Seminarul 2 de Geometrie II

Seria 10 - 2023-2024

2 Spaţii afine. Combinaţii afine. Exerciţii

Exerciţiul 2.1: Fie K un corp comutativ şi sistemul de ecuaţii liniare $AX = b$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), b \in K^m$.

Dacă

$$\mathcal{A} = \{X \in K^n \mid AX = b\} \subset K^n$$
$$V = \{X \in K^n \mid AX = 0\} \subset K^n$$
$$\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V, \varphi(X, Y) = Y - X,$$

demonstraţi că $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ este un spaţiu afin.

Exerciţiul 2.2: Fie $\mathbb{A}^3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3_{/\mathbb{R}}, \varphi)$ spaţiul real tridimensional cu structura afină canonică. Demonstraţi că punctele A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă $\{A, B, C\}$ este o mulţime afin dependentă.

Exerciţiul 2.3: Fie $\mathbb{A}^2 = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2_{/\mathbb{R}}, \varphi)$ spaţiul real bidimensional cu structura afină canonică şi $A, B, C \in \mathbb{A}^2$. Demonstraţi că $\{A, B, C\}$ este sistem afin de generatori dacă şi numai dacă A, B, C nu sunt coliniare.

Exerciţiul 2.4: Fie $\mathbb{A}^4 = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4_{/\mathbb{R}}, \varphi)$. Verificaţi dacă:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{A}^4,$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{A}^4,$

sunt sisteme afin independente şi sisteme afine de generatori.

Exerciţiul 2.5: În $\mathbb{A}^2$, fie $A_1, ..., A_6$ vârfurile unui hexagon. Pentru orice $\Delta \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |\Delta| = 3$, fie

$$G_\Delta = \frac{1}{3}A_{i_1} + \frac{1}{3}A_{i_2} + \frac{1}{3}A_{i_3},\ \{i_1, i_2, i_3\} = \Delta,$$
$$G_{\Delta'} = \frac{1}{3}A_{j_1} + \frac{1}{3}A_{j_2} + \frac{1}{3}A_{j_3},\ \{j_1, j_2, j_3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \Delta.$$

Demonstraţi că toate $G_\Delta G_{\Delta'}$ sunt concurente.

Exerciţiul 2.6: Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ un spaţiu afin şi $M = \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \mathcal{A}$. Demonstraţi că $P \in \mathrm{Af}(M)$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Af}(M) = \mathrm{Af}(M \cup \{P\})$.

Exercițiul 2.7: Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ un spaţiu afin si $M \subset \mathcal{A}$. Demonstraţi că

$$\mathrm{Af}(\mathrm{Af}(M)) = \mathrm{Af}(M).$$

Exercițiul 2.8: Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ un spaţiu afin şi $M \subset \mathcal{A}$. Este adevărat că

$$\mathrm{Af}(M) = \{\alpha P + (1-\alpha)Q \mid P, Q \in M, \alpha \in K\}?$$

Exercițiul 2.9: Fie $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ un spaţiu afin, $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{A}$ şi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in K$ nu toate nule cu $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$.

a) Demonstraţi că funcţia

$$L : \mathcal{A} \to V,\ L(M) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

este constantă.

b) Demonstraţi că există $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ astfel încât $L \equiv 0$ dacă şi numai dacă $A_1, A_2, ..., A_k$ sunt afin dependente.

Exercițiul 2.10: (convexitate în spații afine reale) Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin real. O mulțime $M \subset \mathcal{A}$ se numește *convexă* dacă

$$\forall A, B \in M,\ tA + (1-t)B \in M,\ \forall t \in [0, 1].$$

a) Demonstrați că M este convexă $\iff$ $\forall k \geq 2,\ \forall P_1, ..., P_k \in M,\ \forall \alpha_1, ..., \alpha_k \in [0, 1]$ cu $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, avem $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i \in M$.

b) Demonstrați că o intersecție arbitrară de mulțimi convexe este convexă.

c) Pentru o submulțime $N \subset \mathcal{A}$, numim *acoperirea convexă* a lui N cea mai mică submulțime convexă ce conține N, notată $\mathrm{conv}(N)$. Demonstrați că

$$\mathrm{conv}(N) = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i \mid k \geq 2,\ P_1, ..., P_k \in N,\ \alpha_1, ..., \alpha_k \in [0, 1] \text{ cu } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}.$$

d) Fie $N \subset \mathcal{A}$ o submulțime finită, $|N| \geq 2$. Atunci există o partiție a lui N, $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, astfel încât $\mathrm{conv}(N_1) \cap \mathrm{conv}(N_2) = \emptyset$.

e) (Teorema lui Radon) Fie $N \subset \mathcal{A}$ o submulțime finită, $|N| = m$ și $\dim \mathcal{A} = n$. Presupunem $m \geq n+2$. Atunci există o partiție a lui N, $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, astfel încât $\mathrm{conv}(N_1) \cap \mathrm{conv}(N_2) \neq \emptyset$.

f) (Teorema lui Helly) Fie $M_1, ..., M_r$ submulţimi convexe ale lui $\mathbb{R}^n$ cu $r \geq n+1$. Dacă intersecţia a oricare $n+1$ dintre ele este nevidă, atunci intersecţia tuturor este nevidă.

Seminar 2 - Geometrie - 4.03.2025

Teorie:

1) Sp. afin $= (A, V/_{k}, \varphi)$ a.î $\begin{cases} \varphi : A \times A \to V \\ \varphi(x,y) + \varphi(y,z) = \varphi(x,z) \\ \exists O \in A \text{ a.î } \varphi_O(A) = \varphi(O, A) \text{ bij.} \end{cases}$

2) O nu e unic ($\forall O$ merge)

Exerciții:

Pb1: $\mathcal{A} = \{x \in k^n \mid AX = b\} \subset k^n$; $A \in M_{m \times n}(k)$

$V = \{x \in k^n \mid AX = 0\} \subset k^n$; $b \in k^m$

$\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$, $\varphi(x,y) = y - x$.

$(\mathcal{A}, V, \varphi)$ sp. afin

$A(Y-X) = AY - AX = b - b = 0 \Rightarrow \varphi$ e bine def.

$\varphi(x,y) + \varphi(y,z) = y - x + z - y = z - x = \varphi(x,z)$

$\varphi_O(A) = A - O \Rightarrow \psi_O(A) = A + O$ este inversa $\Rightarrow$ bij.

! $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ afin indep $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ sist. lin. indep.

Pb2: $\mathbb{A}^3 = \{\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}\}$

+

A-B-C col <=> {A, B, C} mt. afin dep.

#

{A, B, C} afin dep => unul dintre ele se scrie ca o comb. afină de ~~B și C~~ celelalte 2 (nu neapărat toate, de ex dc. $A \neq B = C$ => A nu se scrie ca o comb. afină de B și C).

{A, B, C} mt. afin. dep <=> $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ mt. lin. dep.

<=> $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ a.î. $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$ <=> A-B-C col.

Pb3 $\mathbb{A}^2 = \{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}}\}$

+

{A, B, C} sist. afin de gen. <=> A, B, C nu sunt col.

#

! ~~$\{P_0, P_1, \dots, P_m\} = M$~~ sist. afin de generatori dc. $M = Af(M)$

$\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sist. af. de gen <=> $\{\vec{P_0P_1}, \dots, \vec{P_0P_n}\}$ sist. lin de gen

dim V = m

=> M e sist. afin
- indep => $|M| \le m+1$
- de gen => $|M| \ge m+1$.

{A, B, C} sist. afin de gen <=> $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ sist. lin. de gen.

<=> A-B-C nu sunt col.

Pb4: a) $\left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} P_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} P_3 \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \subset A^4.$

$4 < 5 \Rightarrow$ nu e sist. de gen.

$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$\Rightarrow$ e sist. lin. indep.

b) $\left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} P_2 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} P_3 \\ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} P_4 \\ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} P_5 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \subset A^4$

$6 > 5 \Rightarrow$ nu e sist afi. ~~d~~ indep.

$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_5}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$rk \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow$ sist. de generatori.

Pb5: $A_1, A_2, \dots, A_6$ vf. hexagon.

$G_\Delta = \frac{1}{3} A_{i_1} + \frac{1}{3} A_{i_2} + \frac{1}{3} A_{i_3}$; $\Delta = \{i_1, i_2, i_3\}$.

$G_{\Delta'} = \frac{1}{3} A_{j_1} + \frac{1}{3} A_{j_2} + \frac{1}{3} A_{j_3}$; $\cancel{\Delta'=}$ $\{j_1, j_2, j_3\} = \{1, \dots 6\} \setminus \Delta$.

$\Rightarrow G_\Delta G_{\Delta'}$ concurente

$M_\Delta = \frac{1}{2} G_\Delta + \frac{1}{2} G_{\Delta'} = \cancel{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}} \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} A_i = G.$

Pb 6 (A, V_k) sp. afin

$M = \{P_0, \dots, P_m\}$, $P \in A$

$\vdash$

$P \in Af(M) \Leftrightarrow Af(M) = Af(M \cup \{P\})$

$\#$

$\boxed{\Leftarrow}$ $P \in Af(M \cup \{P\}) = Af(M)$

$\boxed{\Rightarrow}$ evident $Af(M) \subset Af(M \cup P)$

$w = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_m P_m + \beta P \in Af(M)$ $\sum \alpha_i + \beta = 1$

$P = \sum \gamma_i P_i$, cu $\sum \gamma_i = 1$.

$w = \sum_1^m (\alpha_i + \beta \gamma_i) P_i \in Af(M)$

$V/_k$ sp. vectorial.

$S = \{v_1, \dots, v_m\}$, $v \in V$

$\vdash$

$v \in \langle S \rangle \Leftrightarrow \langle S \cup \{v\} \rangle = \langle S \rangle$

$\#$

$\boxed{\Leftarrow}$ $v \in \langle S \cup \{v\} \rangle = \langle S \rangle$

$\boxed{\Rightarrow}$ evident $\langle S \rangle \subset \langle S \cup \{v\} \rangle$

$w = \sum_1^m \alpha_i v_i + \beta v$

$v = \sum_1^m \gamma_i v_i$

$w = \sum_1^m (\alpha_i + \beta \gamma_i) v_i \in \langle S \rangle$.

Pb 7 $(A, V/_k)$ sp. afin şi $M \subset A$

$\vdash$

$Af(Af(M)) = Af(M)$

$\#$

Evident $M \subset Af(M) \subset Af(Af(M))$

"$\Rightarrow$" $X \in Af(Af(M)) \Rightarrow \exists \alpha_i$ cu $\sum \alpha_i = 1$ a.î.

$X = \sum \alpha_i P_i$ cu $P_i \in Af(M)$

$\exists \beta_j^i$ cu $\sum_{j=1}^m \beta_j^i = 1$ a.î. $P_i = \sum \beta_j^i P_j$

$X = \sum_{i=1} \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^m \beta_j^i P_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \beta_j^i\right) P_j \in Af(M)$.

CamScanner

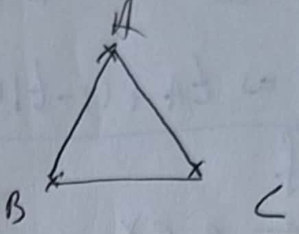
Pb8: $(A, V/_k)$ sp. afin, $M \subset A$. Este adevărat că

$Af(M) = \{\alpha P + (1-\alpha)Q \mid P, Q \in M, \alpha \in k\}$?

//

Nu: ex $M = \{A, B, C\}$.

$V/_k = \mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}}$.



$Af(A,B,C) = \mathbb{R}^2$.

$\{\alpha P + (1-\alpha)Q\} = AB \cup BC \cup AC$.

Pb9 $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ și $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in k$ a.î. $\sum_1^k \lambda_i = 0$

a) $L : \mathcal{A} \to V$, $L(M) = \sum_1^k \lambda_i \overline{MA_i}$ const.

b) $[\exists \lambda_i \in k$ a.î. $L = 0] \iff [A_1, \dots, A_k$ af. dep.$]$.

//

a) $L(P) = \sum_1^k \lambda_i \overline{PA_i} = \sum_1^k \lambda_i (\overline{PM} + \overline{MA_i}) = \sum_1^k \lambda_i \overline{MA_i} = L(M)$

$\Rightarrow L$ const.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Știu că $\exists \lambda_i$ cu $\sum \lambda_i = 0$ a.î. $\sum_1^k \lambda_i \overline{MA_i} = L(M) = 0$.

$\Rightarrow L(A_1) = 0 = \sum_2^k \lambda_i \overline{A_1A_i} \Rightarrow \{\overline{A_1A_i} \mid i = \overline{2,k}\}$ ~~af~~. lin. dep.

$\Rightarrow \{A_1, \dots, A_k\}$ ~~lin~~. afin. dep.

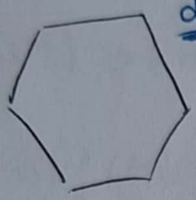
$\boxed{\Leftarrow}$ $\{A_1, \dots, A_k\}$ afin dep $\Rightarrow \exists \beta_i$ cu $\sum_{i \geq 2}^m \beta_i \overline{A_1A_i} = 0$

$0 = \left(-\sum_2^m \beta_i\right) \overline{A_1A_1} + \sum_2^m \beta_i \overline{A_1A_i} = L(A_1) = L(M) \Rightarrow L \equiv 0$.

! Fie $\mathcal{A}$ un sp. real afin ($\underline{k=\mathbb{R}}$). O mulț. $M \subset \mathcal{A}$ s.n.

convexă $\iff \left[\begin{array}{l} \forall\, k \geq 2 \;\; \forall\, P_1, \dots, P_k \in M \\ \forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in [0,1] \text{ cu } \sum_{1}^{k} \alpha_i = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum \alpha_i P_i \in M \Big]$

$\iff [\underbrace{\forall\, A, B \in M \Rightarrow tA + (1-t)B \in M \;\; \forall\, t \in [0,1]}_{\text{def}}]$.

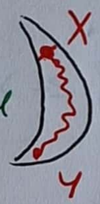
 ← e cx  ← nu e cx.

1) C e mulț. cx $\Rightarrow$ C e conexă

C conexă

$\Uparrow$

C conexă prin arce



$\exists\, \gamma : [0,1] \to C$ continuă cu $\begin{cases} \gamma(0) = X \\ \gamma(1) = Y \end{cases}$

$\underline{\gamma(t) = tx + (1-t)y}$ $\Uparrow$

C convexă

2) C nu e $\underline{\text{conexă}}$ dc. $\exists\, A, B \in \mathbb{R}^n$ $\underline{\text{deschise}}$ a.î.

$$C = \underbrace{(C \cap A)}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(C \cap B)}_{\neq \emptyset} \iff C \subset A \cup B.$$

ex: pt. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nu e conexă.

$$\mathbb{Q} = (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$

$\underline{\text{Dem}}$: C conexă prin arce $\overset{?}{\Rightarrow}$ C e conexă

Pp. $\exists\, U$ și $V \subseteq C$ deschise în C

a.î. $C = U \sqcup V$

$\cancel{\gamma^{-1}(U)}$ Aleg $a\in U$ și $b\in V$ și $\gamma:[0,1]\to C$ cont.

a.î. $\begin{cases}\gamma(0)=a & \Rightarrow \gamma^{-1}(U)\ni 0\\ \gamma(1)=b & \Rightarrow \gamma^{-1}(V)\ni 1\end{cases}$ | mt. deschise în $[0,1]$.

$\gamma^{-1}(U)\cap\gamma^{-1}(V)=\gamma^{-1}(U\cap V)=\emptyset \Rightarrow [0,1]$ nu e conexă

Ab.

Pb10: a) M cx $\Leftrightarrow \forall k\geq 2 \begin{cases}\forall P_1,\dots,P_k\in M\\ \forall \alpha_1,\dots,\alpha_k\in[0,1] \text{ a } \sum_1^k \alpha_i=1\end{cases} \Rightarrow \sum_1^k \alpha_i P_i\in M$

$\boxed{„\Leftarrow"}$ Iau $k=2 \Rightarrow$ def. cx.

$\boxed{„\Rightarrow"}$ Inducție după k.

Pt. $k=2 \Rightarrow$ def.

Pp. $k \overset{?}{\to} k+1$.

Iau $\alpha_1+\dots+\alpha_{k+1}=1$ cu $\alpha_i\in[0,1]$.

① $\alpha_{k+1}=1 \Rightarrow \alpha_i=0;\ i=\overline{1,k} \Rightarrow P_{k+1}\in M$ (A)

② $\alpha_{k+1}\neq 1 \Rightarrow \alpha_1+\dots+\alpha_k=1-\alpha_{k+1}\neq 0 \mid :(1-\alpha_{k+1})$

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}+\dots+\frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}=1 \Rightarrow \sum_1^k \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}P_i\in M.$$

$$\sum_1^{k+1}\alpha_i P_i=(1-\alpha_{k+1})\underbrace{\sum_1^k\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}P_i}_{\in M}+\alpha_{k+1}P_{k+1}\in M \text{ (def. cx)}.$$

b) O $\cap$ arbitrară de mt. cx e convexă

Λ o mt. arbitrară și $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mt. cx.

Fie $P, Q \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \Rightarrow P, Q \in C_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow tP + (1-t)Q \in C_\lambda$ $\lambda \in \Lambda$, $t \in [0,1]$

$\Rightarrow tP + (1-t)Q \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ mț. convexă.

c) Pt. o submulțime $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, numim acoperire convexă a lui $\mathcal{N}$ cea mai mică submulțime convexă ce conține $\mathcal{N}$, notată $\mathrm{conv}(\mathcal{N})$.

$$\mathrm{conv}(\mathcal{N}) = \left\{ \sum_{1}^{k} \alpha_i P_i \;\middle|\; k \geq 2,\ P_1, \dots P_k \in \mathcal{N},\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in [0,1]\ \ \sum \alpha_i = 1 \right\} = N.$$

#

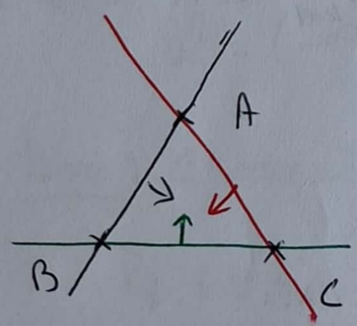
Știm $\mathrm{conv}(\mathcal{N}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{N} \subset C \\ C\ \underline{ex}}} C$

„$\subset$" știm $\mathrm{conv}(\mathcal{N})$ cx.

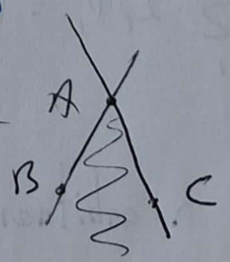
N cx și $\mathcal{N} \subset N \Rightarrow \mathrm{conv}(\mathcal{N}) \subset N$.

„$\supset$" $N \subset C$ pt. $\forall C$ cx. ce conține $\mathcal{N} \Rightarrow N \in \mathrm{conv}(\mathcal{N})$

! Teoremă Minkowski: [C = acoperire cx a unei mț. finite care e sist. de generatori] $\Leftrightarrow$ [C = $\bigcap$ mărginită de semispații]



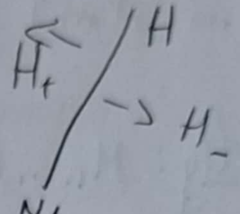
(Dc. nu era mărg. ⇒ că



)

d) Fie $N \subset A$ o submt. finită $|N| \geq 2$. Atunci $\exists$ o partiție a lui N, $\left.\begin{array}{l} N = N_1 \cup N_2 \\ N_1 \cap N_2 = \emptyset \end{array}\right\}$ a.î. $conv(N_1) \cap conv(N_2) = \emptyset$.

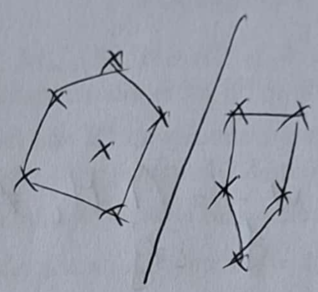
H = hiperplan (în $\mathbb{R}^2$ = dr)



$A = \underbrace{H_+}_{\substack{\uparrow \\ cx}} \cup H \cup \underbrace{H_-}_{\substack{\uparrow \\ cx}}$. Aleg H a.î. $\overbrace{H_+ \cap N}^{N_1} \neq \emptyset$, $H \cap N = \emptyset$, $\underbrace{H_- \cap N}_{N_2} \neq \emptyset$

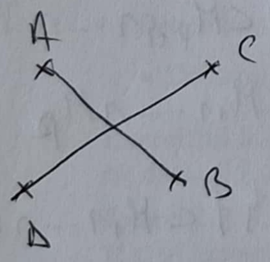
$\Rightarrow conv(N_1) \subset H_+$

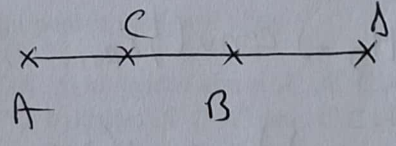
$\Rightarrow conv(N_2) \subset H_-$



e) Th. lui Radon: Fie $N \in \mathcal{A}$ o mt. finită cu $\left\{\begin{array}{l} \dim V = n \\ |N| = m \geq n+2. \end{array}\right.$

Atunci $\exists$ o partiție a lui $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ a.î. $\left\{ conv(N_1) \cap conv(N_2) \cancel{=} \neq \emptyset. \right.$





$N_1 = \{A, B\}$

$N_2 = \{C, D\}$.

$m \geq n+2 \Rightarrow \{P_1, \ldots, P_m\}$ e af. dep $\overset{9b)}{\Rightarrow} \exists \lambda_1, \ldots \lambda_m$ nu toate nule dar cu $\sum \lambda_i = 0$ a.î. $\sum_1^m \lambda_i \vec{MP_i} = \vec{0}\ \forall M$.

Pot pp. primele p $\lambda_i > 0$ și urm ≤ 0.

$\Rightarrow \sum_1^p \lambda_i P_i = \sum_{p+1}^m (-\lambda_i) P_i \Big| :S$, dar $\sum_1^p \lambda_i = \sum_{p+1}^m (-\lambda_i) = S \neq 0$

$$\sum_{1}^{p} \frac{\lambda_i}{s} \overrightarrow{MP_i} = \sum_{p+1}^{m} \frac{-\lambda_i}{s} \overrightarrow{MP_i} \Rightarrow \underbrace{\sum_{1}^{p} \frac{\lambda_i}{s} P_i}_{Q \in Conv(N_1)} = \underbrace{\sum_{p+1}^{m} \frac{-\lambda_j}{s} P_j}_{Q \in Conv(N_2)}$$

$N_1 = \{P_1, \dots, P_p\}$

$N_2 = \{P_{p+1}, \dots, P_m\} \Rightarrow Conv(N_1) \cap Conv(N_2) \neq \emptyset.$

f) <u>Th. Helly</u>: $M_1, \dots, M_r$ cx ($\subseteq \mathbb{R}^n$) cu $r \geq n+1$. Dc. $\cap$ a $\forall$ $n+1$ dintre ele e nevidă $\Rightarrow$ $\cap$ tuturor e nevidă.

Inducție după r

$\boxed{r = n+1}$ evident.

$\boxed{P_p.\ r \xrightarrow{?} r+1}$ Iau $W_j = \bigcap_{i \neq j} M_i \neq \emptyset$. (din ip. de inducție)

Fie $x_j \in W_j$ cu $j = \overline{1, r+1}$ $\quad r+1 \geq n+2 \xRightarrow{\text{Th. Radon + renumerotare}}$ pot pp. că

$Conv(\{x_1, \dots, x_p\}) \cap Conv(\{x_{p+1}, \dots, x_{r+1}\}) \neq \emptyset.$

$x_1, \dots, x_p \in M_{p+1}, \dots M_{r+1} \Rightarrow conv(\{x_1, \dots, x_p\}) \subset M_{p+1} \cap \dots \cap M_{r+1}$

$x_{p+1}, \dots, x_{r+1} \in M_1, \dots, M_p \Rightarrow conv(\{x_{p+1}, \dots, x_{r+1}\}) \subset M_1 \cap \dots \cap M_p$

$\emptyset \neq conv(\{x_1, \dots, x_p\}) \cap conv(\{x_{p+1}, \dots x_{r+1}\}) \subset M_1 \cap \dots \cap M_{r+1}$

$\Rightarrow \bigcap_{1}^{r+1} M_i \neq \emptyset.$

Seminarul 3 de Geometrie II

Seria 10 - 2023-2024

3 Repere afine. Subspaţii afine. Exerciţii

Exercițiul 3.1: Fie $\mathbb{A}^3$ spaţiul afin real canonic şi $P_0 = (...)$, $P_1 = (...)$, $P_2 = (...)$, $P_3 = (...)$. Arătaţi că $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ este un reper afin şi determinaţi coordonatele afine ale punctului $M = (...)$ în raport cu $\mathcal{R}$.

Exercițiul 3.2: Fie $(\mathcal{A}, V/K, \varphi)$ un spaţiu afin şi $M \subset \mathcal{A}$. Demonstraţi că

$$\mathrm{Af}(M) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}' \supset M \\ \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \text{ subspaţiu afin}}} \mathcal{A}'.$$

Exercițiul 3.3: Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $b \in K^m$ şi $\mathcal{A}' = \{X \in K^n \mid AX = b\}$. Dacă $\mathcal{A}' \neq \emptyset$, demonstraţi că e subspaţiu afin al lui K^n şi determinaţi spaţiul său director.

Exercițiul 3.4: În spaţiul afin $\mathbb{R}^4$ cu structura canonică, fie $\mathcal{A}_1 = ...$ şi $\mathcal{A}_2 = ...$. Determinaţi $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ şi repere afine pentru $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ şi $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$.

Exercițiul 3.5: În spaţiul afin $\mathbb{R}^4$ cu structura canonică, fie

$$\mathcal{A}_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 4, z + w = a\}$$
$$\mathcal{A}_2 = \{(3 + t, 2 - 2t, 2t, -1 + t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ să aibă dimensiune minimă.

- Subspaţiu vectorial şi afin factor.

Exercițiul 3.6: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p^n$ cu structura afină canonică.

a) Determinaţi numărul de puncte ale unui subspaţiu afin de dimensiune k (în particular, demonstraţi că toate au acelaşi număr de puncte).

b) Determinaţi numărul de subspaţii afine ale lui $\mathbb{Z}_p^n$ de dimensiune k.

- Definiţia paralelismului pentru subspaţii afine.

Exercițiul 3.7: Fie $(\mathcal{A}, V/K, \varphi)$ un spațiu afin și $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$ subspații afine. Arătați că, dacă $\mathcal{A}' \parallel \mathcal{A}''$ și $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' \neq \emptyset$, atunci $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$ sau $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$.

Exercițiul 3.8: Fie $(\mathcal{A}, V/K, \varphi)$ un spațiu afin, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ subspațiu afin, $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}$ și $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ hiperplan afin. Arătați că

$$\mathcal{A}' \parallel \mathcal{H} \iff \mathcal{A}' \subset \mathcal{H} \text{ sau } \mathcal{A}' \cap \mathcal{H} = \emptyset.$$

Exercițiul 3.9: Fie $(\mathcal{A}, V/K, \varphi)$ un spațiu afin. Arătați că orice subspațiu afin al lui $\mathcal{A}$ este o intersecție de hiperplane afine.

Exercițiul 3.10: Fie $(\mathcal{A}, V/K, \varphi)$ un spațiu afin, $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ subspaţii afine şi $k \in K$. Demonstraţi că

$$\mathcal{A}_k = \{(1 - k)A_0 + kA_1 \mid A_0 \in \mathcal{A}_0, A_1 \in \mathcal{A}_1\}$$

este subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$. Determinaţi dimensiunea sa.

Seminar 3 - Geometrie - 11.03.2024

Repere afine. Subspații afine

teste: 4, 6, 8, 10, 12 (0,2p)

Pb1: $A^3 = \mathbb{R}^3$, $P_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

reper afin + coord lui $M = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$

$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{vmatrix}0 & -2 & -2\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -4 & 1\end{vmatrix} = 0 + 8 + 0 - 4 + 2 - 0 = 6 \neq 0$$

Pb2 $(\mathcal{A}, V/_K, \varphi)$ sp. afin și $M \subset \mathcal{A}$. Dem. că

$$Af(M) = \bigcap_{\substack{A' \supset M \\ A' \text{ subsp. afin}}} A'$$

„$\supset$" evident $Af(M)$ e subsp. care îl conține pe M.

„$\subset$" $P \in Af(M) \Rightarrow P = \sum_1^n \alpha_i P_i$ cu $P_i \in \cancel{Af(M)}\ M$

$\Rightarrow P_i \in A'$ $\forall$ $M \subset A'$ subsp. $\Rightarrow P = \sum \alpha_i P_i \in A'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow P \in \bigcap A'$

Pb 3: $A \in M_{m\times n}(k)$, $b \in k^m$ și $\mathcal{A}' = \{X \in k^n / AX = b\}$

Dc. $A' \neq \phi$ dem. că e subsp. afin + det. sp. său director.

$X_i \in \mathcal{A}' \Rightarrow X = \sum \alpha_i X_i$

$\alpha_i \in k$ $\quad AX = \sum \alpha_i AX_i = \sum \alpha_i b = b \Rightarrow X \in \mathcal{A}'$

$\mathcal{A}' \longmapsto \mathcal{D}in(\mathcal{A}') = \{\overline{\Omega P}\}$ cu $P \in \mathcal{A}'$

$\Omega \in \mathcal{A}'$ fixat

$\mathcal{D}in(\mathcal{A}') = \{P - \Omega \mid P \in \mathcal{A}'\} = \{X \mid AX = 0\}$.

Pb 3.1: $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ cu $\mathcal{D}in(\mathcal{A}') = \{Y \mid AY = 0\}$, $\Omega \in \mathcal{A}'$.

Scrieți $\mathcal{A}'$ ca sol. unui sistem.

Iau $b = A\Omega \Rightarrow \mathcal{A}' = \{X \mid AX = b\}$.

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subsp. afine $\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = Af(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)}$

Pb 4: $\mathcal{A}_1 = \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+w=1 \end{cases}$ $\qquad \mathcal{A}_2 = \begin{cases} x-y=0 \\ y+z=2 \\ z-w=-1 \end{cases}$

$\dim(\mathcal{A}_1) = \dim(\mathcal{D}in\,\mathcal{A}_1) = 4-2=2$.

$\dim(\mathcal{A}_2) = 4-3=1$.

$\mathcal{D}in\,\mathcal{A}_1 : \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+w=0. \end{cases}$

$\mathcal{D}in(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) = \mathcal{D}in(\mathcal{A}_1) + \mathcal{D}in(\mathcal{A}_2) + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle$

cu $O_1 \in \mathcal{A}_1$

$O_2 \in \mathcal{A}_2$

Pbs: în $\boxed{\mathbb{R}^4}$ $A_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=3,\ z+w=a\}$

$A_2 = \{(3+t,\ 2-2t,\ 2t,\ -1+t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

ex:

Spațiu vectorial factor:

$\mathbb{Z}[i]/(a+bi) = ?$ cu $(a,b)=1$

G grup, $H \trianglelefteq G$ subgrup normal $(gHg^{-1} \subset H) \Rightarrow$

$\Rightarrow G/H = G/\sim \iff xy^{-1} \in H$.

G com ~~$\trianglelefteq H$ subg~~ $\Rightarrow \forall H$ subgrup $\Rightarrow H$ subgrup normal $\Rightarrow G/H$

Analog R/I ← ideal ← inel factor.

W subsp. vect. al lui V peste k $\Rightarrow$ ~~???~~ $(V/W, +)$ ca gr. factor.

Definesc $\alpha \cdot \hat{v} = \widehat{\alpha v} \Rightarrow (V/W, +, \cdot)$ s.n. spațiul vectorial factor.

$\hat{v}_1 = \hat{v}_2 \Rightarrow v_1 - v_2 \in W \Rightarrow \alpha(v_1 - v_2) \in W \Rightarrow \widehat{\alpha v_1} = \widehat{\alpha v_2}$

Pb: ~~1) dim~~ 3) $V = W \oplus W' \Rightarrow V/W \simeq W'$

1) $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$
(în dim. finită)

2) $f: V \to W$ apl. lin. $\Rightarrow$ $\boxed{V/\ker f \simeq \operatorname{Im} f}$

Dem 1) Luăm o bază $W = \langle w_1, \dots w_k \rangle$ o completez la o bază $\langle w_1, \dots, w_n \rangle$ în V. Arăt că V/W are o bază $\langle \hat{w}_{k+1}, \dots, \hat{w}_n \rangle$

sist. de gen: $\hat{v} \in V/_W \Rightarrow v = \underbrace{\sum_1^k \alpha_i w_i}_{\in W} + \sum_{k+1}^n \beta_i w_i$

$\hat{v} = \sum_{k+1}^n \beta_j \cdot \hat{w}_j$

s.l.i. Fie $\sum_{k+1}^n \alpha_j \hat{w}_j = \hat{0} \Rightarrow \sum_{k+1}^n \alpha_j w_j \in W \Rightarrow \ldots$.

<u>Dem 2)</u> $f(\hat{v}) = f(v) \Rightarrow i = 0$.

$\boxed{Q}$ $\exists$ echivalență pt. sp. afine?

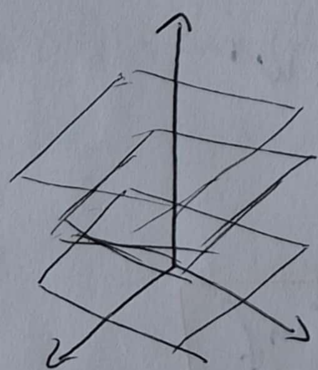
$(A, V/_k)$ sp. afin. ~~$A' \in A$ subsp.~~ $V' \leq V$ $P \simeq Q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{PQ} \in$ ~~$Dir(A')$~~ V'. Fie $A/_{\cancel{A'}\,V'} = A/_\sim$. $V/_{V'}$

$\varphi : A/_{\cancel{A'}\,V'} \times A/_{\cancel{A'}\,V'} \to V/_{V'}$, $\varphi(\hat{P}, \hat{Q}) = \vec{PQ} \in V/_{V'}$

s.n. sp. ~~vectorial~~ afin factor.

<u>ex:</u> e corect def + respectă axiomele de sp. afin.



Pbl: $\mathbb{Z}_p^n$ (sau $\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{F}_q$ corpul cu q elem.)

a) Dem. că toate subsp. afine de dim k au la fel de multe elem.

A' cu dim $A' = k \Rightarrow Dir(A') = V' \simeq A'$ ← bij la alegerea unui pct. $\Omega \in A'$ ⇒ au la fel de multe elem.

dim $V' = k \Rightarrow V' \simeq \mathbb{Z}_p^k$ (prin alegerea bazei în $\mathbb{Z}_p^k$)

$\Rightarrow |V'| = p^k \Rightarrow |A'| = p^k$.

b) Det. nr. de subsp. afine ale lui $\mathbb{Z}_p^n$ de dim. k.

Un subsp. afin de dim k e dat de k+1 pct. afin indep.

$p^n \cdot (p^n - 1) \cdot (p^n - p) \cdot \ldots \cdot (p^n - p^{k-1})$

aleg. primul pct. | al doilea $\neq$ primul | al 3-lea $\notin$ dr. gen. de P_1 și P_2

nr. de sp. afine de dim k $= \dfrac{\text{nr. de mt. afin indep cu } k+1 \text{ pct}}{\text{nr. de mt. afin indep cu } k+1 \text{ pct. într-un sp. de dim } k}$

$= \dfrac{p^n(p^n-1)(p^n-p)\cdot\ldots\cdot(p^n-p^{k-1})}{p^k(p^k-1)(p^k-p)\cdot\ldots\cdot(p^k-p^{k-1})}$

! Paralelism $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2 \iff Dir(\mathcal{A}_1) \subset Dir(\mathcal{A}_2)$ sau $Dir(\mathcal{A}_2) \subset Dir(\mathcal{A}_1)$.

Pe mt. sp. de dim k pll e rel de echivalență.

$\boxed{Q}$ Ce e sp. factor?

<u>Pb7</u>: $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$ subsp. afini. $\underset{\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' \neq \emptyset}{\mathcal{A}' \parallel \mathcal{A}''} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}'' \text{ sau} \\ \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}' \end{cases}$

$\mathcal{A}' \parallel \mathcal{A}'' \Rightarrow Dir(\mathcal{A}') \subset Dir(\mathcal{A}'')$

Iau $P \in \mathcal{A}' \setminus \mathcal{A}''$ $\Rightarrow \vec{OP} \in Dir(\mathcal{A}') \subset Dir(\mathcal{A}'')$

$O \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$ $\Rightarrow P \in \mathcal{A}''$ ↯.

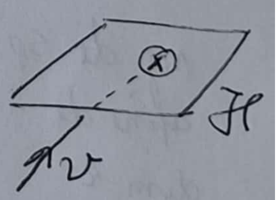
$\Rightarrow \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$

<u>Pb8</u>: $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ subsp. afin cu $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}$. și $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ hiperplan afin. Atunci $\mathcal{A}' \parallel \mathcal{H} \iff \mathcal{A}' \subset \mathcal{H}$ sau $\mathcal{A}' \cap \mathcal{H} = \emptyset$.

"$\Rightarrow$" <u>Pb7</u>

"$\Leftarrow$" dc. $\mathcal{A}' \subset \mathcal{H} \Rightarrow Dir(\mathcal{A}') \subset Dir(\mathcal{H})$

dc. $\mathcal{A}' \cap \mathcal{H} = \emptyset \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}' \parallel \mathcal{H}$ -



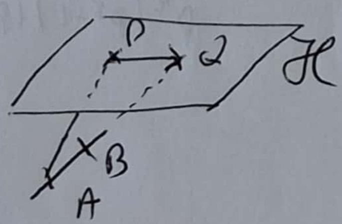
$\left.\begin{array}{l} \dim \mathcal{A}' = 1 \\ \dim \mathcal{H} = n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow Dir\,\mathcal{A}' \oplus Dir\,\mathcal{H} = V.$

$\mathcal{H} \oplus \mathcal{A}' = \mathcal{A}$

Pp. R.A $\exists u \in Dir\,\mathcal{A}' \setminus Dir(\mathcal{H}) \Rightarrow \boxed{\langle u \rangle + Dir(\mathcal{H}) = V}$

$\forall v \in V \Rightarrow \exists \lambda \in k$
$\exists w \in Dir(\mathcal{H})$

a.î. $v = \lambda u + w$



$u = \vec{AB}$

$P \in \mathcal{H}$

$v = \vec{AP} = \lambda \vec{AB} + w$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\vec{QP}}$

$\exists! \, Q \in \mathcal{H}$ a.î. $\vec{QP} = w$

$\Rightarrow \vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \vec{QP} \Rightarrow \vec{AQ} = \lambda \vec{AB} \Rightarrow Q \in \mathcal{A}'$ Ab.

$Q \in \mathcal{H}$

Pb9 $\forall \mathcal{A}' < \mathcal{A} \Rightarrow \exists \mathcal{H}_1 \dots \mathcal{H}_k$ hip. afine a.î.

$\mathcal{A}' = \mathcal{H}_1 \cap \dots \cap \mathcal{H}_k$. Pot alege $k = n - \dim \mathcal{A}'$

Reamintire (Dc. am $V/_k$ sp. vect $\Rightarrow \exists H_1, \dots H_k$ hip. vect a.î. $W = \bigcap_1^k H_i$).

Aplic pt. $D_{in}(\mathcal{A}') \leq V \Rightarrow \exists H_1, \dots, H_k \leq V$ a.î.

$D_{in}(\mathcal{A}') = \bigcap_1^k H_i$

Aleg $O \in \mathcal{A}'$ și $\mathcal{H}_i = O + H_i$

$D_{in}(\mathcal{A}') = \bigcap_1^k D_{in}(\mathcal{H}_i) = D_{in}(\bigcap_1^k \mathcal{H}_i)$

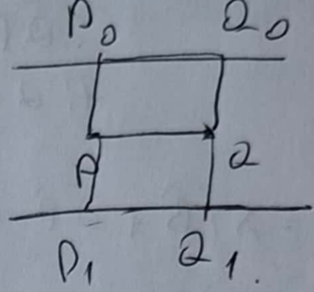
$\left.\begin{array}{l} O \in \mathcal{A}' \\ O \in \cap \mathcal{H}_i \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}' = \bigcap_1^k \mathcal{H}_i}$

Pb10 $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 < \mathcal{A}$ subsp. afine și $k \in K$.

$A_k = \{(1-k)A_0 + kA_1 \mid A_0 \in \mathcal{A}_0, A_1 \in \mathcal{A}_1\}$ subsp. af. al lui $\mathcal{A}$. Det. dim A_k

1) e subsp. afin $\sum \alpha_i [(1-t)A_0^i + t A_1^i] =$

$$= (1-t)\Big(\underbrace{\sum \alpha_i A_0^i}_{\in \mathcal{A}_0}\Big) + t \underbrace{\sum \alpha_i A_1^i}_{\in \mathcal{A}_1} \in \mathcal{A}_t.$$



2) $P \in \mathcal{A}_t \Rightarrow P = (1-t)P_0 + tP_1$

$Q \in \mathcal{A}_t \Rightarrow Q = (1-t)Q_0 + tQ_1$

$\Rightarrow (1-t)\overrightarrow{PP_0} + t\overrightarrow{PP_1} = 0$

$\Rightarrow (1-t)\overrightarrow{QQ_0} + t\overrightarrow{QQ_1} = 0.$

$\overrightarrow{PQ} = (1-t)\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PQ}$

$= (1-t)(\cancel{\overrightarrow{PP_0}} + \overrightarrow{P_0Q_0} + \cancel{\overrightarrow{Q_0Q}}) + t(\cancel{\overrightarrow{PP_1}} + \overrightarrow{P_1Q_1} + \cancel{\overrightarrow{Q_1Q}})$

$= (1-t)\underbrace{\overrightarrow{P_0Q_0}}_{\in Din(\mathcal{A}_0)} + t\underbrace{\overrightarrow{P_1Q_1}}_{\in Din(\mathcal{A}_1)}$

$\forall v \in Din(\mathcal{A}_t) \Rightarrow \exists v_0 \in Din(\mathcal{A}_0)$, $\exists v_1 \in Din(\mathcal{A}_1)$ a.î. $v = (1-t)v_0 + t v_0$.

$\Rightarrow \boxed{Din(\mathcal{A}_t) = Din(\mathcal{A}_0) + Din(\mathcal{A}_1)}$

Seminarul 4 de Geometrie II

Seria 10 - 2023-2024

4 Subspaţii afine. Aplicaţii afine. Exerciţii

Exercițiul 4.1: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^4$ cu structura canonică de spațiu afin și punctele $A = (1, 0, 1, 2), B = (0, 1, 2, 3), C = (0, 0, 1, -1)$. Fie $\mathcal{A}' = \langle\{A, B, C\}\rangle$, subspațiul afin generat de cele trei puncte.

Descrieți $\mathcal{A}'$ prin ecuații implicite și aflați $\dim \mathcal{A}'$.

Exercițiul 4.2: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{C}^3$ cu structura canonică de spațiu afin și dreapta

$$d : \begin{cases} z_1 - iz_2 & = 0 \\ 2z_2 + z_3 + 1 & = 0 \end{cases}.$$

Găsiți ecuațiile parametrice ale lui d. $\mathcal{D}ir(d) = ?$

Exercițiul 4.3: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^4$ cu structura canonică de spațiu afin și dreptele

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0} = \frac{w}{2},$$
$$d_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{0} = \frac{w-1}{2},$$
$$d_3 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1} = \frac{w-1}{1}.$$

$\underline{1|2}$

Calculați $d_1 \vee d_2$ și $d_1 \vee d_3$. → $\underline{2|3}$

Exercițiul 4.4: Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin real de dimensiune $n \geq 1$. Arătați că orice hiperplan în $\mathcal{A}$ separă spațiul în două componente conexe. Arătați că acest rezultat nu mai rămâne valabil pentru un spaţiu afin complex.

Exercițiul 4.5: Găsiţi, dacă există, dreptele spațiului afin $\mathbb{R}^3$ care taie simultan dreptele de ecuații:

$d_3 \parallel d_4$

$$d_1 : \begin{cases} x & = 3z \\ y & = -\frac{3}{2} \end{cases}, d_2 : \begin{cases} x + z & = 0 \\ y & = \frac{3}{2} \end{cases}, d_3 : \begin{cases} x - z & = 3 \\ y & = z \end{cases}, d_4 : \begin{cases} x - z & = 0 \\ y & = z \end{cases}.$$

Exercițiul 4.6: Decideţi dacă următoarele trei plane din spațiul afin $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ aparțin unui aceluiași fascicol:

$$\pi_1 : x - y + z + 5 = 0,$$
$$\pi_2 : 2x - 2y + 2z + 77 = 0,$$
$$\pi_3 : -x + y - z = 0.$$

Exercițiul 4.7: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spațiu afin și dreapta

$$d : \begin{cases} x + y & = 1 \\ x - z & = 2 \end{cases}.$$

a) Găsiți ecuații implicite pentru d.

b) Determinați fasciculul de plane care îl conțin pe d.

c) Aflați planul din acel fascicul care conține punctul $P = (1, 0, 0)$.

d) Aflați planele din acel fascicul care intersectează dreapta d', unde

$$d : \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x - y &= 2 \end{cases} .$$

Exercițiul 4.8: Fie $\mathbb{A}^4 = \mathbb{R}^4$ cu structura afină canonică şi $\mathbb{A}^3 = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică. Fie

$$P_0 = (1, -3, 2, 0), P_1 = (2, -2, 3, 0), P_2 = (2, -2, 2, 1),$$
$$P_3 = (2, -3, 3, 1), P_4 = (1, -2, 3, 1).$$

a) Verificaţi că $\mathbb{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$ este un reper afin în $\mathbb{A}^4$.

b) Considerăm $f : \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^3$ unica aplicaţie afină pentru care

$$f(P_0) = ..., f(P_1) = ..., f(P_2) = ..., f(P_3) = ..., f(P_4) = ...$$

Verificaţi dacă f este injectivă, surjectivă, bijectivă.

c) Scrieţi ecuaţia lui f în raportul cu reperele *canonice* din $\mathbb{A}^4$ şi $\mathbb{A}^3$.

Exercițiul 4.9: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică. Considerăm funcţia

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y + 3, 3x + z + 1).$$

a) Arătaţi că f este aplicaţie afină.

b) Fie π planul de ecuaţie

$$\pi : x + y - z = 1$$

şi d dreapta de ecuaţie

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{3}.$$

Determinaţi ecuaţii pentru $f(\pi)$ şi $f(d)$.

c) Există plane $\pi' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(\pi')$ este dreaptă? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

d) Există plane $\pi' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(\pi')$ este plan şi $\pi' \parallel f(\pi')$? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

e) Există drepte $d' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(d) = d$? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

Exercițiul 4.10: Fie K un corp comutativ şi $n \geq 1$. Înzestrăm K^n şi K cu structurile canonice de spaţii afine peste K. Fie $f : K^n \to K$ o aplicaţie afină.

a) Demonstraţi că, dacă f nu este constantă, atunci, pentru orice $\alpha \in K$, există un hiperplan $\mathcal{H} \subset K^n$ astfel încât $\mathcal{H} = f^{-1}(\{\alpha\})$. **(0,6p)**

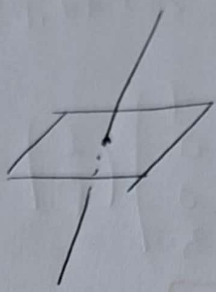
b) Demonstraţi că dacă există $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ hiperplane, $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$, astfel încât $f_{|\mathcal{H}_1} = f_{|\mathcal{H}_2} = c \in K$, atunci f este constantă. **(0,4p)**

Seminar 4 - Geometrie - 18.03.2024

Rez ~~#~~ test : $\mathbb{Z}_3^4$. Câte plane am? $\parallel \mathcal{A}'$ de $\dim \mathcal{A}' = 2$.

$\mathcal{A}'' = P + V$. $\Rightarrow \# \frac{3^4}{3^2} = 9$.

$\boxed{V2}$ $\# = \# \mathcal{A}/_{V'} = 3^2$



Test 104: $\mathbb{Z}_5^4$. $\dim \mathcal{A}' = 2$. Câte $\mathcal{A}'' \subset \mathbb{Z}_5^4$ cu $\mathcal{A}'' \supset \mathcal{A}'$ subsp.

$$\underset{\dim 2}{\underset{\uparrow}{1}} + \underset{\dim 4}{\underset{\uparrow}{1}} + \underset{\dim 3}{\underset{\uparrow}{6}} = 8.$$

$$\frac{5^4 - 5^2}{5^3 - 5^2} = 6.$$

Subsp. afine

Pb1: $\mathcal{A} = \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}' = \langle \{A, B, C\} \rangle$.

$\mathcal{A}'$ în ec. implicite

$\operatorname{Dir}(\mathcal{A}') = \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$.

$\mathcal{A}' = \{ A + \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$.

★ Vreau $\mathcal{A}' = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mat. } 2\times 4}}{M} x + b = 0 \}$.

unde $V' = \mathrm{Dir}\,\mathcal{A}' = \{v \in \mathbb{R}^4 \,/\, Mv = 0\}$

$$\shortparallel$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$(x,y,z,t) \in V' \iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ a.î. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \text{sist. } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ e compatibil}$$

$$\iff \mathrm{rk} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{matrix} & \begin{matrix} z \\ t \end{matrix} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} -1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -3 & t \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\iff V' = \left\{ (x,y,z,t) \;\middle|\; \begin{cases} y - z = 0 \\ -3x - 4y + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}' = \{X \,/\, MX = b\}$$

$$A \in \mathcal{A}' \iff \boxed{MA = b.}$$

Pb 2 $\mathcal{A} = \mathbb{C}^3$ $\quad d: \begin{cases} z_1 - i z_2 = 0 \\ 2z_2 + z_3 = -1 \end{cases}$

ec. parametrice d + $\mathrm{Dir}(d)$

$\mathrm{Dir}(d) = \langle (i, 1, -2) \rangle$

$\mathcal{A}' = \{ (0,0,-1) + \alpha (i, 1, -2) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$

Pb3 $\mathcal{A} = \mathbb{R}^4$ $\begin{cases} d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0} = \frac{w}{2} \\ d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{0} = \frac{w-1}{2} \\ d_3: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1} = \frac{w-1}{1} \end{cases}$

Calc. $d_1 \vee d_2$ și $d_1 \vee d_3$

$$\mathcal{D}in(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) = \mathcal{D}in\,\mathcal{A}_1 + \mathcal{D}in\,\mathcal{A}_2 + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle, \quad O_i \in \mathcal{A}_i, \ i = \overline{1,2}$$

$\mathcal{D}in(d_1) = \mathcal{D}in(d_2) = \langle (1,1,0,2) \rangle$ $\qquad O_1 = (1,1,2,0) \in d_1$.

$\mathcal{D}in(d_3) = \langle (1,1,1,1) \rangle$ $\qquad O_2 = (0,0,3,1) \in d_2 \cap d_3$.

$\overrightarrow{O_1O_2} = (-1,-1,1,1)$

$$\mathcal{D}in(d_1 \vee d_2) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$$

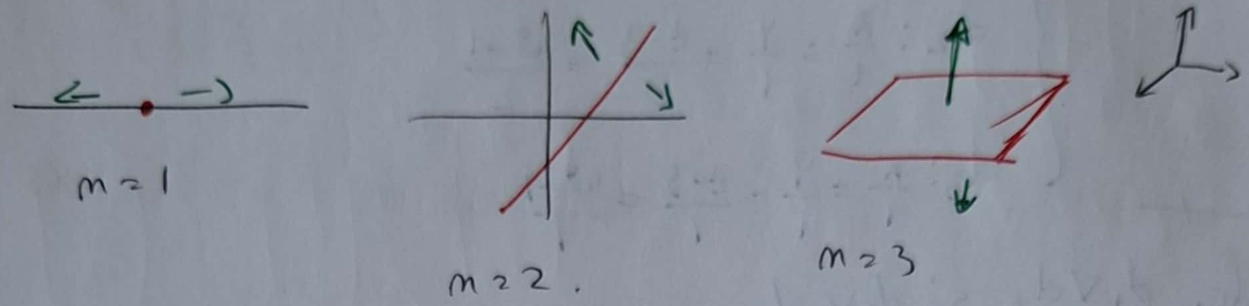
$$\Rightarrow d_1 \vee d_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathcal{D}in(d_1 \vee d_3) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$d_1 \vee d_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pb5: $\mathcal{A}$ un sp. afin real de dimensiune $n \geq 1$. Arătați că orice hiperplan în $\mathcal{A}$ sep. sp. în 2 comp. conexe. Arătați că acest rezultat nu mai rămâne valabil pt. un sp. af. complex.

<u>Dem</u>: pot pp. $\boxed{\mathcal{A}=\mathbb{R}^n}$ (aleg un reper)

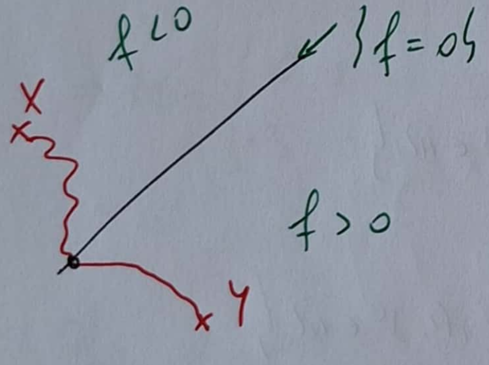


a) Fie $\mathcal{H}$ un hiperplan $\Rightarrow \exists f: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$$

a.î. $\mathcal{H} = f^{-1}(\{0\})$.

(M e conexă prin arce $\Leftrightarrow \forall x, y \in M \Rightarrow \exists \gamma: [0,1] \to M$ cont. a.î. $\begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$)



Aleg $x, y \in \mathcal{A}$ a.î. $\begin{cases} f(x) < 0 \\ f(y) > 0. \end{cases}$

Pp. $\exists \gamma: [0,1] \to \mathcal{A} \setminus \mathcal{H}$ cont. a.î.

$\gamma(0) = x$

$\gamma(1) = y$.

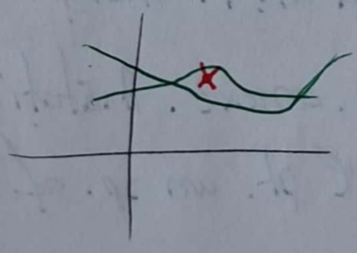
$f \circ \gamma$ cont. și $(f\circ\gamma)(0) < 0$, $(f \circ \gamma)(1) > 0$

Darboux

$\Rightarrow \exists\, d_0 \in (0,1)$ a.î. $(f \circ \gamma)(d_0) = 0 \Rightarrow \gamma(d_0) \in \mathcal{H}$ ↯.

b) $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H}$ conexă prin arce.

m=1



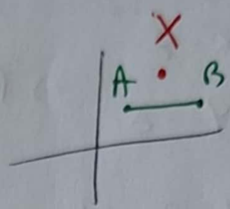
dim $n-1$ complexă $\to \mathcal{H} \subset \mathbb{C}^n \leftarrow$ dim n complexă

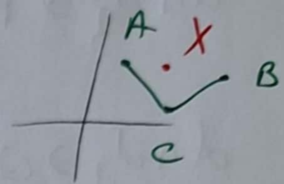
$\wr|$ $\quad$ $\wr|$

dim $2n-2$ reală $\to \mathcal{A}'$ $\quad \mathbb{R}^{2n} \leftarrow$ dim $2n$ reală.

Pb: $A' \subset \mathbb{R}^n$ cu $\boxed{\dim A' = n-2}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus A'$ e conexă prin arce.

Inducție după $n \geq 3$.





$\boxed{n=3}$ un pct. X și 2 pct A și B.

iau sg să fie $\begin{cases} \text{segm } AB \text{ dc. } A-X-B \text{ necol.} \\ \text{segm } AC \cup CB \text{ dc. } A-X-B \text{ col, cu } C \text{ necol cu } A \text{ și } B. \end{cases}$

pt $\boxed{n-1 \Rightarrow n}$

Fie $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ bază $Dir(A')$. O completez la o bază $\{v_1, \ldots, v_{n-2}, e_1, e_2\}$ în $\mathbb{R}^n$

Fie $A \setminus \mathcal{H} = \{ O + \cancel{\beta}\, \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-2} v_{n-2} + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \mid$ ~~unul~~ unul dintre $\beta_1, \beta_2 \neq 0 \}$

$\cong$

$$O + \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\substack{n-2 \\ \text{conexă}}} \times \underbrace{(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})}_{\text{conexă}}$$

Pb 5: Găsiți, dc. $\exists$, dr. sp. af $\mathbb{R}^3$ care taie simultan dr:

$d_1: \begin{cases} x = 3z \\ y = \frac{-3}{2} \end{cases}$ $d_2: \begin{cases} x + z = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ $d_3: \begin{cases} x - z = 3 \\ y = z \end{cases}$ $d_4: \begin{cases} x - z = 0 \\ y = z \end{cases}$

$d_3 \parallel d_4$.

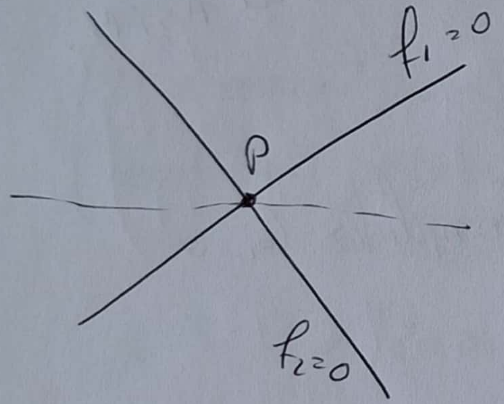
S.

$d_3, d_4 \subset \{\text{planul de ec } y=z\}$, $d_3 \parallel d_4$ $\Big\} \Rightarrow d \subset$ în pl. de ec. $y=z$.

$$d \cap d_2 \ni P = \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow P = \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$d \cap d_1 \ni Q = \begin{cases} y = z = \frac{-3}{2} \\ x = 3z \end{cases} \Rightarrow Q = \left(\frac{-9}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$$

$$\boxed{d: \begin{cases} y - z = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}}$$



$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

e fascicul de dr. care trec prin P.

Pb 8 $\mathbb{A}^4 = \mathbb{R}^4$ sp. af canonică

$\mathbb{A}^3 = \mathbb{R}^3$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) verif. dc. e rep. afin

$$\{\overline{P_0P_i}\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ e rep. af.}$$

c.

b) f unica apl. lin. $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$f(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Q_0$, $f(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f(P_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(P_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$f(P_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\{\overline{Q_0 Q_i}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

c) Scrieți f în rap. cu rep. canonice

$f(x) = Ax + b$

Calculam $M_{B_0^4 B_0^3}(T)$. Știm $M_{B, B_0^3}(T)$.

$T(\overline{P_0 P_1}) = \overline{Q_0 Q_1}$

$M_{B, B_0^3} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$T: V \to W$

$B_1, B_2 \quad e_1, e_2$

$M_{B_1 e_1} = M_{e_2 e_1} \cdot M_{B_2 e_2} \cdot M_{B_1 B_2}$.

$M_{B_0^4, B_0^3} = M_{B B_0^3} \cdot M_{B_0^4 B}$

$(M_{B, B_0^4})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Pb 9 : $\mathcal{A}=\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\3&0&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}_{b}$

a) e apl. af. $f(x)=Ax+b$.

b) $\pi: x+y-z=1$

$d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{3}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f(\pi), f(d)=?$

! Mereu $\boxed{\dim f(\mathcal{A}') \le \dim(\mathcal{A}')}$

În general $\boxed{\dim f(\mathcal{A}') \ge \dim(\mathcal{A}') - \dim(\ker T)}$

Mai precis $\boxed{\dim f(\mathcal{A}') = \dim \mathcal{A}' - \dim(\mathcal{D}in(\mathcal{A}') \cap \ker T)}$

b) $\pi: x+y-z=1$.

$\mathcal{D}in(f(\pi)) = T(\mathcal{D}in(\pi))$

$\mathcal{D}in(\pi): x+y-z=0$

$T(\mathcal{D}in(\pi)) = T\left(\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle\right) = \left\langle T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

plan.

$f(\pi) = \{ \underset{(1,5,4)}{\underset{\shortparallel}{f(1,0,0)}} + \alpha\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R} \}$.

c) Caut π' plan a.î $\mathrm{Dir}(\pi') \supset \ker T$

$$\ker T = \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases} \quad = \alpha(1,2,-3).$$

$$\ker T = \langle (1,2,-3) \rangle.$$

De ex: $\pi' = \left\{ (129,-53,0) + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$

d) Există plane π' cât a.î $f(\pi')$ e plan și $\pi' \parallel f(\pi')$?

Se calculează că A are val proprii distincte. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$A v_1 = \lambda_1 v_1.$

$A v_2 = \lambda_2 v_2.$

$\pi: P + \alpha v_1 + \beta v_2$

$\mathrm{Dir}(f(\pi)) = \langle A v_1, A v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle.$

Seminarul 5 de Geometrie II

Seria 10 - 2023-2024

5 Aplicaţii afine II. Exerciţii

Exercițiul 5.1: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică. Considerăm funcţia

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y + 3, 3x + z + 1).$$

a) Arătaţi că f este aplicaţie afină.

b) Fie π planul de ecuaţie

$$\pi : x + y - z = 1$$

şi d dreapta de ecuaţie

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{3}.$$

Determinaţi ecuaţii pentru $f(\pi)$ şi $f(d)$.

c) Există plane $\pi' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(\pi')$ este dreaptă? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

d) Există plane $\pi' \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(\pi')$ este plan şi $\pi' \parallel f(\pi')$? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

e) Există drepte $d \subset \mathcal{A}$ astfel încât $f(d) = d$? Daţi exemplu sau demonstraţi că nu există.

Exercițiul 5.2: Fie K un corp comutativ şi $n \geq 1$. Înzestrăm K^n şi K cu structurile canonice de spaţii afine peste K. Fie $f : K^n \to K$ o aplicaţie afină.

a) Demonstraţi că, dacă f nu este constantă, atunci, pentru orice $\alpha \in K$, există un hiperplan $\mathcal{H} \subset K^n$ astfel încât $\mathcal{H} = f^{-1}(\{\alpha\})$. **(0,6p)**

b) Demonstraţi că dacă există $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ hiperplane, $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$, astfel încât $f_{|\mathcal{H}_1} = f_{|\mathcal{H}_2} = c \in K$, atunci f este constantă. **(0,4p)**

Exercițiul 5.3: Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ o aplicaţie afină astfel încât $f^k = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ pentru un $k \geq 1$. Demonstraţi că f are un punct fix.

Exercițiul 5.4: Fie $(\mathcal{A}, V)$ un spaţiu afin. Demonstraţi că grupul translaţiilor $\mathcal{T}$ este subgrup normal în $GAf(\mathcal{A})$ şi că ${}^{GAf(\mathcal{A})}/_{\mathcal{T}} \simeq \cancel{(V, +)}.$ $= GL(V)$

Exercițiul 5.5: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică şi

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ f(x, y, z) = (4x - 12, 4y + 6, 4z - 3).$$

a) Demonstraţi că f este o omotetie şi aflaţi centrul şi raportul ei.

b) Fie planul $\pi : 4x + 9y - z = 2$. Determinaţi $f(\pi)$.

Exercițiul 5.6: Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi omotetiile $H_{O_1,\lambda_1}, H_{O_2,\lambda_2}$.

a) Demonstraţi că dacă $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, $H_{O_1,\lambda_1} \circ H_{O_2,\lambda_2}$ este o omotetie şi determinaţi centrul şi raportul ei.

b) Demonstraţi că dacă $\lambda_1\lambda_2 = 1$, $H_{O_1,\lambda_1} \circ H_{O_2,\lambda_2}$ este o translaţie şi determinaţi vectorul de translaţie.

Exercițiul 5.7: Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi omotetiile $H_1 = H_{O_1,\lambda_1}, H_2 = H_{O_2,\lambda_2}$. Presupunem că există $A \in \mathcal{A}$ astfel încât $\underbrace{(H_1 \circ H_2)}_{x_1}(A) = \underbrace{(H_2 \circ H_1)}_{x_2}(A)$. $= P$

Ce puteţi spune despre H_1 şi H_2?

Exercițiul 5.8: Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin. Numim *dilatare* o compunere dintre o omotetie şi o translaţie.

Demonstraţi că un izomorfism afină $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e dilatare dacă şi numai dacă $\varphi(\mathcal{H}) \parallel \mathcal{H}$ pentru orice hiperplan $\mathcal{H}$.

Exercițiul 5.9: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică, planul $\pi : 4x + 9y - z = 2$ şi $W = \langle(1, 2, 3)\rangle \leq \mathbb{R}^3$.

Determinaţi ecuaţile proiecţiei pe planul π de-a lungul lui W şi a simetriei faţă de planul π de-a lungul lui W.

Reamintire de la curs: Am demonstrat că o aplicaţie liniară $p : V \to V$ este proiecţie vectorială (pe un subspaţiu de-a lungul unui subspaţiu complementar) dacă şi numai dacă $p^2 = p$.

Exercițiul 5.10: Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ aplicaţie afină.

a) Demonstraţi că π este o proiecţie afină $\iff$ urma sa liniară $p : V \to V$ e proiecţie vectorială şi π are un punct fix.

b) Demonstraţi că π este o proiecţie afină $\iff$ $\pi^2 = \pi$.

Exercițiul 5.11: Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional şi $s : V \to V$ o aplicaţie liniară. Demonstraţi că s este o simetrice vectorială (faţă de un subspaţiu de-a lungul unui subspaţiu complementar) dacă şi numai dacă $s^2 = \mathrm{Id}_V$.

Exercițiul 5.12: Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ aplicaţie afină.

a) Demonstraţi că σ este o simetrie afină $\iff$ urma sa liniară $s : V \to V$ e simetrie vectorială şi σ are un punct fix.

b) Demonstraţi că σ este o simetrie afină $\iff$ $\sigma^2 = 1$. ✓

Seminar 5 - Geometrie - 25.03.2024

Aplicații afine II

Pb1: $\mathcal{A}=\mathbb{R}^3$, $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$

$$f(x,y,z)=(x+y+z,\ 2x-y+3,\ 3x+z+1)$$

e) $\exists\, d\subset\mathcal{A}$ a.î. $f(d)=d$ dr. ??

Știm ~~că~~ $\dim(\ker T)=1$

$\dim f(\mathcal{A}') = \dim \mathcal{A}' - \dim(D\text{in}\,\mathcal{A}'\cap \ker T)$

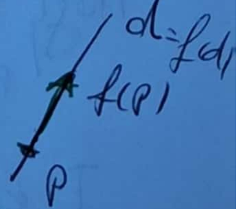
T are val proprii $0, -2, 3$

$f(d)=d \Rightarrow T(D\text{ir}(d)) = D\text{ir}(d) \Rightarrow D\text{ir}(d) = V_{-2}$ sau V_3

$\uparrow$ vect. proprii pt. -2.

Idee: Dc. $\exists\, P\in\mathcal{A}$ a.î. $f(P)=P \Rightarrow$ alog $d=P+V_3$ sau $d=P+V_{-2}$.

În general caut P a.î. $\overrightarrow{Pf(P)}\in V_{-2}\cup V_3$



$$\overrightarrow{Pf(P)}=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&-2&0\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Se obs. că ec. $\overrightarrow{Pf(P)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ are sol.

$\uparrow$ caz particular.

$$P_0=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{7}{6}\\\frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

Pb2 Fie k corp com, $n \geq 1$, $f : k^n \to k$ apl. af.

a) Dem. că dc. f nu e const $\Rightarrow \forall \alpha \in k \Rightarrow f^{-1}(\alpha)$ hiperplan

$$f(x) = Ax + b$$

$$f(x_1, \dots, x_i) = \sum_{1}^{n} a_i x_i + b. \neq \text{const.} \Rightarrow \exists i \text{ cu } a_i \neq 0.$$

$$f^{-1}(\alpha) = \{x \mid f(x) = \alpha \Leftrightarrow \sum a_i x_i + (b - \alpha) = 0\} = \text{hiperplan}$$

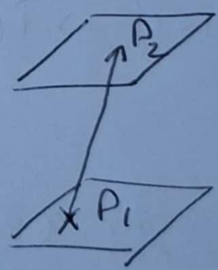
(e o ecuație)

b) Dem. că dc. $\exists\, \mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$ hiperplane a.î. $f|_{\mathcal{H}_1} = f|_{\mathcal{H}_2} = c \in k$

$\overset{?}{\Rightarrow} f$ const.

$\boxed{\text{Var 1}}$: $\mathcal{H}_1 : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + \gamma_1 = 0$

$\mathcal{H}_2 : b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + \gamma_2 = 0$



$\mathcal{H}_1 \cancel{\times} \mathcal{H}_2 = k^n$

$f|_{\mathcal{H}_1} \equiv c \Rightarrow T|_{Dir(\mathcal{H}_1)} \equiv 0$

Alegi $\begin{cases} P_1 \in \mathcal{H}_1 \\ P_2 \in \mathcal{H}_2 \setminus \mathcal{H}_1 \end{cases} \Rightarrow T(P_1 P_2) = \overrightarrow{f(P_1) f(P_2)} = \vec{0}$

$T : k^n = Dir(\mathcal{H}_1) \oplus \langle \overrightarrow{P_1 P_2} \rangle \to k \Rightarrow T \equiv 0 \Rightarrow$ <u>f const</u>

$\boxed{\text{Var 2}}$ Folosiți a).

Dc. $f \neq$ const $\Rightarrow f^{-1}(\{c\}) =$ hiperplan

Dar $f^{-1}(\{c\}) \supseteq \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ ⨳

Ex: a) $\mathcal{A}_1' \subseteq \mathcal{A}_1$ subsp., $\mathcal{A}_2$ sp. afin

$f: \mathcal{A}_1' \to \mathcal{A}_2$ apl. af. $\Rightarrow \exists\, F: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ afină

$F/_{\mathcal{A}'} = f$

$\|F\| = \|f\|$

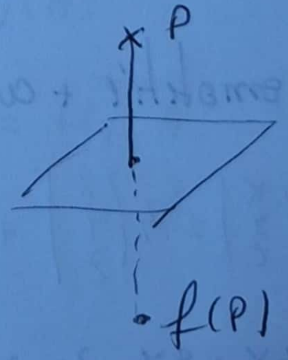
b) $\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_1', \mathcal{A}_1'' \subset \mathcal{A}_1 \\ f': \mathcal{A}_1' \to \mathcal{A}_1 \\ f'': \mathcal{A}_1'' \hookrightarrow \mathcal{A}_1 \\ f'/_{\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_1''} = f''/_{\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_1''} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, F: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ afină a.î.

$\left.\begin{array}{l} F/_{\mathcal{A}_1'} = f' \\ F/_{\mathcal{A}_1''} = f'' \end{array}\right\}$ unic det. pe $\mathcal{A}_1' \vee \mathcal{A}_1''$

<u>Pb3</u> $\mathcal{A}$ sp. afin peste K, char $K \nmid k$.

$f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ apl. af. a.î. $f^k = id_{\mathcal{A}}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ f are pct. fix

$k \geq 1$.



pt. $k = 2$, $f^2 = id$

$f\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}f(P)\right) = \frac{1}{2}f(P) + \frac{1}{2}P$

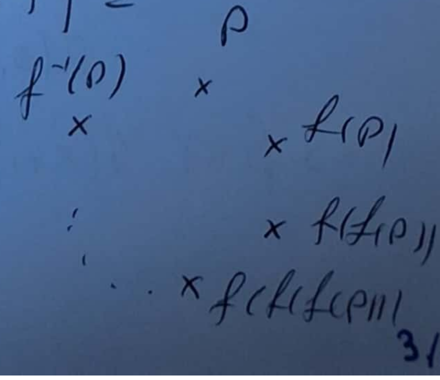
în general iau orbita lui $P \in \mathcal{A}$.

$f\left(\frac{1}{k}P + \frac{1}{k}f(P) + \frac{1}{k}f(f(P)) + \dots + \frac{1}{k}f^{(k-1)}(P)\right) =$

$= \frac{1}{p}f(P) + \frac{1}{k}f(f(P)) + \dots + \frac{1}{k}P$.

$\uparrow$

pct. fix.



Pb4 : $(\mathcal{A}, V)$ sp. af.

$$GAf(\mathcal{A})/_{T} \simeq GL(V)$$

izo de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{A}$ $\qquad$ $T: V \to V$ izo lin.

$$f \in GAf(\mathcal{A}) \Rightarrow f^{-1} \circ T_v \circ f = A^{-1}(T_v \circ f - b) = A^{-1}(AX + \cancel{b} - v - \cancel{b}) = X - A^{-1}v \in T$$

Fie $\varphi : GAf(\mathcal{A}) \to GL(V)$

$\varphi(f) =$ urma liniară a lui f

$\ker \varphi = T$

$\operatorname{Im} \varphi = GL(V)$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ th fundamentală de izo.

Pb5 : Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $f(x,y,z) = (4x-12, 4y+6, 4z-3)$

a) f omotetie + centru + raport

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega = \frac{1}{1-4}\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) $\pi : 4x + 9y - z = 2$

$f(\pi) = ?$ $\qquad$ $f(\pi) \parallel \pi$

$P = (0, 0, -2) \in \pi \Rightarrow f(P) = (-12, 6, -11) \in f(\pi)$.

$\Rightarrow f(\pi) : 4(x+12) + 9(y-6) - \cancel{z}(z+11) = 0$.

Pb6 $\mathcal{A}$ sp. af. și omotetiile H_{O_1,λ_1}, H_{O_2,λ_2}

a) $\lambda_1\lambda_2 \neq 1 \Rightarrow H_{O_1,\lambda_1} \circ H_{O_2,\lambda_2}$ omotetie

$$H_{O_1,\lambda_1}(\lambda_2 X + (1-\lambda_2)O_2) = \lambda_1\lambda_2 X + \lambda_1(1-\lambda_2)O_2 + (1-\lambda_1)O_1.$$

$$= \lambda_1\lambda_2 X + (1-\lambda_1\lambda_2)\left(\frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{1-\lambda_1\lambda_2} O_2 + \frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1\lambda_2} O_1\right)$$

b) $\lambda_1\lambda_2 = 1 \Rightarrow$ comp = translație

$$H_{O_1,\lambda_1} \circ H_{O_2,\lambda_2}(X) = X + \lambda_1(1-\lambda_2)O_2 + (1-\lambda_1)O_1.$$

Pb7 $H_1 = H_{O_1,\lambda_1}$ și $H_2 = H_{O_2,\lambda_2}$

$\exists A \in \mathcal{A}$ a.î. $(H_1 \circ H_2)(A) = (H_2 \circ H_1)(A)$

$X = \underbrace{H_1 \circ H_2(A)}_{\text{centru } H_{12}} = \underbrace{H_2 \circ H_1(A)}_{\text{centru } H_{21}} \Rightarrow \overrightarrow{H_{12}X} = \overrightarrow{H_{12}A} \cdot \lambda_1\lambda_2.$

$\overrightarrow{H_{21}X} = \overrightarrow{H_{21}A} \cdot \lambda_1\lambda_2.$

$\Rightarrow \overrightarrow{H_{12}H_{21}} = \lambda_1\lambda_2 \overrightarrow{H_{12}H_{21}} \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = 1$ sau $H_{12} = H_{21}$

$\Downarrow$

Dc. $\lambda_1\lambda_2 = 1 \Rightarrow$ din 6 avem: $O_1 = O_2.$

$\lambda_1(1-\lambda_2)O_2 + (1-\lambda_1)O_1 = \lambda_2(1-\lambda_1)O_1 + (1-\lambda_2)O_2.$

$\Rightarrow \underline{O_1 = O_2}.$

Pb 8: $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ izo $\Rightarrow$ φ = omotetie $\circ$ translație $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varphi(\mathcal{H}) \parallel \mathcal{H}$ $\forall$ $\mathcal{H}$ hiperplan.

$\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ $\varphi(x) = \lambda x + v \Rightarrow \overset{\bullet}{D}in(\mathcal{H}) = \overset{\bullet}{D}in(\varphi(\mathcal{H}))$
= translație / omotetie

$\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ $\varphi(\mathcal{H}) \parallel \mathcal{H}$.

$T: V \to V$ izo lin. $T(H) = H$, $\forall H \leq V$
$\dim H = \dim V - 1$

$T(W) = W$ $\forall$ $W \leq V$ ($W = \cap$ de hiperplane)

iau $W = \langle v \rangle$

$T(v) = \lambda(v) \cdot v$ cu $\lambda: V \to k$ funcție

Vreau $\lambda(v)$ const.

$\Rightarrow$ $\lambda(v)$ val proprii pt. T.

$$\left.\begin{array}{l} T(v + w) = \lambda(v + w)(v + w) \\ \quad \shortparallel \\ T(v) + T(w) = \lambda(v) v + \lambda(w) w \end{array}\right\} \Rightarrow \forall v, w \text{ lin indep. } \underline{\lambda(v) = \lambda(w)} = \lambda(v + w)$$

$\cancel{\lambda(\alpha v) = \lambda(\alpha v) \cdot \alpha v}$.
$\shortparallel$
$\alpha \lambda \cancel{(v) =}$

$$\left.\begin{array}{l} T(\alpha v) = \lambda(\alpha v) \cdot \alpha v \\ \alpha \overset{\shortparallel}{T}(v) = \alpha \cdot \lambda(v) \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{\lambda(\alpha v) = \lambda(v)}$

$\Rightarrow$ $\underline{\lambda \text{ e const.}}$

Pb9: $\mathcal{A}=\mathbb{R}^3$, $\pi: 4x+9y-z=2$

$W=\langle (1,2,3)\rangle \le \mathbb{R}^3$

$pr_{\pi}^{W}=?$

$\vec{\pi}: \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\9\end{pmatrix}\right\rangle$

$P=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $pr_{\pi}^{W}(P)=P+t(1,2,3)\in\pi$

$4(a+t)+9(b+2t)-(c+3t)=2$

$4a+9b-c+19t=2 \Rightarrow \tilde{t}=\dfrac{-4a-9b+c+2}{19}$

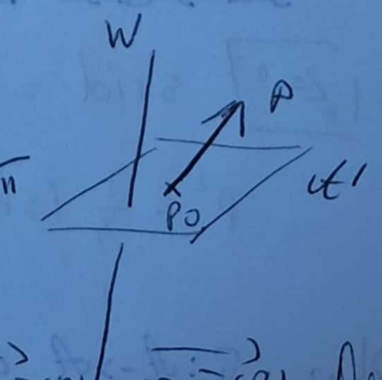
$pr_{\pi}^{W}(a,b,c)=P+\tilde{t}(1,2,3)$

Ex: $p: V\to V$ apl. lin e pr. lin $\Leftrightarrow p^2=p$.

Pb10: $\pi: \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ apl. af.

a) π e pr. af $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{urma liniară } p: V\to V \text{ pr. vect.}\\ \pi \text{ are pct fix}\end{array}\right]$

b) π pr. af $\Leftrightarrow \pi^2=\pi$.



$\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ $\pi=pr_{\mathcal{A}'}^{W} \overset{?}{\Rightarrow} p=pr_{Dir(\mathcal{A}')}^{W}$

$(P+W)\cap\mathcal{A}' \Rightarrow \overrightarrow{P\pi(P)}\in W$

(Aleg $P_0\in\mathcal{A}' \Rightarrow p(v)=p(\overrightarrow{P_0P})=\overrightarrow{\pi(P_0)\pi(P)}=\overrightarrow{P_0\pi(P)}\in Dir(\mathcal{A}')$

$v=\overrightarrow{\overset{\text{pct fix}}{P_0}P}=\underbrace{\overrightarrow{P_0\pi(P)}}_{\in Dir(\mathcal{A}')}+\underbrace{\overrightarrow{\pi(P)P}}_{\in W}$ $\quad Fix(\pi)=\mathcal{A}'$

$\boxed{\Leftarrow}$ Iau P_0 pct fix, $P_0 = \pi(P_0)$

$p = pr^{W}_{W'}$, $V = W' \oplus W$, $\pi = pr^{W}_{P_0+W'}$

$\mathcal{A} = (P_0 + W') \cap (A + W) = (A+W) \cap \mathcal{A}'$

$\overrightarrow{AA'} \in W$, $A' \in \mathcal{A}'$

$\pi(A) = \pi(P) + p(\overrightarrow{P_0 A})$

$\overrightarrow{P_0 \pi(A)} = p(\overrightarrow{P_0 A}) = \overrightarrow{P_0 A'}$

$\overrightarrow{P_0 A} = \underbrace{\overrightarrow{P_0 A'}}_{\in \mathcal{D}in(\mathcal{A}')} + \underbrace{\overrightarrow{A'A}}_{\in W'}$ $\Rightarrow \pi(A) = A'$

b) $\boxed{\Leftarrow}$ $\pi^2 = \pi \Rightarrow p^2 = p$.

$Fix(\pi) = Im\,\pi$ (are pct. fixe.)

$\boxed{\Rightarrow}$ clar din def.

Pb11: V sp. vect fin. dim.

$s : V \to V$ apl. lin.

~~$s^2 = s \Leftrightarrow$~~ s sim vect $\Leftrightarrow s^2 = 1_V$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $s + id = 2p \Rightarrow p = \frac{1}{2}(s + id)$

$p^2 = \frac{1}{4}(s+id)\circ(s+id) = \frac{1}{4}(s^2 + 2s + id) = \frac{1}{2}(s + id) = p$.

Pb12: $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ apl. af.

a) σ sim. af $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{urma lin. } s: V \to V \text{ e sim lin.} \\ \sigma \text{ are pct. fix} \end{cases}$

b) σ sim af $\Leftrightarrow \sigma^2 = id_{\mathcal{A}}$.

a) $\sigma: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a.î. $\begin{cases} s: V \to V \text{ sim.} \\ \sigma(P_0) = P_0. \end{cases}$

$\pi = \frac{1}{2}(id_{\mathcal{A}} + \sigma) \in$ apl. af. $\Rightarrow \pi$ are pct. fixe. $(ex\ P_0)$ $\Big\} \Rightarrow$

$p = \frac{1}{2}(id_V + s) \Rightarrow p$ proiecție

din 10 a)

$\Rightarrow \pi \in \mathcal{P}. \Rightarrow \sigma$ simetrie.

<u>Teoremă</u>: $\forall$ matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sim $\Rightarrow$:

1) e diagonalizabilă

2) $Spec(A) \subset \mathbb{R}$

3) $\mathbb{R}^n = \bigoplus V_\lambda$ cu $\lambda \in Spec(A)$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \rightsquigarrow A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$f^*: (\mathbb{R}^m)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$

${}^tA \longrightarrow {}^tA \quad n \times m.$

$\boxed{f^*(\alpha)(v) = \alpha(f(v))}$

$\varphi: \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*, \quad \varphi(v) = \langle \_, v \rangle$

$$\begin{array}{ccc} f^*: (\mathbb{R}^m)^* & \to & (\mathbb{R}^n)^* \\ \wr\wr \varphi_m & \circlearrowright & \wr\wr \varphi_n \\ \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$\tilde{f}^*(v) = \varphi_n^{-1}(f^*(\varphi_m(v)))$

$\tilde{f}^*(v) = \varphi_n^{-1}(f^*(\langle -, v \rangle)) = \varphi_n^{-1}(w) \to \langle f(w), v \rangle$

$f^*(\langle -, v \rangle)(w) = \langle f(w), v \rangle$

$\to \varphi$ a.î. $\langle w, \varphi \rangle = \langle f(w), v \rangle$

(teta)

$\langle w, f^*(v) \rangle = \langle f(w), v \rangle$.

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e simetrică $\iff \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$

Obs: Are sens $\langle -, - \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \sum_1^n z_i \cdot \overline{w_i}$

produs scalar complex.

$\langle z, z \rangle = \|z\|^2$

$\langle \alpha z, w \rangle = \alpha \langle z, w \rangle \leftarrow \mathbb{C}$ liniară în prima variabilă

$\langle z, \alpha w \rangle = \overline{\alpha} \langle z, w \rangle \leftarrow \mathbb{C}$ antiliniar în a 2-a variab.

$\langle Az, w \rangle = \langle z, {}^t\overline{A} w \rangle$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sim, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow$ are sens

$f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

Fie $\lambda \in Spec(f)$, $f(v) = \lambda v$, $\neq 0$.

$\lambda \in \mathbb{C}$

${}^t\overline{A} = A$

~~$\langle Av, v \rangle$~~

$$\langle Av, v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, Av\rangle_{\mathbb{C}}$$
$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$
$$\langle \lambda v, v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, \lambda v\rangle_{\mathbb{C}}$$
$$\parallel$$
$$\lambda \|v\|^2 = \bar{\lambda}\|v\|^2 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$$

Lemă: $W \leq \mathbb{R}^n$, A invariant, A simetrică $\Rightarrow$
$W^{\perp}$ e A —//——

$$\parallel$$
$$\{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \ \forall w \in W\}$$

$v \in W^{\perp} \Rightarrow Av \in W^{\perp}$

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = 0 \ \forall w \in W.$$

Dem th prin inducție după $n = \dim V$.

$\boxed{n=1}$ ✓.

$n-1 \overset{?}{\Rightarrow} n.$

Aleg $W \leq V$ un subsp. inv. cu $\dim W \geq 1$
(ex $W = \langle v\rangle$, v vect. propriu) $\Rightarrow \mathbb{R}^n = W \oplus W^{\perp}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n = W & \oplus & W^{\perp} \\ A\downarrow & & \downarrow A \\ W & \oplus & W^{\perp} \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A/_W : W \to W \\ A/_{W^{\perp}} : W^{\perp} \to W^{\perp} \end{array}\right\} \text{sunt diag din ip. de inducție}$$

$f(v) = \lambda v$
$f(w) = \mu w$ $\qquad \mu \neq \lambda$

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$
$$\Rightarrow \langle v, w\rangle = 0.$$

Seminarul 6 de Geometrie II

Seria 10 - 2023-2024

6 Spaţii euclidiene. Exerciţii

Exercițiul 6.1: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică, dreapta

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$$

şi planul $\pi : x - 2y + 2z = 1$.

Determinaţi:

a) direcţia normală la planul π.

b) ecuaţia proiecţiei ortogonale pe planul π.

c) proiecţia ortogonală a dreptei d pe planul π.

d) măsura unghiului format de dreapta d şi planul π.

e) măsura unghiului format de planul π cu planul $\pi' : x + y = 1$.

Exercițiul 6.2: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică. Considerăm planul

$$\pi : \ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$$

şi dreapta

$$d : \ \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 1}{0} = \frac{x_3 - 2}{-1}.$$

Determinaţi

a) $S_\pi(d)$ unde S_π este simetria ortogonală faţa de π;

b) $S_d(\pi)$ unde S_d este simetria ortogonală faţa de d.

Exercițiul 6.3: Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu euclidian şi $H : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ o omotetie de raport λ, $|\lambda| \neq 1$. Arătaţi că H nu se poate descompune în produs de simetrii ortogonale. (nu e izo)

Exercițiul 6.4: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ cu structura canonică de spaţiu euclidian. Demonstraţi că o funcţie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o izometrie dacă şi numai dacă există $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, astfel încât

$$f(z) = az + b \text{ sau } f(z) = a\overline{z} + b.$$

Exercițiul 6.5: În $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică considerăm două plane π_1, π_2 astfel încât $\pi_1 \parallel \pi_2, \pi_1 \neq \pi_2$. Fie $O_1 \in \pi_1$, $O_2 \in \pi_2$ puncte astfel încât $O_1O_2 \perp \pi_1$ şi $R_1, R_2 > 0$. Notăm cu $\mathcal{C}_1 \subset \pi_1$ cercul de centru O_1 şi rază R_1 şi cu $\mathcal{C}_2 \subset \pi_2$ cercul de centru O_2 şi rază R_2.

Ce reprezintă mulţimea

$$\mathcal{C}_{R_1,R_2} = \left\{ P \in \mathcal{E} \mid \exists P_1 \in \mathcal{C}_1, P_2 \in \mathcal{C}_2, \ P = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 \right\} ?$$

Exercițiul 6.6:

a) Demonstrați că $-I_n \in SO(n) \iff n$ e par.

b) Demonstrați că $SO(n)$ este subgrup normal al lui $O(n)$ și calculați $O(n)/SO(n)$.

c) Demonstrați că, dacă n e impar și $H = \{\pm I_n\}$, atunci $O(n) = SO(n) \times H$ (i.e. $SO(n) \cap H = \{I_n\}$ și $SO(n)H = O(n)$).

d) Demonstrați că, dacă n e par, $O(n) \not\simeq SO(n) \times \mathbb{Z}_2$.

Exercițiul 6.7: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{\overset{2}{\cancel{3}}}$ cu structura euclidiană canonică, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{\overset{2}{\cancel{3}}}$ un poligon nedegenerat și

$$\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) := \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid f \text{ izometrie }, f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\}.$$

a) Arătați că există $\mathcal{P}$ a.i. $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) \simeq S_3$.

b) Există $\mathcal{P}$ a.i. $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{Z}_4$?

c) Există $\mathcal{P}$ a.i. $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) \simeq S_4$?

Exercițiul 6.8: Clasificați izometriile lui $\mathbb{R}^3$.

Exercițiul 6.9:

a) Fie $A \in O(n)$ de ordin 2 *i.e.* $A^2 = I_n$. Demonstrați că A este matricea unei simetrii s față de un subspațiu vectorial i.e. există o bază ortonormală $\{f_1, ..., f_k, f_{k+1}, ..., f_n\}$ astfel încât

$$sf_i = f_i, \forall i = \overline{1,k},$$
$$sf_j = -f_j, \forall j = \overline{k+1,n}.$$

pentru un $1 \leq k \leq n$.
Echivalent, există $P \in \overset{O(n)}{\cancel{GL_n(\mathbb{R})}}$ astfel încât $A = PSP^{-1}$, unde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Demonstrați că $O(n) \simeq O(m)$ dacă și numai dacă $n = m$.

Exercițiul 6.10: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ cu structura canonică de spațiu euclidian și punctele $A, B, C \in \mathcal{E}$ având coordonatele complexe $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Demonstrați că $\triangle ABC$ este echilateral (pozitiv orientat) dacă și numai dacă $a + b\epsilon + c\epsilon^2 = 0$, unde ϵ este rădăcina de ordin 3 a unității.

Exercițiul 6.11: (teorema lui Napoleon) Fie un triunghi ABC și A^*, B^*, C^* celelalte vârfuri ale triunghiurilor echilaterale construite pe laturile acestui triunghi, ca în primul exercițiu.

Fie E, F, G centrele de greutate ale triunghiurilor A^*BC, B^*AC, C^*AB. Demonstrați că triunghiul EFG este echilateral.

Seminar 6 - Geometrie - 1.04.2025

Pb1 : $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2} \\ \pi : x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$

---

a) $d^{\perp}_{\pi} : \langle (1,-2,2) \rangle$

b) $pr_{\pi} = ?$

c) $pr_{\pi}(d) = ?$

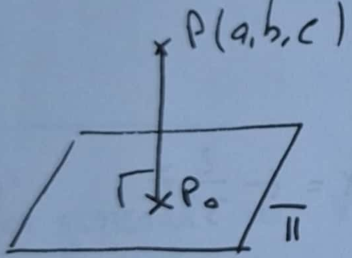
d) $m\measuredangle(d, \pi) = ?$

e) $\pi' : x + y = 1$

$\measuredangle(\pi, \pi') = ?$

---

b)



$pr_{\pi}(P) = pr_{\pi}^{d}(P) = P_0$

$P = (a,b,c) \Rightarrow P_0 = (a+t,\ b-2t,\ c+2t) \in \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow a + t - 2(b-2t) + 2(c+2t) = 1$

$a + t - 2b + 4t + 2c + 4t = 1$

$a - 2b + 2c + 9t = 1 \Rightarrow t = \dfrac{1 - a + 2b - 2c}{9}$

$\Rightarrow pr_{\pi}(a,b,c) = \left(\dfrac{1 + 8a + 2b - 2c}{9}, \dfrac{-2 + 2a + 5b + 4c}{9}, \dfrac{2 - 2a + 4b + 5c}{9} \right)$

c) $d : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow d \cap \pi : 2t + \cancel{1} + 2t + 2 + 4t = \cancel{1}$

$8t + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \dfrac{-1}{4}}$

$\Rightarrow d \cap \pi = \left\{ \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-3}{4}, \dfrac{-1}{2} \right) \right\} \Rightarrow pr_{\pi}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-3}{4}, \dfrac{-1}{4} \right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-3}{4}, \dfrac{-1}{4} \right)$

$pr_{\pi}(\underset{\underset{d}{\cap}}{1,-1,0}) = \left(\dfrac{1+8-2}{9}, \dfrac{-2+2-5}{9}, \dfrac{2-2-4}{9} \right) = \left(\dfrac{7}{9}, \dfrac{-5}{9}, \dfrac{-4}{9} \right)$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{7}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{-4}{9}\right) = \left(\frac{-5}{18}, \frac{-7}{36}, \frac{-1}{18}\right)$

$\Rightarrow pr_{\pi}(d): \dfrac{x-\frac{1}{2}}{10} = \dfrac{y+\frac{3}{4}}{7} = \dfrac{z+\frac{1}{2}}{2}$

d) $\sphericalangle(d, pr_{\pi}(d)) = \sphericalangle\left((2,-1,2),(10,7,2)\right)$

$\cancel{m\sphericalangle}$ $\cos\sphericalangle = \dfrac{\langle (2,-1,2),(10,7,2)\rangle}{\|(2,-1,2)\| \cdot \|(10,7,2)\|} = \dfrac{20-7+4}{\sqrt{9\cdot 153}} = \dfrac{17}{3\sqrt{153}} = \dfrac{17}{9\sqrt{17}}$

$\cos\sphericalangle = \dfrac{\sqrt{17}}{9}$

e) $\pi \cap \pi' : \begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x+y=1. \end{cases}$ $(-)$

$3y-2z=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}z$ şi $x=1-\frac{2}{3}z$

d'

$\Rightarrow \boxed{1-x = y = \dfrac{z}{\frac{3}{2}}}$ dr. de intersecţie

Iau $\cancel{(1,0,0)\in\pi' \Rightarrow pr_{\pi}(1,0,0) = (1,}$

$(1,0,1)\in\pi' \Rightarrow pr_{\pi}(1,0,1) = \left(\frac{7}{2}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$

Vreau $(a,b,c)\in d'$ cu $(a-1,b,c-1)\perp d'$

$\Rightarrow \begin{cases} 1-a=b=\dfrac{c}{\frac{3}{2}} \\ \langle (a-1,b,c-1),(-1,1,\frac{3}{2})\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=b=\dfrac{c}{\frac{3}{2}} \\ 1-a+b+\frac{3}{2}(c-1)=0 \end{cases}$

$2b+\frac{9}{4}b-\frac{3}{2}=0$

. . . . . .

Pb 2 $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} \pi : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ d : \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 - 1}{0} = \frac{x_3 - 2}{-1} \end{cases}$

a) $S_{\pi}(d) = ?$

b) $S_d(\pi) = ?$

a) $sym_{\pi}(P) = 2pr_{\pi}(P) - P = \left(\frac{2 + 7a - 5b - 13c}{9}, \frac{-2 - 5a + b - c}{9}, \frac{2 - 13a - b + c}{9} \right) \ldots$

b) $\vec{m}$ vect. normal la $\pi \Rightarrow S_d(\pi)$ are vect. normal $T(\vec{m})$ unde T = urma lui S_d.

! În general dc. $V = W \oplus W^{\perp}$
$pr_W(v) = pr_W(w + w^{\perp}) = w \in W$

Dc. $W = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ baze ON.
$W^{\perp} = \langle b_1, \ldots, b_e \rangle$

$v = \sum_1^k \alpha_i f_i + \sum_1^l \beta_j b_j \Rightarrow \boxed{pr_W(v) = \sum_1^k \langle v, f_i \rangle \cdot f_i}$

$W = Dir(d) = \langle (1, 0, -1) \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle$

$pr_W(1, -2, 2) = \left\langle (1, -2, 2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$

$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$

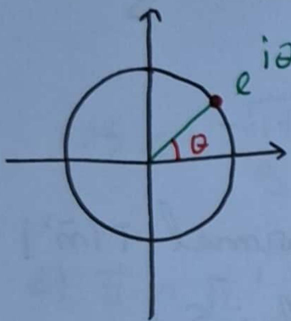
$sym_W(\vec{m}) = \ldots$

Pb4 $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

$\left[f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ izo}\right] \Leftrightarrow \left[\exists a, b \in \mathbb{C} \text{ cu } |a| = 1 \text{ a.î. } f(z) = az + b \text{ sau } f(z) = a\bar{z} + b\right]$

$d(z, w) = |z - w|$

f izo $\Rightarrow f(z) = Az + b$ cu $A \in SO(2)$ sau $A \in O(2) \setminus SO(2)$



$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

$z \longmapsto \bar{z}$ = sim față de Ox

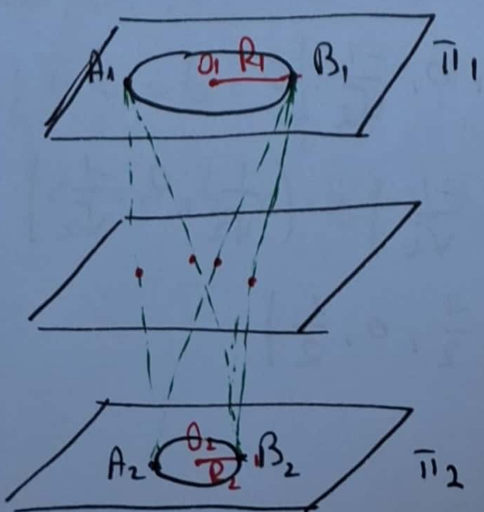
Pb5 $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, $\pi_1 \parallel \pi_2$ plane cu $\pi_1 \neq \pi_2$

$O_1 \in \pi_1$, $O_2 \in \pi_2$ a.î. $O_1O_2 \perp \pi_1$ și $R_1, R_2 > 0$

Notăm $\mathcal{C}_1 \subset \pi_1$, cercul de centru O_1 și raza R_1

$\mathcal{C}_2 \subset \pi_2$ —"— O_2 și rază R_2.

$$C_{R_1,R_2} = \left\{P \in \mathcal{E} \mid \exists P_1 \in \mathcal{C}_1, P_2 \in \mathcal{C}_2, P = \tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{1}{2}P_2\right\} = ?$$



$$C_{R_1,R_2} = \bigcup_{P_1 \in \mathcal{C}_1} \mathcal{C}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{1}{2}O_2}_{Q}, \tfrac{R_2}{2}\Big)$$

$$= \bigcup_{Q \in \mathcal{C}\left(\frac{O_1+O_2}{2}, \frac{R_1}{2}\right)} \mathcal{C}\left(Q, \tfrac{R_2}{2}\right)$$

Pb6 : a) $-I_n \in SO(n) \iff n$ par

b) $SO(n) \trianglelefteq O(n)$

~~Sol~~ $O(n)/_{SO(n)} = ?$

c) n imp și $H = \{\pm I_n\} \Rightarrow O(n) = SO(n) \times H$

d) n par $\Rightarrow O(n) \not\simeq SO(n) \times \mathbb{Z}_2$

---

a) $O(n) = \{A \mid {}^tA \cdot A = I_n\} = \underset{\det = 1}{SO(n)} \cup \underset{\det = -1}{(O(n) \setminus SO(n))}$

$-I_n \in SO(n) \iff \underbrace{\det(-I_n)}_{(-1)^n} = 1 \iff n$ par.

b) $SO(n) \trianglelefteq O(n) \iff \forall A \in SO(n)$ cu $\det A = 1$.

$\forall B \in O(n) \Rightarrow BAB^{-1} \in SO(n)$

$\det(BAB^{-1}) = \det A = 1$ ✓.

$\left.\begin{array}{l}\det : O(n) \to \mathbb{Z}_2 = (\pm 1, \cdot) \\ \ker \det = SO(n)\end{array}\right\} \overset{TFI}{\Rightarrow} O(n)/_{SO(n)} \simeq \mathbb{Z}_2$.

c) $O(n) \simeq SO(n) \times H \iff \begin{cases} SO(n) \cap H = \{I_n\} \\ SO(n) \cdot H = O(n) \end{cases}$

$A = \underbrace{(\det A) \cdot A}_{\in SO(2)} \cdot \underbrace{(\det A) I_n}_{\in H}$.

d) $Z(SO(n)\times\mathbb{Z}_2) \supseteq \{I_n\times I_n;\ I_n\times(-I_n),\ (-I_n)\times I_n,\ (-I_n)\times(-I_n)\}$

Vreau $Z(O(n)) = \{\pm I_n\}$.

$$P_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$Z(O(n)) \supset \{\alpha I_n \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$

$A P_{ij} = P_{ij} A \Rightarrow$ ~~A diag~~.

$A\in Z(O(n))$

$D_i \in O(n) \Rightarrow AD_i = D_i A \Rightarrow A$ diag. (are pe lin + col i 0, mai puțin pe poz i, i)

$$D_i = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots (-1) & & \\ & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

Pb 9 a) $A\in O(n)$ cu $A^2 = I_n \overset{?}{\Rightarrow} A$ sim ortog. față de un subsp. vect $\Leftrightarrow \exists P\in O(n)$ a.î. $A = PSP^{-1}$ unde $S = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

$P\in O(n)$

b) $O(n) \cong O(m)$ (ca grupuri) $\Leftrightarrow \boxed{n = m}$

$\#\left(\{\text{elem. de ord } 2\}/\text{rel. de conjugare}\right) = n+1.$

$O(n) \overset{n \text{ par}}{\not\cong} SO(n)\times\mathbb{Z}_2$

$n+1 \neq \left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot 2$

Pb 8: $Izom(\mathbb{R}^3) = ?$

$Izom(\mathbb{R}^3) \simeq O(3)\ltimes\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ e suf. să înțeleg $O(3)$

$O(3) \simeq SO(3)\times\mathbb{Z}_2 \Rightarrow$ e suf. să înțeleg $SO(3)$

Obs: O mat. din $O(n)$ are 1 val proprie ($1 \in Spec(A)$)

$A \cdot {}^tA = I_n \Rightarrow |\lambda| = 1 \quad \forall \lambda \in Spec(A)$

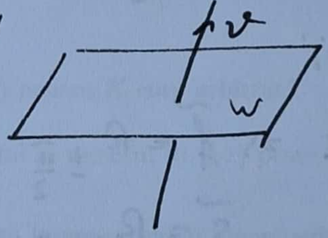
~~det A~~ $\lambda \in Spec(A) \Rightarrow Av = \lambda v$

$$\left.\begin{array}{l} \langle v, {}^tA \cdot A v \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 \\ \quad \| \\ \langle Av, v \rangle_{\mathbb{C}} = |\lambda|^2 \|v\| \end{array}\right\} \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

$\det(A - I_3) = \det(A - A \cdot {}^tA) = \det A \cdot \det(I_3 - A) = \det(I_3 - A)$

$\Rightarrow \det(A - I_3) = 0 \Rightarrow 1$ val. proprie $\Rightarrow \exists\, v \neq 0$ cu $Av = v$

$\Leftrightarrow A\big/_{\langle v \rangle} = W\big/_{\langle v \rangle} \Rightarrow A(W) = W$



$\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$

$\langle Aw, v \rangle = \langle w, {}^tA v \rangle$

$\langle Aw, Av \rangle = \langle w, {}^tA A v \rangle = \langle w, v \rangle = 0.$

$$A \xrightarrow{\text{în baza } \langle v \rangle \oplus W} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A'}} \\ 0 & & \end{array}\right), \quad A' \in SO(2) \text{ (rotație în planul } W$$

$\Rightarrow A =$ rotație în jurul ~~lui~~ unei axe. $\Rightarrow \boxed{SO(3) \simeq \mathbb{P}^3\mathbb{R}}$

Pb: $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, $P \subset \mathbb{R}^2$ polig. reg.

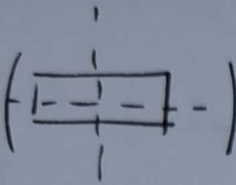
$Izo(P) = \{ f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid f \text{ izo cu } f(P) = P \}$

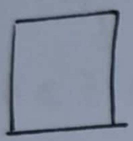
a) $\exists\, P$ cu $Izo(P) \simeq S_3$

b) $\exists\, P$ cu $Izo(P) \simeq \mathbb{Z}_5$?

c) $\exists\, P$ cu $Izo(P) \simeq S_4$?

Sem 1 $\Rightarrow$ P reg. cu n vf. $\Rightarrow \mathrm{Izo}(P) \simeq D_{2n} = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rotație}}}{\rho}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetrie}}}{\sigma} \mid \sigma\rho = \rho^{n-1}\sigma \}$

a) $\mathrm{Izo}\Big($  $\Big) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}_{\text{Klein}}$

b)  $\xrightarrow[\text{strică simetriile}]{\text{imv. la rotații}}$ $\underbrace{(\text{svastica})}_{}$ $\simeq \mathbb{Z}_4$.

Izo

c) $\mathrm{Izo}(P) \simeq S_4$?

Pp. $\mathrm{Izo}(P) \simeq S_4 \Rightarrow \exists f \in \mathrm{Izo}(P)$ cu ord $f = 4$.
$\exists g \in \mathrm{Izo}(P)$ cu ord $g = 3$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow f, g$ rotații

$\tilde{f}, \tilde{g}$ urme $\Rightarrow \tilde{f} = R_{\pm\frac{\pi}{2}}$, $\tilde{g} = R_{\pm 2\frac{\pi}{3}}$ $\Rightarrow \tilde{f}\tilde{g}^{-1} = R_{\frac{\pi}{6}} \in \mathrm{Izo}(P)$ ord 12

Pb10 $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, $A, B, C \in \mathcal{E}$ în coord. complexe $a, b, c \in \mathbb{C}$

ΔABC echilat $\Leftrightarrow a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$ unde $\varepsilon \in U_3$.
$(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0)$

Seminarul 7 de Geometrie II

Seria 10 - 2023-2024

7 Hipercuadrice afine. Exerciţii

Exercițiul 7.1: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spaţiu afin. Aduceţi la forma normală cuadricele următoare, precizând denumirea lor.

a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0;$

b) $x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_3^2 + 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0;$

c) $4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0;$

d) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2 - 8x_3 - 1 = 0.$

Exercițiul 7.2: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spaţiu afin. Verificaţi că orice conică nedegenerată se poate obţine ca intersecţia conului $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ cu un plan.

Exercițiul 7.3: Fie K un corp, $\mathcal{A} = K^2$ cu structura afină canonică şi $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ conica $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 = 1$. Considerăm $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ o transformare afină cu proprietatea că $\tau(P) = P$ pentru orice $P \in \mathcal{C}$.

a) Arătaţi că dacă $K = \mathbb{R}$ atunci $\tau = id_{\mathcal{A}}$.

b) Rămâne adevărată concluzia de la punctul a) pentru K corp arbitrar?

Exercițiul 7.4: Scrieţi ecuaţia conului cu vârful în punctul $(0, 0, 1)$ peste elipsa de ecuaţii $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,\ z = 3.$

Exercițiul 7.5: Demonstraţi că dacă o dreaptă intersectează o hipercuadrică în cel puţin trei puncte (cu multiplicităţi), atunci este inclusă în acea hipercuadrică.

Exercițiul 7.6: Decideţi care dintre cuadrice conţin drepte şi determinaţi ecuaţiile acestor drepte în cazul în care cuadricele sunt în formă normală.

Exercițiul 7.7: În spaţiul afin $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică, fie dreptele

$$d_1 = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad d_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \text{ şi } \quad d_3 : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z.$$

Scrieţi ecuaţia unei cuadrice $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ care conţine dreptele d_1, d_2 şi d_3. Este aceasta unică?

Exercițiul 7.8: Fie K un corp şi $\mathcal{A} = K^n$ cu structura afină canonică.

a) Demonstraţi că prin orice $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ puncte din K^n, există o hipercuadrică Γ care le conţine.

b) Este Γ unică? Când este nedegenerată? $\Leftrightarrow$ sunt în poz. generică

Exercițiul 7.9*: Fie $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ o hipercuadrică geometrică. Demonstraţi că dacă K este corp algebric închis, atunci există o unică hipercuadrică algebrică (până la înmulţirea cu scalari) care îi corespunde lui Γ.

Exercițiul 7.10*: Fie $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ o hipercuadrică geometrică. Demonstraţi că dacă există o dreaptă care intersectează Γ în două puncte distincte, atunci există o unică hipercuadrică algebrică (până la înmulţirea cu scalari) care îi corespunde lui Γ.

Seminar 7 - Geometrie - 8.10.2025

Pb1 a) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$$

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + x_2^2 - 10 - 2x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$y_1^2 + (y_2^2 - 2y_2 + 1) + y_3^2 - 11 = 0$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1 = 0 \quad \text{elipsoid}$$

b) $x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_3^2 + 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$

$$(x_1 + x_2 + 1)^2 - x_2^2 - 10 - 2x_2^2 - 4x_3^2 = 0$$

$$y_1^2 - (y_2 + 1)^2 - 4y_3^2 - 9 = 0$$

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow \text{elipsoid cu 2 pânze}$$

c) $4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$

$$4y_1^2 + 4y_1y_2 + y_3^2 - 2y_2 - 4y_1 - 9 = 0$$

$$(2y_1 - 1 + y_2)^2 - y_2^2 + y_3^2 - 10 = 0$$

$$z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow \text{elipsoid cu o pânză}$$

Pb2 $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$. $\forall$ conică nedegenerată se poate obț. ca $\cap$ unui plan cu conul $x^2 + y^2 - z^2 = 0$?

$\pi : z = c$ const $\Rightarrow x^2 + y^2 = c^2$ $\begin{cases} c \neq 0 \text{ elipsă} \\ c = 0 \text{ pct. dublu} \end{cases}$

$\pi : y = c$ const $\Rightarrow x^2 - z^2 = -c^2$ $\begin{cases} c \neq 0 \text{ hiperbolă} \\ c = 0 \text{ dr. secante} \end{cases}$

$\pi: y - z + 1 = 0$ ($\pi \parallel$ o generatoare $\begin{cases} y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$)

$\rho: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ parametrizez $\pi = (t, s, s+1) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

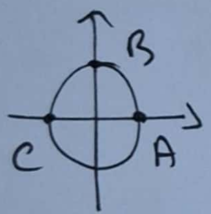
$\gamma = \rho \cap \pi = t^2 + s^2 - s^2 - 2s - 1 = 0$

$t^2 - 2s - 1 = 0$ parabolă

Pb3: $\mathcal{A} = k^2$ $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 1$

$\mathcal{Z}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ af. cu $\mathcal{Z}(P) = P \ \forall P \in \mathcal{C}$

a) $k = \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{Z} = id_{\mathcal{A}}$



$A = (1, 0)$
$B = (0, 1)$
$C = (-1, 0)$ $\Big\}$ necoliniare
$\mathcal{Z}$ păstrează pe loc un rep. afin

e adevărat pt $\forall k$ corp? $\Rightarrow \mathcal{Z} = id_{\mathcal{A}}$

b) Dc. char $k \neq 2 \Rightarrow$ se face ca la a)

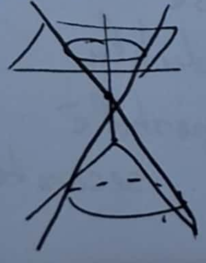
Dc. char $k = 2$

$\underbrace{x^2 + y^2}_{\shortparallel} = 1$

$(x + y)^2 = 1 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow \mathcal{Z}$ ține pe loc o dreaptă

$\Rightarrow$ nu e suficientă info.

Pb4: Scrieți ecuația conului cu vf în $(0,0,1)$ peste elipsa de ec $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 3$.



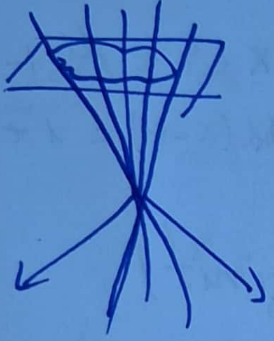
translatez ρ cu $z = 1$ în jos și obț ρ' de vf $(0,0,0)$ peste $\varepsilon' \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

$\Gamma' : \frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{4}z^2 = 0 \Rightarrow$

$\Gamma : \frac{1}{25}\cancel{x}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{4}(z-1)^2 = 0$

<u>Obs</u> Dc. aș fi vrut $z=1$ (adică $\gamma : P(x,y) = 0$

$$x^3 - 2xy + x + 2y - 5 = 0 \xrightarrow{\text{omogenizare}} x^3 - 2xyz + xz^2 + 2yz^2 - 5z^3 = 0$$



<u>Pbs</u>: Ce cuadrice conțin drepte?

<u>$x^2 = 0$</u> plan dublu ✓

<u>$x^2 - y^2 = 0$</u> plane secante ✓

<u>$x^2 + y^2 = 0$</u> dr. dublă ✓

$\boxed{x^2 + y^2 - z^2 = 0}$ con $\forall P \in \Gamma$ $\begin{cases} P \neq \text{centru } \exists!\, d \in \Gamma,\ P \in d. \quad ✓ \\ P = \text{centru } \exists \infty\, d \in \Gamma,\ P \in d. \end{cases}$

<u>$x^2 + y^2 + z^2 = 0$</u> pct X.

<u>$x^2 - 1 = 0$</u> plane ∥ ✓

<u>$x^2 - y^2 - 1 = 0$</u> cilindru hiperbolic ✓ (ca $\forall$ cilindru)

$\boxed{x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0}$ hiperboloid cu 2 pânze X

<u>$x^2 + y^2 - 1 = 0$</u> cilindru eliptic ✓

$\boxed{x^2+y^2-z^2-1=0}$ hiperboloid cu o pânză ✓

↑

dublu riglată ($\forall P \in \mathcal{H} \Rightarrow \exists!\, d_1, d_2$ dr $\subset \mathcal{H}$ cu
$d_1 \cap d_2 = \{P\}$

$x^2 - z^2 = 1 - y^2$

$(x+z)(x-z) = (1-y)(1+y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d_\lambda \begin{cases} x+z = \lambda(1+y) \\ \lambda(x-z) = 1-y \end{cases}$ sau $d_\mu \begin{cases} x+y = \mu(1-y) \\ \mu(x-z) = 1+y. \end{cases}$

$\boxed{x^2+y^2+z^2-1=0}$ elipsoid ✗ (e mărginit)

$x^2 - 2y = 0$ ✓ (cilindru parabolic)

$\boxed{x^2 - y^2 - 2z = 0}$ ✓ „șa"

$(x-y)(x+y) = 2z$

$d_\lambda \begin{cases} \lambda(x-y) = z \\ x+y = 2\lambda \end{cases}$ sau $d_\mu \begin{cases} \frac{1}{\mu}(x+y) = z \\ x-y = \frac{2}{\mu}. \end{cases}$

Pb7 $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ $d_1 = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$d_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

$d_3 : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z$

Ec. unei ~~cont~~ cuadrice Γ care le conține. Este unică?

$\boxed{\text{NU}}$ e unică

$d_1 \cap d_2 \cap d_3 = (0,0,0)$

I plane secante (de ex: $\pi_1 : d_1 \vee d_2$
$\pi_2 \ni d_3$ (∀ plan)

B. de ex: $\pi_1 : X - Z = 0$
$\pi_2 : X - Y - Z = 0$ sau $\pi_2 : -2X + 3Y = 0$

=> nu e unică

II con $d_1 : 0 + t(1,-1,1)$
$d_2 : 0 + t(1,1,1)$
$d_3 = 0 + t(3,2,1)$

$\{z=1\} \cap \{d_1 \cup d_2 \cup d_3\} = \{(1,-1,1), (1,1,1), (3,2,1)\}$

Idee: iau $\gamma \subset \{z=1\}$ o conică a.î. $(1,-1,1), (1,1,1)$
$(3,2,1) \in \gamma$

$P(x,y) = 0 \xrightarrow{\text{omogenizare}} P : \overline{P}(x,y,z) = 0$ e un con așa cum caut

$\begin{cases} P : f = 0 \\ P : g = 0 \end{cases}$ cu $\deg f = \deg g = 2$ și $f, g \in k[X_1, \dots, X_m]$
$Z(f) = Z(g) \overset{?}{\Rightarrow} f = cg$, $c \in k \setminus \{0\}$
$\Updownarrow$
$(f) = (g)$

$\boxed{„\Leftarrow"}$ evident

$f = x^2 + y^2 = 0$
$g = 29x^2 + 105y^2 = 0$ peste $\mathbb{R}$ au ac. zerouri

Dicționarul Algebră - Geometrie

$k^n \ni$ puncte	$k[X_1,\dots X_n]$
$A \subset k^n$	$J \trianglelefteq k[X_1,\dots,X_n]$ ideale
$Z(J) \longleftarrow$	$\longmapsto J$
~~$A \subset k$~~^{n} $Z(J)=\{(1,-3)\} \longleftarrow$	$\longmapsto$ ex: $J=(X-1, Y+3) \trianglelefteq k[X,Y]$
$A \in k^n \longmapsto$	$\longrightarrow J(A)=\{f \in k[X_1,\dots,X_n] \mid f(x_1,\dots,x_n)=0\ \forall (x_1,\dots,x_n)\in A\}$ $\uparrow$ ideal în $k[X_1,\dots,X_n]$
$\{(1,-3)\} \longmapsto$	$\longrightarrow J=(X-1,Y+3)$

Dat $J \trianglelefteq k[X_1,\dots,X_n]$, $J(f) \longrightarrow Z(f)=\{(x_1,\dots,x_n)\in k^n \mid f(x_1,\dots,x_n)=0\}$

$\uparrow$ zerourile lui f.

$Z(J)=\{(x_1,\dots,x_n)\in k^n \mid f(x_1,\dots,x_n)=0\ \forall f\in J\}$

$Z((f))=Z(f)$

$Z((f,g))=Z(f)\cap Z(g)$

! $\forall$ ideal din $k[X_1,\dots,X_n]$ e finit generat

$\mathbb{Z}[X] \supset (2,X)$

$J(Z(J)) \supset J$

$J(\{(1,-3)\}) \supset (X-1, Y+3) \leftarrow$ ideal maximal

$(X-1) \trianglelefteq k[X]$ id. max

- $\boxed{I(Z(I)) \supseteq I}$ în general
- $k[X,Y] / (X-a, Y-b)$ corp.

$\boxed{Q}$ Când $I(Z(I)) = I$???

$I \trianglelefteq R$ ideal $\Rightarrow \sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists n \geq 1 \text{ a.î. } a^n \in I\} \supseteq I$.

$(xa)^n = x^n \underset{\in I}{a^n} \in I$

$(a+b)^{n+m} \in I$.

$\boxed{I(Z(I)) \supseteq \sqrt{I}}$

Th. Hilbert Nullstellensatz: $\boxed{I(Z(I)) = \sqrt{I}}$ dc. k e alg. închis

$Z(f) = Z(g)$, $k = \mathbb{C}$ $\Rightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$. $\deg f = \deg g = 2$.

$\boxed{Q}$: $f(x,y)$, $\deg f = 2$.

$\sqrt{(f)} = \{h \in \mathbb{C}[X,Y] \mid \exists n \geq 1 \text{ a.î. } h^n \in (f)\}$

$f \mid h^n$

h are toți factorii ired. ai lui f

$\mathcal{N}(R) = \sqrt{(0)} \leftarrow$ nilradical.

$f = f_1 \cdot f_2$ sau f e ired.

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$\sqrt{(f)} = (f)$

$f_1 = f_2 \Rightarrow \sqrt{(f)} = (f_1)$ $\qquad$ | $\qquad$ $f_1 \neq f_2$: $\sqrt{(f)} = (f)$

simultan pt f și g

Seminarul 8 de Geometrie II
Seria 10 - 2023-2024

8 Hipercuadrice II. Exerciţii

Exercițiul 8.1:

a) Într-un spaţiu afin, fie hipercuadrica

$$\Gamma : f(X) = {}^t XAX + 2\, {}^t bX + c = 0.$$

Demonstraţi că dacă X_0 este centru (algebric) unic, atunci $f(X_0) = \frac{\Delta}{\delta}$.

b) În $\mathbb{R}^3$, fie cuadrica

$$\Gamma : x^2 + 4xy + 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 8z + 1 = 0.$$

Folosiţi o singură translaţie pentru a elimina componenta de grad 1 din expresia lui Γ, apoi determinaţi tipul cuadricei.

Exercițiul 8.2: Demonstraţi formula enunţată la curs pentru ecuaţia spaţiul tangent la o hipercuadrică $\Gamma : f(X) = 0$, anume

$$T_{X_0}\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \cdot (X_i - (X_0)_i).$$

Exercițiul 8.3: Demonstraţi că dacă o hipercuadrică afină are puncte singulare, atunci $\Delta = 0$.

Examen

Exercițiul 8.4: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$, $P = (1, 1, 0) \in \mathcal{A}$ şi cuadrica $\Gamma : x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy - 4yz + 6x - 4y + 2z - 7 = 0$.

a) Demonstraţi că Γ este un hiperboloid eliptic cu o pânză.

b) Demonstraţi că $P \in \Gamma$ şi calculaţi $T_P\Gamma$ *i.e.* planul tangent în P la Γ.

c) Scrieţi ecuaţia unei drepte d astfel încât $d \subset \Gamma$.

d) Decideţi dacă există $P' \in \Gamma$, $P' \neq P$, astfel încât $T_{P'}\Gamma \parallel T_P\Gamma$. Dacă da, determinaţi un astfel de punct P'.

T

Examen

Exercițiul 8.5: În $\mathbb{R}^3$, fie punctul $P = (-6, 4, -5)$ şi cuadrica $\Gamma : x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz + 4yz + 2x + 9 = 0$.

a) Demonstraţi că Γ este un paraboloid eliptic.

b) Demonstraţi că $P \in \Gamma$ şi calculaţi dreapta normală la Γ în P *i.e.* dreapta d astfel încât $P \in d$ şi $d \perp T_P\Gamma$.

c) Determinaţi vârful paraboloidului eliptic Γ.

d) Fie planul $\pi : x + 2y + z + 1 = 0$. Decideţi dacă există $P' \in \Gamma$ astfel încât $T_{P'}\Gamma \parallel \pi$.

Exercițiul 8.6:

a) Fie $\Gamma \subset K^n$ o hipercuadrică, $\Gamma : {}^tXAX + 2\,{}^tbX + c = 0$, cu centru algebric X_0. Demonstraţi că $T_X\Gamma \parallel T_{S_{X_0}(X)}\Gamma$, pentru orice $X \in \Gamma$.

b) Este adevărat că dacă pentru hipercuadrica Γ există două puncte $X, Y \in \Gamma$ cu $T_X\Gamma \parallel T_Y\Gamma$, atunci Γ are un centru algebric?

Exercițiul 8.7: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ cu structura euclidiană canonică şi $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ o conică nevidă. Notăm

$$I(\mathcal{C}) := \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid f \text{ izometrie cu } f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}.$$

a) Arătaţi că $I(\mathcal{C})$ este un grup în raport cu compunerea funcţiilor.

b) Determinaţi $I(\mathcal{C})$ dacă $\mathcal{C}$ este o parabolă.

c) Determinaţi toate conicele $\mathcal{C}$ pentru care grupul $I(\mathcal{C})$ este infinit.

Exercițiul 8.8: Scrieţi ecuaţia axei de simetrie a conului $\Gamma : x^2 = yz$.

Exercițiul 8.9: Scrieţi ecuaţia sferei care conţine cercul de ecuaţii $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 5$, $x+y+z = 1$ şi e tangentă în punctul $(0, 0, 1)$ la planul de ecuaţie $z = 1$.

Exercițiul 8.10: Decideţi dacă există o sferă pe care să se afle cercurile: Γ_1 de centru $(1, -2, -2)$ de rază 2 din planul de ecuaţie $x+y+z+3 = 0$ şi Γ_2 de centru $(1, 0, 0)$ şi rază 2 din planul de ecuaţie $x - y - z - 1 = 0$. Dacă da, scrieţi ecuaţia sferei.

Exercițiul 8.11: Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu euclidian şi $d_1, d_2 \subset \mathcal{E}$ necoplanare. Demonstraţi că reuniunea perpendicularelor din punctele lui d_1 pe d_2 este o cuadrică şi aflaţi tipul ei.

Exercițiul 8.12:

a) Determinaţi locul geometric al punctelor de pe hiperboloidul cu o pânză $\mathcal{H} : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ în care dreptele generatoare sunt perpendiculare.

b) Determinaţi locul geometric al punctelor de pe paraboloidul hiperbolic $\mathcal{P} : x^2 - y^2 - 2z = 0$ în care dreptele generatoare sunt perpendiculare.

Seminar 8 - Geometrie - 15.04.2024

Pb1: a) $\Gamma: {}^t X A X + 2\,{}^t b X + c = 0$

$\underbrace{X_0 \text{ e centru alg. unic}}_{\Downarrow} \Rightarrow f(X_0) = \frac{\Delta}{\delta}$

$AX_0 + b = 0$ și $\delta \neq 0$

Dem: **Hint**: folosiți Cramer

$f(X_0) = -{}^t X_0 b + 2\,{}^t b X_0 + c = {}^t b X_0 + c$

$AX = -b$ sol unică $X_0 = (X_1^0, \dots, X_n^0)$ cu $X_i^0 = \frac{\left| C_1(A) \dots \overset{\text{poz } i}{-b} \dots C_n(A) \right|}{\delta}$

$\Rightarrow f(X_0) = b_1 X_1^0 + \dots + b_n X_1^n + c$

$= \frac{1}{\delta}\left(b_1 \begin{vmatrix} -b & C_2(A) & \dots & C_n(A) \end{vmatrix} + \dots + b_n \begin{vmatrix} C_1(A) & \dots & C_{n-1}(A) & -b \end{vmatrix} + c\delta \right)$

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc|c} C_1(A) & \dots & C_n(A) & b \\ \hline b_1 & \dots & b_n & c \end{array} \right|$$

$b_1 \begin{vmatrix} -b & C_2(A) & \dots & C_n(A) \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} b_1 \begin{vmatrix} C_2(A) & \dots & C_n(A) & b \end{vmatrix}$

$\shortparallel$

$(-1)^{n+2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hopurile} \\ \text{lui } -b}}{(-1)^{n+1}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de la } -b \\ \text{la } b.}}{(-1)^1} \cdot b_1 \begin{vmatrix} -b & C_2(A) & \dots & C_n(A) \end{vmatrix}$

b) $\Gamma: x^2+4xy+2y^2-z^2+2x-4y+8z+1=0$

tipul cuadricii.

În rap. cu rep. canonic $\mathcal{R}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \{e_1, e_2, e_3\} \right\}$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \delta = 2 \text{ și } \Delta = 48$$

$\delta = 2$: are centru unic | $\Delta = 48$: Γ nu are pct. singulare (nici la ∞)

Centrul x_0:

I $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = 2x_0 + 4y_0 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 3}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = 4x_0 + 4y_0 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{y_0 = -2}$

$\frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = -2z_0 + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{z_0 = 4}$

II $AX_0 + b = 0. \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ în reperul $\mathcal{R} = \left\{ X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \{e_1, e_2, e_3\} \right\}$

conica are ec. $\Gamma: {}^tXAX + 2\underbrace{\cancel{{}^tb}}_{0}X + \underbrace{\cancel{c}}_{\frac{\Delta}{\delta}}$

$\Gamma: (x')^2 + 4(x')(y') + 2(y')^2 - (z')^2 + \frac{48}{2}$

Pb2 $\Gamma: f(x)=0$

$$T_{x_0}\Gamma: \sum_1^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\left(x_i-(x_0)_i\right)=0.$$

La curs: $T_{x_0}\Gamma: {}^t(Ax_0+b)(x-x_0)=0$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\\ \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma: {}^tXAX+2\,{}^tbX+c=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)={}^t\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right)\cdot AX+{}^tXA\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right)+2\,{}^tb\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(x)=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\underbrace{2\,{}^te_i(AX+b)}_{\text{linia } i \text{ a lui } AX+b}=0$$

Pb3: Dem că dc. o hipercuadrică af. are pct. sg $\Rightarrow \Delta=0$.

Dc. x_0 e centru unic $\Rightarrow \underset{\substack{\| \, x_0\in\Gamma \\ 0}}{f(x_0)}=\frac{\Delta}{\delta}\Rightarrow \Delta=0.$

x_0 centru $\Rightarrow Ax_0+b=0$.

$\tilde{A}=\left(\begin{array}{c|c}A & b\\ \hline {}^tb & c\end{array}\right)$, $\tilde{X}=\left(\begin{array}{c}X\\ \hline 1\end{array}\right)$; $\Gamma: {}^t\tilde{X}\tilde{A}\tilde{X}=0$

$$\tilde{A}\tilde{X}=\begin{pmatrix}AX+b\\ \hline \underbrace{{}^tbX+c}_{f(x_0)}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\tilde{A}\tilde{X}_0=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\\ \tilde{X}_0\neq 0.\end{cases} \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ \Delta.}}{\det\tilde{A}}=0$$

Pb6: a) X_0 centru de s. Γ

$Y \in \Gamma \overset{?}{\Rightarrow} T_Y \Gamma \parallel T_{S_{X_0}(Y)} \Gamma$.

b) e adev. că dc. $\exists X, Y \in \Gamma$ cu $T_X\Gamma \parallel T_Y \Gamma \Rightarrow \Gamma$ are centru de s.??
$\boxed{X \neq Y}$

---

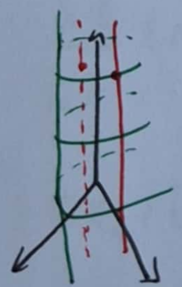
a) $Y \in \Gamma$ ~~și X~~ $T_Y\Gamma : (AY+b)(X-Y)=0$.

$$T_{S_{X_0}(Y)}\Gamma : \big(\underbrace{A(2X_0-Y)+b}_{2AX_0 - AY - b.}\big)(X-(2X_0-Y))=0$$

$S_{X_0}(Y) = 2X_0 - Y$

$T_{S_{X_0}(Y)}\Gamma : (-AY-b)(X-\dots)\dots=0 \Rightarrow T_Y\Gamma \parallel T_{S_{X_0}(Y)}$

b) contraex: cilindru parabolic $x^2-2y=0$.



Pb7: $\Gamma: x^2+2y^2-z^2+2xy-4yz+6x-4y+2z-7=0$

$P=(1,1,0)$

---

a) Γ = hiperboloid eliptic cu o pânză

b) $P\in\Gamma$ și $T_P\Gamma = ?$

c) $d=?$, $d\subset\Gamma$

d) $\exists$? $P'\in\Gamma$ cu $P'\neq P$ a.î. $T_{P'}\Gamma \parallel T_P\Gamma$

---

a) $\Gamma: (x+y+3)^2+y^2-10y-16-z^2-4yz+2z=0$

$x_1^2+(y_1-2z_1+5)^2-4z_1^2-25-20z_1-16-z_1^2+2z_1=0$

$x_2^2+y_2^2-5z_2^2-18z_2-41=0$ - — -

b) $P=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=0\ldots$

$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=2x_0+2y_0+6=2+2+6=10$

$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=4y_0+2x_0-4z_0-4=4+2-4=2$

$\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)=-2z_0-4y_0+2=-4+2=-2.$

$T_P\Gamma: 10(x-1)+2(y-1)-2z=0.$

c) $x_3^2-5z_3^2=\frac{64}{5}-y_3^2$

$(x_3-\sqrt{5}z_3)(x_3+\sqrt{5}z_3)=\left(\frac{8}{\sqrt{5}}-y_3\right)\left(\frac{8}{\sqrt{3}}+y_3\right)$

$d: \begin{cases} x_3=\sqrt{5}z_3 \\ y_3=\frac{8}{\sqrt{5}} \end{cases} \xrightarrow{\text{mă întorc}}$ în coord. inițiale

d) $P'=2C-P$ unde C e centru unic.

Pb7 $\mathcal{E}=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}\subset\mathcal{E}$ o conică nevidă

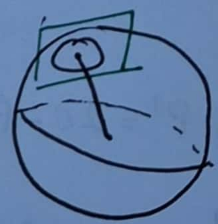
$J(\mathcal{C})=\{f:\mathcal{E}\to\mathcal{E} \mid f \text{ izo cu } f(\mathcal{C})=\mathcal{C}\}$

grupurile cu care sunt izomorfe.

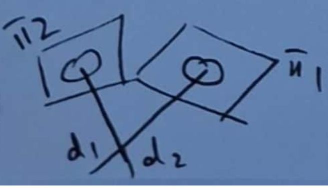
$\mathcal{C}$	$I(\mathcal{C})$
elipsă	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
cerc	$O(2)$
hiperbolă	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
parabolă	$\mathbb{Z}_2$
dr. sec. X	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
dr. pll $\parallel$	$G \supseteq \mathbb{R}$ $\supseteq \mathbb{Z}_2$
dr. dublă $\vert$	—//—
pct. dublu $\cdot$	$O(2)$

Pb10: $\exists$? o sferă $S\ \left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\right)$

care cont. $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \begin{cases} \text{centru } (1,-2,-2),\ R_1=2 \\ x+y+z+3=0 \end{cases} \\ \mathcal{C}_2 \begin{cases} \text{centru } (1,0,0),\ \text{raza } R_2=2 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \end{cases}$



Dc. $\exists S \Rightarrow$ centru Ω al lui S e pe $d_1 \cap d_2$ $\begin{cases} d_1 \perp \pi_1,\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in d_1 \\ \pi_2 \perp d_2 \ni (1,0,0) \end{cases}$

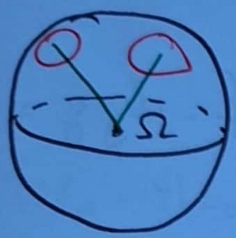


$d_1 = (1,-2,-2) + t(1,1,1)$

$d_2 = (1,0,0) + s(1,-1,-1)$

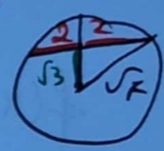
$d_1 \cap d_2 : (1+t,\ t-2,\ t-2) = (1+s,\ -s,\ -s) \Rightarrow \begin{cases} s = t \\ t-2 = -s \Rightarrow \underline{s = 1 = t} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\Omega = (2,-1,-1)}$ poate fi centru.



Cum $R_1 = R_2 = 2 \Rightarrow$ este necesar ca

$$\underbrace{d(\Omega, (1,-2,-2))}_{=\sqrt{3}} = \underbrace{d(\Omega, (1,0,0))}_{=\sqrt{3}} \quad \checkmark$$



$\Rightarrow$ sfera există $\Rightarrow S$ are raza $\sqrt{7}$ și centru $\Omega = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pb 12 d_1, d_2 necoplanare

$P : \bigcup$ = paraboloid hiperbolic.
d e ⊥ din
pct. di pe d_2 pe d_1

Obs: dc. $d_1 \perp d_2 \Rightarrow P$ = plan sau dreaptă

$x^2 - y^2 - 2z = 0$ sau $xy - dz = 0$.

Putem pp. că d_1 = axa OX

$$d_2 : \begin{cases} z = c \\ x - ay = 0, \quad a \neq 0. \end{cases}$$

$d_2 : (at, t, c) \mid t \in \mathbb{R}. \Rightarrow pr_{d_1}(at, t, c) = (at, 0, 0)$

$\Rightarrow$ dr. $d : (at, ts, cs) \mid s \in \mathbb{R}$ dr. ⊥ din (at, t, c) pe d_1

$P = \{(at, ts, cs) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$
$\cap |$
$xz - acy = 0.$

Pb 10 (sem 7): $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ hipercuadrică, $\exists d$ dr. a.î. $|\Gamma \cap d| = 2$ $\Big\} \Rightarrow$ pol. care det Γ sunt echivalente.

~~Inducție după~~ n

$\boxed{n=2}$ Putem pp. că pct. de $\cap$ sunt 0 și $0+e_1$

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ conică

$f, g \in \mathbb{R}[X,Y]$ a.î. $\Gamma: f(x,y)=0$ cu $\deg f = \deg g = 2$
$\Gamma: g(x,y)=0$

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y$$

$f(1,0) = a_{11} + 2b_1$
$f(te_1) = t^2a_{11} + 2tb_1$ $\Big\} \Rightarrow a_{11} \neq 0$ și $b_1 \neq 0$.

$g(te_1) = t^2a_{11}' + 2tb_1'$

$\Rightarrow \alpha(a_{11}, b_1) = (a_{11}', b_1')$ $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$\alpha f - g = 2(\alpha a_{12} - a_{12}')xy + (\alpha a_{22} - \alpha a_{22}')y^2 + 2(\alpha b_2 - b_2')y$$
$$= y\left(2(\alpha a_{12} - a_{12}')y + (\alpha a_{22} - a_{22}')y + 2(\alpha b_2 - b_2')\right)$$

$\Rightarrow \Gamma \subseteq U$ de cel mult 2 dr. $\Rightarrow \Gamma =$ dr. dublă / dr. sec/pll.

$\boxed{\text{Caz general}}$ $f, g \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ $\deg f = \deg g = 2$

$\Gamma: f(x)=0$
$\Gamma: g(x)=0$ $\Rightarrow |\Gamma \cap \{te_1\}| = 2$.

$$f(\alpha e_1 + \beta e_i) = a_{11}\alpha^2 + 2a_{1i}\alpha\beta + a_{ii}\beta^2 + 2b_1\alpha + 2b_i\beta$$

$\Gamma \cap OX_1X_i = \mathscr{C}$ conică $\Rightarrow |\mathscr{C} \cap OX_1| = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_{11}, a_{1i}, a_{ii}, b_1, b_i) \simeq (a_{11}', a_{1i}', a_{ii}', b_1', b_i') \quad \forall i = \overline{2,n}$

$\Rightarrow f \simeq g.$

$\star\ \Gamma \in \mathbb{R}^n$ hipercuadrică. centru geom $\Rightarrow$ centru alg.

Ⅰ X_0 centru $\left.\begin{array}{l} f(2X_0 - Y) = 0 \Leftrightarrow f(Y) = 0 \\ \Gamma : f(2X_0 - Y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ a.î.}$

$f(2X_0 - Y) = \alpha f(Y)$

$\left.\begin{array}{l} {}^t(2X_0 - Y) A (2X_0 - Y) + 2\,{}^t b (2X_0 - Y) + c = 0 \\ = {}^t Y A Y + \dots \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 1.$

Ⅱ $\forall P_1 \neq P_2 \in \Gamma \Rightarrow \Gamma$ e subsp. afin.

$\boxed{\text{A) } \dim \Gamma < n-1} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ sp. conex $\Rightarrow f(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ conex $\Rightarrow$
$\quad\quad \not\ni 0$

$\Rightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma \quad f(X) > 0$ sau
$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma \quad f(X) < 0.$

Fie $X_0 \in \Gamma$, pct. de extrem local pt. $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_i) = 0 \ \forall i \Rightarrow$ e centru alg.

$\boxed{\text{B) } \dim \Gamma = n-1}$

Din transf. afine $\Rightarrow \Gamma : X_1^2 = 0$. Fie f cu $\Gamma : f(X) = 0$

$f(0, X_2, \dots, X_n) = 0 \ \forall X_2, \dots X_n \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f = a_{11} X_1^2 + a_{12} X_1 X_2 + \dots + a_{1n} X_1 X_n + 2b_1 X_1.$

$f = X_1 (a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n + 2b_1)$

$\Rightarrow f = a_{11} X_1^2 \quad \checkmark.$

Seminarul 9 de Geometrie II
Seria 10 - 2023-2024

8 Hipercuadrice euclidiene. Exerciţii

Exercițiul 8.1: Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de spaţiu euclidian. Aduceţi la formă canonică prin izometrii următoarele cuadrice, precizând denumirea lor.

a) $z^2 + 4xy - 1 = 0$;

b) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz - 27 = 0$; +4x

c) $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$;

d) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 3x - 5y - z = 0$;

e) $x^2 + 6x - 2y + 8z + 3 = 0$.

Exercițiul 8.2:

a) Determinaţi locul geometric al punctelor de pe hiperboloidul cu o pânză $\mathcal{H} : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ în care dreptele generatoare sunt perpendiculare.

b) Determinaţi locul geometric al punctelor de pe paraboloidul hiperbolic $\mathcal{P} : x^2 - y^2 - 2z = 0$ în care dreptele generatoare sunt perpendiculare.

9 Plane afine şi proiective. Exerciţii

Exercițiul 9.1: Demonstraţi că orice două drepte dintr-un plan afin au acelaşi număr de puncte.

Exercițiul 9.2: Demonstraţi că orice două drepte dintr-un plan proiectiv au acelaşi număr de puncte.

Exercițiul 9.3: Verificaţi că completarea proiectivă (cu dreapta de la infinit) a unui plan afin este un plan proiectiv.

Exercițiul 9.4: Demonstraţi că, pentru un plan proiectiv $(\mathcal{P}, \Delta)$ şi o dreaptă $d \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \setminus d$ este un plan afin.

Exercițiul 9.5: Verificaţi că proiectivizarea unui spaţiu vectorial de dimensiune 3 *i.e.* $\mathbb{P}^2K$ este un plan proiectiv.

Exercițiul 9.6: Pentru un plan proiectiv $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, definim *dualul* său astfel:

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{D};$$
$$\mathcal{D}^* = \{P^* \mid P \in \mathcal{P}\}, \text{ unde } P^* = \{d \in \mathcal{D} \mid P \in d\} \text{ pentru orice } P \in \mathcal{P}.$$

a) Demonstraţi că $(\mathcal{P}^*, \mathcal{D}^*)$ este un plan proiectiv.

b) Demonstraţi că un plan proiectiv se identifică în mod canonic cu bidualul său.

c) Demonstraţi că dualul planului proiectiv $\mathbb{P}^2K$ este canonic izomorf[1] cu $\mathbb{P}^2K$ dacă $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

[1] Izomorfism = aplicaţie bijectivă care duce drepte proiective în drepte proiective

Seminar 9 - Geometrie - 22.04.2024

$\Gamma: {}^t X A X + 2\,{}^t b X + c = 0$ în $R_0 = (O, B_0)$

$\boxed{I}$ diag A $\Rightarrow A = P D\,{}^t P$, $P = M_{B_1, B_0}$, B_1 ON

$X = P X_1$

$\Gamma: {}^t X_1 ({}^t P A P) X_1 + 2\,{}^t b P X_1 + c = 0$

$\sum \lambda_i x_i^2 + 2\,{}^t b P X_1 + c = 0$ în $R_1 = (O, B_1)$

$\boxed{II}$ translație $\sum_1^r \lambda_i x_i^2 + 2 \sum_{r+1}^m b_i x_i + c = 0$

$\boxed{III}$ Aleg un rep ON (Gram - Schmidt) a.î. $\Gamma: \sum_1^r \lambda_i x_i^2 + 2\beta x_{r+1} = 0$

Pb1: a) $z^2 + 4xy - 1 = 0$.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\boxed{I}$ $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$

într-un rep. $\Gamma: 2x^2 + y^2 - 2z^2 + 0 - 1 = 0$.

$b = 0$

hiperboloid cu o pânză

$V_{\lambda_1} = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_1} = \langle (1, 1, 0) \rangle$

$$V_{\lambda_2} = \begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x-y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_2} = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$V_{\lambda_3} = \begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 3z=0 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_3} = \langle (1,-1,0) \rangle$$

$$\Rightarrow \mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{-1}{\sqrt2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad R_1 = (0, \mathbb{B}_1)$$

b) $5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz+4xz+4x-27=0$

I $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 5 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 27 \end{array}\right)$, $\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 8-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot(+\lambda-9)^2$

$$V_{\lambda_1}: \begin{cases} -4x+2y-4z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ -4x+2y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(0,2,1) - \frac{4}{5}(1,2,0) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \sim (-4,2,5)$$

$$V_{\lambda_2}: \begin{cases} 5x+2y-4z=0 \\ 2x+8y+2z=0 \\ -4x+2y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_2} = \langle (2,-1,2) \rangle.$$

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-4}{3\sqrt5} \\ \frac{2}{3\sqrt5} \\ \frac{5}{3\sqrt5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}, \; {}^tb = (2,0,0)$$

$${}^tb \cdot P = (2,0,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{-4}{3\sqrt5} & \frac{2}{3} \\ - & - & - \\ - & - & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-8}{3\sqrt5} & \frac{4}{3} \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

În $R_1 = (0, \mathbb{B})$

(II) $\Gamma: 9x^2+9y^2+\frac{4}{\sqrt5}x-\frac{16}{3\sqrt5}y+\frac{8}{3}z-27=0$

$\Gamma: 9\left(x+\frac{2}{9\sqrt5}\right)^2+9\left(y-\frac{8}{27\sqrt5}\right)^2+\frac{8}{3}(z-\ldots)+9=0$

$R_2=\left(\left(\frac{-2}{9\sqrt5},\frac{8}{27\sqrt5},0\right),B\right\}$

c) $6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -4 \\ \hline 4 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow |A|=-64=\delta$$

$\Delta=320$

$$\begin{cases} 12x+4z+8=0 \\ -4y-4=0 \\ 12z+4x-8=0 \end{cases} \Rightarrow (-1,-1,+1) \text{ centru unic} \Rightarrow \text{translația}$$

$R \longmapsto R_1=\left((-1,-1,1),B\right\}$

$\Gamma \longmapsto \Gamma: 6x_1^2-2y_1^2+6z_1^2+4x_1z_1-\frac{5}{4}=0.$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(4-\lambda)(8-\lambda) \Rightarrow \lambda=8,4,-2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Gamma: 8x^2+4y^2-2z^2-5=0 \quad \mathcal{H}_1$

e) $x^2+6x-2y+8z+3=0$

(II) $$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 3 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$\Gamma: (x+3)^2-2y+8z-6=0$

$\Gamma: x^2-2y+8z-6=0$

$R_1=\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},B\right\}$

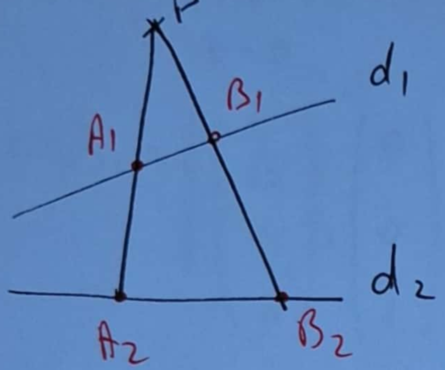
(III) $\Gamma: x_1^2-2(\underbrace{y_1-4z_1+3}_{\beta y_2})=0$

$\Gamma: x_2^2-2\sqrt{17}\,y_2=0.$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right)$$

~~Hiperplane~~ Plane afine și proiective

Pb1 : $\forall$ 2 dr. dintr-un plan af. au ac. nr. de pct.

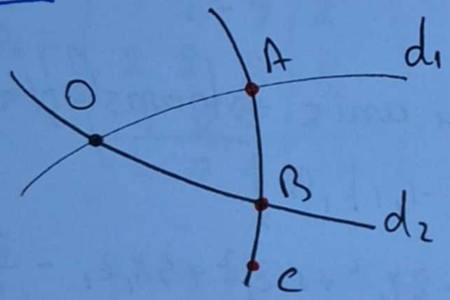


Iau $P \notin d_1 \cup d_2$

Iau $\varphi : d_1 \to d_2$

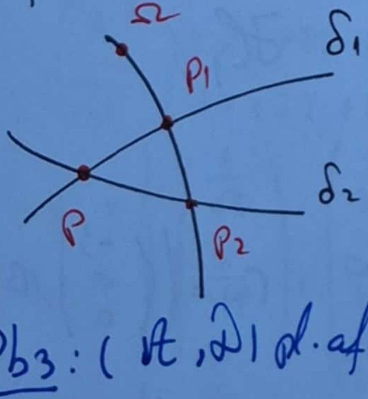
$\varphi(A_1) = \{A_2\} = PA_1 \cap d_2$. bij.

Pb1.5 : $d_1 \cup d_2 \neq P$ plan proj.



Pb2 : $\forall$ 2 dr. dintr-un plan proj. au ac. card.

$f : \delta_1 \to \delta_2$



$f : \delta_1 \to \delta_2$, $f(P_1) = \{P_2\} = \Omega P_1 \cap \delta_2$

$\Omega \notin d_1 \cup d_2$

$g : \delta_2 \to \delta_1$, $g(Q_2) = Q_1 = \Omega Q_2 \cap Q_1$

inversa lui f.

Pb3 : $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ pl. af. $\Rightarrow (\mathcal{P}, \Delta)$ plan proj.

$(\mathcal{D}/_{\parallel}) = d_\infty$ pct. de la ∞.

rel. de $\parallel$

$\bar{d} = d \cup \{[d]\}$

$\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup d_\infty$, $\Delta = \{\bar{d} \mid d \in \mathcal{D}\} \cup \{d_\infty\}$

Dem : $(\mathcal{P}, \Delta)$ plan proj.

P1) $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow$ există o unică dr AB.

$\boxed{\text{caz } 1}$ $A, B \in \mathcal{A} \overset{A1}{\Rightarrow} (\exists!)\, \underset{AB}{\underset{\shortparallel}{d}} \in \mathcal{D} \Rightarrow (\exists!)\, \bar{d} \ni A, B.$

$\boxed{\text{caz } 2}$ $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{A} \\ B = \{d\} \end{array}\right| \overset{A4!}{\Rightarrow} \exists!\, \underset{A}{\underset{\Downarrow}{d_A}} \parallel d \Rightarrow AB = \bar{d}_A$ unică

$\boxed{\text{caz } 3}$ $\left.\begin{array}{l} A = \{d_1\} \\ B = \{d_2\} \end{array}\right| \Rightarrow AB = d_\infty.$

P2) evident din A2)

P3) $\delta \in \Delta \Rightarrow |\delta| \geq 3.$

dc. $\delta = \bar{d} \Rightarrow |d| \geq 2 \Rightarrow |\bar{d}| \geq 3.$

dc. $\delta = d_\infty$, $\exists$ 3 pct. necol în $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ 3 dr. dif. simple

în $A \Rightarrow$ ~~$|\delta_\infty$~~ $|d_\infty| \geq 3.$

P4) $\delta_1, \delta_2 \in \Delta \Rightarrow \delta_1 \cap \delta_2 \neq \emptyset.$

$\boxed{\text{caz } 1}$ $\begin{array}{ll} \delta_1 = \bar{d}_1 & \Rightarrow d_1 \cap d_2 \neq \emptyset \Rightarrow \delta_1 \cap \delta_2 \neq \emptyset \\ \delta_2 = \bar{d}_2 & \Rightarrow d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \{d_1\} = \{d_2\} \Rightarrow \delta_1 \cap \delta_2 \neq \emptyset. \end{array}$

$\boxed{\text{caz } 2}$ $\left.\begin{array}{l} \delta_1 = \bar{d} \\ \delta_2 = d_\infty \end{array}\right. \Rightarrow \delta_1 \cap \delta_2 \neq \emptyset.$

Pb4 $(\mathcal{P}, \Delta)$ plan proj, $\delta_0 \in \Delta$

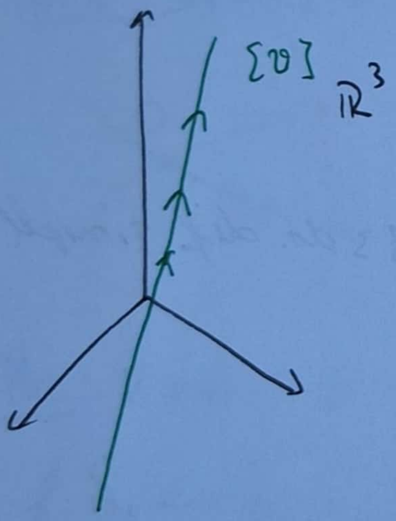
~~$A \setminus \delta_0$~~ $\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus \delta_0$ pl. af.

$\mathcal{D} = \{\delta \setminus \delta_0 \mid \delta \in \Delta \setminus \{\delta_0\}\}$

Pb5 V = sp. vect. de dim 3

$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \sim$ $\qquad v \sim w \iff \exists \lambda \in K \setminus \{0\}$ a.î. $v = \lambda w$

$\mathbb{P}^2 V$ ~~sp.~~ pl. proj.



Dicționar

V	$\mathbb{P}(V)$
dr. proj	pct. proj
pl. proj	dr. proj

$p : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ p. canonică

$v \mapsto [v]$

$\Delta := \{ p(\pi \setminus \{0\}) \mid \pi \leq V,\ \dim \pi = 2 \}$

P1) $\iff \forall$ 2 dr. vect. distincte $\in$ unui unic plan vect.

$\forall v, w \in V \setminus \{0\}$ lin. indep $\Rightarrow (\exists!)\ \pi \leq V$ de dim 2

$\pi \ni v, w$

$\pi = \langle v, w \rangle$

P2) $\iff \exists$ 3 dr. necoplanare ✓

($\dim V = 3$.

P3) $\forall$ plan cont. cel puțin 3 dr. vect.

$\forall \pi \leq V$ de dim 2 $\Rightarrow \exists\ v, w, u \in \pi$ $\forall$ 2 neprop.

(iau $v, w, v+w$)

P4) $\forall \pi_1, \pi_2 \in V$ cu $\dim \pi_i = 2 \Rightarrow \dim(\pi_1 + \pi_2) \geq 1$.

(Grassmann) $\underbrace{\dim(\pi_1+\pi_2)}_{\leq 3} = \underbrace{\dim \pi_1}_{= 2} + \underbrace{\dim \pi_2}_{= 2} - \underbrace{\dim(\pi_1 \cap \pi_2)}_{\geq 1}$

Pt $V = k^3 \Rightarrow \mathbb{P}^2 k = \mathbb{P}(k^3) \simeq \mathbb{P}(k^2)$

Pbs $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ plan proj.

$$\begin{cases} \mathcal{P}^* = \mathcal{D} & \text{dualul} \\ \mathcal{D}^* = \{P^* \mid P \in \mathcal{P}\} & \text{unde } P^* = \{d \in \mathcal{D} \mid P \in d\} \end{cases}$$

a) $(\mathcal{P}^*, \mathcal{D}^*)$ plan proj

b) $\exists$ bij între un plan proj și bidualul lui

c) $(\mathbb{P}^2 k)^* \underset{\text{canonic izomorf}}{\simeq} \mathbb{P}^2 k$ pt $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

a) $P_1^* \Leftrightarrow P_4$ $\quad P_2^* \Leftrightarrow \exists$ 3 dr. neconcurente (din $P_2 + P_1$)

$P_4^* \Leftrightarrow P_1$ $\quad P_3^* \Leftrightarrow \forall$ 3 pct $\in$ 3 dr. distincte.

b) $I \subset \mathcal{P} \times \Delta$ ← rel. de incidență

"$P \in \delta$" $\Leftrightarrow$ găsesc (P, δ) în I.

$P_1 - P_4$ axiome despre $(\mathcal{P}, \Delta, I)$

$(\mathcal{P}, \Delta, I) \xrightarrow{*} (\Delta, \mathcal{P}, I^*)$ unde $(P, \delta) \in I \Leftrightarrow (\delta, P) \in I^*$

$\Rightarrow (\Delta, \mathcal{P}, I^*) \xrightarrow{*} (\mathcal{P}, \Delta, I)$

Seminarul 10 de Geometrie II

Seria 10 - 2023-2024

10 Spaţii afine şi proiective. Exerciţii

Exercițiul 10.1: Pentru un plan proiectiv $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, definim *dualul* său astfel:

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{D};$$
$$\mathcal{D}^* = \{P^* \mid P \in \mathcal{P}\}, \text{ unde } P^* = \{d \in \mathcal{D} \mid P \in d\} \text{ pentru orice } P \in \mathcal{P}.$$

a) Demonstraţi că $(\mathcal{P}^*, \mathcal{D}^*)$ este un plan proiectiv.

b) Demonstraţi că un plan proiectiv se identifică în mod canonic cu bidualul său.

c) Demonstraţi că dualul planului proiectiv $\mathbb{P}^2K$ este canonic izomorf[1] cu $\mathbb{P}^2K$ dacă $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

d) Generalizaţi construcţia dualului pentru un spaţiu proiectiv de orice dimensiune.

e) În cazul unui spaţiu proiectiv de dimensiune 3, dualizaţi următoarea afirmaţie:

"Pentru orice trei puncte proiective necoliniare, există trei drepte distincte, fiecare conţinând două dintre puncte."

Exercițiul 10.2: Verificaţi că, pentru un corp comutativ K, $\mathbb{P}^nK$ este un spaţiu proiectiv de dimensiune n.

Exercițiul 10.3: Fie planul proiectiv $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ şi punctele $A = [1 : 0 : 2], B = [2 : 4 : 8]$, $C = [0 : 2 : 1], D = [2 : 1 : 3]$. Găsiţi punctul de intersecţie $AB \cap CD$.

Exercițiul 10.4: Fie spaţiul proiectiv $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ şi punctele $A = [1 : 0 : 2 : 2], B = [2 : 4 : 8 : 0]$, $C = [0 : 2 : 1 : -1], D = [2 : 1 : 3 : -2]$. Decideţi dacă dreptele AB şi CD se intersectează.

Exercițiul 10.5:

a) Demonstraţi că, pentru un spaţiu afin $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \Pi)$, completarea sa cu puncte la infinit este un spaţiu proiectiv.

b) Demonstraţi că, pentru un spaţiu proiectiv $(\mathcal{P}, \Delta)$ şi un hiperplan $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \setminus \mathcal{H}$ este un spaţiu afin.

Exercițiul 10.6:

a) Fie K un corp comutativ, V un K-spaţiu vectorial de dimensiune 4 şi $\mathcal{P} = \mathbb{P}(V)$. Arătaţi că, pentru două drepte care nu se intersectează şi un punct exterior lor, există o unică dreaptă care trece prin acel punct şi intersectează cele două drepte.

b) Puteţi da o demonstraţie care funcţionează pentru orice spaţiu proiectiv de dimensiune 3?

c) Dualizaţi afirmaţia de la punctul a).

[1] Izomorfism = aplicaţie bijectivă care duce drepte proiective în drepte proiective

Exercițiul 10.7: Fie K un corp finit, $|K| = q$ şi V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n. Demonstraţi că

$$|\mathbb{P}(V)| = \frac{q^{n\cancel{+1}} - 1}{q-1}.$$

Exercițiul 10.8: Fie $(\mathcal{P}, \Delta)$ un spaţiu proiectiv.

a) Demonstraţi că orice două drepte au acelaşi cardinal, fie el q.

b) Determinaţi $|\mathcal{P}|$ în funcţie de q.

c) Determinaţi $|\mathcal{D}|$ în funcţie de q.

Exercițiul 10.9:

a) Demonstraţi că un spaţiu proiectiv n-dimensional nu poate fi reuniunea a n hiperplane ale sale.

b) Demonstraţi că dacă $\mathcal{P}$ este infinit, atunci nu poate fi scris ca o reuniune finită de hiperplane.

Exercițiul 10.10: Demonstraţi că aplicaţia

$$\nu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6, \nu(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz)$$

coboară la o “scufundare” a lui $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ în $\mathbb{P}^5\mathbb{R}$.

Puteţi generaliza aplicaţia pentru a “scufunda” orice spaţiu proiectiv $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ în spaţii proiective de dimensiuni mai mari?

Seminar 10 - Geometrie - 29.04.2024

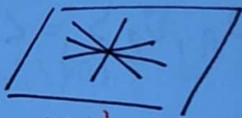
Pb2: $\mathbb{P}^n k = \dfrac{k^{n+1}\setminus\{0\}}{\sim}$ sp. proj. de dim n.

P1) $\left.\begin{array}{l}\forall\, W_A \neq W_B \leq k^{n+1} \\ \dim W_A = \dim W_B = 1\end{array}\right\} \Rightarrow (\exists!)\ \pi \leq k^{n+1}$ a.î. $\pi \supset W_A, W_B$, $\dim \pi = 2$

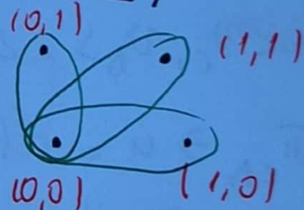
$\pi := W_A + W_B$.

P2) $\exists\, U, V, W \leq \pi$, dim 1

Ex $\pi = k$



$k = \mathbb{Z}_2^2$



În general $\pi = \langle u, v\rangle$ bază

$\Rightarrow U = \langle u\rangle$

$V = \langle v\rangle$

$W = \langle u+v\rangle$

PV) $\left.\begin{array}{l}\forall\, \pi_1, \pi_2 \leq k^{n+1} \\ \dim \pi_i = 2\end{array}\right. \not\Rightarrow \dim \pi_1 \cap \pi_2 = 1$

$\left.\begin{array}{l}\forall\, W_1, W_1' \leq \pi_1 \\ \forall\, W_2, W_2' \leq \pi_2\end{array}\right.$ dim 1 dif de $\pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow \dim\big((W_1+W_2)\cap(W_1'+W_2')\big) \geq 1$

[Reamintire: În $\mathbb{P}^2 k$, $\forall$ 2 dr se $\cap$.

$\left.\begin{array}{l}\forall\, \pi_1, \pi_2 \leq k^3 \\ \dim 2\end{array}\right| \Rightarrow \dim(\pi_1 \cap \pi_2) \geq 1$ (Grassmann)

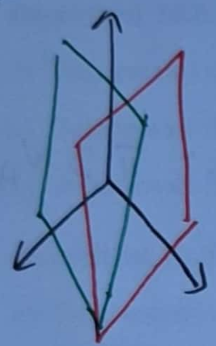
$\to$ Grassmann $\Rightarrow \dim(\pi_1 + \pi_2) = 3$

$\dim\big(\underbrace{(W_1+W_2)+(W_1'+W_2')}_{\leq (\pi_1+\pi_2)}\big) = \underbrace{\dim(W_1+W_2)}_{=2} + \underbrace{\dim(W_1'+W_2')}_{=2} - \underbrace{\dim\big((W_1+W_2)\cap(W_1'+W_2')\big)}_{\geq 1}$

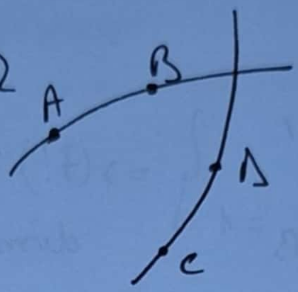
Pb3 În $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$: $\begin{cases} A=[1:0:2] & C=[0:2:1] \\ B=[2:4:8] & D=[2:1:3] \end{cases}$

$AB \cap CD = ?\ \{P\}$

$\mathbb{R}^3$



$\mathbb{P}^2\mathbb{R}$



$$\pi_{AB} = \langle v_A, v_B \rangle = \langle (1,0,2), \overset{(1,2,4)}{\overset{\shortparallel}{(2,4,8)}} \rangle = 2x+y-z=0$$

$$\pi_{CD} = \langle v_C, v_D \rangle = \langle (0,2,1),(2,1,3) \rangle$$

$$\pi_{AB} \cap \pi_{CD} \ni u = a(1,0,2)+b(1,2,4) = c(0,2,1)+d(2,1,3) \Rightarrow \begin{cases} a+b-2d=0 \\ 2b-2c-d=0 \\ 2a+4b-c-3d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a,b,c,d) = (-7\alpha, 3\alpha, 4\alpha, -2\alpha)$$

$$u = -7(1,0,2)+3(1,2,3) = 4(0,2,1)-2(2,1,3) = (2,-3,1]$$

$$\Rightarrow \boxed{P=[2:-3:1]}$$

Pb4: $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ și $\begin{cases} A=[1:0:2:2] & C=[0:2:1:-1] \\ B=[1:2:4:0] & D=[2:1:3:-2] \end{cases}$

$AB \cap CD = ?$

$$\pi_{AB} = \langle (1,0,2,2),(1,2,4,0) \rangle \leq \mathbb{R}^4$$

$$\pi_{CD} = \langle (0,2,1,-1),(2,1,3,-2) \rangle \leq \mathbb{R}^4$$

Grassmann $\Rightarrow AB \cap CD \neq \emptyset \Leftrightarrow \langle v_A, v_B, v_C, v_D \rangle \neq \mathbb{R}^4$

$\iff rk\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_4 \\ | & & | \end{pmatrix} \le 3.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$\det \neq 0$

Pb2 $\dim \mathbb{P}^n k = n$.

S sist. minimal de gen pt. $\mathcal{P} \Rightarrow \dim \mathcal{P} = |S| - 1$

Curs: $L \subset \mathbb{P}^n k$ e var. lin $\iff L = p(W \setminus \{0\})$ cu $W \leq k^{n+1}$ subsp. vect.

$$\boxed{L = \langle \{[v_i] \mid i \in I\} \rangle \iff W = \langle v_i \mid i \in I \rangle}$$

$\Rightarrow$ un sist. minimal de gen. pt. $\mathbb{P}^n k$ este $\underbrace{\{[e_1], \dots, [e_{n+1}]\}}_{\text{clasele unei baze}}$

Pb1 Data trecută: $(\mathcal{P}, \Delta)$ pl proj $= (\mathcal{P}, \Delta, I)$, $I \subset \mathcal{P} \times \Delta$ rel. de incidență

$(p * d \iff (p, d) \in I)$

$\Rightarrow (\mathcal{P}^*, \Delta^*)$ pl. proj. dual cu $\begin{cases} \mathcal{P}^* = \Delta \\ \Delta^* = \{p^* \mid p \in \mathcal{P}\} \end{cases}$

$p^* = \{d \in \Delta \mid p * d\}$

c) $\boxed{k = \mathbb{R}}$ $(\mathcal{P}, \Delta) \simeq (\mathcal{P}^*, \Delta^*)$

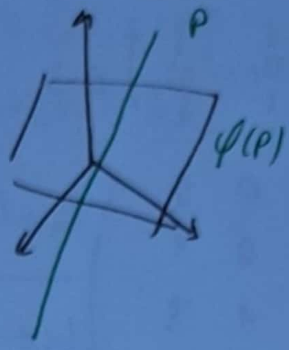
Fie $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^* = \Delta$, $\varphi([v]) = p(v^{\perp} \setminus \{0\})$ bij

Iau $\boxed{\mathcal{P} = \mathbb{P}^2 \mathbb{R}}$ $\boxed{Q}$ duce dr în dr $*$?

Fie $d \in \Delta \Rightarrow \varphi(d) = ?$

$d = p(\pi \setminus \{0\})$

$\forall W \leq \pi$, $\dim W = 1 \Rightarrow W^\perp \supset \pi^\perp$



Invers, $\forall U$, $\dim U = 2$

$U \supset \pi^\perp \Rightarrow \exists W \leq \pi$ a.î. $U = W^\perp$

$(W = U^\perp)$

$\Rightarrow \boxed{\varphi(d) = (\pi^\perp)^*}$

Pb test: $(\mathcal{P}, \Delta)$, $\forall d$ are $|d| = g \Rightarrow |\mathcal{P}| = g^2 - g + 1$

Var1: $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ sp. af. $\Rightarrow |\mathcal{A}| = g^2$

$\Rightarrow g^2$ pct.

$(\mathcal{P}, \Delta)$ completarea cu pt. la ∞

$|\mathcal{A}| = k^2$, $\forall$ dr. are card k.

Data trecută $|\mathcal{P}| = k^2 + k + 1 = g^2 - g + 1$

$g = k + 1$

Var 2

$g(g-1)+1$ pct.

d) $(\mathcal{P}, \Delta)$ sp. proj. de dim n. Fie $\mathcal{H}$ = mt. hip. proj.

$\mathcal{P}^* = \mathcal{H}$

$\Delta^* = \{L^* \mid L \subset \mathcal{P}$ var lin. de dim $n-2\}$

$L^* = \{H \in \mathcal{H} \mid H \supset L\}$

sp. proj de dim n. dualul

pct $\qquad$ dr.

0 $\qquad$ 1

$\updownarrow \qquad \updownarrow$ - - - - -

$m-1 \qquad m-2$

hiperplan

Pb7: $\mathbb{P}^m k$, $|k| = q$ finit. $\Rightarrow |\mathbb{P}^m k| = \dfrac{q^{m+1}-1}{q-1}$

$\mathbb{P}^m k = \dfrac{k^{m+1} \setminus \{0\}}{\sim}$ $\qquad [v] = \{\alpha v \mid \alpha \in k \setminus \{0\}\}$

$\boxed{m=2} \Rightarrow |\mathbb{P}^2 k| = q^2 + q + 1 = k^2 - k + 1$

$q + 1 = k. = |d|$

Pb6: a) $P = \mathbb{P}^3 k$, $\forall d_1, d_2$, $d_1 \cap d_2 = \emptyset$, $\forall p \notin d_1 \cup d_2$ $\Big\} \Rightarrow \exists!\, d$ dr. cu $p \in d$ și $d \cap d_i \neq \emptyset$.

Dem: Existență: $\forall \pi_1, \pi_2 \leq k^4$ dim 2, $\pi_1 \cap \pi_2 = \{0\}$, $\forall w \leq k^4$ dim 1, $w \notin \pi_1 \vee \pi_2$ $\Big\} \Rightarrow (\exists!)\, \pi \leq k^4$, dim 2 a.î. $w \in \pi$, $\dim(\pi \cap \pi_i) = 1$.

$\boxed{\pi_1 \oplus \pi_2 = k^4}$, $w = \langle \omega \rangle \Rightarrow (\exists!)\, \underset{\in \pi_1}{u_1}, \underset{\in \pi_2}{u_2}$ a.î. $\omega = u_1 + u_2$

Aleg $\pi = \langle u_1, u_2 \rangle \Rightarrow \begin{cases} \pi \cap \pi_1 = \langle u_1 \rangle \\ \pi \cap \pi_2 = \langle u_2 \rangle \end{cases}$

Unicitate: Fie π' plan, $w \leq \pi'$, $\dim(\pi' \cap \pi_i) = 1$ $\Big\} \overset{?}{\Rightarrow} \pi' = \pi = \langle u_1, u_2 \rangle$

$\pi' \cap \pi_1 = \langle v_1 \rangle$, $\pi' \cap \pi_2 = \langle v_2 \rangle$ $\Rightarrow \pi' = \langle v_1, v_2 \rangle \ni \omega \Rightarrow \omega = \underset{\pi_1}{\alpha v_1} + \underset{\pi_2}{\beta v_2}$

$\xrightarrow[\text{unică}]{\text{disc.}}$ $u_1 = \alpha v_1$ și $u_2 = \beta v_2$.

b) Pt. un sp. abstract de dim 3?

$\langle d_1 \cup d_2 \rangle = \mathcal{P}$ (Dc. nu, $\langle d_1 \cup d_2 \rangle$ pl. maj, dar $d_1 \cap d_2 = \emptyset$)

$\shortparallel$

var. lin care cont. d_1 și d_2

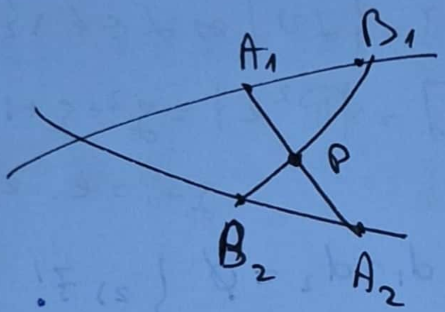
$\langle d_1 \cup d_2 \rangle = \bigcup\limits_{P_i \in d_i} P_1 P_2$ (comparați cu $\langle L \cup \{O\} \rangle = \bigcup\limits_{P \in L} OP$)

Ψ

P

$\Rightarrow$ <u>existența</u>!

<u>Unicitate</u>



<u>Veblen</u>

<u>Pb10</u>: $\mathcal{D} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$

$$\mathcal{D}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz)$$

$\mathcal{D}$ "coboară" la o "scufundare" a lui $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ în $\mathbb{P}^5\mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d, "P_2"'] & \mathbb{R}^6 \setminus \{0\} \arrow[d, "P_5"] \\
\mathbb{P}^2\mathbb{R} \arrow[r, dashed] \arrow[ur, phantom, "\overline{\mathcal{D}}"] & \mathbb{P}^5\mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$(\exists!)\ \overline{\mathcal{D}} : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{P}^5\mathbb{R}$ a.î.

$\overline{\mathcal{D}} \circ P_2 = P_5 \circ \mathcal{D}$

$\overline{\mathcal{D}} \circ P_2(x,y,z) = P_5 \circ \mathcal{D}(x,y,z)$

$\overline{\mathcal{D}}([x:y:z]) = [x^2 : y^2 : z^2 : \sqrt{2}xy : \sqrt{2}xz : \sqrt{2}yz]$

$\mathcal{D}$ coboară $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathcal{D}}$ corect def.

$\mathcal{D}$ scufundare $\overset{\text{am } \overline{I}}{\Leftrightarrow}$ $\overline{\mathcal{D}}$ inj

$\mathcal{J}(x,y,z) = \lambda \mathcal{J}(x',y',z')$ dc. $(x,y,z) \sim (x',y',z')$

$\bar{\sigma}([x:y:z]) = \bar{\sigma}([x':y':z']) \Rightarrow [x:y:z] = [x':y':z']$

$\Downarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\begin{cases} x^2 = \lambda x'^2 \\ y^2 = \lambda y'^2 \\ z^2 = \lambda z'^2 \\ xy = \lambda x'y' \\ xz = \lambda x'z' \\ yz = \lambda y'z' \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{\lambda > 0}$. Dintre x', y', z' cel puțin unul e nenul. Îl iau pe $x' \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$\Rightarrow [x:y:z] = [1 : \frac{y'}{x'} : \frac{z'}{x'}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu = \sqrt{\lambda} \Rightarrow (x,y,z) = \mu(x',y',z')$

$\begin{cases} x^2 = x^2 \\ \vdots \end{cases}$

În general iau $\varphi : \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}_k^{C_{n+d}^{d}-1}$

$\varphi([x_0 : \ldots : x_n]) = [$toate monoamele de deg d în variab $x_0 \ldots x_n]$

$\uparrow$

Scufundări Veronize

$\uparrow$

am C_{m+d-1}^{d} monoame de deg d în m variabile

Seminarul 12 de Geometrie II

Seria 10 - 2023-2024

12 Izomorfisme proiective. Spaţiul proiectiv $\mathbb{P}^n K$. Exerciţii

Exercițiul 12.1: Fie $A, B \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$. Demonstraţi că pentru proiectivităţile asociate $f_A, f_B : \mathbb{P}^n K \to \mathbb{P}^n K$, $f_A = f_B$ dacă şi numai dacă există $\lambda \in K$ cu $A = \lambda B$.

Exercițiul 12.2: Fie $P_1, ..., P_{n+2} \in \mathbb{P}^n K$ oricare $n+1$ nesituate în acelaşi hiperplan şi $Q_1, ..., Q_{n+2} \in \mathbb{P}^n K$ oricare $n+1$ nesituate în acelaşi hiperplan. Demonstraţi că există o unică proiectivitate $f : \mathbb{P}^n K \to \mathbb{P}^n K$ astfel încât $f(P_i) = Q_i \ \forall i = \overline{1, n+2}$.

Exercițiul 12.3: Fie planul proiectiv $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ şi punctele $A = [1 : 0 : 2], B = [2 : 1 : 2]$, $C = [1 : 0 : -1], D = [1 : -2 : 1]$. Daţi exemplu de o transformare proiectivă $f : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ astfel încât $f(AB) = CD$.

Examen -> **Exercițiul 12.4:** Fie $\mathcal{P}$ un plan proiectiv, $d \subset \mathcal{P}$ o dreaptă fixată şi $P \in \mathcal{P} \setminus d$ un punct fixat. Este adevărat că orice izomorfism proiectiv $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ care fixează P şi toate punctele lui d este identitatea?

Examen -> **Exercițiul 12.5:** Fie $\mathcal{P}$ un plan proiectiv şi $d_1, d_2 \subset \mathcal{P}$ drepte distincte fixate. Demonstraţi că orice izomorfism proiectiv $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ care fixează punctele lui $d_1 \cup d_2$ este identitatea.

~~Examen~~ -> **Exercițiul 12.6:** Demonstraţi că există o bijecţie canonică între $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ şi $\mathrm{SO}(3)$.

Examen -> **Exercițiul 12.7:** Fie planul afin real $\mathbb{R}^2$ şi completatul său proiectiv $\overline{\mathbb{R}^2} \simeq \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, unde identificăm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu $[x : y : 1] \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

Fie $f : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}, f([X : Y : Z]) = [-Y : X : Z]$.

a) Demonstraţi că f este un izomorfism proiectiv.

b) Demonstraţi că f are un singur punct fix.

c) Determinaţi dreptele proiective $d \subset \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ astfel încât $f(d) = d$.

d) Daţi exemplu de conică proiectivă nedegenerată $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ tangentă la dreapta de la infinit.

Restanță -> **Exercițiul 12.8:** Fie spaţiul afin real $\mathbb{R}^3$ şi completatul său proiectiv $\overline{\mathbb{R}^3} \simeq \mathbb{P}^3\mathbb{R}$, unde identificăm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cu $[x : y : z : 1] \in \mathbb{P}^3\mathbb{R}$.

Fie $f : \mathbb{P}^3\mathbb{R} \to \mathbb{P}^3\mathbb{R}, f([X : Y : Z : T]) = [-Z : Y : X : T]$.

a) Demonstraţi că f este un izomorfism proiectiv.

b) Determinaţi punctele fixe ale lui f.

c) Determinaţi dreptele proiective $d \subset \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ astfel încât $f(d) = d$.

d) Daţi exemplu de cuadrică proiectivă nedegenerată $\Gamma \subset \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ astfel încât $f(\Gamma) = \Gamma$ sau explicaţi de ce o astfel de cuadrică nu există.

Exercițiul 12.9: Demonstraţi că orice izomorfism proiectiv al lui $\mathbb{P}^n K$ este compunerea dintre o proiectivitate şi o transformare galoisiană.

Seminar 12 - Geometrie - 20.05.2025

Ex În $\mathbb{P}^4\mathbb{R}$, $A = [1:2:0:-1:0] = \{v_A\}$

$B = [0:0:1:1:0] = \{v_B\}$

$C = [1:0:0:1:0] = \{v_C\}$

---

a) A, B, C necol

b) ec. planului $\pi(ABC)$ (2 ec) ← codim 2

$\pi = p(W \setminus \{0\})$

$\text{codim}_{\mathbb{R}^5} W = 2$ și ec. lui W = ec. lui π. $\Rightarrow W = \langle v_A, v_B, v_C \rangle$

a) $\text{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (minorul din primele 3 linii $\neq 0$)

b) $u \in W$, $u = a v_A + b v_B + c v_C$

$$\begin{cases} x_1 = a + c \\ x_2 = 2a \\ x_3 = b \\ x_4 = -a + b + c \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$u \in W \Leftrightarrow$ e compatibil $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_5 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ -1 & 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$A \in GL_{n+1}(k) \longrightarrow f_A : \mathbb{P}^n k \to \mathbb{P}^n k$

$f_A(\{x\}) = \{Ax\}$ proiectiv. asoc. lui A.

Pb1: $A, B \in GL_{n+1}(k)$

$f_A = f_B \Leftrightarrow A = \lambda B$, $\lambda \in k \setminus \{0\}$

$\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ $A = \lambda B \Rightarrow f_A(\{x\}) = \{Ax\} = \{\lambda B x\} = \{Bx\} = f_B(\{x\})$

$\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ pt $\forall x \in k^{n+1} \setminus \{0\} \Rightarrow \exists \lambda(x)$ a.î. $Ax = \lambda(x) Bx \mid \cdot B^{-1}$

$(B^{-1}A)x = \lambda(x) \cdot x$ ← vedeți un seminar trecut.

Pb2 În $\mathbb{P}^n k$ $P_1, \dots, P_{n+2}$ $\forall$ $n+1$ nu în același hiperplan
$Q_1, \dots, Q_{n+2}$

$\exists!$ proiectivitatea a.î. $f(P_i) = Q_i$ $\forall i = \overline{1, n+2}$

$[P_i] = [u_i]$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ $n+1$ u_i sunt o bază; $[Q_j] = [v_j]$

Vreau o matrice $A \in GL_{n+1}(k)$ a.î. $A u_i = \lambda v_i$ pt. niște $\lambda_i \in k \setminus \{0\}$
$\forall i = \overline{1, n+2}$

Aleg $A \in GL_{n+1}$ a.î. $\begin{cases} A u_1 = \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ A u_{n+1} = \lambda_{n+1} v_{n+1} \end{cases}$ (pot pt. că sunt baze)

$u_{n+2} = \sum_1^{n+1} \alpha_i u_i$ și $v_{n+2} = \sum_1^{n+1} \beta_j v_j$

$A u_{n+2} = \sum_1^{n+1} \alpha_i \lambda_i v_i = \sum_1^{n+1} \beta_j v_j$ ($\lambda_i \neq 0$, altfel $u_{n+2} \in \langle u_1, \dots, \hat{u_i}, \dots, u_n \rangle$ $\not\!\!\!$)

Aleg $\lambda_i = \dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$ și $A \in GL_{n+1}$ pt. că $\beta_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i \neq 0$.

Unicitatea: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sunt unice până la un multiplu

$\Rightarrow A$ e unică până la un multiplu $\Rightarrow f_A$ unică

Pb3 $\boxed{\mathbb{P}^2 \mathbb{R}}$ $A = [1:0:2]$ $C = [1:0:-1]$
$B = [2:1:2]$ $D = [1:-2:1]$

Ex de transf proj $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ cu $f(AB) = CD$

$AB: 2X - 2Y - Z = 0$
$CD: X + Y + Z = 0$

$M = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & 0 \\ & -\frac{1}{2} & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

$AB \to CD$ $\qquad$ $AB \leftarrow CD$.

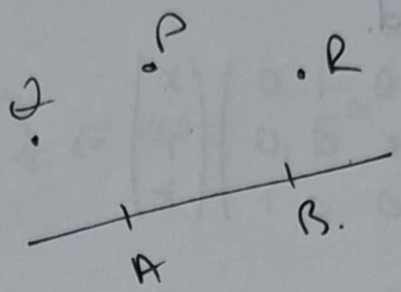
Pb4: $\mathcal{P}$ plan proiectiv, $d \in \mathcal{P}$, $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ izo proiectiv, $P \in \mathcal{P} \setminus d$

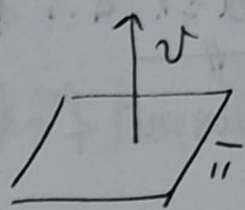
$f(a) = a \ \forall a \in d.$

$f(P) = P$

$\Rightarrow$

$f = id$???





Nu: contraex: $\boxed{\mathcal{P} = \mathbb{P}^2\mathbb{R}}$. Caut $M \in GL_3(\mathbb{R})$ și v a.î.

$Mv = \lambda v$ și $\pi \leq \mathbb{R}^3$ a.î. $f(w) = \mu(\cancel{w})w \ \forall w \in \pi$ și $f \neq I_3$

$v \notin \pi$ ex. 1

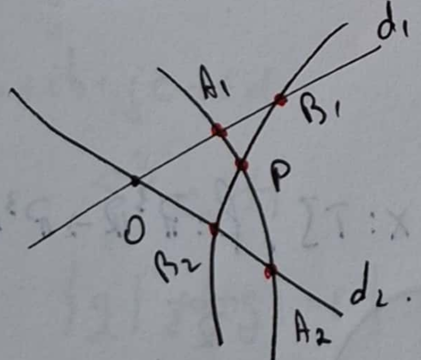
$= \mu w$

M a.î. $\begin{cases} M|_{\pi} = 2 id_{\pi} \\ Mv = 3v \end{cases}$

Pb5: $\mathcal{P}$ plan proiectiv, $d_1 \neq d_2 \subset \mathcal{P}$ dr. $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ izo a.î.

$f(a) = a \ \forall a \in d_1 \cup d_2 \Rightarrow f = id$

$\Leftarrow$



Fie $P \in \mathcal{P} \setminus (d_1 \cup d_2)$ iau $A_1, B_1 \in d_1 \setminus O$

$A_1P \cap d_2 = \{A_2\}$ $B_1P \cap d_2 = \{B_2\}$

~~$\{P\} = AB\cap$~~

$\{f(P)\} = f(A_1A_2) \cap f(B_1B_2) = f(A_1)f(A_2) \cap$

$\cap f(B_1)f(B_2) = A_1A_2 \cap B_1B_2 = \{P\}$

Pb7: $\overline{\mathbb{R}^2} \simeq \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, unde $(x, y) \simeq [x : y : 1]$

$f([x : y : z]) = [-y : x : z]$

a) f izo proiectiv

b) f are un sg. pct. fix

c) $d = ?$ a.î. $f(d) = d$.

a) Obs. că $f = f_A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow f$ morictivitate.

b) $\boxed{\text{var 1}}$ $f([x:y:z]) = [x:y:z] \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ a.î.

$x = -\lambda y = -\lambda^2 x$

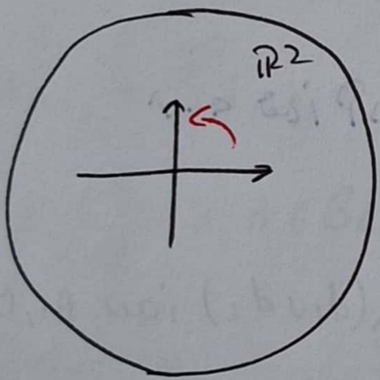
$y = -\lambda x = -\lambda^2 y$ $\Rightarrow \boxed{[0:0:1]}$

$z = \lambda z$

$z = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ (ca să existe un pct proj) $\Rightarrow -\lambda^2 = 1$ F.

$z \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow x = y = 0$

$\boxed{\text{var 2}}$



$\overline{\mathbb{R}^2}$ $f =$ rot. de $90°$ (rotește toate pct. af. + cele de la ∞)

$\Rightarrow$ sg. pct. fix e $[0:0:1]$

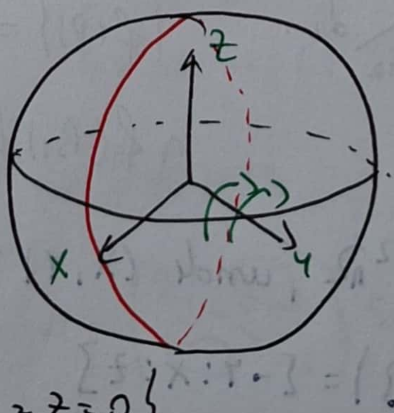
c) Evident d_∞ e sg. dr. d a.î. $f(d) = d$.

Pb8 $\overline{\mathbb{R}^3} \simeq \mathbb{P}^3\mathbb{R}$, $f([x:y:z:T]) = [-z:y:x:T]$, $f: \mathbb{P}^3\mathbb{R} \to \mathbb{P}^3\mathbb{R}$.

a) f izo proj

b) ~~fix~~ pct. fixe

c) $d \subset \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ cu $f(d) = d$.



$\overline{\mathbb{R}^3}$

a) f = rot în jurul lui Oy.

b) $[0:t:0:1]$, $t \in \mathbb{R}$. $\Leftrightarrow \{x = z = 0\}$

$[0:1:0:0]$

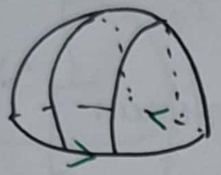
c) $d : \{x = z = 0\}$ și $[y = T = 0]$

Pb6 Dem. că $\exists$ o bijecție canonică între $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ și $SO(3)$.

$\mathbb{P}^1\mathbb{R} \simeq S^1$

$\simeq$ cerc. , $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

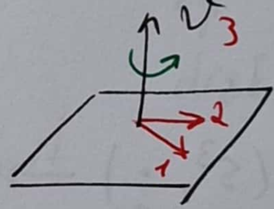
$\mathbb{P}^2\mathbb{R} \not\simeq S^2$



$\boxed{\mathbb{P}^3\mathbb{R} \simeq SO(3)}$

Var 1 $SO(3)$ = rotații în jurul unei axe

$SO(3) = \{R_{v,\alpha} \mid v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \alpha \in [0, 2\pi]\}$ $\leftarrow$ rot. de $\measuredangle\, \alpha$ trigonometric în jurul lui v



$\mathbb{H}$ corpul cuaternionilor.

$N(q) = a^2+b^2+c^2+d^2 \Rightarrow N(q_1 q_2) = N(q_1)N(q_2)$

$q = a+ib+jc+kd$

$\Rightarrow N(q) = q\bar{q}$

$S^3 \subset \mathbb{H}$

$S^3 = \{q \mid N(q) = 1\}$. Fie $\varphi : S^3 \to SO(3)$

$\bar{q} = q^{-1}$ $\qquad \varphi(q) = (x \longmapsto q x \bar{q})$, $x \in \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \simeq \{\underbrace{a+ib+jc+dk}_{x} \mid a = 0\} \Rightarrow \mathbb{R}^3 \simeq \operatorname{Im} \mathbb{H}$.

E corect definită:

$\boxed{\text{Pas 1}}$: $x \in \operatorname{Im}(\mathbb{H}) \Rightarrow q x \bar{q} \in \operatorname{Im}(\mathbb{H})$

$(\bar{x} = -x)$

$\overline{w u} = \bar{u} \cdot \bar{w} \Rightarrow \overline{(g x \bar{g})} = g \bar{x} \bar{g} = -g x \bar{g} \Rightarrow f: Im(\mathbb{H}) \to Im(\mathbb{H})$

$\boxed{\text{Pas 2}}$: $x \longmapsto g x \bar{g}$ e liniară
$N(g x \bar{g}) = N(x)$ $\Bigg\} \Rightarrow \varphi(g) \in O(3)$

$\varphi: S^3 \to O(3)$
$g \longmapsto (x \longmapsto g x g^{-1})$ funcție continuă
S^3 conex $\Bigg\} \Rightarrow \varphi(S^3)$ conex

$O(3)$ nu e conex ($\det: O(3) \to \mathbb{R}$, $\det(O(3)) = \{\pm 1\}$ nu e conexă)

! Temă $SO(3)$ conexă

$\varphi(1) = I_3 \in SO(3) \Rightarrow \varphi(S^3) \subset$ comp. conexă a lui $O(3)$ care conține I_3

$\varphi: (S^3, \cdot) \longrightarrow SO(3)$ e morf. de grupuri
↑ înmulțirea de cuaternioni

$\varphi(g_1 g_2)(x) = g_1 g_2 x \overline{g_1 g_2} = g_1 g_2 x \bar{g_2} \bar{g_1} = (\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2))(x)$

Rămâne $\Bigg|$ φ surj
$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Leftrightarrow g_1 = \pm g_2$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & SO(3) \\ \mathbb{R}P^3 \arrow[ur, dashed, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

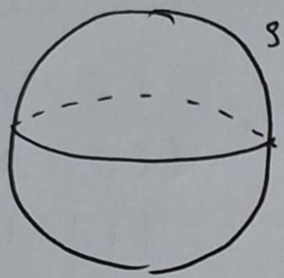
$\Rightarrow \varphi: S^3 \to SO(3)$ surj

$\mathbb{R}P^3 \simeq S^3 / \{\pm 1\}$

Var 2 : $SO(3) = \{ R_{v,\alpha} \mid v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ \|v\| = 1,\ \alpha \in [0, \pi] \}$

repetiții $R_{v,0} = R_{w,0} \quad \forall\, v, w$

$R_{v,\pi} = R_{-v,\pi} \quad \forall\, v.$

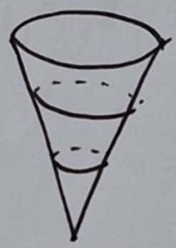
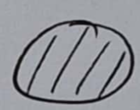
$SO(3) =$  $\times [0,\pi] \Big/ \begin{matrix} (v,0) \sim (w,0) \\ (v,\pi) \sim (-v,\pi) \end{matrix} \simeq$

S^2

$\in \mathbb{R}^3$

$\simeq \dfrac{\overline{B^3(0,\pi)}}{v \sim -v} \simeq P^3\mathbb{R}.$

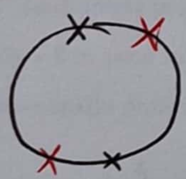
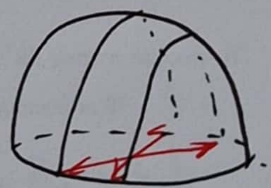
homeomorfism dc. $\|v\| = \pi$

 $\simeq$ 

con finit

disc

exp pt. $\dfrac{B^2(0,1)}{v \sim -v \text{ pe } \partial B} \simeq P^2\mathbb{R}.$

 $\Rightarrow$ 

Seminarul 14 de Geometrie II

Seria 10 - 2023-2024

14 Izomorfisme proiective. Subvarietăţi algebrice. Exerciţii

Exercițiul 14.1: În spaţiul afin $\mathbb{R}^5$, fie subspaţiul afin

$$W : \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 1 \\ x_5 + 2 = 0 \end{cases}$$

Scrieţi ecuaţiile închiderii proiective a lui W şi determinaţi punctele ei improprii.

Exercițiul 14.2: Daţi exemplu de conică nedegenerată $Z(P) \subset \mathbb{R}^2$ astfel încât $Z(P^h)$ e tangentă la dreapta de la infinit.

Exercițiul 14.3: Fie $\Gamma : x^2 + y^2 - 1 = 0,\ \Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Demonstraţi că închiderea proiectivă a lui Γ are un punct singular.

Exercițiul 14.4: Fie spaţiul proiectiv $\overline{K^n} \simeq \mathbb{P}^n K$ via identificarea

$$K^n \ni (x_1, ..., x_n) \to [1 : x_1 : ... : x_n].$$

a) Demonstraţi că topologia indusă pe $K^n \simeq U_0 \subset \mathbb{P}^n K$ de topologia Zariski proiectivă coincide cu topologia Zariski afină pe K^n.

b) Pentru orice $f \in K[x_1, ..., x_n]$, fie $D_f = \{x \in K^n \mid f(x) \neq 0\}$.

Demonstraţi că $\{D_f \mid f \in K[x_1, ..., x_n]$ ireductibil $\}$ e o bază de topologie pentru topologia Zariski.

Demonstraţi rezultatul analog pentru polinoame omogene şi topologia Zariski pe $\mathbb{P}^n K$.

c) Demonstraţi că dacă K este algebric închis, atunci topologia Zariski nu este Hausdorff.

d) Fie $A \subset K^n$. Demonstraţi că $\overline{A} = Z(\mathcal{I}(A))$, unde $\overline{A}$ este închiderea lui A în topologia Zariski.

e) Fie $P \in K[x_1, ..., x_n]$ şi $X = Z(P) \subset K^n$. Este adevărat că închiderea lui X (topologică, în raport cu topologia Zariski) în $\mathbb{P}^n K$ este $Z(P^h)$?

Exercițiul 14.5: Fie $X \subset K^n$ închisă. Demonstraţi că X e ireductibil dacă şi numai dacă $\mathcal{I}(X)$ este prim.

Exercițiul 14.6: Fie $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ o conică proiectivă nedegenerată. Demonstraţi că există o proiectivitate $f : \mathbb{P}^2\mathbb{C} \to \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ astfel încât $f(\Gamma) = \Gamma_0$, unde $\Gamma_0 : X_0^2 - X_1X_2 = 0$.

Este aceasta unică?

Exercițiul 14.7: În planul proiectiv $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$, fie conica $\Gamma_0 : X_1^2 - X_0X_2$.

a) Demonstraţi că aplicaţia $q : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \to \mathbb{P}^2\mathbb{C}$,

$$q(t) = [1 : t : t^2],\ q(\infty) = [0 : 0 : 1],$$

este o parametrizare a lui Γ_0, unde am identificat $t = [1 : t]$ şi $\infty = [0 : 1]$.

b) Demonstraţi că pentru orice conică nedegenerată $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ există o parametrizare polinomială de grad 2 în $t \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

Exercițiul 14.8: Enunțați și demonstrați reciproca Teoremei Desargues.

Duală Desargues

Exercițiul 14.9: În $\mathbb{P}^2K$, fie P_1, P_2, P_3 puncte coliniare, d_1, d_1' drepte concurente în P_1, d_2, d_2' drepte concurente în P_2 și d_3, d_3' drepte concurente în P_3.

AL Cu notațiile $d_1 \cap d_2 = \{Q_{12}\}, d_1' \cap d_2' = \{Q_{12}'\}$, $d_1 \cap d_3 = \{Q_{13}\}, d_1' \cap d_3' = \{Q_{13}'\}$, $d_2 \cap d_3 = \{Q_{23}\}, d_2' \cap d_3' = \{Q_{23}'\}$, demonstrați că dreptele $Q_{12}Q_{12}', Q_{13}Q_{13}'$ și $Q_{23}Q_{23}'$ sunt concurente.

Exercițiul 14.10: (Examen 2022) Fie planul afin complex $\mathbb{C}^2$ și completatul său proiectiv $\overline{\mathbb{C}^2} \simeq \mathbb{P}^2\mathbb{C}$, unde identificăm $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ cu $[z : w : 1] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

Fie $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ curba algebrică de ecuație $w^2 = z^3 + 2$ și $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ închiderea sa proiectivă.

a) Determinați ecuația omogenă a lui $\overline{\mathcal{C}}$ și demonstrați că $\Omega = [0 : 1 : 0]$ este singurul său punct de la infinit. **(0,25p)**

b) Definim funcția $S : \mathbb{P}^2\mathbb{C} \to \mathbb{P}^2\mathbb{C}$, $S([z : w : \zeta]) = [z : -w : \zeta]$. Demonstrați că S este un izomorfism proiectiv care invariază $\overline{\mathcal{C}}$. **(0,25p)**

c) Pentru $A = [-1 : 1 : 1] \in \overline{\mathcal{C}}$, demonstrați că $AS(A) \cap \overline{\mathcal{C}} = \{A, S(A), \Omega\}$. **(0,5p)**

d) Pentru orice $P \in \overline{\mathcal{C}}$, $P \neq \Omega$, demonstrați că $P\Omega \cap \overline{\mathcal{C}} = \{\Omega, P, S(P)\}$. **(0,5p)**

Exercițiul 14.11*: Demonstrați că orice izomorfism proiectiv al lui $\mathbb{P}^nK$ este compunerea dintre o proiectivitate și o transformare galoisiană.

Seminar 14 - Geometrie - 3.06.2024

Pb1: În $\boxed{\mathbb{P}^5 \mathbb{R}}$ $W: \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 1 \\ x_5 + 2 = 0 \end{cases}$ plan. Ec lui $\overline{W}$, $\overline{W} \cap \mathcal{H}_\infty$

$$\mathbb{P}^5\mathbb{R} \simeq \underset{[1:\dots]}{\underset{\uparrow}{\mathbb{R}^5}} \cup \underset{[0:\dots].}{\underset{\uparrow}{\mathcal{H}}}$$

$$\Rightarrow \overline{W} = \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 - x_0 = 0 \\ x_5 + 2x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{W} \cap \mathcal{H}: \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 & \Rightarrow x_1 = 2x_2 \\ x_3 - x_4 - x_0 = 0 & \Rightarrow x_3 = x_4 \\ x_5 + 2x_0 = 0 & \Rightarrow x_5 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{W} \cap \mathcal{H} = \{0 : 2\alpha : \alpha : \beta : \beta$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pb 1,5 (tip. examen): $\Gamma: x_0^2 - x_1x_2 + 3x_1x_3 - x_4^2 = 0$

în $\boxed{\mathbb{P}^4\mathbb{R}}$

a) $P = [1:1:0:1:2] \in \Gamma$ și $T_P\Gamma = ?$

$$T_Y\Gamma: \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) \cdot x_i = 0.$$

$T_P\Gamma: 2x_0 + 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \Rightarrow P$ nu e pct. sg.

b) Γ hipercuadrică sg? Dr. da găsiți un pct. sg.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & +3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right) \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \Gamma \text{ e degenerată} \Leftrightarrow$$

Γ are pct. sg.

$[v]$ e pct. sg $\Leftrightarrow v \in \ker A$

$v = [0:0:3\alpha:\alpha:0]$ $\quad$ dim ker $A = 1 \Rightarrow [0:0:3:1:0]$

e sg. pct. singular.

Pb 1.9: $\Gamma: x_0^2 - x_1x_2 + x_0x_1 - 4x_0x_3 + x_3^2 + 2x_2^2 = 0$ în $\boxed{\mathbb{P}^3\mathbb{R}}$

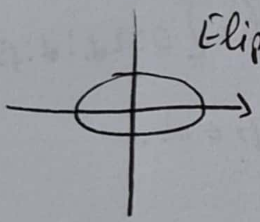
$\Gamma \cap \mathbb{R}^3$ ce cuadrică e?

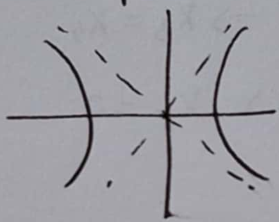
Se ia $x_0 = 1$ şi se continuă ca pt. $\mathbb{R}^3$.

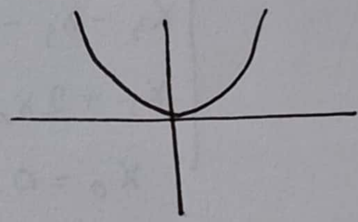
Pb2: $Z(P) \subset \mathbb{R}^2$ conică nedeg. a.î. $\overline{\Gamma} = Z(P^h)$ e tg. la dr. de la ∞.

Hiperbola $\qquad$ Parabola $[0:0:1]$

Elipsa







$x^2+y^2-1=0$

$\Downarrow$

$x^2+y^2-z^2=0$

$z=0 \Downarrow \mathcal{E}\cap d_\infty$

$x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$

$x^2-y^2-1=0$

$\Downarrow$

$x^2-y^2-z^2=0$

$\cancel{x}=0 \Downarrow \mathcal{H}\cap d_\infty$

~~$[0:1:1], [0:1:-1]$~~

$\underset{\substack{\uparrow\\ z}}{[0}:1:1], \ [\underset{\substack{\uparrow\\ z}}{0}:1:-1]$

$x^2-2y=0$

$\Downarrow$

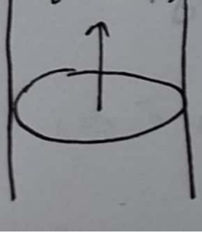
$x^2-2yz=0$

$z=0 \Downarrow \mathcal{P}\cap d_\infty$

$[\underset{\substack{\uparrow\\ z}}{0}:\underset{\substack{\uparrow\\ x}}{0}:\underset{\substack{\uparrow\\ y}}{1}]$

Pb3: $\Gamma: x^2+y^2-1=0$ în $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \overline{\Gamma}$ are exact un pct. sg.

$[0:0:0:1]$



$\overline{\Gamma}: x^2+y^2-T^2=0$

$\operatorname{rk}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = 3 \Rightarrow \dim \ker = 1.$

Pb6: Fie $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ conică proi. nedeg.

$\Gamma_0 : X_1^2 - X_0 X_2$.

a) $g : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \to \mathbb{P}^2\mathbb{C}$, $g(t) = [1:t:t^2]$, $g(\infty) = [0:0:1]$ e o param. a lui Γ_0 unde $t = [1:t]$ și $\infty = [0:1]$. ✓.

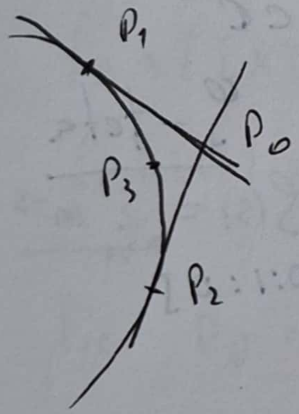
b) $\forall\, \Gamma \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ $\exists$ o param. pol. de deg 2 în $t \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Este f unică?

a) Evident. $\Rightarrow \Gamma_0$ e în bij cu o dr. proi (homeomorfism)

b) $P_1 = [0:1:0]$

$P_2 = [0:0:1] \quad \in \Gamma_0$ și $T_{P_1}\Gamma_0 \cap T_{P_2}\Gamma_0 = \{P_0\}$.

$P_3 = [1:1:1]$



$P_0 = [1:0:0] \Rightarrow \Gamma_0$ e unica conică care cont. aceste pct.

($\Gamma_0' : aX_0^2 + bX_1^2 + cX_2^2 + dX_0X_1 + \dots = 0$
Se fac calculele.)

Aleg $Q_1, Q_2, Q_3 \in \Gamma$, ~~cu~~ $\{Q_0\} = T_{Q_1} \cap T_{Q_2}\Gamma$

$\Rightarrow \forall$ 3 d-uri nu sunt col (Γ nedeg) $\xRightarrow{Ex12}$ $(\exists!)$ proi f

a.î. $f(Q_i) = P_i \Rightarrow f(\Gamma)$ = conică cu $f(\Gamma) = \Gamma_0$.

f nu e unică (schimb $X_1 \leftrightarrow X_2$ invariază Γ_0).

Pb8: Reciprocă th. Desargues: Δc. $A;A'$; B, B', C, C' cu

$$\begin{cases} M = AB \cap A'B' \\ N = BC \cap B'C' \\ P = AC \cap A'C' \end{cases} \Rightarrow M-N-P \text{ col.} \Rightarrow AA' \cap BB' \cap CC' = \{O\}.$$

Duală Desargues: În plan:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} AB \cap BC = B \\ A'B' \cap B'C' = B' \end{cases} \\ \begin{cases} AC \cap BC = C \\ A'C' \cap B'C' = C' \end{cases} \\ \begin{cases} AB \cap AC = A \\ A'B' \cap A'C' = A' \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow BB' \cap CC' \cap AA' = O.$$

Pb10 (examen): În $\mathbb{C}^2$, $\mathcal{C}: w^2 = z^3 + 2 \subset \mathbb{C}^2$

$[z:w:1] \in \mathbb{C}^2$ $\quad$ ς - teta

$[z:w:\varsigma]$ $\quad$ $\varsigma(s) = \sum_{m \geq 1} m^{-s}$

a) $\overline{\mathcal{C}} = ?$ şi $\overline{\mathcal{C}} \cap d_\infty = \Omega$ unde $\Omega = [0:1:0]$.

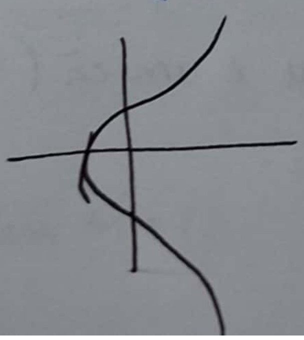
$\overline{\mathcal{C}}: w^2\varsigma = z^3 + 2\varsigma^3$

$\overline{\mathcal{C}} \cap d_\infty = \begin{cases} \varsigma = 0 \\ w^2\varsigma = z^3 + 2\varsigma^3 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow [0:1:0]$.

b) $s: \mathbb{P}^2\mathbb{C} \to \mathbb{P}^2\mathbb{C}$, $s([z:w:\varsigma]) = [z:-w:\varsigma]$ izo proj.

care invariază $\mathcal{C}$.

$w^2 = z^3 + az + b \Rightarrow$ curbă eliptică



c) $A = [-1:1:1] \in \bar{\mathscr{C}} \Rightarrow AS(A) \cap \bar{\mathscr{C}} = \{A, S(A), \Omega\}$.

$AS(A) = z + \varphi = 0$

$AS(A) \cap \bar{\mathscr{C}} : \begin{cases} z + \varphi = 0 \\ \omega^2 \varphi = z^3 + 2\varphi^3 \end{cases} \Rightarrow \varphi(\omega - \varphi)(\omega + \varphi) = 0$

$\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow [0:1:0]$ - - - - -

~~$\Rightarrow \omega = \varphi \Rightarrow [\,]$~~

<u>Pb11</u>: $\forall$ izo proj în $\mathbb{P}^n k$ = comp. dintre o proiectivitate şi o transf. galoisiană.

<u>Obs</u> $f = f_\sigma \circ f_A = f_{\sigma(A)} \circ f_\sigma$

$f_A([X]) = [AX]$

$f_\sigma([X]) = [\sigma(X_0) : \ldots : \sigma(X_n)]$.

Fie $P_0 = [1:0:\ldots:0]$

$P_i = [\underset{\substack{\uparrow \\ poz\ 0}}{0} : 0 : \ldots : \underset{\substack{\uparrow \\ poz\ i}}{1} : 0 \ldots : 0]$, $P = [1:1:\ldots:1]$

Fie $f(P_i) = Q_i$ şi $f(P) = Q$, g o proiectivitate a.î.

$g(Q_i) = P_i$

$g(Q) = P$

$\Rightarrow g \circ f$ izo proj.

$(g \circ f)(P_i) = P_i$

$(g \circ f)(P) = P$.

Dc. $g \circ f = f_\sigma$ am terminat.

$\boxed{m=2}$ $f_1([1:0:0]) = [1:0:0]$.

$f_1([0:1:0]) = [0:1:0]$.

$f_1([0:0:1]) = [0:0:1]$

$f_1([1:1:1]) = [1:1:1]$.

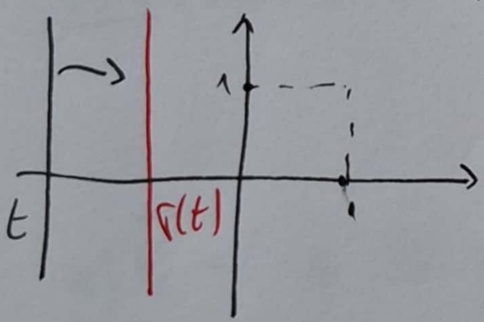
Pot considera $h = f\big|_{k^2} : k^2 \to k^2$,
$k^2 \cong \{[x:y:1]\}$.

Despre h știm: $h(0,0) = (0,0)$

$h(1,1) = (1,1)$

h(dr. orizontală) = dr. orizontală

h(dr. verticală) = dr. verticală.



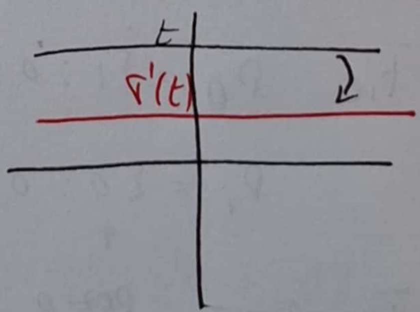
$h(\{x = t\}) = \{x = \sigma(t)\}$

dr.

$\sigma : k \to k$ corect def. bij

$\sigma(0) = 0$

$\sigma(1) = 1$



La fel iau $h(\{y = s\}) = \{y = \sigma'(s)\}$

$\sigma' : k \to k$ bij

Dar $(a,a) \in d$ = prima bis. $\Rightarrow h(a,a) = (\sigma(a), \sigma'(a)) \in$ prima bis $\Rightarrow \sigma'(a) = \sigma(a)\ \forall a$.

$h : k^2 \to k^2$, $h(a,b) = (\sigma(a), \sigma(b))$

σ e morf. de corpuri.

$\sigma(0)=0$ ✓

$\sigma(1)=1$ ✓

$d_{a,b} \ni (a,0), (0,b) \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$d_{a,b} \cap \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prima bis.}}}{d} = \left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right) = P_{a,b}$.

$f(d_{a,b}) = d_{\sigma(a),\sigma(b)}$

$h(d)=d \Rightarrow h(P_{a,b}) = P_{\sigma(a),\sigma(b)} \Rightarrow \boxed{\frac{ab}{a+b} = \frac{\sigma(a)\sigma(b)}{\sigma(a)+\sigma(b)}}$ (2)

$\forall a,b$.

$f_1|_{k^2} = h$, $f_1([x:y:1]) = [\sigma(x):\sigma(y):1]$.

Ex $h' = f_1|_{[1:x:y]}$.

$f_1([x:y:z]) = [\sigma(x):\sigma(y):\sigma(z)]$ (1).

Fie $a,b \in k$, $f_1([a:b:1]) = [\sigma(a):\sigma(b):1]$.

$f_1([a:b:0]) = [\sigma(a):\sigma(b):0]$.

$f_1([\frac{a}{b}:1:0]) = [\sigma(\frac{a}{b}):1:0]$ $\Big/ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(\frac{a}{b}) = \frac{\sigma(a)}{\sigma(b)} \Rightarrow \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$. $\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}}$ σ = auto. de corpuri

Pb 4 b) $\forall f \in k[X_1, \dots, X_n]$, $D_f = \{x \in k^n \mid f(x) \neq 0\}$.

$D_f = k^n \setminus Z(f)$

$\mathcal{B} = \{D_f \mid f \in k[X_1, \dots X_n]\}$ ind. e o subbază de topologie.

$\forall D \in \mathcal{G}$, $D = \bigcup_{\substack{B \in \mathbb{B} \\ B \in D}} B$. Fie D deschis $\Rightarrow D = k^n \setminus Z(f)$.

$= k^n \setminus Z(f_1 \dots f_k)$.

$= D_{f_1} \cup \dots \cup D_{f_k}$.

Desetăm notațiile $f_1, \dots, f_k$

Dar: pt. un $f \in k[X_1, \dots X_n] \Rightarrow f = \underbrace{f_1 \cdot \ldots \cdot f_k}_{\text{fact. ired. ai lui } f}$

$D_f = \{x \in k^n \mid \underset{\substack{\Updownarrow \\ f_1(x) \dots f_k(x) \neq 0}}{f(x) \neq 0}\} = \bigcap \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ired.}}}{D_{f_i}}$

Ex: Topologia Zariski nu e Haussdorff (e Haussdorff pt. k = finit), dar este T_1: $\forall x, y \in k^n$, $\exists U \ni x$ deschis a.î. $U \not\ni y$