- Tutoriat 6 -

Problemă

Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (3x - z, 2y, 0)$

a) $M_f^{BC} = ?$ BC = baza canonică

b) $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$ + baze și dim.

c) f este injectivă \ surjectivă ?

Sol a) $BC = \{ \underbrace{(1,0,0)}_{x}, \underbrace{(0,1,0)}_{y}, \underbrace{(0,0,1)}_{z} \}$

$$\left.\begin{aligned} f(1,0,0) &= (\underbrace{3,0,0}) \\ f(0,1,0) &= (\underbrace{0,2,0}_{y'}) \\ f(0,0,1) &= (\underbrace{-1,0,0}_{z'}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_{BC}^{f} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$M_{BC}^{f} = A$$

b) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} A = 2 \quad \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \right)$

$\Rightarrow$ bază în $\operatorname{Im} f = \{ (3,0,0) ; (0,2,0) \} =$

$= \{ f(1,0,0) ; f(0,1,0) \}$

– Tutoriat 6 –

Problemă

Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x, y, z) = (3x - z, 2y, 0)$

a) $M_f^{BC} = ?$ BC = baza canonică

b) $\ker f$ și $\operatorname{Im} f$ + baze și dim.

c) f este injectivă \ surjectivă ?

Sol T rang defect : $\underset{1}{\dim} \ker f + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{2} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3}$

$\Rightarrow \dim \ker f \overset{?}{=} 1$

$\ker f = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(a, b, c) = (0, 0, 0) \}$

$f(a, b, c) = (3a - c, 2b, 0) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 3a - c = 0 \Rightarrow a = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 3a \\ b = 0 \end{cases}$$

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow c = 3\alpha$

$\Rightarrow \ker f = \{ (\alpha, 0, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \Rightarrow$ Bază în $\ker f = \{ (1, 0, 3) \}$

- Tutoriat 6 -

Problemă

Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (3x - z, 2y, 0)$

a) $M_f^{BC} = ?$ BC = baza canonică

b) $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$ + baze și dim.

c) f este injectivă \ surjectivă ?

Sol c) f injectivă $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$

$\overset{b)}{\Rightarrow} \dim \operatorname{Ker} f = 1$ | $\Rightarrow$ ↯ $\Rightarrow f$ nu e inj.

f surj. $\Leftrightarrow \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\shortparallel \atop 2} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3}_{\shortparallel \atop 3}$

↯

$\Rightarrow f$ nu e surj.

– Tutoriat 6 –

...blemă

...ie $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$...(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y+z,\ x-y-z)$

...) $M_f^{BC} = ?$ BC = baza canonică

...) Ker f și Im f + baze și dim.

...) f este injectivă \ surjectivă ?

$f: V \to W$

f inj $\Leftrightarrow$ dim Ker f = 0

f surj $\Leftrightarrow$ dim Im f = dim W

$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$

a) $BC = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$

$f(1,0,0) = (1,1,1)$

$f(0,1,0) = (1,-1,-1)$

$f(0,0,1) = (1,1,-1)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{1} - \cancel{1} + 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \neq 0$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} M = 3$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3$

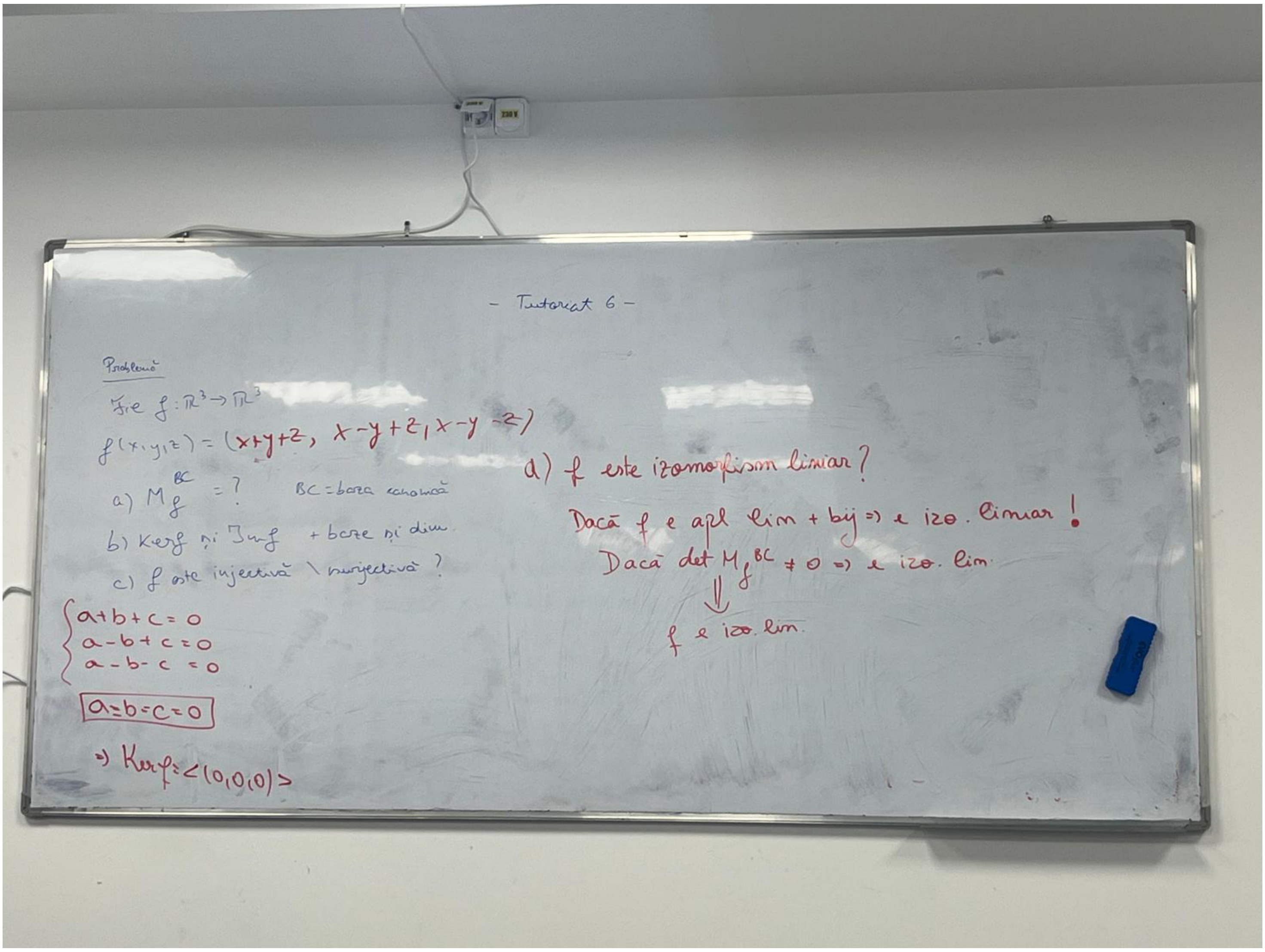
$\operatorname{Ker} f = \{ (a,b,c) \mid f(a,b,c) = (0,0,0) \}$

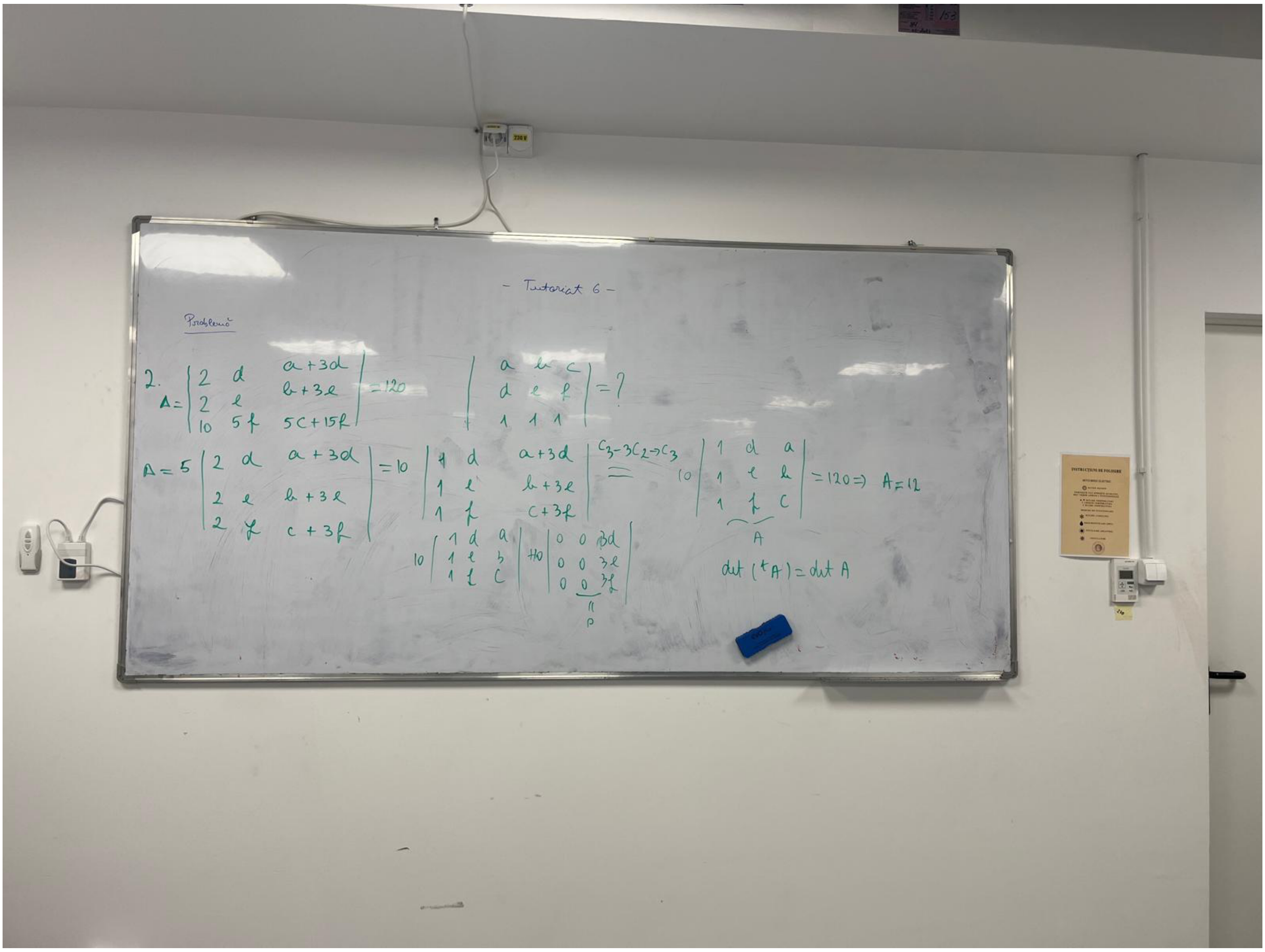
bază = $\{ f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \}$

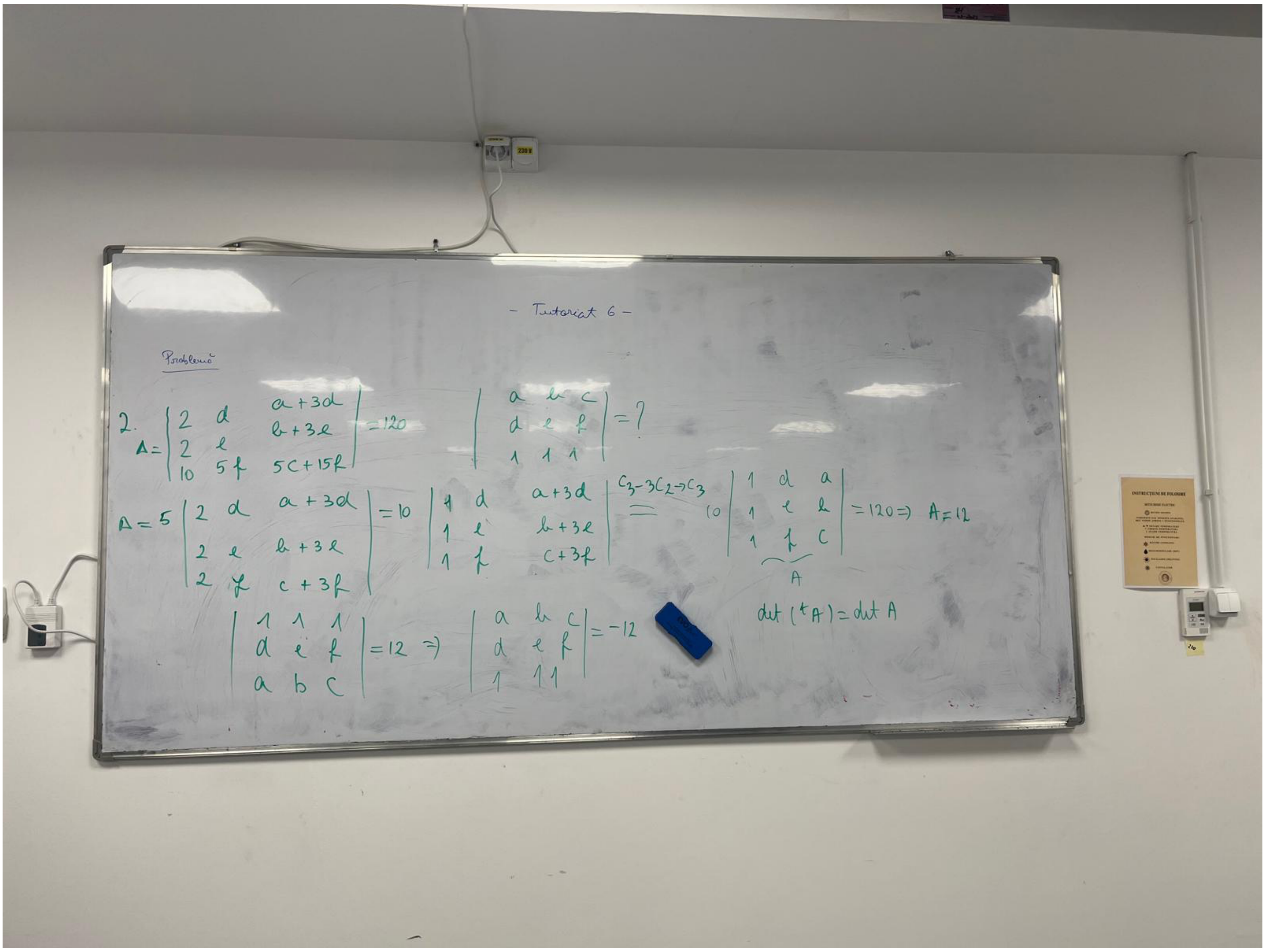
$\dim \operatorname{Ker} f + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{3} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3}_{3}$

$\dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow f$ inj.

$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ surj


- Tutoriat 6 -
Problemă
Fie $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$f(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y+z,\ x-y-z)$
a) $M_f^{BC} = ?$
BC = baza canonică
b) Ker f și Im f + baze și dim.
c) f este injectivă \ surjectivă ?
$a+b+c=0$
$a-b+c=0$
$a-b-c=0$
$a=b=c=0$
$\Rightarrow \mathrm{Ker} f = \langle (0,0,0) \rangle$
d) f este izomorfism liniar?
Dacă f e apl lin + bij => e izo. liniar !
Dacă $\det M_f^{BC} \neq 0$ => e izo. lin.
f e izo. lin.


- Tutoriat 6 -
Problemă
2. A= |2 d a+3d; 2 e b+3e; 10 5f 5c+15f| = 120
|a b c; d e f; 1 1 1| = ?
A = 5 |2 d a+3d; 2 e b+3e; 2 f c+3f| = 10 |1 d a+3d; 1 e b+3e; 1 f c+3f|
C3-3C2→C3
10 |1 d a; 1 e b; 1 f c| = 120 ⇒ A = 12
10 |1 d a; 1 e b; 1 f c| + 10 |0 0 3d; 0 0 3e; 0 0 3f|
0
A
det (tA) = det A



\- Tutoriat 6 -

Problemă

2\. $A = \begin{vmatrix} 2 & d & a+3d \\ 2 & e & b+3e \\ 10 & 5f & 5c+15f \end{vmatrix} = 120 \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$

$$A = 5\begin{vmatrix} 2 & d & a+3d \\ 2 & e & b+3e \\ 2 & f & c+3f \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & d & a+3d \\ 1 & e & b+3e \\ 1 & f & c+3f \end{vmatrix} \overset{C_3-3C_2\to C_3}{=} 10\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & d & a \\ 1 & e & b \\ 1 & f & c \end{vmatrix}}_{A} = 120 \Rightarrow A = 12$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$\det({}^tA) = \det A$

\- Tutoriat 6 -

Problemă

$$\begin{vmatrix} 2 & d & a+3d \\ 2 & e & b+3e \\ 10 & 5f & 5c+15f \end{vmatrix} = 120 \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

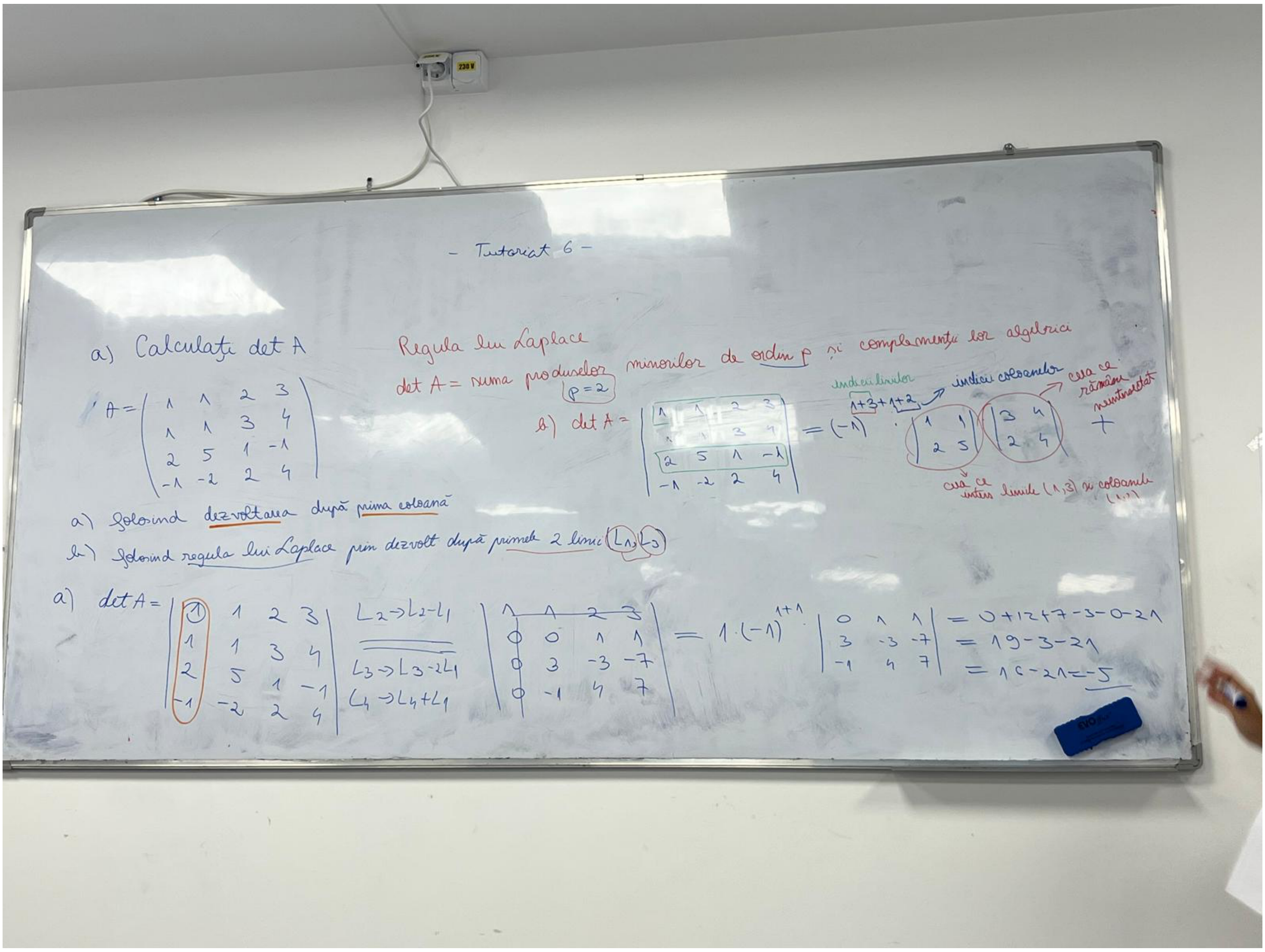
Proprietate: Dacă B se obține din A prin schimbarea a două linii sau coloane

$\det B = -\det A$

$$= 5\begin{vmatrix} 2 & d & a+3d \\ 2 & e & b+3e \\ 2 & f & c+3f \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & d & a+3d \\ 1 & e & b+3e \\ 1 & f & c+3f \end{vmatrix} \overset{C_3-3C_2 \to C_3}{=} 10\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & d & a \\ 1 & e & b \\ 1 & f & c \end{vmatrix}}_{A} = 120 \Rightarrow A = 12$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$\det({}^tA) = \det A$


- Tutoriat 6 -
a) Calculați det A
A = (1 1 2 3 / 1 1 3 4 / 2 5 1 -1 / -1 -2 2 4)
a) folosind dezvoltarea după prima coloană
b) folosind regula lui Laplace prin dezvolt după primele 2 linii (L1, L3)
Regula lui Laplace
det A = suma produselor minorilor de ordin p și complemenții lor algebrici
p = 2
indicii liniilor
indicii coloanelor
1+3+1+2
cea ce rămâne neintersectat
cea ce intersectează liniile (1,3) și coloanele (1,2)
b) det A = |1 1 2 3 / 1 1 3 4 / 2 5 1 -1 / -1 -2 2 4| = (-1)^(1+3+1+2) · |1 1 / 2 5| · |3 4 / 2 4| +
a) det A = |1 1 2 3 / 1 1 3 4 / 2 5 1 -1 / -1 -2 2 4|
L2 -> L2 - L1
L3 -> L3 - 2L1
L4 -> L4 + L1
|1 1 2 3 / 0 0 1 1 / 0 3 -3 -7 / 0 -1 4 7| = 1 · (-1)^(1+1) · |0 1 1 / 3 -3 -7 / -1 4 7|
= 0 + 12 + 7 - 3 - 0 - 21
= 19 - 3 - 21
= 16 - 21 = -5

– Tutoriat 6 –

a) Calculați det A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Regula lui Laplace

det A = suma produselor minorilor de ordin p și complemenții lor algebrici

$\boxed{p=2}$

b) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{\boxed{1+3}+\boxed{1+2}}}_{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}_{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}_{4} +$

indicii liniilor

indicii coloanelor

cea ce rămâne neintersectat

cea ce intersectează liniile (1,3) și coloanele (1,2)

$+ \underbrace{(-1)^{1+3+1+3}}_{1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{-3} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}_{12} + \underbrace{(-1)^{1+3+1+4}}_{-1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{-7} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}_{8} +$

$+ \underbrace{(-1)^{1+3+2+3}}_{1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}_{-9} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}_{8} + \underbrace{(-1)^{1+3+2+4}}_{1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}_{-16} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{5} + \underbrace{(-1)^{1+3+3+4}}_{-1} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{-5} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}_{-1}$

det A = −12 − 36 + 56 + 72 − 80 − 5

det A = −48 + 56 − $\underbrace{8 - 5}_{-13}$

det A = + 8 − 13 = −5

– Tutoriat 6 –

→ Examen 2025

(2) Ptr. fiecare $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$, fie matricea

$A_n = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

ptr. care $a_{ij} = \begin{cases} j, & \text{dc } i \leq j \\ -j, & \text{dc } i > j \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{jj} = j \\ a_{(j+1)j} = a_{(j+2)j} = \dots = a_{nj} = -j \end{cases}$

(a) $\det A_3 = ?$

Să se ar. că A_3 = invb. + să se calculeze inversa

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 + 6 - 6 - (-6 - 6 - 6) =$$

$$= 6 - (-18) = 24 \neq 0 \checkmark$$

$\Rightarrow A_3$ este invb. ✓

– Tutoriat 6 –

→ Examen 2025

(2) Ptr. fiecare $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$, fie matricea

$A_n = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

ptr. care $a_{ij} = \begin{cases} j, \text{ dc } i \leq j \\ -j, \text{ dc } i > j \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{jj} = j \\ a_{(j+1)j} = a_{(j+2)j} = \dots = a_{nj} = -j \end{cases}$

(a) $\det A_3 = ?$

Să se ar. că A_3 = inv. + să se calculeze inversa

– Ptr. a calcula inversa:
- I liceu: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$
- II Gauss-Jordan

- Tutoriat 6 -

↳ Examen 2025

(2) Ptr. fiecare $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$, fie matricea

$A_n = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/6 & 0 & 1/6 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}}_{A_3^{-1}}$$

$$\Rightarrow A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$