Serii de puteri

Fie $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ ($0^0 = 1$, prin convenție) și $p \in \mathbb{N}$.

Def: Seria de funcții $\sum\limits_{n=p}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n \cdot x^n$ s.n. serie de puteri.

Observație! În general, $p = 0$ sau $p = 1$.

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri ($(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$).

Def: 1) Definim $R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ $\left(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\right)$.

Acest R s.n. raza de convergență a seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$.

2) Intervalul $(-R, R)$ s.n. intervalul de convergență al seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$.

3) Mulțimea $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum\limits_n a_n x^n$ este convergentă$\}$ s.n. mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$.

Teoremă: 1) Dacă există $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = \infty,\ \frac{1}{\infty} = 0\right).$$

2) Dacă există $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, atunci

$$R = \frac{1}{\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = \infty,\ \frac{1}{\infty} = 0\right)$$

Teorema I a lui Abel:

Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R.

1) Pentru orice $x \in (-R, R)$, avem că seria $\sum_n a_n x^n$ este absolut convergentă (i.e. seria $\sum_n |a_n x^n|$ este convergentă).

2) Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, seria $\sum_n a_n x^n$ este divergentă.

Corolar: Cu notațiile precedente avem $(-R, R) \subset M \subset [-R, R]$.

Exerciții: Determinați mulțimea de convergență pentru seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \cdot x^n$.

Sol. $a_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right),\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right|}{\left|(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right|}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\right)$$

$$0<\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\le\frac{\frac{1}{n+1}}{1}=\frac{1}{n+1},\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$$

$$\underset{n\to+\infty}{\searrow}\qquad\underset{n\to+\infty}{\downarrow}\qquad\underset{n\to+\infty}{\swarrow}$$

$$0$$

Cf. Criteriului cleştelui avem că

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\right)=0$$

Deci $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1+0=1$

$R=\frac{1}{1}$

Fie M mulţimea de convergenţă a seriei de puteri din enunţ.

Avem $(-R,R)\subset M\subset[-R,R]$, i.e. $(-1,1)\subset M\subset[-1,1]$.

Studiem dacă $-1\in M$ şi $1\in M$.

Dacă $x=-1$, seria devine:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

Știm din cursul 1 că șirul $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)_n$ nu este convergent. Deci $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\neq 0$.

Conform Criteriului suficient de divergență $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă.

Prin urmare, $-1\notin M$.

Dacă $x=1$, seria devine:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\cdot 1^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

Dacă, prin absurd, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=0$,

atunci $\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right|=0$, deci

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=0$, contradicție!

Deci $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\neq 0$. Cf. Criteriului suficient de divergență avem că $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă.

Prin urmare, $1\notin M$.

Așadar, $M=(-1,1)$ $\square$

Teorema a II-a a lui Abel:

Fie $\sum_{n} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $R>0$ și mulțimea de convergență M. Atunci funcția $s: M \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n} a_n x^n$ este continuă.

Explicații pentru teorema a II-a a lui Abel:

1) Pentru orice $x \in (-R, R)$, funcția s este continuă.

2) Dacă $R \in M$ (respectiv $-R \in M$), atunci s este continuă în R (respectiv s este continuă în $-R$), deci $\lim_{\substack{x \to R \\ x < R}} s(x) = s(R) = \sum_{n} a_n R^n$ (respectiv $\lim_{\substack{x \to R \\ x > R}} s(x) = s(-R) = \sum_{n} a_n (-R)^n$).

Teorema de derivare „termen cu termen" a seriilor de puteri:

Fie $\sum_{n=0} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R. Atunci seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$$

Notăm $n-1=m$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Notăm $m=n$

are aceeași rază de convergență R. Dacă, în plus, $R>0$ și $s:(-R,R)\to\mathbb{R}$,

$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, atunci s este derivabilă

și $s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \cdot x^n$, $(\forall)\ x\in(-R,R)$

Teorema de integrare „termen cu termen" a seriilor de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R. Atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$ are aceeași rază de convergență R.

Dacă, în plus, $R>0$, s, $S:(-R,R)\to\mathbb{R}$,
$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$,
atunci S este o primitivă a lui s, i.e.
$S'(x) = s(x)$, $(\forall)\ x\in(-R,R)$.

Fie $I\subset\mathbb{R}$ interval nedegenerat, $a\in I$ și $f\in C^{\infty}(I)$.

<u>Def.</u>: Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ s.n. **seria Taylor asociată funcției f în punctul a.**

Teoremă: Seria Taylor asociată lui f în a, de mai sus, este convergentă în $x \in I \setminus \{a\}$ și are suma $f(x)$ dacă și numai dacă $(R_n(x))_n$ converge către 0, unde $R_n(x)$ este restul de ordinul n al Formulei lui Taylor cu rest Lagrange.

Observație! În general, $a=0$.

Def.: Seria Taylor asociată lui f în 0 s.n. **serie MacLaurin asociată lui f.**

Exercițiu: Folosind teorema precedentă, arătați că $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

Sol.:

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

$I = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$a = 0$

$f \in C^\infty(I)$

$f^{(n)}(x) = e^x$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$$

Cf. Formulei lui Taylor cu rest Lagrange,

$(\forall)\, n\in\mathbb{N},\ (\forall)\, x\in\mathbb{R},\ x\neq 0,\ (\exists)\, c$ între 0 și x a.î.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$$

Avem $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}=\dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$,

$(\forall)\, x\in\mathbb{R}^*,\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}$.

Fie $x\in\mathbb{R}^*$.

Avem echivalența: $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0 \iff$

$\iff \lim\limits_{n\to+\infty} |R_n(x)|=0$

Avem $0<|R_n(x)|=\dfrac{e^c}{(n+1)!}|x|^{n+1}<\dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\overset{\text{not.}}{=\!=}$

$x_n,\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}$

$c\in(0,x)$ sau $c\in(x,0)$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cancel{e^{|x|}}\cdot\cancel{|x|^{n+2}}^{\,|x|}}{\cancel{(n+2)!}_{\,n+2}}\cdot\frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{e^{|x|}}\cdot\cancel{|x|^{n+1}}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+2}=0<1$$

Cf. Criteriului raportului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi, avem că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$.

Cum $0 < |R_n(x)| < x_n, (\forall) n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |R_n(x)| = 0$$

Deci $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

Așadar, $\underset{\displaystyle e^x}{\underset{\parallel}{f(x)}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (\forall)\, x \in \mathbb{R}^*.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = e^0 = 1 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\displaystyle e^0}{\underset{\parallel}{f(0)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!}$$

Prin urmare, $\underset{\displaystyle e^x}{\underset{\parallel}{f(x)}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$ $\square$

Observație! $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, (\forall)\, x \in (-1,1)$

(suma seriei geometrice, $q = x$)

Înlocuim x cu $-x$ în egalitatea precedentă și obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}, (\forall)\, x \in (-1,1)$$

$$\| \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

Înlocuim x cu x^2 în ultima relație și obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \ (\forall)\ x \in (-1,1)$$

Exercițiu: Arătați că $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(\forall)\ x \in [-1,1]$.

Sol.:

Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}, \ (\forall)\ x \in (-1,1)$$

Integrăm „termen cu termen" și obținem că $(\exists)$ $C \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$, $(\forall)\ x \in (-1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} + C = 0 + C \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 0$$

Deci, $\underset{\displaystyle \operatorname{arctg} x}{\underset{\|}{f(x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(\forall)\ x \in (-1,1)$

Dacă $x = -1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$, convergentă

(Criteriul lui Leibniz)

Conform Teoremei a II-a a lui Abel avem

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\|$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \operatorname{arctg} x$$

$$\|$$

$$\operatorname{arctg}(-1)$$

$$\|$$

$$f(-1)$$

Dacă $x = 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$, convergentă

(Criteriul lui Leibniz)

Conform Teoremei a II-a a lui Abel avem

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\|$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \operatorname{arctg} x$$

$$\|$$

$\operatorname{arctg} 1 = f(1)$

Deci $\underbrace{f(x)}_{= \operatorname{arctg} x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, (\forall) x \in [-1,1]$ $\square$

Seria binomială

$(\forall) \alpha \in \mathbb{R}, (\forall) x \in (-1,1)$, avem $(1+x)^\alpha =$

$= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$

$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n$

Derivate parțiale. Funcții

Considerăm $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}} =$

$= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, (\forall) i = \overline{1,n}\}$

Def.: Pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ definim:

1) $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

2) $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

Observație! Atunci când nu specificăm se subînțelege că notăm

$x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ etc.

Def.: Pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$ definim **norma lui x** prin $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

Propoziție: Aplicația $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{x}} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\|x\|}}$$

definește o normă pe $\mathbb{R}^n$, adică are proprietățile:

1) $\|x\|\geq 0$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}^n$
2) $\|x\|=0 \iff x=\underbrace{(0,\dots,0)}_{n \text{ componente}} \overset{\text{not.}}{=\!=} 0_{\mathbb{R}^n}$
3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}^n$, $(\forall)\, \alpha\in\mathbb{R}$
4) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, $(\forall)\, x,y\in\mathbb{R}^n$

Observație! Pentru orice $x,y\in\mathbb{R}^n$, avem $d_2(x,y)=\|x-y\|$.