25.11.2024

seminar 8

1) descompuneți în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ polinoamele X^n-1 cu $1 \le n \le 6$.

$$X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1)$$

$n=1 \Rightarrow X-1$ ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

$n=2 \Rightarrow X^2-1 = (X-1)(X+1)$ descompunerea în factori ireductibili în toate

$n=3 \Rightarrow X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1) = \cancel{(X-1)}$ —11— în $\mathbb{R}[X]$ și $\mathbb{Q}[X]$

$X^2+X+1=0$

$\Delta = -3 \Rightarrow X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$X^3-1 = (X-1)\left(X + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ —11— în $\mathbb{C}[X]$

$n=4 \Rightarrow X^4-1 = (X^2-1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$

—11— în $\mathbb{Q}[X]$ și $\mathbb{R}[X]$

$X^2+1=0 \Rightarrow X = \pm i$

$X^4-1 = (X+1)(X-1)(X-i)(X+i)$ —11— în $\mathbb{C}[X]$

$n=5 \Rightarrow X^5-1 = (X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$

$n=6 \Rightarrow X^6-1 = (X^3-1)(X^3+1) = (X-1)(X^2+X+1)(X^3+1)$

$= (X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)$ —11— în $\mathbb{Q}[X]$ și $\mathbb{R}[X]$

$X^2+X+1=0$

$X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$X^2-X+1=0$

$\Delta = -3$

$X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$x^6-1=(x-1)(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) \quad -11- \quad \hat{m} \quad \mathbb{R}[x]$$

$$n=5 \rightarrow x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0 \mid :x^2$$

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

$$x+1+\frac{1}{x}+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=0$$

$$\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{t}^2+x+\frac{1}{x}-1=0$$

$$t^2+t-1=0$$

$$\Delta=5 \Rightarrow t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$t_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\cancel{x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \qquad x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\cancel{\frac{x^2+1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \qquad x^2+1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x \mid \cdot 2$$

$$2x^2+2=(-1+\sqrt{5})x$$

$$2x^2+(1-\sqrt{5})x+2=0$$

$$\Delta=-10-2\sqrt{5}$$

$$x_{1,2}=\frac{(-1+\sqrt{5})\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Big| \cdot x$$

$$x^2+1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} x \Big| \cdot 2$$

$$2x^2 + (1+\sqrt{5})x + 2 = 0$$

$$\Delta = (1+\sqrt{5})^2 - 16 = 1+5+2\sqrt{5} - 16 = -10+2\sqrt{5} < 0$$

$$\Rightarrow \cancel{x_1, x_2}\ x_{3,4} = \frac{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x^5-1 = (x-1)\left(x + \frac{-1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(x + \frac{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)$$

–//– în $\mathbb{C}[X]$

$$x^5-1 = (x-1)\underbrace{(2x^2+(1-\sqrt{5})x+2)}_{\Delta<0}\underbrace{(2x^2+(1+\sqrt{5})x+2)}_{\Delta<0}$$

–//– în $\mathbb{R}[X]$

$$x^5-1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \quad \text{–//– în } \mathbb{Q}[X]$$

Dacă, prin reducere la absurd, $x^4+x^3+x^2+x+1 = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots$ factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$, ei se descompun mai departe în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$. Din unicitatea desc. în $\mathbb{R}[X]$, obținem g_1 și $g_2 \in \mathbb{Q}[X] \Rightarrow$

! $x^5=1$ are răd $\in \mathbb{C}$

$$y_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, \quad k=\overline{0,4}$$

$y_0 = 1$

$$y_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$\hookrightarrow y_0, \ldots, y_4 \rightarrow$ vf. unui poligon regulat cu 5 laturi

y_1 este singura rod cu $Re > 0$ și $Im > 0$

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = x_1$$

$$y_4 = \bar{y_1} = \cancel{x}\, x_2$$

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

2) Determinați polinoamele de grad ≤ 5 ireductibile în $\mathbb{Z}_2[X]$:

$n=1 \to X+\hat{a}$, $a \in \{0,1\}$ $\Rightarrow$ $n=1$ $\{X+\hat{1}, X\}$

$\hookrightarrow aX+b$, $a,b \in \mathbb{Z}_2$, $a \neq \hat{0}$ și $a = \hat{1}$

$n=2 \to aX^2+bX+c$, $a,b,c \in \mathbb{Z}_2$

$a \neq \hat{0} \Rightarrow a = \hat{1}$

$n=2 \to \{X^2+X+\hat{1}, X^2+X, X^2+\hat{1}, X^2\}$

$$X^2+X = X(X+\hat{1})$$

$$X^2 = X \cdot X$$

$$X^2+\hat{1} = (X+\hat{1})^2$$

$X^2+X+\hat{1} = p(X)$

$p(\hat{0}) = \hat{1}$ | $\Rightarrow p$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$ | $\Rightarrow$

$p(\hat{1}) = 1$ | grad$(p) = 2$

$\Rightarrow p$ ir în $\mathbb{Z}_2[X]$

$n=3$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2 \quad a=\hat{1}$

$f(\hat{0})=d=\hat{1}$ $\qquad x^3+x^2+1$ $\qquad$ ir în

$f(\hat{1})=\hat{1}+b+c+\hat{1}=\hat{1}$ $\qquad x^3+x+1$ $\qquad \mathbb{Z}_2[x]$

$b+c=\hat{1}$

~~$n=4: h(x)=ax^4+bx^3+dx+d, \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2$~~ ~~$a=\hat{1}$~~

~~$h(\hat{0})=\hat{1} \Rightarrow d=\hat{1}$ $\quad h_1: x^4+x^3+x^2+x+\hat{1}$~~

~~$h(\hat{1})=\hat{1}=\hat{1}+b+c+d$~~

$n=4, \quad h(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e, \quad a,b,c,d,e \in \mathbb{Z}_2, \ a=\hat{1}$

$h(\hat{0})=\hat{1} \Rightarrow e=\hat{1} \rightarrow h_1: x^4+x^3+x^2+x+\hat{1}$

$h(\hat{1})=\hat{1} \Leftrightarrow \hat{1}+b+c+d+\hat{1}=\hat{1}$

$b+c+d=\hat{1}$

$h_2: x^4+x^3+\hat{1}$

$h_3: x^4+x^2+\hat{1}$

$h_4: x^4+x+\hat{1}$

$h_1, h_2, h_4 \rightarrow$ polinoame ireductibile

Temă $\rightarrow$ –//– $\mathbb{Z}_3[x]$ $\qquad \hat{2}=-\hat{1}$

↳ pp. că coef dominant $=\hat{1}$

apoi înmulțesc cu $\hat{2}=-\hat{1}$

3). $\gcd(x^4-1, x^5-1)=x-1$

$\gcd(x^4-1, x^6-1)=(x-1)(x+1)$

↳ alg lui Euclid (temă)

<u>Prop</u> Dacă $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ atunci $gcd(f,g)$ este acelaşi dacă pornesc cu descompunerea în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$ sau $\mathbb{R}[X]$ sau $\mathbb{C}[X]$

<u>Dem.</u> Conform. Alg. lui Euclid, la toţi paşii intermediari găsim rest $\in \mathbb{Q}[X] \Rightarrow$ ~~grad~~ $gcd(f,g) \in \mathbb{Q}[X]$