S9 - Forme biliniare. Forme pătratice. Formă canonică/normală

$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to g(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$

a) $g \in \mathcal{L}^S(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ formă biliniară simetrică

b) $G = ?$ (mat asoc. lui g în rap cu R_0)

c) $\operatorname{Ker} g = ?$ este g nedegenerată

d) $G' = ?$ (mat. asoc lui g în rap cu $R' = \{e_1' = (1,1,1), e_2' = (1,2,1),$
$e_3' = (0,0,1)\}$

$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j \Leftrightarrow g$ forma biliniară

$g(x,y) = g(y,x) \Leftrightarrow g_{i,j} = g_{j,i} \Leftrightarrow G^T = G \Rightarrow G$ simetrică

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = G^T$$

c) $\operatorname{Ker} g = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^3\}$

$$\det G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

G nedegenerată ($\det G \neq 0$) $\Rightarrow$ g nedegen $\Rightarrow \operatorname{Ker} g = 0_{\mathbb{R}^3}$

Obs: $x \in \operatorname{Ker} g$

$g(x, e_1) = 0$

$g(x, e_2) = 0$

$g(x, e_3) = 0$

$$(*) \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det G \neq 0 \Rightarrow (*)$ are sol unică nulă $\Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$

d) $R_0 \xrightarrow{C} R'$

$e_1' = e_1 + e_2 + e_3$

$e_2' = e_1 + 2e_2 + e_3$

$e_3' = e_3$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G' = {}^{T}C\, G\, C$

$${}^{T}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Q forma pătratică asoc. lui g

Să se aducă Q la o formă canonică

$Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f. pătratică asoc. lui g $Q(x) = g(x,x) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, x_i^2 + 2\sum_{i<j} g_{ij}\, x_i x_j$

$Q(x) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

M1 (Jacobi)

$\Delta_1 = 1 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ un reper a.î.

$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} x_3'^2 =$

$= 1\, x_1'^2 - 1\, x_2'^2 + \frac{1}{3} x_3'^2$

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' \\ x_2'' = x_3' \\ x_3'' = x_2' \end{cases}$$

$$Q(x) = x_1''^2 + \frac{1}{3} x_2''^2 - x_3''^2$$

signatura este $(2,1)$

nr de $+$ nr de $-$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

M2 (Gauss)

$$Q(x) = (x_1 - x_3)^2 \underbrace{- x_3^2 - x_2^2 + 4 x_2 x_3}_{-(x_2 - 2x_3)^2 + 4x_3^2 - x_3^2}$$

$$Q(x) = (x_1 - x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 3x_3^2$$

Fie schimbarea

$x_1' = x_1 - x_3$

$x_2' = \sqrt{3}\, x_3$

$x_3' = x_2 - 2x_3$

$$Q(x) = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$$

signatura este $(2,1)$