Curs 4

Prop (Adaptarea def interior, aderenței, etc în spații metrice)

Fie (X, d) un spațiu metric, $A \subset X$ și $x_0 \in A$

1. $x_0 \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \subset A$

2. $x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall\, r > 0$ avem $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$

3. $x_0 \in A' \Leftrightarrow \forall\, r > 0$ avem $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

4. $x_0 \in Fr(A) = \partial A \Leftrightarrow x_0 \in \bar{A} \setminus \mathring{A}$

5. $x_0 \in Izo(A) = {}'A \Leftrightarrow x_0 \in \bar{A} \setminus A'$

Prop. ale interiorului unei mulțimi

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. topologic, $A \subset X$ și $B \subset X$

1. $\mathring{A} \subset A$

Justificare

Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \in \mathcal{V}_x$

Deci $\exists\, D \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D \subset A$.

Aşadar, $x \in A$, i.e. $\mathring{A} \subset A$ $\square$

(2) $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$

Justificare

Facem dublă incluziune

„$\subset$"

Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \subset V_x$. Deci $\exists\, D \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D \subset A$. Aşadar, $x \in \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$ i.e. $\mathring{A} \subset \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$ (1)

„$\supset$"

Fie $x \in \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$. Deci $\exists\, D_1 \in \mathcal{T}$, $D_1 \subset A$ a.î. $x \in D_1$. Avem că $\exists\, D_1 \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D_1 \subset A$.

Aşadar, $A \in V_x$ i.e. $x \in \mathring{A}$ i.e. $\bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D \subset \mathring{A}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$. $\square$

(3) $\mathring{A} \in \mathcal{T}$ (i.e. $\mathring{A}$ este mult. deschisă)

$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$ (reuniune arbitrară de mult. deschise) (prop 3 sp. topologic: U rămâne în $\mathcal{T}$)

$\Rightarrow \mathring{A} \in \mathcal{T}$

$\square$

(!) Obs Din prop ② și ③ rezultă că $\mathring{A}$ este cea mai mare (în sensul incluziunii) mulțime deschisă, inclusă în A

④ A deschisă $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

D: "$\Leftarrow$"

$\mathring{A}$ deschisă (din 3)
$A = \mathring{A}$ (din ipoteză) $\Rightarrow$ A deschisă

"$\Rightarrow$"

A deschisă (din ipoteză)
$A \subset A$
$\mathring{A}$ este cea mai mare (în sensul incluz.) mulțime deschisă inclusă în A $\Rightarrow$

Prin urmare $A \subset \mathring{A}$
Din ① avem $\mathring{A} \subset A$ $\Rightarrow$ Așadar $A = \mathring{A}$

(dem.) 5. Dacă $A \subset B$ atunci $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

(dem.) 6 a) $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \widehat{A \cap B}$

b) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \widehat{A \cup B}$

Obs Incluz. de la 6b) poate fi strictă

Prop ale aderenței unei mulțimi

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. topologic, $A \subset X$ și $B \subset X$

1. $A \subset \bar{A}$

D. Fie $x \in A$

Fie $V \in \mathcal{V}_x$. Avem $x \in V$ și $x \in A$, deci $V \cap A \neq \emptyset$, i.e $x \in \bar{A}$, i.e $A \subset \bar{A}$

□

2. $\boxed{\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F}$

Justificare: „$\subset$"

Fie $x \in \overline{A}$. Ar. că $x \in \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$

Pp prin R.A că $x \notin \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$. Deci $\exists$

F_1 închisă, $F_1 \supset A$ a.î. $x \notin F_1$. Deci

$x \in CF_1 = X \setminus F_1$

F_1 închisă $\Rightarrow X \setminus F_1$ ~~deschisă~~

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{X \setminus F_1}_{CF_1} \in \tau \\ x \in CF_1 \end{array}\right| \Rightarrow CF_1 \in \mathcal{V}_x$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \overline{A} \\ CF_1 \in \mathcal{V}_x \end{array}\right| \Rightarrow CF_1 \cap A \neq \emptyset \text{, contradicție cu } F_1 \supset A$$

Prin urmare, $x \in \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$, i.e $\overline{A} \subset \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$ (1)

„$\supset$"

Fie $x \in \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$. Arătam că $x \in \overline{A}$

Pp prin RA că $x \notin \overline{A}$. Deci $\exists V_1 \in \mathcal{V}_x$ a.î.

$V_1 \cap A = \emptyset$

$V_1 \in \mathcal{V}_x \Leftrightarrow \exists D_1 \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D_1 \subset V_1$

$V_1 \cap A = \emptyset \Rightarrow D_1 \cap A = \emptyset \Rightarrow$

$A \subset CD_1 = X \setminus D_1$

$D_1 \in \mathcal{T} \Rightarrow CD_1$ închisă

$\left.\begin{array}{l} CD_1 \supset A \\ x \in \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F \end{array}\right| \Rightarrow x \in CD_1$ contrad. cu $x \in D_1$

Prin urmare, $x \in \bar{A}$ i.e. $\bar{A} \supset \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow \bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F$ $\square$

3. $\bar{A}$ închisă

D: $\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F \Rightarrow C\bar{A} = C\Big(\bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} F\Big)$

$= \bigcup\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ F \supset A}} CF \in \mathcal{T}$, deoarece $CF \in \mathcal{T}$ $\forall F$ închisă, $F \supset A$

Deci, $\bar{A}$ închisă

Obs: Din (2)+(3) rezultă că $\bar{A}$ este cea mai mică (în sensul incluziunii) mult. închisă ce include A

4. A închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

• $\Leftarrow$

$\left.\begin{array}{l} \bar{A} \text{ închisă } (3) \\ A = \bar{A} \end{array}\right| \Rightarrow A$ închisă

$$\boxed{\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}}$$

A închisă

$A \supset \bar{A}$ (în sens. incluz.)

$\bar{A}$ cea mai mică ~~sub~~ mulț. închisă ce include A.

$\Rightarrow A \supset \bar{A}$

Din (1) avem $A \subset \bar{A}$

Așadar, $A = \bar{A}$ □

(de rez.) 5. Dacă $A \subset B$, atunci $\bar{A} \subset \bar{B}$

(de rez.) 6. $\boxed{\begin{array}{l} a) \ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ b) \ \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B} \end{array}}$

<u>Obs</u> Incluz. de la 6b) poate fi strictă

<u>Prop</u> Fie (X, τ) un spațiu topologic și $A \subset X$.

Atunci: $\boxed{\begin{array}{l} 1) \ C\mathring{A} = C\bar{A} \\ 2) \ \mathring{\overline{CA}} = C\bar{A} \end{array}}$

<u>Propriet. ale mulț. pct de acumulare</u>

Fie (X, τ) un sp. topologic și $A \subset X$

1. $A' \subset \bar{A}$

<u>D.</u> Fie $x \in A' \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_x$ avem $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Prin urmare, $\forall V \in \mathcal{V}_x$ avem $V \cap A \neq \emptyset$

i.e $x \in \bar{A}$ i.e. $A' \subset \bar{A}$ □

! 2. $\bar{A} = A \cup A'$

<u>D.</u> "$\supset$"

$\left.\begin{array}{l} A \subset \bar{A} \\ A' \subset \bar{A} \end{array}\right| \Rightarrow A \cup A' \subset \bar{A}$ (1)

$(\bar{A} \supset A \cup A')$ (1)

„C"

Fie $x \in \bar{A}$

Pp prin R.A că $x \notin A \cup A'$. Deci $x \notin A$ și $x \notin A'$

$x \notin A' \Rightarrow \exists V_1 \in \mathcal{V}_x$ a.î. $V_1 \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \bar{A} \\ V_1 \in \mathcal{V}_x \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_1 \cap A \neq \emptyset \\ V_1 \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$V_1 \cap A = \{x\}$ contrad cu $x \notin A$

Așadar, $x \in A \cup A'$ i.e. $\bar{A} \subset A \cup A'$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \bar{A} = A \cup A'$

<u>Prop</u> Fie (X, d) un sp. metric, $A \subset X$ și $x \in X$

1) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \overset{d}{=} x$

2) $x \in A' \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A \setminus \{x\}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \overset{d}{=} x$

<u>Obs</u> $(\mathbb{R}, d)$ e spațiul metric unde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$d(x, y) = |x - y|$

<u>Obs</u> Considerăm sp. metric $(\mathbb{R}, d)$, $x \in \mathbb{R}$ și $r > 0$

1) $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < r\}$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\}$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid -r < x - y < r\}$

$= (x-r, x+r)$

2) $B[x,r] = \overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$

Obs: În spaț. metric $(\mathbb{R}, d)$:

1) Interv. de forma $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ și (a,b) sunt mulț. deschise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

2) Interv de forma $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ și $[a,b]$ sunt mulț. închise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

$[a,b)$ ← nici închisă, nici deschisă

$\emptyset$ → și închisă, și deschisă

Ex Faceți analiza topologică a mulțimii $A \subseteq \mathbb{R}$, unde: (i.e. det $\mathring{A}$, $\overline{A}$, A', $Fr(A)$ și $Izd(A)$)

a) $A = \mathbb{Q}$.

Sol: 1) $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, r>0$ a.î. $\underset{(x-r,\, x+r)}{\underset{\parallel}{B(x,r)}} \subset \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\parallel}{A}}$

Avem $\mathring{A} = \emptyset$ deoarece între orice 2 nr reale există o infinit de nr. raționale și o infinit de nr. iraționale

b) $\overline{A} = ?$

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\, r>0$ avem $\underset{(x-r,\, x+r)}{\underset{\parallel}{B(x,r)}} \cap \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\parallel}{A}} \neq \emptyset$

$\bar{A} \subset \mathbb{R}$

Arătăm că $\mathbb{R} \subset \bar{A}$

Fie $x \in \mathbb{R}$. Fie $r > 0$. Avem $(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ deoarece între orice 2 nr reale ∃ o infinit de nr raționale și o infinit de nr iraționale

Prin urmare, $x \in \bar{A}$, i.e. $\mathbb{R} \subset \bar{A}$

Așadar $\bar{A} = \mathbb{R}$

3) $A' = ?$

$x \in A' \iff \forall\, r > 0$ avem $\overbrace{B(x,r)}^{(x-r,\, x+r)} \cap \underbrace{(A \setminus \{x\})}_{\mathbb{Q} \setminus \{x\}} \neq \emptyset$

$A' \subset \mathbb{R}$

Arătăm că $\mathbb{R} \subset A'$

Fie $x \in \mathbb{R}$. Fixăm $r > 0$. Avem $(x-r, x+r) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ deoarece între orice 2 nr reale ∃ o infinitate de nr raționale și o infinit de nr. iraționale

Prin urmare $x \in A'$ i.e $\mathbb{R} \subseteq A'$

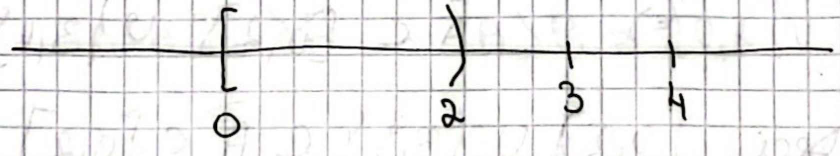
Așadar $A' = \mathbb{R}$

4) $Fr(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

5) $Izo(A) = {}'A = \bar{A} \setminus A' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ □

b) $A = [0, 2) \cup \{3, 4\}$

Sol



1) $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \iff \exists\, r > 0$ a.î. $(x-r, x+r) \subset A$

(mereu iau r mic)

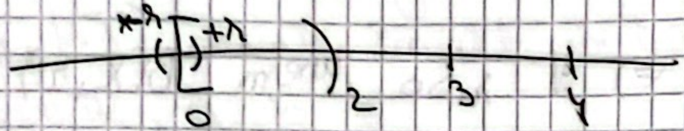
$\mathring{A} \subset A = [0,2) \cup \{3,4\}$

$\left.\begin{array}{l} (0,2) \text{ mulț. deschisă} \\ (0,2) \subset A \end{array}\right| \Rightarrow (0,2) \subset \mathring{A}$

Avem $(0,2) \subset \mathring{A} \subset A = [0,2) \cup \{3,4\}$

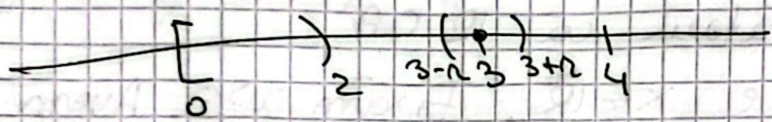
Studiem dacă $0 \in \mathring{A}$, $3 \in \mathring{A}$ și $4 \in \mathring{A}$

$0 \in \mathring{A} \iff \exists\, r>0$ a.î. $\underbrace{(0-r,\ 0+r)}_{=(-r,\ r)} \subset A$



Deci, $0 \notin \mathring{A}$

$3 \in \mathring{A} \iff \exists\, r>0$ a.î. $(3-r,\ 3+r) \subset A$



Deci $3 \notin \mathring{A}$

Analog, $4 \notin \mathring{A}$

2) $\bar{A} = ?$

$x \in \bar{A} \iff \forall\, r>0$ avem $(x-r,\ x+r) \cap A \neq \emptyset$

$\underbrace{A}_{=[0,2) \cup \{3,4\}} \subset \bar{A}$

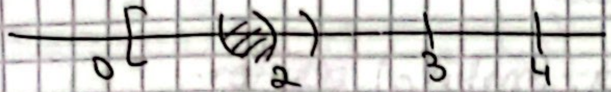
$[0,2] \cup \{3,4\}$ mulț. închisă ce conține A

$\Rightarrow \bar{A} \subset [0,2] \cup \{3,4\}$

Deci, $[0,2) \cup \{3,4\} \subset \bar{A} \subset [0,2] \cup \{3,4\}$

Studiem dacă $2 \in \bar{A}$

$2 \in \bar{A} \iff \forall\, r>0$ avem $(2-r,\ 2+r) \cap A \neq \emptyset$



Deci, $2 \in \bar{A}$

Așadar, $\bar{A} = [0,2] \cup \{3,4\}$

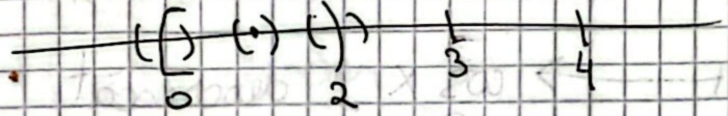
3) $A' = ?$

$x \in A' \iff \forall\, r>0$ avem $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$A' \subset \bar{A} = [0,2] \cup \{3,4\}$

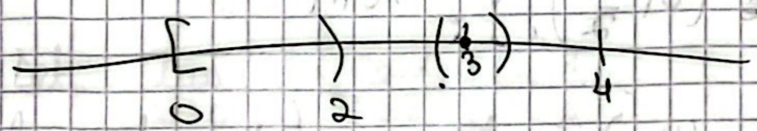
• Fie $x \in [0,2]$

$x \in A' \iff \forall\, r>0$ avem $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$



Deci $x \in \bar{A}$ i.e $[0,2] \subset A'$

$3 \in A' \iff \forall\, r>0$ avem $(3-r, 3+r) \cap (A \setminus \{3\}) \neq \emptyset$



Deci $3 \notin A'$

Analog $4 \notin A'$

Așadar, $A' = [0,2]$

4.) $Fr(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = [0,2] \cup \{3,4\} \setminus (0,2) = \{0,2,3,4\}$

5) $Iz(A) = {}^{i}A = \bar{A} \setminus A' = \{3,4\}$