Tutoriat 10 CDI

- Teorema de integrare prin părți a integralei Riemann

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile având derivatele integrabile Riemann.
Atunci $\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$.

- Teorema de inversare a ordinii de integrare
(Teorema lui Fubini)
$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,;\, a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$
$f : D \to \mathbb{R}$ funcție continuă
Atunci $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\, dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\, dx \right) dt$.

Integrale improprii

- Caz I: funcții nemărginite
$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a,b] \subset D$
$\forall c \in (a,b]$ f integrabilă Riemann pe $[c,b]$, i.e $\exists$. $I_c = \int_c^b f(x)\, dx$.
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\, dx.$$

- Caz II: domenii nemărginite

$f : [a,\infty) \to f$, integrabilă Riemann pe $\forall$ interval $[a,c]$, i.e. $\exists$ $I_c = \int_a^c f(x)\, dx$.
$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\, dx.$$

Măsura Jordan

$I \subset \mathbb{R}^n$, interval închis n-dimensional

$E \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset I$

$\sum_e V(I_e)$

- măsură Jordan exterioară: $\mu^*(E) = \inf\{V_e(E, \mathcal{P}), \mathcal{P} \text{ partiție a lui } I\}$
- măsură Jordan interioară: $\mu_*(E) = \sup\{V_i(E, \mathcal{P}), \mathcal{P} \text{ partiție a lui } I\}$

$\sum_i V(I_i)$

Def: $E \subset \mathbb{R}^n$ mărginită s.n. măsurabilă Jordan dc. $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

Integrale duble

$f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

Pp. $x \to f(x,y)$ integrabilă pe $[a,b]$, $\forall y \in [c,d]$

$y \to f(x,y)$ integrabilă pe $[c,d]$, $\forall x \in [a,b]$

f integrabilă pe $[a,b] \times [c,d]$

Atunci $x \to \int_c^d f(x,y)\,dy$ integrabilă pe $[a,b]$

$y \to \int_a^b f(x,y)\,dx$ integrabilă pe $[c,d]$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

(T) formule pentru domenii simple

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ simplă în raport cu O_x $\Rightarrow$ $c \le y \le d$, $\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$

$f: D \to \mathbb{R}$, integrabilă și mărginită

Pp. $\forall y \in [c,d]$ $\exists$ $H(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$.

Atunci H integrabilă și $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$.

- $D \subset \mathbb{R}^n$ simplă în raport cu Oy $\Rightarrow$ $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$

$f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă și mărginită

Pp. $\forall\, x \in [a,b]$, $\exists\ G(x) = \displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

Atunci G integrabilă și $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$