⊛!!! pag 2

Tutoriat 9

(I)

Teorema funcțiilor implicite (T.F.I.)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, A deschisă, $(x^0, y^0) \in A$, unde $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ și $F : A \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1) $F(x^0, y^0) = 0$

2) F este de clasă C^1 (pe A)

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$

Atunci $(\exists)\ U = \mathring{U} \in \mathcal{V}_{x_0}$, $(\exists)\ V = \mathring{V} \in \mathcal{V}_{y_0}$, $(\exists!)\ f : U \to V$ a.î.

a) $f(x^0) = y^0$

b) $F(x, f(x)) = 0$, $(\forall)\ \overset{(x_1, \dots, x_n)}{\overset{\shortparallel}{x}} \in U$

c) f este de clasă C^1 (pe U) și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =$

$$= - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, \ (\forall)\ x \in U, \ (\forall)\ i = \overline{1,n}$$

Succint, T.F.I. zice cam de genul: „Cum nu vei reuși să-l scoți pe z din ecuația asta, dă-ți te asigură frățele tău că, deși nu poți scrie formula exactă, într-o zonă mică (vecinătate), z se comportă ca și cum ar fi o funcție normală de x și y."

(*) ASTA PRIMA DATĂ !!

↳ ∃ 2 tipuri de funcții

Funcție explicită: variabila pe care o cauți stă singură pe o parte a egalului ($3x+2y-z+5=0$ ->
-> $z=3x+2y+5$)

Funcție implicită: atunci când variabilele sunt amestecate într-o „ciorbă" și egalate cu 0 ($7x^2+9y^2+3z^2-3zy=0$)

T.F.I. ~~spune că~~ îți dă această garanție dacă punctul $\overset{\text{x dat}}{(1,1,1)}$ verifică ecuația, este de clasă C^1 și derivata parțială în z este $\neq 0$.

E1: (2p)

Arătați că ecuația $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-9=0$ definește într-o vecinătate a punctului $(1,1,1)$ funcția implicită $z=z(x,y)$ și determinați $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $dz(1,1)$.

Sol:

Pentru a-mi face viața mai ușoară notez:

$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-9=F(x,y,z)$

1) Verf. dacă punctul $(1,1,1)$ se află pe graficul funcției $\Leftrightarrow F(1,1,1)=0$.

$$F(1,1,1) = 5\cdot1^2+5\cdot1^2+5\cdot1^2-2\cdot1\cdot1-2\cdot1\cdot1-2\cdot1\cdot1-9$$
$$= 15-6-9 = 15-15=0 \checkmark$$

Fie $D=\mathbb{R}^3$, D deschisă

2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=10x-2y-2z$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=10y-2x-2z$ $\quad (\forall)\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=10z-2x-2y$

$\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ continue pe $\mathbb{R}^3$ (operații cu fct elementare)

$\hookrightarrow$ F de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$

$\{$adică derivatele parțiale de grad 1 sunt continue$\}$

T9 //

3) Derivata parțială în z trebuie să fie $\neq 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 10\cdot 1 - 2\cdot 1 - 2\cdot 1 = 10-2-2 = 6 \neq 0 \checkmark$$

$$1);\ 2);\ 3) \overset{T.F.I.}{\Rightarrow} \exists\, U = \mathring{U} \in \mathcal{V}_{(1,1)},\ \exists\, V = \mathring{V} \in \mathcal{V}_1,\ \exists!\, z: U \to V$$

a.î.:

a) $z(1,1) = 1$

b) $F(x,y,z(x,y)) = 0,\ \forall (x,y) \in U$

c) z este de clasă C^1 și $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}$, $\forall (x,y) \in U$ și $-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$, $\forall x,y \in U$.

Deci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))} = -\frac{10x-2y-2z(x,y)}{10z(x,y)-2x-2y}$$

$\forall (x,y) \in U$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{10\cdot 1 - 2\cdot 1 - 2\cdot z(1,1)}{10\cdot z(1,1) - 2\cdot 1 - 2\cdot 1} \overset{\text{am zis că } z(1,1)=1}{=} \frac{10-2-2}{10-2-2} = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{10y-2x-2z(x,y)}{10z(x,y)-2x-2y}$$

$\forall (x,y) \in U$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{10\cdot 1-2\cdot 1-2z(1,1)}{10\cdot z(1,1)-2\cdot 1-2\cdot 1} = -\frac{10-2-2}{10-2-2} = -1$$

z de clasă C^1 (pe U) $\Rightarrow$ z este diferențiabilă (pe U)

$\Rightarrow$ z diferențiabilă în $(1,1)$

$dz(1,1): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $dz(1,1)(u,v) =$ $\left\{ dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \right.$

$$= {}^{t}\left[\left(\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)}_{=-1} \quad \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)}_{=-1}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] = -u-v$$

i.e. $dz(1,1) = -dx - dy$ $\square$

Preambul teoretic lecție

VEZI TUTORIAT 2 !!!

19

Ex 2: Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = -x^2 + 3xy - y^2$$

restricționată la bila B

Determinați valorile extreme ale funcției $f|_{B[(0,0),1]}$,

unde: $B[(0,0),1] = \overline{B}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \le 1\}$

$\uparrow^2$

$\Rightarrow B[(0,0),1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$

Sol

$B[(0,0),1]$ închisă și mărginită
$\Rightarrow B[(0,0),1]$ compactă
f cont pe $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f|_{B[(0,0),1]}$ mărginită și își atinge marginile

Căutăm posibilele puncte de extrem global ale lui $f|_{B[(0,0),1]}$ situate în $B((0,0),1)$.

$\hookrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$

Notez $f|_{B[(0,0),1]} = h$

$B((0,0),1)$ deschisă

h continuă

Calculăm derivatele parțiale:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -2x + 3y$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 3x - 2y \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

-1

$\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ sunt pe $B((0,0),1)$ (op cu fct elementare)

$B((0,0),1)$ deschisă $\Rightarrow$ h diferențiabilă pe $B((0,0),1)$ (*)

(dacă ∃ vârf, nu ar fi rotund, punta...)

(*) $\Rightarrow$ Astfel, pentru a fi punct de extrem, ambele derivate parțiale trebuie să fie $=0$.

Deci $\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y=0 \mid \cdot 2 \\ 3x-2y=0 \mid \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y=0 \\ 9x-6y=0 \end{cases}$ (+)

$5x=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

Astfel, singurul punct de extrem global al lui $f|_{B[(0,0),1]}$ situat în $B((0,0),1)$ este $(0,0)$.

Căutăm posibilele puncte de extrem global ale lui $f|_{B[(0,0),1]}$ situate în $\operatorname{Fr} B[(0,0),1] = \partial B[(0,0),1] =$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ $\to x^2+y^2-1=0$

Fie $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=x^2+y^2-1$

$E=\mathbb{R}^2$ deschisă $\quad$ $\hookrightarrow$ deci $g(x,y)=0$

Iy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x+3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x-2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Observăm că f și g sunt de clasă C^1 (pe E).

$\Rightarrow$ Avem voie să folosim Metoda Lagrange

- funcția f are o direcție în care vrea să crească cel mai tare - <u>gradientul lui f</u> (∇f)
- ecuația cercului g are o direcție dreaptă perpendiculară pe conturul cercului - <u>gradientul lui g</u> (∇g)
- În punctul de extrem, acești 2 vectori devin COLINIARI, dar de lungimi diferite. Vom lua că $f = \lambda \cdot g$.
- Deoarece vrem să avem ambele proprietăți în același timp: vreau pct maxim (∇f) și vreau să rămân pe cerc (∇g), le vom aduna.

$\hookrightarrow$ <u>Metoda lui Lagrange</u>

Fie $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$L(x,y) = -x^2 + 3xy - y^2 + \lambda(x^2+y^2-1)$

Vom egala cu 0 derivatele parțiale:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 2\lambda x = 0 \\ 3x - 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

știm de mai sus

(+) $\Rightarrow$ $x + y + 2\lambda(x+y) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(2\lambda+1) = 0$

I) $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$

II) $1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

(I) $x = -y$

$\overline{III} \to x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(II) $\lambda = -\frac{1}{2}$

$\overline{I} \to -2x + 3y + 2\lambda x = 0 \Rightarrow -2x + 3y - x = 0 \Rightarrow -3x + 3y = 0$

$\Rightarrow x = y$

$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Noi suntem pe un cerc de rază $=1 \neq 0$. Asta înseamnă că, pentru ca Metoda lui Lagrange pe care am folosit-o să fie corectă

$$\text{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) \neq 0$$

$$\text{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = \text{rang}\left(2x \quad 2y\right)$$

Știm că $x^2+y^2=1$ (din ec. g)
↳ măcar unul $\neq 0$

$\Rightarrow \text{rang}(2x \quad 2y) = 1$
$\forall (x,y) \in \text{Fr}\, B[(0,0),1]$

Facem perechile obținute.
Posibilele pct de extrem global ale lui $f|_{B[(0,0),1]}$ situate în $\text{Fr}\, B[(0,0),1]$ sunt: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Suntem aproape gata. Tot ce mai trebuie să facem este să găsim punctele punctele de extrem ale lui $f|_{B[(0,0),1]}$. Adică valoarea maximă și minimă a lui $f|_{B[(0,0),1]}$.

$$f(0,0) = -0^2+3\cdot 0\cdot 0-0^2=0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Așadar valoarea maximă a lui $f|_{B[(0,0),1]}$ este $\frac{1}{2}$ și valoarea minimă a lui $f|_{B[(0,0),1]}$ este $-\frac{5}{2}$ $\square$