Curs 7

Serii de funcții

Fie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ și

$$s_n : X \to \mathbb{R} \quad s_n(x) = f_p(x) + \dots + f_n(x) \quad \forall\ n \geq p$$

Def Perechea $\left((f_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p} \right)$ s.n. SERIE DE FUNCȚII și se notează: $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ (sau $\sum_{n \geq p} f_n$ sau $\sum_n f_n$)

Obs: În general, $p = 0$ sau $p = 1$

Fie $\sum_n f_n$ o serie de funcții ($s_n : X \to \mathbb{R}$, $s_n = f_0 + \dots + f_n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$)

Def Spunem că seria de funcții $\sum_n f_n$:

$\boxed{1.}$ converge simplu / punctual (este simplu convergentă) dacă șirul $(s_n)_n$ este simplu / punctual converg.

$\boxed{2}$ converge unif (este uniform converg) dacă $(s_n)_n$ este uniform conv

$\boxed{3}$ converge absolut (este absolut converg.) dacă $\forall$ $x \in X$ seria $\sum_n |f_n(x)|$ e conv.

Def: Dacă seria de fct $\sum_n f_n$ converge simplu, limita (simplă) a șirului s_n se numește SUMA SERIEI $\sum_n f_n$ și se notează tot cu $\sum_n f_n$

Teoremă: Pp că $(X, \mathcal{T})$ e sp. topologic. Fie $a \in X$. Dacă seria de fct. $\sum_n f_n$ converge uniform către fct $f: X \to \mathbb{R}$ (i.e $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$) și f_n cont în a $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci f cont în a.

Teoremă (Weierstrass)

Pp că $\exists (\alpha_n)_n \subset [0, \infty)$ a.î.:

1) $\sum_n \alpha_n$ conv

2) $|f_n(x)| \le \alpha_n$, $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$

Atunci seria de fct. $\sum_n f_n$ converge uniform și absolut

Exc. Arătați că seria de fct. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ este unif. conv. ($x \in \underset{X}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}}$)

Alegem $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\left| \frac{\sin nx}{n^2+x^2} \right| \le \frac{1}{n^2+x^2} \le \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ conv (serie armonică gen. cu $\alpha = 2$)

Cf. Teoremei lui Weierstrass avem că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ e unif. conv. $\square$

Def: Mulțimea $A = \{x \in X \mid \sum_n f_n(x) \text{ e conv}\}$ s.n mulțimea de conv a seriei de funcții $\sum_n f_n$

Serii de puteri

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fie $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ şi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n \cdot x^n$ $\forall\ n \geq p$ ($0^0 = 1$ prin convenţie)

Def: Seria de fct. $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n \cdot x^n$ s.n serie de puteri ~~(Putem nota~~ $\cancel{\sum_{n=p}^{\infty} a_n x^n \overset{not}{=} \sum_{p,n}}$

Obs: În general, $p = 0$ sau $p = 1$

(Putem nota $\sum_{n=p}^{\infty} a_n x^n \overset{not}{=} \sum_{n \geq p} a_n \cdot x^n \overset{not}{=} \sum_n a_n x^n$)

~~Def: 1) Definim~~

Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri

Def: 1) Definim $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ $\left(\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty\right)$

şi numim acest R raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$

2) Intervalul $(-R, R)$ se numeşte intervalul de convergenţă al seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$

3) Mulţimea $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_n a_n x^n \text{ e conv} \}$ s.n mulţimea de conv a seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$

Teoremă: Fie $\sum_n a_n x^n$ ($(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$) o serie de puteri cu raza de conv R

1) Dacă $\exists \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0; \infty]$ atunci

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\right)$$

2) Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0,\infty]$ atunci

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\right)$$

<u>Teoremă</u> (Th. I a lui <u>Abel</u>)

Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de conv R

1) Pt orice $x \in (-R, R)$, seria $\sum_n a_n x^n$ e absolut conv (i.e $\sum_n |a_n x^n|$ e conv)

2) Pt orice $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$ seria $\sum_n a_n x^n$ e diverg.

$-R, R$ s-ar putea să fie <u>conv.</u>

<u>Corolar</u>: Cu notațiile precedente avem $(-R, R) \subset A \subset [R, -R]$

<u>exc</u> Det. mult de conv pt seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

<u>Sol</u>: $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right)\right|}{\left|(-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right|}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}}_{1} + \underbrace{\frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}}_{0} \right) = 1$$

$$0 \le \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \le \frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \frac{1}{n+1}$$

$\to 0$

$R = \frac{1}{1} = 1$

Fie A mulț. de conv. a seriei de puteri din enunț.
Avem $(-1,1) \subset A \subset [-1,1]$

Studiem dacă $1 \in A$ și $-1 \in A$

- pt $x=1$ seria devine

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

Fie $x_n = (-1)^n \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$

Pp prin absurd că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci

$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$. Deci $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) = 0$, contradicție cu faptul că șirul $\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)_n$ nu e conv (vezi Curs 1)

Așadar, $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$

Cf crit. suf. de diverg avem că $\sum_n x_n$ e diverg. Prin urmare $1 \notin A$.

- pt $x=-1$ seria devine

$$\sum_n (-1)^n \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n = \sum_n 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) \neq 0$ (vezi mai sus) rezultă cf crit suf de diverg, că $\sum_{n=1}^{\infty} 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$ e div

Prin urmare $-1 \notin A$

Așadar $A = (-1,1)$ $\square$

Teoremă (Th a doua a lui Abel)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de conv $R > 0$ și mulț. de conv. A

Atunci fct. $s: A \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e cont.

Explicații pt teorema a II-a a lui Abel

1) Pt orice $a \in (-R, R)$ s e cont în a

2) Dacă $R \in A$ (respectiv $-R \in A$), atunci s e cont în R (respect. în $-R$), i.e $\lim\limits_{\substack{x \to R \\ x < R}} s(x) = s(R)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\text{respect } \lim_{\substack{x \to -R \\ x > -R}} s(x) = s(-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \right)$$

<u>Teoremă</u> (teorema de derivare „termen cu termen" a seriilor de puteri)

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de conv R. Atunci seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \underset{\text{not } m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} \cdot x^m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ are aceeași rază de conv } R$$

• Dacă $R > 0$ și $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ atunci s e deriv. și $s'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \ \forall \ x \in (-R, R)$$

<u>Teoremă</u> (teorema de integrare „termen cu termen" a seriilor de puteri)

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de conv R. Atunci seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot t^{n+1} \underset{t \overset{not}{=} x}{=}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$ are aceeași rază de conv R

- Dacă $R>0$ și $s, S: (-R, R) \to \mathbb{R}$,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

atunci S e o primitivă a lui s (i.e. S e derivab și $S'(x) = s(x)$ $\forall x \in (-R, R)$)

(*) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $a \in I$ și $f \in C^{\infty}(I)$

Def: Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ s.n seria Taylor asociată fct f în punctul a.

Teoremă: Seria Taylor asociată fct f în pct a este conv. în pct $x \in I$, $x \neq a$ și are suma $f(x)$ dacă și numai dacă $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ unde $R_n(x)$ e restul formulei lui Taylor

Obs În general $a = 0$

Def: Seria Taylor asociată lui f în 0 se mai numește și seria MacLaurin asociată lui f.

Exc: Folosind teorema precedentă a. î. că

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sol

$I = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$

$a = 0 \in I$

$f: I \to \mathbb{R} \quad f(x) = e^x$

$f \in C^{\infty}(I)$

$f^{(k)}(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$

$f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cf Formulei lui Taylor cu rest Lagrange, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ $\exists$ c între 0 şi x ai

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_n(x)}$$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

Fie $x \in \mathbb{R}^*$.

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$

$$0 \leq |R_n(x)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} <$$

$$\frac{e^{|x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \overset{not}{=} x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c între 0 şi x $\Rightarrow 0 < e^c < e^{|x|}$

Este suficient să arătăm că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^{|x|}} \cdot |x|^{\cancel{n+2}}}{(n+2)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{e^{|x|}} \cdot \cancel{|x|^{n+1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1$$

Cf Crit rap. pt şiruri cu termeni strict pozitivi avem că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Deci $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$

Prin urmare, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Așadar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = e^0 = 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 \end{array}\right| \Rightarrow f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!}$$

Deci, $\underset{e^x}{\underset{\shortparallel}{f(x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\square$

<u>Obs</u> $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1,1)$

- Înlocuim $x \longrightarrow -x$ în rel precedentă și obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

- Înlocuim $x \to x^2$ în ult rel și obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in (-1,1)$$

<u>exc</u>: Arătați că $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall x \in [-1,1]$

Fie $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \forall x \in (-1,1)$$

Integrăm „termen cu termen" și obținem că $\exists$ $C \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \quad \forall x \in (-1,1)$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$\left.\begin{aligned} & f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 0^{2n+1} + C = 0 + C = C \end{aligned}\right| \Rightarrow C = 0$$

Deci $\underset{f(x)}{\underset{\parallel}{\operatorname{arctg} x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1} \quad \forall\ x \in (-1, 1)$

- Pt $x = 1$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$ conv (crit lui Leibniz)

- Cf Teoremei a II-a a lui Abel avem:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 1^{2n+1}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1$$

- Pt $x = -1$ seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (-1)^{2n+1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1}$ conv (crit lui Leibniz)

- Cf T II a lui Abel avem:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (-1)^{2n+1}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} (-1)$$

<u>Seria binomială</u> $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in (-1, 1)$ avem

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n$$