Curs 5

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm sp metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$ unde

$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Obs: Dacă $n=1$, atunci $d_2(x,y) = |x-y|$

Def: Metrica d_2 se numește dist euclidiană a lui $\mathbb{R}^n$

Notație: Atunci când nu este pericol de confuzie notăm $d \overset{not}{=} d_2$

Def: Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Spunem că A este mărg dacă $\exists$ $a_1, \dots a_n$, $b_1 \dots b_n \in \mathbb{R}$ a.î.

$$A \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$a_i \leq b_i \;\; \forall i = \overline{1,n}$ ↳ dreptunghi

Prop: Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Mult. A este mărg ddacă

$(\exists)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists r > 0$ a.î. $A \subset B(x,r)$

↓ **Teoremă (Heine-Borel)**

pt bac. doar ÎN sp. metric $(\mathbb{R}^n, d)$ o mult $K \subset \mathbb{R}^n$ e compactă ddacă este închisă și mărg.

nu se cere bile

Exc: Studiați dacă mulțimile K de mai jos sunt compacte în sp. metric $(\mathbb{R}, d)$

a) $K = \mathbb{N}$

Sol: K nu e mărg $\Rightarrow$ K nu e compactă

b) $K = (0;1)$

Sol

$\bar{K} = [0,1] \neq K \Rightarrow K$ nu e închisă

$\Rightarrow K$ nu e compactă

c) $K = [0;1] \cup \{2\}$

Sol

$K \subset [-1;3] \Rightarrow K$ mărg

$\bar{K} = [0;1] \cup \{2\} = K \Rightarrow K$ închisă

Deci, K compactă ☐

Limite de funcții

Def: Fie (X, τ_1), (Y, τ_2) sp. topologice.

$\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A'$, $l \in Y$.

$f: A \to Y$

Spunem că f are limita l în pct a și scriem

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ dacă, $\forall W \in \mathcal{V}_l$ $\exists V \in \mathcal{V}_a$

a.î. $\forall x \in V \cap A$, $x \neq a$ avem $f(x) \in W$

Obs: În general, limita unei fct într-un pct nu este unică. Există sp. Hausdorff care nu e o topol. provenită din metrică.

Obs: Dacă sp. topologic (Y, τ_2) e separat (sau Hausdorff), atunci $l \in Y$ din def. precedentă e unic determinată

Prop. Fie (X, d_1), (Y, d_2) spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A'$, $\ell \in Y$ și $f: A \to Y$

Sunt echivalente:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

2. $\forall (x_n)_n \subset A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d_1}{=} a$ avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} \ell$

pt $a = \pm\infty$ sau $\ell = \pm\infty$

Obs: Pe $\overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se introduce dist $\overline{d} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $\overline{d}(x,y) = |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)|$ unde $\overline{\varphi}$ este fct bijectivă definită pe $\overline{\mathbb{R}}$ cu valori în $[-1, 1]$ prin

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} -1, & x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = \cancel{8}\infty \end{cases}$$

Perechea $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ este spaț metric (deci perechea $(\overline{\mathbb{R}}, \tau_{\overline{d}})$ e sp top. separat)

$(a, +\infty]$, $[-\infty, a) \to$ deschise în $\overline{\mathbb{R}}$

Prop Fie (X, τ) un sp. topologic, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A'$, $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ și $f, g: A \to \overline{\mathbb{R}}$ a.î. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ și $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2$.

Atunci

1) $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = l_1 + l_2$

2) $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$

3) $\lim_{x\to a} |f|(x) = \lim_{x\to a} |f(x)| = |l_1|$

$(\quad |\pm\infty| = +\infty)$

4) $\lim_{x\to a} (-f)(x) = \lim_{x\to a} (-f(x)) = -l_1$

5) $l_1 = +\infty,\ l_2 > -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$

6) $l_1 = -\infty$ şi $l_2 < \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = -\infty$

7) $l_1 = +\infty$ şi $l_2 > 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = +\infty$

8) $l_1 = +\infty$ şi $l_2 < 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = -\infty$

9) $\exists\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $V \subset A$ şi $f(x) \neq 0\ \forall x \in V$

şi $l_1 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{l_1}$

10) $\exists\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $V \subset A$ şi $f(x) \neq 0\ \forall x \in V$

şi $l_1 \in \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$

Limite remarcabile

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

5) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Scanned with CamScanner

7) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, unde $a\in(0,\infty)$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r-1}{x} = r$, unde $r\in\mathbb{R}$

Funcții continue

Def: Fie (X,τ_1), (Y,τ_2) sp. topologice, $a\in X$ și $f: X\to Y$. Spunem că f este continuă în a dacă $\forall W\in \mathcal{V}_{f(a)}$ avem $f^{-1}(W)\in \mathcal{V}_a$. preimag. vecin. se duce în vecin. lui $\mathcal{V}_{f(a)}$

Def: În contextul def. precedente spunem că f este continuă (pe X) dacă f e cont în orice $x\in X$.

Obs: Fie (X,τ) sp. topol $\emptyset\neq A\subset X$ și $\tau_A = \{D\cap A \mid D\in\tau\}$. Perechea (A,τ_A) e sp. topol

Def: Topologia τ_A din obs precedentă s.n. topolog indusă de A

Prop: Fie (X,τ_1), (Y,τ_2) sp. topol, $\emptyset\neq A\subset X$, $a\in A$ și $f: A\to Y$

Sunt echivalente:

1) f cont în a

2) $\forall W\in\mathcal{V}_{f(a)}\ \exists V\in\mathcal{V}_a$ a.î. $f(V\cap A)\subset W$

Ex: Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) sp. top. Fie $y_0 \in Y$

1. Fct identit. $1_X : X \to X$ este cont

2. Fct const $f : X \to Y$, $f(x) = y_0$ este cont

Prop Fie (X, τ_1), (Y, τ_2), (Z, τ_3) sp. topol, $a \in X$, $f : X \to Y$ cont în a și $g : Y \to Z$ cont în $f(a)$.

Atunci $g \circ f : X \to Z$ e cont în a

Prop: Fie (X, τ_1) un sp. topol, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$, (Y, τ_2) un sp. topol. și $f : X \to Y$.

1) Dacă f e cont în a, atunci $f|_A : A \to Y$ e cont în a

restr. lui f la A

2) Dacă $A \in V_a$ și $f|_A : A \to Y$ e cont în a, atunci $f : X \to Y$ e cont în a

Dacă restr. pe o vecinătate e cont în a, atunci f e cont în a

Obs

1) Fie (X, τ) un sp topol, $a \in X$ și $f : X \to \mathbb{R}$. Atunci f cont în a ddacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V_\varepsilon \in V_a$ aî $\forall x \in V_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

2) Fie (X, d_1), (Y, d_2) sp metrice, $a \in X$ și $f : X \to Y$. Atunci f e cont în a ddacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ aî $\forall x \in X$ cu propriet că $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon$ avem $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$. (i.e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ aî $\forall x \in X$ cu prop că $x \in B(a, \delta_\varepsilon)$ |

avem $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$)

3) Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ şi $f: A \to \mathbb{R}$

Atunci f cont în a ddacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ aî $\forall x \in A$ cu prop că $|x - a| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

4) Fie $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbb{R}}$ aî $+\infty \in A$ şi $f: A \to \mathbb{R}$

Atunci f cont în $+\infty$ ddacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ aî $\forall x \in A$ cu prop că $x > \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(+\infty)| < \varepsilon$.

5) Fie $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbb{R}}$ aî $+\infty \in A$ şi $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ aî $f(+\infty) = +\infty$. Atunci f cont în $+\infty$ ddacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ aî $\forall x \in A$ cu prop că $x > \delta_\varepsilon$ avem avem $f(x) \underset{<}{>} \varepsilon$

(pt $f(+\infty) = -\infty$)

Prop Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ sp metrice, $a \in X$ şi $f: X \to Y$. Sunt echivalente:

1) f cont în a

2) $\forall (x_n)_n \subset X$ aî $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d_1}{=} a$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} f(a)$

Prop Fie $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ sp. topol, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A \cap A'$ şi $f: A \to Y$. Sunt echivalente:

1) f cont în a

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Scanned with CamScanner

12

Prop: Fie (X, τ_1), (Y, τ_2) sp. topol. și $f: X \to Y$. Sunt echival

1) f continuă $D \in \tau_2$

2) $\forall D \subset Y$, D deschisă avem $f^{-1}(D) \subset X$ e deschisă înt deschi în deschi $f^{-1}(D) \in \tau_2$

3) $\forall F \subset Y$, F închisă avem $f^{-1}(F) \subset X$ e închisă înt închise în închise

4) $\forall B \subset Y$ avem $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$

5) $\forall A \subset X$ avem $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

13

Prop Fie (X, τ) un sp topol, $a \in X$, și $f, g: X \to \mathbb{R}$ 2 fct continue în a. Atunci $f+g$, $f \cdot g$ și $|f|$ sunt cont în a.

Dacă, în plus, $\exists V \in \mathcal{V}_a$ aî $f(x) \neq 0$ $\forall x \in V$ $\frac{1}{f}: V \to \mathbb{R}$ e cont în a.

14

Prop: Fie (X, τ_1) un sp topol, $\emptyset \neq K \subset X$ o mulțime compactă ~~și fie~~, (Y, τ_2) un sp topol și $f: X \to Y$ o fct cont. Atunci $f(K)$ e mulțime compactă

Duce compacte în compacte

15

Teoremă Fie (X, τ) un sp. topologic $\emptyset \neq K \subset X$ o mulț. compactă și $f: K \to \mathbb{R}$ cont. Atunci $\exists$ $x_*, x^* \in K$ aî

$f(x_*) = \min\{ f(x) \mid x \in K \}$

$f(x^*) = \max\{ f(x) \mid x \in K \}$

(!) Orice fct definită pe o compactă e mărginită și își atinge marginile

Funcții uniform continue

$a, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{\varepsilon, a} > 0$

$$d_1(x,a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Vrem un δ_ε care să nu depindă de a

Def Fie (X, d_1), (Y, d_2) sp. metrice și $f: X \to Y$. Spunem că f e uniform cont (u.c) dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x, a \in X$ cu prop că $d_1(x,a) < \delta_\varepsilon$ avem $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Prop: Orice fct u.c este fct continuă

Obs Reciproca prop precedente e falsă

Prop: Fie (X, d_1), (Y, d_2) sp metrice a.î. X compactă (ne referim la topologia τ_{d_1}) și $f: X \to Y$ o fct continuă, atunci f e u.c

Dacă f e def pe compactă și cont $\Rightarrow$ f u.c

Def: Fie (X, d) un sp. metric și $(x_n)_n \subset X$. Spunem că $(x_n)_n$ e șir Cauchy în rap cu metrica d dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, $m \geq n_\varepsilon$ avem

$d(x_m, x_n) < \varepsilon$

Obs: Sintag. în rap cu metrica d" poate fi înlocuită "cu sintagma" în sp. metric (X,d)"

Prop: Fie (X,d_1), (Y,d_2) sp metrice, $(x_n)_n \subset X$ un şir Cauchy în rap cu metrica d_1 şi $f: X \to Y$ o fct u.c. Atunci:

$f((x_n)_n) \subset Y$ e şir Cauchy în rap. cu metrica d_2

O fct unif cont duce un şir Cauchy într-un şir Cauchy

Prop: Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ şi $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ (resp $f: [a,b) \to \mathbb{R}$, resp $f:(a,b) \to \mathbb{R}$)

Sunt echiv:

1) f u.c

2) $\exists\ \tilde{f}: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}$ cont a.î. $\tilde{f}$ prelung lui f

$\tilde{f}|_{(a,b]} = f$ (resp $\tilde{f}|_{[a,b)} = f$, resp $\tilde{f}|_{(a,b)} = f$)

Prop Fie (X,d_1), (Y,d_2) sp metrice şi $f: X \to Y$. Sunt echiv:

1) f u.c

2) $\forall (x_n)_n \subset X$, $\forall (y_n)_n \subset X$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$ avem

Scanned with CamScanner

$\lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) = 0$

Prop: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ şi $f: A \to \mathbb{R}$
Sunt echiv:

1) f u.c
2) $\forall (x_n)_n \subset A$, $\forall (y_n)_n \subset A$ a.î.

$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ avem $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$

Prop: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat (i.e $I \neq \emptyset$ şi I nu se reduce la un sg elem) şi $f: I \to \mathbb{R}$ o fct derivabilă cu derivata mărginită. Atunci f e u.c.

Prop Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ şi $f: A \to \mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) f u.c (pe A)
2) $\exists a \in A$ a.î. f e u.c pe $A \cap (-\infty; a)$ (i.e $f|_{A\cap(-\infty;a)}$ e u.c) şi f e u.c pe $A \cap [a, \infty)$ (i.e. $f|_{[a;\infty)}$ e u.c)

Scanned with CamScanner