R inel comutativ

- Un ideal M al lui R s.n. <u>maximal</u> dacă $M \neq R$ și pt. orice ideal M' al lui R cu $M \subset M' \subset R$ avem $M' = M$ sau $M' = R$.
- M ideal, $M \neq R$ atunci

$$M \text{ maximal} \Leftrightarrow \frac{R}{M} \text{ corp.}$$

Există întotdeauna ideale maximale?

<u>Teoremă</u> (Lema lui Krull).
Fie R un inel comutativ și I un ideal propriu al lui R (adică $I \neq R$). Atunci există un ideal maximal M al lui R cu $I \subset M$.

<u>Consec.</u> Luând $I = 0$ obținem că orice inel comutativ are cel puțin un ideal maximal.

$(\mathcal{F}, \leq)$ mulțime ordonată

Atunci $\mathcal{F}$ s.n. <u>inductiv ordonată</u> dacă orice lanț $\mathcal{L}$ din $\mathcal{F}$ are un majorant în $\mathcal{F}$.

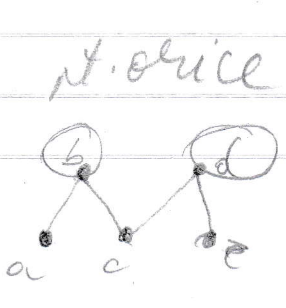
• $\mathcal{L}$ lanț: $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ a.î. $(\mathcal{L}, \leq)$ este total ordonată

(submulțime total ordonată). $(\forall a, b \in \mathcal{L}\ \ a \leq b$ sau $b \leq a)$

• $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$, elementul <u>$x \in \mathcal{F}$</u> s.n. <u>majorant</u> pt. $\mathcal{L}$ dacă pt. orice $a \in \mathcal{L}$ avem $a \leq x$.

<u>Lema lui Zorn</u>. O mulțime (nevidă) inductiv ordonată are un <u>element maximal</u>.

• $m \in \mathcal{F}$ s.n. <u>element maximal</u> dacă pt. orice $m' \in \mathcal{F}$ cu $m \leq m'$ avem $m' = m$.



Dem. Lemei lui Krull

Fie $\mathcal{F} = \{ J \mid J \text{ ideal în } R,\ J \neq R \text{ și } I \subset J \}$

$\mathcal{F} \neq \phi \quad (I \in \mathcal{F})$.

$(\mathcal{F}, \subset)$ mulțime ordonată.

Arătăm că este inductiv ordonată

Fie $\mathcal{L}$ un lanț din $\mathcal{F}$, să spunem

că $\mathcal{L} = (J_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

[evident • $\forall \lambda$ J_λ ideal propriu și $I \subset J_\lambda$

• $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$ $J_\lambda \subset J_{\lambda'}$ sau $J_{\lambda'} \subset J_\lambda$]

Fie $J = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$. Arătăm că

J este un majorant pt. $\mathcal{L}$ în $\mathcal{F}$

• J ideal în R

– $x, y \in J \overset{?}{\Rightarrow} x - y \in J$

$x, y \in J \Rightarrow \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda$ cu $x \in J_\lambda$, $y \in J_{\lambda'}$

Dar știm că $J_\lambda \subset J_{\lambda'}$ sau $J_{\lambda'} \subset J_\lambda$

În primul caz ($J_\lambda \subset J_{\lambda'}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x, y \in J_{\lambda'} \overset{J_{\lambda'} \text{ id.}}{\Longrightarrow} x-y \in J_{\lambda'} \subset J$

$\Rightarrow x-y \in J$.

- $r \in R,\ x \in J \overset{?}{\Longrightarrow} rx \in J$.

$x \in J \Rightarrow \exists\, \lambda \in \Lambda$ cu $x \in J_\lambda \overset{J_\lambda \text{ id.}}{\Longrightarrow}$

$rx \in J_\lambda \subset J \Rightarrow rx \in J$.

- $J \neq R$: dacă $J = R$, atunci

$1 \in J = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda \Rightarrow \exists\, \lambda \in \Lambda$ cu $1 \in J_\lambda$

$\Rightarrow J_\lambda = R$ contradicție.

- $I \subset J$ clar ($I \subset J_\lambda \subset J$, $\forall \lambda$).

Așadar $J \in \mathcal{F}$.

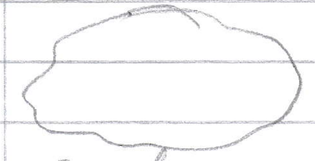
În plus, J este majorant pt $\mathcal{L}$, deoarece $J_\lambda \subset J$ pt. orice $\lambda \in \Lambda$.

Lema Zorn $\Rightarrow$ $(\mathcal{F}, \subset)$ are un element maximal M.

Atunci $\underbrace{M \text{ este ideal maximal}}$ și $\underbrace{I \subset M}_{\text{clar}}$.

- $M \neq R$, f. că $M \in \mathcal{F}$
- dacă $M \subset \underset{\text{ideal}}{M'} \subset R$, atunci dacă $M' \neq R$, atunci $M' \in \mathcal{F}$ și $M \subset M'$, și cum M este el. maximal în $\mathcal{F}$ $\Rightarrow$ $M' = M$.

Gata!

 $\rightsquigarrow$ algebră

spatiu

$k^2 \rightsquigarrow k[X,Y]$

Teoremă

În $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ idealele maximale sunt de forma $(X_1-a_1, X_2-a_2, \dots, X_n-a_n)$ pt. niște $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$.

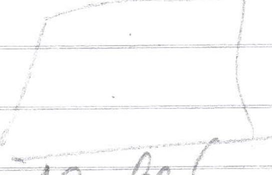
[Așadar un ideal maximal e de forma

$$\{f \in K[X_1,\dots,X_n] \mid f(a_1,\dots,a_n)=0\}$$

Consecință

idealele maximale din $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ $\overset{\text{bij.}}{\longleftrightarrow}$ punctele din $\mathbb{C}^n$

idealul polin. care se anulează în $(a_1,\dots,a_n)$ $\longleftarrow$ $(a_1,\dots,a_n)$



Algebră

Spațiu

Alt ex.

X spațiu Hausdorff compact

in.

. $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ alg funcțiilor cont de la X la $\mathbb{R}$.

. $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ $X \to \mathbb{C}$.

idealele maximale sunt de forma

$m_x = \{f \mid f(x) = 0\}$. pt. un $x \in X$.

Două exemple

(I) O funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.n. <u>aditivă</u> dacă $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

[f aditivă $\Leftrightarrow$ f endomorfism al grupului $(\mathbb{R}, +)$].

<u>Exemplu</u>. Dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci

$f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_c(x) = cx$ $\forall x \in \mathbb{R}$

este funcție aditivă.

<u>PROBLEMA</u> Mai există și alte funcții aditive în afară de f_c, $c \in \mathbb{R}$?

<u>Exercițiu</u>. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcție aditivă.

(i) Dacă f este funcție continuă, atunci $f = f_c$ pt. un $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Dacă f este monotonă, atunci

$f = f_c$ pt. un $c \in \mathbb{R}$.

(iii)* [(i) și (ii) sunt consecințe de-ale]
Dacă există un interval (a,b) cu $a<b$
pe care f este mărginită,
atunci $f = f_c$ pt. un $c \in \mathbb{R}$.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivă.

- $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$$

- $\forall m \in \mathbb{Z}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(mx) = m f(x)$.

- $\forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{m}{n} x\right) = \frac{m}{n} f(x)$$

$$\left[\quad \underbrace{f\left(\frac{m}{n} x\right) + \dots + f\left(\frac{m}{n} x\right)}_{n \text{ ori}} = f\Big(\underbrace{\frac{m}{n} x + \dots + \frac{m}{n} x}_{n \text{ ori}}\Big)\right.$$

$$\left. \underline{n f\left(\frac{m}{n} x\right)} = f(mx) = \underline{m f(x)} \quad \right].$$

Așadar $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ $\forall \alpha\in\mathbb{Q}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cum $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$, înseamnă că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este un endomorfism al $\mathbb{Q}$-spațiului vectorial $\mathbb{R}$.

$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = ?$

Prop. de univ. a sp. vect (caz general).

Fie V un $\mathbb{K}$-sp. vect. care are o bază B. Atunci pt. orice $\mathbb{K}$-sp vect. W și orice funcție f $\exists!\ \bar{f}: V\to W$ morf. de K-sp vect. care extinde f.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & V \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

[Fie $B=(e_i)_{i\in I}$. Atunci pt. orice W și orice familie $(w_i)_{i\in I}\subset W$ $\exists!\ f:V\to W$ morf de sp vect cu $f(e_i)=w_i$ $\forall i$]

$$\bar{f}\Big(\sum_{i\in I} \underset{\substack{\downarrow \\ K}}{\alpha_i}\, e_i\Big) = \sum_{i\in I} \alpha_i w_i .$$

$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$.

Fie $\underset{\substack{\| \\ (e_i)_{i\in I}}}{B}$ o bază a lui ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$.

Dacă $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$, atunci există

$(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ a.î.

$f(e_i) = x_i$. Astfel

~~Această~~

$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \xleftrightarrow{1:1}$ familiile $(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}$

B nu poate se descrie explicit!

(Exercițiu. B este nenumărabilă.)

Exemplu: de funcție aditivă care nu este de forma f_c.

Alegem ~~tot~~ o familie $(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{Q}$ nu toți nuli

Atunci endomorfismul f coresp.

$[\, f(e_i) = x_i \;\; \forall i \,]$ lucrează

$$f\Big(\sum_i \alpha_i e_i\Big) = \sum_i \alpha_i f(e_i) = \underbrace{\sum_i \alpha_i x_i}_{\in \mathbb{Q}}$$

Așadar $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{Q}$.

Dacă $f = f_c$ pt un $c \in \mathbb{R}$,

atunci $c \neq 0$ (pt. că $f \neq 0$) și

deci $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f_c = \mathbb{R}$, contradicție.

Exemplul II. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, \ldots, x_{2n+1} \in \mathbb{R}$

a.î. oricum am da la o parte unul dintre ele, numerele rămase se pot împărți în două grupe de câte n numere cu aceeași sumă.

Atunci $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+1}$.