# 3. Proprietăţile determinanţilor

**Proprietatea 1**. **Dacă *A* şi *B* sunt matrice pătrate de ordinul *n*,** $n\in\{2,3\}$, avem: $\boxed{\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B.}$

***Demonstraţie.*** Demonstrăm proprietatea pentru cazul *n = 2.*

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}; AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\det AB=(ae+bg)(cf+dh)-(ce+dg)(af+bh)=\cancel{aecf}+\underline{aedh}+\underline{bgcf}+\cancel{bgdh}-\cancel{ceaf}-\underline{cebh}-\underline{dgaf}-\cancel{dgbh}$$

$$\det A\cdot\det B=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}=(ad-bc)(eh-fg)=\underline{adeh}-\underline{bceh}-\underline{adfg}+\underline{bcfg}$$

**Reţine !** $\boxed{\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B.}$

**Determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinanţilor.**

Din formula de mai sus rezultă că pentru orice matrice $A_1, A_2, \ldots, A_p \in M_n(C)$, unde $n\in\{2, 3\}$, avem:

$$\boxed{\det(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_p)=\det A_1\bullet\det A_2\bullet\ldots\bullet\det A_p,}$$

Dacă $A_1= A_2 =\ldots= A_p=A$ atunci: $\boxed{\det(A^k) = (\det A)^k}$ unde $k\in N^*$

**Proprietatea 2**. **Dacă *A* este o matrice pătrată de ordinul *n*,** $n\in\{2,3\}$ **avem:** $\boxed{\det A = \det({}^tA)}$

**Reţine !** **Determinantul unei matrice pătrate este egal cu determinantul transpusei sale.**

Prof:Ciocotişan Radu

**Observatie:** Având în vedere faptul că detA = det ( $^tA$),

**toate proprietăţile ce se referă la liniile unui determinant se transcriu şi pentru coloane.**

**Proprietatea 3**

**Dacă elementele unei linii (sau coloane) ale unui determinant de ordinul 2 sau 3 sunt nule, atunci determinantul este nul.**

**Proprietatea 4. Schimbând două linii (sau coloane) între ele, determinantul îsi schimbă semnul.**

**Proprietatea 5. Un determinant care are două linii (coloane) egale, este egal cu zero.**

*Demonstraţie.* într-adevăr, dacă schimbăm între ele cele două linii (coloane) egale, determinantul nu se schimbă; dar pe de altă parte, din *proprietatea* 4., determinantul îşi schimbă semnul.
Notând cu *D,* valoarea determinantului rezultă *D* = *-D,* de unde *D* = 0

**Proprietatea 6.**

**Dacă toate elementele unei linii (coloane) ale unei matrice pătrate *A* de ordin 2 sau 3 se înmulţesc cu o constantă *k*, atunci se obţine o matrice al cărei determinant este : *k·detA* .**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

**Observaţie.**

Relaţia (1) arată că putem scoate în faţa determinantului un factor comun al unei linii (coloane).
Citită de la dreapta la stânga, relaţia exprimă faptul că pentru a înmulţi un determinant cu un număr, **înmulţim o singură linie (coloană) cu acel număr**

**Proprietatea 7. Dacă un determinant de ordinul 2 sau 3 are două linii (coloane) proporţionale, atunci determinantul este nul.**

## Proprietatea 8.

Dacă **elementele liniei *k*** a unei matrice $A = (a_{ij})$ sunt de forma $a_{kj}=b_{kj} + c_{kj}$, atunci **det*A*= det*B* + det*C***, unde cu *B* si *C* am notat matricele ce se obţin din *A* înlocuind linia *k* cu : $(b_{k1}, b_{k2},..., b_{kn})$ respectiv cu $(c_{k1}, c_{k2},..., c_{kn})$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

înainte de a enunţa ultimele două proprietăţi, vom preciza unele notaţii şi vom defini **noţiunea de combinaţie liniară a unor linii** (coloane) ale unei matrice.

- Pentru o matrice oarecare $A \in M_{m,n}(C)$, $A = (a_{ij})$, vom nota cu $L_i$, matricea linie alcătuită cu **elementele liniei *i***:

$$L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

şi cu $C_j$ , matricea coloană formată cu **elementele coloanei *j***:

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \dots \\ a_{jm} \end{pmatrix}$$

Astfel, putem vorbi de adunarea liniilor sau înmulţirea liniilor cu scalari,
înţelegând prin aceasta, adunarea matricelor linie, sau înmulţirea matricelor linie cu scalari.
Spunem că **linia i este o *combinaţie liniară* a celorlalte linii**, dacă există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n$

$$\text{cu } L_i = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_{i-1} L_{i-1} + \lambda_{i+1} L_{i+1} + \dots + \lambda_n L_n$$

Analog, pentru coloane.

De exemplu, pentru matricea $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ avem $\mathbf{L_3 = L_1 + 2L_2}$ , adică linia a treia este o combinaţie liniară a primelor două linii.

**Proprietatea 9.**

**Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătrate de ordinul 2 sau 3 este o combinaţie linară a altor linii (sau coloane), atunci determinantul este nul.**

*Demonstraţie.* Vom justifica proprietatea pentru cazul matricei pătrate de ordinul 3. Fie $L_1 = pL_2 + qL_3$ .

Determinantul este:
$$\begin{vmatrix} pa_{21}+qa_{31} & pa_{22}+qa_{32} & pa_{23}+qa_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_{21} & pa_{22} & pa_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qa_{31} & qa_{32} & qa_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ultimii doi determinanţi sunt nuli, pentru că au câte două linii proporţionale.

**Proprietatea 10.**

**Dacă adunăm la o linie (sau coloană) o combinaţie liniară a altor linii (coloane), atunci determinantul nu îşi schimbă valoarea**

*Demonstraţie.* Considerăm determinantul de ordinul 3 şi presupunem că se adună la prima linie o combinaţie liniară a liniilor a doua şi a treia, adică se înlocuieşte $L_1$ prin $L_1+pL2+qL3$ .

Determinantul obţinut:
$$\begin{vmatrix} a_{11}+pa_{21}+qa_{31} & a_{12}+pa_{22}+qa_{32} & a_{13}+pa_{23}+qa_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

se scrie ca suma dintre $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ şi $\begin{vmatrix} pa_{21}+qa_{31} & pa_{22}+qa_{32} & pa_{23}+qa_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ultimul determinant este nul, pentru că prima linie este o combinaţie liniară a celorlalte două

în particular, din ultima proprietate, rezultă:

- **Dacă adunăm la o linie (sau coloană) suma celorlalte linii (sau coloane), atunci determinantul nu îsi schimbă valoarea.**
- **Dacă adunăm la o linie (sau coloană) o altă linie (sau coloană) înmulţită cu un** scalar, **atunci determinantul nu** îsi **schimbă** valoarea.

## ♦ Probleme rezolvate.

**1.** Demonstraţi că: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ determinant *Vandermonde* de ordinul 3

*Soluţie.*
Notăm determinantul cu *V.* Pentru a-l calcula, scădem din coloana a doua şi a treia, prima coloană, (adică înlocuim coloana $C_2$ prin $C_2$-$C_1$ şi coloana $C_3$ prin $C_3$-$C_1$). Obţinem

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$ şi dezvoltăm după linia 1 ……etc

**2.** Aflaţi numerele reale *x* cu proprietatea $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

*Soluţie.* Ecuaţia este de gradul 3, deci pentru a o rezolva este necesar să descompunem membrul stâng în factori. Aplicarea proprietăţilor determinanţilor este utilă în acest sens. înlocuim $C_1$ prin $C_1+C_2+C_3$. Rezultă

$$D = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \ldots = (x+2)(x-1)^2 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 1$$

**3.** Calculaţi determinanţii:

$$D_1=\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & 2b & b+c \\ a+c & b+c & 2c \end{vmatrix};\quad D_2=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+b & 2b & b+c \\ a+c & b+c & 2c \end{vmatrix};\quad D_3=\begin{vmatrix} 2a & a+b & a+c \\ a+b & 2b & b+c \\ a+c & b+c & 2c \end{vmatrix};$$

*Soluţie.*

$$D_1=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & 2b & b+c \\ a+c & b+c & 2c \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}=0$$

(**am înlocuit $L_2$ prin $L_2-bL_1$ şi $L_3$ prin $L_3-cL_1$**).

$$D_2=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+b & 2b & b+c \\ a+c & b+c & 2c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & b & b \\ c & c & c \end{vmatrix}=0$$

(am scăzut prima linie din celelalte două), deci $D_2 = 0$.

Observând că $D_3=D_1+D_2=0+0=0$

## EXERCIŢII DE INIŢIERE

**1.)** Folosind proprietăţile, demonstraţi că următorii determinanţi sunt nuli: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \\ -7 & -7 & -7 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 9 & 9 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{vmatrix}$

**2.)** Folosind proprietăţile determinaţilor, calculaţi: $\begin{vmatrix} 2007 & 1 & 1 \\ 1 & 2007 & 1 \\ 1 & 1 & 2007 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \mathrm{a}^2 & \mathrm{ab} & \mathrm{ac} \\ \mathrm{ab} & \mathrm{b}^2 & \mathrm{bc} \\ \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{z} \end{vmatrix}$

**3.)** Fie determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$

Exprimaţi în funcţie de Δ, determinaţii: $D_1 = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}; D_3 = \begin{vmatrix} m & n & p \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}; D_4 = \begin{vmatrix} m & n & p \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$

**4.)** fie determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$

Exprimaţi în funcţie de Δ, determinaţii: $D_1 = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ m & n & p \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3m & 3n & 3p \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}; D_3 = \begin{vmatrix} m & 2n & p \\ 3a & 6b & 3c \\ x & 2y & z \end{vmatrix};$

**5.)** Se consideră determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & x & y \\ 1 & 5 & 20 \end{vmatrix}$ Aflaţi valorile lui *x şi y* ştiind că linia a doua este proporţională cu prima. Calculaţi determinantul obţinut.

**6.)** Se consideră determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix}$ Aflaţi valorile lui a, *b, c* ştiind că linia a treia este egală cu suma celorlalte două linii. Calculaţi determinantul obţinut.

**7.)** Se consideră determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ Aflaţi valorile lui *x, y, z* ştiind că $\mathbf{L_2 = L_1 - L_3}$. Calculaţi determinantul obţinut.

**8.)** Folosind formula $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

calculaţi determinanţii: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$;

## ***PROBLEME ♦ PROBLEME ♦ PROBLEME***

**1. Dacă** $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{pmatrix}, \det(A^{2007})=?$

**2. Dacă A e $M_3(C)$ şi detA = 1 cât este det (2A) ?**

**3. Folosind proprietăţile determinanţilor, calculaţi:**

$$a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & c+a & a+b\end{vmatrix};\quad b)\begin{vmatrix}x+1 & y+1 & z+1\\ x^2+1 & y^2+1 & x^2+y^2\\ x^3+1 & y^3+1 & x^3+y^3\end{vmatrix};c)\begin{vmatrix}(a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2\\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix};d)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a+x & b+x & c+x\\ (a+y)^2 & (b+y)^2 & (c+y)^2\end{vmatrix};$$

$$e)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \cos a & \cos b & \cos c\\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c\end{vmatrix};\ f)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \cos^2 x & \cos^2 y & \cos^2 z\\ x & y & z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \sin^2 x & \sin^2 y & \sin^2 z\\ x & y & z\end{vmatrix};$$

$$g)\begin{vmatrix}1 & a^2-1 & 1\\ 1 & 1 & a^2-1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix};\quad h)\begin{vmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{vmatrix};\quad i)\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix};$$

$$j)\begin{vmatrix}a^2-1 & ab-1 & ac-1\\ ab+1 & b^2+1 & bc+1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix};\quad k)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}\end{vmatrix};\quad l)\begin{vmatrix}1+a^2 & ab & ac\\ ab & 1+a^2 & bc\\ ac & bc & 1+c^2\end{vmatrix}$$

**4. Demonstraţi că:** $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$$

Prof:Ciocotişan Radu

**5.** Fie matricele $X = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Calculaţi determinanţii matricelor XY şiYX.

**6.** Demonstraţi că $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+c_1 & b_1+c_1 \\ a_2+b_2 & a_2+c_2 & b_2+c_2 \\ a_3+b_3 & a_3+c_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

**7.)** Calculaţi determinantul $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}$ dacă $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_5}$ formează

a) progresie aritmetică;

b) progresie geometrică

**8.)** Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$ Folosind proprietăţile determinanţilor, demonstraţi că:
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$
(Variantă, *Bacalaureat* 2001)

**9.)** Aflaţi numerele reale *a, b, c* ştiind că : **a + b + c = 3** şi $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0$

**10.)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile: $a)\begin{vmatrix} x & x+1 & 1 \\ 1 & x & x+1 \\ x+1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0,$ $\quad$ $\text{b)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ x^2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

**11. )** Rezolvaţi în R ecuaţia $\begin{vmatrix} x-a & x-b & c-a \\ x-b & x-c & a-b \\ x-c & x-a & b-c \end{vmatrix} = 0$ ştiind că *a, b, c* nu sunt toate egale.

**12.)** Ştiind că $a,b,c \in R, a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2};\ a+b+c=\frac{1}{6}$

calculaţi valoarea determinantului: $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & -a+b+c & b+c \\ a-b-c & a+b & a+c \\ a+c & b+c & -a-b+c \end{vmatrix}$

**13.) Se consideră matricea** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**a) Calculaţi determinantul matricei A .**

**b) Verificaţi *că : $A^2=3A$.***

**c) Arătaţi că : $A^n=3^{n-1}A$, n$\in$N*.**

**d) Arătaţi că :** $A+A^2+\ldots+A^{2001}=\frac{3^{2001}-1}{2}A$

**e) Demonstraţi că dacă avem trei progresii aritmetice de câte trei termeni: a, *b, c,* respectiv x, *y, z* şi *u,* v, *w,***

**atunci determinantul matricei** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$ **este nul.** **(Variantă, *Bacalaureat* 2001)**

**14.) Fie *A,* o matrice.pătrată de ordinul 2 cu proprietatea că există n $\in$ N* astfel încât $A^n=O_2$. Demonstraţi că $A^2=O_2$.**

**15. ) Fie M, mulţimea tuturor matricelor pătrate de ordinul 3 cu elemente din mulţimea {-1, 1}.**

**a) Câte elemente are mulţimea M?**

**b) Demonstraţi că determinantul oricărei matrice din mulţimea *M* este divizibil cu 4.**