Determinarea unei baze Jordan

Fie $T: V \to V$ ca în secțiunea precedentă. Știm să determinăm forma canonică Jordan J_T a lui T.

Problemă: Să se determine o bază B a lui V a.î. $M_B(T) = J_T$ (B s.n. bază Jordan)

Cum $V = V^{\lambda_1}(T) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_r}(T)$, problema se reduce la găsirea unei baze Jordan în fiecare $V^{\lambda}(T)$, pt. $T_{|V^{\lambda}(T)}$, unde λ e val. proprie a lui T. Ținând cont de secțiunea precedentă, trebuie să determinăm pt. o apl. liniară nilpotentă N o descompunere a spațiului (domeniul lui N) ca sumă directă de subspații ciclice, și în fiecare dintre aceste subspații o bază de forma $\{N^{l-1}(u), \dots, N(u), u\}$, unde l e dimensiunea subspațiului ciclic. Baza Jordan va fi reuniunea acestor baze ale subspațiilor ciclice.

Fie așadar $N: V \to V$ o apl. lin. nilpotentă, cu indice de nilpotență m. [N va fi pe rând $(T-\lambda I)_{|V^{\lambda}(T)}$].
Presupunem că știm numărul subsp. ciclice de fiecare dimensiune dintr-o descompunere a lui V (numerele notate cu $\gamma_1, \dots, \gamma_m$). Știm că $\gamma_m \neq 0$, notăm $\gamma_m = s$, așadar avem s subsp. ciclice de dim m în descompunere.
Fie $l < m$ maxim a.î. $\gamma_l \neq 0$ (adică există subsp. ciclice de dim l în descompunere), notăm $\gamma_l = t$, s.a.m.d.

O bază Jordan a lui N [care va fi o bază Jordan pt. $T_{|V^{\lambda}(T)}$] va fi de forma

$$\begin{array}{ccccccc|l}
N^{m-1}(u_1) & N^{m-2}(u_1) & \dots & N^{l-1}(u_1) & \dots & N(u_1) & u_1 & \text{baze în cele} \\
\dots & \dots & & \dots & & \dots & & s \text{ subsp. ciclice} \\
N^{m-1}(u_s) & N^{m-2}(u_s) & \dots & N^{l-1}(u_s) & \dots & N(u_s) & u_s & \text{de dim } m \\
 & & & N^{l-1}(v_1) & \dots & N(v_1) & v_1 & \text{baze în cele} \\
 & & & \dots & & \dots & & t \text{ subsp. ciclice} \\
 & & & N^{l-1}(v_t) & \dots & N(v_t) & v_t & \text{de dim } l
\end{array}$$

$\vdots$

Observație cheie: $\operatorname{Im} N^{m-1}$ are ca bază elementele aflate pe prima coloană din stânga în acest tablou, șamd

$\operatorname{Im} N^{m-i}$ are ca bază elem. de pe primele i col. din stânga în acest tablou.

Observația ne sugerează cum putem găsi efectiv $u_1, \dots, u_s$, $v_1, \dots, v_t$, șamd.

Notăm că $N(x_i)=0$.

Fie mai întâi $\{x_1, \dots, x_s\}$ bază în $\operatorname{Im} N^{m-1}$ (putem determina o astfel de bază pt. fiecare N în cauză).

Determinăm apoi $u_1, \dots, u_s$ cu $N^{m-1}(u_1)=x_1, \dots, N^{m-1}(u_s)=x_s$.

Prop. $\{N^j(u_i) \mid 1 \le i \le s,\ 0 \le j \le m-1\}$ e liniar indep.

Dem. (seamănă cu cazul $s=1$, în care am demonstrat că dacă $ht(e)=m$, atunci $e, N(e), \dots, N^{m-1}(e)$ sunt lin indep.)

Fie $\sum\limits_{\substack{1 \le i \le s \\ 0 \le j \le m-1}} \alpha_{ij} N^j(u_i) = 0$. Dacă nu toți α_{ij} ar fi nuli,

fie j_0 minim pt. care există i cu $\alpha_{ij_0} \neq 0$.

Aplicăm N^{m-1-j_0} și rezultă $\sum_{i=1,s} \alpha_{ij_0} \underbrace{N^{m-1}(u_i)}_{=x_i} = 0$,

de unde $\alpha_{ij_0} = 0$ pt. orice i, contrad.

În continuare completăm mulțimea $\{N^j(u_i) \mid 1 \le i \le s, l-1 \le j \le m-1\}$ cu $\{y_1, \dots, y_t\}$ până la o bază a lui $\operatorname{Im} N^{l-1}$. Mai mult, arătăm că putem face acest lucru a.î. $N(y_1) = \dots = N(y_t) = 0$.

Într-adevăr, dacă $y \in \operatorname{Im} N^{l-1}$ și $N(y) \neq 0$, atunci $N(y) \in \operatorname{Im} N^l$, deci $N(y)$ e generat de elementele de pe primele $m-l$ coloane din stânga ale tabloului, adică $N(y) = \sum_{\substack{1 \le i \le s \\ l \le j \le m-1}} \alpha_{ij} N^j(u_i)$.

Atunci $N\Big(y - \sum_{\substack{1 \le i \le s \\ l \le j \le m-1}} \alpha_{ij} N^{j-1}(u_i)\Big) = 0$ și evident

$y - \sum_{\substack{1 \le i \le s \\ l \le j \le m-1}} \alpha_{ij} N^{j-1}(u_i) \in \operatorname{Im} N^{l-1}$; vom înlocui y cu acest element. Procedând astfel cu toate $y_1, \dots, y_t$ (pe rând pe postul lui y) și înlocuindu-le cu elementele obținute, putem presupune că $N(y_1) = \dots = N(y_t) = 0$. Cum la fiecare y_i am adunat o combinație liniară de elemente din $\{N^j(u_i) \mid 1 \le i \le s, l-1 \le j \le m-1\}$, rezultă că și după aceste înlocuiri $y_1, \dots, y_t$ completează mulțimea $\{N^j(u_i) \mid 1 \le i \le s, l-1 \le j \le m-1\}$ până la o bază a lui $\operatorname{Im} N^{l-1}$!

Lemă. Mulțimea $\{N^j(u_i) \mid 1 \le i \le s, 0 \le j \le m-1\} \cup \{y_1, \dots, y_t\}$ este liniar independentă.

Dem. Fie $\sum_{1\le p\le t} \gamma_p y_p + \sum_{\substack{1\le i\le s\\ 0\le j\le m-1}} \alpha_{ij} N^j(u_i) = 0$, cu $\gamma_p, \alpha_{ij} \in K$.

Aplicăm N și obținem $\sum_{\substack{1\le i\le s\\ 0\le j\le m-1}} \alpha_{ij} N^{j+1}(u_i) = 0$, și cum

$N^m(u_i)=0$, mai departe că $\sum_{\substack{1\le i\le s\\ 0\le j\le m-2}} \alpha_{ij} N^{j+1}(u_i) = 0$.

Cum $\{N^h(u_i) \mid 1\le h\le m-1, 1\le i\le s\}$ e lin. indep., rezultă că $\alpha_{ij}=0$ pt. orice $1\le i\le s$, $0\le j\le m-2$. Rămâne

$\sum_{1\le p\le t} \gamma_p y_p + \sum_{1\le i\le s} \alpha_{i,m-1} N^{m-1}(u_i) = 0$. Dar

$\{y_p \mid 1\le p\le t\} \cup \{N^{m-1}(u_i) \mid 1\le i\le s\}$ e lin. ind. (submulțime a unei baze în $\operatorname{Im} N^{l-1}$), deci $\alpha_{i,m-1}=0$ pt. orice i și $\gamma_p=0$ pt. orice p.

Propr. Cum $y_p \in \operatorname{Im} N^{l-1}$, fie $v_1,\dots,v_t \in V$ a.î. $y_p = N^{l-1}(v_p)$ pt. orice p.

Prop. $\{N^j(u_i) \mid 1\le i\le s, 0\le j\le m-1\} \cup \{N^q(v_p) \mid 1\le p\le t, 0\le q\le l-1\}$ e lin. indep.

Dem. Fie $\sum_{\substack{1\le i\le s\\ 0\le j\le m-1}} \alpha_{ij} N^j(u_i) + \sum_{\substack{1\le p\le t\\ 0\le q\le l-1}} \beta_{pq} N^q(v_p) = 0$. (*)

Pres. prin absurd că nu toți β_{pq} sunt nuli. Fie atunci q_0 minim pt. care există un p cu $\beta_{pq_0}\neq 0$. Aplicăm N^{l-1-q_0} în (*) și obținem $\sum_{i,j} \alpha_{ij} N^{j+l-1-q_0}(u_i) + \sum_{1\le p\le t} \beta_{pq_0} \underbrace{N^{l-1}(v_p)}_{=\,y_p} = 0$.

Din Lema precedentă $\Rightarrow$ toți ~~coeficienții~~ β_{pq_0} sunt nuli, contradicție. Așadar toți β_{pq} sunt nuli, iar apoi și toți α_{ij} sunt nuli.

Continuăm similar, adică fie g următoarea cea mai mare dimensiune de subsp. ciclic (în afară de m și l) care apare în descompunere.

Completăm $\{N^j(u_i) \mid 1 \le i \le s,\ g-1 \le j \le m-1\} \cup \{N^q(v_p) \mid 1 \le p \le t,\ g-1 \le q \le l-1\}$ cu $\{z_1, \dots, z_h\}$ până la o bază a lui $\operatorname{Im} N^{g-1}$ ~~și alegem~~, modificăm (dacă este cazul) pe $z_1, \dots, z_h$ în așa fel încât $N(z_1) = \dots = N(z_h) = 0$ și alegem $w_1, \dots, w_h \in V$ cu $z_1 = N^{g-1}(w_1), \dots, z_h = N^{g-1}(w_h)$. Se demonstrează ca mai sus că

$\{N^j(u_i) \mid 1 \le i \le s,\ 0 \le j \le m-1\} \cup \{N^q(v_p) \mid 1 \le p \le t,\ 0 \le q \le l-1\} \cup \{N^r(w_u) \mid 1 \le u \le h,\ 0 \le r \le g-1\}$

este lin. indep. În momentul în care epuizăm toate dimensiunile posibile de subesp. ciclice găsim o bază Jordan.

Exemple:

① Fie $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care are matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ în baza canonică.

Atunci $P_T(X) = (X-1)^3$ (calcul), deci singura val. proprie este $\lambda = 1$, iar $\mathbb{R}^3 = V^1(T)$, $a_T(1) = 3$. Fie $N = T - \lambda I = T - I$. Atunci

$\dim(\operatorname{Ker} N) = 3 - \operatorname{rang}(A - I) = 2$ $\qquad A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ are rang 1

$\dim(\operatorname{Ker} N^2) = 3 - \operatorname{rang}(A-I)^2 = 3$ $\qquad (A-I)^2 = 0$ are rang 0

Așadar $m = 2$ și

$r = \dim(\operatorname{Ker} N) = 2$

$2r - \gamma_1 = \dim(\operatorname{Ker} N^2) = 3 \Rightarrow \gamma_1 = 1$

$\gamma_2 = r - \gamma_1 = 1$, deci forma Jordan a lui T are o celulă $J_2(1)$ și una $J_1(1)$, adică $J_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Căutăm acum o bază Jordan, care trebuie să fie de forma $\begin{matrix} N(u) & u \\ & v \end{matrix}$ cu $N^2(u)=0$, $N(v)=0$.

Trebuie să alegem o bază în $\operatorname{Im} N = \operatorname{Im}(T-I)$. Cum N are matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ în baza canonică, iar $\operatorname{Im} N$ este subspațiul generat de coloane [aceasta rezultă din faptul că $N(x_1,x_2,x_3)$ are coordonatele $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$],

o bază a lui $\operatorname{Im} N$ este $\{x\}$, unde $x=(1,1,-1)$.

Căutăm u cu $x=N(u)$, e clar că $u=(1,0,0)$ satisface, pt-că $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. [sau altfel se rezolvă un sistem liniar în coordonatele lui u și se alege o soluție]

Avem mulțimea lin. indep. $\{\underset{(1,1,-1)}{x} = N(u), \underset{(1,0,0)}{u}\}$ (care este bază a unui subsp. ciclic de ~~lungi~~ dim 2). Completăm această mulțime până la o bază a lui V $(=\operatorname{Im} \underset{Id.}{N^0})$ cu un vector y. Putem alege de exemplu $y=(0,1,0)$. Avem $N(y)=(T-I)(y)=(2,2,-2)\neq 0$ și trebuie să-l "corectăm" pe y. Avem $N(y)=2x=N(2u)$, deci $N(y-2u)=0$ și atunci îl înlocuim pe y cu $y-2u=(-2,1,0)$.

Rezultă că o bază Jordan este

$\{x=N(u), u, y-2u\} = \{(1,1,-1), (1,0,0), (-2,1,0)\}$.

(2) Fie $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ care are matricea

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ în baza canonică.

Atunci $P_T(X) = X^4(X-1)$, deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_2 = 1$, iar $\dim V^0(T) = a_T(0) = 4$, $\dim V^1(T) = a_T(1) = 1$ [desigur, $V = \mathbb{R}^5$].

Pt. $\lambda = 1$ avem $V^1(T) = V_1(T)$ (ambele cu dim 1). Vectorii proprii coresp. lui $\lambda = 1$ se obțin rezolvând $(A - I)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_5 \end{pmatrix} = 0$, care are soluțiile $(c, c, c, c, -c)$, cu $c \in \mathbb{R}$. Așadar o bază a lui $V^1(T)$ este $\{(1,1,1,1,-1)\}$ și lui $\lambda_2 = 1$ îi corespunde o celulă Jordan $J_1(1)$.

Fie acum $\lambda = 0$ și $\tilde{N} = T - \lambda I = T$, ~~Atunci~~ iar $N = (T - \lambda I)_{|V^\lambda(T)} = T_{|V^0(T)}$. Atunci

$\dim(\operatorname{Ker} N) = 5 - \operatorname{rang}(A) = 5 - 3 = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\dim(\operatorname{Ker} N^2) = 5 - \operatorname{rang}(A^2) = 5 - 2 = 3$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rang}(A^2) = 2$$

$\dim(\operatorname{Ker} N^3) = 5 - \operatorname{rang}(A^3) = 5 - 1 = 4 = a_T(0)$.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rang}(A^3) = 1.$$

Așadar $m = 3$

$r = \dim(\operatorname{Ker} N) = 2$

$2r - \gamma_1 = \dim(\operatorname{Ker} N^2) = 3 \Rightarrow \gamma_1 = 1$

$3r - 2\gamma_1 - \gamma_2 = \dim(\operatorname{Ker} N^3) = 4 \Rightarrow \gamma_2 = 0$.

$\gamma_3 = r - \gamma_1 - \gamma_2 = 1$

deci pt. $\lambda = 0$ avem o celulă Jordan $J_3(0)$ și una $J_1(0)$.

Căutăm o bază Jordan pt. $N = T_{|V^0(T)}$, care trebuie să fie de forma

$$\begin{matrix} N^2(u) & N(u) & u \\ & & v \end{matrix} \quad \text{cu } N^3(u) = 0,\ N(v) = 0.$$

În primul rând $V^0(T) = \operatorname{Ker} N^m = \operatorname{Ker} N^3 \overset{= \operatorname{Ker} \tilde{N}^3}{=} \{(0, a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

(se rezolvă sistemul $A^3 X = 0$).

Avem nevoie de o bază a lui $\operatorname{Im} N^2$; ~~cum acest spațiu~~

~~[illegible] lui A^2~~ cum

$N^2(0,a,b,c,d)$ are coordonatele $A^2\begin{pmatrix}0\\a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-a-d\\0\end{pmatrix}$,

rezultă că o bază a lui $\operatorname{Im} N^2$ este $\{x\}$, unde

$x = (0,0,0,1,0)$. Căutăm $u \in V^0(T)$ cu $N^2(u) = x$, deci

rezolvăm $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix}0\\a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \Leftrightarrow$ ~~[illegible]~~ $a+c=-1$. Putem lua

de exemplu $u = (0,-1,0,0,0)$. Atunci

$N(u) = T(u) = (0,1,1,0,-1)$.

Avem mulțimea lin. indep. $\{\underset{(0,0,0,1,0)}{x = N^2(u)}, \underset{(0,1,1,0,-1)}{N(u)}, \underset{(0,-1,0,0,0)}{u}\}$, ce

(cu un element)
care trebuie să o completăm până la o bază a lui $V^0(T)$.

Observăm că $y = (0,0,0,0,1)$ este un astfel de element.

Dar $N(y) = (0,-1,-1,-1,1) \neq 0$, deci y trebuie "corectat".

Cum $N(y) = -N(u) - N^2(u) \Rightarrow N(y+u+N(u)) = 0$ și

$\{\underset{(0,0,0,1,0)}{N^2(u)}, \underset{(0,1,1,0,-1)}{N(u)}, \underset{(0,-1,0,0,0)}{u}, \underset{(0,0,1,1,0,0)}{y+u+N(u)}\}$ este bază Jordan pt. N.

În concluzie forma canonică Jordan a lui T este

$$J_T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{1}\end{pmatrix}$$, iar o bază Jordan este

$\{(0,0,0,1,0), (0,1,1,0,-1), (0,-1,0,0,0), (0,0,1,0,0), (1,1,1,1,-1)\}$.