Curs 1 - Alg. liniară - 4.10.2023

Examen: < examen 11 p. (0 p. oficiu) / 0 p. seminar

vladoiu@fmi.unibuc.ro

Bibliografie:

1) R. Dummit, Foote - Abstract Algebra
2) Peter D. Lax - Linear Algebra
3) T. Dumitrescu - Algebră
4) M. Vlădoiu, C. Voica - Algebră liniară. Geometrie
5) C. Băețica, S. Dăscălescu, C. Boboc, G. Mincu - Probleme de algebră

6) Friedberg, Insel Spence - Linear Algebra (curs)

Sist. de ec. lin. Metoda eliminării Gauss-Jordan

Def: Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Un sist. liniar de m ecuații și n nec.

este de forma

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{C}$

Def: Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

s.n. matricea sistemului $(*)$ sau mat. cu coef. ai sist.

Def: Matricea $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$ s.n. mat. term. liberi ai sistemului, iar mat. $A^e \overset{not}{=} (A \mid B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ s.n. matricea extinsă a sist.

Notație: Sistemul $(*)$ se scrie matriceal $AX = B$ unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ trb. det. când $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$ sunt date.

Obs:

1) un sist lin. indep e echivalent (are ac. sol) cu un sist obț. prin aplicarea unui nr. finit de pași de tipul:
   - permutarea a 2 linii
   - înmulțirea unei ec. cu $\lambda \in \mathbb{C}^*$
   - ad. la o ec. o alta înmulțită cu $\lambda \in \mathbb{C}^*$
2) pt. sist $(*)$ scris sub forma $AX = B$ înseamnă:
   - perm între ele a 2 linii în A^e
   - înmulțirea unei linii cu $a \in \mathbb{C}^*$ în A^e
   - ad. la o linie o alta înmulțită cu $a \in \mathbb{C}^*$ în A^e.

Def: O matrice cu elem. în $\mathbb{C}$ s.n. mat. eșalon dc. verifică urm prop:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & * & * & 0 & * & \dots & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & 0 & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1) liniile nule (dc. există) sunt sub cele nenule

2) primul elem. nenul (de la stg la dr) de pe fiecare lin. nenulă este $= 1$ (pivot)

3) pivotul de pe lin $i+1$ e la dr. de pivotul de pe lin i.

4) pe col pivoților restul elem $= 0$.

Prop: Orice mat. C poate fi adusă într-o mat. eșalon după un nr. finit de op. pe linii de tipul celor descrise anterior (row-reduced echelon form)

Dem (schiță):

1) dc. $C = O_{m\times n} \Rightarrow C$ e deja mat. eșalon.

2) dc. $C \neq O_{m\times n} \Rightarrow \exists$ cel puțin o lin și o col nenulă. Fixez prima col nenulă și consider primul elem. nenul pe care „îl fac 1" și „îl aduc" pe prima linie (prin perm. de linii). „Fac" 0 pe col sub el.

Astfel obț. o mat. de tipul $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & * & \cdots \\ \vdots & & & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \cdots \end{pmatrix}$

Repet procedura anterioară folosind mat. de mai sus.

Exemplu: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 4 & 18 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 & 22 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_3 - 2L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}$$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}$$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obs: Forma eșalon redusă a unei matrice e unic determinată.

Metoda eliminării Gauss - Jordan: Fie sist $AX = B$ și $A^c = (A|B)$

1) pt. rez. sist. scriem A^c și o aducem la forma eșalon redusă
2) dc. avem pivot pe ultima col $\Rightarrow$ sist. incompatibil (ultima ec. $0 = 1$).
3) dc. nu avem pivot pe ultima col $\Rightarrow$ sist. compatibil, iar necunoscutele principale sunt cele coresp. pivoților, iar celelalte sunt nec. secundare și le parametrizăm.

Ex: sist
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0 - x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 18 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 22 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ nec. pp: x_1, x_3, x_5 și nec. sec: x_2, x_4.

Curs 2 - Alg. liniară - 11.10.2023

Spații vectoriale

Convenție: k corp, $k \subseteq \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ în afara situațiilor precizate clar.

Def: Fie $k \subseteq \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. S.n. k - sp. vectorial sau sp. vect. peste k o mulțime V înzestrată cu:

- op. internă (numită de obicei $+ : V \times V \to V$
$(x, y) \longmapsto x + y$
- op externă (numită înmulțire cu scalari $\cdot : k \times V \to V$
$(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$

cu proprietățile:

$(V,+)$ gr. abelian
1) $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in V$
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
3) are elem neutru 0_V
4) $\forall$ elem. e inversabil față de adunare

distributivitate
5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall\, \alpha \in k$
6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7) $(a \cdot b)x = a(bx$

8) $\boxed{1_k x = x} \quad \forall\, x \in V.$

Notație: - elem. lui V s.n. vectori
- elem. lui k s.n. scalari
- op int s.n. ad. vectorilor.

Convenție: Elementul a al lui $(V,+)$ va fi notat cu 0

$$\begin{cases} 0x \Rightarrow 0 = 0_k \\ \lambda 0 \Rightarrow 0 = 0_V. \end{cases}$$

Exemple de sp. vectoriale:

1) reperul cartezian

2) $k \leq \mathbb{C} \Rightarrow k$ este k-sp. vect. (op $\begin{cases} \text{int}: + \text{ din } k \\ \text{ext}: \cdot \text{ din } k \end{cases}$)

3) $k \leq \mathbb{C}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $k^n = \{(d_1, \dots, d_n) \mid a_i \in k\}$

este k-sp. vect în rap. cu op. $\begin{cases} \text{ext}: \lambda(d_1, \dots, d_n) = (\lambda d_1, \dots \lambda d_n) \\ \text{int}: (d_1, \dots d_n) + (a_1, \dots a_n) = (a_1 + d_1, \dots a_n + d_n) \end{cases}$

! Obs: $\mathbb{Z}$ nu e subspațiu vect. peste $\mathbb{Q}$.

4) Mulțimea $M_{m \times n}(k)$ de matrici e k-sp. vect cu ad. mat + înmulțirea cu scalari.

5) Mulțimea polinoamelor cu coef în $\mathbb{R}[X]$ este $\mathbb{R}$-sp. vect.

(Mai general $\mathbb{R} \leftrightarrow k$ corp).

6) $k \leq \mathbb{C}$ și $X \neq \emptyset$. Atunci $\text{Func}(X, k) = \{f \mid f: X \to k \text{ funcție}\}$

este k-sp. vect în rap. cu op:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

7) k subcorp $\mathbb{C}$ => $\mathbb{C}$ are sh. de k sp. vect. (Mai general $k \leq L$ => L are sh. de k - sp. vect)

8) considerăm un sist de ec. liniare $AX = B_0$; $A \in M_{m \times n}(k)$
mulțimea soluțiilor = k sp. vect.

Prop: Fie V un k - sp. vect. Atunci:

1) $0_k \cdot x = 0_V \quad \forall x \in V$
2) $a \cdot 0_V = 0_V \quad \forall a \in k$
3) $a x = 0_V \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ sau} \\ x = 0 \end{cases}$
4) $(-a) x = a(-x) = -ax$

Dem 1): $(0_k + 0_k) x = 0_k x \Rightarrow 0_k x = 0_V$.

2) $a(0_V + 0_V) = a 0_V \Rightarrow a 0_V = 0_V$.

3) $a x = 0_V$
$a \neq 0_V \Rightarrow a$ inv $\Rightarrow 0 = a^{-1}(a x) = (a^{-1} a) x = \cancel{x}$
$x = 0$

4) $(a - a) x = 0 \Rightarrow a x + (-a) x = 0$

! Temă: $(G, \cdot)$ grup a.î. $x^2 = e \quad \forall x \in G$.
G este $\mathbb{Z}_2$ - sp. vect. în rap. cu op. + ? , $\cdot$?

Curs 3 - Alg. liniară - 18.10.2023

Def: Fie V un k-sp. vect. și U o submulțime a lui V s.n. subspațiu vectorial al lui V dc:

$$\begin{cases} 1) & x+y \in U \ \forall x,y \in U. \\ 2) & \left.\begin{array}{l}\forall a \in k \\ \forall x \in U\end{array}\right\} \Rightarrow ax \in U. \end{cases}$$

Obs: o submulțime nevidă U e subsp. vect a lui V dc. $\forall a,b \in k$ și $\forall x,y \in U \Rightarrow ax+by \in U$. ($U$ e și k-sp. vect)

Exemple de subsp. vect: (V un k-sp. vect)

1) $U = \{0_V\}$ și $U = V$ sunt k-subsp. vect pt. V.
2) Dc. $V = k^n \Rightarrow U = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$ este k-subsp. vect.
3) Dc. $V = k[X]$. Atunci $U = k[X]_{\leq n}$ = pol de gr cel mult n este k subsp vect.
4) $k = \mathbb{R}$, $V = \text{Funct}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Rightarrow U = \{f \in V \mid f \text{ cont}\}$, $W = \{f \in V \mid f \text{ deriv}\}$ k-subsp. vect.
5) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\}$ e k-subsp. vect.
6) $V = \mathbb{R}^n$; $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ e k subsp. vect

Prop: Fie V un k-sp. vect și $(U_i)_{i\in J}$ o familie de subsp. vect ale lui $V \Rightarrow \bigcap_{i\in J} U_i$ = subsp. vect V.

Dem Fie $a,b\in k$.

$$\left.\begin{array}{l} x,y\in \bigcap_{i\in J} U_i \Rightarrow x,y\in U_i \ \forall i\in J. \\ U_i \text{ subsp. vect } V \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow ax+by\in U_i \ \forall i\in J \Rightarrow ax+by\in \bigcap_{i\in J} U_i \Rightarrow A$ este subsp. vect.

Prop: Fie V un k-sp. vect. și $S\subseteq V$. Atunci

$\langle S\rangle = \bigcap_{\substack{U \text{ subsp. vect pt } V \\ U\supseteq S}} U$ = subsp. vect pt. V care s.n. subsp. vect generat de S. În plus este cel mai mic subsp. vect care îl conține pe S.

Dem: Am dem. anterior că $\langle S\rangle$ e subsp. vect. Acum dem. că este cel mai mic care îl conține pe S.

Fie V_0 subsp. vect care îl conține pe S.

$$\Rightarrow \langle S\rangle = \bigcap_{S\subseteq U} U \subseteq V_0.$$

Convenție: $\langle \emptyset\rangle = \{0_V\}$

Def: Dc $x_1,\dots,x_n\in V$ (k-sp. vect) atunci un elem. de forma $a_1x_1+\dots+a_nx_n$ s.n. combinație liniară
$a_i\in k$.

O comb. lin. s.n. nulă dc. $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$.

Prop: Fie V un k-sp. vect și $S \subseteq V$. Atunci

$\langle S \rangle = \{a_1 x_1 + \dots + a_m x_m \mid m \in \mathbb{N}^*, a_i \in k, x_i \in S\}$

Dem: evident $M = \{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \mid m \in \mathbb{N}^* \dots\} \subseteq \langle S \rangle$

$\subset S$.

evident $\left.\begin{matrix} M \text{ subsp. vect} \\ \langle S \rangle \min \end{matrix}\right\} \Rightarrow \langle M \rangle \supseteq \langle S \rangle \Leftrightarrow M = \langle S \rangle$.

Obs: $S = \emptyset \Rightarrow \langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$

Suma a 2 sp. vect: Fie U, W 2 subsp. vect ale lui V

$\Rightarrow U + W = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in U, x_2 \in W\}$ este k-subsp. vect V.

În plus $U + W = \langle U \cup W \rangle$

Sist. de generatori. Mt. lin. indep. Baze

Def: Fie V un k-sp. vect. O submulțime $S \subseteq V$ s.n. sistem de generatori al lui V dc $V = \langle S \rangle$.

Def: Un sp. vect. s.n. finit generat dc. admite un sist. de generatori cu $|S| < \infty$.

Obs: 1) S = sist. de gen în V și $S \subseteq S' \Rightarrow S'$ sist. de gen.

2) —— // —————— $S \subseteq \langle S' \rangle \Rightarrow S'$ sist. de gen.

ex: $V = k^2 \Rightarrow S = \{(0,1), (1,0)\}$ sist. de gen.

Ex: Dem că în $k[X]_{\leq n} \Rightarrow \{f_0(x), \dots, f_n(x)\}$ e sist de gen, unde $f_i(x)$ = pol de grad i.

! Temă: $\mathbb{R}$ nu e $\mathbb{Q}$ sp. vect finit generat.

Def: O submulțime finită nevidă $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ a lui V s.n. liniar independentă dc. $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \Rightarrow a_i = 0$ pt. $i = \overline{1,n}$

(pt. cazul S e infinită, atunci S s.n. lin. indep dc. $\forall$ submulțime a sa finită e lin. indep.

Obs: 1) dc. X - e lin indep și $X' \subseteq X \Rightarrow X'$ e lin. indep.

2) $z \in V \Rightarrow \{z\}$ e lin indep $\Leftrightarrow z \neq 0_V$.

Notație: O mulțime care nu e lin indep s.n. lin. dependentă

Ex: în $k[X] \Rightarrow \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ lin. indep.

în $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \{(1,2), (2,4)\}$ e lin. dep. $\left(2\cdot(1,2) + (-1)(2,4) = (0,0)\right)$

Def: Fie V un k - sp. vect. O submulțime $\mathbb{B} \neq \emptyset$, $\mathbb{B} \subset V$ s.n. bază dc. e simultan $\begin{cases} \text{sist. de gen.} \\ \text{lin. indep.} \end{cases}$

Convenție: $\emptyset$ e o bază pt. subsp. vect $\{0_V\}$

Obs: Dc. $\mathbb{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ e o bază pt. V. Atunci $\forall$ vector $v \in V$ se scrie în mod <u>unic</u> ca o comb. lin. din elem. din V.

Curs 4 - Alg. liniară - 25.10.2023

Prop.: Fie V un k-sp. vect. și $X \subseteq V$ o mulțime lin. indep. Dc. $x \in V$ a.î. $x \notin \langle X \rangle$ atunci $X \cup \{x\}$ este tot lin. indep.

Dem: Fie $\{x, x_1, \dots, x_n\} \subseteq X \cup \{x\}$ și $a, a_1, \dots, a_n \in k$ a.î. $ax + \sum_1^n a_i x_i = 0$

Dc. $a = 0 \Rightarrow a_i = 0 \ \forall i \Rightarrow$ e lin. indep.

Dc. $a \neq 0 \Rightarrow x = \sum_1^n (-a^{-1} a_i) x_i \in \langle X \rangle$ fals.

Teoremă: Fie V un k sp. vect. și X o mulțime lin. indep, S - sist. finit de gen. pt. V. a.î. $X \subseteq S$. Atunci $\exists \mathcal{B}$ bază a.î. $\boxed{X \subseteq \mathcal{B} \subseteq S}$

Dem: $V \neq \emptyset$ iau $v \in V$ cu $v \neq 0 \Rightarrow \{v\}$ lin. indep.

Dc. $\langle v \rangle = V$ am terminat $(X = S = B = \{v\})$

Altfel $\Rightarrow \exists\, v_1 \in V \setminus \{v\}$, $v_1 \notin \langle v \rangle$ a.î. $\{v, v_1\}$ lin indep (prop de mai sus).

Caz general: $|S| = |X| + m$.

Dc $m = 0 \Rightarrow S = \langle X \rangle \Rightarrow V = \langle X \rangle \Rightarrow X = S = \mathcal{B}$

Dc. $\langle X \rangle < S \Rightarrow \exists y_1 \in S \setminus \langle X \rangle \overset{\text{Prop}}{\Rightarrow} X \cup \{y_1\}$ sist. lin. indep.

Continui repetitiv. ~~până~~

Corolar 1: Fie $|X'| < \infty$ lin. indep. într-un V-k-sp. vectorial finit generat. Atunci $\exists$ o bază $\mathbb{B}$ a lui V a.î. $X' \subseteq \mathbb{B}$. ($\forall$ mulțime lin. indep. se poate completa la o bază).

Dem: $V = \langle S' \rangle \Rightarrow S' \cup X'$ sist. de generatori.
Aplic th de mai sus pt. $\begin{cases} X = X' \\ S = X' \cup S' \end{cases}$

Corolar 2: Fie V-k-sp. vect. finit generat. Atunci V admite o bază finită $\mathbb{B}$.

Dem: $V = \langle S' \rangle \Rightarrow$ aplic th pt. $\begin{cases} X = \emptyset \\ S = S' \end{cases}$

Corolar 3: Fie V-k-sp. vect. finit generat și S un sist. finit de generatori pt. V. Atunci $\exists$ o bază $\mathbb{B}$ a lui V a.î. $\mathbb{B} \subseteq S$. (din $\forall$ sist. de gen. se poate extrage o bază).

Teorema schimbului: Fie V un k-sp. vect., iar $X, S \subseteq V$ finite a.î. $\begin{cases} X \text{ - lin. indep.} \\ S \text{ - sist. de gen.} \end{cases}$. Atunci $\begin{cases} |X| \le |S| \\ \exists Y \subseteq S \text{ a.î. } \begin{cases} |X| = |Y| \\ (S \setminus Y) \cup X \text{ e sist. de gen. } V. \end{cases} \end{cases}$

Dem: Fie $X \neq \emptyset$ și $S \neq \emptyset$ $\Rightarrow \begin{cases} S = \{y_1, \dots, y_p\} \\ |X| = m. \end{cases}$

Dem pb. prin inducție după m:

1) $\boxed{m=1} \Rightarrow X = \{x_1\}$

$x_1 \in V = \langle S \rangle \Rightarrow \exists a_i$ a.î. $x_1 = a_1 y_1 + \dots + a_p y_p \neq 0$

$\Rightarrow \exists a_i \neq 0$ (p.p. fără a restrânge generalitatea $a_1 \neq 0$.)

$\Rightarrow a_1 y_1 = x_1 - a_2 y_2 - \dots - a_p y_p$

$y_1 = a_1^{-1} x_1 + (-a_1^{-1} a_2) y_2 + \dots + (-a_1^{-1} a_p) y_p \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 \in \langle \{y_2, \dots, y_p, x_1\} \rangle$

$S \subset \langle \{y_2, \dots, y_p, x_1\} \Rightarrow (S \setminus \{y_1\}) \cup \{x_1\}$ e sist. di gen.

2) Pas inducție $\boxed{m \Rightarrow m+1.}$

Conform ip. di inducție avem $\begin{cases} m \leq p \\ \exists Y \subseteq S \\ |Y| = m \end{cases}$ a.î. $(S \setminus Y) \cup \{x_1 \dots x_m\}$ sist. di gen.

Dc $\boxed{m=p} \Rightarrow S \setminus Y = \emptyset \Rightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$ sist. di gen. / lin. indep $\Rightarrow$

bază $\Rightarrow$ ~~bm~~ $x_{m+1} \in \{x_1, \dots, x_m\} \Rightarrow \{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ lin. dep (F)

$\Rightarrow m < p \Rightarrow \boxed{m+1 \leq p.}$

Se continuă analog cu dem caz $m=1$.

Teoremă: $\forall$ 2 baze au ac. cardinal.

Dem (pt. cazul finit generat): în th. schimbului iau,

$\left.\begin{matrix} X = \mathbb{B}_1 \\ S = \mathbb{B}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\mathbb{B}_1| \leq |\mathbb{B}_2|$ și $\left.\begin{matrix} X = \mathbb{B}_2 \\ S = \mathbb{B}_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\mathbb{B}_2| \leq |\mathbb{B}_1|$

$\Rightarrow |\mathbb{B}_1| = |\mathbb{B}_2|$

Def: Fie V un k-sp. vect. finit generat. Numim dimensiunea k-sp. vect. V și o notăm $\dim_k V$ cardinalul unei baze a lui V.

Ex: 1) $\dim_k k = 1$

2) $V = k^n \Rightarrow \dim_k k^n = n$

3) $\dim_k k[X]_{\leq n} = n+1$

4) $\dim_k M_{m \times n}(k) = m \times n$

5) ! $|X| < \infty \Rightarrow \dim_k \mathrm{Func}(X, k) = |X|$

$|X| = \infty \Rightarrow \dim = \infty$.

Prop: Fie V un k sp. vect de dim $n \in \mathbb{N}^*$. Dc U e subsp. vect. a lui $V \Rightarrow \begin{cases} U \text{ e finit generat} \\ \dim_k U \leq \dim_k V \\ U = V \Leftrightarrow \dim_k U = \dim_k V \end{cases}$

Curs - Alg. liniară - 30.10.2023

<u>Prop</u>: Fie V un k-sp. vect de dim $n \in \mathbb{N}^*$. Dc. U subsp. pt V (notație $U \leq V$) $\Rightarrow \begin{cases} U \text{ e finit generat} \\ \dim_k U \leq \dim_k V \\ U = V \Leftrightarrow \dim_k U = \dim_k V. \end{cases}$

<u>Dem</u>: Fie $\mathbb{B}$ o bază pt. V cu $|\mathbb{B}| = n \Rightarrow \forall$ mț. lin. indep are cel mult n elem. Fie $X' \subseteq U$ lin. indep. $\Rightarrow X'$ lin. indep. în $V \Rightarrow |X'| \leq n$

Fie $X = \{u_1, \dots, u_m\}$ o mț. lin. indep. maximală în $U \Rightarrow \boxed{m \leq n}$. Dem că $U = \langle X \rangle \Rightarrow \begin{cases} U \text{ finit generat} \\ \dim_k U = m \leq n. \end{cases}$

„$\supseteq$" evident $\langle X \rangle \subset U$.

„$\subseteq$" $\left.\begin{matrix} u \in U \setminus X \\ u \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{u, u_1, \dots, u_m\}$ lin dep. (din X max)

$\Rightarrow u \in \langle X \rangle \Rightarrow U \subset \langle X \rangle$

$\Downarrow$

$U = \langle X \rangle$

Dc. $\boxed{\dim_k U = \dim_k V} \Rightarrow \forall$ bază $\overset{B_0}{}$ a lui U are n elem. $\Rightarrow B_0$ e lin. indep în $U \Rightarrow$ lin. indep. în V.

$|B_0| = n \Rightarrow B_0$ bază și în $V \Rightarrow \boxed{U = V}$.

Th. Grassmann: Fie V un k sp. vect fin. dim. și U_1, U_2 2 k-subsp. vect. $\Rightarrow$

$$\boxed{\dim_k U_1 + \dim_k U_2 = \dim_k(U_1+U_2) + \dim_k(U_1 \cap U_2)}$$

Dem: Din prop ant. știm că U_1 și U_2 sunt finite.

Fie $\{x_1, \dots, x_m\}$ o bază pt. $U_1 \cap U_2$

(Dc. $U_1 \cap U_2 = \{0_V\} \Rightarrow$ iau $m=0$).

$U_1 \cap U_2 \leq U_1 \Rightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$ se poate completa la o bază în U_1 $\underline{\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m\}} = X_1$

$U_1 \cap U_2 \leq U_2 \Rightarrow \{x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_t\} = X_2$ bază pt. U_2.

Vreau să dem $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_t\}$ bază $U_1 + U_2$. (este evident sist. de gen).

Pp. R.A nu e lin. indep $\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_t$ nu toate nule a.î. $\boxed{a_1 x_1 + \dots + c_t z_t = 0}$

$w = \underbrace{(-b_1 y_1) + \dots + (-b_m y_m)}_{\in U_1} = \underbrace{a_1 x_1 + \dots + a_m x_m + c_1 z_1 + \dots c_t z_t}_{\in U_2}$

$\Rightarrow w \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \underline{w = d_1 x_1 + \dots + d_r x_r} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = d_1 x_1 + \dots + d_2 x_2 + b_1 y_1 + \dots + b_m y_m \overset{x_1 \text{ bază } U_1}{\Rightarrow}$

$d_1 = \dots = d_2 = b_1 = \dots = b_m = 0$

$\Rightarrow a_1 x_1 + \dots + c_t z_t = 0 = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c_1 z_1 + \dots + c_t z_t$

x_2 bază U_2

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = c_1 = \dots = c_t \Rightarrow \{x_1, \dots, z_t\}$ bază $U_1 + U_2$.

Aplicații liniare

k subcorp al lui $\mathbb{C}$.

Def: Fie U, V 2 k-sp. vect. O funcție $f: U \to V$ s.n. aplicație liniară / morfism de k sp. vect dc:

$\boxed{f(ax+by) = af(x) + bf(y)}$ $\forall\, a,b \in k$ și $\forall\, x, y \in U$.

Obs:

1) $f: U \to V$ apl. lin $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(ax) = af(x) \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(0_U) = 0_V \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Notație: $Hom_k(U, V) = \{f: U \to V \mid f$ morfism de k-sp. vect$\}$

Prop:

1) $\left.\begin{matrix} f: U \to V \\ g: V \to W \end{matrix}\right\} \xrightarrow{f, g \text{ apl. lin}} g \circ f$ apl. lin.

2) $f: U \to V$ bij + apl. lin $\Rightarrow f^{-1}: V \to U$ bij + apl. lin.

Dem: $f(af^{-1}(x) + bf^{-1}(y)) = af(f^{-1}(x)) + bf(f^{-1}(y))$
$= ax + by \Rightarrow$

$f^{-1}(ax + by) = af^{-1}(x) + bf^{-1}(y)$

Ex de apl. lin:

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ e apl. lin.

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ e apl. lin

ec. unui hiperplan care trece ~~pen~~ prin origine.

3) $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{m \times n}(k)$

$f: M_{n \times p}(k) \to M_{m \times p}(k)$; $f(X) = AX$ e apl. lin.

Def: Fie $f: U \to V$ o apl. lin. f s.n. izomorfism liniar dc. $\exists g: V \to U$ apl. lin. a.î. $\begin{cases} f \circ g = 1_V \\ g \circ f = 1_U \end{cases}$

Curs 6 - Alg. liniară - 1.11.2023

! Marți (8^{00} - 5^{45}) - vis a vis de 120 - consultații

! Ex: $\{1, \sqrt[n]{2}, \dots, \sqrt[n]{2^{n-1}}\}$ lin. indep. peste $\mathbb{Q}$.

Prop: O apl. lin. $f: U \to V$ este izo $\Leftrightarrow$ f e bij.

Def: 2 k-sp. vect. s.n. izomorfe dc. $\exists$ un izomorfism lin între ele.

Prop: Fie $f: U \to V$ o apl. lin. Atunci:

1) Dc. $U_1 \leq U \Rightarrow f(U_1) \leq V$ (subsp. vect)
2) Dc. $V_1 \leq V \Rightarrow f^{-1}(V_1) \leq U_1$

preimaginea $= \{x \in U \mid f(x) \in V_1\}$

Def: Fie $f: U \to V$ o apl. lin. $\Rightarrow$ $\text{Im}(f) = f(V) \leq V$ numit imag. lui f, iar $\ker(f) = f^{-1}(\{0_V\}) \leq U$ s.n. nucleul lui f.

Dem prop 2): Iau $x, y \in f^{-1}(V_1)$, $a, b \in k$ $\Rightarrow f(x), f(y) \in V_1$ $\Rightarrow ax + by \in f^{-1}(V_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(ax+by) \in V_1 \Leftrightarrow a f(x) + b f(y) \in V_1 \Leftrightarrow V_1 \leq V$.

Prop: Fie $f: U \to V$ o apl. lin. Atunci:

1) f surj $\Leftrightarrow$ $\text{Im} f = V$
2) f inj $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0_U\}$

Dem 2) $\boxed{" \Rightarrow "}$ Evident $\{0_U\} \in \ker f$.

Fie $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0_V = f(0_U) \overset{f \text{ inj}}{\Rightarrow} x = 0_U \Rightarrow \ker f = \{0_U\}$

$\boxed{" \Leftarrow "}$ Fie $x, y \in U$ cu $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - y \in \ker f = \{0_U\} \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ inj.

Prop: Fie V un k - sp. vect de dim $n \Rightarrow V$ e izomorf cu k^n.

Dem: Fie $\mathbb{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ o bază în V

$\{e_1, \dots, e_n\}$ baza canonică în k^n.

$v \in V \underset{\text{bază}}{\overset{\mathbb{B}}{\Rightarrow}} (\exists!)\ a_i \in k$ cu $\sum_1^n a_i x_i = v$.

Definim $f: V \to k^n$, $f(v) = (a_1, \dots, a_n)$

f funcție $\Leftarrow$ din unicitatea scrierii într-o bază.

f surj (evident)

f inj (arăt $\ker f = \{0_V\}$).

! Temă: Fie $f: U \to V$ apl. lin bij și $\dim_k U = n \in \mathbb{N}^*$.

Dc. $\{x_1, \dots, x_n\}$ bază pt $U \Rightarrow \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ bază pt V.

Teoremă (prop. de univ. a sp. vect): Fie V un k-sp. vect. de bază $\{x_1, \dots, x_m\}$ și W alt. sp. vect. Atunci pt. $\forall$ fam. de elem $\{y_i\}_{i\in\overline{1,m}} \subset W \Rightarrow (\exists!)\ f: V \to W$ apl. lin. pt. care $f(x_i) = y_i$ pt. $i = \overline{1,m}$.

Obs: În th. de univ. avem:

1) f inj $\Leftrightarrow \{y_i\}$ lin. indep în W
2) f surj $\Leftrightarrow \{y_i\}$ sist. de gen în W.
3) f bij $\Leftrightarrow \{y_i\}$ bază în W.

Dem: Existența: Fie $v \in V \underset{\text{bază}}{\overset{B}{\Rightarrow}} \exists!\ a_i$ cu $\sum_1^m a_i x_i = v$

La fel ca înainte, iau $f: V \to W$

$$f(v) = \sum_1^m a_i y_i \text{ apl. lin.}$$

Unicitate: Fie $g: V \to W$ apl. lin cu $g(x_i) = y_i$

$g(v) = g(\sum a_i x_i) = \cancel{a_i \sum g(x_i)} \sum a_i g(x_i) = \sum a_i y_i = f(v)$
$\Rightarrow f = g$.

Teorema rang-defect: Fie $f: U \to V$ o apl. lin. de k-sp. vect. cu dim. finită. Atunci:

$$\boxed{\dim_k U = \dim_k(\ker f) + \dim_k(\operatorname{Im} f)}$$

$\underline{\text{Dem}}$: Fie $\{x_1, \dots, x_t\}$ o bază în $\ker f \leq U$ şi o completez la o bază $\{x_1, \dots, x_n\} \overset{=\mathcal{B}}{}$ în U.

Arăt $\{f(x_{t+1}), \dots, f(x_n)\}$ bază în $\operatorname{Im} f$.

$\boxed{\text{sist. de gen}}$: $z \in \operatorname{Im} f \Rightarrow z = f(u) = f\left(\sum_1^n a_i x_i\right) =$

$$= \underbrace{\sum_1^t a_i f(x_i)}_{0} + \sum_{t+1}^n a_i f(x_i) \in \langle \{f(x_{t+1}), \dots, f(x_n)\} \rangle.$$

$\boxed{\text{lin. indep.}}$: Fie $b_{t+1}, \dots, b_n \in K$ a.î.

$$b_{t+1} f(x_{t+1}) + \dots + b_n f(x_n) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{t+1}^n b_i x_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{t+1}^n b_i x_i \in \ker f \Rightarrow \sum_{t+1}^n b_i x_i = \sum_1^t c_i x_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_1^t c_i x_i + \sum_{t+1}^n (-b_i) x_i \overset{\mathcal{B}}{\underset{\text{bază } U}{\Rightarrow}} c_1 = \dots = c_t = b_{t+1} = \dots = b_n = 0$$

$\Rightarrow \{f(x_{t+1}), \dots, f(x_n)\}$ e lin. indep. $\Rightarrow$ bază $\operatorname{Im} f$.

Curs 7 - Alg. liniară - 8.11.2023

Def: Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ o bază în V și $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ o bază în W, V, W k-sp. vect. Pt. fiecare $j = \overline{1,n}$ =>

$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$. Atunci matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ s.n.

$\uparrow$ apl. lin $f: V \to W$ — matricea apl. lin f în raport cu bazele $\mathcal{B}$ și C și o notăm $M_{\mathcal{B},C}(f)$

Dc. $v \in V \Rightarrow v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot a_{ij}\right) w_i$$

$$M_{\mathcal{B},C}(f) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_1^n a_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_1^n a_j \cdot a_{mj} \end{pmatrix}$$

Obs: Dc. $v \in V$ se scrie $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ în baza $\mathcal{B}$ => vectorul de coord în baza C este $\boxed{M_{\mathcal{B},C}(f) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}$

Notație: Dc $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ o bază ordonată a lui V, atunci vectorul de coord al lui $v \in V$ se notează cu $[v]_{\mathcal{B}}$

! Temă: Dc. B, C sunt baze în V, resp. W =>

$$M_{B,C}(f_1+f_2) = M_{B,C}(f_1) + M_{B,C}(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in Hom_k(V,W)$$

$$M_{B,C}(\lambda f) = \lambda M_{B,C}(f).$$

Obs: Fie $\begin{cases} \varphi : Hom_k(V,W) \to M_{m\times n}(k) \\ \varphi(f) = M_{B,C}(f). \end{cases}$

Atunci φ este $\begin{cases} \text{apl. lin.} \\ \text{bij} \end{cases}$ => $\boxed{Hom_k(V,W) \simeq M_{m\times n}(k)}$

Dem: e apl. lin din ex. de mai sus.

$\boxed{\varphi \text{ inj}}$: Arăt $\ker \varphi = \{0\}$

Fie $f \in \ker\varphi \setminus \{0\} \Rightarrow \exists v \in V$ a.î. $f(v) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [f(v)]_C \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Dar $[f(v)]_C = \underbrace{M_{B,C}(f)}_{\varphi(f) = 0_{m\times n}} \cdot [v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

fals => $\ker \varphi = \{0\}$ => φ inj.

$\boxed{\varphi \text{ surj}}$ $A \in M_{m\times n}(k)$. Din prop. de univ. => $(\exists!)$ $f_0 : V \to W$

a.î. $v_j = f_0(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ => Iau $\varphi(f_0) = M_{B,C}(f_0) = A$.

Obs: Dc. $A, A' \in M_{m\times n}(k)$ a.î. $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\forall x_1, \dots, x_n \in k \Rightarrow A = A'$

Dem: Iau $f_A: k^n \to k^m$; $f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ e apl. lin

$\Rightarrow A = M_{B_1, B_2}(f_A)$ unde B_1 și B_2 sunt bazele canonice ale lui k^n, resp k^m

$$\left.\begin{array}{l} A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i = e_i(A) \\ \quad \| \\ A' \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i = e_i(A') \end{array}\right\} \Rightarrow A = A'$$

Prop: Fie V, W, U k-sp. vect. fin. dim. având bazele B, C și D. Fie

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & W \arrow[r, "g"] & U \end{tikzcd}$$

apl. lin. Atunci:

$$\boxed{M_{B,D}(g \circ f) = M_{C,D}(g) \cdot M_{B,C}(f)}$$

Dem: $v \in V$ $\quad M_{B,C}(f) \cdot [v]_B = [f(v)]_C$

$M_{C,D}(g) \cdot [f(v)]_C = [(g \circ f)(v)]_D$.

$M_{B,D}(g \circ f)[v]_B = [(g \circ f)(v)]_D$.

Def: Dc. B_1, B_2 sunt baze ale lui $V \Rightarrow$ matricea

$A = M_{B_1, B_2}(1_V)$ s.n. matricea de trecere de la B_1 la B_2.

Obs: $M_{B_1, B_2} \cdot M_{B_2 B_1} = I_n$.

Prop: Fie $f: V \to W$ apl. lin cu $\left\{\begin{array}{l} B, B' \text{ baze } V \\ C, C' \text{ baze } W \end{array}\right.$. Atunci

$$\boxed{M_{B', C'}(f) = M^{-1}_{C'C}(1_W) \cdot M_{B,C}(f) \cdot M_{B'B}(1_V)}$$

Dem: $\underbrace{M^{-1}_{C',C}(1_W)}\cdot M_{B,C}(f)\cdot M_{B',B}(1_V) =$

$M_{C,C'}(1_W)\cdot M_{B',C}(f) = M_{B',C'}(f)$.

Comentariu: Dc V este k - sp. vect. de dim n, luând $W = V$ și B o bază a lui V, atunci notăm $End_k(V) = Hom_k(V,V)$ și $M_B(f) = M_{B,B}(f)$ pt. $f \in End_k(V)$. Avem $\varphi : End_k(V) - M_n(k)$ $\varphi(f) = M_B(f)$ izo lin. de k sp. vect.

Curs 8 - Alg. liniară - 15.11.2023

Determinanți:

Def: Fie $A \in M_n(k)$. Definim determinantul lui A (și notăm $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$) prin: $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$.

Prop. de bază ale det: Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$.

1) $\boxed{\det A = \det({}^tA)}$
2) dc. A are o linie nulă $\Rightarrow \boxed{\det A = 0.}$
3) dc. $B \in M_n(k)$ se obține din A prin înmulțirea unei linii cu $\lambda \Rightarrow \boxed{\det B = \lambda \det A}$
4) dc. o linie a lui A este $(b_1 + c_1, \dots, b_n + c_n)$ iar B și C sunt mat. obț. din A prin înlocuirea resp. linii cu linia $(b_1, \dots, b_n)$ resp. $(c_1, \dots, c_n) \Rightarrow \boxed{\det A = \det B + \det C.}$
5) dc. A are 2 linii prop. $\Rightarrow \boxed{\det A = 0.}$
6) dc. B se obț. din A prin perm a 2 linii $\Rightarrow \boxed{\det B = -\det A.}$
7) dc. B se obț. din A prin ad. la o linie a altei linii înmulțită cu un scalar $\lambda \Rightarrow \boxed{\det B = \det A.}$
8) din prop 1) $\Rightarrow$ prop 2 - 7 au loc și pt. coloane.

$I_n \xrightarrow{\text{permut } i \text{ cu } j} P_{ij}$

$I_n \xrightarrow{\text{înmulțesc lin } i \text{ cu } u} D_i(u)$

$I_n \xrightarrow{\text{pe lin } i, \text{ col } j \text{ se pune } a} T_{ij}(a)$

$\Rightarrow \begin{cases} P_{ij}A \to A \text{ în care permut } L_i \text{ cu } L_j \\ \Delta_i(u)A \to A \text{ în care } L_i \leftarrow uL_i \\ T_{ij}(a)A \to A \text{ în care } L_i \leftarrow L_i + aL_j \end{cases}$

<u>Dem</u> 1) ${}^tA = (b_{ij})$ unde $b_{ij} = a_{ji}$

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

$\varepsilon : S_n \to \{1, -1\}$ morfism și $\ker \varepsilon = A_n \leftarrow$ perm. pare.

$S_n = A_n \mathring{\cup} A_n(i,j)$

$\varepsilon(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = \varepsilon(e) = 1 \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & & n \end{pmatrix}$ ordonate

$$\Rightarrow \det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) b_{\sigma^{-1}(1),1} \dots b_{\sigma^{-1}(n),n}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} \dots a_{n\tau(n)} = \det A.$$

<u>Dem</u> 2), 3) $\Leftarrow$ din faptul că fiecare term. al sumei din $\det A$ conține exact un elem. de pe fiecare linie

<u>Dem</u> 4) $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(b_{1\sigma(1)} + c_{1\sigma(1)}) \dots (\cancel{b_{n\sigma(n)} + c_{n\sigma(n)}})$$

$a_{n\sigma(n)}$

2|5|4

$$\det A = \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}}_{\det B} + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} c_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}}_{\det C}$$

<u>Dem</u> 5) din 3) => 5) <=> ai a dem pt. A are 2 linii egale. $l_i = l_j$

$$\det A = \lambda \det \begin{pmatrix} l_1(A) \\ \vdots \\ l_i(A) \\ \vdots \\ l_i(A) \\ \vdots \\ l_n(A) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Știm $S_n = A_n \mathring{\cup} A_n(i,j)$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n(ij)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} (a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} - a_{1\tau(1)} \dots a_{n\tau(n)}) \text{ unde}$$

$$\tau = \sigma \cdot (i,j) \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0.$$

<u>Dem</u> 7) se obț. din 3) și 5).

<u>Regula lui Laplace de dezv. a det:</u>

<u>Notații</u>: Dc. $A \in M_n(K) \Rightarrow$ notez:

1) $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ indicii liniilor și $J = \{j_1, \dots, j_m\}$ indicii col.

2) $\bar{I} = \{1,2,\dots,n\} \setminus I$ și $\bar{J} = \{1,2,\dots,n\} \setminus J$

3) $(A)_{IJ}$ - matricea obț. din A prin intersecția liniilor I și col J.

Def: $\det A_{IJ}$ s.n. minorul de ord m al lui A, iar

$M' = (-1)^{i_1+\dots+i_m+j_1+\dots+j_m} \det(A_{\bar{I}\bar{J}})$ s.n. complementul

algebric al lui M.

Convenție: Dc. $I = J = \{1,\dots,n\} \Rightarrow \det A_{\emptyset\emptyset} = 1$.

Ex (Laplace): $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{după } l_1, l_2.]{\text{dezvolt}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} +$

$+ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$

$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+3+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}.$

Formula lui Laplace: Fie $A \in M_n(K)$ și $I = \{i_1,\dots,i_m\}$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\substack{J=\{j_1,\dots,j_m\} \\ 1 \le j_1 < \dots < j_m \le n}} \det A_{IJ} \cdot (-1)^{\sum_1^m i_k + \sum_1^m j_k} \cdot \det A_{\bar{I}\bar{J}}$$

Obs: $m=1$ şi $i_1 = i \overset{\text{Laplace}}{\Longrightarrow} \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{\{1,\dots,n\}\setminus\{i\},\ \{1,\dots,n\}\setminus\{j\}}$

Def.: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{\{1,\dots,n\}\setminus\{i\},\ \{1,\dots,n\}\setminus\{j\}}\right)$ s.n. complementul algebric al elementului a_{ij}.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Curs 8 - Alg. liniară - 22.11.2023

Notație: $A \in M_{m\times n}(k)$, $A = [c_1(A) \dots c_n(A)] \leftarrow$ col.

$$A = \begin{bmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_m(A) \end{bmatrix} \leftarrow \text{linii}$$

$A \in M_{m\times n}(k)$, $B \in M_{n\times p}(k)$ =>

$c_j(AB) = b_{1j} c_1(A) + \dots + b_{nj} c_n(A)$

$r_i(AB) = a_{i1} r_1(B) + \dots + a_{in} r_n(B)$

Obs: Fie A' matricea obț. din A prin înlocuirea liniei p cu linia i (deci $\det A' = 0$) =>

$$0 = \det A' \underset{\substack{L_p \\ p\neq i}}{\overset{\text{dezv.}}{=}} a_{i1} A_{p1} + \dots + a_{in} A_{pn} \quad (1)$$

$$0 = \det A' \underset{c_j}{\overset{\text{dezv.}}{=}} a_{1j} A_{1j} + \dots + a_{nj} A_{nj} \quad (2)$$

$$0 = \det A' \underset{\text{col } p\neq j}{\overset{\text{dezv}}{=}} a_{1j} A_{1p} + \dots + a_{nj} A_{np} = 0 \quad (3)$$

Def: Dc. $A \in M_n(k)$, definim $A^* \in M_n(k)$ ca fiind mat. care are pe poz (i,j) elem. A_{ji}. Atunci A^* s.n. matricea adjunctă a lui A.

Teoremă: Fie $A \in M_n(k)$ => $\boxed{A^* A = A \cdot A^* = (\det A) \cdot I_n}$

Dem: din $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$, (1), (2) și (3).

Th. Binet - Cauchy: Fie $A, B \in M_n(k)$. Atunci $\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$

Dem: Fie $C = \left(\begin{array}{c|c} A & O_n \\ \hline -I_n & B \end{array}\right) \in M_{2n}(k) \Rightarrow \underset{\det AB}{\underset{\shortparallel}{\det C}} = \det A \cdot \det B.$

! **Temă**: **Ex1**: $A = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline O & P \end{array}\right) \Rightarrow \det A = \det M \cdot \det P.$

Ex2: $A = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline N & P \end{array}\right) \Rightarrow \det A = \det M \cdot \det P$

Ex3: $A = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & O \end{array}\right) \Rightarrow \det A = (-1)^{m \cdot p} \cdot \det M \cdot \det P.$
unde $M \in M_m(k)$, $P \in M_p(k)$.

Dem că $\det C = \det AB$ unde $C = \left(\begin{array}{c|c} A & O_n \\ \hline -I_n & B \end{array}\right)$

$c_j(B) = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \Rightarrow c_{n+j}(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$

Adun la $c_{n+j}(C)$: $b_{1j} \cdot c_1(C) + \ldots + b_{nj} \cdot c_{nj}(C)$ $\forall j = \overline{1,n}$

$\Rightarrow$ obținem $C' = \left(\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -I_n & O \end{array}\right) \Rightarrow \det C = \det C' = (-1)^{n^2} \cdot \det AB \cdot \det(-I_n)$
$= (-1)^{n^2+n} \cdot \det AB = \det AB.$

Def: Matricea $A \in M_n(k)$ s.n. inversabilă dc. $\exists B \in M_n(k)$ a.î. $AB = BA = I_n$.

Obs: Dc. A e inversabilă, $\Rightarrow$ inversa ei e unică și o notăm A^{-1}.

Corolar: Fie $A \in M_n(k)$. Atunci A e inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
În plus, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

Sisteme de ec. liniare

Regula lui Cramer: Fie $A \in M_n(k)$ inversabilă și $B \in M_{n\times 1}(k)$.

Atunci sist. $AX = B$ are sol unică $x_i = \Delta_i \cdot \det^{-1} A$ unde

Δ_i = det matricii obț. din A prin înloc. lui c_i cu $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = B$.

Dem: $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow B = x_1 c_1(A) + \dots + x_n c_n(A)$.

A inv $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ are sol unică.

$\Delta_i = \det\left(c_1(A) \dots c_{i-1}(A), B, c_{i+1}(A) \dots c_n(A)\right)$

$\Delta_i = \det\left(c_1(A), \dots, x_1 c_1(A) + \dots + x_n c_n(A), \dots, c_n(A)\right)$

$\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \det\left(c_1(A), \dots, x_i c_i(A), \dots c_n(A)\right)$

$\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \det\left(c_1(A), \dots, c_i(A), \dots, c_n(A)\right) = x_i \det A$.

$\Rightarrow \boxed{x_i = \dfrac{\Delta_i}{\det A}}$

Rangul unei matrice

Def: Fie $A \in M_{m\times n}(k) \setminus \{0\}$. Atunci rangul lui A, notat cu $\text{rang}(A)$ sau $\text{rk}(A)$ este ordinul maxim al unui minor nenul al lui A. Prin convenție $\text{rk}\, O_{m,n} = 0$.

Obs:

1) $rk A = r \iff \exists$ un minor de ord r nenul și toți minorii de ordin sup. sunt nuli.

2) $rk(A) = rk({}^tA)$

3) $A \in M_{m \times n}(k) \Rightarrow rk(A) \le \min\{m, n\}$

4) $rk A = r \iff A$ are un minor de ordin $r \neq 0$ și toți minorii de ordin $r+1$ sunt nuli (din Laplace $\forall$ minor de ord. $> r+1$ $= \sum$ minori de ord $r+1$).

Th Kronecker: Fie $A \in M_{m \times n}(k)$. Atunci

$$\boxed{rk A = \dim_k \langle c_1(A), \dots, c_n(A) \rangle} \le k^m.$$

Dem: dc. $A = 0_{m \times n} \Rightarrow$ evident.

dc. $A \neq 0_{m \times n} \Rightarrow \exists$ un min. de ord $r \neq 0$. și toți minorii care îl bordează $= 0$. Arătăm $\dim_k \langle c_1(A), \dots, c_n(A) \rangle = r$.
Fără a restrânge generalitatea pot pp. că minorul de ordin r nenul este format din n liniile $\{1, \dots, r\}$ și col $\{1, \dots, r\}$.
$\Rightarrow c_1(A), \dots, c_r(A)$ sunt lin. indep.

Pp. R. A $\{c_1(A), \dots, c_r(A)\}$ sunt lin. dep. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c_j(A) = \sum_{i \neq j} \alpha_i c_i(A) \Rightarrow$ det minor r este 0 (F).

$\Rightarrow$ sunt lin. indep.
Pt. sist. de gen $\Rightarrow$ evident.

Curs 10 - Alg. liniară - 4.12.2023

Th Kronecker: Fie $A \in M_{m\times n}(k) \Rightarrow rg\, A = \dim_k \langle c_1(A), \dots, c_n(A)\rangle$

Corolar: Fie $A \in M_{m\times n}(k) \Rightarrow rk\, A = \dim_k \langle r_1(A), \dots, r_m(A)\rangle$

Prop: $\left.\begin{array}{l} A \in M_{m\times n}(k) \\ B \in M_{n\times p}(k) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{rg\, AB \le \min\{rk\, A, rk\, B\}}$

Dem: Fie $rk\, A \le rk\, B$.

$$c_j(AB) = \sum_{i=1} b_{ij}\, c_j(A) \in \langle c_1(A), \dots, c_n(A)\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle c_1(AB), \dots, c_p(AB)\rangle < c_1(A), \dots, c_n(A)\rangle \Rightarrow$$

$rk\, AB \le rk\, A = \min\{rk\, A, rk\, B\}$.

Corolar: Fie $A \in M_{m\times n}(k)$, $U \in GL_m(k) = \{X \in M_m(k) \mid X \text{ inv}\}$

$V \in GL_n(k) \Rightarrow rk\, AV = rk\, UA = rk\, A = rk\, UAV$.

Dem $rk\, UA \le rk\, A = rk\, U^{-1}(UA) \le rk\, UA \Rightarrow rk\, UA = A$

analog pt. restul.

$$A_{red} = \underbrace{(E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1)}_{\text{mat. elementare.}} A$$

Obs: 1) din cor $\Rightarrow rk\, A = rk\, A_{redusă}$

2) $rk\, A_{red}$ = nr. de pivoți (= nr. de linii nenule)

! <u>Ex tip examen</u>: Fie A o mat. cu forma eșalon redusă:

$A_{red} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $C_1(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $C_4(A) = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

<u>Aflați</u> A:

Indicație: $A = (C_1 \mid 2C_1 \mid 3C_1 \mid C_4 \mid -C_1 + 2C_4 \mid -3C_1 + 4C_4)$

<u>Prop</u>: Fie $A \in M_{m \times n}(k)$ cu rk $A = r$. Atunci după un nr. finit de transformări elem. pe linii + col lui A, A poate fi adusă în forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Dem $\underbrace{(E_s \dots E_1)\, A}_{A_{red}}\, (F_1 \dots F_t)$

<u>Corolar</u>: $A \in M_n(k)$, A inversabilă $\Leftrightarrow$ A e prod. de transformări elementare.

! Pt. a calcula $A^{-1} \Rightarrow (A \mid I_n) \xrightarrow[\text{redusă}]{\text{eșalon}} (I_n \mid A^{-1})$

<u>Obs</u>: Tot ce am făcut până acum e valabil și când lucrăm peste inele comutative.

Subspații invariante, vectori și val. proprii

Def: Fie V un k sp. vect, $T: V \to V$ apl. lin.

Un subsp. U al lui V s.n. T invariant dc. $T(U) \subset U$

Prop: Fie U un subsp. vect. de dim 1. Atunci U e T invariant $\Leftrightarrow U = kv$, pt. $v \in V \setminus \{0\}$ pt. care $\exists \lambda \in k$ a.î. $T(v) = \lambda v$.

Dem: „$\Leftarrow$" dc. $U = kv \Rightarrow \dim_k U = 1$.

Def: Fie $T: V \to V$ apl. lin. Atunci $\lambda \in k$ s.n. val. proprie pt. T dc. $\exists$ un vector $v \in V \setminus \{0\}$ a.î. $\boxed{T(v) = \lambda v}$

$\hookrightarrow$ s.n. vector propriu

Curs 11 - Alg. liniară - 8.01.2025

Pe parcursul cursului
- V - k-sp. vect. fin. dim, $\dim_k V = n$
- $T: V \to V$ apl. lin $\Leftrightarrow T \in Hom_k(V,V) \cong M_n(k)$

  $(\varphi \in Hom_k(V,V), \to M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, $\mathcal{B}$ = bază fixată V
- $[T(v)]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

Def: Fie $T: V \to V$ apl. lin. Atunci $\lambda \in k$ s.n. val proprie a lui T dc. $\exists\, v \in V \setminus \{0\}$ a.î. $T(v) = \lambda v$ (v = vector propriu)

Def: $T: V \to V$ s.n. diagonalizabilă $\Leftrightarrow \exists$ o bază $\mathcal{B}$ în V a.î. $M_{\mathcal{B}}(T)$ e diagonală $\xLeftrightarrow[M_{\mathcal{B}}(T)]{\text{def lui}} \exists$ o bază $\mathcal{B}$ a lui T form. din vectori proprii ai lui T.

$\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow T(w_i) = \lambda_i w_i$

$\boxed{Q}$ Cum găsim val. proprii ale unei apl. lin?

Prop: Fie $A = M_{\mathcal{B}}(T)$ unde $\mathcal{B}$ este bază în V. Atunci $\lambda \in k$ e val. proprie a lui $T \Leftrightarrow \boxed{\det(\lambda I_n - A) = 0}$

Dem: λ val proprie $T \Leftrightarrow \exists v \in V\setminus\{0\}$ a.î. $T(v) = \lambda v$

$\Leftrightarrow \exists v \in V\setminus\{0\}$ a.î. $A\cdot[v]_{\mathbb{B}} = [T(v)]_{\mathbb{B}} = [\lambda v]_{\mathbb{B}} = \lambda[v]_{\mathbb{B}}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in k$ nu toți nuli a.î. $(A - \lambda I_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A - \lambda I_m$ nu e inv $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_m) = 0$.

Obs: $xI_m - A = \begin{pmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \dots & a_{1m} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \dots & a_{2m} \\ - & - & - & - \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & x-a_{mm} \end{pmatrix} \in M_m(k[X])$

Def: Polinomul $P_A(x) = \det(xI_m - A)$ s.n. pol. caracteristic al matricii A ($\deg P_A = m$ și $P_A(x)$ - monic)

Prop-def: Fie $T: V \to V$ apl. lin și $A = M_{\mathbb{B}}(T)$, $\mathbb{B}$ bază în V. Atunci P_A e independent de alegerea bazei $\mathbb{B}$ și notăm $P_T = P_A$ pol. caracteristic al lui T.

Dem: Fie $\mathbb{B}'$ o bază a lui V. $C = M_{B'}(id) \Rightarrow C = U^{-1}AU$

$U = M_{B',B}(T)$

$P_C(x) = \det(xI_m - C) = \det(xU^{-1}U - U^{-1}AU) = \det U^{-1} \det(xI_m - A)\det U$
$= P_A$ $\quad \overset{\shortparallel}{P_A}$.

Obs: val. proprii ale lui T sunt răd lui P_T.

Cor: Dacă $k = \mathbb{C}$, atunci P_T are val proprii

Dem: $P_T(x) \in \mathbb{C}[X] \xrightarrow{T.F.A.A} P_T(x)$ se descompune în factori liniari $\Rightarrow T$ are val. proprii

Ex: $k = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_T(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2+1 \in \mathbb{R}[X]$

nu are val proprii. În particular nu e diag.

Prop: Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ val. proprii dif. ale apl. lin T și $v_1, \dots v_n$ vect. proprii coresp. Atunci $\{v_1, \dots, v_n\}$ sunt lin. indep.

Dem: Pp. R.A (seminar Stanciu)

Cor: Dc. P_T are val distincte $\Rightarrow$ T e diagonalizabilă

Obs: Dc. U e subsp. vect. pt. V, U e T invariant ($T(U) \subset U$), fixăm $\mathbb{B}_0$ bază în U și o completăm la o bază $\mathbb{B}$ în V ($\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \cup \mathbb{B}'$) $\Rightarrow$ $M_{\mathbb{B}}(T) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathbb{B}_0}(T/_U) & C \\ \hline 0 & \Delta \end{array}\right)$

Obs: Dacă $U = \underbrace{U_1 \oplus \dots \oplus U_n}_{\text{subsp. invariante}}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \cup \dots \cup \mathbb{B}_n$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow M_{\mathbb{B}}(T) = \begin{pmatrix} \boxed{M_{\mathbb{B}_1}(T/_{U_1})} & & & \\ & \boxed{M_{\mathbb{B}_2}(T/_{U_2})} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{M_{\mathbb{B}_n}(T/_{U_n})} \end{pmatrix}$$

Prop: Fie $U \leq V$ T invariant. Atunci $P_{T/_U} \mid P_T$

Dem: din obs ant $\Rightarrow P_T(X) = \det(XI_n - M_{\mathcal{B}}(T)) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_T(X) = \det(XI_n - M_{\mathcal{B}_0}(T/_U)) \cdot \det(XI_n - \Delta)$

Def: Dc. λ val proprie a lui $T \Rightarrow$ notăm cu $V_\lambda(T) = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$

subsp vect. al lui V, T invariant

Notăm cu $a_\lambda(T)$ - multiplicitatea algebrică

$1 \leq g_\lambda(T) = \dim_k V_\lambda(T)$ - multiplicitatea geometrică

Corolar: $g_\lambda(T) \leq a_\lambda(T)$

Dem: $M_{\mathcal{B}}(T/_{V_\lambda(T)}) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{P_{T/_{V_\lambda(T)}} \mid P_T}$

$(X-\lambda)^{g_\lambda(T)} \mid (X-\lambda)^{a_\lambda(T)}$. $Q[X]$

Teoremă: T e diagonalizabilă $\Leftrightarrow \begin{cases} a_\lambda(T) = g_\lambda(T) \ \forall \lambda \text{ val. proprie} \\ \text{toate } \lambda \in k. \end{cases}$

Curs 12 - Alg. liniară - 10.11.2024

<u>Teoremă</u>: $T: V \to V$ apl. lin., V, k-sp. vect. fin dim, $\dim_k V = n$. T diag $\Leftrightarrow$ au loc simultan cond:

$\begin{cases} 1) \ P_T \text{ se descompune în mod de factori liniari în } k[X] \\ 2) \ g_\lambda(T) = a_\lambda(T) \quad \forall \lambda \text{ val proprie } T \end{cases}$

<u>Dem</u>: „$\Rightarrow$" ex.

„$\Leftarrow$" Fie $\lambda_1, \dots \lambda_r$ val proprii distincte ale lui T.

1) $\Leftrightarrow \sum_1^r a_{\lambda_i}(T) = n$.

2) $\Rightarrow \sum_{i=1}^r g_{\lambda_i}(T) = \sum_{i=1}^r a_{\lambda_i}(T)$.

Fie $\mathcal{B}_i$ bază $V_{\lambda_i}(T) \Rightarrow |\mathcal{B}_i| = g_{\lambda_i}(T) \Rightarrow \cup \mathcal{B}_i$ lin indep. de card $n \Rightarrow$ bază în V.

<u>Spații vectoriale euclidiene</u>

<u>Def</u>: O formă biliniară simetrică pozitiv definită pe un sp. vectorial <u>real</u> s.n. produs scalar. Un sp. vect. real înzestrat cu un produs scalar s.n. spațiu euclidian.

(<u>Traducere</u>: E sp. vect peste $\mathbb{R}$.

E sp. euclid $\Leftrightarrow \exists \langle -,- \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ a.î.:

biliniară: $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$
$\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle$ } lin în fiecare arg.

simetrică: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

poz. def.: $\langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in E$ cu eg. $\Leftrightarrow x = 0$.

Exemple:

1) $E = \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\langle x, y \rangle = \sum_{1}^{m} x_i y_i$ $\begin{cases} x = (x_1, \dots, x_m) \\ y = (y_1, \dots, y_m) \end{cases}$

e prod. scalar pe E.

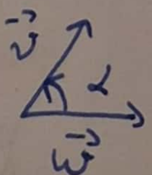
2) Fie $\mathcal{C} = \{ f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ cont} \} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ (nu e finit dim).

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$

3) $V = M_m(\mathbb{R}) \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ sp. vect, $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}({}^tB \cdot A)$; ${}^tB$ - transpusa B.

s.n. produsul scalar Frobenius.

4) $\mathcal{V} = \{ \overrightarrow{OA} \mid A \text{ în plan} \}$. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha$
(O = origine)



! Pt. restul cursului $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sp. vect. euclidian., $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Teoremă (CBS): Fie $x, y \in E$. Atunci $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
$\forall x, y \in E$, cu eg. pt. x, y lin. dep.

Obs: $\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$.

Consecințe $\|\_\|: E \to \mathbb{R}_+$ au loc urm:

1) $\|x\| = \sqrt{<x,x>} \geq 0$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def: Fie E un sp. vect. euclid. Un vector $x \in E$ s.n. unitar dc $\|x\| = 1$.

Obs: Similar cu V se poate introduce în general într-un sp vect. euclidian noțiunea de $\measuredangle$:

Def: Fie $x, y \in E \setminus \{0\}$. Atunci unghiul dintre x și y not $\measuredangle(x,y)$ este unghiul din $[0,\pi]$ a.î. $\cos(\measuredangle(x,y)) = \frac{<x,y>}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Def: $x, y \in E$ s.n. ortogonali (perpendiculari) și scriem $x \perp y$ $\Leftrightarrow <x,y> = 0$.

Prop: Fie $x_1, \dots, x_n \in E \setminus \{0\}$ a.î. $x_i \perp x_j$ $\forall i \neq j$. $\Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ e lin. indep.

Dem: Fie $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ a.î. $\sum_1^n \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow < \sum_1^n \alpha_i x_i, x_j > = 0$
$\Rightarrow \sum_1^n \alpha_i <x_i, x_j> = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$ $\forall j = \overline{1,n} \Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ lin. ~~dep~~ indep.

! De acum înainte sp. vect. fin. generate.

Def: 1) O bază $\mathcal{B}$ a lui E s.n. ortogonală dc. $\forall\, b_i, b_j \in \mathcal{B}$, cu $i \neq j$ $\Rightarrow \langle b_i, b_j \rangle = 0 \Leftrightarrow b_i \perp b_j$

2) O bază $\mathcal{B}$ a lui E s.n. ortonormată / ortonormală dc e ortogonală și $\|b_i\| = 1 \;\forall\, i = \overline{1,n}$.

Teoremă (Gram-Schmidt): Fie $\{f_1, \dots f_n\}$ o bază pt. E (fin. dim). Atunci $\exists$ o bază ortogonală $\{e_1, \dots e_n\}$ a lui E a.î. $\langle e_1 .. e_k \rangle = \langle f_1 .. f_k \rangle \;\forall\, k = \overline{1,n}$

$$\boxed{e_m = f_m - \sum_{1}^{m-1} \frac{\langle f_m, e_i \rangle}{\|e_i\|^2}} \quad \text{și } \boxed{e_1 = f_1.}$$

Dem: Inducție după m ($1 \leq m < n$)

$\boxed{m = 1} \Rightarrow$ iau $e_1 = f_1$.

$\boxed{\text{Pt. } m-1 \Rightarrow m} \leq n$. Știm $\{e_1, \dots e_{m-1}\}$ lin. indep., ortog. și $\langle e_1 \dots e_{m-1} \rangle = \langle f_1 \dots f_{m-1} \rangle$. Vrem să construim $e_m = f_m + \sum_{1}^{m-1} \alpha_i e_i$

a.î. $\begin{cases} e_m \perp e_i \;\forall\, i = \overline{1, m-1} \\ \langle e_1, \dots, e_m \rangle = \langle f_1 \dots f_m \rangle. \end{cases}$

$e_m \perp e_i \Leftrightarrow \langle e_m, e_i \rangle = 0 = \langle f_m + \sum_{1}^{m-1} \alpha_i e_i, e_i \rangle$

$0 = \langle f_m, e_i \rangle + \alpha_i \underset{\neq 0}{\|e_i\|^2} \Rightarrow \alpha_i = -\dfrac{\langle f_m, e_i \rangle}{\|e_i\|^2}$.

$$\Rightarrow \boxed{e_m = f_m - \sum_{1}^{m-1} \frac{\langle f_m, e_i \rangle}{\|e_i\|^2}}$$

Curs 13 - Alg. lin. - 18.01.2023

Def: E - sp. vect. euclid. n-dim. Fie $U \leq E$. $\Rightarrow U^\perp = \{v \in E \mid \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$ s.n. complementul ortogonal al lui U.

Obs:

1) $U^\perp \leq E$

2) $E = U \oplus U^\perp \iff \forall x \in E$ se scrie în mod unic $x = \underset{\in U}{u} + \underset{\in U^\perp}{u^\perp}$
$\iff \begin{cases} E = U + U^\perp \\ U \cap U^\perp = \{0\} \end{cases}$

Dem: Fie $\{f_1, \dots f_m\}$ bază în U. O completez la o bază $\{f_1, \dots f_n\}$ în E. Aplic Gram - Schmidt $\Rightarrow \{e_1, \dots e_n\}$ bază ortonormală U. Arăt $U^\perp = \langle e_{m+1}, \dots e_n \rangle$

Fie $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in U^\perp$

$\langle x, e_i \rangle = 0 \ \forall i = \overline{1,m} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = \overline{1,m} \Rightarrow x = \alpha_{m+1} e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n$.

3) Dc. $E = U \oplus X$ și $\langle u, x \rangle = 0 \begin{cases} \forall x \in X \\ \forall u \in U \end{cases} \Rightarrow X = U^\perp$

Dem: $\boxed{U^\perp \supseteq X}$ (din ip)

Fie $v \in U^\perp \leq E \Rightarrow v = \underset{\in U}{u} + \underset{\in X}{x} \Rightarrow u = v - x \in U^\perp$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} u \in U^\perp \\ u \in U \end{matrix}\right| \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \boxed{U^\perp \leq X} \Rightarrow U^\perp = X$.

! A - matricea de trecere de la B_2 la B_1 (scriu vectorii din B_1 în funcție de B_2) $\Rightarrow [v]_{B_2} = A[v]_{B_1}$ $\Rightarrow A_{B_1 B_2} = A$

<u>Obs</u>: Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază ortonormală E
$\mathcal{B}' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ altă bază. Fie $A = (a_{ij})$ mat. de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$ ($e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$) $\Rightarrow$ baza $\mathcal{B}'$ e <u>ortonormală</u> $\Leftrightarrow$ $\boxed{{}^tA \cdot A = I_n}$

<u>Notație</u>: $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = I_n\}$ s.n. mț. matricilor ortogonale $n \times n$.

<u>Prop $O(n)$</u>:

1) $A \in O(n) \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} = {}^tA \Rightarrow A^{-1} \in O(n) \Rightarrow \det A = \pm 1$.

2) $A, B \in O(n) \Rightarrow AB \in O(n)$

3) $(O(n), \cdot)$ gr. în raport cu înmulțirea uzuală a mat.

<u>Def</u>: Fie $(E_1, \langle -,- \rangle_1)$ și $(E_2, \langle -,- \rangle_2)$ 2 sp. euclid. O apl. lin. $f: E_1 \to E_2$ s.n. ortogonală dc $\boxed{\langle f(x), f(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1}$

<u>Def</u>: O apl. lin. ortogonală $f: E \to E$ s.n. transformare ortogonală

<u>Obs</u>: Dc $f: E_1 \to E_2$ o apl. ortog $\Rightarrow \|f(x)\|_2 = \|x\|_1$
(o apl. ortog. păstrează normele (l_g) vectorilor). În plus, dc $x, y \in E \setminus \{0\} \Rightarrow \cos(\widehat{x, y}) = \frac{\langle x, y \rangle_1}{\|x\|_1 \cdot \|y\|_1} = \frac{\langle f(x), f(y) \rangle_2}{\|f(x)\|_2 \cdot \|f(y)\|_2} = \cos(\widehat{f(x) f(y)})$

Obs: f apl. lin. ortog $\Rightarrow f$ inj.

Dem: Fie $x \in E_1$, $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\|f(x)\|_2}_{=\|x\|_1} = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$

Obs: Reciproc, o apl. lin. $f: E_1 \to E_2$ care păstrează lungimile vectorilor + $\measuredangle$ dintre vectorii nenuli este o apl. lin. ortogonală.

Prop:

1) Fie $\begin{cases} f: E_1 \to E_2 \\ g: E_2 \to E_1 \end{cases}$ apl. lin. ortog $\Rightarrow g \circ f$ e apl. lin. ortog.

2) $f: E_1 \to E_2$ apl. lin. ortog. bij $\Rightarrow f^{-1}$ apl. lin. ortog.

Fie E sp. vect. euclid. n-dim și $f: E \to E$ transf. ortog $\Rightarrow f$ bij $\Rightarrow O(E, \langle \cdot,\cdot \rangle) = \{f: E \to E$ transf. ortog$\}$ e grup în raport cu comp. funcțiilor.

Prop: Fie E sp. euclid n-dim. $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow O(E, \langle \cdot,\cdot \rangle) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{izo de gr.}}}{\simeq} O(n)$

Dem: Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază ortonormală E. Dc. $f \in O(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ $\Rightarrow \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ bază ortonormală $\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(f)$ ortogonală

Iau $\varphi: O(E, \langle \cdot,\cdot \rangle) \to O(n)$, $\varphi(f) = M_{\mathcal{B}}(f)$ izo de gr.

$\underline{\varphi \text{ surj}}$: $A \in O(n)$ și $\mathcal{B}$ ortonormală. Fie $\{e_1', \dots, e_n'\}$ a.î.

$e_i' = \sum_{p=1}^{n} a_{pi} e_p \Rightarrow {}^tA \cdot A = I_n \Rightarrow \{e_1', \dots, e_n'\}$ bază ortonormală

Forme biliniare pătratice

Fie V un sp. vect peste $k\ (\subseteq \mathbb{C})$, $\dim_k V = n$

Def: O formă biliniară $g: V\times V \to k$ s.n.:

1) simetrică dc. $g(x,y) = g(y,x)\ \forall (x,y) \in V\times V$

2) antisimetrică dc. $g(x,y) = -g(y,x)$

Ex: 1) simetrică: $V = \mathbb{R}^n$, $g: V\times V \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sum_{1}^{n} x_i y_i$

Def: $\begin{cases} \text{Fie } \mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \text{ bază } V \\ g: V\times V \to k \text{ formă biliniară} \end{cases}$. Atunci $g_{ij} = g(e_i, e_j)$

$\Rightarrow G = (g_{ij}) \in M_n(k)$ s.n. matricea lui g în baza $\mathcal{B}$.

Dc. $x, y \in V$, $X = [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = [y]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{g(x,y)} = g\left(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j\, g(e_i, e_j) = \boxed{{}^tXGY}$$

Obs:

1) g simetrică $\Leftrightarrow$ G sim.

2) g antisim $\Leftrightarrow$ G antisim

Prop: Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ și $\mathcal{B}' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ baze pt. V și A matr. de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$ ($A = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$). Dc. G, G' sunt matr. formei bilin. $g: V\times V \to k$ în bazele $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ $\Rightarrow$ $\boxed{G' = {}^tAGA}$

Obs: Cu not. din prop. avem $\boxed{\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} G'}$ (A inversabilă) => $\operatorname{rk} G$ nu dep. de baza aleasă => putem def. rangul formei lin. g ca fiind $\operatorname{rk} G$, unde G e matr. lui g într-o bază oarecare.

Def: Fie $g: V \times V \to k$ formă bilin. sim. Def. nucleul lui g ca fiind $\operatorname{Ker} g = \{y \in V \mid g(x,y) = 0 \ \forall x \in V\}$. Atunci g s.n. nedegenerată dc. $\operatorname{ker} g = \{0_V\} \Leftrightarrow g(x,y) = 0 \Rightarrow y = 0$.

Prop.: Fie $g: V \times V \to k$ formă bilin. sim. și G matr. într-o bază oarecare. Atunci g nedeg. $\Leftrightarrow$ G inversabilă

Dem: $g(x,y) = {}^t X G Y$

„$\Rightarrow$" Fie $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ a.î. $GY = 0 \Rightarrow \underbrace{{}^t X G Y}_{g(x,y)} = 0 \ \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$.

$\Rightarrow Y = 0 \Rightarrow G$ inversabilă.

„$\Leftarrow$" G inv. Fie $y \in V$ a.î. $g(x,y) = 0 \ \forall x \in V$

$\Leftrightarrow {}^t X G Y = 0 \Rightarrow GY = 0 \Rightarrow Y = 0$.

Def: O formă pătratică în V este o funcție $q: V \to k$ pt. care $\exists$ o formă bilin. sim $g: V \times V \to k$ a.î. $\boxed{q(x) = g(x,x)}$

$q(x+y) = g(x+y, x+y) = g(x,x) + 2g(x,y) + g(y,y)$.

Obs: $g(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) \Rightarrow g$ s.n. forma polară și e unic det. de q

! Dc. g are matr $G = (g_{ij})$ într-o bază $\mathcal{B}$ $\Rightarrow g(x) = \sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j$

$g(x) = {}^t X G X \Rightarrow G$ s.n. matr. lui g în baza $\mathcal{B}$.

<u>Def.</u>: O formă pătratică $g : V \to k$ se spune că este redusă la forma canonică în baza $\mathcal{B}$ dc. matr. G a lui g în bază $\mathcal{B}$ este <u>diagonală</u> $\Leftrightarrow g(x) = \sum_1^n a_i x_i^2$

<u>Obs</u>: Dc. într-o bază $\mathcal{B}$ g e redusă la forma canonică $\Rightarrow$ nr. de a_i nenule $= rk(g)$

<u>Th Gauss</u>: Fie $g : V \to k$ formă pătratică $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ bază V în care g e redusă la forma canonică.

! În cazul $\boxed{k = \mathbb{R}}$ g s.n. formă pătratică reală, iar rez. lui Gauss poate fi îmbunătățit.

<u>Teoremă</u>: Fie $g : V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală nenulă. Atunci $\exists$ o bază $\mathcal{B}$ a lui V în care $g(x) = \sum_1^p x_i^2 - \sum_{p+1}^r x_j^2$ unde $r = rk\, g$ și $p \in \{0, 1, \ldots, r\}$.

<u>Dem</u>: Gauss $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ în care $g(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2$ unde $r = rk\, g$. După o renumerotare a elem. lui $\mathcal{B}$ pot pp. că primii p sunt ⊕ și urm. sunt ⊖.

Facem schimb. de coord $\begin{cases} x_i = \sqrt{a_i}\, x_i \,;\ i = \overline{1,p} \\ x_j = \sqrt{-a_j}\, x_j \,;\ j = \overline{p+1, r} \end{cases}$

$\Rightarrow g(x) = \sum_{1}^{p} x_i^2 - \sum_{p+1}^{n} x_j^2$

<u>Teoremă</u> (<u>Legea de inerție a lui Sylvester</u>). Nr. p (nr. de term poz) dintr-o formă pătratică reală nu dep. de baza aleasă.

<u>Obs</u>: Dc. g e formă pătratică reală $\Rightarrow$ nr. de term negativi $(n-p)$ s.n. indexul lui g, iar dif $\underset{\oplus}{p} - \underset{\ominus}{(n-p)}$ s.n. signatura lui g.

Curs 14 - Alg. lin. - 19.01.2024

Dem Th. Gauss:

$\boxed{1}$ $G = 0 \Rightarrow g_{ij} = 0 \ \forall \ i,j \Rightarrow g = 0$

$\boxed{2}$ $G \neq 0 \ (\Leftrightarrow g \neq 0) \Rightarrow \exists \ i,j$ cu $g_{ij} \neq 0$.

Dem prin inducție după $n = \dim_K V$.

$\boxed{n=1} \Rightarrow g(x) = g_{11} x_1^2$ e red. la forma canonică

$\mathcal{B}$ bază a.î. G e matr. lui g în rap. cu $\mathcal{B}$.

$\boxed{n-1 \Rightarrow n}$ Caz I: Pp. $\exists \ i$ a.î. $g_{ii} \neq 0$. După o renumerotare a elem. bazei pot. pp. că $g_{11} \neq 0$.

$$g(x) = g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1n} x_1 x_n + \underbrace{g'(x)}$$

formă pătratică în $x_2, \dots, x_n$.

$$g(x) = \frac{1}{g_{11}} \left(g_{11} x_1^2 + 2 g_{11} g_{12} x_1 x_2 + \dots \right) + g'(x).$$

$$g(x) = \frac{1}{g_{11}} \left[g_{11} x_1 + (g_{12} x_2 + \dots + g_{1n} x_n) \right]^2 \underbrace{- \frac{1}{g_{11}} (g_{12} x_2 + \dots + g_{1n} x_n)^2 + g'(x)}$$

Facem schimb. de coord:
$$\begin{cases} y_1 = g_{11} x_1 + \dots + g_{1n} x_n \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n. \end{cases}$$

$g''(x)$ formă pătratică în $x_2, \dots x_n$.

Considerăm o bază $\mathcal{B}'$ în care X are coord $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = [x]_{\mathcal{B}'}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{unde } A = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$ mat. de trecere de la $\mathcal{B}'$ la $\mathcal{B}$.

$\overset{\shortparallel}{[x]_{\mathcal{B}'}}$ $\quad \overset{\shortparallel}{[x]_{\mathcal{B}}}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = g_{11} e_1' \\ e_2 = g_{12} e_1' + g_{22} e_2' \\ \vdots \\ e_n = g_{1n} e_1' + \dots + g_{nn} e_n' \end{cases} \Rightarrow \text{se calculează } A^{-1} \Rightarrow \underline{\text{baza}}.$$

Deci în $\mathcal{B}' = \{e_1', \dots e_n'\} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{g_{11}} y_1^2 + g_q''(x)$

formă pătratică

în $y_2, \dots, y_n$

Fie $U = \langle e_2', \dots, e_n' \rangle$ și $Q : U \to K$ restricția $Q = g''/_U$

este o formă pătratică pe $U \overset{\text{ip.}}{\underset{\text{inductie}}{\Rightarrow}} \exists$ o bază $\mathcal{B}_0'' = \{e_2'', \dots e_n''\}$

a lui U în care Q e red. la forma canonică. Atunci

$\mathcal{B}'' = \{e_1'\} \cup \mathcal{B}_0''$ e o bază a lui V în care Q e red. la forma canonică.

Caz II : $g_{ii} = 0 \ \forall i = \overline{1,n}$. Cum $G \neq 0 \Rightarrow \exists i \neq j$ cu $g_{ij} \neq 0$.

Pot pp. că $g_{12} \neq 0$ $\quad g(x) = 2 g_{12} x_1 x_2 + \dots$ $\leftarrow$ nu apare niciun x_i^2

Facem schimb. de coord $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$

$\Rightarrow g(x) = 2g_{12}(x_1+x_2)(x_1-x_2) + \ldots$

$= 2g_{12}x_1^2 + \ldots$ nu apare x_1^2

$\Rightarrow$ continuare caz I

Teoremă (Legea de inerție Sylvester): Fie g o formă pătratică reală ($k = \mathbb{R}$). Nr. de term. poz. dintr-o formă normală a lui g este un invariant. (nu dep. de baza în care e scrisă forma normală).

Dem: P.p. R.A $\exists$ 2 baze $\begin{cases} \mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \\ \mathcal{B}' = \{e_1', \ldots, e_n'\} \end{cases}$ a.î forma normală

a lui g în raport cu $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ are } p \text{ term. } (+) \\ \mathcal{B}' \text{ are } p' < p \text{ term } (+). \end{cases}$

Fie $U = \langle e_1, \ldots e_p, e_{r+1}, \ldots e_n \rangle$

$U' = \langle e'_{p'+1}, \ldots, e'_r \rangle$.

Atunci $\begin{cases} g(x) \geq 0 \ \forall x \in U \setminus \{0\} \\ g(x) < 0 \ \forall x \in U' \setminus \{0\} \end{cases} \Rightarrow U \cap U' = \{0\}$

$\Rightarrow \dim U = p + n - r \qquad U + U' \leq V.$

$\dim U' = r - p'$

$\underbrace{\dim(U+U')}_{\leq n} + \dim(U \cap U') = \dim U + \dim U' = \underbrace{n + p - p'}_{> n}.$

$\Rightarrow \dim(U \cap U') \geq 1$ (F).

<u>Th Jacobi</u>: Fie $g: V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică reală, unde $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ și $G = (g_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ matr. lui g într-o bază.

Pt. fiecare $i = \overline{1,n}$ fie Δ_i minorul obț. la n primele i linii și i col din G. Dc. $\Delta_i \neq 0 \ \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} x_3^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2}$$

<u>Ex</u>: $g(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 3 \\ \Delta_2 = 8 \\ \Delta_3 = -16 \end{cases} \quad \exists \mathcal{B} \text{ a.î. } \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3} x_1^2 + \frac{3}{8} x_2^2 - \frac{1}{2} x_3^2$$

<u>Def</u>: 1) O formă pătratică $g: V \to \mathbb{R}$ este pozitiv def. dc $g(x) > 0$ $\forall x \in V \setminus \{0\}$

2) O formă bilin. sim. $g: V \times V \to \mathbb{R}$ este poz. def. dc. $g(x,x) > 0 \ \forall x \in V \setminus \{0\}$

<u>Obs</u>: O formă pătratică e poz. def $\Leftrightarrow$ polara ei e poz. def.

<u>Teoremă</u>: Fie g o formă pătratică reală și $G \in M_n(\mathbb{R})$ matr. ei într-o bază. Atunci g e poz. def $\Leftrightarrow$ toți minorii principali $\Delta_1 \dots \Delta_n$ (din th Jacobi) $\underline{> 0}$.

<u>Dem</u>: $\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ $\Delta_1, \dots, \Delta_n > 0 \xRightarrow{\text{Jacobi}} g(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2 > 0$ $\forall x \in V \setminus \{0\}$.

Afirm: $\Delta_1, \dots \Delta_n \neq 0 \overset{\text{Jacobi}}{\Rightarrow} g(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2$

iau $\begin{cases} x = (1, 0, 0, \dots, 0) \Rightarrow \Delta_1 > 0 \\ x = (0, 1, \dots, 0) \Rightarrow \Delta_2 > 0 \\ \vdots \\ x = (0, \dots, 0, 1) \Rightarrow \Delta_n > 0. \end{cases}$

Dem Afirm: Pp. R. A $\exists\, i$ a.î. $\Delta_i = 0 = \begin{vmatrix} g_{11} & \dots & g_{i1} \\ \vdots & & \\ g_{1i} & \dots & g_{ii} \end{vmatrix} \Rightarrow$ vectorii

linie sunt lin dep $\Rightarrow \exists\, \alpha_j$ a.î. $\sum_j \alpha_j \begin{pmatrix} g_{j1} \\ g_{ji} \end{pmatrix} = 0$.

$\Rightarrow \alpha_1 g_{1j} + \dots + \alpha_i g_{ij} = 0 \ \forall j = \overline{1,i}$. Notez $g(x, y)$ polara lui

$g \Rightarrow 0 = \alpha_1 g_{1j} + \dots + \alpha_i g_{ij} = \sum_{1}^{i} \alpha_k g(e_k, e_j) =$

$= g(\underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_i e_i}_{x}, e_j) = g(x, e_j) = 0 \ \forall j = \overline{1,i}$

$g(x) = g(x, x) = g(x, \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_i e_i) = \alpha_1 g(x, e_1) + \dots + \alpha_i (x, e_i)$

$= 0 \Rightarrow x = 0$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_i e_i = 0 \\ \{e_1, \dots, e_i\} \text{ lin dep} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_i = 0.$