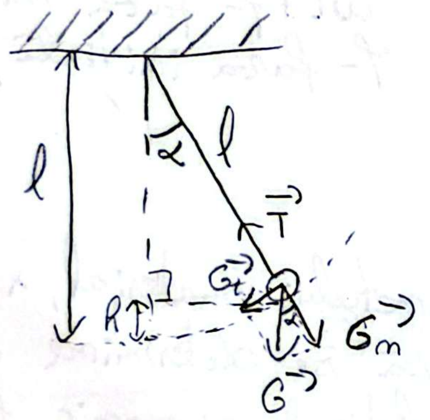
Listă subiecte pentru examen

1. Enunțați legea a doua a lui Newton (principiul fundamental al mecanicii)

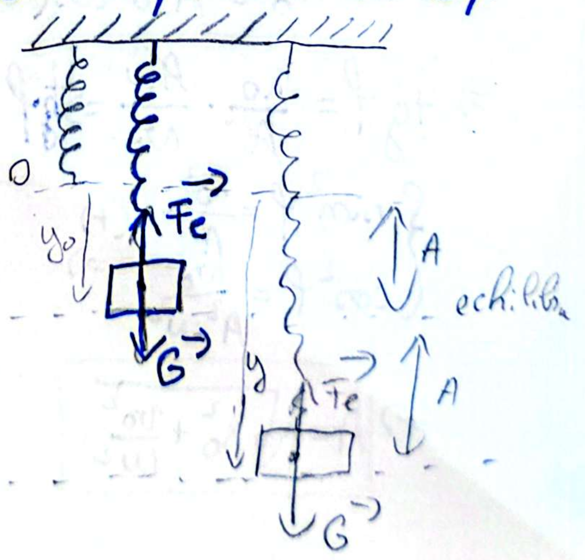
Forța este produsul dintre masă și accelerație.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

2. Reprezentați grafic forțele care acționează asupra unui pendul de masă m și lungime l, la o înclinare față de axa verticală sub un unghi α.



3. Reprezentați grafic forțele care acționează asupra unui resort în poziție verticală de care este suspendat un corp de masă m, la echilibru.



4. Scrieți ecuația de mișcare a oscilatorului armonic liniar și explicați semnificația mărimilor care intervin.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad , \; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ - pulsație}$$

5. Scrieți soluția ecuației de mișcare a oscilatorului armonic liniar și explicați semnificația mărimilor care intervin.

$x = A \sin(\omega t + \varphi)$ A - amplitudinea mișcării (elongația maximă)

x - reprezintă poziția față de origine (elongația) $\omega t + \varphi$ - faza mișcării

φ - faza inițială; ω - pulsație

1. (II)

Știind poziția și viteza punctului material, $x = x_0$ și $v = v_0$ la momentul inițial, $t=0$, să se determine amplitudinea și faza oscilațiilor pentru oscilatorul armonic liniar.

$t=0$: $x_0 = A\sin(\omega \cdot 0 + \varphi) \Rightarrow x_0 = A\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{x_0}{A}$

$v_0 = A\omega\cos(\omega \cdot 0 + \varphi) \Rightarrow v_0 = A\omega\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{v_0}{A\omega}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow tg\,\varphi = \frac{x_0}{A} \cdot \frac{A\omega}{v_0} \Rightarrow \boxed{tg\,\varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0}} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$\begin{cases} \sin^2\varphi = \frac{x_0^2}{A^2} \\ \cos^2\varphi = \frac{v_0^2}{A^2\omega^2} \end{cases} (+) \Rightarrow 1 = \frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2\omega^2} \Big| \cdot A^2 \Rightarrow A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \Rightarrow$$

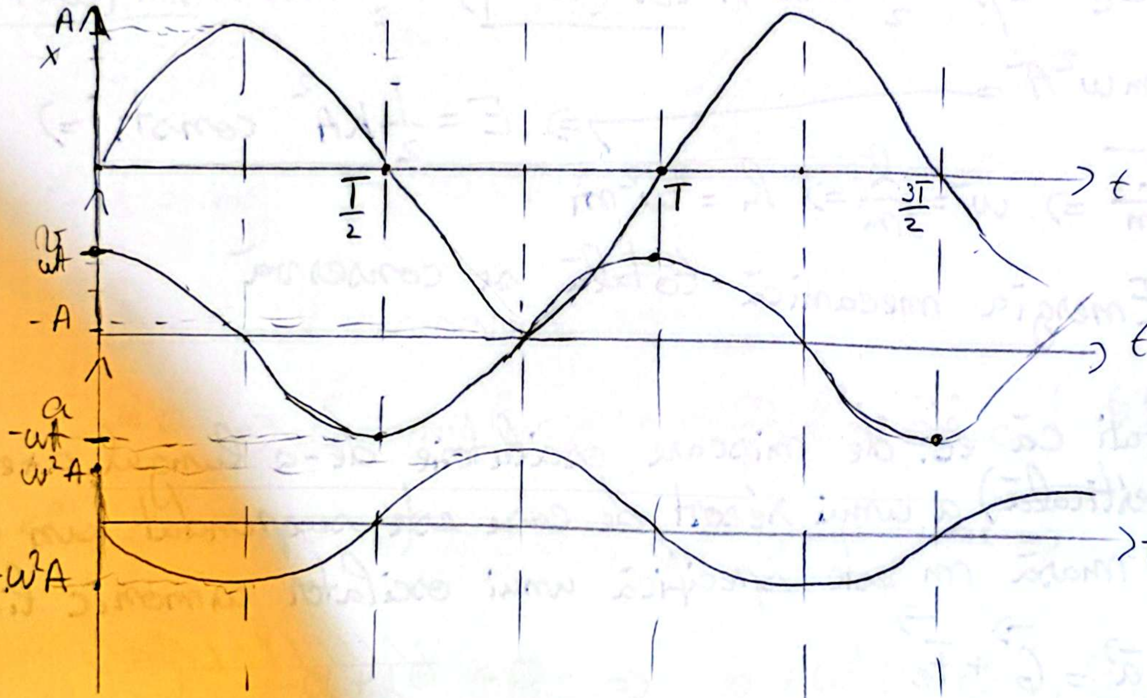
$$\Rightarrow \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}$$

2. Pornind de la soluția ecuației de mișcare a oscilatorului armonic liniar calculați viteza și accelerația. Reprezentați grafic $x(t)$, $v(t)$ și $a(t)$. Includeți semnificația mărimilor care intervin în relații și discuția rezultatelor.

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = A\omega\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2\sin(\omega t + \varphi + \pi) = -\omega^2 x$$



A – amplitudinea (elongația maximă)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ - pulsația, φ - faza inițială; $\omega t + \varphi$ - faza mișcării

3. Arătați că energia mecanică totală se conservă pentru un oscilator armonic liniar.

$$E = E_c + E_p$$

$$\left.\begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ E_p = -\int_0^x F(x)\,dx = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

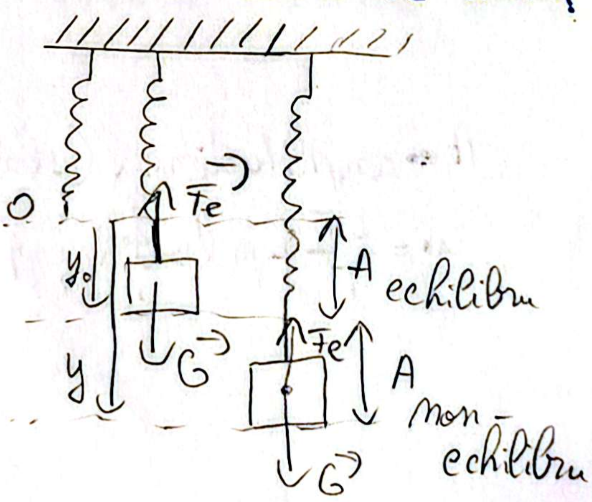
$$\Rightarrow E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \underline{\cos^2(\omega t + \varphi)} + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \underline{\sin^2(\omega t + \varphi)} =$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} K A^2 \text{ const.} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 m$$

$\Rightarrow$ Energia mecanică totală se conservă

4. Arătați că ec. de mișcare oscilatorie de-a lungul axei OY (pe verticală) a unui resort de care este suspendat un corp de masă m este specifică unui oscilator armonic liniar



$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F_e}$$

$$m\ddot{y} = mg - Ky$$

$$m\ddot{y} - mg + ky = 0 \mid : m$$

$$\ddot{y} - g + \frac{k}{m} y = 0$$

(schimbare de variabilă)

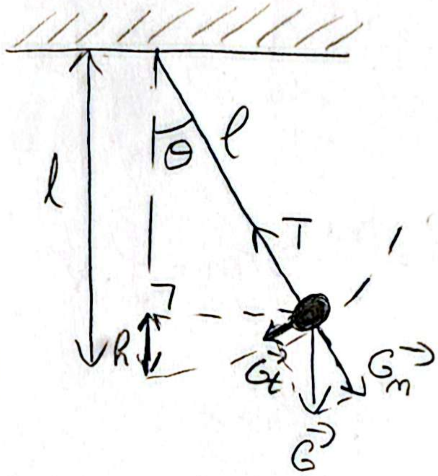
$$y = u + \frac{m}{k} g \Rightarrow \dot{y} = \dot{u} \; ; \; \ddot{y} = \ddot{u}$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{k}{m}\left(u + \frac{m}{k} g\right) - g = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} u + \cancel{g} - \cancel{g} = 0 \Rightarrow \ddot{u} + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 u = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \omega^2 u = 0 \text{ - ecuație specifică OAL}$$

5. Arătați că ecuația de mișcare a unui pendul matematic de lungime l este specifică unui oscilator armonic liniar.



$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{G}$$

$T = G_n \Rightarrow T = mg\cos\theta$

$$E = E_c + E_p = mg\underline{\underline{h}} + \frac{mv^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &① \ \underline{\underline{h}} = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta) \\ &② \ v = \underset{\uparrow \text{raza}}{l}\cdot\dot{\theta} \text{ (viteza unghiulară)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = mgl(1-\cos\theta) + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} = \text{constant}$$

Principiul conservării energiei:

$$\dot{E} = 0 \Rightarrow \dot{E} = mgl\dot{\theta}\sin\theta + \frac{m}{\cancel{2}}l^2\cancel{2}\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 \ \Big| : \dot{\theta}$$

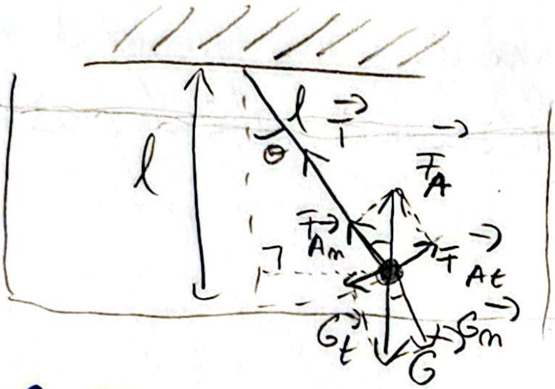
$$\theta < 5^\circ \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta \Rightarrow mgl\theta + ml^2\ddot{\theta} = 0 \ \Big| : ml^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2}\theta + \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \Rightarrow \text{Ec. este specifică unui oscilator armonic liniar}$$

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

6. Un pendul simplu gravitațional de lungime l a cărui bilă are densitatea ρ este cufundat într-un lichid de densitate ρ_0. Care este perioada micilor oscilații?

Scanat cu CamScanner



$$F_{revenire} = G_t - F_{At} =$$

$$= mg\sin\theta - m_0 g \sin\theta =$$

$$= (\rho \cdot V - \rho_0 \cdot V)\, g \sin\theta =$$

$$= (\rho - \rho_0) V g \sin\theta =$$

$$= \underbrace{(\rho - \rho_0) V g \frac{x}{\ell}}_{k}.$$

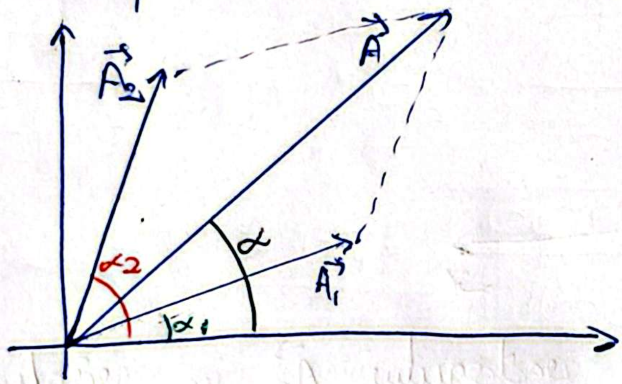
$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V$$

$$F_e = \underline{k} \cdot x$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho \cancel{V}}{\frac{(\rho-\rho_0)\cancel{V}g}{\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sqrt{\frac{\rho}{\rho-\rho_0}}$$

7. Arătați că amplitudinea rezultantă în compunerea a două oscilații armonice paralele de aceeași frecvență este $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$

• Se începe cu diagrama fazorială



$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$

$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$

• Ne folosim de produsul scalar

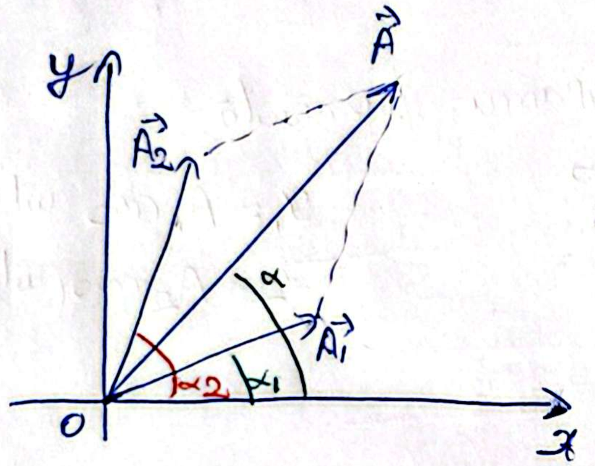
$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A \cdot A \cdot \cos 0 = A^2 \Rightarrow A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$$

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{A_1} + \vec{A_2})(\vec{A_1} + \vec{A_2}) =$$
$$= \vec{A_1} \cdot \vec{A_1} + \vec{A_1} \cdot \vec{A_2} + \vec{A_2} \cdot \vec{A_1} + \vec{A_2} \cdot \vec{A_2}$$
$$= A_1^2 + 2\vec{A_1}\vec{A_2} + A_2^2$$
$$= A_1^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\widehat{A_1, A_2}) + A_2^2$$
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

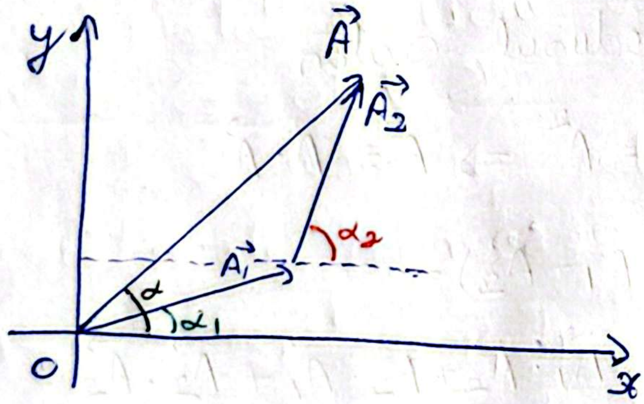
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

8) Găsiți faza mișcării oscilatorii rezultante în compunerea a două oscilații armonice paralele de ~~frecvențe diferite~~ aceeași frecvență.

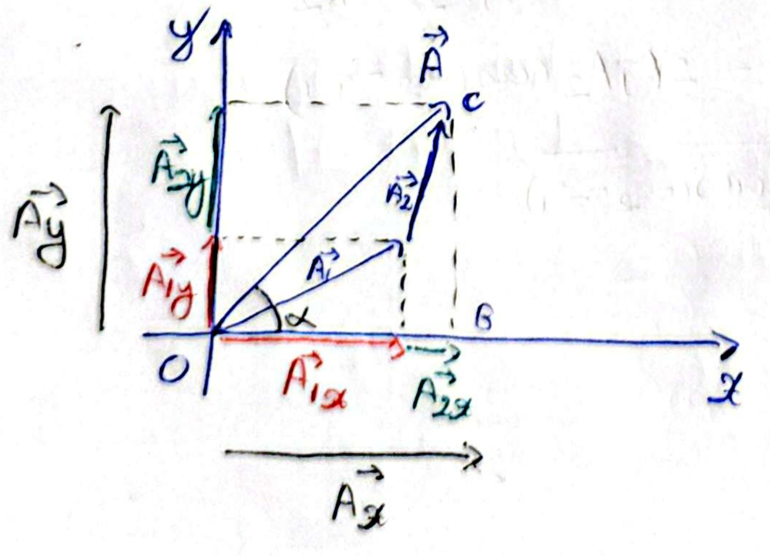
$\underline{M_1}$:
(fazorial)



• Ducem originea vectorului $\vec{A_2}$ în vârful vectorului $\vec{A_1}$



• Descompunem vectorii $\vec{A_1}$, $\vec{A_2}$ pe Ox și pe Oy



• Știm că $\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A_1} = \vec{A_{1x}} + \vec{A_{1y}} \\ \vec{A_2} = \vec{A_{2x}} + \vec{A_{2y}}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{A} = \underbrace{\vec{A_{1x}} + \vec{A_{2x}}}_{\vec{A_x}} + \underbrace{\vec{A_{1y}} + \vec{A_{2y}}}_{\vec{A_y}}$$

• În ΔOBC: $tg\,\alpha = \dfrac{A_y}{A_x} = \dfrac{A_{1y} + A_{2y}}{A_{1x} + A_{2x}}$ (în modul)

$$tg\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2} \Rightarrow \alpha = arctg\left(\frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}\right)$$

<u>M2</u>:
(trigonometric)

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

• Folosim formula $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$x = A_1 \cos\omega t \cos\alpha_1 - A_1 \sin\omega t \sin\alpha_1 + A_2 \cos\omega t \cos\alpha_2 - A_2 \sin\omega t \sin\alpha_2$$

~~x = (A1 cos α1 + A2 cos α2) cos ωt (~~

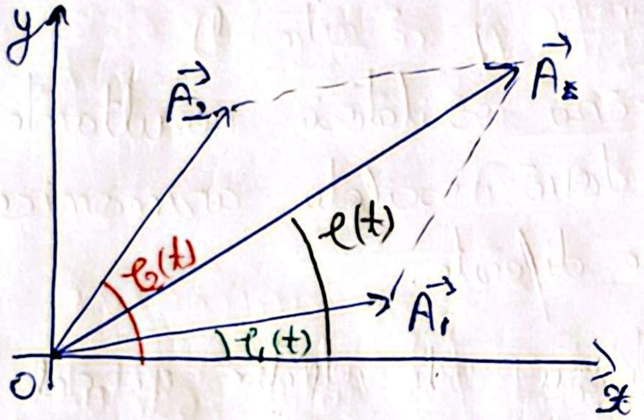
$$x = \underbrace{(A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2)}_{A\cos\alpha} \cos\omega t - \underbrace{(A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2)}_{A\sin\alpha} \sin\omega t$$

~~Acos α~~ $\dfrac{A\sin\alpha}{A\cos\alpha} = tg\alpha \Rightarrow tg\alpha = \dfrac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}$

$$\Rightarrow \alpha = arctg\, \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}$$

9) Arătați că amplitudinea rezultantă în compunerea a două oscilații armonice paralele de frecvențe diferite este: $A(t)=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\alpha_1-\alpha_2]}$.
Explicați fenomenul de bătăi.

• Diagrama fazorială



$x_1=A_1\cos(\omega_1t+\alpha_1)=A_1\cos\varphi_1$

$x_2=A_2\cos(\omega_2t+\alpha_2)=A_2\cos\varphi_2$

• Ne folosim de produsul scalar

$\vec{A}\cdot\vec{A}=A\cdot A\cdot\cos 0=A^2\Rightarrow A^2=\vec{A}\cdot\vec{A}$

$$A^2=\vec{A}\cdot\vec{A}=(\vec{A_1}+\vec{A_2})(\vec{A_1}+\vec{A_2})=$$
$$=\vec{A_1}\cdot\vec{A_1}+\vec{A_1}\vec{A_2}+\vec{A_1}\vec{A_2}+\vec{A_2}\cdot\vec{A_2}$$
$$=A_1^2+2\vec{A_1}\cdot\vec{A_2}+A_2^2$$
$$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cdot\cos(\widehat{A_1,A_2})$$
$$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1(t)-\varphi_2(t))$$
$$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\omega_1t+\alpha_1-\omega_2t-\alpha_2)$$
$$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\alpha_1-\alpha_2]$$

$$A(t)\cancel{A}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\alpha_1-\alpha_2]}$$

• Fenomenul de bătăi

Se observă că amplitudinea variază periodic în timp, fenomen ce poartă numele de bătăi. (din PDF curs 2 pag. 20)

$$T_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_b} \quad , \quad \omega_b = \left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right| \text{ sau } \omega_b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

+ grafic (pp. că opțional)

10) Găsiți faza mișcării oscilatorii rezultante în compunerea a două oscilații armonice paralele de frecvențe diferite.

Modul de lucru este identic cu cel de la exercițiul 8).

!! De avut în vedere că aici se vor produce următoarele schimbări:

$$\alpha_1 \xrightarrow{\text{devin}} \varphi_1(t)$$

$$\alpha_2 \longrightarrow \varphi_2(t) \quad \text{în desen, dar și în rezolvare}$$

$$\alpha \longrightarrow \varphi(t)$$

unde $\begin{cases} \varphi_1(t) = \omega_1 t + \alpha_1 \\ \varphi_2(t) = \omega_2 t + \alpha_2 \end{cases}$

11) Se consideră superpoziția sau interferența a două mișcări oscilatorii armonice simple cu aceeași frecvență și care produc unui punct material deplasări pe direcții perpendiculare cu amplitudini egale, $A = B$. Arătați că pentru o diferență de fază între cele două oscilații de $\delta = \frac{\pi}{2}$, traiectoria mișcării rezultante este cerc.

• Recomand să vă uitați peste demonstrația din cursul 2, pag. 24, ~~în cazul în care~~ deoarece nu este exclus să fie cerută aici.

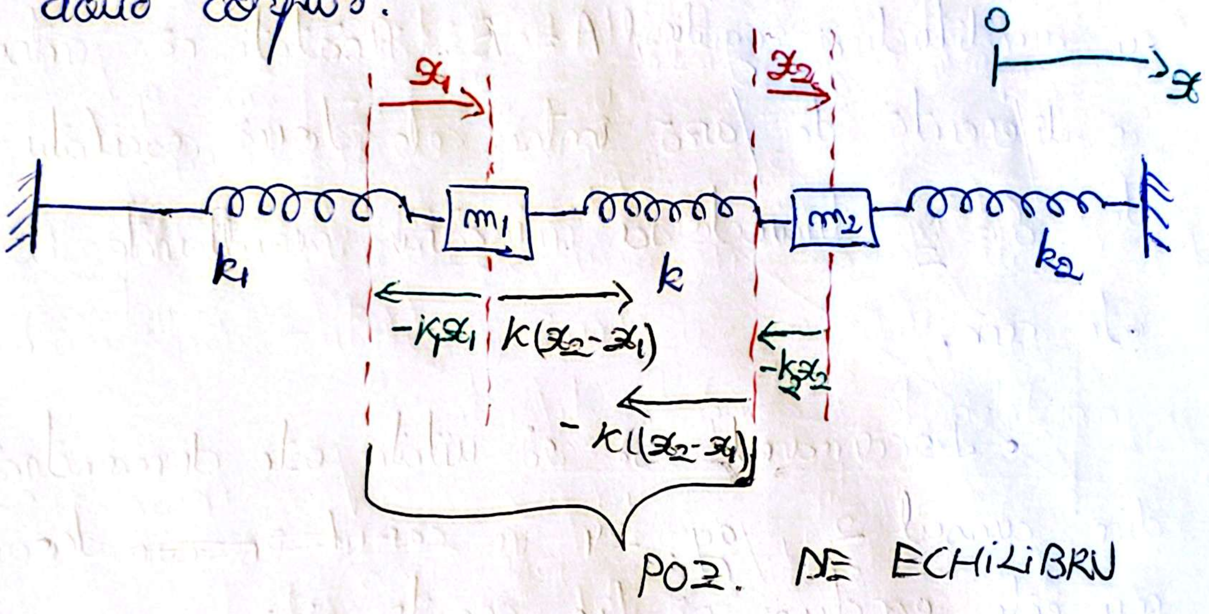
• Plecând de la ecuația elipsei vom rezolva problema.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} - \dfrac{2xy}{AB}\cos(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha) \\[2ex] \text{Știm că } \begin{cases} A = B \\ \delta = \beta - \alpha = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} - \frac{2xy}{A^2}\cos\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2xy \cdot 0}{A^2} = 1 \,/\cdot A^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = A^2$$

2) Se consideră un sistem alcătuit din masele $m_1 = m_2 = m$ atașate de resorturile $k_1 = k_2$ cuplate între ele prin resortul k. Găsiți ecuațiile de mișcare și vitezele pentru cele două corpuri.



• Scriem principiul al doilea pentru fiecare corp:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Știm că $\left| \begin{array}{l} m_1 = m_2 = m \\ k_1 = k_2 \end{array} \right|$ deci avem:

~~$m\ddot{x}_1 = -k_1x_1$~~

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k_1x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k(x_2 - x_1) = 0 & (1) \\ m\ddot{x}_2 + k_1x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 & (2) \end{cases}$$

• Avem două posibilități de a mișca cele două corpuri din poziția de echilibru:

① le mișcăm pe ambele în același sens ($\overrightarrow{x_1}$ $\overrightarrow{x_2}$)

② le mișcăm în sensuri opuse ($\overleftarrow{x_1}$ $\overrightarrow{x_2}$)

• De aceea, va trebui ca pentru rezolvarea cazului ① să adunăm ecuațiile 1) și 2), iar pentru rezolvarea cazului ② va trebui să scădem ecuațiile 1) și 2).

① 1) + 2): $m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + k_1x_1 + k_2x_2 = 0$

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k_1(x_1 + x_2) = 0 \quad /:m$$

$$\underbrace{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}_{\ddot{q}_1} + \frac{k_1}{m}\underbrace{(x_1 + x_2)}_{q_1} = 0$$

$$\ddot{q}_1 + \frac{k_1}{m} q_1 = 0 \qquad 3)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

② 1) − 2): $m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 + k_1x_1 - k_1x_2 - 2k(x_2 - x_1) = 0$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) + 2k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (k_1 + 2k)(x_1 - x_2) = 0 \quad /:m$$

$$\underbrace{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2}_{\ddot{q}_2} + \frac{k_1 + 2k}{m}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{q_2} = 0$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{k_1 + 2k}{m} q_2 = 0 \qquad 4)$$

$$\omega_2 = \sqrt{k_1 + 2k}$$

• Am obținut ecuațiile :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0 \end{cases}$$

• Soluțiile sunt: $\begin{cases} q_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases}$

• Ne întoarcem în notațiile : $\begin{cases} q_1 = x_1 + x_2 \\ q_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$

pentru a găsi x_1 și x_2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = q_1 \\ x_1 - x_2 = q_2 \end{cases} \overset{+}{\Longrightarrow} 2x_1 = q_1 + q_2 \Rightarrow x_1 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = q_1 \\ x_1 - x_2 = q_2 \end{cases} \overset{-}{\Longrightarrow} \cancel{2x_2 = \frac{q_1}{q_2}}\ 2x_2 = q_1 - q_2 \Rightarrow x_2 = \frac{q_1 - q_2}{2}$$

$$x_1 = \frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$v_1 = \dot{x}_1 = -\frac{A_1}{2}\omega_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \frac{A_2}{2}\omega_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$x_2 = \frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) - \frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$v_2 = \dot{x}_2 = -\frac{A_1}{2}\omega_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{A_2}{2}\omega_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

13) Se consideră un sistem alcătuit din masele $m_1 = m_2 = m$ atașate de resorturile $k_1 = k_2$ cuplate între ele prin resortul k. Se cunosc ecuațiile de mișcare:

$$x_1(t) = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{1}{2}\left[A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)\right]$$

$$x_2(t) = \frac{q_1 - q_2}{2} = \frac{1}{2}\left[A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)\right]$$

Să se particularizeze ecuațiile de mișcare pentru modul normal simetric ce are loc atunci când ambele mase sunt deplasate egal în aceeași direcție și eliberate din repaus. Discutați rezultatul obținut.

- Ambele corpuri sunt deplasate egal în aceeași direcție $\Rightarrow$ fiecare corp a fost deplasat cu A din poz. de echilibru în același sens
- Eliberate din repaus $\Rightarrow \dot{x}_1(0) = 0$
  $\dot{x}_2(0) = 0$
- Condițiile inițiale vor fi:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1(0) = A \\ x_2(0) = A \end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} q_1(0) = x_1(0) + x_2(0) = 2A$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} \dot{q}_1(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = 0$$

$$\left.\begin{cases} x_1(0) = A \\ x_2(0) = A \end{cases}\right\} \overset{\ominus}{\Rightarrow} q_2(0) = x_1(0) - x_2(0) = A - A = 0$$

$$\left.\begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}\right\} \overset{\ominus}{\Rightarrow} \dot{q}_2(0) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = 0$$

$$\begin{cases} q_1(0) = A_1 \cos(\omega_1 \cdot 0 + \alpha_1) = A_1 \cos\alpha_1 \\ q_2(0) = A_2 \cos(\omega_2 \cdot 0 + \alpha_2) = A_2 \cos\alpha_2 \end{cases}$$

• Încercăm să scoatem A_1, A_2, α_1

$$\begin{cases} q_1(0) = A_1 \cos\alpha_1 \\ \dot{q}_1(0) = -A_1 \omega_1 \sin\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 \cos\alpha_1 = 2A \\ -A_1 \omega_1 \sin\alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

• Dacă $\cos\alpha_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ (nu are sens)

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 \cos\alpha_1 = 2A \\ \sin\alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 \cos\alpha_1 = 2A \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 2A \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_2(0) = A_2 \cos\alpha_2 \\ \dot{q}_2(0) = -A_2 \omega_2 \sin\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 \cos\alpha_2 = 0 \\ -A_2 \omega_2 \sin\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_2 = 0$$

• Dacă $\cos\alpha_2 = 0 \Rightarrow \sin\alpha_2 \neq 0$

$\sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \cos\alpha_2 \neq 0$

• Indiferent de alegere, $A_2 = 0$ mereu

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{q_1(t) + q_2(t)}{2} \\ x_2(t) = \dfrac{q_1(t) - q_2(t)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = A\cos\omega_1 t \\ x_2(t) = A\cos\omega_1 t \end{cases}$$

Discuție:

- se poate observa că ambele mase au aceeași mișcare, iar mișcările lor corespund mișcării armonice simple de frecvență ω_1. (pag 7 curs 4 PDF)

14) Se consideră un sistem alcătuit din masele $m_1 = m_2 = m$ atașate de resorturile $k_1 = k_2$ cuplate între ele prin resortul k. Se cunosc ecuațiile de mișcare:

$$x_1(t) = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{1}{2}\left[A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)\right]$$

$$x_2(t) = \frac{q_1 - q_2}{2} = \frac{1}{2}\left[A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)\right]$$

Să se particularizeze ecuațiile de mișcare pentru modul normal antisimetric care are loc atunci când ambele mase sunt deplasate pe o distanță egală față de pozițiile lor de echilibru, dar în direcții opuse.

- Alegem $\underset{O}{\vdash}\!\longrightarrow x$ ca referință. Un corp se va deplasa spre dreapta cu A (în sens pozitiv), iar celălalt cu $-A$ la stânga (în sens negativ).
- Presupunem că cele două mase pleacă din repaus.

• Condiții inițiale (modul de lucru este similar cu cel de la ex 13)

$$\begin{cases} x_1(0) = A & (1) \\ x_2(0) = -A & (2) \\ v_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 & (3) \\ v_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0 & (4) \end{cases}$$

$(1)+(2):\ x_1(0) + x_2(0) = q_1(0) = A - A = 0$

$(3)+(4):\ \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = \dot{q}_1(0) = 0$

$(1)-(2):\ x_1(0) - x_2(0) = q_2(0) = A + A = 2A$

$(3)-(4):\ \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = \dot{q}_2(0) = 0$

$$\begin{cases} q_1(t) = A_1 \cos(w_1 t + \alpha_1) \\ \dot{q}_1(t) = -A_1 w_1 \sin(w_1 t + \alpha_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1(0) = A_1 \cos\alpha_1 \\ \dot{q}_2(0) = -A_1 w_1 \sin\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 \cos\alpha_1 = 0 \\ -A_1 w_1 \sin\alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\begin{cases} q_2(t) = A_2 \cos(w_2 t + \alpha_2) \\ \dot{q}_2(t) = -A_2 w_2 \sin(w_2 t + \alpha_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2(0) = A_2 \cos\alpha_2 \\ \dot{q}_2(0) = -A_2 w_2 \sin\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 \cos\alpha_2 = 2A \\ -A_2 w_2 \sin\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 \cos\alpha_2 = 2A \\ \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 \cos 0 = 2A \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 2A \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

q_1, q_2 vor deveni:

$$\begin{cases} q_1(t) = 0 \\ q_2(t) = 2A\cos(\omega_2 t)^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_2 t) = \dfrac{q_1(t) + q_2(t)}{2} \\ x_2(t) = -A\cos(\omega_2 t) = \dfrac{q_1(t) - q_2(t)}{2} \end{cases}$$

15) Se consideră un sistem alcătuit din masele $m_1 = m_2 = m$ atașate de resorturile $k_1 = k_2$ cuplate între ele prin resortul k. Se cunosc ecuațiile de mișcare:

$$x_1(t) = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{1}{2}\left[A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2)\right]$$

$$x_2(t) = \frac{q_1 - q_2}{2} = \frac{1}{2}\left[A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2)\right]$$

Să se particularizeze ecuațiile de mișcare pentru cazul general în care nu există nicio simetrie. Se consideră următoarele condiții inițiale:

$$x_1(0) = A \quad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 0 \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

$$\begin{cases} x_1(0) = A & (1) \\ x_2(0) = 0 & (2) \\ v_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 & (3) \\ v_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(1)+(2): \quad x_1(0) + x_2(0) = q_1(0) = A$$
$$(3)+(4): \quad \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = \dot{q}_1(0) = 0$$

$$(1)-(2): \quad x_1(0) - x_2(0) = q_2(0) = A$$
$$(3)-(4): \quad \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = \dot{q}_2(0) = 0$$

$$\begin{cases} q_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ \dot{q}_1(t) = -A_1\omega_1 \cancel{\cos}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1(0) = A_1\cos\alpha_1 \\ \dot{q}_1(0) = -A_1\omega_1\sin\alpha_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1\cos\alpha_1 = A \\ -A_1\omega_1\sin\alpha_1 = 0 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} A_1\cos\alpha_1 = A \Rightarrow \boxed{A_1 = A} \\ \sin\alpha_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\ \dot{q}_2(t) = -A_2\omega_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \Rightarrow \cancel{q_2(0) = A_2\cos\omega_2 t + \alpha_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_2(0) = A_2\cos\alpha_2 \\ \dot{q}_2(0) = -A_2\omega_2\sin\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2\cos\alpha_2 = A \\ -A_2\omega_2\sin\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = A \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{q_1(t) + q_2(t)}{2} = \dfrac{A}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \\ \qquad \left(= \dfrac{A}{2}\cdot 2\cos\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right) \\ x_2(t) = \dfrac{q_1(t) - q_2(t)}{2} = \dfrac{A}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \\ \qquad \left(= \dfrac{A}{2}\cdot 2\sin\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)\right) \end{cases}$$

16. Scrieți ecuația de mișcare pentru un oscilator armonic amortizat. Denumiți mărimile folosite.

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\gamma = \frac{b}{2m}$ - factor de amortizare

b = coef. de rezistență

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsația în absența frecării

17. Găsiți soluția ecuației de mișcare pentru un oscilator armonic amortizat pentru cazul în care $\omega_0 > \gamma$. Discutați rezultatul obținut.

Căutăm sol: $\left.\begin{cases} x(t) = A e^{\lambda t} \\ \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \cdot A \\ \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \cdot A \\ \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{\neq 0}{A e^{\lambda t}} \left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega_0^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$$

$$(\gamma < \omega_0) \quad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - \omega_0^2}_{<0}} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{(-\gamma + i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega_1})t} + A_2 e^{(-\gamma - i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega_1})t}$$

$(\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ - pseudopulsatie$)$

$$x(t) = A_1 e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + A_2 e^{(-\gamma - i\omega_1)t}$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$

Alegem o formă convenabilă:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} A_0 e^{i\varphi} \\ A_2 = \frac{1}{2} A_0 e^{-i\varphi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} A_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega_1 t + \varphi)} + \frac{1}{2} A_0 e^{-\gamma t} e^{-i(\omega_1 t + \varphi)} =$$

$$= \frac{A_0}{2} e^{-\gamma t} \underbrace{\left[e^{i(\omega_1 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_1 t + \varphi)} \right]}_{e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x} =$$

$$= \underbrace{A_0 e^{-\gamma t}}_{A(t)} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

(Soluția indică faptul că, pt un oscilator amortizat, mișcarea este de asemenea oscilantă, dar amplitudinea oscilațiilor scade exponențial cu timpul)

18. Cum este definit decrementul logaritmic pentru o mișcare armonică amortizată pseudoperiodică?

$$D = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_1)} = \ln \left(\frac{A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi)}{A_0 e^{-\gamma(t+T_1)} \cos(\omega_1 (t+T_1) + \varphi)} \right) =$$

$$= \ln \frac{1}{e^{-\gamma T_1}} = \ln e^{\gamma T_1} = \gamma T_1$$

(Logaritmul raportului a două alungiri cu o diferență de timp T_1.)

19. Cum este definit timpul de înjumătățire pentru o mișcare armonică amortizată pseudoperiodică?

Timpul de înjumătățire este timpul în care amplitudinea scade la jumătate.

$$A_0 e^{-\gamma(t + T_{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{2} A_0 e^{-\gamma t} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\gamma} \left(= \tau \ln 2\right)$$

20. Calculați energia totală a oscilatorului amortizat. Particularizați pentru cazul amortizărilor mici, $\gamma \ll \omega_0$.

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A_0 \gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi) - A_0 \omega_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$$E_{total} = E_c + E_p$$

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A_0^2 e^{-2\gamma t} \left[\gamma^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi) + 2\gamma \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi) + \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi)\right]$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} \cdot A_0^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow E_{total} = \frac{m}{2} A_0^2 e^{-2\gamma t} \left[\gamma^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi) + 2\gamma \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi) + \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi)\right] + \frac{k}{2} A_0^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega_0^2 m$$

$$E_{total} = \frac{m}{2} A_0^2 e^{-2\gamma t} \left[\gamma^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi) + \omega_0^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi) - \gamma^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi) + 2\gamma \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi)\right]$$

$$E_{total} = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\gamma t} \left\{\gamma^2 \left[\underbrace{\cos^2(\omega_1 t + \varphi) - \sin^2(\omega_1 t + \varphi)}_{\cos 2(\omega_1 t + \varphi)}\right] + \omega_0^2 \left[\sin^2(\omega_1 t + \varphi) + \cos^2(\omega_1 t + \varphi)\right] + \underbrace{2\gamma \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) \cos(\omega_1 t + \varphi)}_{\sin 2(\omega_1 t + \varphi)}\right\}$$

$$E_{total} = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\gamma t} \left[\underbrace{\gamma^2 \cos 2(\omega_1 t + \varphi)}_{\substack{\gamma \ll \omega_0 \\ 0}} + \omega_0^2 + \underbrace{\gamma \omega_1 \sin 2(\omega_1 t + \varphi)}_{\substack{\gamma \ll \omega_0 \\ 0}}\right]$$

Scanat cu CamScanner

În cazul în care $\gamma << \omega_0$:

$$E_{total} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma t}$$

21. Să se afle amplitudinea inițială A_0 și faza inițială α a oscilațiilor amortizate, știind constantele m, k, b precum și condițiile inițiale: poziția x_0 și viteza v_0 la $t=0$.

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x(0)=x_0 \\ \dot{x}(0)=v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ \dot{x}(t) = -A_0 \gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \alpha) - \omega_1 A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = A_0 e^0 \cos(0 \cdot \omega_1 + \alpha) \\ \dot{x}(0) = -A_0 \gamma e^0 \cos(\omega_1 \cdot 0 + \alpha) - \omega_1 A_0 e^0 \sin(\omega_1 \cdot 0 + \alpha) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = A_0 \cos\alpha \\ v_0 = -A_0 \gamma \cos\alpha - \omega_1 A_0 \sin\alpha \;\; |:A_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{x_0}{A_0} \\ \frac{v_0}{A_0} = -\gamma \cdot \frac{x_0}{A_0} - \omega_1 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{x_0}{A_0} \\ \frac{v_0}{A_0} + \frac{\gamma x_0}{A_0} = -\omega_1 \sin\alpha \;\; |:(-\omega_1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{x_0}{A_0} \;\; \uparrow^2 \\ \sin\alpha = -\frac{v_0 + \gamma x_0}{A_0 \omega_1} \;\; \uparrow^2 \end{cases} (+) \Rightarrow \underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1} = \frac{x_0^2}{A_0^2} + \frac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{A_0^2 \omega_1^2} \Big/ \cdot A_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0^2 = x_0^2 + \frac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\omega_1^2} \Rightarrow \boxed{A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\omega_1^2}}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_0}{A_0} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\frac{x_0}{A_0}}$$

22. Un pendul gravitațional are lungimea l. Știind timpul de relaxare a oscilațiilor amortizate, să se calculeze decrementul logaritmic.

Timpul de relaxare: $\tau = \frac{1}{\gamma}$

Decrementul logaritmic: $D = \gamma T_1$

$$\left.\begin{array}{l}\tau = \frac{1}{\gamma}\\ D = \gamma T_1\end{array}\right\} \Rightarrow D = \frac{T_1}{\tau} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow D = \frac{2\pi}{\omega_1 \tau} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow D = \frac{2\pi}{\tau\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow D = \frac{2\pi}{\tau\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{1}{\tau^2}}} \quad \left(\Rightarrow D = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l}{g\tau^2}}}\right)$$

23. Un pendul simplu gravitațional oscilează amortizat, decrementul logaritmic fiind D. Știind că după un timp τ energia mecanică a pendulului a scăzut de "e" ori, să se afle lungimea pendulului.

$$E_{total} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma t}$$

$$e = \frac{E_{total_1}}{E_{total_2}} = \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma t}}{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma (t+\tau)}} = e^{2\gamma\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{2\gamma}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tau = \frac{1}{2\gamma}\\ D = \gamma T_1\end{array}\right\} \Rightarrow D = \frac{T_1}{2\tau} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow D = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}\omega_1 \tau} = \frac{\pi}{\omega_1 \tau} \Rightarrow$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$
$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

$$\Rightarrow D = \frac{\pi}{\tau\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{\pi}{\tau\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{1}{4\tau^2}}}$$

$$D = \frac{\pi}{\tau\sqrt{\frac{4g\tau^2 - l}{4\tau^2 l}}} \uparrow^2 \Rightarrow D^2 = \frac{\pi^2}{\frac{\tau^2(4g\tau^2 - l)}{4\tau^2 l}} \Rightarrow D^2 = \frac{4\pi^2 l}{4g\tau^2 - l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4D^2 g\tau^2 - D^2 l = 4\pi^2 l \Rightarrow 4D^2 g\tau^2 = l(4\pi^2 + D^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \frac{4D^2 g\tau^2}{4\pi^2 + D^2} \Rightarrow \boxed{l = \frac{4g\tau^2}{1 + \frac{4\pi^2}{D^2}}}$$

24. O particulă deplasată din poziția sa de echilibru cu A_0 este lăsată liber. Ce distanță parcurge particula până la oprirea sa completă, știind decrementul logaritmic D?

A_0, D

$S = ?$ (suma distanțelor)

$$x\left(t + \frac{T_1}{2}\right) = A_0 e^{-\gamma t} \cdot e^{-\gamma \frac{T_1}{2}} \cdot \cos\left(\omega_1\left(t + \frac{T_1}{2}\right) + \varphi\right) =$$

$$\omega_1 T_1 = \omega_1 \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \Big|:2 \Rightarrow \omega_1 \cdot \frac{T_1}{2} = \pi$$

$$= -\underbrace{A_0 e^{-\gamma t} \cdot e^{-\gamma \frac{T_1}{2}} \cos(\omega_1 t + \varphi)}_{x(t)} = -x(t) \cdot e^{-\gamma \frac{T_1}{2}}$$

(with $\gamma T_1 = D$ written above the exponent)

$$D = \gamma T_1 \Rightarrow x\left(t + \frac{T_1}{2}\right) = -x(t) \cdot e^{-\frac{D}{2}}$$

$$S = A_0 + 2A_0 \cdot e^{-\frac{D}{2}} + 2A_0 \cdot e^{-\frac{D}{2}} \cdot e^{-\frac{D}{2}} + \dots + 2A_0 \left(e^{-\frac{D}{2}}\right)^n =$$

$$= A_0 + 2A_0 \left(e^{-\frac{D}{2}} + \left(e^{-\frac{D}{2}}\right)^2 + \left(e^{-\frac{D}{2}}\right)^3 + \dots + \left(e^{-\frac{D}{2}}\right)^{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = A_0 + 2A_0 e^{-\frac{D}{2}} \frac{1 - \left(e^{-\frac{D}{2}}\right)^n}{1 - e^{-\frac{D}{2}}} \quad \left(e^{-\frac{D}{2}}\right)^n \to 0 \Rightarrow S = A_0 + 2A_0 \frac{e^{-\frac{D}{2}}}{1 - e^{-\frac{D}{2}}}$$

$$S = \frac{A_0\left(1 - e^{-\frac{D}{2}}\right) + 2A_0 e^{-\frac{D}{2}}}{1 - e^{-\frac{D}{2}}} = \frac{A_0 - A_0 e^{-\frac{D}{2}} + 2A_0 e^{-\frac{D}{2}}}{1 - e^{-\frac{D}{2}}}$$

$$= \frac{A_0\left(1 + e^{-\frac{D}{2}}\right)}{1 - e^{-\frac{D}{2}}}$$

25) Scrieți ecuația de mișcare pentru un oscilator armonic amortizat supus unei forțe de rezistență proporțională cu viteza (oscilații forțate). Denumiți mărimile folosite.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$\ddot{x}$ - accelerația corpului

$\dot{x}$ - viteza corpului

x - deplasarea corpului

γ - factorul de amortizare | $\gamma = \frac{b}{2m}$ → coeficient de ~~amortizare~~ rezistență; → masa corpului

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ → constanta de elasticitate a resortului

↳ pulsația naturală în absența amortizării

F_0 - amplitudinea forței externe

ω - pulsația forței externe

t - timpul

26) Scrieți soluția ecuației de mișcare pentru un oscilator armonic amortizat supus unei forțe de rezistență proporționale cu viteza (oscilații forțate). Discutați rezultatul obținut.

• Soluția unei ecuații diferențiale se exprimă astfel: $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$

$x_h(t)$ - soluția omogenă (când ecuația = 0)

$x_i(t)$ - soluția particulară (cerea de forma term. drept.)

Ex: (sol. particulară)

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = e^{x}(3x+2)$$

- Pt soluția particulară vom căuta ceva de forma:

$e^{x}(ax+b) = x_i$ (1)

- Se derivează expresia (1) până la ordinul max. din ecuație și se înlocuiesc derivatele
- x_i se și află prin identificare ($(A+B)x + 3A + B = x+1 \Rightarrow$ ..)

- În problema noastră

$x_h(t) = A_h e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta_h)$ (deoarece vom rămâne cu ec. de la osc. amortiz.)

- Sol particulară

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Căutăm ceva de forma $x_i(t) = A\cos(\omega t - \theta)$

$x_i(t) = A\cos(\omega t - \theta)$

$\dot{x}_i(t) = -A\omega\sin(\omega t - \theta)$

$\ddot{x}_i(t) = -A\omega^2\cos(\omega t - \theta)$

- Revenim în ecuație

$$\left[-A\omega^2\cos(\omega t-\theta)\right] + 2\gamma\left[-A\omega\sin(\omega t-\theta)\right] + \omega_0^2\left[A\cos(\omega t-\theta)\right] = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$-A\omega^2(\cos\omega t\cos\theta + \sin\omega t\sin\theta) + \cancel{2\gamma[-A\omega\sin\omega t}$

$+ 2\gamma\left[-A\omega(\sin\omega t\cos\theta - \cos\omega t\sin\theta)\right]$

$+ \omega_0^2 A(\cos\omega t\cos\theta + \sin\omega t\sin\theta) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$

$$\Rightarrow \left(-A\omega^2\cos\theta + 2\gamma A\omega\sin\theta + \omega_0^2 A\cos\theta\right)\cos\omega t +$$

$$+\left(-A\omega^2\sin\theta - 2\gamma A\omega\cos\theta + \omega_0 A^2\sin\theta\right)\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

• Identificarea termenilor

$$\Rightarrow \begin{cases} -A\omega^2\cos\theta + 2\gamma A\omega\sin\theta + \omega_0^2 A\cos\theta = \dfrac{F_0}{m} \quad /:A \\ -A\omega^2\sin\theta - 2\gamma A\omega\cos\theta + \omega_0^2 A^2\sin\theta = 0 \quad /:A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\omega^2\cos\theta + 2\gamma\omega\sin\theta + \omega_0^2\cos\theta = \dfrac{F_0}{m\cdot A} \\ -\omega^2\sin\theta - 2\gamma\omega\cos\theta + \omega_0^2\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2-\omega^2)\cos\theta + 2\gamma\omega\sin\theta = \dfrac{F_0}{m\cdot A} \\ (\omega_0^2-\omega^2)\sin\theta - 2\gamma\omega\cos\theta = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2-\omega^2)\sin\theta = 2\gamma\omega\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$\Rightarrow tg\theta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

• Ne dorim să scăpăm de $\sin\theta$ și de $\cos\theta$ din cele două ecuații pe care le-am găsit.

• Ne folosim de formulele: $\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{tg\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}} \end{cases}$

$$\bullet\ \sin\theta = \frac{\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}{\sqrt{1+\frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}}} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_0^2+\omega^2+4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}}}$$

$$= \frac{2\gamma\omega}{\cancel{\omega_0^2-\omega^2}}\cdot\frac{\cancel{\omega_0^2-\omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\gamma^2\omega^2}} = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\gamma^2\omega^2}}$$

$(\omega_0 > \omega)$

$$\bullet\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}}} = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\gamma^2\omega^2}}$$

• Ne intoarcem in prima ecuatie

$$(\omega_0^2-\omega^2)\cdot\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} + 2\gamma\omega\cdot\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0}{mA}$$

$$\Rightarrow \frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0}{m\cdot A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0}{m\cdot A} \Rightarrow A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} = A(\omega)$$

$$\Rightarrow x_i(t) = A(\omega)\cos(\omega t-\theta)$$

$$x(t) = x_h(t)+x_i(t) = A_h e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\theta_h) + A(\omega)\cos(\omega t-\theta)$$

27) Găsiți frecvența de rezonanță și amplitudinea la rezonanță pentru un oscilator armonic amortizat supus unei forțe de rezistență proporționale cu viteza (oscilații forțate). Discutați rezultatul. Se cunoaște dependența amplitudinii de frecvență:

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

• La rezonanță, amplitudinea atinge valoarea maximă. Pentru aflarea maximului unei funcții va trebui să calculăm prima derivată a acesteia și să o egalăm cu 0.

• Rescriem $A(\omega)$ pentru a fi mai ușor de derivat

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\cdot\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$A'(\omega) = \frac{dA(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{F_0}{m}\cdot\left[-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\omega\gamma^2\right]\cdot\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{F_0}{m}\cdot\left[-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\omega\gamma^2\right]}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

• Egalăm numărătorul cu 0

$$A'(\omega)=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot\frac{F_0}{m}\cdot\left[-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\omega\gamma^2\right]=0$$

$$\Rightarrow -4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\omega\gamma^2=0 \;/:4$$

$$\cancel{\Rightarrow \omega(\omega_0^2-\omega^2)}$$

$$\Rightarrow \omega(-\omega_0^2+\omega^2+2\gamma^2)=0$$

$$\Rightarrow \omega_{rez}^2+2\gamma^2-\omega_0^2=0 \Rightarrow \omega_{rez}=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$$

• La paranteză:

- dacă $\omega\to\infty \Rightarrow A(\omega)=\frac{F_0}{m\cdot\infty}\to 0$

- dacă $\omega\to-\infty \Rightarrow A(\omega)=\frac{F_0}{m\cdot\infty}\to 0$

$A(\omega)>0,\ \forall\,\omega\in\mathbb{R}$

• Deci $\omega_{rez}=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$ ~~este un fel de maxim~~ reprezintă ω pentru care $A(\omega)=\max$

• Aflăm amplitudinea la rezonanță

$$A(\omega_{rez})=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_0^2+2\gamma^2)^2+4\gamma^2(\omega_0^2-2\gamma^2)}}=$$

$$=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\gamma^4+4\gamma^2\omega^2-8\gamma^4}}$$

$$=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\gamma^2(\gamma^2+\omega^2-2\gamma^2)}}$$

$$=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{2\gamma\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}$$

28) Găsiți frecvența de rezonanță a vitezelor pentru un oscilator armonic amortizat supus unei forțe de rezistență proporționale cu viteza (oscilații forțate). Discutați rezultatul. Se cunoaște dependența amplitudinii de frecvență:

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \theta)$$

$$v(t) = -\omega A(\omega)\sin(\omega t - \theta) = \dot{x}(t)$$

• Avem nevoie de v_{max}

$$v_{max} = -\omega A(\omega) = -\omega \cdot \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

• Vom proceda la fel ca în cazul exercițiului 27) pentru a afla ω_{rez}.

$$\frac{d v_{max}}{d\omega} = -\omega \cdot \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{F_0}{m}\right)\cdot\frac{-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega\gamma^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$= -\frac{F_0}{m}\left[\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} - \frac{\omega}{2}\cdot\frac{\left[-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega\gamma^2\right]}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]\cdot\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\right]$$

$$\frac{d\, v_{max}}{d\omega} = 0 \Rightarrow$$ (Aducem la acelaşi numitor şi egalăm numărătorul cu 0)

$$\Rightarrow 2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \cancel{8\gamma^2\omega^2} + 4\omega^2(\omega_0^2-\omega^2) - \cancel{8\gamma^2\omega^2} = 0$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)\left[2\omega_0^2 - 2\omega^2 + 4\omega^2\right] = 0$$

$$2(\omega_0^2-\omega^2)\left[\omega_0^2+\omega^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{rez} = \omega_0$$

$$v_{rez} = -\omega_0 \cdot \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\cancel{\omega_0^2}-\cancel{\omega_0^2})^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}} = -\cancel{\omega_0} \cdot \frac{\frac{F_0}{m}}{2\gamma\cancel{\omega_0}} =$$

$$= -\frac{F_0}{2m\gamma}$$