

## Tutorial 6

Explicație rezolvare exercițiu specific examen:

$$1) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Studiați continuitatea lui  $f$  în  $(0,0)$

b) Determinați  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$

c) Studiați diferențialibilitatea lui  $f$ .

Sol:

a)  $f$  continuă pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  (operății cu funcții elementare)

Studiem continuitatea lui  $f$  în  $(0,0)$ .

Fixe  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\left| f(x,y) - f(0,0) \right| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\leq \underbrace{1 \cdot |y|}_{\text{de ce?}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 \cdot 0 = 0$

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} / \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0)$$

16

h) Fie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

aici rezolvăm derivata parțială  
 pentru punctele neproblematici  
 adică unde funcția este liniară  
 definită

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left( \frac{x y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)' = \frac{(xy)' \sqrt{x^2 + y^2} - xy (\sqrt{x^2 + y^2})''}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} =$$

$$= \frac{y \sqrt{x^2 + y^2} - xy \left( \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{x^2 + y^2} = \frac{y \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} =$$

$$\left( = \frac{x^2 y + y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Dacă există nu e neapărat corect

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left( \frac{x y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)' = \frac{(xy)' \sqrt{x^2 + y^2} - xy (\sqrt{x^2 + y^2})'_y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} =$$

$$= \frac{x \sqrt{x^2 + y^2} - xy \cdot \left( \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \frac{x \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{x(x^2 + y^2) - x y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)} = \frac{x^3 + x y^2 - x y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)} = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)}$$

• Vom verifică dacă derivata există în punctul 'problematic', adică de discontinuitate, folosind definitia formală a derivării parțiale, ceea ce în limită

•  $e_1 = (1, 0)$  și  $e_2 = (0, 1)$  sunt vectorii bazici oronormate din  $\mathbb{R}^2$   
 ↳ folosind punctul deplasarea pe  $Ox$  pt  $e_1$  și  $Oy$  pt  $e_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \text{variable}}} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t} ; a = \text{punctul în care}$$

există derivabilitatea

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t e_1) - f(0, 0)}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + (t,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{\sqrt{t^2+0^2}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + t \cdot e_1) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + (0,t)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot t}{\sqrt{0+t^2}} - 0}{t} = 0$$

c)  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  sunt pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$   
 și sunt diferențiale elementare  $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ diferențială} \\ \text{pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{array} \right.$   
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \text{dechisă}$

Deci dacă derivatele parțiale sunt continue pe o mulțime deschisă, atunci ~~aceea~~ funcția este diferențială pe acea mulțime // Evident că diferențialitatea

studierii diferențialitățea lui f în (0,0)

Dacă f și  $f_x$  diferențiale în (0,0):

$$df(0,0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(0,0)(u,v) =$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right)}_0 & \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right)}_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$$

• sl f(a) :  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\underline{df(a)(u)} =$

$$t \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

• f differentiabilă în punct a ( $\Leftarrow$ ) --- ( $\Rightarrow$ )

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = \underbrace{0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0, 0)}_{\text{solice să fie } 0}$$

$$\text{pt } T = df(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - df(x-a)}{\|x-a\|}$$

$\|-\|$  = normă ;  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y) - (0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

||Atunci trebuie testată continuitatea, deci limita pentru orice punct trebuie să fie = 0.

! Nu nea mereu se majorări să facem, deci intuiția să nu e continuă.

! Pentru a ne slăgi punctele liniare în considerare diferență de puteri de la numitor: \* și y se acoperă putere, deci liniar  $x = y$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{x}_n, \bar{y}_n) = (0, 0)$ , deci trebuie să slăgem punctele astfel încât limita pentru fiecare să fie 0.

Alegem  $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Aveam  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{x}_n, \bar{y}_n) = (0, 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_n \bar{y}_n}{\bar{x}_n^2 + \bar{y}_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Deci  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\bar{x} \bar{y}}{x^2 + y^2} \neq 0$ .

Pentru urmare, f nu este diferențialabilă în  $(0, 0)$ .  $\square$

! Deoarece rezultă să demonstrezi că înegalitatea a), se face ca să e sănătate în  $(0, 0)$ , astăzi putem spune direct că f nu e diferențialabilă în  $(0, 0)$   $\rightarrow$  PĂTIN PROBABIL!!!

$$(2) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 y^5}{x^{10} + y^{10}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) sănătate

$$b) \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}$$

c) diferențialabilitate

Sol:

a) Veri Tutoriat 4, Ex 2, b)

b) Fix  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \left( \frac{x^6 y^5}{x^{10} + y^{10}} \right)_x' = \frac{(x^6 y^5)'_x (x^{10} + y^{10}) - (x^6 y^5)(x^{10} + y^{10})}{(x^{10} + y^{10})^2} \\ &= \frac{6x^5 y^5 (x^{10} + y^{10}) - (x^6 y^5) \cdot 10x^9}{(x^{10} + y^{10})^2} = \frac{6x^{15} y^5 + 6x^5 y^{10} - 10x^{15} y^5}{(x^{10} + y^{10})^2} \\ &= \frac{6x^5 y^{10} - 4x^{15} y^5}{(x^{10} + y^{10})^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \left( \frac{x^6 y^5}{x^{10} + y^{10}} \right)_y' = \frac{5x^6 y^4 (x^{10} + y^{10}) - (x^6 y^5) \cdot 10y^9}{(x^{10} + y^{10})^2} \\ &= \frac{5x^{16} y^4 + 5x^6 y^{14} - 10y^{14} x^6}{(x^{10} + y^{10})^2} = \frac{5x^{16} y^4 - 5x^6 y^{14}}{(x^{10} + y^{10})^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t \cdot e_1) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^6 \cdot 0}{t^{10} + 0} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t \cdot e_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot t^5}{0 + t^{10}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0\end{aligned}$$

c)  $\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ \text{log m fact, elementare} \end{array} \right\} f \text{ differentiabile pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$   
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Studiem diferențialibilitatea în  $(0, 0)$ :

$$df(0, 0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(0, 0)(u, v) =$$

$$t \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right)}_0 \quad \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right)}_0 \right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y) - (0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^6 y^5}{x^{10} + y^{10}} - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 y^5}{(x^{10} + y^{10}) \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Wegen  $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ,  $(n) n \in \mathbb{N}^*$

stehen  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x_n^6 y_n^5}{(x_n^{10} + y_n^{10}) \sqrt{x_n^2 + y_n^2}}}{\frac{1}{n^6} \cdot \frac{1}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^6} \cdot \frac{1}{n^5}}{\left(\frac{1}{n^{10}} + \frac{1}{n^{10}}\right) \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{11}}}{\frac{2}{n^{10}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{11}}}{\frac{2\sqrt{2}}{n^{11}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

Ein umso,  $f$  ist nicht differenzierbar in  $(0,0)$ .  $\square$