Seminar 1.

Topologia uzuală pe $\mathbb{R}$. $\Delta \subset \mathbb{R}$ e deschisă dacă $\forall x \in \Delta, \exists \varepsilon > 0$ $(\varepsilon = \varepsilon(x))$ a.î. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \Delta$.

$\mathbb{Q}$ deschisă? Nu!
închisă? Nu!

$X = \{1, 2, 12\} \cup [10, 11]$ deschisă? Nu!
închisă? Da!

$\{1, 2, 12\}$ ↙ închisă; $[10, 11]$ ↙ închisă

$\mathbb{R} \setminus X = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 10) \cup (11, 12) \cup (12, +\infty)$

deschise

deschisă? Da!

- dacă aveam $(10, 11]$ atunci mulțimea nu era nici deschisă, nici închisă

1. Exemplu: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f continuă pe $\mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ $f(F)$ deschis?

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 17,3$ $\forall x$

$F = \mathbb{R} \to$ deschis $f(\mathbb{R}) = \{17,3\}$ închis, nu e deschis

$f(x) = x^2$ $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ nu e deschisă, închisă

- Interiorul oricărui poligon e deschis!
- Un cerc cu jumătate de frontieră tot nu e deschis!

Seminar 2

Fie X o mulțime. S.n. metrică pe X o funcție $d: X \times X \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1) "Inegalitatea triunghiului": $\forall x, y, z \in X$
$$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$$
2) "Simetrie": $\forall x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$
3) "Pozitiv definire": $d(x,y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$ și $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

1. $X = \{ f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ continuă (pe } [0,1]) \}$
$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$
Arătați că d este o metrică pe X.

• simetria: $d(f,g) = d(g,f)$
$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^1 |g(x) - f(x)| = d(g,f)$$

• inegalitatea triunghiului: fie $f, g, h \in X$
$$d(f,g) + d(g,h) \geq d(f,h)$$
$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)|\, dx = \int_0^1 (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|)\, dx \geq \int_0^1 |f(x) - h(x)|\, dx = d(f,h)$$
$$|a-b| + |b-c| \geq |a-c|$$

• pozitiv definirea: $d(f,g) \geq 0 \ \forall f, g \in X$ și
$$d(f,g)\ 0 \Leftrightarrow f = g$$
Arătaim că, dacă $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in [0,1]$
$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = 0 \Rightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$$

$f(x) = g(x) \ \forall \ x \in [0,1]$

$\varphi(x) = |f(x) - g(x)|$ φ continuă

$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0 ?$ $\varphi(x) = 0 \ \forall x$

Pp că $\exists \ x_0 \in [0,1]$ a.î. $\varphi(x_0) \neq 0$

dar $\varphi(x) \geq 0, \ \forall x \in [0,1]$ $\Rightarrow \varphi(x_0) > 0$

$\Rightarrow \exists \ \varepsilon > 0$ a.î. în $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ a.î. $\varphi(t) >$

$\forall \ t \in I$

$$\underbrace{\int_0^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{x_0-\varepsilon}^{1} f(x)\,dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x)\,dx}_{\geq 0} =$$

$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ – Teorema de medie

2. Fie X mulțime. Definim $d: X \times X \to \mathbb{R}$

$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq y \\ 0, & \text{dacă } x = y \end{cases}$ Este metrică pe X?

• simetria: $d(x,y) = d(y,x)$

$x \neq y: \begin{cases} d(x,y) = 1 \\ d(y,x) = 1 \end{cases}$ $x = y: \begin{cases} d(x,y) = 0 \\ d(y,x) = 0 \end{cases}$

• inegalitatea triunghiului: $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

$d(x,z) = 1, \ x \neq z$

Dacă $d(x,y) = 1$ gata!

Dacă $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

Dacă $d(y,z) > 0$ gata!

Dacă $d(y,z) = 0 \Rightarrow y = z$

$\Rightarrow x = z$ / $\not\!\!\!\propto$

deci nu este metrică

Seminar 3

Două metrici d_1, d_2 s.m. echivalente dacă $\exists\, m>0, M>0$ a.î. $\forall\, x,y$ $m\, d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le M d_1(x,y)$.

$\boxed{\text{Pe } \mathbb{R}^2}$

$$\begin{cases} d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_2-x_1|+|y_2-y_1| \\ d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|y_2-y_1|, |x_2-x_1|\} \end{cases}$$

1. $\exists\, m, M$, $m>0$, $M>0$ a.î.

$$m(\underbrace{|x_2-x_1|}_{a} + \underbrace{|y_2-y_1|}_{b}) \le \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \le M(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|)$$

$a, b \ge 0$

$$m(a+b) \le \sqrt{a^2+b^2} \le M(a+b) \quad \forall\, a,b$$

$M = 1$

$\sqrt{a^2+b^2} \le a+b \;/^2$

$\cancel{a^2}+\cancel{b^2} \le \cancel{a^2}+\cancel{b^2}+2ab$

$0 \le 2ab$ (A)

deoarece $a, b \ge 0$

$m = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}(a+b) \le \sqrt{a^2+b^2} \;/^2$

$\frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab) \le a^2+b^2 \;/\cdot 4$

$a^2+b^2+2ab \le 4a^2+4b^2$

$3a^2+3b^2-2ab \ge 0$

$\underbrace{(a-b)^2}_{\ge 0} + \underbrace{2(a^2+b^2)}_{\ge 0} \ge 0$ (A)

2. $\exists\, m, M,\ m>0,\ M>0$ a.î.

$m(\underbrace{|x_2-x_1|}_{a}+\underbrace{|y_2-y_1|}_{b}) \leq \max\{|y_2-y_1|, |x_2-x_1|\} \leq$

$M(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|)$ $\quad a, b \geq 0 \quad$ Pp $a > b$

$m(a+b) \leq \max\{a, b\} \leq M(a+b)$

$\left[\begin{array}{l} M=1 \\ b \leq a+b \\ 0 \leq a\ (A) \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \\ \frac{a+b}{2} \leq b \,/\cdot 2 \\ a+b \leq 2b \\ b-a \geq 0 \\ \text{cum } a<b \end{array}\right. \Rightarrow a \leq b\ (A)$

Seminar 4

Conex = nu se poate scrie ca reuniunea a doi deschiși nevizi disjuncți

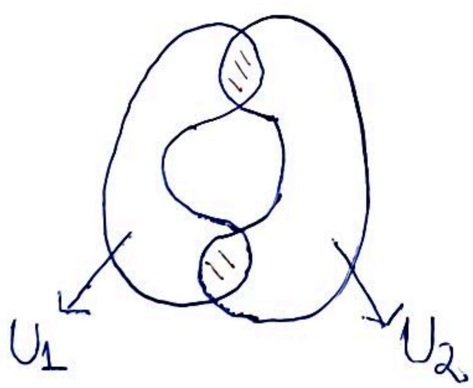
- $f: X \to Y$, U conex $\Rightarrow f(U)$ conex
- conex prin arce $\Rightarrow$ conex
- orice interval $\Rightarrow$ conex
- $I \subset \mathbb{R}$ interval, f continuă $\Rightarrow f(I)$ interval

1. Cercul $\{(x,y) / x^2+y^2=1\}$ este conex? Da!
(deoarece este conex prin arce)

2. Semicercul $\{(x,y) / x^2+y^2=1, y \leq 0\}$ este conex?
Da! (deoarece $[\pi, 2\pi]$ e conex)

3. $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=1\}$ (sfera) e conexă? Da!

4. X spațiu topologic. $U_1, U_2 \subset X$ conexe. Atunci $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ conexă? Nu!



$\underbrace{U_1 \cap U_2 \neq \emptyset}_{\text{nu e conexă}}$

Seminar 5

X spațiu topologic. Definim "$\sim$" pe X $p \sim q \Leftrightarrow$ există drum ($\gamma : [0,1] \to X$ continuă) $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$

$\forall p$, $p \sim p$ $\gamma(t) = p$, $\forall t \in [0,1] \to$ Reflexivitate

Simetria: $p \sim q \Rightarrow q \sim p$

Tranzitivitatea: $p \sim q$, $q \sim r \Rightarrow p \sim r$

Terminologie: O clasă de echivalență s.n. componentă conexă prin arce.

3456

- 5 nu e homeomorf cu nimeni
- 3 și 4 sunt homeomorfe
- 3 și 6 nu sunt homeomorfe
- 4 și 6 nu sunt homeomorfe

$\mathbb{N}$ și $\mathbb{Q}$ nu sunt homeomorfe!

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ cu topologia indusă sunt spații discrete

Orice bijecție (funcție) între spații topologice cu topologia discretă e continuă.

$\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$ nu sunt izometrice!

$B(0,1) = \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} (a_n) \le 1 \}$ compactă?

discretă $\Rightarrow$ nu e compactă

Seminar 6

1. Compacte pe $\mathbb{R}$ cu topologia indusă de cea uzuală: a) $(0,1]$ b) $[0,1)$ c) $[0,1]$ d) $[0,+\infty)$ e) $(0,+\infty)$

2. X, Y spații topologice separate Hausdorff
$f: X \to Y$ funcție continuă și bijectivă. Arătați că dacă X e compact atunci f e homeomorfism.

Dem: Arătăm că f^{-1} e funcție continuă
Arăt că $\forall\, D \subset X$ deschis, $D' = (f^{-1})^{-1}(D) = f(D) \subset Y$ e deschis

$\Leftrightarrow f$ duce închise în închise

Dar, $\left.\begin{array}{l}\forall\, F \subset X \text{ închis} \\ X \text{ compact}\end{array}\right\} \Rightarrow F$ compact

$\Rightarrow f(F)$ compact (în Y), dar $f(F)$ compact
$\Rightarrow f(F)$ închis

3. $X = [0,1]$ „$\sim$" relație de echivalență $0 \sim 1$
$X/\sim \; \simeq S^1$ (homeomorf)

Dem: $f: X/\sim \; \to S^1$
$X/\sim$ compact? $X/\sim \; = \{[x] \mid x \in [0,1]\}$

$$[x] = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ \{0,1\}, & x \in \{0,1\} \end{cases}$$

$P: X \to X/\sim$ proiecția canonică $p(x) = [x]$

continuă, surjectivă $\Rightarrow$ $\underset{p(X)}{\overset{}{X/\sim}}$ compact

ca mulțime, $X/\sim$ e în bijecție naturală cu $[0,1]$

$f: X/\sim \to S^1$ $\quad f(\hat{x}) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$

f e corect definită pt. că $f(\hat{0}) = f(\hat{1})$

$(\cos(2\pi 0), \sin(2\pi 0)) = (\cos(2\pi), \sin(2\pi))$

$\Leftrightarrow (1,0) = (1,0)$

$\left.\begin{array}{l} f\text{-continuă} \\ f\text{-bijectivă} \\ X/\sim\text{-compact} \end{array}\right\} \Rightarrow f\text{-homeomorfism}$

/

Seminar 11

1. În $\mathbb{R}^2$ (cu structura euclidiană canonică) considerăm $A=(0,0)$, $B=(1,5)$, $C=(3,3)$. Determinați:

a) centrul de greutate G al ΔABC

b) centrul cercului circumscris ΔABC

c) ortocentrul

a) $G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$

$\Rightarrow G = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right)$ $\quad$ AD - mediană $\Rightarrow D = (2,4)$

$d_{AD}: \frac{x - 0^{\to x_A}}{2_{\to x_{AD}}} = \frac{y - 0^{\to y_A}}{4_{\to y_{AD}}} \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$

CE - mediană

$\Rightarrow E = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$ $\quad$ $\overrightarrow{CE} = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right)$

$d_{CE}: \frac{x - 3^{\to x_C}}{\frac{5}{2}_{\to x_{CE}}} = \frac{y - 3^{\to y_C}}{\frac{1}{2}_{\to y_{CE}}} \Rightarrow (x-3) \cdot \frac{1}{2} = (y-3) \cdot \frac{5}{2}$

$x = 5y - 12$

$\begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ x = 5y - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 5y - 12 \mid \cdot 2$

$y = 10y - 24 \Rightarrow y = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow G = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right)$ $\begin{cases} AD \text{ și } CE \text{ mediane} \\ G \to \text{intersecția medianelor} \end{cases}$

b) O- centrul cercului circumscris ΔABC

cum CE mediana lui ABC, deci E mij AB

$\Rightarrow$ mediatoarea lui AB trece prin E

$med_{AB}: \dfrac{x-\overbrace{\tfrac{1}{2}}^{x_E}}{\underbrace{-5}_{-y_{AB}}} = \dfrac{y-\overbrace{\tfrac{5}{2}}^{y_E}}{\underbrace{1}_{x_{AB}}}$ $\quad AB = (1, 5)$

$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = -5y + \frac{25}{2} \; | \cdot 2$

$2x - 1 = -10y + 25$

$x = \frac{-10y + 26}{2} = -5y + 13$

cum AD mediana lui ABC, deci D mij BC

$\Rightarrow$ mediatoarea lui BC trece prin D

$med_{BC}: \dfrac{x-\overbrace{2}^{x_D}}{1} = \dfrac{y-\overbrace{4}^{y_D}}{1}$ $\quad BC = (2, -2)$

$\Rightarrow x = y - 2$

$\begin{cases} x = -5y + 13 \\ x = y - 2 \end{cases} \Rightarrow$ $y - 2 = -5y + 13$

$6y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{5}{2} - 2 = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow O = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

c) H- ortocentrul

$h_A: \dfrac{x-\overbrace{0}^{x_A}}{\underbrace{v_1}_{-y_{BC}}} = \dfrac{y-\overbrace{0}^{y_A}}{\underbrace{v_2}_{+x_{BC}}} \Leftrightarrow \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{1} \Leftrightarrow x = y$

$h_C: \dfrac{x-\overbrace{3}^{x_C}}{\underbrace{v_1}_{-y_{AB}}} = \dfrac{y-\overbrace{3}^{y_C}}{\underbrace{v_2}_{+AB}} \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{-5} = \dfrac{y-3}{1} \Leftrightarrow x = -5y + 18$

$$\begin{cases} x = y \\ x = -5y + 18 \end{cases} \Leftrightarrow y = -5y + 18 \Rightarrow y = 3$$
$$\Rightarrow x = y = 3$$

$\Rightarrow H = (3,3)$ intersectia înălțimilor

$h_A \to$ înălțimea din A pe BC

$h_C \to$ înălțimea din C pe AB

2. Fie (în $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică) punctele: $A = (-1, 0, 1)$, $B = (0, 2, -2)$, $C = (2, -3, 1)$, $\Delta = (2, 3, 5)$. Determinați centrul sferei circumscrise lui $ABC\Delta$.

$O \to$ centrul sferei $\Leftrightarrow |OA| = |OB| = |OC| = |O\Delta|$

$O = (x, y, z)$

$|OA| = \sqrt{(-1-x)^2 + y^2 + (1-z)^2}$ $\quad |OB| = \sqrt{x^2 + (2-y)^2 + (-2-z)^2}$

$|OC| = \sqrt{(2-x)^2 + (-3-y)^2 + (1-z)^2}$ $\quad |O\Delta| = \sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2 + (5-z)^2}$

$\sqrt{(-1-x)^2 + y^2 + (1-z)^2} = \sqrt{x^2 + (2-y^2) + (2+z)^2} \; /^2$

$$\begin{cases} (-1-x)^2 + y^2 + (1-z)^2 = x^2 + (2-y^2) + (2+z)^2 \\ x^2 + (2-y)^2 + (2+z)^2 = (2-x)^2 + (-3-y)^2 + (1-z)^2 \\ (2-x)^2 + (-3-y)^2 + (1-z)^2 = (2-x)^2 + (3-y)^2 + (5-z)^2 \end{cases}$$

determin $x, y, z \Rightarrow O = \ldots$

Seminar 12

1. Fie $A=(-1,0,1)$, $B=(0,2,-2)$, $C=(2,3,1)$, $D=(2,3,5)$

a) Ec înălțimii tetraedrului din D, respectiv B și determinați $\{H\}$ = punctul de intersecție al acesteia.

$$h_D: \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-5}{1} \quad \text{(ecuația h din } D\text{)}$$

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-x_A & x_B-x_A & x_C-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A & y_C-y_A \\ z-z_A & z_B-z_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y & 2 & -3 \\ z-1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-9x-\cancel{9}-9y-9z+\cancel{9}=0 \Leftrightarrow$$

$$-9(x+y+z)=0 \Leftrightarrow x+y+z=0$$

$(\pi): mx+ny+pz+q=0 \quad N_\pi=(m,n,p)$

$N_\pi \perp (\operatorname{dir}(\pi)) = \{(x,y,z) / mx+ny+pz=0\}$

$\Rightarrow N_{(ABC)}=(1,1,1)$

$$h_B: \frac{x-0}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-3} \quad \text{(ecuația h din } B\text{)}$$

$$(ACD): \begin{vmatrix} x-x_A & x_C-x_A & x_D-x_A \\ y-y_A & y_C-y_A & y_D-y_A \\ z-z_A & z_C-z_A & z_D-z_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 3 \\ y & -3 & 3 \\ z-1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$-12x-12y+18z-30=0 \mid :(6) \Leftrightarrow$

$2x+2y-3z-5=0 \Rightarrow N_{(ACD)}=(2,2,-3)$

$h.D = \begin{cases} x-2=s \\ y-3=s \\ z-5=s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=s+2 \\ y=s+3 \\ z=s+5 \end{cases}$

$(h_D \cap h_B):\ \frac{s+2}{2} = \frac{s+1}{2} = \frac{s+7}{-3}.$

$s+2=s+1 \Leftrightarrow 2=1$ abs

Ortocentrul unei piramide e posibil să nu existe!

b) centrul de greutate al lui ABCD

Fie G_D centrul de greutate al ΔABC

G_B centrul de greutate al ΔACD

+ det ec. DG_D și BG_B și decideți dacă

$DG_D \cap BG_B \neq \emptyset$

$G_D = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ $DG_D:\ \frac{x-2}{-5} = \frac{y-3}{-10} = \frac{z-5}{-15}$

$\overrightarrow{DG_D} = \left(\frac{1}{3}-2, -\frac{1}{3}-3, -5\right)$

vector din dir$(\overrightarrow{DG_D}) = (-5,-10,-15) = (1,2,3)$

$G_B = \left(1, 0, \frac{7}{3}\right)$ $BG_B:\ \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+2}{13}$

$\overrightarrow{BG_B} = \left(1,-2,\frac{13}{3}\right) \sim (3,-6,13)$

$\begin{cases} x=3t \\ y=-6t+2 \\ z=13t-2 \end{cases}$ $3t-2 = \frac{-6t-1}{2}$ $3t-2=\frac{13t-7}{2}$

$t=\frac{1}{4}$ $t=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow P\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{5}{4}\right)$

c) Determinați măsura unghiului diedru dintre planele ABC și CDA.

$(ABC): x+y+z=0$

$(CDA): 2x+2y-3z+5=0$

$$\cos(\widehat{(ABC),(CDA)}) = \cos(N(ABC), N(CDA)) = \frac{\langle N(ABC), N(CDA)\rangle}{\|N(ABC)\| \cdot \|N(CDA)\|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}}$$

$\|N(ABC)\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

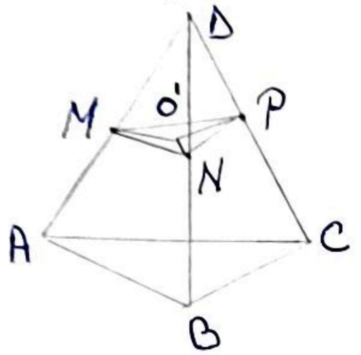
$\|N(CDA)\| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$

$\langle N(ABC), N(CDA)\rangle = 2+2-3 = 4-3 = 1$

Seminar 13

1. În $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică fie $A=(-1,0,1)$, $B=(0,2,-2)$, $C=(2,-3,1)$, $\Delta=(2,3,5)$, M - mijlocul segmentului $A\Delta$. Determinați:

- ecuația planului π a.î. $M\in\pi$, $\pi \parallel (ABC)$
- fie $\{N\}=\pi\cap \Delta B$, $\{P\}=\pi\cap\Delta C$, centrul cercului circumscris ΔMNP.



Planul ABC este de ec $x+y+z=0$ (am calculat în seminarul 12)

M mij. $A\Delta \Rightarrow x_M=\frac{1}{2}$, $y_M=\frac{3}{2}$, $z_M=3$ $\Rightarrow M=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},3\right)$

$(\pi): x+y+z+c=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{3}{2}+3+c=0 \Rightarrow c=-5$

$\Rightarrow (\pi): x+y+z-5=0$ (ec planului $\pi \parallel ABC$)

N mij $B\Delta \Rightarrow x_N=1$, $y_N=\frac{5}{2}$, $z_N=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow N=\left(1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$

P mij $C\Delta \Rightarrow x_P=2$, $y_P=0$, $z_P=3$

$\Rightarrow P=(2,0,3)$

Fie O' centrul cercului circumscris ΔMNP

$O'=(a,b,c)$ $\quad O'M=O'N=O'P$

$$\begin{cases} \sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+(c-3)^2}=\sqrt{(a-1)^2+\left(b-\frac{5}{2}\right)^2+\left(c-\frac{3}{2}\right)^2} \\ \sqrt{(a-1)^2+\left(b-\frac{5}{2}\right)^2+\left(c-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{(a-2)^2+b^2+(c-3)^2} \\ a+b+c-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{a^2} - 1a + \frac{1}{4} + \cancel{b^2} - 3b + \cancel{\frac{9}{4}} + \cancel{c^2} - 6c + 9 = \cancel{a^2} - 2a + 1 + \cancel{b^2} - 5b + \frac{25}{4} + \cancel{c^2} - 3c + \cancel{\frac{9}{4}} \\ \cancel{a^2} - 2a + 1 + \cancel{b^2} - 5b + \frac{25}{4} + \cancel{c^2} - 3c + \frac{9}{4} = \cancel{a^2} - 4a + 4 + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} - 6c + 9 \\ a+b+c-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b - 6c + 5b + 3c = 1 + \frac{25}{4} - \frac{1}{4} - 9 \\ -2a - 5b - 3c + 4a + 6c = 13 - 1 - \frac{25}{4} - \frac{9}{4} \\ a+b+c-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b-3c=-2 \\ 2a-5b+3c=\frac{7}{2} \\ a+b+c=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b-3c=-2 \\ 2a-5b+3c=7/2 \end{cases} \quad \text{"+"}$$

$$3a-3b = \frac{3}{2} \quad |:3$$

$$a-b=\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{1}{2}+b$$

$$b+2b-3c=-\frac{5}{2}$$

$$3b-3c=-\frac{5}{2} \quad |:3$$

$$b-c=-\frac{5}{6} \Rightarrow c=\frac{5}{6}+b$$

$$\Rightarrow b+b+b = 5-\frac{1}{2}-\frac{5}{6}$$

$$3b=\frac{30-3-5}{6}$$

$$3b=\frac{22}{6}$$

$$3b=\frac{11}{3} \quad |:3$$

$$\boxed{b=\frac{11}{9}}$$

$$a=\frac{1}{2}+\frac{11}{9}$$

$$\boxed{a=\frac{31}{18}}$$

$$c=\frac{5}{6}+\frac{11}{9}$$

$$\boxed{c=\frac{37}{18}}$$

$$\frac{31}{18}+\frac{22}{18}+\frac{37}{18}=$$

$$=\frac{90}{18}=5 \quad (A)$$

$$\Rightarrow O'=\left(\frac{31}{18}, \frac{11}{9}, \frac{37}{18}\right)$$

Seminar 14

1. $x^2+4xy-3y^2-6x+5=0$

$(x+2y)^2-7y^2-6x+5=0$

$\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=y \end{cases}$

$(x')^2-7(y')^2-6x'-12y'+5=0$

$(x'-3)^2-7\left((y')^2-\frac{12}{7}y'\right)-4=0$

$(x'-3)^2-7\left(y'-\frac{6}{7}\right)^2-\frac{36}{7}-4=0$

$\begin{cases} x''=x'-3 \\ y''=y'-\frac{6}{7} \end{cases}$

$(x'')^2-7(y'')^2+\frac{8}{7}=0 \;/\cdot\frac{7}{8}$

$\underbrace{\left(\sqrt{\frac{7}{8}}(x'')\right)^2}-\underbrace{\left(\frac{7}{\sqrt{8}}(y'')\right)^2}+1=0$

$(x''')^2-(y''')^2+1=0$ hiperbolă

2. $x^2+4xy+3y^2-6x+5=0$

$(x+2y)^2-y^2-6x+5=0$

$\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=y \end{cases}$

$(x')^2-(y')^2-6x'+12y'+5=0$

$\underbrace{(x'-3)^2}-\underbrace{(y'-6)^2}+32=0$

$(x'')^2-(y'')^2+32=0 \;/:32$

$\underbrace{\left(\frac{x''}{\sqrt{32}}\right)^2}-\underbrace{\left(\frac{y''}{\sqrt{32}}\right)^2}+1=0$

$(x''')^2-(y''')^2+1=0$ hiperbolă

3. $x^2+4xy+4y^2-6x+5=0$

$(x+2y)^2-6x+5=0$

$$\begin{cases} x' = x+2y \\ y' = y \end{cases}$$

$(x')^2-6x'+12y'+5=0$

$(x'-3)^2+12y'-4=0$

$(x'-3)^2+2(6y'-2)=0$

$(x'')^2+2y''=0$ Parabolă

1. Pe $\mathbb{R}^3$ considerăm $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$$

a) Arătați că g este un produs scalar

b) Calculați norma vectorilor $v = (1, 0, -1)$ și $u = (1, 1, 1)$ în raport cu g precum și unghiul dintre ei.

a) g este produs scarar:

• este biliniară (deoarece este liniară în toate argumentele)

• este simetrică (evident)

• este pozitiv definită:

$$g((x),(x)) \geq 0 \text{ și } g((x),(x)) = 0 \iff (x) = 0$$

$$g((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$$

$$2x_1x_2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 = \underbrace{(x_1 + 2x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{3x_3^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$\forall\ x_1, x_2, x_3$

$$\Rightarrow (x_1 + 2x_2)^2 + 3x_3^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \\ \text{sau} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ g este pozitiv definită

b) $$\|v\| = \sqrt{g(v,v)} = \sqrt{1+0+3+0+0} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|u\| = \sqrt{g(u,u)} = \sqrt{1+4+3+1+1} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos(\widehat{v,u}) = \frac{\langle v,u\rangle}{\|v\| \cdot \|u\|} = \frac{g(v,u)}{\|v\|\,\|u\|} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$\Rightarrow m(\widehat{v,u}) = \frac{\pi}{2}\ (90^\circ)$$

$$g(v,u) = 1+0-3+2+0 = 0$$

c) G-S $\{e_1, e_2, e_3\} \to$ ortonormată

$$e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} \cdot f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, -1)$$

$$g_2 = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$$

$$= (1, 2, 3) - 1 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1)$$

$$= (1, 2, 3) + (1, 0, -1) = (2, 2, 2)$$

$$e_2 = \frac{1}{\|g_2\|} \cdot g_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (2, 2, 2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

$$g_3 = f_3 - \langle f_3, e_1 \rangle e_1 - \langle f_3, e_2 \rangle e_2$$

$$= (0, 0, -1) - \frac{1}{2} (1, 0, -1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

$$= (0, 0, -1) - \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, +\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} (-1, 2, 1)$$

$$e_3 = \frac{1}{\|g_3\|} \cdot g_3 = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{6} (-1, 2, 1) = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, 2, 1)$$

$$\|g_3\| = \sqrt{\frac{1}{36}(1 + 4 + 1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, 2, 1)\right\}$$

Seminar 9 & 10

1. În $\mathbb{R}^3$ cu produsul scalar canonic, fie vectorii $f_1=(1,0,-1)$, $f_2=(1,2,3)$, $f_3=(0,0,-1)$

a) Calculați $\|f_1\|$ și $\|f_2\|$ precum și mărimea unghiului $\widehat{f_2, f_3}$ și $\widehat{f_1, f_3}$

b) Determinați un vector v a.î. $v \neq 0$, $v \perp f_1$, $v \perp f_2$

c) Aplicați G-S sistemului $\{f_1, f_2, f_3\}$

- produs scalar: $\langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \rangle = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$
- măsura $\measuredangle$: $\cos(m(\widehat{v_1, v_2})) = \dfrac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$
- $\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} \rightarrow$ norma

a) $\|f_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1\rangle} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$

$\|f_2\| = \sqrt{\langle f_2, f_2\rangle} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\|f_3\| = \sqrt{\langle f_3, f_3\rangle} = \sqrt{0+0+1} = 1$

$$\cos(m(\widehat{f_2, f_3})) = \frac{\langle f_2, f_3\rangle}{\|f_2\| \cdot \|f_3\|} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

$$\cos(m(\widehat{f_1, f_3})) = \frac{\langle f_1, f_3\rangle}{\|f_1\| \cdot \|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $v \perp f_1 \Leftrightarrow \langle v, f_1\rangle = 0 \Big\} \Leftrightarrow a-c=0 \Rightarrow a=c$

Fie $v=(a,b,c)$

$v \perp f_2 \Leftrightarrow \langle v, f_2\rangle = 0 \Rightarrow a+2b+3c=0$

$\Rightarrow$

$4a+2b=0 \Rightarrow b=-2a$

$\Rightarrow v=(a,-2a,a)$

De exemplu: $(2,-4,2)$

$a \perp b \Leftrightarrow \langle a, b\rangle = 0$

Seminar 7

1. $[0,1]/\sim$ $0\sim 1$ compact, separat Hausdorff

X separat Hausdorff $\Leftrightarrow \forall x, y \subset X$, $x \neq y$
$\exists D_1, D_2 \subset X$ deschiși a.î. $x \in D_1$, $y \in D_2$ și
$D_1 \cap D_2 = \emptyset$

deci arăt că $\forall [x], [y]$ cu $[x] \neq [y]$
există doi deschiși în $[0,1]/\sim$ care îi separă

cazul 1: $x \in (0,1)$, $y \in (0,1)$
$\exists D_1 \subset [0,1)$, $D_2 \subset [0,1)$
deschiși din $[0,1]$ a.î. $x \in D_1$, $y \in D_2$,
$D_1 \cap D_2 \subset \emptyset$

Avem că $p : (0,1) \to X \setminus \{[0]\}$
e bijectivă și continuă

$\Rightarrow p(D_1), p(D_2) \subset X$ deschiși, disjuncți

$p: [0,1] \to X = [0,1]/\sim$

$D_1 = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ $\varepsilon > 0$
$D_2 = [0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$
cu ε a.î. $\begin{cases} \varepsilon > y-\varepsilon \\ y+\varepsilon < 1-\varepsilon \end{cases}$

$\Rightarrow x \in (y+\varepsilon, y+\varepsilon)$
$x \in [0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$

$p(D_1) \cap p(D_2) = \emptyset$
$p(D_1) = \{[x] / x \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)\}$
$p(D_2) = \{[x] / x \in [0,\varepsilon) \cap \}$
Dacă $[x] \in p(D_1) \cap p(D_2)$
sau $x = 0, 1$

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ nu e separat Hausdorff!