Curs 10

Teoremă (Teorema fct implicite TFI)

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{p+1}$, D deschisă

$F: D \to \mathbb{R}$ și $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0, y^0) \in D$ a.î.

1) $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0, y^0) = 0$

2) F este de clasă C^1 (pe D)

3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0, y^0) \neq 0$

Atunci $\exists\, U = \mathring{U} \in \mathcal{V}_{(x_1^0, \dots, x_p^0)}$,

$\exists\, V = \mathring{V} \in \mathcal{V}_{y^0}$ și $\exists!\, f: U \to V$

(f fct implicită) cu prop

a) $f(x_1^0, \dots, x_p^0) = y^0$

b) $F(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p)) = 0$

$\forall\, (x_1, \dots, x_p) \in U$

c) f este de clasă C^1 și $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p)$

$$= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p))} \quad \forall\, (x_1, \dots, x_p) \in U, \ \forall\, i = \overline{1,p}$$

Notație În contextul ~~TF~~ TFI notăm $f \overset{not}{=} y$.

Def. Funcția $f(\overset{not}{=} y)$ din TFI s.n. fct implicită asociată ec. $F(x_1, \dots, x_p, y) = 0$

Obs Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Dacă F este de clasă C^k atunci $f(\overset{not}{=} y)$ este de clasă C^k

ex: Ar. că ec. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 2$ definește într-o vecinătate a pct $(1,1)$ fct implicită $y = y(x)$ și det $y'(1) \left(= \frac{\partial y}{\partial x}(1)\right)$

Fie $D = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{1+1}$ deschisă cât mai mare (D deschisă)

și $F: D \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2$

1) $F(1,1) = 1 - 2 + 1 + 1 + 1 - 2 = 0$

2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y + 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 = D$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -2x + 2y + 1$

$\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ cont pe $D \Rightarrow F$ de clasă C^1 (pe D)

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -2 + 2 + 1 = 1 \neq 0$

cf TFI $\exists U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}_1$, $\exists V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}_1$, $\exists!$ $y: U \to V$ cu prop

a) $y(1) = 1$

b) $F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in U$

c) y este de clasă C^1 și $y'(x) =$

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \quad \forall x \in U$$

Pt a deter. $y'(1) = \frac{\partial y}{\partial x}(1)$ avem 2 variante

<u>Var 1</u> (Folosim a) și c))

$$\underset{\frac{\partial y}{\partial x}(x)}{\overset{\|}{y'(x)}} \overset{=}{\underset{c}{\uparrow}} -\frac{2x-2y(x)+1}{-2x+2y(x)+1} \quad \forall x \in U$$

$$\Rightarrow \underset{\frac{\partial y}{\partial x}(1)}{\overset{\|}{y'(1)}} = -\frac{2\cdot 1-2y(1)+1}{-2\cdot 1+2y(1)+1} \underset{a}{\overset{=}{\uparrow}} -\frac{2-2+1}{-2+2+1}$$

$$= -1$$

<u>Var 2</u> (Folosim a) și b))

$$F(x, y(x)) = 0 \ \forall x \in U \Leftrightarrow x^2 - 2xy(x) + y^2(x) + x + y(x) - 2 = 0 \quad \forall x \in U$$

Derivăm ult. rel în rap cu x și obținem

$$2x - 2y(x) - 2xy'(x) + 2y(x)y'(x) + 1 + y'(x) = 0 \quad \forall x \in U$$

$$\Rightarrow y'(x)(-2x + 2y(x) + 1) = -2x + 2y(x) - 1$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-2x + 2y(x) - 1}{-2x + 2y(x) + 1} \quad \forall x \in U$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{-2\cdot 1 + 2y(1) - 1}{-2\cdot 1 + 2y(1) + 1} \underset{a)}{\overset{=}{\uparrow}} \frac{-2+2-1}{-2+2+1} = -1 \quad \square$$

<u>Teoremă</u> (TFI - cazul general)

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$

$\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{p+q}$, D deschisă,

$F : D \to \mathbb{R}^q$ $(F = (F_1, \dots, F_q))$

şi $(x^0, y^0) \in D$ $\left(\begin{array}{l} x^0 = (x_1^0, \dots, x_p^0) \\ y^0 = (y_1^0, \dots, y_q^0) \end{array} \right)$

a.î.: 1) $F(x^0, y^0) = 0_{\mathbb{R}^q} = (0, \dots, 0)$

2) F este de clasă C^1 (pe D)

3) $\dfrac{D(F_1 \dots F_q)}{D(y_1 \dots y_q)}(x^0, y^0) \overset{def}{=}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_q}(x^0, y^0) \\ \text{---} & & \text{---} \\ \frac{\partial F_q}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial y_q}(x^0, y^0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Atunci $\exists$ $U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}_{(x_1^0, \dots, x_p^0)}$, $\exists$ $V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}_{(y_1^0, \dots, y_q^0)}$ şi $\exists!$ $f: U \to V$ (f fct. implicită) $f = (f_1 \dots f_q)$ cu prop.:

a) $f(x^0) = y^0$

b) $F(x, f(x)) = 0_{\mathbb{R}^q}$ $\forall$ $x \in U$

c) f este de clasă C^1 ~~şi $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$~~

$$\cancel{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = -\frac{\frac{D(F_1, \dots, F_q)}{D(y_1, x_2, \dots, x_p)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_q)}{D(y_1)}}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{D(F_1, \dots, F_q)}{D(x_i, y_2, \dots, y_q)}(x, f(x))}{\frac{D(F_1, \dots, F_q)}{D(y_1, \dots, y_q)}(x, f(x))} \quad \forall\, i = \overline{1,p} \quad \forall\, x \in U$$

$$\frac{\partial f_q}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{D(F_1,\dots,F_q)}{D(y_1,\dots,y_{q-1},x_i)}(x, f(x))}{\frac{D(F_1,\dots,F_q)}{D(y_1,\dots,y_q)}(x, f(x))}$$

Extreme cu legături

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^p$, $\emptyset \neq A \subset E$, $f: E \to \mathbb{R}$ și $a \in A$.

Def Spunem că a este:

1) pct de min local al lui f condiționat de A dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \le f(x)$ $\forall x \in V \cap A$

2) pct de max local al lui f cond ~~la~~ de A dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \ge f(x)$ $\forall x \in V \cap A$

3) pct de extrem local al lui f cond de A dacă a este pct de min. local al lui f cond. de A sau a este pct de max local al lui f cond. de A

Obs: Dacă $A = E$ se omite sintagma „condiționat de A".

Denumire alternativă: Pct de extrem local ale lui f cond de A se mai numesc și PUNCTE DE EXTREM LOCAL ALE lui f RELATIVE la A

Fie $1 \le k < p$ $(k \in \mathbb{N})$ și $g_1, \dots, g_k : E \to \mathbb{R}$

Def: Dacă $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$ pct. de extrem local ale lui f cond de A s.n. punctele de extrem local ale lui f cu legăturile $g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$

Pp în continuare că $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$, E este mulțime deschisă și

$f, g_1, \ldots, g_k$ sunt de clasă C^1 (pe E)

Teorema următoare dă cond necesare de existență pt punctele de extrem local cu legături.

<u>Teoremă</u> (Teorema multiplicatorilor lui Lagrange)

Fie $a \in A$ (i.e $g_1(a) = \ldots = g_k(a) = 0$). Pp că $\text{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}} = k$ și că a este punct de extrem local al lui f condiționat de A.

Atunci $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ a.î

$$(1)\ \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \text{— — —} \\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(a) = 0 \end{cases}$$

unde $L : E \to \mathbb{R}$, $\boxed{L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)}$

<u>Def 1</u> Un pct $a = (a_1, \ldots a_p) \in E$ a.î:

$g_1(a) = \ldots = g_k(a) = 0$ (i.e $a \in A$),

$\text{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}} = k$ și $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ a.î

<u>a</u> verifică sist (1) s.n <u>punct staționar</u> al lui f cond de A (sau cu leg

$g_1(x) = \ldots = g_k(x) = 0$)

<u>Def 2</u> Numerele reale $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k$ din teorema preced. s.n <u>MULTIPLICATORII LUI LAGRANGE</u>

<u>Def 3</u> Fct. L s.n <u>LAGRANGEIANUL</u> problemei

Obs: Valorile $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ se schimbă odată cu pct staționar condiționat a.

Obs: Teorema prec. se poate reformula astfel: „Orice pct. de extrem local condiționat este punct staționar condiționat".

Obs: Reciproca obs. precedente (iii) este adev, i.e. $\exists$ pct staționare condiționate care nu sunt pct de extrem local condiționate

Alg pt det. pct staționare condiționate

1) Se consideră funcția $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nedeterminați)

2) Se formează sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(x) = 0 \\ g_1(x) = 0 \\ \dots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

și se caută sol. acestuia ($p+k$ ec și $p+k$ necunoscute) $(x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$

3) Dacă $(a_1, \dots, a_p, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e sol a sistem. de la 2) și $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}} = k$

atunci $(a_1, \dots, a_p)$ e pct staționar al lui

f cu leg. $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$

Obs: Printre aceste pct staționare condiționate se pot afla și pct de extrem local condiționat

A) Căutăm acum condiții suficiente care să ne permită să identificăm dintre pct. staționare condiț. pe acelea care sunt pct de extrem local condiționat

Fie $a = (a_1, \dots, a_p) \in E$ un pct staționar al lui f condiționat de A. Aceasta înseamnă că $a \in A$ (i.e $g_1(a) = \dots = g_k(a) = 0$)

$$\text{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}} = k \text{ și } \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

a.î. a să fie sol a sist (1).

Pp. că lagrangianul L este de clasă C_2 pe E

Diferențiem în pct a relațiile sistemului

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \\ \dots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

și obținem $\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_p}(a)\,dx_p = 0$

$$\dots$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial x_p}(a)\,dx_p = 0$$

Deoarece matricea acestui sist liniar este

$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}}$ și rangul ei este k, putem

exprima k diferențiale în fct. de celelalte $p-k$.

$dx_1, \dots, dx_k, dx_{k+1}, \dots, dx_{p-k}$ $\underline{dx_{p-k+1}}$ ...

$\underline{dx_{p-k+k}}$

Pp că $\dfrac{D(g_1, \dots, g_k)}{D(x_{p-k+1}, \dots, x_p)}(a) \neq 0$ (pp că rangul este k)

Exprimăm $dx_{p-k+1}, \dots, dx_p$ în fct de $dx_1, \dots, dx_{p-k}$

Putem scrie (*) $\begin{cases} dx_{p-k+1} = \sum\limits_{i=1}^{p-k} \theta_i^1 dx_i \\ \dots \\ dx_p = \sum\limits_{i=1}^{p-k} \theta_i^k dx_i \end{cases}$

Reamintim că $d^2L(a): \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

$$d^2L(a)(u,v) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i v_j$$

Fie $F(a): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $F(a)(u) = d^2L(a)(u)^2$

$$= \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i u_j$$

Putem scrie $F(a) = \sum\limits_{i,j=1}^{p} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j$

Înlocuim în expr lui $F(a)$ pe $dx_{p-k+1} \dots dx_p$ cu (*) și definim $F(a)_{leg} = \sum\limits_{i,j=1}^{p-k} A_{ij} dx_i dx_j$

unde A_{ij} rezultă din calcul

($F(a)_{leg}: \mathbb{R}^{p-k} \to \mathbb{R}$, $F(a)_{leg}(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{p-k} A_{ij} u_i u_j$)

Scanned with CamScanner

1) Dacă $F(a)_{leg}(u) \geq 0 \ \forall \ u \in \mathbb{R}^{p-k}$ și
$F(a)_{leg}(u) = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^{p-k}}$ atunci a este
pct de minim local al lui f cu leg.
$g_1(x) = \ldots = g_k(x) = 0$

2) Dacă $F(a)_{leg}(u) \leq 0 \ \forall \ u \in \mathbb{R}^{p-k}$ și
$F(a)_{leg}(u) = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^{p-k}}$ atunci a
este pct de maxim local al lui f cu
legăturile $g_1(x) = \ldots = g_k(x) = 0$

<u>Denum. alt</u>: Pct stat. cond. se mai numesc
și pct critice condiționate.

<u>Obs</u>. În aplicațiile noastre avem
$dx_i dx_j = dx_j dx_i \quad \forall \ i,j \in \{1, \ldots, p-k\}$

<u>ex</u> Fie $f : (0;\infty)^3 \to \mathbb{R}$
$f(x,y,z) = xy + xz + yz$
Det pct de extrem local ale lui f cu leg.
$xyz = 1$