J (1)

Forma canonică Jordan a unei aplicații liniare

aplicație liniară = morfism de sp. vectoriale = transformare liniară

Peste tot K va fi un subcorp al lui $\mathbb{C}$, spațiile vectoriale și aplicațiile liniare sunt peste K.

Matricea unei aplicații liniare

Fie V sp. vect. de dim n și $B=(v_j)_{j=\overline{1,n}}$ bază în V, și W sp. vect. de dim m și $C=(w_i)_{i=\overline{1,m}}$ bază în W.

Fie $f: V \to W$ aplicație liniară.

Pt. fiecare $1\le j\le n$, fie $f(v_j)=\sum_{i=\overline{1,m}} a_{ij} w_i$, cu $a_{ij}\in K$. Atunci

$M_{B,C}(f)=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m,n}(K)$ s.n. matricea lui f în bazele B și C.

Dacă $v=\sum_{j=\overline{1,n}} x_j v_j \in V$, deci v are coordonatele $\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ în baza B, atunci

$$f(v)=\sum_{j=\overline{1,n}} x_j f(v_j)=\sum_{j=\overline{1,n}}\sum_{i=\overline{1,m}} x_j a_{ij} w_i=\sum_{i=\overline{1,m}}\Big(\sum_{j=\overline{1,n}} a_{ij}x_j\Big) w_i,$$ deci

coordonatele lui $f(v)$ în baza C (scrise pe coloană) sunt $M_{B,C}(f)\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$.

<u>Obs.</u> $Hom_K(V,W)$ e K-sp. vect. cu

- adunarea $(f_1+f_2)(v)=f_1(v)+f_2(v)$ pt. $f_1,f_2\in Hom_K(V,W)$, $v\in V$
- înm. cu scalari $(\lambda f)(v)=\lambda f(v)$ pt. $\lambda\in K$, $f\in Hom_K(V,W)$, $v\in V$

<u>Exerciții:</u> 1) Dacă $f_1,f_2\in Hom_K(V,W)$, atunci

$M_{B,C}(f_1+f_2)=M_{B,C}(f_1)+M_{B,C}(f_2)$. De asemenea

$M_{B,C}(\lambda f)=\lambda M_{B,C}(f)$ pt. $\lambda\in K$ și $f\in Hom_K(V,W)$.

Așadar funcția $\varphi: Hom_K(V,W)\to M_{m,n}(K)$, $\varphi(f)=M_{B,C}(f)$, este aplicație liniară.

2) φ de la 1) e chiar izomorfism liniar.

<u>Sol</u>. <u>injectivitatea</u>: dacă $\varphi(f)=0$, atunci $M_{B,C}(f)=0$, deci $f(v)$ are coordonate 0 în baza C, adică $f(v)=0$ pt. orice v. Rezultă $f=0$.

<u>surjectivitatea</u>: fie $A=(a_{ij})_{i,j}\in M_{m,n}(K)$. Fie $f:V\to W$ unica apl. lin. pt. care $f(v_j)=\sum_{i=\overline{1,m}} a_{ij}w_i$ pt. orice j (existența lui f rezultă din propr. de universalitate). Atunci $\varphi(f)=A$.

3) Dacă $A,A'\in M_{m,n}(K)$ și $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A'\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ pt. orice $x_1,\dots,x_n\in K$, atunci $A=A'$.

<u>Sol</u>. <u>Sol 1</u>: Fie $A=\varphi(f)$, $A'=\varphi(f')$. Cum pt. v de coord. $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ în baza B, $f(v)$ are coord. $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ în baza C, iar $f'(v)$ coord. $A'\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, rezultă că $f(v)=f'(v)$. Așadar $f=f'$, deci și $A=A'$.

<u>Sol 2</u>. Prin calcul direct, folosind $A\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow i = C_i(A)$ col. i a lui A.

<u>Prop</u>. Fie V, W, U sp. vect. finit dim. cu baze B, C, D. Fie $V\xrightarrow{f}W\xrightarrow{g}U$ apl. liniare. Atunci $M_{B,D}(gf)=M_{C,D}(g)M_{B,C}(f)$.

<u>Dem</u>. Dacă $v\in V$ are coordonatele $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ în baza B, atunci $f(v)$ are coord. $M_{B,C}(f)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ în baza C, iar $g(f(v))$ are coord. $M_{C,D}(g)M_{B,C}(f)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ în baza D. Cum $(gf)(v)$ are coord. $M_{B,D}(gf)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ în baza D, obținem $M_{C,D}(g)M_{B,C}(f)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=M_{B,D}(gf)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ pt. orice $x_1,\dots,x_n\in K$ și egalitatea dorită rezultă din Exerc. 3.

Dacă B_1, B_2 sunt baze ale lui V, atunci

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{1_V} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{baza } B_1 & & \text{baza } B_2 \end{array}$$

$A=M_{B_1,B_2}(1_V)$ s.n. matricea de trecere de la B_2 la B_1 (elementele lui B_1 se scriu în funcție de B_2 și coordonatele se scriu pe col. lui A).

Avem:

(coord. unui vector v în B_2) $=M_{B_1,B_2}(1_V)\cdot$(coord. lui v în B_1).

În plus, din

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "1_V"] \arrow[d] & V \arrow[r, "1_V"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ B_1 & B_2 & B_1 \end{tikzcd}$$

avem

$$I_n = M_{B_1,B_1}(1_V) = M_{B_2,B_1}(1_V)\, M_{B_1,B_2}(1_V)$$ și la fel și cu produsul invers, de unde $M_{B_1,B_2}(1_V)$ e inversabilă, cu inversa $M_{B_2,B_1}(1_V)$.

Prop. (schimbarea matricei unei apl. liniare la schimbarea bazelor).

Fie $f: V \to W$ apl. lin., B, B' baze în V și C, C' baze în W. Atunci

$$M_{B',C'}(f) = M_{C',C}(1_W)^{-1}\, M_{B,C}(f)\, M_{B',B}(1_V).$$

Dem.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "1_V"] \arrow[d] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \arrow[r, "1_W"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ B' \arrow[r, phantom, "M_{B',B}(1_V)"] & B \arrow[r, phantom, "M_{B,C}(f)"] & C \arrow[r, phantom, "M_{C,C'}(1_W)"] & C' \end{tikzcd}$$

Avem

$$M_{B',C'}(f) = M_{C,C'}(1_W)\, M_{B,C}(f)\, M_{B',B}(1_V) = M_{C',C}(1_W)^{-1}\, M_{B,C}(f)\, M_{B',B}(1_V).$$

Dacă V e sp. vect. de dim n, luând $W = V$ în discuția de mai sus, și B o bază a lui V, notăm $Hom_K(V,V) = End_K(V)$ și

$M_{B,B}(f) = M_B(f)$ pt. $f \in End_K(V)$. Avem că

$\varphi: End_K(V) \to M_n(K)$, $\varphi(f) = M_B(f)$, e izo liniar.

În plus, dacă B' e altă bază, atunci

$$M_{B'}(f) = M_{B',B}(1_V)^{-1}\, M_B(f)\, M_{B',B}(1_V).$$

Subspații invariante, vectori și valori proprii

Fie V un sp. vect. de dim n și $T: V \to V$ apl. lin.

Obiectiv: Să găsim o bază B a lui V pt. care $M_B(T)$ e "cât mai simplă".

Def. Un subspațiu U al lui V s.n. T-invariant (sau invariant în raport cu T) dacă $T(U) \subset U$.

<u>Obs.</u> Dacă U e T-invariant, atunci $T_{|U}: U \to U$ e op. lin.
În plus, dacă B_0 e bază a lui U, pe care o completăm până la o bază B a lui V, atunci

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(T_{|U}) & H \\ 0 & Q \end{pmatrix} \text{ pt. niște matrice } H, Q.$$

Dacă $V = U \oplus W$, cu U și W T-invariante, fie B_1 bază în U și B_2 bază în W; atunci $B_1 \cup B_2$ e bază în V și

$$M_{B_1 \cup B_2}(T) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(T_{|U}) & 0 \\ 0 & M_{B_2}(T_{|W}) \end{pmatrix}.$$

Mai general, dacă $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, cu $U_1, \dots, U_n$ subesp. T-inv. de baze $B_1, \dots, B_n$, atunci $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ e bază în V și

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} \boxed{M_{B_1}(T_{|U_1})} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{M_{B_n}(T_{|U_n})} \end{pmatrix}, \text{ cu } n \text{ blocuri diagonale.}$$

Așadar un prim pas în a găsi o formă "cât mai simplă" a matricei lui T într-o bază este să-l descompunem cât mai fin pe V ca sumă directă de subesp. T-invariante.

Cum arată subesp. T-invariante? În dim 1 sunt ușor de descris.

<u>Prop.</u> Fie U un subesp. de dimensiune 1. Atunci U e T-invariant $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $U = Kv$ pt. un $v \neq 0$ pt. care există $\lambda \in K$ cu $T(v) = \lambda v$.

<u>Dem.</u> "$\Leftarrow$" Clar $T(U) \subset U$.
"$\Rightarrow$" Fie $v \in U \setminus \{0\}$, deci $U = Kv$. Atunci $T(v) \in U$, deci $T(v) = \lambda v$ pt. un $\lambda \in K$.

<u>Definiție.</u> Fie $T: V \to V$ op. lin. Atunci:

- $\lambda \in K$ s.n. <u>valoare proprie</u> a lui T dacă există $v \in V \setminus \{0\}$ cu $T(v) = \lambda v$ (un astfel de v s.n. vector propriu coresp. val. proprii λ).
- $v \in V$ s.n. <u>vector propriu</u> pentru T dacă există $\lambda \in K$ cu $T(v) = \lambda v$.

Obs. Dacă V are o bază B formată din vectori proprii pt. T, atunci $M_B(T)$ este diagonală.

T s.n. diagonalizabilă dacă există o astfel de bază.

Vom vedea că nu orice T e diagonalizabil.

Cum găsim valorile proprii ale lui T?

Prop. Fie $A = M_B(T)$, unde B e bază. Atunci pt. $\lambda \in K$ avem λ e valoare proprie a lui $T \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$.

Dem. λ val. proprie $\Leftrightarrow \exists\, x_1, \dots, x_n$ nu toate nule cu $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

($x_1, \dots, x_n$ coord. unui $v \in V \setminus \{0\}$ cu $T(v) = \lambda v$)

$\Leftrightarrow \exists\, x_1, \dots, x_n \in K$ nu toate nule cu $(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda I_n - A$ neinversabilă $\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$.

Def. Dacă $A \in M_n(K)$, atunci $P_A(X) = \det(X I_n - A) \in M_n(K[X])$ se numește polinomul caracteristic al lui A.

[Obs: $X I_n - A$ e o matrice cu elemente polinoame din $K[X]$; formula determinantului e aceeași ca atunci când lucrăm cu matrice având elemente într-un corp].

Propoziție-Definiție. Dacă $T: V \to V$ e apl. lin., iar $A = M_B(T)$ într-o bază B, atunci P_A nu depinde de baza B.

Notăm $P_T = P_A$, polinomul caracteristic al lui T.

Dem. Fie B' o altă bază, știm că $A' = M_{B'}(T) = U^{-1} A U$ pt. o matrice inversabilă U [$U = M_{B',B}(1_V)$]. Atunci:

$$P_{A'}(X) = \det(X I_n - U^{-1} A U) = \det\left(U^{-1}(X I_n - A) U\right)$$
$$= \det(U^{-1}) \det(X I_n - A) \det(U)$$
$$= \underbrace{\det(U^{-1}) \det(U)}_{1} \det(X I_n - A) = \det(X I_n - A).$$

← obs: formula $\det(XY) = \det(X)\det(Y)$ rămâne valabilă și când $X, Y \in M_n(R)$, cu R inel comutativ

Aşadar val. proprii ale lui T sunt rădăcinile din K ale lui P_T.
Definim valorile proprii ale unei matrice $A \in M_n(K)$ ca fiind ~~val. proprii~~ rădăcinile lui P_A din K.

Corolar. Fie $K=\mathbb{C}$ şi $V \neq 0$. Atunci T are cel puţin o valoare proprie.

Dem. P_T are o rădăcină în $\mathbb{C}$ din Teorema Fundamentală a Algebrei.

Exerciţiu. Fie $K=\mathbb{R}$ şi $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Dacă $M_B(T)=A$ într-o bază B, atunci T nu are nicio val. proprie; în particular T nu e diagonalizabilă.

Prop. Fie $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ valori proprii distincte ale lui T şi $v_1,\dots,v_m$ vectori proprii nenuli corespunzători. Atunci $v_1,\dots,v_m$ sunt lin. indep.

Dem. Pres. prin absurd că nu ar fi adevărat şi fie m minim a.î. care ar exista $v_1,\dots,v_m$ ca în enunţ liniar dependenţi.
Clar $m \geq 2$ (a.î. că $v_1 \neq 0$). Fie $\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_m v_m=0$ cu $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in K$, nu toţi nuli. Aplic T şi obţin $\alpha_1\lambda_1 v_1+\dots+\alpha_m\lambda_m v_m=0$, iar apoi $\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)v_2+\dots+\alpha_m(\lambda_m-\lambda_1)v_m=0$. Din minimalitatea lui m şi $\lambda_j-\lambda_1\neq 0$ a.î. $j\neq 1 \Rightarrow \alpha_2=\dots=\alpha_m=0$, şi atunci şi $\alpha_1=0$, contradicţie.

Corolar. Dacă P_T are n valori proprii distincte, unde $n=\dim V$, atunci T e diagonalizabilă.

Dem. Fie $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ val. proprii distincte şi $v_1,\dots,v_n$ vectori proprii nenuli corespunzători. Din Prop. $\Rightarrow v_1,\dots,v_n$ lin. indep., deci formează o bază B, iar $M_B(T)$ e diagonală.

Prop. Fie U un subspaţiu T-invariant al lui V.
Atunci $P_{T|_U} \mid P_T$ în $K[X]$.

Dem. Am văzut că dacă luăm o bază B_0 a lui U şi o completăm până la o bază B a lui V, atunci