Teorie tutoriat 2

-preambul-

- **Mulțime deschisă**: mulțime care nu conține marginea ei

Mulțime închisă: mulțime care ~~nu~~ conține ~~t~~ întreaga margine / întregul contur

! O mulțime poate fi și deschisă și închisă

ex: $\mathbb{R}$, $\emptyset$

! O mulțime $\boxed{\text{SAU}}$ poate să nu fie nici deschisă, nici închisă. Ex: $(0, 1]$; $[-3, 7)$

- **Mulțime compactă**: mulțime închisă și mărginită (în $\mathbb{R}^n$)

Ex:
- $[0, 1]$ → compact
- $(0, 1)$ → nu e compact
- $[1, \infty)$ → nu e compact

! De ce ~~ne~~ trebuie informația? Pentru mai târziu.

- o fct continuă pe o mulțime compactă atinge valorile maxime și minime (T lui Weierstrass);
- secvențele de puncte dintr-o mulțime compactă au întotdeauna o subsecvență care converge (în acea mulțime). (prop Bolzano - Weierstrass).

Teorie tutoriat 2

-bază-

• În $\mathbb{R}^n$ distanța dintre 2 puncte:

$x = (x_1, \dots, x_n)$ și $y = (y_1, \dots, y_n)$

este $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$

Obs:

1.) $d(x,y) = 0 \iff x = y$; $d(x,y) \geq 0$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ ineg. triunghiului

Bilă deschisă: Pentru un pct $x_0 \in \mathbb{R}^n$ și un $r > 0$:

X pe general

$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < r\}$

↳ interiorul unei regiuni (fără margini) de puncte aflate la distanță mai mică decât r de centru.

Bila închisă

X pe general

$B[x_0, r] = \overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) \leq r\}$

↳ singura diferență este că include și marginile.

// starea unui punct față de o mulțime (regiune) A

• Punct interior → în mulțimea $\boxed{\mathring{A}}$

↳ Dacă se poate desena o bilă oricât de mică centrată în acest punct care își are toată aria în interiorul lui A.

• Punct de frontieră → $\boxed{\mathrm{Fr}(A)}$ sau $\boxed{\partial A} = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

↳ Se află fix pe marginea mulțimii. Dacă desenezi o bilă, aria ei atinge și interiorul lui A, dar și exteriorul lui A.

TT2 (la formal)

Punct aderent / de aderență → $\boxed{\bar{A}}$

Absolut toate punctele care au legătură cu A, adică $\mathring{A}$ + punctele de acumulare care nu sunt în A + punctele izolate } practic $A \cup A'$

Ex: pt $A = (0,1) \cup \{5\}$

$\mathring{A} = (0,1)$

$Fr(A) = \{0, 1, 5\}$; $Izo(A) = \{5\}$

$A' = [0, 1]$

$\bar{A} = A \cup A' = [0, 1] \cup \{5\}$

atenție la formal!

- Punct de acumulare → $\boxed{A'}$

Poate fi punct interior sau de frontieră, dar nu izolat. Pe scurt $A' = \mathring{A} \cup (Fr(A) \setminus Izo(A))$.

- Punct izolat → $\boxed{Izo(A)}$

~~Oricum ai dar~~

Există o bilă care atinge doar punctul x_0

- Vecinătate

↳ informal: „o zonă în jurul unui punct".

↳ formal: orice mulțime care conține cel puțin o bilă deschisă centrată ~~în x_0~~ într-un punct x_0.

Ex: În $\mathbb{R}$, o vecinătate a lui 2 ar putea fi: $(1,9 ; 2,1)$