Seminar 12

1. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=x^3+y$ şi $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $g(x,y)=y$. Arătaţi că $(0,0)$ este pct staţionar a lui f cu leg $g(x,y)=0$, dar nu e pct de extrem local al lui f cu leg. $g(x,y)=0$

Sol $\mathbb{R}^2$ deschisă

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\cancel{0}1$$

Obs că f,g sunt de clasă C^1

Fie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$

$=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}$

$$\text{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\ \ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)=\text{rang}(0\ \ 1)=1$$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\supset A\ni(0,0)$

Fie $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

$L(x,y)=x^3+y+\lambda y$

1

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda$$

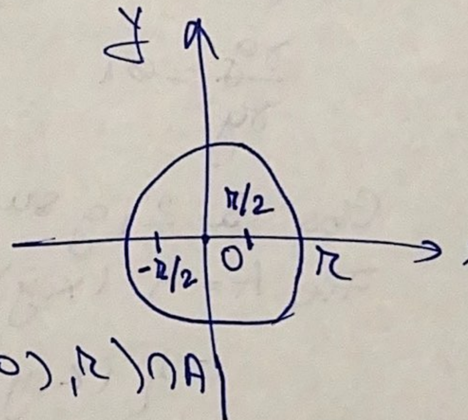
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \\ y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Singurul pct staționar al lui f cu leg $g(x,y)=0$ este $(0,0)$

Fie $(x,y) \in A$. Avem $y = 0$

$f(x,y) = f(x,0) = x^3$

$f(0,0) = 0$



$\forall r > 0$ avem $\left(\frac{r}{2}, 0\right) \in B((0,0), r) \cap A$

și $\left(-\frac{r}{2}, 0\right) \in B((0,0), r) \cap A$

$\forall r > 0$ avem $f\left(\frac{r}{2}; 0\right) = \frac{r^3}{8} > 0 = f(0,0)$ și

$f\left(-\frac{r}{2}; 0\right) = -\frac{r^3}{8} < 0 = f(0,0)$

Deci, $(0,0)$ nu este pct de extrem local al lui $f|_A$ (i.e $(0,0)$ nu este pct de extrem local al lui f cu leg $g(x,y) = 0$) $\square$

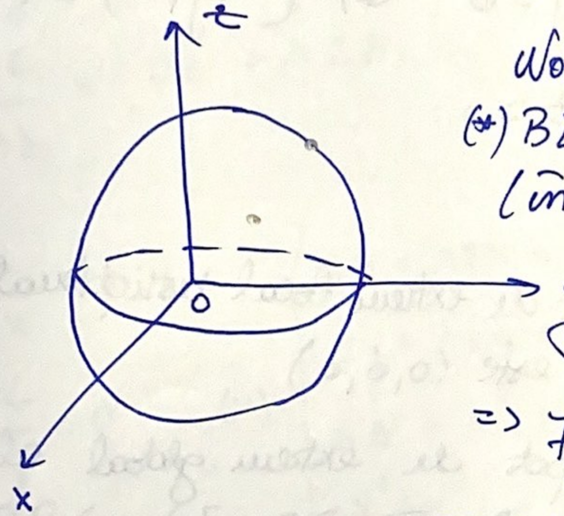
2. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$

Det pct de extrem global și valorile extreme ale lui $f|B[(0,0,0),1]$, unde $B[(0,0,0),1]$

$= \overline{B}((0,0,0),1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

Sol



Notăm $(0,0,0) \overset{not}{=} 0$

(*) $B[0,1]$ ~~este~~ compactă (închisă și mărginită)

(**) f continuă

$\Rightarrow f|_{B[0,1]}$ mărg și își atinge marginile pe $B[0,1]$

$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}}$ = Calculăm când pe interior

- Căutăm posib. pct de extrem ale lui $f|B[0,1]$ situate în $B(0,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$

Notăm $h = f|B(0;1)$

$B(0,1)$ deschisă

h continuă

$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x$ $\quad$ $\frac{\partial h}{\partial z} = 6z$

$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}$ continue pe $B(0,1)$

$B(0;1)$ deschisă $\Bigg| \Rightarrow h$ diferențiabilă

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 2y = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

Singurul posibil pct de extrem local restricționat la bila deschisă $B(0;1)$ este $(0,0,0)$

• Căutăm posib. pct de extrem global ale lui $f|B[0,1]$ situate în $Fr(B[0,1]) = \partial B[0;1]$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$

$\mathbb{R}^3$ deschisă

Fie $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

și $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-1 = 0\}$
$= Fr(B[0,1])$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x$ $\quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ $\quad$ Obs că f, g sunt de clasă C^1

$\frac{\partial g}{\partial z} = 2z$ $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = 6z$

$\text{rang}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = 1 \ \forall\ (x,y,z) \in A$

Fie $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad L(x) = f(x) + \lambda g(x)$

$$\boxed{\begin{array}{c} \parallel \\ 2x^2+y^2+3z^2 \\ +\lambda(x^2+y^2+z^2) \end{array}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + \lambda 2x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda 2y$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 6z + \lambda 2z$$

$$2x(2+\lambda) = 0$$

$$2y(1+\lambda) = 0$$

$$2z(3+\lambda) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x + \lambda 2x = 0 \\ 2y + \lambda 2y = 0 \\ 6z + \lambda 2z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(2+\lambda) = 0 \\ y(1+\lambda) = 0 \\ z(3+\lambda) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right.$$

Avem soluţiile

$\lambda_1 = -2 \Rightarrow (x,y,z) \in \{(1,0,0)\ (-1,0,0)\}$

$\lambda_2 = -1 \Rightarrow (x,y,z) \in \{(0,1,0)\ (0,-1,0)\}$

$\lambda_3 = -3 \Rightarrow (x,y,z) \in \{(0,0,1)\ (0,0,-1)\}$

Singurele posibile pct de extrem local ale lui ~~f_B~~ h situate în $Fr\,(B[0;1])$ sunt:

$\{(-1,0,0)\ (1,0,0)\ (0,-1,0)\ (0,1,0)\ (0,0,-1)\ (0,0,1)$.

$f(0,0,0)=0$ $f(0,-1,0)=1$ $f(0,0,-1)=3$

$f(-1,0,0)=1$ $f(0,1,0)=1$

$f(1,0,0)=2$ $f(0,0,1)=3$

Pct de min. global ~~f~~ al lui h este $(0,0,0)$ și val min a lui f este $\underline{\underline{0}}$

Pct de max global ale lui h sunt $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ și val max a lui f este $\underline{\underline{3}}$

3. Fie $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ 2x+2y+z=1\}$ și $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $f(x,y,z)=x+y+z$. Det val. extreme ale lui $f|A$

$\underline{\underline{\text{Sol}}}$ $A\subset B[(0,0,0),1] \Rightarrow A$ mărg

Fie $g_1,g_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$

$g_2(x,y,z)=2x+2y+z-1$

$A=g_1^{-1}(\{0\})\cap g_2^{-1}(\{0\})$

$\left.\begin{array}{l}\{0\} \text{ închisă}\\ g_1,g_2 \text{ cont}\end{array}\right| \Rightarrow g_1^{-1}(\{0\})$ închisă și $g_2^{-1}(\{0\})$ închisă

Deci, A e închisă

Așadar, A e compactă

Continuați voi! □

4. Studiați posib. aplicării teoremei de permut. a limitei cu integrala pt limitele de mai jos și apoi calculați-le.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x \sin(nx)}{n^2+nx^2+x}\, dx$

Fie $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

f_n cont $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n$ int R, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

<u>Conv simplă</u>

Fie $x \in [0;1]$

$|f_n(x)| = \frac{x \cdot |\sin nx|}{n^2+nx^2+x} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Așadar $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f : [0;1] \to \mathbb{R}$
$f(x) = 0$

<u>Conv uniformă</u>

$\sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1]} \left| \frac{x \sin nx}{n^2+nx^2+x} \right|$

$= \sup\limits_{x\in[0;1]} \frac{x\,|\sin nx|}{n^2+nx^2+x} \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Așadar, putem aplica teorema de permut. a limitei cu integrala și avem că f e int R și

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x \sin nx}{n^2+nx^2+x}\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0$ $\square$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx$

Fie $f_n: [0;1] \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$

Conv simplă

Fixăm $x \in [0;1]$

Dacă $x \in \{0,1\}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Pres. că $x \in (0;1)$

Facem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{x}(1-x^2)^{\cancel{n+1}}}{n\cancel{x}\cancel{(1-x^2)^n}}$

$= 1-x^2 < 1$

Cf crit rap. pt şiruri cu termeni strict pozitivi, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} nx(1-x^2)^n = 0$

Deci, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f: [0;1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = 0$

Conv unif

$\sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1]} \{nx(1-x^2)^n\} \underset{x=\frac{1}{n}}{\geq} \cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Deoarece $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = e^0 = 1 \neq 0$

Rezultă că $f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Deci, nu putem aplica teorema de permutare a limitei cu integrala.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{n}{2}\right) \int_0^1 (1-x^2)'$$

$$(1-x^2)^n dx = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{n}{2}\right) \frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{n}{2}\left(0-\frac{1}{n+1}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx\right)$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$

Sol: Fie $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \ln(1+x^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

f_n cont $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ f_n integr R. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\ln(1+x) \leq x$

Conv. simplă

Fie $x \in [0;1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \ln(1+x^n) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1) \\ \ln 2, & x = 1 \end{cases}$$

Deci, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f : [0;1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1) \\ \ln 2, & x = 1 \end{cases}$$

Conv unif

$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ cont } \forall n \in \mathbb{N}^* \\ f \text{ nu e cont (în 1)} \end{array}\right| \Rightarrow f_n \overset{u}{\underset{n\to\infty}{\not\to}} f$

Deci, nu putem aplica teorema de permutare a limitei cu integrala

$$0 \le \ln(1+x^n) \le x^n, \ \forall x \in [0,1] \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$0 \le \int_0^1 \ln(1+x^n) \le \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$0$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)dx = 0 \left(= \int_0^1 f(x)\,dx\right)$

⑤ Def:

a) $$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{d\to\infty} \int_0^d \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{d\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^d = \lim_{d\to\infty} \operatorname{arctg} d - \operatorname{arctg} 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

b) $$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 e^x dx = \lim_{c\to-\infty} e^x \Big|_c^0$$

$$= \lim_{c\to-\infty} e^0 - e^c = 1 - 0 = 1$$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\substack{d\to 1\\ d<1}} \int_0^d \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\substack{d\to 1\\ d<1}} \arcsin x \Big|_0^d$

$= \lim_{\substack{d\to 1\\ d<1}} (\arcsin d - \arcsin 0) = \arcsin 1 - \arcsin 0$

$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \int_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx =$

$\ln x = t$

$\frac{1}{x}dx = dt$

$x = c \Rightarrow t = \ln c$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \ln\frac{1}{2}$

$= \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \int_{\ln c}^{\ln\frac{1}{2}} t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1}\Big|_{\ln c}^{\ln\frac{1}{2}}$

$\lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}}$

$= \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} -\frac{1}{t}\Big|_{\ln c}^{\ln\frac{1}{2}} = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \left(-\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} + \frac{1}{\ln c}\right)$

$= -\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} + 0 = \frac{-1}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln 2}$ $\square$

e) $\int_0^1 \frac{1}{x^5}\,dx = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \int_c^1 x^{-5}\,dx = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \left(-\frac{1}{4x^4}\Big|_c^1\right)$

$= \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4c^4}\right) = -\frac{1}{4} + \infty = +\infty$ $\square$