Teorema funcțiilor implicite (T.F.i)

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq \Delta \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$, Δ deschisă, $F: \Delta \to \mathbb{R}$ și $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_p, \overset{\circ}{y}) \in \Delta$

a.î. 1) $F(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_p, \overset{\circ}{y}) = 0$

2) $F \in C^1(\Delta)$

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_p, \overset{\circ}{y}) \neq 0$

Atunci, $\exists U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}_{(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_p)}$, $\exists V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}_{\overset{\circ}{y}}$ și $\exists! f: U \to V$ cu prop:
(funcție implicită)

a) $f(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_p) = \overset{\circ}{y}$

b) $F(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p)) = 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_p) \in U$

c) f e de clasă C^1 și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p) = - \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p))}$,

$\forall (x_1, \dots, x_p) \in U$

$\forall i = \overline{1,p}$

(adică duc tot într-o parte și scriu o variabilă în funcție de celelalte = fct implicită)

<u>Notație:</u> În contextul TFi, $f \overset{not}{=} y$ și s.n. fct implicită asociată ecuației $F(x_1, \dots, x_p, y) = 0$

<u>Exerciții:</u>

1) Arătați că ecuația $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 2$ definește într-o vecinătate a punctului $(1,1)$, funcția implicită $y = y(x)$ și determinați $y'(1)$ $\left(= \frac{\partial y}{\partial x}(1)\right)$.

Soluție:

Fie $\Delta = \mathbb{R}^2$ (deschisă) și $F: \Delta \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2$

$F(1,1) = 0$ (1)

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2y + 1$; $\frac{\partial F}{\partial y} = -2x + 2y + 1$ cont $\Rightarrow F \in C^1(\Delta)$ (2)

$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1 \neq 0$. (3)

Din (1), (2) și (3) rezultă că putem aplica TFI și, conform acesteia, avem că $\exists U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}_1$, $\exists V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}_1$, $\exists!\ y : U \to V$ (sunt fizician și acum y e o funcție, nu variabilă... sau programator Python)

Cu proprietățile: a) $y(1)=1$

b) $F(x, y(x)) = 0 \ \forall x \in U$

c) ~~$y \in C^1(U)$~~ y e de clasă C^1 și $y'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$ therefore

Deci $y'(x) = - \frac{2x - 2y(x) + 1}{-2x + 2y(x) + 1}$. Așadar $\left.\begin{array}{l} y'(1) = -\frac{2 - 2y(1) + 1}{-2\cdot 1 + 2y(1) + 1} \\ y(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y'(1) = -1$. $\square$

2. Arătați că ecuația $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 9 = 0$ definește într-o vecinătate a punctului $(1,1,1)$ funcția implicită $z = z(x,y)$ și determinați $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$, $dz(1,1)$.

Soluție:

Fie $D = \mathbb{R}^3$, $F : D \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 9$.

$\overset{\circ}{D} = \mathbb{R}^3$ deschisă, $(1,1,1) \in D$

(1) $F(1,1,1) = 5+5+5-2-2-2-9 = 0$

(2) $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 10x - 2y - 2z \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 10y - 2x - 2z \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 10z - 2x - 2y \text{ cont pe } \mathbb{R}^3 \text{ deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow F \in C^1(\mathbb{R}^3)$

(3) $\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 10-2-2 = 6 \neq 0$

Conform TFi, $\exists U \in \mathcal{V}_{(1,1)}$, $\exists V \in \mathcal{V}_1$ şi $\exists! \, z : U \to V$ a.î.

a) $z(1,1)=1$

b) $F(x,y,z(x,y)) = 0$

c) z e de clasă C^1 şi

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,z(1,1))}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,z(1,1))} = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,z(1,1))}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,z(1,1))} = -1$$

$dz(1,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $dz(1,1)(u,v) = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)u + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)v = -u-v$ $\square$

Derivate parțiale de ordin superior și diferențiale de ordin superior

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^q$ și $a \in \mathring{A}$

Def: Fie $i, j \in \{1 \dots p\}$. P.p că $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. f admite derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Dacă funcția $\frac{\partial f}{\partial x_j} : V \to \mathbb{R}^q$ admite derivată parțială în raport cu variabila x_i, în punctul a, atunci această derivată parțială se numește derivată de ordinul 2 a funcției f în raport cu variabilele x_i și x_j în a și se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$ dacă $i \neq j$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ ~~dacă~~ dacă $i = j$

Notații corecte: $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$

Lema lui Schwartz.

Fie $i, j \in \{1 \dots p\}$, $i \neq j$ și $V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$ a.î. f admite derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ pe V

Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : V \to \mathbb{R}^q$ e cont atunci $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Def: P.p că $\exists V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$ a.î. f admite derivatele parțiale de ordinul 2 pe V și acestea sunt cont în a

Definim diferențiala de ordin 2 a lui f în a prin $d^2 f(a) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $d^2 f(a)(u, v) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i v_j$

$u = (u_1 \dots u_p)$, $v = (v_1 \dots v_p)$

Similar se definește $d^k f(a)$, $k \geq 2$

$$d^2 f(a)(u,u) = d^2 f(a)(u)^2$$
$$d^3 f(a)(u,u,u) = d^3 f(a)(u)^3$$

Dacă $p = 2$, $q = 1$ și $(u) = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ atunci:

$$d^2 f(a)(u)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) u_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) u_2^2$$

similar pentru $d^k \{f(a)\}$, $k \geq 2$: ...

Formula lui Taylor cu rest Lagrange -> cazul ~~multidimensional~~

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$ deschisă multidimensional și convexă, $f: D \to \mathbb{R}^q$ o funcție care admite toate derivatele parțiale de ordinul $n+1$ pe D și acestea sunt continue pe D, $n \in \mathbb{N}$, și fie $a \in D$. Atunci:

$\forall x \in D$, $x \neq a$ $\exists c \in (a, x) = \{(1-t)a + tx \mid t \in (0,1)\}$ a.î.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{1}{1!} d f(a)(x-a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(a)(x-a)^n}_{T_n(x)}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(c)(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = xy^3 + 2xy - 2x^2 + 3x + y - 2$$

a) Det derivatele parțiale de grad 2 ale lui f

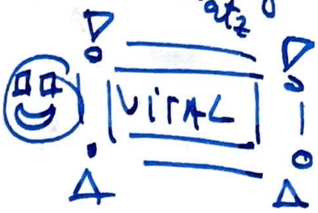
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 + 2y - 4x + 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 + 2x + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3y^2 + 2 \underset{\text{Schwatz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$



b) Det $df(1,2)$ și $d^2 f(1,2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont pe $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ deschisă $\Rightarrow f$ dif pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ dif în $(1,2)$

$df(1,2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df(1,2)(\underset{(u_1,u_2)}{u}) = \left[\left(\underset{11}{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)} \quad \underset{15}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)}\right)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right]$

$= 11u_1 + 15u_2$

Toate derivatele de ordin 2 sunt continue

$d^2 f(1,2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d^2 f(1,2)(\underset{(u_1,u_2)}{u}, \underset{(v_1,v_2)}{v}) =$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)u_1v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)u_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2)u_2v_1 +$

$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)u_2v_2 = -4u_1v_1 + 14u_1v_2 + 14u_2v_1 +$

$+ 12u_2v_2$

c) Det polinomul Taylor de ord 2 asoc funct f în $(1,2)$

(i.e.) $T_2(x,y)$

$$T_2(x,y) = f(1,2) + \frac{1}{1!} df(1,2)((x,y)-(1,2)) + \frac{1}{2!} d^2 f(1,2)((x,y)-(1,2))^2 =$$

$$= f(1,2) + \frac{1}{1!}(11(x-1) + 15(y-2)) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)(x-1)(y-2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2\right) =$$

$$= 13 + 11(x-1) + 15(y-2) - 2(x-1)^2 + 14(x-1)(y-2) + 6(y-2)^2$$

Puncte de extrem local

Def: Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A$ și $f: A \to \mathbb{R}$.
Spunem că a este

1) punct de minim local al lui f dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \leq f(x)$ $(\forall)$ $x \in V \cap A$

2) punct de maxim local al lui f dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \geq f(x)$, $(\forall)$ $x \in V \cap A$

3) punct de extrem local al lui f dacă este punct de minim local al lui f sau este pct de maxim local al lui f

Def: Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \to \mathbb{R}$ și $a \in \mathring{A}$.
Spunem că a este pct. critic al lui f dacă f e dif în a și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ $(\forall)$ $i = \overline{1,p}$

Teoremă (Fermat): Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \to \mathbb{R}$ și $a \in A$ a.î.: 1) $a \in \mathring{A}$

2) a este pct de ext local al lui f

3) f e dif în a

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \ (\forall) i=\overline{1,p}$

Def: Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, D deschisă, $f: D \to \mathbb{R}^q$ și $k \in \mathbb{N}$. Spunem că f este de clasă C^k (pe D), dacă f admite toate derivatele parțiale de ordinul k (pe D) și acestea sunt continue (pe D)

Criteriul de stabilizare al pct de extrem

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 (pe D) și $a \in D$ un pct critic al funct f

Notăm $H_f(a)$ (matricea ~~hesiană~~ hessiană a lui f în a) =

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_p = \det(H_f(a))$$

1) Dacă $\Delta_1 > 0 \dots \Delta_p > 0$ atunci a este pct de minim local al lui f

2) Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \dots (-1)^p \Delta_p > 0$ a e pct de maxim local al lui f

3) Dacă $\Delta_1 \geq 0 \dots \Delta_p \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0 \dots (-1)^p \Delta_p \geq 0$ și $\exists$ $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ a.î. $\Delta_{i_0} = 0$ atunci nu se poate trage o concluzie

4) ($\forall$) alt caz a nu este pct de extrem local al lui f

Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$

Det pct de extrem local ale lui f și precizați natura lor.

$\mathbb{R}^2$ deschisă

Determinăm pctele ~~de~~ critice ale lui f

f cont.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-15\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=6xy-12,\ (\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \text{c } \mathbb{R}^2\\ \mathbb{R}^2 \text{ deschisă}\end{array}\right| \Rightarrow f \text{ dif pe } \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+3y^2-15=0\\ 6xy-\cancel{\ }12=0\end{cases}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}x^2+y^2-5=0\\ xy=2\Rightarrow y=\frac{2}{x}\\ \Rightarrow x,y\neq 0\end{cases}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+\frac{4}{x^2}-5=0\\ y=\frac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-5x^2+4=0\\ y=\frac{2}{x}\end{cases}$$

Notăm $x^2=t$, $t\geq 0$

$$\left.\begin{array}{l}t^2-5t+4=0\end{array}\ \ \begin{array}{l}x\neq 0\end{array}\right|\Rightarrow t>0$$

$$\left.\Delta=9\right|\Rightarrow t_{1,2}=\{1,4\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in\{\pm2,\pm1\}\Rightarrow$ ~~{y ∈ {± 1, ±2}~~ $y\in\{\pm1;\pm2\}$

$\Rightarrow (x,y)\in\{(2,1);(-2,-1);(-1,-2)(1,2)\}$

Deoarece f este dif pe $\mathbb{R}^2$ avem că orice sol a sistemului este pct critic al lui f

Punctele critice ale lui f sunt $(2,1), (-2,-1), (1,2), (-1,-2)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Lema lui Schwartz

Obs că f este de clasă C^2

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix},$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 12 > 0$

$\Delta_2 = 108 > 0$ $\Big| \Rightarrow (2,1)$ pct de minim

$$Hf(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -12 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 108 > 0$ $\Big| \Rightarrow (-2,-1)$ pct de maxim local

$$Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 6 > 0$

$\Delta_2 = 36 - 144 < 0$ $\Big| \Rightarrow (1,2)$ nu este pct de extrem local

$$Hf(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -6 < 0$

$\Delta_2 = 36 - 144 < 0$ $\Big| \Rightarrow (-1,-2)$ nu este pct de extrem local

Extreme cu legături :(

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, ~~[illegible]~~ $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^p$, $\emptyset \neq A \subseteq E$, $f: E \to \mathbb{R}$ și $a \in A$.

Def Spunem că a este:

1) punct de minim local al lui f condiționat de A dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \le f(x)$, $\forall x \in V \cap A$
2) punct de maxim local al lui f condiționat de A dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \ge f(x)$ $\forall x \in V \cap A$

Def. Fie $1 \le k < p$, $k \in \mathbb{N}$ și $g_1, \dots, g_k : E \to \mathbb{R}$.

Dacă $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$, punctele de extrem local ale lui f condiționate de A se numesc puncte de extrem local ale lui f cu legăturile $g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$.

În continuare, $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$.

Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $a \in A$ (i.e. $g_1(a) = \dots = g_k(a) = 0$).

Pp $\text{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}} = k$ și că a este pct de extrem local al lui f condiționat de A.

Atunci $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ a.î.

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \dots\dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(a) = 0 \end{cases}, \text{ unde } \quad L: E \to \mathbb{R},\ L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$$

Def. 1) Un punct $a=(a_1,\dots,a_r)\in E$ a.î. $g_1(a)=\dots=g_k(a)=0$ (i.e. $a\in A$) și
$\text{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le r}}=k$ și $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ a.î. a verifică sistemul (1)

se numește <u>punct staționar</u> al lui f condiționat de A (sau cu legăturile $g_1(x)=\dots=g_k(x)=0$)

2) Numerele reale $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ s.n. <u>multiplicatorii</u> lui Lagrange.

3) Funcția L s.n. <u>lagrangeianul</u> problemei de extreme

Obs. λ_i se schimbă odată cu punctul staționar condiționat a.

Algoritm pentru determinarea punctelor staționare condiționate

<u>Pas 1:</u> Se ia funcția $L:E\to\mathbb{R}$, $L(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x)$
($\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ nedeterminați)

<u>Pas 2:</u> Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}(x)=0\\ \dots\dots\\ \frac{\partial L}{\partial x_r}(x)=0\\ g_1(x)=0\\ \dots\dots\\ g_k(x)=0\end{cases}\implies x_1,\dots,x_r,\ \lambda_1,\dots,\lambda_k$$

<u>Pas 3:</u> Dacă $(a_1,\dots,a_r,\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ e soluție a sistemului de la pasul 2 și $\text{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le r}}=k$, atunci $(a_1,\dots,a_r)$ e punct staționar al lui f cu legătura $g_1(x)=\dots=g_k(x)=0$.

Obs. Printre aceste puncte staționare condiționate se pot afla și punctele de extrem local condiționate.

Pas 4: Arătăm că lagrangeianul L este de clasă C^2 pe E.

Diferențiem în punctul a relațiile sistemului $\begin{cases} g_1(x)=0 \\ \dots\dots \\ g_k(x)=0 \end{cases}$ și obținem

sistemul $\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\frac{\partial g_1}{\partial x_p}(a)dx_p=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\frac{\partial g_k}{\partial x_p}(a)dx_p=0. \end{cases}$

Deoarece matricea acestui sistem liniar este $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le p}}$ și rangul

ei este k, putem exprima k diferențiale în funcție de celelalte $p-k$.

Pasul 5. Exprimăm $dx_{p-k+1},\dots,dx_p$ în funcție de $dx_1,\dots,dx_{p-k}$.

Putem scrie $(*)\begin{cases} dx_{p-k+1}=\sum_{i=1}^{p-k}\theta_i^1 dx_i \\ \dots\dots\dots \\ dx_p=\sum_{i=1}^{p-k}\theta_i^k dx_i. \end{cases}$

Pasul 6: Fie $F_{(a)}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $F_{(a)}(u)=d^2L(a)(u)^2=\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(a)u_iu_j$.

Putem scrie $F(a)=\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(a)dx_idx_j$.

Înlocuim în expresia lui $F(a)$ pe $dx_{r-k+1}, \dots, dx_r$ cu $(*)$ și definim $F(a)|_{lg} = \sum_{i,j=1}^{r-k} A_{ij} \cdot dx_i dx_j$, unde A_{ij} rezultă din calcul

$(F(a)|_{lg} : \mathbb{R}^{r-k} \to \mathbb{R},\ F(a)|_{lg}(u) = \sum_{i,j=1}^{r-k} A_{ij} \cdot u_i u_j)$.

Pasul 7: 1) Dacă $F(a)|_{lg}(u) \geq 0\ \forall u \in \mathbb{R}^{r-k}$ și $F(a)|_{lg}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^{r-k}}$, atunci a e punct de minim local al lui f cu legăturile $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$

2) Dacă $F(a)|_{lg}(u) \leq 0\ \forall u \in \mathbb{R}^{r-k}$ și $F(a)|_{lg}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^{r-k}}$, atunci a e punct de maxim local al lui f cu legăturile $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$

GATA! :)

Hai să folosim prostia asta la ceva...

1) Fie $f: (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Determinați punctele de extrem local ale lui f cu legătura $x+2y+3z=1$.

Sol. $E = (0,\infty)^3$ deschisă.

Fie $g: E \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x+2y+3z-1$ și $A = \{(x,y,z) \in E \mid g(x,y,z) = 0\}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 3$

Observăm că f și g sunt de clasă C^1.

$$\text{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) = \text{rang}(1\ 2\ 3) = 1$$

Fie $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = xy^2z^3 + \lambda(x+2y+3z-1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2z^3 + \lambda = 0 \\ 2xyz^3 + 2\lambda = 0 \\ 3xy^2z^2 + 3\lambda = 0 \\ x+2y+3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2z^3 = -\lambda \\ xyz^3 = -\lambda \\ xy^2z^2 = -\lambda \\ x+2y+3z = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2z^3 = -\lambda = xyz^3 \Rightarrow y = x \\ xyz^3 = -\lambda = xy^2z^2 \Rightarrow z = y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z$$

$x+2y+3z = 1 \Leftrightarrow 6x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6^5}$

Singurul punct staționar al lui f cu legătura $g(x,y,z) = 0$ este $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Avem $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = xy^2z^3 - \frac{1}{6^5}(x+2y+3z-1)$.

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2xz^3$; $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 6xy^2z$;

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 2yz^3 = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 3y^2z^2 = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}$;

$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 6xyz^2 = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}$

Observăm că L este de clasă C^2.

Fie $F(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})(u)=d^2L(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})(u)^2$

Avem $F(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})=\frac{\partial^2L}{\partial x^2}(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})dx^2+\frac{\partial^2L}{\partial y^2}(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})dy^2+$

$+\frac{\partial^2L}{\partial z^2}(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})dz^2+2\cdot\frac{\partial^2L}{\partial x\partial y}(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})dxdy+2\cdot\frac{\partial^2L}{\partial x\partial z}(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})dxdz$

$+\frac{4}{6^4}dxdy+\frac{6}{6^4}dxdz+\frac{12}{6^4}dydz.$

Diferențiem legătura $g(x,y,z)=0$ în (x,y,z) și obținem

$1\cdot dx+2\cdot dy+3\cdot dz=0$. În punctul $(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$, ultima relație devine $dx+2dy+3dz=0$.

Deci $dx=-2dy-3dz$.

Fie $F(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})\big|_{leg}:\mathbb{R}^{3-1}\to\mathbb{R}$, $F(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})\big|_{leg}=\frac{2}{6^4}dy^2+\frac{6}{6^4}dz^2+$

$+\frac{4}{6^4}(-2dy-3dz)dy+\frac{6}{6^4}(-2dy-3dz)dz+\frac{12}{6^4}dydz=$

$=\frac{2}{6^4}dy^2+\frac{6}{6^4}dz^2-\frac{8}{6^4}dy^2-\frac{12}{6^4}dxdy-\cancel{\frac{12}{6^4}dydz}-\frac{18}{6^4}dz^2+$

$+\cancel{\frac{12}{6^4}dydz}=-\frac{6}{6^4}dy^2-\frac{12}{6^4}dz^2-\frac{12}{6^4}dydz=-\frac{6}{6^4}(dy^2+2dydz+dz^2)$

$-\frac{6}{6^4}dz^2=-\frac{6}{6^4}\left[(dy+dz)^2+dz^2\right].$

Avem $F(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})\big|_{leg}(\underset{(u_2,u_3)}{u})=-\frac{6}{6^4}\left[(u_2+u_3)^2+u_3^2\right]\ \forall \underset{(u_2,u_3)}{u}\in\mathbb{R}^2.$

Observăm că $F(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})''_{leg}(u) \leq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^2$ și $F(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})''_{leg}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Deci $(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$ este punct de maxim local al lui f cu legătura $x+2y+3z=1$. □.

Primul și ultimul exercițiu de genul ăsta pe care îl fac.

Mă doare mâna. Sper că nu am greșit la calcule.

2. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2+y^2+3z^2$.

Determinați punctele de extrem ~~local~~ global și valorile extreme ale lui $f/_{B[(0,0,0),1]}$, unde $B[(0,0,0),1] = \overline{B((0,0,0),1)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Sol. Notăm $(0,0,0) \overset{not}{=} 0$. $B[0,1]$ compactă și f cont $\Rightarrow f$ mărginită și își atinge marginile pe $B[0,1]$.

Căutăm posibilele puncte de extrem ale lui $f/_{B[0,1]}$ situate în interior (adică în $B(0,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 < 1\}$.

Notăm $h \overset{not}{=} f/_{B(0,1)}$. $B(0,1)$ ~~cont~~ deschisă și h continuă.

$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x$

$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial h}{\partial z} = 6z$ cont pe $B(0,1)$ deschisă $\Rightarrow h$ diferențiabilă.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial h}{\partial z}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=0 \\ 2y=0 \\ 6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=(0,0,0).$$

Singurul posibil punct de extrem local restricționat la $B(0,1)$ este $(0,0,0)$.

Acum, căutăm posibilele puncte de extrem global ale lui $f/_{B[0,1]}$ situate în $Fr(B[0,1]) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=1\}$.

$\mathbb{R}^3$ deschisă.

Fie $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ și $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / g(x,y,z)=0\}$.

$\frac{\partial g}{\partial x}=2x$; $\frac{\partial g}{\partial y}=2y$; $\frac{\partial g}{\partial z}=2z$ cont $\Rightarrow$ g e de clasă C^1.

$rang(2x \quad 2y \quad 2z)=1 \quad \forall (x,y,z)\in A.$

Fie $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $L(x)=f(x)+\lambda g(x)=2x^2+y^2+3z^2+\lambda(x^2+y^2+\cancel{y}z^2-1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=4x+\lambda\cdot 2x=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda\cdot 2y=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=6z+\lambda\cdot 2z=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2+\lambda)=0 \\ y(1+\lambda)=0 \\ z(3+\lambda)=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

(f

Scanned with CamScanner

Avem soluțiile:

$\lambda_1 = -2 \Rightarrow (x,y,z) \in \{(1,0,0), (-1,0,0)\}$

$\lambda_2 = -1 \Rightarrow (x,y,z) \in \{(0,1,0), (0,-1,0)\}$

$\lambda_3 = -3 \Rightarrow (x,y,z) \in \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$

singurele posibile pct de extrem local ale lui f situate în $Fr(B[0,1])$.

$f(0,0,0)=0$, $f(-1,0,0)=1$, $f(1,0,0)=2$, $f(0,-1,0)=1$, $f(0,1,0)=1$, $f(0,0,1)=3$, $f(0,0,-1)=3$.

Punctul de min global al lui f este $(0,0,0)$ și valoarea minimă a lui f este 0.

Punctele de max global ale lui f sunt $(0,0,1)$ și $(0,0,-1)$ și valoarea maximă a lui f este 3.