

X

Tutoriat 6

Explicație rezolvare exerciții specifice examen:

$$1) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Studiați continuitatea lui f

b) Determinați $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

c) Studiați diferențiabilitatea lui f .

Sol:

a) f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (operații cu funcții elementare)

Studiem continuitatea lui f în $(0, 0)$.

Fie $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y|$$

$$\leq 1 \cdot |y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 1 \cdot 0 = 0$$

↓ de ce?

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0) \Rightarrow f \text{ cont. în } (0, 0)$$

1.6
 h) Fie $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ } aici rezolvăm derivatele parțiale pentru 'punctele neproblematic' adică unde funcția este bine definită

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)' = \frac{(xy)'_x \sqrt{x^2+y^2} - xy (\sqrt{x^2+y^2})'_x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \\ &= \frac{y \sqrt{x^2+y^2} - xy \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)}{(x^2+y^2)} = \frac{y \sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \\ &= \frac{x^2 y + y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2) \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2) \sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

(Ade este nu e neapărat nevoie)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)' = \frac{(xy)'_y \sqrt{x^2+y^2} - xy (\sqrt{x^2+y^2})'_y}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \\ &= \frac{x \sqrt{x^2+y^2} - xy \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)}{(x^2+y^2)} = \frac{x \sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \\ &= \frac{x(x^2+y^2) - xy^2}{\sqrt{x^2+y^2} (x^2+y^2)} = \frac{x^3 + xy^2 - xy^2}{\sqrt{x^2+y^2} (x^2+y^2)} = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2} (x^2+y^2)} \end{aligned}$$

Acum verificăm dacă derivata există în punctul 'problematic', cel de discontinuitate, folosind definiția formală a derivatei parțiale, cea cu limita

$e_1 = (1, 0)$ și $e_2 = (0, 1)$ sunt vectorii bazei canonice din \mathbb{R}^2
 ↳ folosiți pentru deplasarea pe Ox pt e_1 și Oy pt e_2

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} ; a = \text{punctul în care testăm derivabilitatea}$$

\rightarrow variabile

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + te_1) - f(0, 0)}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + (t,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{\sqrt{t^2 + 0^2}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + t \cdot e_2) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + (0,t)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot t}{\sqrt{0^2 + t^2}} - 0}{t} = 0$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ sunt pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \text{op. m. fct. elementare} \\ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \text{deschisă} \end{array} \right\} f \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Dei dacă derivatele parțiale ^{sunt} sunt continue pe o mulțime deschisă, atunci ~~se~~ funcția este diferențiabilă pe acea mulțime // Criteriul de diferențiabilitate

Studiem diferențiabilitatea lui f în $(0,0)$

Dacă f ar fi diferențiabil în $(0,0)$:

$$df(0,0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(0,0)(u,v) =$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_0 & \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \text{6. } df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad df(a)(u) = \\
 & = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

• f diferentiabilă în pt $a (=) \dots (=)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = \underbrace{0_{\mathbb{R}^k}}_{\text{adică o}} = (0, \dots, 0)$$

pt $T = df(a)_{(u)}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - df(x-a)}{\|x-a\|}$$

$$\| \dots \| = \text{norma}; \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y) - (0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

// Acum trebuie testată continuitatea, deci limita pentru orice punct trebuie să fie $= 0$.

! Nu prea avem ce majorări să facem, deci intrăm să ne a continuăm.

! Pentru a ne alege punctele luăm în considerare diferența de puteri de la numitor: x și y cu aceeași putere, deci luăm $x = y$.

! $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$, deci trebuie să alegem punctele astfel încât limita pentru fiecare să fie 0.

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Deci $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \neq 0$.

Pierd un mare, f nu este diferentiabilă în $(0, 0)$. \square

! Dacă reușim să demonstrăm la început, la a , se fît nu e cont în $(0, 0)$, atunci putem spune direct că f nu e diferentiabilă în $(0, 0) \rightarrow$ PUTIN PROBABIL!!!

$$2) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 y^5}{x^{10} + y^{10}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) cont.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$

c) diferentiabilitate

Sol:

a) Veri Tutoriat 4, Ex 2, b)

16//
b) Fie $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \left(\frac{x^6 y^5}{x^{10} + y^{10}} \right)'_x = \frac{(x^6 y^5)'_x (x^{10} + y^{10}) - (x^6 y^5)(x^{10} + y^{10})'_x}{(x^{10} + y^{10})^2} \\ &= \frac{6x^5 y^5 (x^{10} + y^{10}) - (x^6 y^5) \cdot 10x^9}{(x^{10} + y^{10})^2} = \frac{6x^{15} y^5 + 6x^5 y^{10} - 10x^{15} y^5}{(x^{10} + y^{10})^2} \\ &= \frac{6x^5 y^{10} - 4x^{15} y^5}{(x^{10} + y^{10})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \left(\frac{x^6 y^5}{x^{10} + y^{10}} \right)'_y = \frac{5x^6 y^4 (x^{10} + y^{10}) - (x^6 y^5) \cdot 10y^9}{(x^{10} + y^{10})^2} \\ &= \frac{5x^{16} y^4 + 5x^6 y^{14} - 10y^{14} x^6}{(x^{10} + y^{10})^2} = \frac{5x^{16} y^4 - 5x^6 y^{14}}{(x^{10} + y^{10})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t e_1) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^6 \cdot 0}{t^{10} + 0} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t \cdot e_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot t^5}{0 + t^{10}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \end{aligned}$$

c) $\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ sunt pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} f \text{ diferentiale} \\ \text{pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \end{array}$
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
↳ op. m. fct. elementare

Studiem diferenciabilitatea în $(0, 0)$:

$$df(0, 0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(0, 0)(u, v) =$$

$$t \left[\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right)}_0 \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right)}_0 \right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y) - (0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^6 y^5}{x^{10} + y^{10}} - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 y^5}{(x^{10} + y^{10}) \sqrt{x^2 + y^2}}$$

alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

avem $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^6 y_n^5}{(x_n^{10} + y_n^{10}) \sqrt{x_n^2 + y_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^6} \cdot \frac{1}{n^5}}{\left(\frac{1}{n^{10}} + \frac{1}{n^{10}}\right) \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{11}}}{\frac{2}{n^{10}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{11}}}{\frac{2\sqrt{2}}{n^{11}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

Pier urmare, f nu este diferentiabilă în $(0, 0)$. \square