Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$ și $f: A \to \mathbb{R}^q$. Pentru orice $x \in A$, avem $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \in \mathbb{R}^q$.

Prin urmare, am definit funcțiile $f_1, \ldots, f_q : A \to \mathbb{R}$.

Notăm $f = (f_1, \ldots, f_q)$.

Fie $a \in \mathring{A}$.

Def.: 1) Fie $i \in \{1, \ldots, p\}$. Spunem că f este derivabilă parțial (sau că f admite derivată parțială) în raport cu variabila x_i, în punctul a, dacă există în $\mathbb{R}^q$ limita $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$, unde $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$. În acest caz notăm $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$ și numim pe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x_i, în punctul a.

2) Spunem că f este diferențiabilă (sau derivabilă) în punctul a dacă există o aplicație liniară $T: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ (i.e. $T(x+y) = T(x) + T(y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^p$ și $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^p$) a.î. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0_{\mathbb{R}^q} = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{q \text{ componente}}$

Observație! Aplicația liniară din definiția precedentă, dacă există, este unică și se notează cu $df(a)$ sau cu $f'(a)$.

Def.: Aplicația liniară unică din definiția precedentă s.n. **diferențiala funcției f în punctul a.**

Observație! 1) Fie $c \in A$.

Sunt echivalente:

I. f continuă în c

II. $f_1, \dots, f_q$ continue în c

2) Fie $i \in \{1, \dots, p\}$. Sunt echivalente:

I. f admite derivata parțială în raport cu variabila x_i, în punctul a.

II. $f_1, \dots, f_q$ admit derivata parțială în raport cu variabila x_i, în punctul a.

Dacă una dintre afirmațiile I sau II este îndeplinită, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(a) \right)$$

3) Sunt echivalente:

I. f diferențiabilă în a.

II. $f_1, \dots, f_q$ diferențiabile în a.

Dacă una dintre afirmațiile I sau II este îndeplinită, atunci:

$$df(a) = (df_1(a), \dots, df_q(a)).$$

Teoremă: Dacă f este diferențiabilă în a, atunci f admite toate derivatele parțiale în a și $\underbrace{df(a)}_{T} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\underbrace{df(a)}_{T} \underset{\substack{\parallel \\ (x_1, \dots, x_p)}}{(x)} =$

$$
{}^t\left[
\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\
\hdashline
\frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a)
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p
\end{pmatrix}
\right]
$$

(Înmulțire de matrice; obținem o matrice coloană; Luăm transpusa și obținem o matrice linie, adică un vector din $\mathbb{R}^q$).

Observație! Dacă, în teorema precedentă, avem $q = 1$, atunci $\underbrace{df(a)}_{T} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

$\underbrace{df(a)}_{T} \underset{\substack{\parallel \\ (x_1, \dots, x_p)}}{(x)} =$

$$= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\, x_p.$$

Teoremă: Dacă f este diferențiabilă în a, atunci f este continuă în a.

Observație! Reciproca teoremei precedente nu este, în general, adevărată.

Teoremă: Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$ și $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o aplicație liniară. Atunci f este diferențiabilă în orice punct $a \in \mathbb{R}^p$ și $df(a) = f$.

Observație! Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $i \in \{1, \dots, p\}$, $pr_i: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $pr_i(x) = x_i$. Avem că pr_i este diferențiabilă în orice punct $a \in \mathbb{R}^p$ și $d\,pr_i(a) = pr_i$, deoarece pr_i este aplicație liniară. Notăm $pr_i = dx_i$.

Observație! Cu notațiile din observația precedentă, dacă $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$ și $f: A \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă în $a \in \mathring{A}$, atunci $df(a): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $df(a)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, x_1 +$

$$\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)u_p =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)pr_1(u) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)pr_p(u) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,dx_1(u) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\,dx_p(u), \text{ i.e.}$$

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\,dx_p.$$

Teoremă: (**CRITERIUL DE DIFERENȚIABILITATE**) Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f: A \to \mathbb{R}^q$ și $a \in \mathring{A}$. Dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset \mathring{A}$ a.î. f admite toate derivatele parțiale pe V (i.e. $(\exists)\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\ (\forall)\ c \in V,\ (\forall)\ i = \overline{1,p}$) și funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_i}: V \to \mathbb{R}^q$ sunt continue în a ($i = \overline{1,p}$), atunci f este diferențiabilă în a.

Exerciții:

1. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + 2z$. Arătați că f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$ și determinați $df(1,2,3)$.

Sol.:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + y - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y + x \qquad , (\forall)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z + 2$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \text{ continue pe } \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \text{ mulțime deschisă (deci vecinătate} \\ \text{pentru toate punctele sale)}\end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă (pe $\mathbb{R}^3$)

$$\underbrace{df(1,2,3)}_{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \underbrace{df(1,2,3)}_{T}(u,v,w) =$$

$$= {}^t\left[\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)\cdot v + \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)\, w =$$

$$= (2\cdot 1 + 2 - 1)\cdot u + (2\cdot 2 + 1)\cdot v + (2\cdot 3 + 2)\, w =$$

$$= 3u + 5v + 8w, \text{ i.e. } df(1,2,3) = 3dx + 5dy + 8dz \ \square$$

2. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Studiați continuitatea lui f.

b) Determinați $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

c) Studiați diferențiabilitatea lui f.

Sol.:

a) Vezi Seminarul 6.

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{(xy)'_x(x^2+y^2) - (xy)(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{(xy)'_y(x^2+y^2) - (xy)(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x(x^2+y^2) - xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\,e_1) - f(0,0)}{t}$$

Are legătură

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+(t,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_2) - f(0,0)}{t}$$

Cu regătură

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+(0,t)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t}{0^2+t^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Am obținut: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2) - xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2+y^2) - xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Studiem diferențiabilitatea lui f în $(0,0)$.

f nu este continuă în $(0,0)$ (Vezi Seminar 6)

$\Rightarrow f$ nu este diferențiabilă în $(0,0)$ $\square$

3. Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Studiați continuitatea lui f.

b) Determinați $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ și studiați continuitatea lor.

c) Studiați diferențiabilitatea lui f.

Sol.:

a) f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare)

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} - 0 \right| =$$

$$= |xy| \cdot \underbrace{\left| \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \leq |xy| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ continuă în $(0,0)$

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(xy \sin \frac{1}{x^2+y^2}\right)'_x =$$

$$= (xy)'_x \sin \frac{1}{x^2+y^2} + (xy)\left(\sin \frac{1}{x^2+y^2}\right)'_x$$

$$= y \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy\left(\cos \frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_x =$$

$$= y \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy\left(\cos \frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{(-2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy\left(\cos \frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{(-2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f(x,y) = f(y,x), (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot 0 \cdot \sin \frac{1}{t^2+0^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+te_2) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare)

Studiem continuitatea lui $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ în $(0,0)$.

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy\left(\cos \frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{(-2x)}{(x^2+y^2)^2} ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ ; \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ și

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(y_n \sin \frac{1}{x_n^2+y_n^2} - \frac{2x_n^2 y_n}{(x_n^2+y_n^2)^2} \cdot \cos \frac{1}{x_n^2+y_n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \underbrace{\sin 2n\pi}_{=0} - \frac{\cancel{2} \cdot \frac{1}{4n\pi} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{n\pi}}}{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^2} \underbrace{\cos 2n\pi}_{=1}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-4n^2\pi^2}{4n\pi\sqrt{n\pi}}\right) = -\infty \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Deci $\frac{\partial f}{\partial x}$ nu este continuă în $(0,0)$

Analog se arată că $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu este continuă în $(0,0)$ (folosind același șir $((x_n, y_n))_n$).

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare)

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă $\Big|$ $\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Studiem diferențiabilitatea lui f în $(0,0)$.

Dacă f ar fi diferențiabilă în $(0,0)$, atunci

$\underbrace{df(0,0)}_{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\underbrace{df(0,0)}_{T}(u,v) =$

$$= {}^t\left[\begin{pmatrix} \underset{\substack{\|\\ 0}}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} & \underset{\substack{\|\\ 0}}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right]$$

$= 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \overbrace{df(0,0)}^{T}((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$= 0 \Rightarrow f$ diferențiabilă în $(0,0)$

$\neq 0 \Rightarrow f$ nu este diferențiabilă în $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\overbrace{df(0,0)}^{T}((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right| =$$

$$=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\underbrace{\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$|x|\cdot\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

≤ 1 (explicație: $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2}=|y| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$)

Deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$, i.e.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\overbrace{df(0,0)}^{T}((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}=0$$

Prin urmare f este diferențiabilă în $(0,0)$ $\square$