, $A'=(-4,4)$, $B=(-5,0)$, $B'=(-2,-5)$

$\boxed{2022}$ $d: x+4y+5=0$.

a) $\exists$ f sim. axială a.î. $\begin{cases} f(A)=A' \\ f(B)=B' \end{cases}$



~~eced AA': $\frac{x+2}{5} = \frac{y+6}{3}$~~

~~eced BB': $\frac{x+7}{2} = \frac{y+5}{1}$~~

$\overrightarrow{AA'} = (-6, 10)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{BB'}$

$\overrightarrow{BB'} = (3, -5)$

$\overrightarrow{NM} = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \perp AA' \Rightarrow \boxed{S_{MN}}$ e sim bună

b) Calculați f(d)

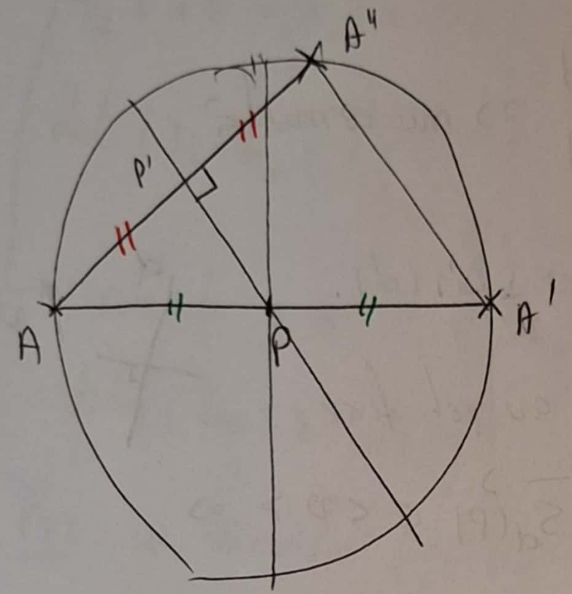
$B \in d \Rightarrow B' \in f(d)$.

$M \in d \Rightarrow M \in f(d)$

$\Rightarrow f(d) = MB'$

Pb6: $M = \{ S_d(A) \mid P \in d \}$, P fixat. $P \neq A$

$M = \mathcal{C}(P, AP)$

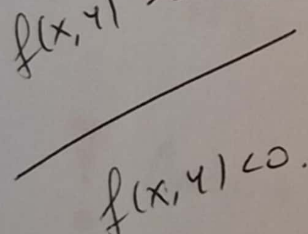


$PP' \parallel A'A'' \Rightarrow \Delta AA''A'$ dr. în A''

$\Rightarrow A'' \in \mathcal{C}(P, AP)$.

Pb7: $d: 2x - y + 1 = 0$, $A = (-1, 3)$, $B = (2, 9)$

a) A și B de ac. parte a lui d.

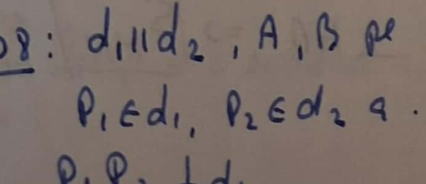


$f(-1,3): -2-3+1 < 0$

$f(2,9): 4-9+1 < 0$.

$\Rightarrow$ A și B sunt de ac. parte a lui d.

b) P a.î. $|PA| + |PB|$ min.
$\cap$
d.



Iau $B' = sim_d B \Rightarrow PB = PB'$.

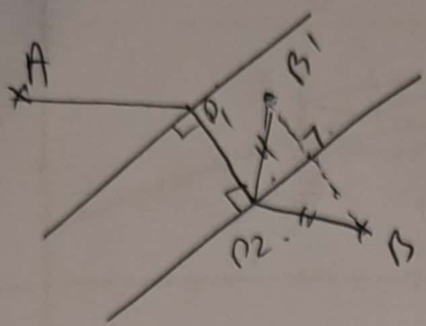
$|PA| + |PB| = |PA| + |PB'|$ min

$\Rightarrow \boxed{P = AB' \cap d.}$

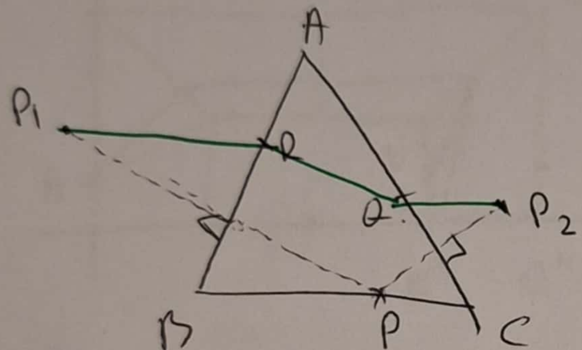
Pb8: $d_1 \parallel d_2$, A, B pe părți opuse.

$P_1 \in d_1$, $P_2 \in d_2$ a.î. $|AP_1| + |P_1P_2| + |P_2B|$ min.

$P_1P_2 \perp d_1$



Pb9: ΔABC ascuțitunghic. P, Q, R pe lat. a.î. $\mathcal{P}_{\Delta PQR}$ min.



Aleg $P \in BC$ și duc.

$P_1 = sim_{AB} P$ și $P_2 = sim_{AC} P$.

$\Rightarrow P_1R = RP$ și $QP = QP_2$.

$|PR| + |RQ| + |QP| =$

$|P_1R| + |RQ| + |QP_2|$ min.

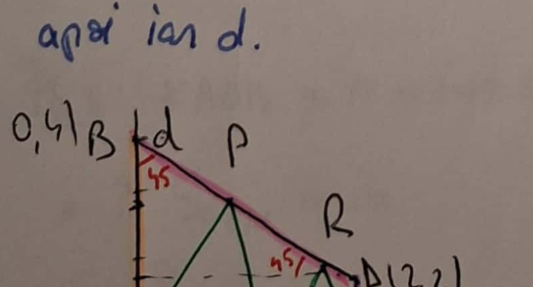
$\Rightarrow R, Q - P_1 - P_2$ col $\Rightarrow R = P_1P_2 \cap AB$.
$Q = P_1P_2 \cap AC$.

$\widehat{P_1AP_2} = 2 \cdot \widehat{BAC}$
$\Rightarrow |AP_1| = |AP_2| = |AP|$

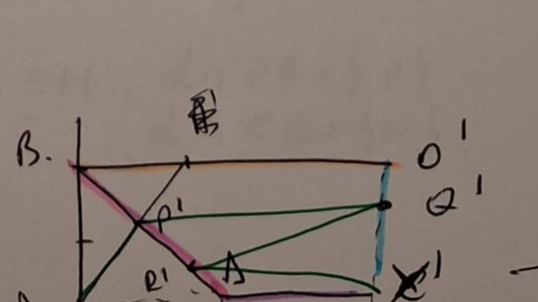
$P_1P_2 = \mathcal{P}_{PRQ}$ min $\Leftrightarrow AP$ min $\Leftrightarrow AP \perp BC \Rightarrow \Delta PRQ$ Δ ortic.

$\boxed{S9}$ Pb2: $O = (0,0)$, $(0,4)$, $(2,2)$; $A = (0,1)$ și $C = (2,1)$.

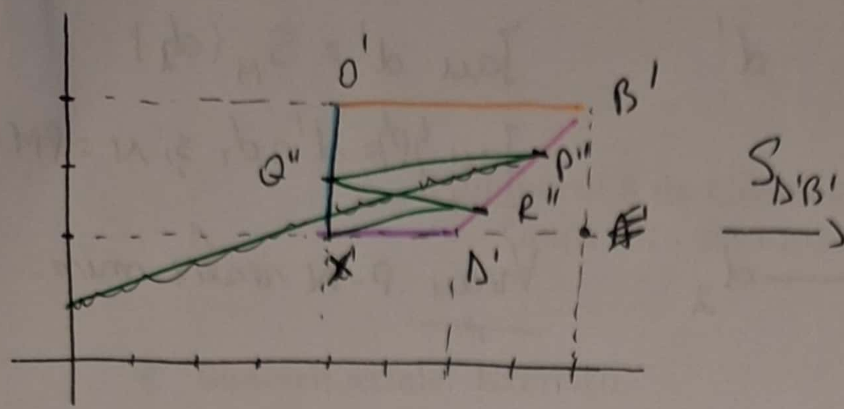
Aflați dr. de lg. min de la A la C care $\cap$ lat d, apoi b, apoi iar d.



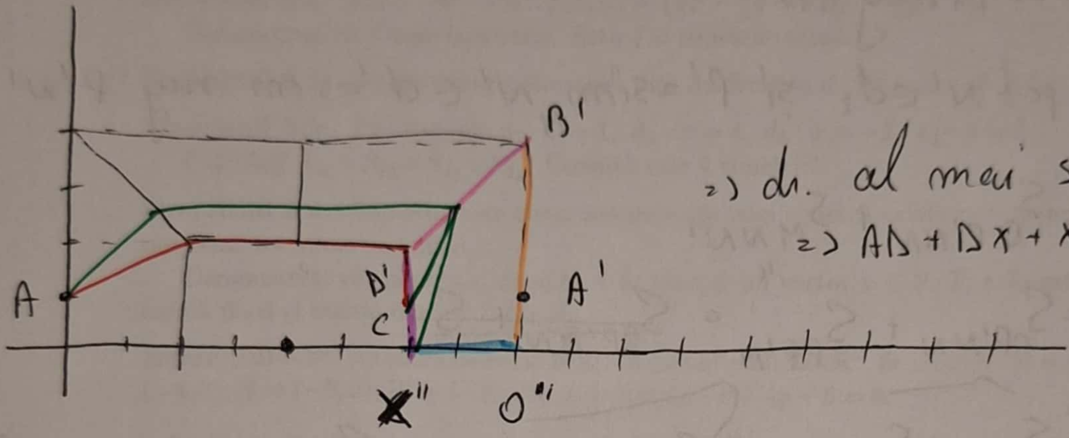
$\xrightarrow{S_d}$



$\xrightarrow{S_{O'C'}}$



$\xrightarrow{S_{D'B'}}$



$\Rightarrow$ dr. al mai scurt e cu roșu

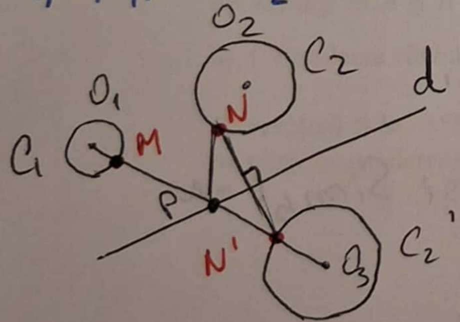
$\Rightarrow AD + DX + XD + DC$.

Pb1: d - dreaptă.

C_1, C_2 - cercuri de ac. parte a dreptei d.

O_1, r_1 O_2, r_2

$C_1 \ni M, N \in C_2$ a.î. $MP + PN$ min., $P \in d$



Iau simetria față de d: $C_2 \to C_2'$

~~Iau $O_1O_2 \cap C_1 = \{M\}$ și $O_1O_2 \cap C_2' = \{N'\}$~~

$|PM| + |PN|$ min $\Leftrightarrow r_1 + |PM| + |PN| + r_2$

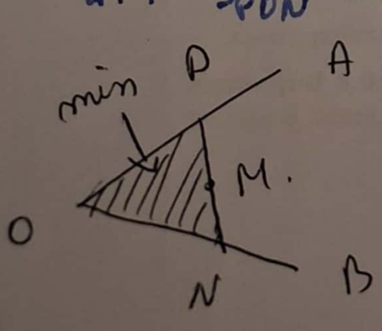
 $|PN'|$

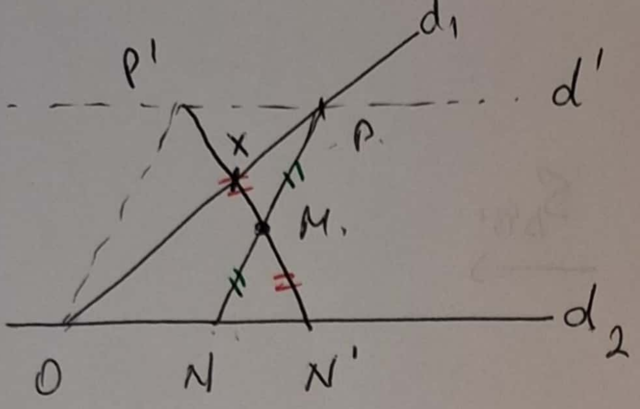
min $\Leftrightarrow |O_1M| + |MP| + |PN'| + |N'O_3|$ min

$\Leftrightarrow O_1 - M - P - N' - O_3$ coliniare.

Pb3: $\sphericalangle AOB$ și $M \in \operatorname{int} AOB$. $d \ni M$, $d \cap OA = \{P\}$
$d \cap OB = \{N\}$.

a.î. S_{PON} min.





Iau $d' = S_M(d_2)$.

Iau $\{P\} = d' \cap d_1$ și $N = PM \cap d_2$.

Vreau P-N realiz. min.

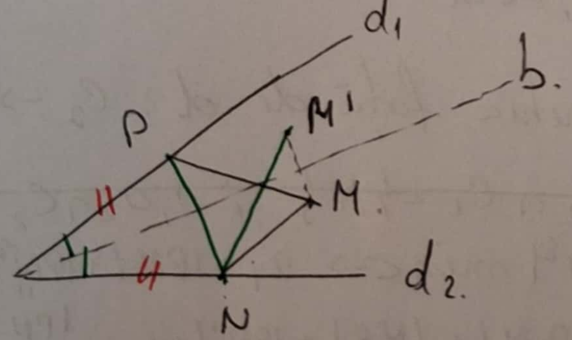
$P = sim_M N \Rightarrow M$ mij PN

Iau alt pct $N' \in d_2$ și $P' = sim_M N' \in d' \Rightarrow m$ mij. $P'N'$

$$\Rightarrow S_{ON'P'} = S_{OP'MN} + \underset{=}{S_{MNN'}}$$
$$= S_{OP'MN} + S_{PP'M} = \cancel{S_{OP'MN} + S}$$
$$= S_{P'XO} + \underbrace{S_{OXMN} + S_{XPM}}_{S_{PON}} + S_{P'XP} = S_{PON} + S_{P'OP} > S_{PON}$$

$\Rightarrow PON$ realiz. min.

Pb 4: $\widehat{AOB}$, $M \in int\ \widehat{AOB}$, $\begin{cases} X \in OA \\ Y \in OB \end{cases}$ a.î. $\begin{cases} XO = YO \\ MX + MY \text{ min.} \end{cases}$



$Sim_b M = M'$

$Sim_b N = P$ și $Sim_b P = N$.

$\Rightarrow M'N = MP$

$|MP| + |PN|$ min
$\shortparallel$
$|M'N| + |NP|$ min ~~pt.~~

Seminarul 8 de Geometrie I
Grupa 101 - 2023-2024

8 Simetrii axiale. Exerciţii

Exercițiul 8.1: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 5\right)$.
Demonstraţi că f este izometrie. Este f o simetrie axială?

Exercițiul 8.2: Scrieţi ecuaţia simetriei faţă de dreapta $d : 2x + 3y - 6 = 0$.

Exercițiul 8.3: Fie dreptele $d_1 : x = 1,\ d_2 : x = 4,\ d_3 : x = -2,\ d_4 : x = 5$.
Calculaţi $S_{d_1} \circ S_{d_2} \circ S_{d_3} \circ S_{d_4}$. Comută cele 4 simetrii?

Exercițiul 8.4: Din teoria de curs: compunerea unei simetrii axiale cu o translaţie nu este neapărat tot simetrie axială.

Demonstraţi că, pentru o dreaptă d în plan şi un vector $v \in \mathcal{V}$, $T_v \circ S_d$ este o simetrie axială dacă şi numai dacă $v \perp \mathrm{Dir}(d)$.

Exercițiul 8.5: (examen ianuarie 2022) În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie punctele $A = (2, -6), A' = (-4, 4), B = (-5, 0), B' = (-2, -5)$ şi dreapta $d : x + 4y + 5 = 0$.

a) Arătaţi că există o simetrie axială $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(A) = A'$ şi $f(B) = B'$. Determinaţi axa de simetrie a lui f.

b) Calculaţi $f(d)$.

c) Fie d_f axa de simetrie a lui f, aflată anterior. Arătaţi că $\angle(d, d_f) = 45°$.

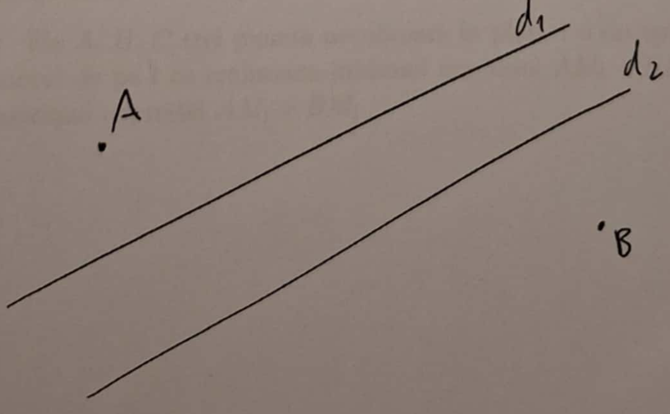
Exercițiul 8.6: Fie $P \neq A$ puncte în plan. Ce este mulţimea $\{S_d(A) \mid P \in d\}$?

Exercițiul 8.7: Fie $d : 2x - y + 1 = 0$ şi $A = (-1, 3), B = (2, 9)$.

a) Arătaţi că A şi B sunt de aceeaşi parte a lui d.

b) ("Problema râului") Găsiţi punctul $P \in d$ astfel încât $|PA| + |PB|$ este minimă.

Exercițiul 8.8: ("Problema podului") Fie dreptele distincte $d_1 \parallel d_2$ şi A, B puncte aflate pe părţi opuse determinate de cele două drepte (vedeţi figura de mai jos).



Găsiţi punctele $P_1 \in d_1, P_2 \in d_2$ astfel încât $P_1P_2 \perp d_1$ şi $|AP_1| + |P_1P_2| + |P_2B|$ minimă.

Exercițiul 8.9: Fie un triunghi ascuţitunghic ABC. Construiţi punctele P, Q, R, fiecare pe câte o latură, astfel încât perimetrul $\triangle PQR$ este minim.

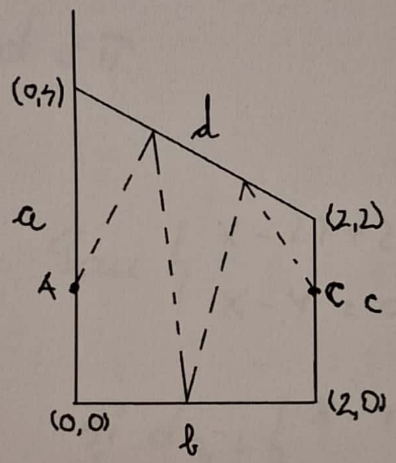
Seminarul 9 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

9 Izometrii ale planului. Exerciţii

Exerciţiul 9.1: Fie d o dreaptă, O_1, O_2 puncte de aceeaşi parte a lui d şi C_1, C_2 cercurile de centru O_1 şi rază r_1, respectiv centru O_2 şi rază r_2, care nu intersectează dreapta. Aflaţi punctele $M \in C_1$, $N \in C_2$ şi $P \in d$ astfel încât $MP + PN$ să fie minim.

Exerciţiul 9.2: Patrulaterul din imagine are vârfurile în punctele de coordonate $(0,0)$, $(0,4)$, $(2,2)$ şi $(2,0)$. Fie $A(0,1)$ şi $C(2,1)$. Aflaţi drumul de lungime minimă de la A la C care intersecteaza latura d într-un punct, apoi latura b într-un punct şi din nou latura d într-un punct (vedeţi drumul punctat din imagine).



Exerciţiul 9.3: Dat un unghi $\widehat{AOB}$ şi un punct în interiorul lui M, găsiţi dreapta care trece prin M şi taie OA în P şi OB în N astfel încât triunghiul PON să aibă aria minimă.

Exerciţiul 9.4: Dat un unghi $\widehat{AOB}$ şi un punct în interiorul lui M, găsiţi puncte X pe OA şi Y pe OB astfel încât $OX = OY$ şi $MX + MY$ să fie minim.

Exerciţiul 9.5: Fie A, B, C trei puncte necoliniare în plan, l o dreaptă arbitrară ce trece prin C şi M_l punctul de pe l ce realizeaza minimul expresiei $AM_l + BM_l$. Aflaţi dreapta l care realizeaza maximul expresiei $AM_l + BM_l$.

Seminar 10 - Geometrie - 4.12.2023

Pb1: $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$

$\pi: 4x - y - z = 1.$

$(1,0,2) \in d$; $(1,2,2) \in Dir(d)$
$\notin \pi$

$Dir(\pi) = \{4x - y - z = 0\} \Rightarrow (1,2,2) \in Dir(\pi)$

$\Rightarrow d \parallel \pi,\ d \not\subset \pi.$

★ Dați exemplu de dr $d \subset \pi$

$\pi \parallel x - 2y + z = 3.$

$\frac{x-0}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-Q}{1}$ sau $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0. \\ x - y = 0. \end{cases}$

Pb2: $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ și $d_2: \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - z = 8. \end{cases}$

$d_2: \begin{cases} x - 1 = y \\ x - 1 = \frac{6+z}{2} \end{cases} \Rightarrow d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+6}{2}$

$\Rightarrow d_1 \parallel d_2.,\ d_1 \neq d_2.$

Pb3: $A = (3,-1,3),\ B = (5,1,-1),\ C = (0,4,-3),\ D = (\alpha, 1, -2)$

a) ec. AB, AC $\quad AB: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}.$

$AC: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-3}{6}.$

b) $\sphericalangle(AB, AC)$ $\cos(\widehat{AB, AC}) = \left| \frac{6 - 10 - 24}{\sqrt{4+4+16} \cdot \sqrt{9+25+36}} \right| = \frac{28}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{70}}.$

c) $\pi_1 \ni C,\ \pi_1 \perp AB \Rightarrow \pi_1: x \cdot 2 + 2(y-4) - 4(z+3) = 0.$

d) locul geom. al pct. eg. dep. de A şi B, π_2:

$M = (4, 0, 1)$ mij AB.

$\pi_2 : 2(x-4) + 2\cdot y - 4(z-1) = 0.$

e) $d(\pi_1, \pi_2) = d(M, \pi_1)$ - - - - -

f) $\alpha = ?$ a.î. A, B, C, D coplanar.

(ABC) : $\begin{vmatrix} x-3 & 2 & 3 \\ y+1 & 2 & -5 \\ z-3 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ şi pun cond $D(\alpha, 1, -2) \in (ABC)$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha-3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \\ -5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

Pbs: $\pi_1 : 2x - y - z - 2 = 0.$ $A = (1, -2, 5).$

$\pi_2 : x + 2y + 2z + 1 = 0$

$\pi_3 : x + 7y + 7z + \alpha = 0.$

a) $d = \pi_1 \cap \pi_2.$ $d : \begin{cases} 4x - 2y - 2z - 4 = 0. \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ (+)

$\boxed{x = \frac{3}{5}}$, $\boxed{y = \frac{-\cancel{3}}{5} - z}$

b) $A' = \mathrm{sim}_{\pi_2} A$ M mij $AA' \in \pi_2$

$AM : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{2} = t \Rightarrow AM = \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-2 \\ z = 2t+5 \end{cases} \cap \pi_2$

$\Rightarrow (t+1) + 2(2t-2) + 2(2t+5) + 1 = 0$

$9t + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{-8}{9}}.$

$A' = \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 4t-2. \\ z = 4t+5. \end{cases}$

Pb 5: a) $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ şi $d_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$

$\text{Dir } d_1 = <\underset{u_1}{(2,3,1)}>$ şi $\text{Dir}(d_2) = <\underset{w_2}{(2,2,1)}> \Rightarrow d_1 \not\parallel d_2$.

! $\text{dir } d = <u> \Rightarrow u \in <(u_1, u_2)>^{\perp}$

$u \perp u_1$

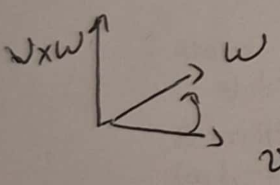
$u \perp u_2$

<u>Produs vectorial</u>

$v, w \in \mathbb{R}^3$ (ca sp. vect) $\Rightarrow v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$

$= \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$

- v, w lin. dep $\Leftrightarrow v \times w = 0$.
- $<v \times w, v> = 0$ şi $<v \times w, w> = 0$.



$\{v, w, v \times w\}$ ⊕ orientată.

$\| v \times w \| = S_{pll}$ între v şi w.

$u = u_1 \times w_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, -2)$

Aleg $P = (1,-1,0) + t(2,3,1) \in d_1$.

$\Rightarrow P' = (1,-1,0) + t(2,3,1) + s(1,0,-2) \in d_2$.

$\Rightarrow (1+2t+s, -1+3t, t-2s) \in d_2$.

$\Rightarrow \frac{2t+s-1}{2} = \frac{-1+3t}{2} = \frac{t-2s+1}{2} \Rightarrow \{ t = s = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow d : \underbrace{(1,-1,0) + \frac{3}{5}(2,3,1)}_{\in d_1} + \lambda(1,0,-2)$.

Seminarul 10 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

10 Geometrie euclidiană în $\mathbb{R}^3$. Exerciţii

Exercițiul 10.1: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm dreapta

$$d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$$

şi planul $\pi : 4x - y - z = 1$. Atunci
a) $d \parallel \pi$; b) $d \perp \pi$; c) $d \subset \pi$; d) niciuna dintre a), b) şi c).

Exercițiul 10.2: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, considerăm dreptele

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$$

şi

$$d_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - z = 8 \end{cases}$$

Atunci
a) $d_1 = d_2$; b) $d_1 \parallel d_2$; c) $d_1 \perp d_2$; d) niciuna dintre a), b) şi c).

Exercițiul 10.3: Fie punctele $A = (3, -1, 3), B = (5, 1, -1), C = (0, 4, -3), D = (\alpha, 1, -2)$.

a) Scrieţi ecuaţiile dreptelor AB, AC (parametrice şi implicite).

b) Aflaţi $\angle(AB, AC)$.

c) Scrieţi ecuaţia planului π_1 astfel încât $C \in \pi_1, \pi \perp AB$.

d) Aflaţi locul geometric al punctelor egal depărtate de A şi B, fie acesta π_2.

e) Aflaţi distanţa dintre π_1 şi π_2.

f) Găsiţi α astfel încât A, B, C, D coplanare.

Exercițiul 10.4: Pentru

a) $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ şi $d_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$;

b) $d_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ şi $d_2 : \frac{x+1}{7} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z-3}{1}$;

studiaţi dacă dreptele sunt coplanare, iar dacă nu, aflaţi ecuaţia perpendicularei comune la ele.

Exercițiul 10.5: În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, fie $\pi_1 : 2x-y-z-2 = 0$, $\pi_2 : x+2y+2z+1 = 0$, $\pi_3 : x + 7y + 7z + \alpha = 0$ şi $A = (1, -2, 5)$.

a) Aflaţi ecuaţia parametrică a dreptei $d = \pi_1 \cap \pi_2$.

b) Calculaţi simetricul punctului A faţă de planul π_2.

c) Calculaţi simetricul punctului A faţă de dreapta d.

d) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât π_1, π_2, π_3 se intersectează după o dreaptă.

Exercițiul 10.6: În planul euclidian $\mathbb{R}^3$:

a) Fie π_1, π_2 plane şi mulţimea

$$M = \{P \mid P \text{ mijloc al unui segment cu capete în } \pi_1 \text{ respectiv } \pi_2\}.$$

Ce este M în funcţie de poziţia relativă a celor două plane?

b) Fie d dreaptă şi π plan şi mulţimea

$$M = \{P \mid P \text{ mijloc al unui segment cu capete în } d \text{ respectiv } \pi\}.$$

Ce este M în funcţie de poziţia relativă a lui d şi π?

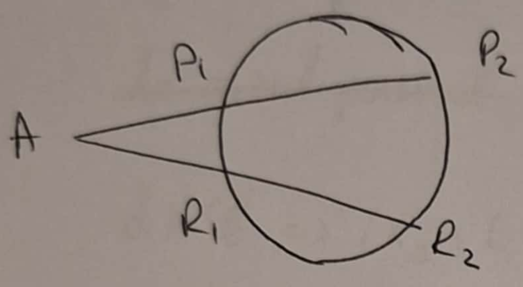
c) Fie d_1, d_2 drepte si mulţimea

$$M = \{P \mid P \text{ mijloc al unui segment cu capete în } d_1 \text{ respectiv } d_2\}.$$

Ce este M în funcţie de poziţia relativă a celor două drepte?

Seminar 11 - Geometrie - 11.12.2023

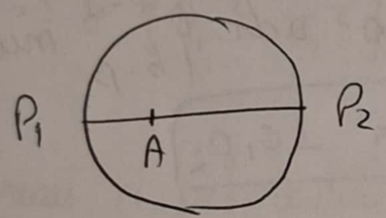
Puterea punctului și axa radicală - Teorie:



puterea punctului

1) $\rho_{\mathcal{C}}(A) = \langle AP_1, AP_2 \rangle$ nu depinde de dreapta aleasă.

$\langle AP_1, AP_2 \rangle = \langle AR_1, AR_2 \rangle$



$$\rho_{\mathcal{C}}(A) = \begin{cases} >0, & A \in \text{Ext}\,\mathcal{C} \\ =0, & A \in \mathcal{C} \\ <0, & A \in \text{Int}\,\mathcal{C} \end{cases}$$

2) Axa radicală = mț. pct. care au puteri egală față de cercuri

Exerciții:

Pb1: a) $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1 \Rightarrow \mathcal{C}((-1,-2), 1)$.

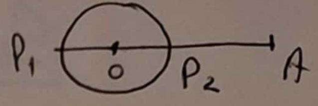
$\boxed{Q}$: Dc. P și Q sunt pol de gr 2 $\in \mathbb{R}[X,Y]$ și $Z(P) = Z(Q)$ (locul geom. al pct. $P(x,y)=0$ e același cu $Q(x,y)=0$) ~~$Q(x,y)=0$~~

$\overset{?}{\Rightarrow} P = Q$.

Pt. $\boxed{k = \mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ contraex: $\begin{cases} x^2+y^2 = -1 \\ x^2+y^2 = -2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2+y^2=0 \\ x^2+2y^2=0. \end{cases}$

Pt. $\boxed{k = \mathbb{C}}$ $\Rightarrow$ adevărat.

! $\rho_{\mathcal{C}}(A) = OA^2 - r^2$

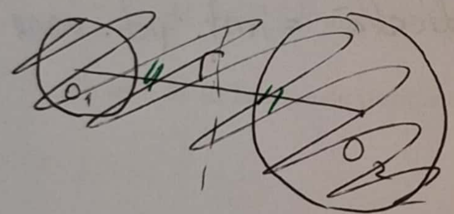


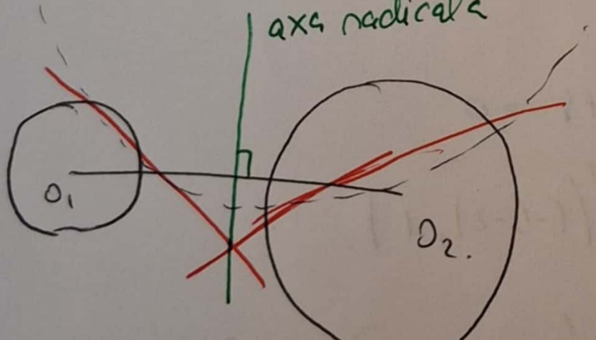
$\rho_{\mathcal{C}}(A) = |P_1A|\cdot|P_2A| = (OA+r)(OA-r) = OA^2 - r^2$

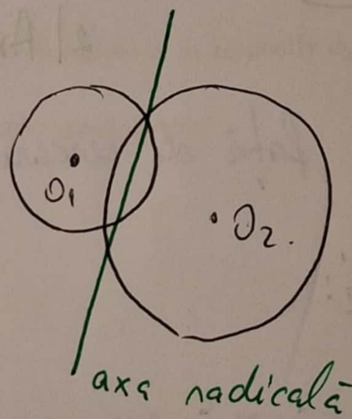
! Locul pct. care au ac. putere față de cercuri = dr.

$$x_A^2 + y_A^2 + 2a x_A + 2b y_A + c_1 = 0$$
$$x_A^2 + y_A^2 + 2\alpha x_A + 2\beta y_A + c_2 = 0 \quad (-)$$

$2(a-\alpha)x_A + 2(b-\beta)y_A + (c_1-c_2) = 0$ odr. $\begin{cases} a-\alpha \\ b-\beta \end{cases}$ nu pot fi simultan 0. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{axa radicală } \perp O_1O_2}$







Pb 3: $\mathcal{C}: x^2+y^2+2x+2y=0$, $P=(-2,-2)$, $Q=(2,2)$, $\vec{u}=(2,1)$

a) centru + rază $(x+1)^2+(y+1)^2 = 2 \Rightarrow \mathcal{C}(\underbrace{(-1,-1)}_{A}, \sqrt{2})$

$P \in \mathcal{C} \iff 2^2+2^2-4-4=0$ (A).

$Q \in Ext.\mathcal{C} \iff 2^2+2^2+4+4>0$ (A).

b) tg în P la $\mathcal{C}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+2.$

$\Rightarrow$ ec. $T_P\mathcal{C}$: $-2(x+2)-2(y+2)=0 \iff x+y+4=0$

c) tg din Q.

~~La cazul general~~ tg Q la $\mathcal{C}$: $d : Q + tv$; $t \in \mathbb{R}$.
$v \in \mathbb{R}^2$.

$d \cap \mathcal{C} \Rightarrow (x_Q+tv_1)^2+(y_Q+tv_2)^2+2(x_Q+tv_1)+2(y_Q+tv_2)=0$

$\Rightarrow t^2(v_1^2+v_2^2)+2t(\underbrace{x_Q v_1 + y_Q v_2}_{<(x_Q,y_Q),(v_1,v_2)>} + v_1+v_2) + \big(\underbrace{x_Q^2+y_Q^2+2x_Q+2y_Q}_{=\rho_{\mathcal{C}}(Q)}\big)$

Vreau $\cap$ pct. dublu $\iff \Delta = 0$.

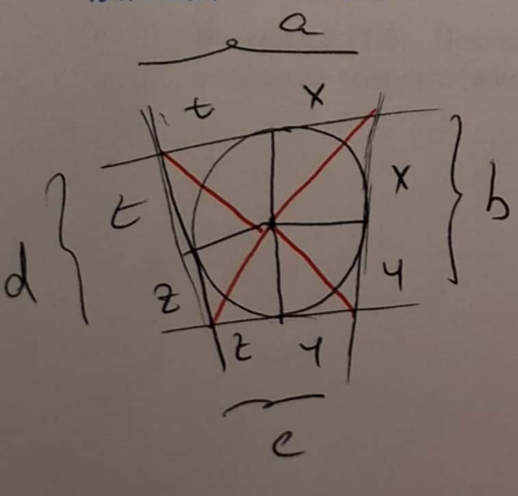
$\Delta = 4\left(<v,AQ>^2 - \|v\|^2 \cdot \rho_{\mathcal{C}}(Q)\right)$

$\iff$ Caut v cu $<v,AQ>^2 = \|v\|^2 \cdot \rho_{\mathcal{C}}(Q)$. (*)

Evident $v_2 \neq 0 \Rightarrow$ pot presupune $v_2 = 1 \Rightarrow$

rel (*) $\iff (3v_1+3)^2 = (v_1^2+1)\cdot 16$ ....

Pb 5: un patrulat. cx cu lat a, b, c, d în care se poate înscrie un cerc $\Rightarrow a+c = b+d$.



Seminarul 11 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

11 Conice. Exerciţii

Exercițiul 11.1: Fie cercurile

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &: x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0\\ \mathcal{C}_2 &: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0\\ \mathcal{C}_3 &: x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0\end{aligned}$$

a) Determinaţi centrele şi razele lor. Demonstraţi că centrele nu sunt coliniare.

b) Determinaţi axele radicale a oricare două din cercurile de mai sus şi punctul radical al celor trei (*i.e.* punctul care are putere egală faţă de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$).

Exercițiul 11.2: Fie cercul $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ şi dreapta $d : x + y = 0$ (a doua bisectoare).

a) Daţi exemplu de cerc $\mathcal{C}'$ astfel încât axa radicală a lui $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ este d.

b) Determinaţi locul geometric al tuturor centrelor cercurilor $\mathcal{C}'$ cu proprietatea de mai sus.

Exercițiul 11.3: Fie $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$, punctele $P = (-2, -2)$, $Q = (2, 2)$ şi vectorul $\overrightarrow{u} = (2, 1)$.

a) Determinaţi centrul şi raza cercului $\mathcal{C}$. Arătaţi că $P \in \mathcal{C}$ şi $Q \in Ext(\mathcal{C})$.

b) Găsiţi ecuaţia tangentei în P la $\mathcal{C}$.

c) Găsiţi ecuaţile tangentelor la $\mathcal{C}$ din Q şi punctele de tangenţă.

d) Găsiţi ecuaţile tangentelor la $\mathcal{C}$ de direcţie $\overrightarrow{u}$ şi punctele de tangenţă.

Exercițiul 11.4: Demonstraţi, sintetic şi analitic, că locul geometric al punctelor exterioare unui cerc de rază r din care tangentele la cerc sunt perpendiculare este un cerc de rază $r\sqrt{2}$.

Exercițiul 11.5: Demonstraţi că dacă un patrulater convex cu laturile a, b, c, d este circumscris unui cerc (admite un cerc înscris), atunci $a + c = b + d$.

Exercițiul 11.6: Aduceţi următoarele conice la forma normală prin transformări afine, precizaţi-le tipul şi dacă sunt nedegenerate:

a) $\Gamma: 7x^2 - 8xy + y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$,

b) $\Gamma: x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$,

c) $\Gamma: 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 2y + 4 = 0$,

d) $\Gamma: x^2 + 6xy + 9y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$,

e) $\Gamma: x^2 + 2\sqrt{2}xy - 4y - 2 = 0$,

f) $\Gamma: x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x - 4y - 2 = 0$,

g) $\Gamma: x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = 0$.

Exercițiul 11.7: Fie $A = (-2, 0), B = (-1, -1), C = (-3, 2), D = (2, 4)$. Decideţi dacă există o parabolă $\mathcal{P}$ astfel încât $A, B, C, D \in \mathcal{P}$. Dar o elipsă?

Seminar 12-13 - Geometrie - 18.12.2023

S12 Exerciții

e) $\Gamma: 3x^2+4xy+3y^2-8x+2y+4=0.$

$$3\left(x^2+\frac{4}{3}xy-\frac{8}{3}x\right)+3y^2+2y+4=0.$$

$$3\left(x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(3-\frac{4}{3}\right)y^2+2y\left(1+\frac{8}{3}\right)+4-\frac{16}{3}=0.$$

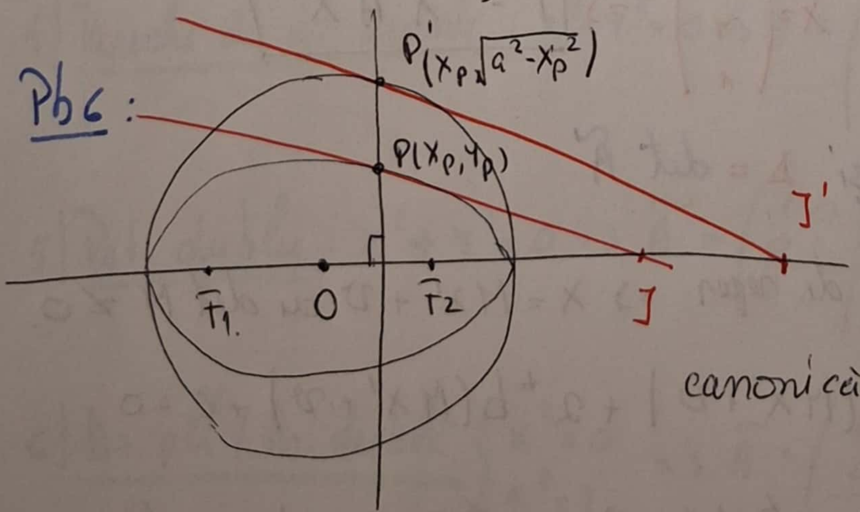
$$3\left(x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{3}y^2+\frac{22}{3}y-\frac{4}{3}=0.$$

$$3\left(x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\left(y^2+\frac{22}{5}y+\frac{121}{25}\right)-\left(\frac{4}{3}+\frac{121}{3}\right)=0.$$

$$3\underbrace{\left(x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}\right)}_{x_1}^2+\frac{5}{3}\underbrace{\left(y+\frac{11}{5}\right)}_{y_1}^2-\frac{125}{3}=0$$

$$3x_1^2+\frac{5}{3}y_1^2-\frac{125}{3}=0 \;\ldots\; \Rightarrow \text{elipsă}.$$

Pb 6:



$\Rightarrow t_{\mathcal{E}}(P)\cap t_{\mathcal{C}}(P')\cap \widehat{F_1F_2} \neq \emptyset.$

Pot. pp. elipsa în ec. canonică $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$t_{\mathcal{E}}(P): \frac{2x_P}{a^2}(x-x_P)+\frac{2y_P}{b^2}(y-y_P)=0.$$

$$\frac{2x_P}{a^2}x+\frac{2y_P}{b^2}y-2=0 \Rightarrow \boxed{\frac{x_P}{a^2}x+\frac{y_P}{b^2}y-1=0.}$$

$$t_{\mathcal{E}}(P) \cap F_1F_2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_P}{a^2} x_i + \frac{y_P}{b^2} y_i - 1 = 0 \\ y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow J = \left(\frac{a^2}{x_P}, 0\right).$$

$\mathcal{C}: x^2 + y^2 = a^2.$

$$t_{\mathcal{C}}(P'): \cancel{2} x_p (x - x_p) + \cancel{2}\sqrt{a^2 - x_p^2}\,(y - \sqrt{a^2 - x_p^2}) = 0.$$

$$x_P \cdot x + \sqrt{a^2 - x_P^2} \cdot y - a^2 = 0.$$

$$t_{\mathcal{C}}(P') \cap F_1F_2 \Rightarrow \begin{cases} x_P x + \sqrt{a^2 - x_P^2} \cdot y - a^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow J' = \left(\frac{a^2}{x_P}, 0\right).$$

$$\Rightarrow J = J' = tg_{\mathcal{E}}(P) \cap tg_{\mathcal{C}}(P') \cap F_1F_2.$$

! O conică $\Gamma: {}^t X A X + 2\langle b, X\rangle + c = 0$

$$\Gamma: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right) \text{ și } \tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\Gamma = {}^t\tilde{X}\tilde{A}\tilde{X}}$$

<u>Notez</u>: $\delta = \det A$ și $\Delta = \det \tilde{A}$

$X \longrightarrow X'$ schimbare de reper $\Rightarrow X = MX' + v$ cu $\det M \neq 0$.

$$\Gamma' = {}^t(MX' + v) A (MX' + v) + 2\,{}^t b (MX' + v) + c = 0.$$

$$\Gamma' = {}^t X' ({}^t M A M) \cdot X' + {}^t X'\, {}^t M A v + {}^t v A M X' + 2\,{}^t b M X' + {}^t v A v + 2\,{}^t b v + c = 0.$$

$$\Gamma' = {}^t X' ({}^t M A M) X' + \cancel{2({}^t v A M) X' + (2\,{}^t b M X'} + 2({}^t v A M + {}^t b M) X' + ({}^t v A v + 2\,{}^t b v + c) = 0$$

2) $A' = {}^tMAM.$

$b' = {}^tMb + {}^tMAv$

$c' = {}^tvAv + 2\,{}^tbv + c$

$\delta' = (\det M)^2 \cdot \det A \Rightarrow \delta$ are semnul invariant afin.

$\tilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \; \tilde{A}' = {}^t\tilde{M}\tilde{A}\tilde{M} \Rightarrow \Delta$ — // —

! Conicele în funcție de δ și Δ:

1) Elipsa : $x^2+y^2-1=0 \Rightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \; \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\delta=1} \\ \boxed{\Delta=-1} \end{array} \right.$

2) Hiperbola : $x^2-y^2-1=0 \Rightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\delta=-1} \\ \boxed{\Delta=1} \end{array}$

3) Parabola : $x^2-2y=0 \Rightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\delta=0} \\ \boxed{\Delta=-1} \end{array}$

4) Pereche de dr. secante : $x^2-y^2=0 \Rightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\delta=-1} \\ \boxed{\Delta=0} \end{array}$

5) Pct. dublu : $x^2+y^2=0 \Rightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\delta=1} \\ \boxed{\Delta=0} \end{array}$

6) Dr. pll / Dr. dublă $\left\{ \begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=1 \end{array} \right. \Rightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\delta=0} \\ \boxed{\Delta=0} \end{array}$

! $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ nedegenerate.
$\delta \neq 0 \Rightarrow$ are centru unic.

Pb1 a) verificare. $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -4 & -3 \\ -4 & 1 & -6 \\ \hline -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow$ $\delta = 7-16 < 0.$

$\Delta = -63-72-72-9+16\cdot 9 - 7\cdot 36 = -324 \neq 0.$

$\Rightarrow$ hiperbolă.

$\boxed{\text{Temă}}$: 1) Aflați conicele care trec prin A, B, C, D + cond $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$.

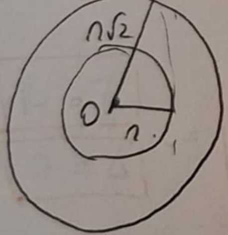
2) Ec. P_{MN} - pol de gr. 1 care dă ec. dr. MN.

$F_1 = P_{AB} \cdot P_{CD} = 0$ $\Rightarrow$ toate conicele care conțin A, B, C, D $\overset{?}{:}$ $\alpha F_1 + \beta F_2$.

$F_2 = P_{AC} \cdot P_{BD} = 0$ (? $\exists$ printre ele o elipsă / parabolă).

Pb7: Aflați locul geom. al pct. ext. elipsei din care cele 2 tg. la elipsă sunt $\perp$.

$\mathcal{L} = \{P \mid$ tg din P la cerc sunt $\perp\}$.



$\mathcal{L} = \mathcal{C}(O, r\sqrt{2})$.

La elipsă: $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Care sunt tg. la elipsă de vect. normal (u, v)?

$d: ux + vy + \lambda = 0.$

d tg la elipsă în $P(x_0, y_0) \Rightarrow d: \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} u = -\lambda \cdot \frac{x_0}{a^2} \\ v = -\lambda \cdot \frac{y_0}{b^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a^2u^2 + b^2v^2 = \lambda^2}$

$\lambda = \pm\sqrt{a^2u^2 + b^2v^2}$

tg: $ux + vy \pm \sqrt{a^2u^2+b^2v^2} = 0$ $\quad m = \frac{u}{v}$

$mx + y \pm \sqrt{a^2m^2+v^2} = 0.$

Fie $P \in$ Ext $\mathcal{E}$ pt. care $x_P \neq \pm a$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ec. tg. sunt $\begin{cases} tg1: m_1 x + y \pm \sqrt{a^2m_1^2+b^2} = 0 \\ tg2: m_2 x + y \pm \sqrt{a^2m_2^2+b^2} = 0. \end{cases}$

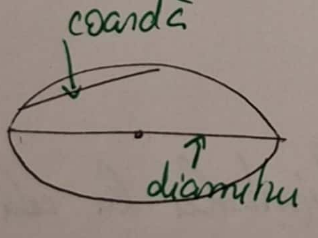
$P \in t_1 \cap t_2 \Rightarrow m_i^2 a^2 + b^2 = m_i^2 x_P^2 + 2m_i x_P y_P + y_P^2 \quad i=\overline{1,2}$

$m_i^2(x_P^2-a^2) + 2m_i x_P y_P + (y_P^2-b^2) = 0$ are răd m_1, m_2

cu $\left.\begin{matrix} m_1 \cdot m_2 = -1 \\ \shortparallel \\ \dfrac{y_P^2-b^2}{x_P^2-a^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{x_P^2+y_P^2 = a^2+b^2}$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \mathcal{C}(0, \sqrt{a^2+b^2})}$

Temă: ac. lucru pt. hiperbolă: $\mathcal{L} = \mathcal{C}(0, \sqrt{a^2-b^2})$



Dc. iau toate mij. coardelor ∥ cu o coardă dată $\Rightarrow$ form. un diam.

Dem: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ duce elipsa în cerc de rază 1. T păstrează mij, coarde, segm, ∥, centru $\mathcal{E}$ și $\mathcal{C}$

prop. e (A) pt. cerc $\overset{T}{\Rightarrow}$ (A) pt. elipsă.

Mulțimea mij. coardelor ∥ cu un diam $\Rightarrow$ diametru conjugat.

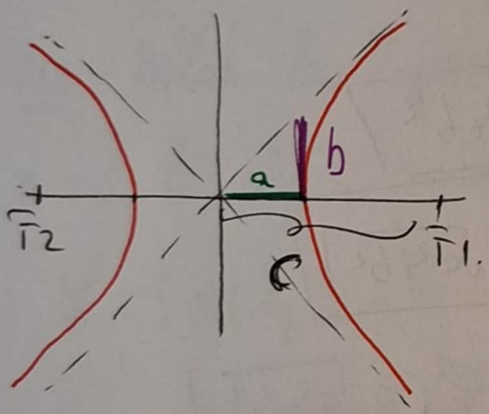
Pb8: Aflați locul geom al pct. ext. elipsei din care cele 2 tg. la elipsă dut., prin pct. de tg, diam. conj.

$\mathcal{L}$ se păstrează la schimbare afină.

$\mathcal{L}$ pt. care $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(0, \sqrt{2})$

$\mathcal{L} = T^{-1}(\mathcal{L}_{\mathcal{C}})$ elipsa cu semiaxe $a\sqrt{2}, b\sqrt{2}$.

$\boxed{S13}$ Hiperbolă - Teorie:



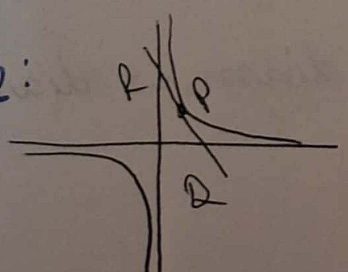
1) $\mathcal{H} = \{P \mid \left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2a\}$
2) $a^2 + b^2 = c^2$
3) asimptote: $y = \pm \frac{b}{a} x$
4) $\mathcal{H}$ echilat $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = k$.

Exerciții:

Pb3: prod dist de la un pct. al hiperbolei la cele 2 asimptote este $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

$$d_1 \cdot d_2 = \left| \frac{\frac{b}{a} x_p + y_p}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} \right| \cdot \left| \frac{\frac{b}{a} x_p - y_p}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} \right| = \frac{|b^2 x_p^2 - a^2 y_p^2|}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Pb5:



Enunț afin $\Rightarrow$ pot pp. $\mathcal{H}: xy = 1$.

$t_g \mathcal{H}: y_p(x - x_p) + x_p(y - y_p) = 0$

$: x \cdot y_p + y \cdot x_p - 2 = 0.$

$tg\, \mathcal{H} \cap OY = R\left(\frac{2}{y_p}, 0\right) = (2x_p, 0)$

$tg\, \mathcal{H} \cap OX = Q\left(0, \frac{2}{x_p}\right) = (0, 2y_p)$

$\Rightarrow P$ mij $[RQ]$

Temă: Pb 6 şi 8.

Seminarul 12 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

12 Conice. Exerciţii

Exerciţiul 12.1: Aduceţi următoarele conice la forma normală prin transformări afine, precizaţi-le tipul şi dacă sunt nedegenerate:

a) $\Gamma : 7x^2 - 8xy + y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$,

b) $\Gamma : x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$,

c) $\Gamma : 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 2y + 4 = 0$,

d) $\Gamma : x^2 + 6xy + 9y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$,

e) $\Gamma : x^2 + 2\sqrt{2}xy - 4y - 2 = 0$,

f) $\Gamma : x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x - 4y - 2 = 0$,

g) $\Gamma : x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = 0$.

Exerciţiul 12.2: Fie $A = (-2, 0), B = (-1, -1), C = (-3, 2), D = (2, 4)$. Decideţi dacă există o parabolă $\mathcal{P}$ astfel încât $A, B, C, D \in \mathcal{P}$. Dar o elipsă?

Exerciţiul 12.3: Fie elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$.

a) Aflaţi lungimile semi-axelor majoră şi minoră, a şi b, excentricitatea e a elipsei şi focarele sale.

b) Aflaţi ecuaţiile dreptelor directoare ale elipsei.

c) Verificaţi că $P = (\frac{13\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}) \in \mathcal{E}$ şi scrieţi ecuaţia tangentei în P la elipsă.

Exerciţiul 12.4: Fie elipsa de ecuaţie $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Este ea în formă canonică? Aflaţi lungimile semi-axelor majoră şi minoră, a şi b, şi excentricitatea e a elipsei.

Exerciţiul 12.5: Fie elipsa $\mathcal{E}$ de focare $F_1 = (2, 5), F_2 = (-1, 1)$ şi excentricitate $e = 0.75$.

a) Aflaţi lungimile semi-axelor majoră şi minoră, a şi b, precum şi centrul elipsei.

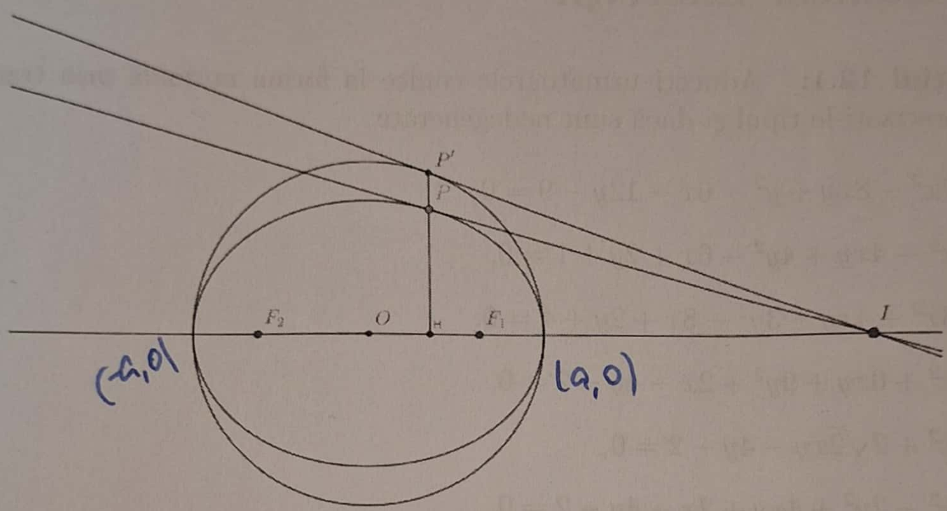
b) Decideţi dacă elipsa intersectează axa OX.

c) Aflaţi ecuaţiile dreptelor directoare ale elipsei.

Exercițiul 12.6: Fie o elipsă $\mathcal{E}$ de focare $F_1 \neq F_2$ şi cu lungimea semi-axei majore a. Considerăm $\mathcal{C}$ "cercul mare" al elipsei *i.e.* cercul cu acelaşi centru şi de rază a.

Fie $P \in \mathcal{E}$ şi P' punctul de intersecţie al dreptei perpendiculare pe F_1F_2 cu cercul $\mathcal{C}$ aflat pe aceeaşi parte a dreptei F_1F_2 cu P.

Demonstraţi că tangenta în P la $\mathcal{E}$, tangenta în P' la $\mathcal{C}$ şi dreapta F_1F_2 sunt concurente.



Exercițiul 12.7: Aflaţi locul geometric al punctelor exterioare elipsei din care cele două tangente la elipsă sunt perpendiculare.

Exercițiul 12.8: Aflaţi locul geometric al punctelor exterioare elipsei din care cele două tangente la elipsă determină, prin punctele de tangenţă, diametre conjugate.

Exercițiul 12.9: Demonstraţi că aria elipsei cu semi-axă majoră a şi semi-axă minoră b este πab.

Seminarul 13 de Geometrie I

Grupa 101 - 2023-2024

13 Conice. Exerciţii

Exercițiul 13.1: Fie hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{169} = 1$.

a) Este $\mathcal{H}$ în formă canonică?

b) Aflaţi lungimile semi-axelor majoră şi minoră, a şi b, excentricitatea e a hiperbolei şi focarele sale.

c) Aflaţi ecuaţiile asimptotelor hiperbolei.

d) Aflaţi ecuaţiile dreptelor directoare ale hiperbolei.

e) Verificaţi că $P = (5\sqrt{5}, 26) \in \mathcal{H}$ şi scrieţi ecuaţia tangentei în P la hiperbolă.

Exercițiul 13.2: Fie hiperbola $\mathcal{H}$ de focare $F_1 = (2, 5), F_2 = (-1, 1)$ şi excentricitate $e = 1.25$.

a) Aflaţi lungimile semi-axelor majoră şi minoră, a şi b, precum şi centrul hiperbolei.

b) Aflaţi ecuaţiile asimptotelor hiperbolei.

c) Aflaţi ecuaţiile dreptelor directoare ale hiperbolei.

Exercițiul 13.3: Fie hiperbola $\mathcal{H}$ cu lungimi ale semi-axelor majoră şi minoră a, respectiv b.

Demonstraţi că produsul distanţelor de la un punct al hiperbolei la cele două asimptote este $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Exercițiul 13.4: Fie P un punct pe hiperbola $\mathcal{H}$ şi R, Q punctele de intersecţie ale tangentei în P la $\mathcal{H}$ cu cele două asimptote. Demonstraţi că P este mijlocul segmentului (RQ).

Exercițiul 13.5: Determinaţi locul geometric al punctelor exterioare hiperbolei din care cele două tangente la hiperbolă sunt perpendiculare. Interpretaţi rezultatul.

Exercițiul 13.6: Demonstraţi că dacă un triunghi este înscris într-o hiperbolă echilateră, atunci ortocentrul aparţine hiperbolei.

Exercițiul 13.7: Fie parabola $\mathcal{P} : y^2 = 2x$.

a) Determinaţi focarul şi dreapta directoare ale lui $\mathcal{P}$.

b) Scrieţi ecuaţiile tangentelor la $\mathcal{P}$ în punctele $(3, -\sqrt{6}), (8, 4)$.

c) Scrieţi ecuaţiile tangentelor la $\mathcal{P}$ din punctele $(2, 5), (-2, -3), (-\alpha, 0), \alpha > 0$.

Exercițiul 13.8: Determinaţi, analitic şi sintetic, locul geometric al punctelor din care tangentele la o parabolă dată sunt perpendiculare.

Exercițiul 13.9: Determinaţi locul geometric al proiecţiilor focarului unei parabole pe tangentele la acea parabolă.

Exercițiul 13.10: Fie $\mathcal{P}$ o parabolă în plan şi $A, B, C, D \in \mathcal{P}$ distincte astfel încât $AB \parallel CD$ (segmentele AB şi CD sunt coarde paralele).

Demonstraţi că dreapta determinată de mijloacele segmentelor AB şi CD este perpendiculară pe dreapta directoare a lui $\mathcal{P}$.