OBS

a) $p: V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$ liniară

$$p(v) = p(\underset{V_1}{\underset{\cap}{v_1}} + \underset{V_2}{\underset{\cap}{v_2}}) = v_1$$ proiecția pe V_1

b) $s: V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$.

$s = 2p - id_V$ simetria față de V_1.

$$s(\underset{V_1}{\underset{\cap}{v_1}} + \underset{V_2}{\underset{\cap}{v_2}}) = v_1 - v_2$$

② $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

a) $[f]_{\mathcal{R},\mathcal{R}}$, $\mathcal{R} = \{e_1' = e_1 + e_2 + e_3, e_2' = e_1 + e_3, e_3' = e_1 + e_2\}$

b) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f \oplus W$

$s: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ simetria față de W

$s(0,1,1) = ?$

c) $\mathbb{R}^3 = f(V') \oplus U$

$V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \right\}$

$p: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ proiecția pe $f(V')$

$p(2,-1,3) = ?$

③ $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, $f(P) = P'$

a) $[f]_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} = ?$ $\mathcal{R} = \{X^2, 1+X, 2-X\}$ reper în $\mathbb{R}_2[X]$

$\mathcal{R}' = \{X, 1+3X\}$ —"— $\mathbb{R}_1[X]$.

b) $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Ker} f \oplus W$

$p_1: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ proiecția pe Ker f

$p_2: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ —"— W

$p_1(1 - X + 3X^2)$, $p_2(2X + X^2) = ?$

④ $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2^s(\mathbb{R})$, $f(A) = A + A^T$

a) $[f]_{\mathcal{R}_0,\mathcal{R}_0'}$ $\mathcal{R}_0 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ reper în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\mathcal{R}_0' = \{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}\}$ reper în $\mathcal{M}_2^s(\mathbb{R})$

b) Ker f, Im f

c) $f(V) = ?$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

• $f \in End(V)$

$x \neq 0_V$ s.n. <u>vector propriu</u> $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ a.î. $f(x) = \lambda x$

λ = valoare proprie.

$V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$ subspațiu propriu.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

• valorile proprii - răd. din $\mathbb{K}$ ale polin. caracteristic

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k} = 0$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ = valori proprii distincte.

$m_1, \ldots, m_k$ = multiplicități.

(T) $\exists$ un reper $\mathcal{R}$ în V a.î. $[f]_{\mathcal{R},\mathcal{R}}$ diagonală $\Leftrightarrow$

1) $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$

2) $\dim V_{\lambda_i} = m_i, \forall i = \overline{1,k}$

(5) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x) = (x_2 - x_3 + x_4, x_2 - x_3 + x_4, x_4, x_4)$

a) Să se afle valorile proprii

b) Precizați care sunt subspațiile proprii

c) $\exists$ un reper $\mathcal{R}$ în $\mathbb{R}^4$ a.î. $[f]_{\mathcal{R},\mathcal{R}}$ este diagonală?

(6) Fie $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ liniară

$$A = [f]_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Să se afle valorile proprii și subsp. propriu coresp.

b) $U = \langle \{e_1 + 2e_2, e_2 + e_3 + 2e_4\} \rangle$ Să se arate că U este subsp. invariant al lui f i.e. $f(U) \subset U$.

(7) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_2, x_3, 2x_1 - 5x_2 + 4x_3)$

Să se arate că f nu este un endomorfism diagonalizabil.

§1. Endomorfisme. Diagonalizare

① Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^3$

a) $\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) = e_2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(e_1) = e_3 \\ f(e_2) = e_2 \\ f(e_3) = e_1 \end{cases}$

Precizați dacă există câte un reper R în $\mathbb{R}^3$ ai $[f]_{R,R}$ este matrice diagonală.

② Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^3$

a) $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

Precizați dacă $\exists$ un reper R în $\mathbb{R}^3$ ai $[f]_{R,R}$ este matrice diagonală. În caz afirmativ, să se det acesta.

(4) Fie șirul Fibonacci $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

a) Determinați matricea A ai

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

b) Diagonalizați A și calculați A^n.

c) $f_n = ?$

(5) $f \in End(\mathbb{R}^3)$

Dacă $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ sunt valorile proprii și $v_1 = (-3,2,1)$, $v_2 = (-2,1,0)$, $v_3 = (-6,3,1)$ sunt vectorii proprii coresp, atunci care este matricea $A = [f]_{R_0,R_0}$?

(6) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (4x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 4x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 4x_3)$

Precizați dacă $\exists$ un reper R în rap. cu care $[f]_{R,R}$ este diagonală.